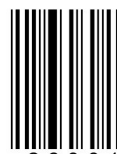


ISSN 2409-3777



9 772409 377007



2 6 0 0 1

# ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага  
ўніверсітэта  
імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

*Выдаецца са снежня 1998 года*

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ  
(матэматыка, фізіка, біялогія)

*Выходзіць два разы ў год*

**1 (67)**  
**2026**

**Галоўная рэдакцыйная калегія:**

д-р гіст. навук прафесар Д. С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)  
д-р экан. навук прафесар Н. У. Макоўская (нам. галоўнага рэдактара)  
д-р гіст. навук прафесар Я. Р. Рьер (нам. галоўнага рэдактара)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. В. Марчанка (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)  
канд. гіст. навук А. І. Галавач (адказны сакратар)

**Матэматыка, фізіка:**

д-р фіз.-мат. навук прафесар В. А. Еравенка (Мінск)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар В. В. Беняш-Крывец (Мінск)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар В. М. Лапцінскі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар М. М. Дабравольскі (Тула)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. Б. Соцкі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. М. Гальмак (Магілёў)  
д-р тэхнічных навук А. С. Турцэвіч (Мінск)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. М. Сідарэнка (Магілёў)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А. В. Цімошчанка (Магілёў)

**Біялогія:**

д-р біял. навук прафесар Н. П. Максімава (Мінск)  
д-р біял. навук дацэнт А. Д. Навумаў (Віцебск)  
д-р біял. навук дацэнт С. У. Лазарэвіч (Горкі)  
канд. біял. навук дацэнт А. В. Поварава (Магілёў)  
канд. біял. навук дацэнт М. М. Дайнэка (Гомель)  
канд. біял. навук дацэнт І. А. Жарына (Магілёў)  
д-р мед. навук дацэнт Н. І. Сімчанка (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс “Веснік Магілёўскага дзяржаўнага  
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова” ўключаны ў РИНЦ  
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),  
ліцэнзійны дагавор № 811-12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:  
212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,  
vesnik\_mdu@mail.ru

**MOGILEV STATE  
A. KULESHOV UNIVERSITY  
BULLETIN**

THEORETICAL-SCIENTIFIC JOURNAL

*Founded in December 1998*

Series B. NATURAL SCIENCES  
(Mathematics, Physics, Biology)

*Published twice per year*

**$\frac{1 (67)}{2026}$**

### **Editorial Board:**

Lavrinovich D. S., Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor,  
Makovskaya N. V., Deputy Chief Editor, Doctor of Economic Sciences, Professor  
Riyer Y. G., Deputy Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor  
Marchenko I. V., Chairman of the Editorial Committee (Series B),  
Ph.D., Associate Professor  
Golovach E. I., Executive Secretary of the Editorial Board, Ph.D.

### **Mathematics, Physics:**

Yerovenko V. A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)  
Benyash-Krivets V. V., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)  
Laptinsky V. N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)  
Dobrovolsky N. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Tula)  
Sotsky A. B., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)  
Galmak A. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)  
Turtsevich A. S., Doctor of Technical Sciences (Minsk)  
Sidorenko I. N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)  
Timoschenko E. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)

### **Biology:**

Maksimova N. P., Doctor of Biological Sciences, Professor (Minsk)  
Naumov A. D., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Vitebsk)  
Lazarevich S. V., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Gorky)  
Povorova O. V., Ph.D. (Mogilev)  
Daineko N. M., Ph.D., Associate Professor (Gomel)  
Zharina I. A., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)  
Simchenko N. I., Doctor of Medical Sciences, Associate Professor (Mogilev)

*Theoretical-scientific journal*  
*“Mogilev State A. Kuleshov University Bulletin”*  
*is included in the bibliographic database*  
*“Russian Science Citation Index”,*  
*License agreement № 811-12/2014*

The editorial board address:  
212022, Mogilev, Kosmonavtov Str., 1,  
vesnik\_mdu@mail.ru

## 3 М Е С Т

<b>СИДОРЕНКО И. Н.</b> Построение квадратичных систем с предельными циклами «нормального размера» в конфигурациях (2,1) и (3,1) .....	7
<b>TIMOSCHENKO E. V., YUREVICH V. A., KHOMCNENKO A. V., UREVICH YU. V.</b> Relaxation structure of light reflection by a low-dimensional array of resonant quantum emitters .....	18
<b>TIMOSCHENKO E. V.</b> Spectral shift of laser radiation in structures with quantum-size effects under resonant self-focusing conditions .....	32
<b>RUNCHEN GAO, FAXIN SHEN, SPIRIDONOV A. A.</b> Design and flight performance analysis of zengzhang-1 3d-printed sounding rocket .....	40
<b>ДАЙНЕКО Н. М., КОНЦЕВАЯ И. И., ТИМОФЕЕВ С. Ф., ДАЙНЕКО Д. В., АЙГЛОВА Е. А.</b> Влияние биопрепарата Грамисил в посевах озимой пшеницы на микробоценоз почвы .....	51
<b>КАРПЕНКО Н. И., ТИМОФЕЕВ С. Ф.</b> Влияние биологических особенностей травостоя и плотности радиоактивного загрязнения на параметры перехода $^{137}\text{Cs}$ в молочно-мясную продукцию КРС .....	61
<b>ПОВОРОВА О. В., ЛИВИНСКАЯ В. А., ТКАЧЁВ И. И.</b> Анатомо-морфологические особенности межклетников устьичного аппарата листьев <i>Picea abies</i> в условиях урбанизированной среды обитания .....	72

## CONTENTS

<b>SIDORENKO I. N.</b> Construction of quadratic systems with limit cycle of “normal size” in (2,1) and (3,1) configurations .....	7
<b>TIMOSCHENKO E. V., YUREVICH V. A., KHOMCNENKO A. V., UREVICH YU. V.</b> Relaxation structure of light reflection by a low-dimensional array of resonant quantum emitters .....	18
<b>TIMOSCHENKO E. V.</b> Spectral shift of laser radiation in structures with quantum-size effects under resonant self-focusing conditions .....	32
<b>RUNCHEN GAO, FAXIN SHEN, SPIRIDONOV A. A.</b> Design and flight performance analysis of zengzhang-1 3d-printed sounding rocket .....	40
<b>DAINEKO N. M., KONTSEVAYA I. I., TIMOFEEV S. F., DAINKO D. V., AIGLOVA E. A.</b> Influence of the biopreparation gramisil in winter wheat crops on agronomically valuable groups of soil microorganisms.....	51
<b>KARPENKA M. I., TSIMAFYEYU S. F.</b> Influence of biological characteristics of grass stand and density of radioactive contamination on the parameters of $^{137}\text{Cs}$ transition into dairy and meat products of cattle.....	61
<b>POVARAVA A. V., LIVINSKAYA V. A., TKACHOU I. I.</b> Anatomico-morphological features of the intercellular structure of the <i>Picea abies</i> leaves in an urbanized environment .....	72

# МАТЕМАТИКА, ФІЗИКА, БІОЛОГІЯ

УДК 517.925.42

## ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЦИКЛАМИ «НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА» В КОНФИГУРАЦИЯХ (2,1) И (3,1)

**И. Н. Сидоренко**

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

*В статье рассматривается конструктивный подход к построению квадратичных систем дифференциальных уравнений, обладающих распределениями предельных циклов типов (2,1) и (3,1). Предложенный метод основан на использовании прогнозной функции Андронова–Хопфа и анализе кривых двукратных предельных циклов в пространстве параметров системы. Полученные системы демонстрируют существование предельных циклов «нормального размера». Для строгого обоснования точного числа предельных циклов применяется метод функций Дюлака-Черкаса. В работе приведены конкретные примеры квадратичных систем с различными конфигурациями особых точек, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма.*

**Ключевые слова:** квадратичные системы, предельные циклы «нормального размера», бифуркация Хопфа, функция Дюлака-Черкаса, система прогноза.

### Введение

Исследование предельных циклов автономных систем дифференциальных уравнений второго порядка остаётся одной из центральных задач качественной теории динамических систем. Особый интерес в этом контексте представляют квадратичные системы на плоскости, которые, с одной стороны, обладают сравнительно простой аналитической структурой, а с другой – демонстрируют богатое бифуркационное поведение. Вопрос о возможном числе и конфигурации предельных циклов таких систем тесно связан с классической проблемой Гильберта и до настоящего времени далёк от окончательного разрешения.

Как следует из известных результатов, квадратичные системы могут иметь предельные циклы лишь вокруг особых точек фокусного типа, причем число таких фокусов в конечной части фазовой плоскости не превышает двух. Это существенно ограничивает возможные распределения предельных циклов и приводит к конечному списку допустимых конфигураций. К настоящему времени построены примеры систем, реализующих распределения вида  $n, (n_1, n_2)$ , где  $n_1 + n_2 > 0$ , включая случаи максимальных значений  $n$ . Однако большинство известных конструкций характеризуются наличием малоамплитудных предельных циклов, что затрудняет их как геометрическую интерпретацию, так и применение численных и конструктивных методов анализа.

© Сидоренко И. Н., 2026

В ряде предыдущих работ [1, 2, 3] были предложены методы построения квадратичных систем и систем Льенара с предельными циклами так называемого «нормального размера» [4], то есть достаточно крупными и хорошо разделёнными на фазовой плоскости.

Целью настоящей работы является распространение разработанных ранее методов прогноза и построения систем с заданным распределением предельных циклов для систем Льенара для построения квадратичных систем дифференциальных уравнений с распределениями предельных циклов типов (2,1) и (3,1), обладающих циклами «нормального размера». Основу предлагаемого подхода составляет использование прогнозной функции Андронова–Хопфа в сочетании с анализом кривых двукратных предельных циклов в пространстве параметров. Такой метод позволяет не только предсказать существование нескольких циклов, но и обеспечить их надёжное разделение на фазовой плоскости.

Для строгого обоснования точного числа предельных циклов в построенных системах применяется метод функций Дюлака–Черкаса. Особое внимание уделяется выбору минимальной степени функции Дюлака, достаточной для анализа всей области существования циклов, что существенно повышает вычислительную эффективность метода.

#### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ [1]

В статье рассматривается каноническое семейство квадратичных систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 1 + xy, \quad \frac{dy}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + ay^2, \quad (1)$$

при выполнении условий:

$$a_{00} = a_{01} + a_{11} - a_{10} - a_{20} - a,$$

$$L = 2a - a_{01} - a_{10} - 2a_{20} > 0, \quad (a_{11} + a_{01} - 2a - 1)^2 - 4L < 0, \quad (2)$$

$$a_{10} = -a_{20}(x_0 + 1) - a_{01}/x_0 + a(x_0 + 1)/x_0^2, \quad x_0 \neq 0.$$

При указанных ограничениях система (1) имеет фокус  $A(1, -1)$  и особую точку  $B(x_0, -1/x_0)$ . Кроме того, в конечной части фазовой плоскости могут существовать ещё две особые точки, абсциссы которых определяются уравнением

$$x^2 - \left( \frac{a_{01}}{a_{20}x_0} + \frac{a(x_0 + 1)}{a_{20}x_0^2} \right) x + \frac{a}{a_{20}x_0} = 0,$$

при условии, что его решения отличны от 1 и  $x_0$  и

$$u \equiv \left( -a_{01}x_0 + a(x_0 + 1)^2 \right) - 4aa_{20}x_0^3 > 0.$$

В зависимости от значений параметров система может обладать различным числом конечных и бесконечно удалённых особых точек. В частности, при

$$0 < a < 1 \text{ и } u < 0$$

в бесконечности реализуется простое седло в направлении оси  $Oy$ , тогда как при других значениях параметра  $a$  соответствующая особая точка имеет узловой характер. Тип системы (1) будем классифицировать по совокупности конечных и бесконечных особых точек. Например, система  $2F + 1S_\infty$  имеет в конечной части плоскости два узла и седло на бесконечности.

Согласно известным результатам качественной теории квадратичных систем [3], предельные циклы могут окружать только особые точки фокусного типа, причём каждая такая система допускает не более двух фокусов в конечной части плоскости. Это обстоятельство приводит к ограниченному набору возможных распределений предельных циклов, среди которых в настоящее время реализованы конфигурации:

$$(a) 1, (1,0); (b) 2, (2,0); (c) 3, (3,0); (d) (1,1); (e) (2,1); (f) (3,1). \quad (3)$$

При этом примеры с наибольшим числом циклов, как правило, соответствуют случаям с малоамплитудными предельными циклами.

В настоящей работе основной интерес представляет получение систем с распределениями (2,1) и (3, 1), для которых предельные циклы имеют нормальный масштаб. Для этого удобно воспользоваться преобразованиями, сохраняющими число и взаимное расположение циклов в рассматриваемой области фазовой плоскости. В частности, сжатие по оси  $Oy$  вида  $Y = y\omega$  позволяет нормировать вертикальный размер циклов, не нарушая их топологической структуры. Соответствующая система (1) при данном преобразовании примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega + xY, \\ \frac{dY}{dt} &= \omega^2 (a_{20}(x^2 - 1) + a_{10}(x - 1)) + \omega (a_{11}(xY + \omega) + a_{01}(Y + \omega)) + a(Y^2 - \omega^2). \end{aligned} \quad (4)$$

После последовательных замен переменных  $x = 1/\tilde{x}$ ,  $Y = \tilde{x}^{(1-a)}\tilde{y} - \tilde{x}\omega$  и масштабирования времени система (4) приводится к системе Льенара, которая после замены  $\tilde{x}$  на  $x$ ,  $\tilde{y}$  на  $y$  имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \quad (5)$$

где  $g(x) = \omega^2 P_4(x) x^{2a-3}$ ,  $f(x) = \omega P_2(x) x^{a-2}$   $x > 0$ ,

$$P_4(x) = a_{20} + a_{10}x + (a_{00} - a_{11})x^2 - a_{01}x^3 + ax^4, \quad P_2(x) = a_{11} + a_{01}x - (2a + 1)x^2,$$

$$G(x) = \int_1^x g(t) dt = \tilde{P}_4(x) x^{2(a-1)} - \tilde{P}_4(1), \quad F(x) = \int_1^x f(t) dt = \tilde{P}_2(x) x^{a-1} - \tilde{P}_2(1).$$

При этом особая точка  $A(1, -1)$  системы (1) переходит в особую точку  $A_0(1, 0)$  системы (5). При исследовании предельных циклов системы (1), окружающих эту особую точку, достаточно ограничиться полуплоскостью  $x > 0$ , поскольку прямая  $x = 0$  является трансверсалью векторного поля системы и не пересекается замкнутыми кривыми.

### СИСТЕМЫ ТИПА $2F+1S_\infty$

Рассматриваются системы (1) типа  $2F+1S_\infty$ . Для того чтобы особая точка  $B\left(x_0, -\frac{1}{x_0}\right)$  была фокусом, необходимо и достаточно, чтобы  $x_0 < 0$ ,  $x_0 < 0$ . Таким образом, изучение предельных циклов системы (1), вокруг особой точки  $A(1, -1)$  сводится к изучению предельных циклов системы Льенара (5) вокруг особой точки  $A_0(1, 0)$  в полуплоскости  $x > 0$ .

Для систем рассматриваемого класса существенную роль играет параметр  $a_{11}$ , который при фиксированных остальных коэффициентах осуществляет вращение векторного поля. Это позволяет ввести прогнозную функцию Андронова-Хопфа  $a_{11} = ANP(\xi)$  [5], связывающую значение параметра  $a_{11}$  с координатой  $(\xi, 0)$  точки пересечения соответствующего предельного цикла с осью  $Ox$ .

Прогнозная функция определяется на некотором интервале  $(\xi_1, \xi_2)$ , где  $\xi_1, \xi_2$  – абсциссы ближайших к  $\xi = 1$  особых точек системы (5),  $0 < \xi_1 < 1 < \xi_2$ . Если особой точки слева от  $\xi = 1$ ,  $\xi > 0$  нет, то полагаем  $\xi_1 = 0$ , если ее нет справа от  $\xi = 1$ , то полагаем  $\xi_2 = +\infty$ . Прогнозная функция Андронова-Хопфа  $a_{11} = ANP(\xi)$  во многих случаях дает неплохое приближение функции  $a_{11} = AN(\xi)$  и определяется системой уравнений

$$AG \equiv \sum_{k=0}^4 A_k \xi^k = 0, \quad AF \equiv \sum_{k=2}^4 B_k \xi^{k-2} = 0, \quad (6)$$

где  $A_0 = a_{20}(z^{2a-2} - 1)/(2a - 2)$ ,  $A_1 = a_{10}(z^{2a-1} - 1)/(2a - 1)$ ,

$A_2 = (a_{01} - a_{10} - a_{20} - a)(z^{2a} - 1)/(2a)$ ,  $A_3 = -a_{01}(z^{2a+1} - 1)/(2a + 1)$ ,

$A_4 = a(z^{2(a+1)} - 1)/(2(a + 1))$ ,  $B_2 = a_{11}(z^a - 1)/(a - 1)$ ,

$B_3 = a_{01}(z^a - 1)/a$ ,  $B_4 = -(2a + 1)(z^{a+1} - 1)/(a + 1)$ ,

$z = \eta/\xi$ ,  $v = z^a$ ,  $\xi_1 < \eta < 1$ ,  $1 < \xi < \xi_2$ ,  $\xi_1/\xi_2 < z < 1$ .

Из рассмотрения исключаются параметра  $a = 0, \pm 1/2, \pm 1$ , при которых формулы (6) теряют смысл.

В пространстве параметров  $(a_{01}, a_{11})$  прогнозная функция позволяет построить кривую двукратных предельных циклов, соответствующую значениям параметров, при которых происходит слияние двух циклов в двукратный.

$$f(\xi)g(\eta) - f(\eta)g(\xi) = 0, \quad g(\xi) = P_4(\xi)\xi^{2a-3}, \quad f(\xi) = P_2(\xi)\xi^{a-2}. \quad (7)$$

Анализ взаимного расположения этой кривой и прямой негрубых фокусов позволяет выделить области существования двух или трёх предельных циклов, что соответствует количеству нулей прогнозной функции Андронова-Хопфа.

**Алгоритм 1 (Построения квадратичных систем (2) с тремя предельными циклами, окружающими фокус  $A(1, -1)$ ):**

1) по заданной конфигурации особых точек выбираем такие значения параметров  $a_{20}, a, x_0$ , которые обеспечивают существование прогнозной области с тремя предельными циклами;

2) строим прогнозную функцию Андронова-Хопфа  $a_{11} = AH(\xi, a_{01}^0)$ , которая определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} AG &\equiv \sum_{k=0}^4 A_k \xi^k = 0, \\ AF &\equiv \sum_{k=2}^4 B_k \xi^{k-2} = 0, \\ f(\xi)g(\eta) - f(\eta)g(\xi) &= 0, \\ g(\xi) &= P_4(\xi)\xi^{2a-3}, \\ f(\xi) &= P_2(\xi)\xi^{a-2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $A_0 = a_{20}(z^{2a-2} - 1)/(2a - 2)$ ,  $A_1 = a_{10}(z^{2a-1} - 1)/(2a - 1)$ ,  
 $A_2 = (a_{01} - a_{10} - a_{20} - a)(z^{2a} - 1)/(2a)$ ,  $A_3 = -a_{01}(z^{2a+1} - 1)/(2a + 1)$ ,  
 $A_4 = a(z^{2(a+1)} - 1)/(2(a + 1))$ ,  $B_2 = a_{11}(z^a - 1)/(a - 1)$ ,  
 $B_3 = a_{01}(z^a - 1)/a$ ,  $B_4 = -(2a + 1)(z^{a+1} - 1)/(a + 1)$ ,  
 $z = \eta/\xi$ ,  $v = z^a$ ,  $\xi_1 < \eta < 1$ ,  $1 < \xi < \xi_2$ ,  $\xi_1/\xi_2 < z < 1$ .

3) определяем параметры  $a_{01}^0, a_{11}^0$ , для которых прогнозная функция  $a_{11} = AHr(\xi)$  имеет три (или два) нуля, что соответствует количеству предельных циклов в системе (1), окружающих особую точку  $A(1, -1)$ ;

4) проверяем справедливость прогноза.

**Замечание:** Прогнозная область с тремя предельными циклами существует не для всех значений параметров  $a, a_{20}, x_0$ .

Известно [3], что система (1) типа  $2F + 1S_\infty$  может иметь трехкратный фокус  $A$  лишь при  $1/3 < a < 1$ . Итак, выбирая значения  $a$  из указанного интервала и находя описанным выше алгоритмом систему (1), мы найдем систему с тремя циклами вокруг фокуса  $A(1, -1)$ , для проверки существования хотя бы одного предельного цикла вокруг фокуса  $B(x_0, -1/x_0)$  достаточно проверить устойчивость этой особой точки, если фокус устойчив и траектории системы (1) пересекают трансверсаль  $x = 0$  при увеличении  $t$ , выходя из области  $x < 0$ , заключаем, что система (2) имеет, по крайней мере, один предельный цикл вокруг фокуса  $B$ .

Для нахождения квадратичных систем (1) с распределением (2,1) предельных циклов поступаем как и в случае распределения (3,1), только необходимо искать область с двумя предельными циклами. Эту область можно найти двумя способами. Первый опирается на тот факт, что область с двумя предельными циклами является смежной к области с тремя предельными циклами. Второй способ заключается в том, что область с тремя предельными циклами существует не при всех значениях параметров, выбирая параметры таким образом, чтобы у кривой двукратных предельных циклов не существовала точки возврата. Тогда искомая область с двумя предельными циклами расположена между кривой двукратных предельных циклов и прямой негрубости фокуса  $A(1, -1)$ .

Рассмотрим систему (1) с конфигурацией  $2F + 1S_\infty$  особых точек, имеющую три предельных цикла вокруг фокуса  $A(1, -1)$ . Так как она имеет единственную особую точку в бесконечности – седло в направлении оси  $Oy$ , то выполнены условия  $0 < a < 1$ ,  $a_{20} < 0$ . Из анализа фокусных величин негрубого фокуса  $A(1, -1)$  [2] следует, что система (1) при выполнении указанных условий может иметь трехкратный фокус лишь при  $1/3 < a < 1$  (как показывает практика  $9/23 < a < 1$ ). Исследования [1, 3, 5] показали, что точка возврата прогнозной кривой двукратных предельных циклов, соответствующая трехкратному предельному циклу, зависит также и от параметров  $a_{20}$ ,  $x_0$ . Так, например, при  $x_0 = -1$  для любого значения  $a$  существует некоторое значение параметра  $a_{20}^0$ , такое, что при всех  $a_{20} < a_{20}^0$  у прогнозной кривой двукратных предельных циклов не существует точки возврата, т. е. при таких значениях параметров  $a$ ,  $x_0$ ,  $a_{20}$  не существует области с тремя предельными циклами.

Отметим также, что при больших по модулю отрицательных значениях  $a_{20}$  предельные циклы системы приобретают форму правильных окружностей, в то время как при меньших по модулю отрицательных значениях параметра  $a_{20}$  они всё более напоминают релаксационные циклы (вытянутые по горизонтали и приплюснутые по вертикали).

### **ПРИМЕРЫ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ (3,1) ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ**

Воспользуемся алгоритмом 1 и построим квадратичные системы (1).

**Пример 1.** Выберем  $a = 18/23$ ,  $x_0 = -4$ . Выберем  $a_{20} = -40$ , далее поступая по описанному выше алгоритму 1, строим область трех предельных циклов (рисунок 1).

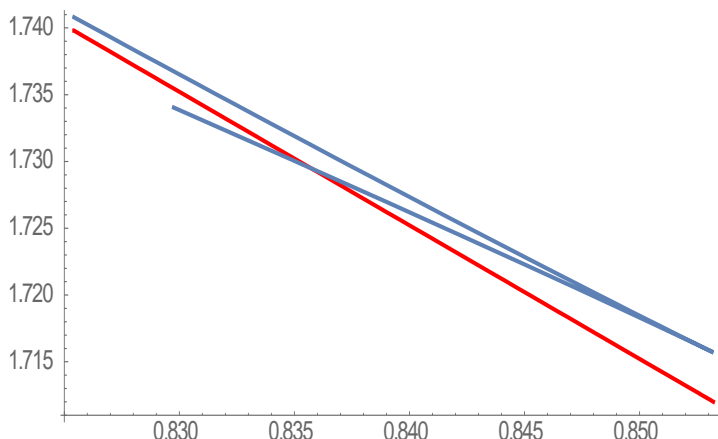


Рисунок 1 – Прогнозная область с тремя предельными циклами

Далее выбираем значения параметров  $a_{01}$ ,  $a_{11}$ , таким образом, чтобы прогнозная функция Андронова-Хопфа (рисунок 2) имела три нуля. В нашем случае можно взять  $a_{01} = 0.835$ ,  $a_{11} = 1.73005$ .

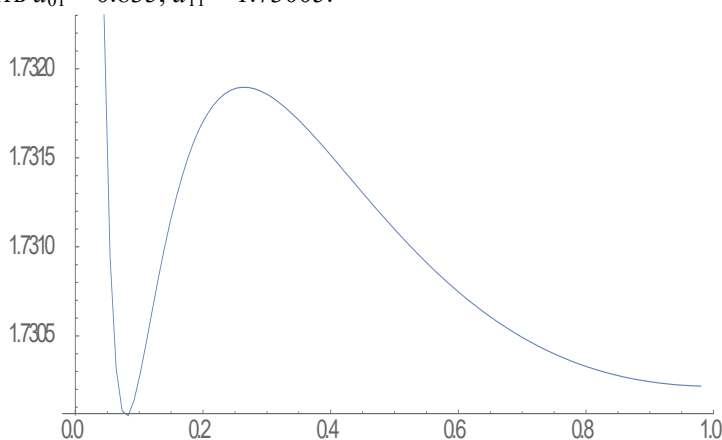


Рисунок 2 – Прогнозная функция Андронова-Хопфа

Учитывая, что фокус  $B(-3, 1/3)$  системы (1) с выбранными параметрами устойчив, а ее траектории пересекают трансверсаль  $x = 0$  при увеличении  $t$ , выходя из области  $x < 0$ , заключаем, что система (1) имеет по крайней мере один предельный цикл вокруг фокуса  $B$ . Итак, система (3.1) при  $a = 18/23$ ,  $a_{20} = -40$ ,  $x_0 = -4$ ,  $a_{01} = 0.835$ ,  $a_{11} = 1.73005$  имеет по крайней мере три предельных цикла вокруг фокуса  $A(1, -1)$  и один – вокруг фокуса  $B(-3, 1/3)$ .

Для обоснования точности полученной оценки построим для данной системы функцию Дюлака-Черкаса.

**Теорема 1.** Система (1) при  $a = 18/23$ ,  $a_{20} = -40$ ,  $x_0 = -4$ ,  $a_{01} = 0.835$ ,  $a_{11} = 1.73005$  имеет три предельных цикла вокруг фокуса  $A(1, -1)$  и один – вокруг фокуса  $B(-3, 1/3)$ .

**Доказательство.** Обоснование теоремы проведем при помощи построения функции Дюлака, для этого перейдем от системы (1) с заданными значениями параметров к системе Льенара (5), чтобы нормировать предельные циклы по их длине вдоль оси  $Oy$ , введем замену  $y = Yw$ , выбрав  $w = 1/\sqrt{a_{20}(x_0 - 1)}$ , получим

$$g(\xi) = -\frac{1}{4\xi^{31/24}} - \frac{41393677}{82800000\xi^{8/23}} + \frac{31042073\xi^{15/23}}{41400000} - \frac{367\xi^{38/23}}{400000} + \frac{19\xi^{61/23}}{18400},$$

$$f(\xi) = \frac{191837}{2000000\sqrt{2}}\xi^{-27/23} + \frac{367}{1000\sqrt{2}}\xi^{-4/23} - \frac{61}{460\sqrt{2}}\xi^{19/23}.$$

На отрезке  $\xi \in I = [0.1; 2.5]$  при  $k = -3.5$ ,  $n=12$  ищем функцию  $\Phi(\xi, C)$ .

Она может иметь острый экстремум на отрезке  $[1.95, 2.05]$ . Чтобы избежать отрицательных значений функции на этом отрезке, необходимо выбрать на нем более частую сетку. Выберем на каждом из промежутков  $[0.1; 1.95]$ ,  $[1.95; 2.05]$ ,  $[2.05; 2.5]$  равномерную сетку, разбив их соответственно на 500, 300 и 300 равных частей.

На полученной сетке узлов  $\xi_i \in I$ ,  $i = \overline{1, 1101}$  ищем решение задачи оптимизации для функции  $\tilde{\Phi}(\xi, C) = 10^4 \xi^{71/23} \Phi(\xi, C)$

$$\tilde{\Phi}(\xi_i, C) \geq L, \quad L \rightarrow \max, \quad |C_j| \leq 1, \quad i = \overline{1, 1101}, \quad j = \overline{1, 12} \quad (9)$$

Решение задачи (9)  $(\tilde{C}^*, \tilde{L}^*)$  существует, при этом  $\tilde{L}^* \approx 0.00011 > 0$ . Теперь легко проверить, что функция  $\Phi(\xi, \tilde{C}^*)$  положительна при  $\xi > 0$  (рисунок 3), а уравнение  $\Psi(\xi, Y, \tilde{C}^*) = 0$  определяет в этой области три овала (рисунок 4).

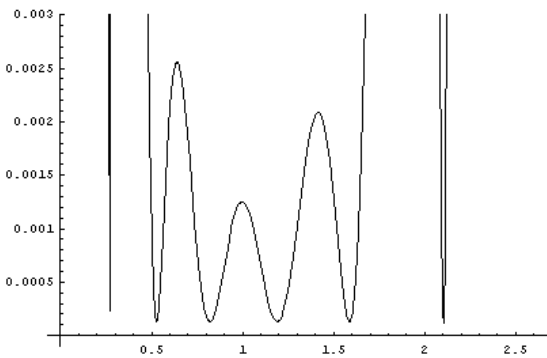


Рисунок 3 – Вид функции  $\Phi(\xi, C)$

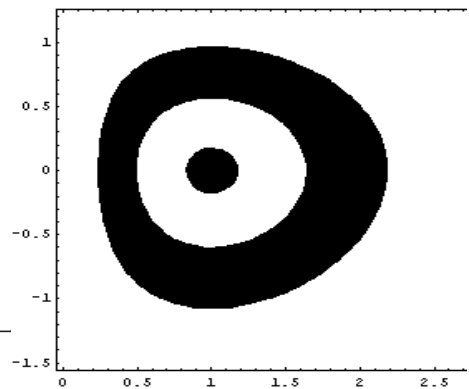


Рисунок 4 – Вид функции  $\Psi(\xi, Y, C)$

Отсюда из теоремы Дюлака-Черкаса [3] следует, что соответствующая система (5), а значит и (1), имеет точно три предельных цикла в полуплоскости  $\xi > 0$ .

Для доказательства единственности предельного цикла системы (1) вокруг фокуса  $B_0(x_0, -1/x_0)$  преобразованием  $x = x_0 \tilde{x}$ ,  $y = -\tilde{y}/x_0$  переводим его в точку  $A(1, -1)$ .

В новой системе

$$(a_{10}, a_{20}, a_{01}, a_{11}, a) = (10798.35, -16200, 2.202, 17.27, 19/23).$$

Для соответствующей системы (5) в области  $\xi > 0$  ищем функцию  $\Phi(\xi, Y, C)$  при  $n = 4$ ,  $k = -1$  и функции  $\tilde{\Phi}(\xi, C) = 10^{-4} \xi^{54/23} \Phi(\xi, C)$ , решая задачу (9) на равномерной сетке  $\xi_i \in I$ ,  $i = \overline{1, 401}$ . Найдя её решение  $\tilde{C}^*$ ,  $\tilde{L}^* \approx 0.43 > 0$  легко доказать положительность  $\Phi(\xi, \tilde{C}^*)$  при  $\xi > 0$  и существование единственного овала уравнения. Это и доказывает единственность предельного цикла системы (1) вокруг фокуса  $B$ .

**Пример 2.** Система (1) при  $a = 106/100$ ,  $x_0 = -3$ ,  $a_{01} = 47/20$ ,  $a_{11} = 96/125$ ,  $a_{20} = -335$  имеет по крайней три предельных цикла вокруг фокуса  $A(1, -1)$  и один – вокруг фокуса  $B(-3, 1/3)$  (рисунок 5).

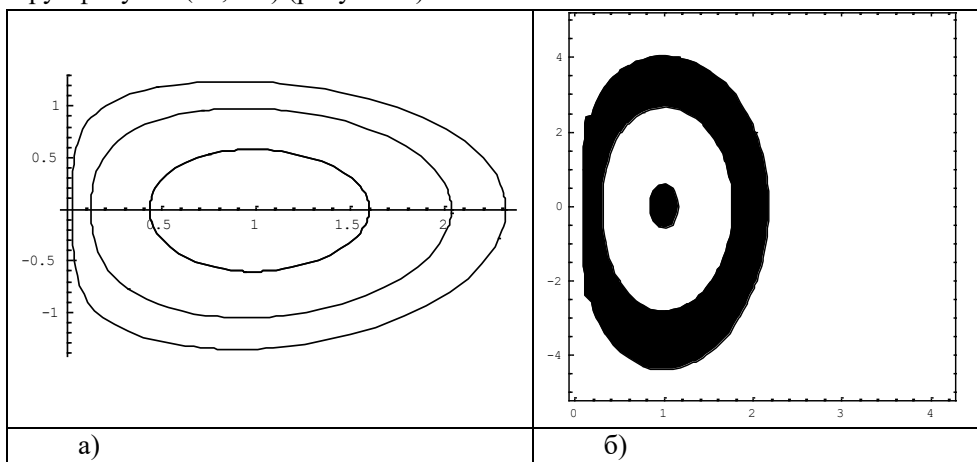


Рисунок 5 – а) Предельные циклы системы (1) пример 2  
б) функция Дюлака-Черкаса системы (1) пример 2

Аналогичным образом строятся примеры квадратичных систем с распределением (2,1) предельных циклов и проводится обоснование точности полученной оценки.

**Пример 2.** Система (1) при  $a = 10/23$ ,  $x_0 = -3$ ,  $a_{01} = -3.6$ ,  $a_{11} = 5.44$ ,  $a_{20} = -15$  имеет по крайней мере два предельных цикла вокруг фокуса  $A(1, -1)$  и один – вокруг фокуса  $B(-3, 1/3)$ .

**Пример 3.** Система (1) при  $a = 19/23$ ,  $x_0 = -3$ ,  $a_{01} = 0.72$ ,  $a_{11} = 1.931$ ,  $a_{20} = -200$  имеет по крайней мере два предельных цикла фокуса  $A(1, -1)$  и один – вокруг фокуса  $B(-3, 1/3)$ . И в тоже время она в плоскости параметров  $a_{11}$ ,  $a_{01}$  имеет область с тремя предельными циклами (см. пример 1).

### Заключение

В настоящей работе предложен конструктивный алгоритм построения квадратичных систем дифференциальных уравнений с заданными распределениями предельных циклов типа (2,1) и (3,1). В основе метода лежит совместное использование прогнозной функции Андронова-Хопфа и анализа кривых двукратных предельных циклов в пространстве параметров, что позволяет эффективно выявлять прогнозные области существования нескольких замкнутых траекторий.

Ключевым преимуществом разработанного подхода является получение предельных циклов «нормального размера», в отличие от известных ранее примеров с малыми амплитудами.

Точность полученных оценок числа предельных циклов строго обоснована с помощью метода функций Дюлака-Черкаса. Особое внимание уделено выбору минимальной степени функции Дюлака-Черкаса, достаточной для анализа всей области существования предельных циклов, что позволяет существенно сократить затраты при практической реализации метода.

Приведенные примеры демонстрируют универсальность предложенного подхода и возможность его применения для различных конфигураций особых точек. Разработанный алгоритм может быть использован при дальнейшем исследовании квадратичных систем и систем, приводимых к системам Льенара, а также при построении моделей прикладного характера, в которых важна реализация устойчивых автоколебаний заданной структуры.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы «нормального размера» систем Льенара, квадратичных и кубических систем : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 – дифференциальные уравнения / Сидоренко Иван Николаевич; Гродненский государственный университет им. Янки Купалы. – Гродно, 2010. – 26 с.
2. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы нормального размера некоторых классов квадратичных систем на плоскости / И. Н. Сидоренко // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1, Физика, Математика, Информатика. – 2008. – № 3. – С. 63–68.
3. **Черкас, Л. А.** Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков; Учреждение образования «Гродненский гос. ун-т им. Я. Купалы». – Гродно : ГрГУ, 2013. – 489 с.
4. **Perko, L. M.** Limit cycles of quadratic systems in the plane / L. M. Perko // Rocky Mountain of Mathematics. – 1984. – Vol. 14. – P. 619–644.
5. **Сидоренко, И. Н.** Об ослабленной проблеме Гильберта для систем Льенара типа  $2A + 2S$  / И. Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2023. – № 2 (62). – С. 32–40.

Поступила в редакцію 24.12.2025 г.

Контакты: sidorenkoin@gmail.com (Сидоренко Иван Николаевич)

**Sidorenko I. N. CONSTRUCTION OF QUADRATIC SYSTEMS WITH LIMIT CYCLES OF “NORMAL SIZE” IN (2,1) AND (3,1) CONFIGURATIONS**

*The paper develops a constructive method for generating quadratic systems of differential equations with limit cycle distributions of types (2,1) and (3,1). The approach is based on the use of the predictive Andronov-Hopf function together with an analysis of curves corresponding to double limit cycles in the parameter space. A distinctive feature of the obtained systems is the presence of limit cycles of normal size, which are sufficiently large and clearly separated on the phase plane, in contrast to previously known examples characterized by small amplitudes. The exact number of limit cycles is rigorously justified by means of the Dulac-Cherkas function method. Several explicit examples of quadratic systems with different configurations of singular points are presented.*

**Keywords:** quadratic systems, limit cycles of «normal size», Hopf bifurcation, Liénard systems, prediction system.

УДК 535.24 + 621.376

## RELAXATION STRUCTURE OF LIGHT REFLECTION BY A LOW-DIMENSIONAL ARRAY OF RESONANT QUANTUM EMITTERS

### **E. V. Timoschenko**

Ph. D. (Optics), Associate Professor, Head of the Department of Physics and Computer Technology  
Mogilev State A. Kuleshov University

### **V. A. Yurevich**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Technosphere Safety and General Physics  
Belarusian State University of Food and Chemical Technologies

### **A. V. Khomchenko**

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Physical Testing Methods  
Belarusian-Russian University

### **Yu. V. Yurevich**

Ph. D. (Optics), Associate professor, Associate Professor of the Department of Automation of Technological Processes and Production  
Belarusian State University of Food and Chemical Technologies

*A modification of the Maxwell-Bloch system of equations is proposed for studying oscillations in the intensity of coherent radiation reflected from a low-dimensional array formed by a structure of relatively high-density resonant dipole centers. Modeling and qualitative analysis of the proposed system of kinetic equations showed that variations in the phase relationship of the light field and the resonant polarization of the array cause internal instability of the physical energy exchange system, manifested in a pronounced oscillatory structure of the reflected radiation. The modeling utilized the material properties of semiconductor quantum dots.*

**Keywords:** quantum-dimensional structures, dipole-dipole interaction, resonant reflection, optical bistability, self-pulsation of radiation.

### **Introduction**

Optical structures made of extremely thin layers based on media with a nonlinear response in the frequency domain of optical resonance represent an example of the simplest physical system that can be modeled for studying the dynamics of energy exchange between the electromagnetic field of light and layers of active material. Models of their interaction are used to study optical bistability and self-pulsations of light, the generation and transformation of the structure of coherent radiation, and even the emergence of dynamic chaos in it [1–5]. Practical interest in such objects is stimulated by the possibilities of their application in compact optoelectronic devices, including the development of materials capable of effectively changing the phase characteristics and direction of reflected light fluxes (thin layers with the properties of metasurfaces) [3–6].

The amplification or generation of light upon reflection by an inversion layer or a low-dimensional array of resonant centers (RCs) with a population inversion remains a pressing problem, although researchers have addressed it at various times [7, 8]. It was predicted, in particular, that upon total reflection from an inverted medium, the reflected light flux could be amplified. The possibility of its amplitude modulation due to the nonlinearity accompanying such interaction of the light field with the active medium was not considered; it was rightly believed that the known nonlinearity of the medium's response, caused by the thermal action of radiation, is characterized by high inertia. Artificial electromagnetic composite media with optical properties absent in the original natural materials of which they are composed are currently being intensively developed. These initially non-obvious optical properties are due to the subwavelength size of the elementary dipole emitter during their dense packing in the medium and the resonant nature of their response to an external light field. The nonlinearity of the medium's response, which manifests itself at the resonance frequency, is particularly significant in semiconductor structures with quantum-dimensional effects, which have been intensively studied in recent years [9, 10]. These structures are classified among the above-mentioned composite materials with a high density of active centers. In the excitation region of the spectrum, the probability of induced transitions and a resonant response to a coherent light field is particularly high there [11] – so much so that these materials are usually cited as an example of dense resonant media with their inherent, virtually inertialess property of phase nonlinearity, which is expressed in the frequency drift of the resonant spectral line, caused by the mutual influence of the near fields of the dipoles [12]. The dense packing of dipole quantum dots, which are considered as RCs, in the matrix of an optical material makes it impossible to directly use mathematical approaches developed for calculating the linear effects of emission or multiple scattering of classical wave fields.

Meanwhile, the problem of light amplification with transformation of the temporal structure upon its reflection by an inverse medium can be solved by applying the concept of a near-surface layer with resonant polarization. In the case of such a low-dimensional layer, the polarization components of the light field are significant in the radiation reflected and acting within the layer on the inverted ensemble of atomic dipoles. The nonlinear components are caused by the so-called superradiant components of the medium's response to resonant radiation, calculated within the framework of quantum-mechanical equations of a two-level density matrix [13]. These components take into account the gain saturation and the phase nonlinearity of the array response, stimulated by a high concentration of active dipole centers, typical of dense media [14–16]. The action of both factors of the response nonlinearity can cause temporary instability of the initially continuous pump radiation amplified upon resonant reflection by the array and can be the cause of its modulation.

In this paper, we analyze the dynamic consequences of the near-field effect on the polarizability of active centers, resulting from the shift in the spectral gain line for resonant reflection of an inverted low-dimensional array of RCs. Solving the problem of

transforming the temporal structure and achieving self-oscillation of the reflected light field under these conditions is important for the development of compact optical devices that generate coherent radiation.

### *Basic Equations*

For the analysis of the dynamics of the plane-wave field in low-dimensional optical structures, the approximation of an ultrathin layer of resonant atoms with its inherent assumption of a longitudinally uniform field is convenient and acceptable [17]. The relationship between the fields is presented in the form of algebraic relations following from the electrodynamic conditions for Maxwell's equations. We consider an externally incident pump field wave with a stationary strength  $E_i(t) = E_0$ , a transmitted wave of a complex longitudinally uniform field acting in the medium with strength  $E(t)$ , and a reflected wave with strength  $E_r(t)$ . The dynamics of the acting and reflected fields are determined by non-stationary resonant variations in the nonlinear response of the RCs array medium interacting with the radiation. The material response, similar to the approach proposed in [18], is described in the present work by a variable gain  $n$  (proportional to the inverse population) and a complex amplitude of the polarization probability  $\rho$ . The time evolution of the resonant components of the response is analyzed within the framework of the formalism of optical quantum Bloch equations for an ensemble of two-level dipole RCs with an average electric moment  $\mu$ . Therefore, the calculation scheme forms a system of nonlinear differential equations, and in the case of a stationary (quasi-continuous) external field  $E_i(t) = E_0$ , the system is autonomous.

The proposed and further considered modification of the kinetic equations is justified, for example, in [15]. In the scheme given below, the quasi-stationary intensities of the light fields  $E$  and  $E_r$ , as well as  $E_0$ , in normalized time  $\tau = t/T_2$  are scaled as dimensionless variables (for example,  $e = \mu T_2 E / \hbar$ ,  $e_0 = \mu T_2 E t_0 / \hbar$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= n e_0 + (n-1)R - (\Delta\omega - \gamma n)S, & \frac{dS}{d\tau} &= (\Delta\omega - \gamma n)R + (n-1)S, \\ \frac{dn}{d\tau} &= \frac{\kappa - n}{\tau_{12}} - \kappa^2 e_0 R - \kappa^2 (R^2 + S^2), & e_r(\tau) &= -r e_0 + R + iS, \quad -1 < n \leq \kappa. \end{aligned} \quad (1)$$

Here,

$R = \text{Re}\rho$ ,  $S = \text{Im}\rho$  и  $n$  are the resonant polarization and gain variables,

$\Delta\omega = (\omega - \omega_0)T_2$  is the linear detuning of the carrier frequency of the light field  $\omega$  from the center of the spectral gain line  $\omega_0$ , normalized by the linewidth,

$\gamma$  is the normalizing coefficient in the local Lorentz correction to the effective field (mainly determined by the ratio of the wavelength and film thickness),

$\kappa$  is the gain index of the inversion layer, maximum at a given pump level,

$r$  and  $t_0$  are the Fresnel reflection and transmission coefficients of the array,

$\tau_{12} = T_1/T_2$  is the ratio of the longitudinal ( $T_1$ ) and transverse ( $T_2$ ) relaxation times of the transition, or, for semiconductor quantum dots (QDs), the interband and intra-band relaxation times, respectively.

System (1), in the uniform field approximation, characterizes the energy exchange between the input field and the quantum system forming the RCs array, taking into account the finiteness of the phase (transverse) relaxation time of the resonant polarization. The influence of excitation (pump current), which stimulates the inversion and determines its reversibility under the inevitable saturation during stimulated emission, is taken into account. Particularly characteristic is the consideration in scheme (1) of the dipole-dipole interaction inherent in dense resonant media, expressed by a local Lorentz correction to the field acting on the dipole active centers. The frequency detuning in the equation for polarization is expressed by the sum of the frequency defect  $\Delta\omega$  and the Lorentz correction with the coefficient  $\gamma$ , the value of which can change as the inverse population saturates. For this reason, the nonlinear resonance detuning, which depends on the intensity of the radiation field, as a periodic violation of the resonant amplification condition, inevitably becomes a feedback factor in the generation circuit in the medium of the inverse array of RCs and can cause self-modulation dynamics of the process.

In the context of studying the dynamics of the nonlinear response of the array, which generates time variations in the field acting on the active centers, based on system (1), the problem of modeling the non-stationary interaction mode, which can lead to the occurrence of self-oscillations in the reflected radiation, is further solved.

#### *Properties of Stationary Solutions*

Nontrivial stationary solutions, determined from singular limits (1), depend nonlinearly on the amplitude  $e_0$  and characterize the equilibrium states of the model. Formulating conditions for their dynamic stability or instability means assessing the possibility of oscillatory behavior of the reflected field in the physical situation where the external signal represents a rectangular field spike. It should also be assumed that the exposure time of such a light pulse with amplitude  $e_i(\tau) = e_0$  should be comparable to or exceed the relaxation times  $T_1$  and  $T_2$ .

Following the above, stationary solutions (1)  $\rho_s$ ,  $n_s$ , corresponding to a certain level of continuous excitation  $e_0$ , can be expressed from algebraic expressions:

$$\rho_s = -\frac{n_s - 1 - i(\Delta\omega - \gamma n_s)}{(n_s - 1)^2 + (\Delta\omega - \gamma n_s)^2} n_s e_0, \quad \frac{\kappa - n_s}{\tau_{12} n_s} = \frac{\kappa^2 e_0^2}{(n_s - 1)^2 + (\Delta\omega - \gamma n_s)^2}. \quad (2)$$

Relations (2) represent a system of nonlinear algebraic equations for  $R_s = \text{Re } \rho_s$ ,  $S_s = \text{Im } \rho_s$  and  $n_s$ . The dependence of these quantities on the coefficients and parameters of system (1) is relatively easily calculated using parametric calculations. When constructing nonlinear dependencies on the level of normalized intensity  $e_0^2$ , the change in one of these variables, for example,  $n_s$ , is conveniently specified as a variable decreasing linearly within the limits  $(\kappa, 0)$ .

To estimate the scale of the phenomena in the case of modeling based on the system of equations (1), approximate values of the parameters of real QDs-based emitting devices were used, which were taken from the scientific literature for QDs arrays in InAs/(Al)GaAs circuits on GaAs substrates [10, 19, 20]. Thus, the QDs density was in

the range of  $(1.0 \dots 3.0) \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . The dipole moment of an elementary emitter was estimated based on the approximate QDs size of  $2 \dots 5 \text{ nm}$ . The intensity of external radiation could reach a value of approximately  $2.5 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$  at wavelengths from the range  $\lambda \sim (1.25 \dots 1.3) \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ; the linear detuning value  $\Delta\omega$  was chosen within the line width; interband and intraband relaxation times is  $T_1 \approx 1 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ ,  $T_2 \approx 1 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ .

Figure 1 shows the curves calculated parametrically based on relations (2), which characterize the change in the quantities  $\rho_S, n_S$  for different parameters of the system (1) depending on the excitation level  $e_0^2$  – the normalized intensity of the external field. The particularly nonlinear nature of these dependencies is noted: within a certain range of variation of  $e_0^2$ , ambiguity is observed in the functions  $n_S(e_0^2)$  and  $|\rho_S(e_0^2)|^2$ . In this case, we speak of bistability of states – the values of  $e_0^2$  from this range correspond to three values of the functions, two of which correspond to the realized equilibrium states of the model, that is, at the same excitation level, the existence of two different sets of stationary values of the variables is possible.

Bistability is a special manifestation of the nonlinear relationship between variables and parameters. Nonlinearity is then caused by several interconnected physical mechanisms acting simultaneously. These mechanisms are capable of compensating or enhancing each other's role to varying degrees during the process, depending on the stage of the field-medium interaction and the combination of the nonlinear system's parameters. Bistability must manifest itself in the range of action of various factors altering the system's dynamics and under the condition of their different inertias. In this case, the change in gain occurs due to its saturation by the stimulated emission field and resonance detuning, which depends on the population difference, which decreases as saturation is approached.

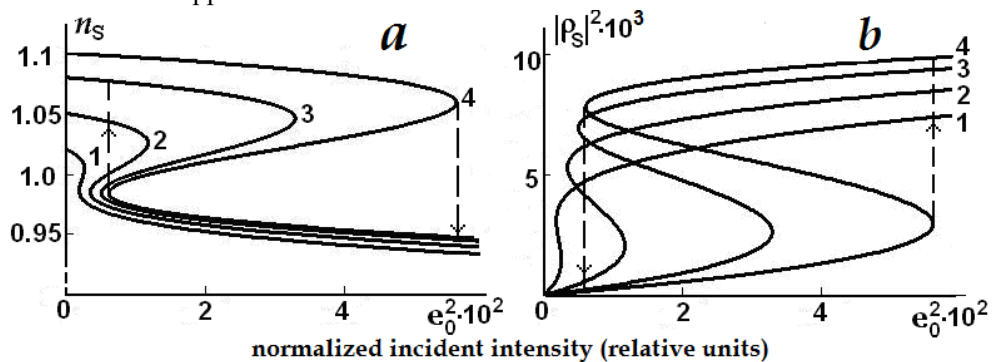


Figure 1 - Bistable dependences of stationary solutions of system (1) on the parameter of normalized intensity of external radiation;

$$\kappa = 1.02 \text{ (curve 1), } 1.05 \text{ (2), } 1.08 \text{ (3), } 1.10 \text{ (4); } \gamma = 1.17, \Delta\omega = 1.0, \\ \tau_{12} = 1.0 \cdot 10^3$$

The transition from one set of stationary variable values to another occurs at the curve turning points. When the excitation level cyclically changes in the vicinity of

these points, a hysteresis pattern appears in the dependence, with sharp jumps (usually referred to as "kinks") at these points. In the fragments of Figure 1, these transitions are indicated by vertical dotted lines only for curves 4.

This hysteresis-like nature of the relationship between state characteristics and excitation parameters suggests the possibility of abrupt state switches at the curve turning points. The dynamic model in this case is inherently unstable, with the potential for self-oscillations to develop at a constant excitation level. The calculation variants in Figure 1 demonstrate the criticality of the hysteresis loop width (the distance between turning points) relative to the maximum achievable gain level  $\lambda$ . Accordingly, at high gain levels, the consequences of instability are expected to be more widespread, even leading to the transition of the oscillatory energy exchange scheme to self-oscillations of the variables.

#### *Assessment of the Dynamic Stability of the Equilibrium States of the Model*

A qualitative study of the stability of solutions (1) near equilibrium states (2) makes it possible to evaluate the nature of its stability, determine the region of instability of solutions, and indicate the zone of parameters in which the process of transition to the equilibrium position takes the form of oscillations. The procedure for linearizing system (1) is reduced to replacing variables using their representation in the form:  $R(\tau) = R_S + \Delta R(\tau)$ ,  $S(\tau) = S_S + \Delta S(\tau)$ ,  $n(\tau) = n_S + \Delta n(\tau)$  under the assumption that the components  $\Delta R(\tau)$ ,  $\Delta S(\tau)$  and  $\Delta n(\tau)$  are relatively small. When formulating the linearized analogue of (1), higher powers of small components or their products are neglected, writing the following system:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Delta R &= (n_S - 1) \Delta R - (\Delta\omega - \gamma n_S) \Delta S - [n_S - 1 - \Delta\omega (\Delta\omega - \gamma n_S)] \frac{e_0}{X} \Delta n, \\ \frac{d}{d\tau} \Delta S &= (\Delta\omega - \gamma n_S) \Delta R + (n_S - 1) \Delta S + (\Delta\omega - \gamma) \frac{n_S e_0}{X} \Delta n, \\ \frac{d}{d\tau} \Delta n &= \kappa^2 [n_S^2 - 1 - (\Delta\omega - \gamma n_S)^2] \frac{e_0}{X} \Delta R - 2\kappa^2 (\Delta\omega - \gamma n_S) \frac{n_S e_0}{X} \Delta S - \frac{\Delta n}{\tau_{12}}. \end{aligned} \quad (3)$$

here  $X = (n_S - 1)^2 + (\Delta\omega - \gamma n_S)^2$ .

Of further interest are the solutions for the components  $\Delta R(\tau)$ ,  $\Delta S(\tau)$  and  $\Delta n(\tau)$ , containing  $\exp(\chi\tau)$  as the main part. The coefficient  $\chi$  in the exponent of similar solutions of system (3) from a small neighborhood of stationary solutions (2) can be expressed as a real or complex value. In the latter case, the solutions will have not only an exponential but also an oscillatory nature.

The characteristic equation for the coefficient  $\chi$  formed on the basis of the adopted algorithm is an algebraic cubic equation:

$$\begin{aligned} \chi^3 - \left[ 2(n_S - 1) - \frac{1}{\tau_{12}} \right] \chi^2 + \left[ Y \frac{e_0^2}{X} + X - \frac{2}{\tau_{12}} (n_S - 1) \right] \chi + \frac{X}{\tau_{12}} - \\ \left[ (n_S - 1) Y - (\Delta\omega - \gamma n_S) (\Delta + \gamma) n_S \right] \frac{e_0^2}{X} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

here  $Y = 1 + \Delta\omega^2 + (1 - \gamma\Delta\omega)n_s$ .

Solutions (3) that correspond to a specific range of values of its coefficients are considered special from the point of view of the correlation between the dynamic behavior of model (1) and the possible real time sweep of the radiation amplified by reflection. In this region, the characteristic equation (4), formulated on the basis of the linearized analogue of (3), can have one real and two complex roots ( $\chi_1$  and  $\chi_{2,3}$ ):

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \sigma_- - \sigma_+ - \frac{1}{3\tau_{12}} - \frac{2}{3}(n_s - 1), \quad \sigma_{\pm} = \sqrt[3]{G \pm \sqrt{D}}, \\ \chi_{2,3} &= -\frac{1}{3\tau_{12}} - \frac{2}{3}(n_s - 1) + \frac{1}{2}(\sigma_+ + \sigma_-) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_+ - \sigma_-), \end{aligned} \quad (5)$$

here

$$\begin{aligned} D &= G^2 + P^3, \quad P = \frac{1}{9} \left[ 3(M - N + \Delta_s^2) - B \right], \quad G = \frac{B^3}{27} - \frac{B}{6}(M - N + \Delta_s^2) + \frac{\Delta_s}{2} \left[ \left( B - \frac{n_s e_0^2}{X} \right) \Delta_s + \gamma N \right], \\ B &= n_s - 1 + \frac{1}{\tau_{12}}, \quad M = \kappa^2 \left( 1 - n_s^2 + \Delta\omega \Delta_s \right) \frac{e_0^2}{X}, \quad N = \kappa^2 (1 + n_s) \frac{n_s e_0^2}{X}, \quad \Delta_s = \Delta\omega - \gamma n_s. \end{aligned}$$

Undamped periodic changes in the response variables  $R(\tau)$ ,  $S(\tau)$  and, accordingly, the normalized intensity of the reflected light field  $I$ , are possible for combinations of coefficient (1) values such that the real part of the roots  $\chi_{2,3}$  (3) is positive. The points corresponding to the equilibrium states (2) in the phase space of system (1) then take the form of an unstable focus. Solutions (1), "starting" from the vicinity of such points and depicted by curves in the phase space of system (1), are represented by "unfolding" cyclic trajectories that leave the vicinity of points (2). At the same time, due to the inevitable saturation of the inverse population (amplification  $n$ ) by stimulated emission, the generation power must stabilize. The curves are localized in a closed space, and their projections onto coordinate planes in phase space form limit cycles over time. In the temporal aspect, this dynamics of variables (1) will correspond to their self-oscillations arising spontaneously (at a constant level of stimulating factors - pumping and the amplitude of the excitation field strength  $e_i$ ) - only for certain combinations of the values of the material parameters of the inverted layer and the excitation characteristics - the intensity  $e_0^2$  and the frequency detuning  $\Delta\omega$ . The conditions for the existence of complex roots of equation (4) with positive values of their real part, following expressions (5), are formulated by the following relationships:

$$\sigma_+ + \sigma_- > \frac{2}{3\tau_{12}} + \frac{4}{3}(n_s - 1), \quad D > 0; \quad (6)$$

The second requirement in (6) is a positive value of the discriminant  $D$ . This is the condition for the existence of complex roots of equation (4) in the form of  $\chi_{2,3}$  (5).

Variants of parametric calculations based on relations (2), (5) of the typical dependence of the real and imaginary parts of  $\chi_{2,3}$ , corresponding to the attenuation

(buildup) and frequency of oscillatory solutions (3) on the level of normalized intensity  $e_0^2$  are presented in Figure 2. The instability region of solutions (3) on the scale of this parameter can be identified by the criterion  $\text{Re } \chi_{2,3} > 0$ . The buildup of small oscillations then occurs as an exponential increase in their amplitude over time. The corresponding exit of the phase curves from the vicinity of the singular points should occur at excitation intensity values located on the  $e_0^2$  scale up to the intersection with the horizontal axis of the decreasing  $\text{Re } \chi(e_0^2)$  dependences (curve 1 in Fig. 2, a) or up to the "right turning points" of the bistable curves (curves 2 - 4 in Fig. 2, a). The positions of these points on the  $e_0^2$  scale are indicated in the figures by vertical dotted lines; the exit from the instability zone and the "transition" to the stability of the equilibrium state with an increase in  $e_0^2$  should be abrupt.

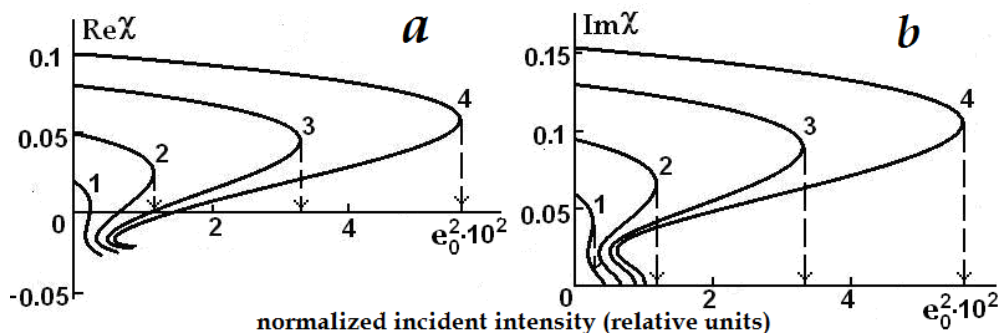


Figure 2 - Dependence of the real (a) and imaginary (b) parts of the complex roots of the characteristic equation on the parameter of the normalized intensity of external radiation;

$$\kappa = 1.02 \text{ (curve 1), } 1.05 \text{ (2), } 1.08 \text{ (3), } 1.10 \text{ (4); } \gamma = 1.17; \Delta\omega = 1.0, \tau_{12} = 1.0 \cdot 10^3.$$

An analysis of the curves indicates that the instability region on the  $e_0^2$  scale expands with increasing maximum gain parameter  $\kappa$ ; the dependences are calculated for its increasing values. The attenuation should decrease with increasing excitation, as should the oscillation frequency of the variables expressed by  $\text{Im } \chi$  (Fig. 2b). However, at excitation values  $e_0^2$  above the boundary, oscillatory solutions do not exist in the instability region. Therefore, the possibility of the emergence and development of regular oscillatory modes of the self-oscillatory type in the reflected radiation disappears.

### Resonant Reflection Simulation Results

The qualitative analysis data indicate the range of parameters and initial conditions for the variables in which solutions (1) can be sought, describing self-sustaining pulsations in the intensity of the reflected light field. Therefore, within the framework of the numerical solution (1), it was further advisable to analyze the dynamics of the thin layer's response to a stationary external optical field.

Numerical integration of system (1) was carried out by the Runge - Kutta method for initial conditions that obviously correspond to the inverted state of the layer medium: for the population difference  $-n(\tau = 0) = n_0$  (the value of  $n_0$  for a given level of the

exciting field amplitude  $e_0$  was selected according to calculations illustrated by the  $n_S(e_0^2)$  dependencies in Figure 1, a). For the polarization probability –  $\rho(\tau = 0) = 0$  (it was assumed that the polarizing influence of external radiation is initially absent). The time dependence of the dimensionless intensity of the reflected radiation field  $I_r(\tau) = |e_r(\tau)|^2$  was calculated.

Figure 3 shows examples of time sweeps of typical solutions (1) for a variable normalized intensity  $u(t)$ , expressed in relative units on a nanosecond time scale. In the general case of a nonzero frequency defect ( $\omega \neq \omega_0$ ), which causes linear phase modulation, the dipole-dipole interaction factor, which causes a shift in the resonant frequency and nonlinear phase modulation ( $\gamma \neq 0$ ), is necessarily taken into account. The values of  $e_0$  and the corresponding values of  $n_0$  are mainly taken from the range of values in the instability zone of equilibrium states; in the variants of solutions (1) illustrated in Figure 3, line 2 in Figure 2 is chosen as the "reference" calculation curve defining this instability zone.

The time sweeps of the radiation in the fragments of Figure 3, a, b, d, are calculated for different excitation level values within the bistability region of equilibrium states. The  $I_r(t)$  scans in fragments 3, d - f correspond to the same value for  $e_0$  with different gain levels  $\kappa$ . In general, these solutions describe an oscillatory transition to an unstable (quasi-stationary) equilibrium state, occurring with different relaxation rates.

The solution variants in Figures 3, c, c' are typical for calculations of  $u(t)$  for values of  $e_0$  outside the bistability zone (Fig. 3, c) and for  $e_0$  corresponding to the stability region ( $\text{Re } \chi_{2,3} < 0$ ). The formation of a regular regime with oscillations in the picosecond range thus occurs only in the bistability zone of equilibrium states; at a relatively low excitation level, the transition to the equilibrium state is purely relaxational in nature (Fig. 3, c). Outside the instability zone for the parameter  $e_0$ , the unfolding scenario presents a series of short relaxation bursts of intensity as a transition regime and, then, a relatively rapid transition to a stationary radiation level (Fig. 3, c').

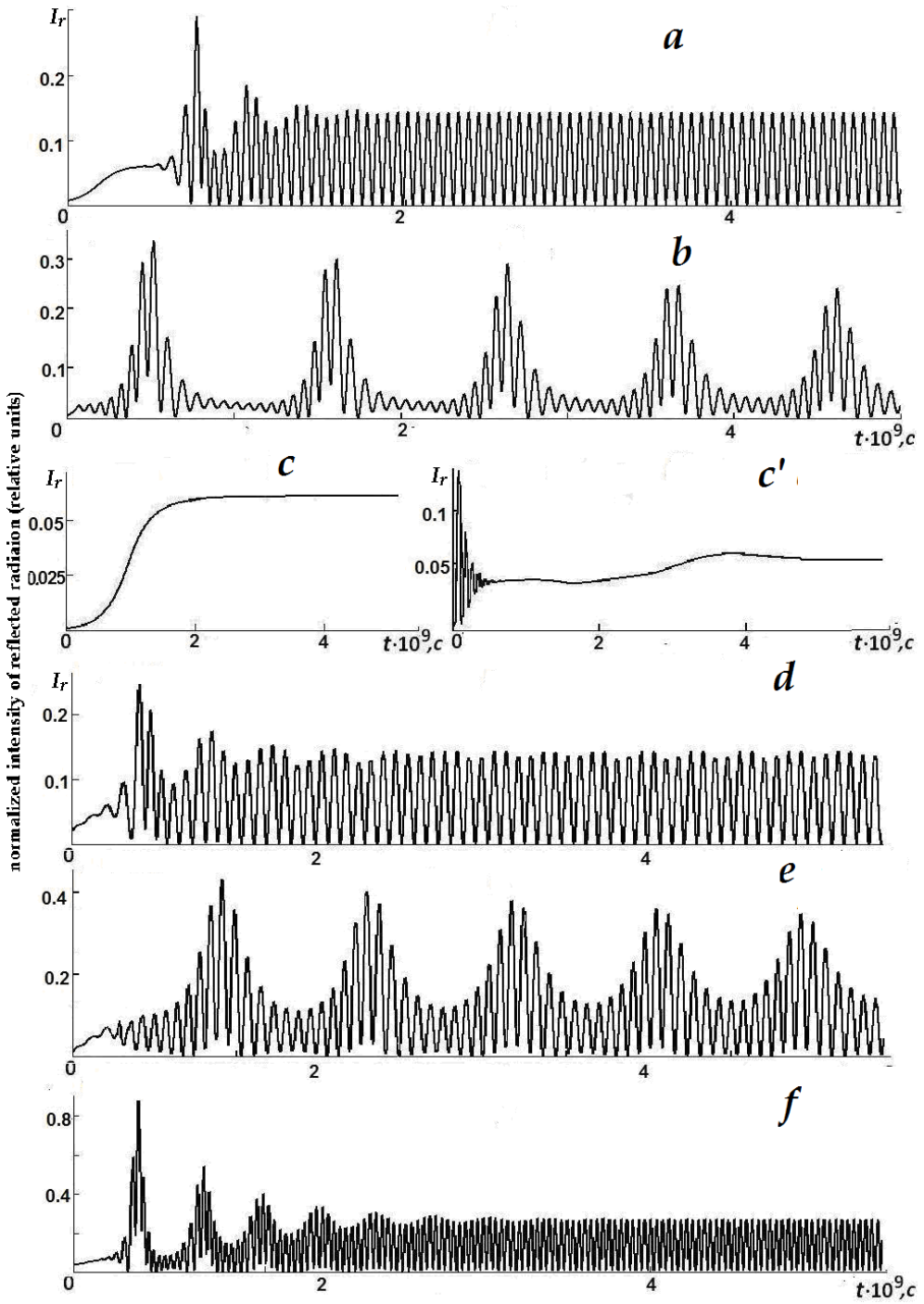


Figure 3 - Dependences of the normalized intensity of reflected radiation on time

$e_0^2 = 5 \cdot 10^{-3}$  (a),  $7.5 \cdot 10^{-3}$  (b),  $2 \cdot 10^{-3}$  (c),  $1.0 \cdot 10^{-2}$  (c'),  $6 \cdot 10^{-2}$  (d-f);  $\kappa = 1.05$  (a-d),  $1.07$  (e),  $1.10$  (f);  $\gamma = 1.58$ ,  $\Delta\omega = 1.0$ ,  $\tau_{12} = 1.0 \cdot 10^3$ .

In the "unstable" sweeps (Fig. 3, a, b, d - f), transient, relatively low-frequency oscillations with a nanosecond repetition period, commonly referred to as relaxation oscillations, are primarily distinguished. Their existence in kinetic processes is explained by the difference in transition probabilities in the pump and lasing channels. In this case, due to the superposition of relatively high-frequency oscillations, the transient pulsations  $u(t)$  have a complex shape (Fig. 3, b, e), but their attenuation over time leads to the laser oscillatory system "entering" a quasi-stationary emission regime. At this stage of the process, higher-frequency intensity oscillations persist and assume a regular character. Their occurrence is explained by oscillations in the phase detuning of the polarization and field, caused by a resonance shift under the influence of the near fields of the dipoles. The high-frequency 'carrier' component is obviously nutational in nature – the polarization vector undergoes cyclical nutational movements around the field direction. The gain, due to the resonance shift, which can assume a periodic nature, is also drawn into an oscillatory mode. Nonlinear high-frequency pulsations of intensity  $u(t)$  with a stationary envelope, representing modulation of the reflected signal after the transient stage, occur due to these relatively weak self-oscillations of the gain  $n(t)$ .

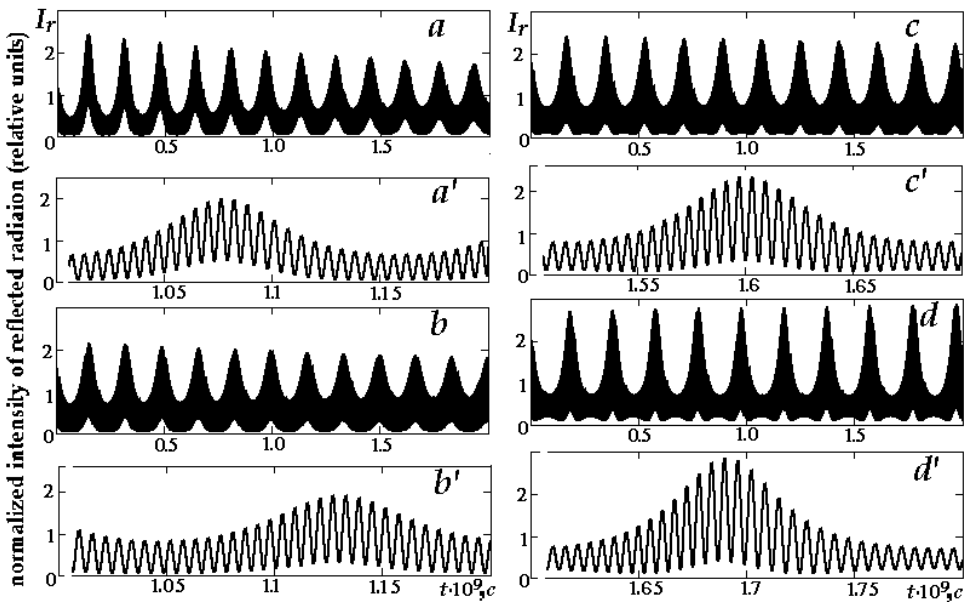


Figure 4 - Dependence of normalized radiation intensity on time

$$\Delta\omega = 1.0 \text{ (a)}, 0.5 \text{ (b)}, 0.2 \text{ (c)}, 0.02 \text{ (d)}; \epsilon_0^2 = 5 \cdot 10^{-2}, \kappa = 1.08; \gamma = 1.57, \tau_{12} = 1.0 \cdot 10^3.$$

At the stage of stabilization of the intensity envelope dependence, its "carrier" high-frequency oscillations are regularized, creating a picture of the self-oscillatory process in the radiation. In the subsequent time of development of the resonant reflection process before the cessation of the action of the exciting field and pumping, the oscillation amplitude tends to a constant level approximately as illustrated by the de-

dependencies in Figures 3, a, f). The duration of the transient regime with losing contrast and damping low-frequency oscillations  $u(t)$  mainly depends on the value of the ratio of relaxation times  $\tau_{12}$  and the unsaturated gain parameter  $\kappa$ . The frequency of the "carrier" oscillations depends on the amplitude of the exciting field  $e_0$  from the bistability zone and on the gain parameter  $\kappa$ . Qualitatively, the latter dependencies coincide with those predicted by calculating relations (2), (5), characterizing the solutions of system (3). Figure 4 shows an example of modeling the process of stabilizing the low-frequency components of the temporal structure as the linear detuning changes (fragments a - d of the figure). The formation of a series of periodic intensity spikes of a relaxation nature with a 'carrier' nutation component, illustrated in fragments of Fig. 4, a' - d' with higher resolution, occurs as the external excitation frequency approaches resonance.

### *Conclusion*

An oscillatory system formed by a low-dimensional array with a high RCs density and external resonant radiation, due to the loss of coherence of field oscillations and polarization, is thus capable of transitioning to an unstable equilibrium state in which self-oscillations of variables occur, i.e., to a special quasi-stationary (nonlinearly modulated) state. Physically, this corresponds to achieving a self-oscillation regime (regular pulsations) during resonant reflection and signifies the possibility of converting a light signal with a constant intensity envelope into a time-modulated signal, with the modulation parameters controlled by changes in light power.

The result of this analysis is the study of the current problem of light wave behavior at an interface between media containing a thin layer of material with a relatively strong nonlinear response to radiation in a frequency range close to one of the optical resonances. Modeling and analytical evaluation of the kinetics of stimulated emission in the approximation of a thin layer of an inverse medium allowed us to characterize the dynamic phenomenon of amplitude self-modulation of light reflected by a low-dimensional array of RCs. This effect can be exploited in the development of extremely compact quantum dot laser devices. Such devices should offer certain advantages over existing ones. Indeed, in the phenomenon of light amplification by reflection, the interaction of light with the gain medium can occur primarily in a thin layer near the interface between the media, with little radiation penetration into the gain medium. This reduces the technical requirements for the optical properties of the gain media, such as their homogeneity, transparency, and so on. Some potential devices utilizing the phenomenon of light amplification by reflection have already been implemented, but for inverted layers with a relatively high concentration of RCs, the nonlinear processes that stimulate spontaneous modulation have not yet been studied in detail.

In the IR frequency range, electro-optical materials capable of applying standard methods of Q-switching pulsed lasers and shortening pulse durations are still lacking. Therefore, laser generation research is currently being intensively developed in relation to technologies for generating regular trains of short and ultrashort pulses with controlled temporal parameters in this spectral range. The results of the reflection dynam-

ics calculations presented in this article, taking into account the self-phase modulation of the light field, will be useful for developing methods for generating trains of short light pulses with relatively low average intensity in compact laser devices based on materials with quantum-well effects.

**Funding.** This work was supported by the State Scientific Research Program of the Republic of Belarus “Photonics and Electronics for Innovation,” subprogram “Photonics and Its Applications.”

**Conflict of interest.** The authors declare that they have no conflicts of interest.

#### LIST OF REFERENCES

1. **Горячев, В. А.** Динамические особенности взаимодействия последовательности ультракоротких импульсов света с тонкопленочными планарными резонаторными структурами / В. А. Горячев, С. М. Захаров // ЖЭТФ. – 1998. – Т. 114, вып. 5(11). – С. 1587–1594.
2. **Каплан, А. Е.** Поведение локальных полей в нанорешётках из сильно взаимодействующих атомов: наностраты, гигантские резонансы, «магические» числа и оптическая бистабильность / А. Е. Каплан, С. Н. Волков // УФН. – 2009. – Т. 179, № 5. – С. 539–547.
3. **Krasnok, A.** Nonlinear metasurfaces: a paradigm shift in nonlinear optics / A. Krasnok, M. Tymchenko, A. Alù // Materials Today. – 2018. – Vol. 21, № 1. – 8–21.
4. **Ремнев, М. А.** Метаповерхности: новый взгляд на уравнения Максвелла и новые методы управления светом / М. А. Ремнев, В. В. Климов / УФН. – 2018. – Т. 188. – С. 169–205.
5. Nonlinear optical response of a two-dimensional quantum-dot supercrystal: Emerging multistability, periodic and aperiodic self-oscillations, chaos, and transient chaos / I. V. Ryzhov [et al.] // Phys. Rev. – 2019. – V. A100. – С. 033820–1–15.
6. Метаматериалы и метаповерхности / И. В. Семченко [и др.] // Наука и инновации. – 2020. – № 8 (210). – С. 23–27.
7. **Бойко, Б. Б.** Лазер с усилением излучения при отражении от инверсной среды / Б. Б. Бойко, Н. Н. Уварова // Квантовая электроника. – 1981. – Т. 8, № 11. – С. 2506–2507.
8. **Петров, Н. С.** Лазерная генерация тонких инверсных слоев / Н. С. Петров, А. Б. Зимин // Журн. прикл. спектр. – 2010. – Т. 77, № 1. – С. 69–73.
9. Low-Dimensional Semiconductor Superlattices Formed by Geometric Control over Nanocrystal Attachment / W.H. Evers [et al.] // Nano Letters. – 2013. – Vol. 13. – P. 2317–2323.
10. Light Emitting Devices Based on Quantum Well-Dots / A. E. Zhukov [et al.] // Appl. Sci. – 2020. – Vol. 10. – P. 1038–1–27.
11. Large Excitonic Reflectivity of Monolayer  $MoSe_2$  Encapsulated in Hexagonal Boron Nitride / G. Scuri [et al.] // Phys. Rev. Letts. – 2018. – V. 120. – P. 037402.
12. **Boyd, R. W.** Local field effects in enhancing the nonlinear susceptibility of optical materials / R. W. Boyd, J. J. Maki, J. E. Sipeb // Nonlinear Optics: Fundamentals, Materials and Devices. – 1992. – P. 63–76.
13. **Гадомский, О. Н.** Эхо-спектроскопия поверхности / О. Н. Гадомский, Р. А. Власов. – Мн. : Наука і тэхніка, 1990. – 216 с.
14. **Glasunova, E. V.** Self-induced instability of radiation in thin-film planar structure / E. V. Glasunova, A. V. Khomchenko, V. A. Yurevich // Nonlinear Optical Phenomena: Proc. SPIE / Eds. K. Drabovich, V. Makarov, Y.-R. Shen. – 2006. – P. 62590Y-1 – 62590Y-10.
15. **Yurevich, V. A.** Resonant reflection by active thin layer / V. A. Yurevich, Yu. V. Yurevich, E. V. Timoshchenko // Журн. прикл. спектр. – 2016. – Т. 83, вып. 6–16. – С. 307–308.
16. **Тимошенко, Е. В.** Динамика излучения, отраженного двухслойной планарной структурой / Е. В. Тимошенко, А. В. Хомченко, В. А. Юревич // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі. – 2025. – № 2(66) – С. 45–54.
17. **Рупасов, В. И.** О граничных задачах в нелинейной оптике резонансных сред / В. И. Рупасов, В. И. Юдсон // Квант. электрон. – 1982. – Т. 9, № 11. – С. 2179–2186.
18. **Ханин, Я. И.** Лекции по квантовой радиофизике / Я. И. Ханин // Н. Новгород : ИПФ РАН, 2005. – 224 с.

19. Comparative analysis of the optical and physical properties of InAs InGaAs quantum dots and solar cells based on them / R. A. Saliı [et al.] // Semiconductors. – 2020. – Vol. 54, № 10. – P. 1267–1275.

20. Fast switching between the ground- and excited-state lasing in a quantum-dot micro-disk triggered by sub-ps pulses / A. E. Zhukov [et al.] // Opt. Letters. – 2024. – Vol. 49, № 2. – P. 330–333.

Received by the editors on 04.01.2026

Contacts: [evtima@gmail.com](mailto:evtima@gmail.com) (Timoshchenko Elena Valerievna, Yurevich Vladimir Antonovich, Khomchenko Alexander Vasilievich, Yurevich Yuri Vladimirovich)

***Тимощенко Е. В., Юревич В. А., Хомченко А. В., Юревич Ю. В.* РЕЛАКСАЦИОННАЯ СТРУКТУРА ОТРАЖЕНИЯ СВЕТА НИЗКОРАЗМЕРНЫМ МАССИВОМ РЕЗОНАНСНЫХ КВАНТОВЫХ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ**

Предложена модификация системы уравнений Максвелла Блоха для изучения осцилляций интенсивности когерентного излучения при отражении от низкоразмерного массива, образованного структурой из резонансных дипольных центров относительно высокой плотности. Моделирование и качественный анализ предложенной системы кинетических уравнений показали, что вариации фазового соотношения светового поля и резонансной поляризованности массива вызывают внутреннюю неустойчивость физической системы энергообмена, что проявляется в выраженной осцилляционной структуре отраженного излучения. В моделировании использованы материальные характеристики полупроводниковых квантовых точек.

**Ключевые слова:** квантоворазмерные структуры, диполь-дипольное взаимодействие, резонансное отражение, оптическая бистабильность, самопульсации излучения.

УДК 535.33, 621.378

## SPECTRAL SHIFT OF LASER RADIATION IN STRUCTURES WITH QUANTUM-SIZE EFFECTS UNDER RESONANT SELF-FOCUSING CONDITIONS

**E. V. Timoschenko**

Ph. D. (Optics), Associate professor, Head of the Department of Physics and Computer Technology

Mogilev State A. Kuleshov University

*Based on a semiclassical approach to the analysis of resonant interaction processes between coherent radiation and matter, a computational evaluation of the characteristics of the stationary generation regime in lasers based on quantum-size structures has been performed. The study has shown that the waveguide properties of the gain element and the phenomenon of radiation self-focusing play an important role in the generation process. These effects are driven by the phase resonant nonlinearity of the element's material response, which in turn affects the signal output power.*

**Keywords:** injection lasers, quantum-dimensional structures, resonant nonlinearity of the refractive index, spectral broadening of the absorption line, waveguide properties of the gain element, self-focusing radiation instability.

### Introduction

The nonlinear optical model of an injection laser takes into account the influence of free charge carriers, which primarily determine the level of population inversion. This inversion affects the refractive index of the laser material, which, in turn, influences the radiation characteristics. Free carriers play a key role in the laser generation process, as they can modify the optical properties of the material and influence the efficiency of light generation. The consequences of population inversion also include both spectral broadening of the stimulated emission field [1, 2] and its self-focusing instability [3]. Optical losses in the injection laser cavity significantly depend on the waveguide effect, which reduces the diffraction divergence of radiation. The waveguide effect is based on the phenomenon of total internal reflection from a boundary with an optically less dense medium [4]. At higher carrier concentrations, the refractive index decreases; accordingly, the generation region under gain saturation in the laser diode becomes optically denser. This inevitably affects its waveguide properties. It is known that dynamic self-focusing, associated with the nonlinearity of the refractive index, changes the level of compensation for diffraction divergence of radiation [5], thereby influencing the cavity losses. In the literature, the consequences of self-focusing have been studied mainly within the framework of a non-resonant model, where the transverse field distribution is determined primarily by refraction inhomogeneities that inertia-free "track" variations in radiation power. Under conditions of resonant response, the level of nonlinear refraction depends primarily on the degree of inversion in the laser diode.

© Timoschenko E. V. , 2026

In this regard, it is of interest to investigate the influence of resonant refraction changes, associated with changes in the energy state of the active layer, on the gain characteristics and dynamics of lasers based on heterostructures with quantum-size effects.

### Basic Equations

This paper presents the results of evaluating the consideration of the waveguide properties of the gain element and self-focusing of radiation, stimulated by the resonant nonlinearity of the refractive index in the active layer of the laser diode, in determining the gain. Elementary active centers are considered as two-level dipole quantum emitters (QE). The analysis of the influence of resonant variations in waveguide properties on laser radiation was carried out within the framework of the model substantiated in [6], where non-resonant Kerr nonlinearity was considered for a semiconductor active element. It was assumed that the expression for the real part of the permittivity included a nonlinear component proportional to the stimulated emission field intensity. In essence, model parameters of refractive nonlinearity were used, typical precisely for the consequences of the dynamic refractive index shift observed in semiconductor elements, later characterized as non-resonant [7]. As shown by the results of modern observations, in real lasers with quantum-dimensional effects, including semiconductor quantum dot lasers, refractive nonlinearity has a specifically resonant character [2, 3] and therefore can differ significantly in magnitude and inertia.

We will describe the spatiotemporal characteristics of radiation under conditions of transverse gain and refraction inhomogeneity by considering the two-dimensional representation of the complex dielectric permittivity used in [6] in the form:

$$\varepsilon(x, y, t) = \varepsilon_{nr} - \chi'(x, y, t) + i\chi''(x, y, t), \quad (1)$$

where  $\varepsilon_{nr}$  is the real (non-resonant) part of the dielectric permittivity of the active layer of the laser element in the unexcited semiconductor. It was assumed that the  $x$  direction coincides with the cavity axis; the inhomogeneity of the laser beam cross-section, limited by the waveguide effect, is oriented in the  $y$  direction. Furthermore, unlike [6], we assume that the variable real part of the resonant susceptibility (1) is characterized by the usual dispersion dependence:

$$\chi'(x, y, t) = \frac{\mu^2}{3\hbar\varepsilon_0} T_2 N \frac{\Delta_0}{1 + \Delta_0^2} n(x, y, t), \quad (2)$$

where  $\Delta_0 = (\omega - \omega_{12}) T_2$  is the normalized frequency detuning from the center of the gain spectral line  $\omega_{12}$  and  $n(x, y, t)$  is the probability variable of population inversion.

The imaginary component of the resonant susceptibility describing the gain at frequency  $\omega$  is correspondingly expressed in the following form:

$$\chi''(x, t) = \frac{\mu^2}{3\hbar\epsilon_0} T_2 N \frac{1}{1 + \Delta_0^2} n(x, y, t). \quad (3)$$

Here, in relations (2) and (3), the following notations are used:

- $\mu$  is the magnitude of the transition dipole moment;
- $T_2$  is the transverse relaxation time of the transition; correspondingly, in media used in laser optics of semiconductors, this parameter characterizes the intraband relaxation time;
- the spectral width of the resonant gain line is determined by the factor  $2/T_2$ ;
- $N$  is the volume density of elementary QE.

In [6] a certain approximation of the transverse (in the  $y$ -coordinate direction) inhomogeneity of the real part of the permittivity was introduced. We apply an analogous form of inhomogeneity for the probability variable of inversion:  $n(x, y, t) = n_m(x, t) [\exp(\delta y) - 2\exp(\delta y/2)]$ . In this expression,  $\delta$  characterizes the width of the active layer, and  $n_m(x, t)$  determines the amplitude values of the real and imaginary components of the resonant susceptibility. The form of the spatial distribution  $n(y, t)$  during generation (over time) is assumed to be unchanged. In the longitudinal direction (along the  $x$ -coordinate), the change in  $n(x, t)$  is due to the intensity growth and the corresponding saturation of population inversion. Then, using the methodology outlined in [6], we express the magnitude  $\Omega$  of the imaginary addition to the frequency of the longitudinal cavity mode:

$$\Omega = \frac{\omega}{2\epsilon_{nr}} \left[ \chi''_m - \chi''_{m0} - \frac{2\delta c}{\omega} \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\chi''_m{}^2 + \chi'_m{}^2} - \chi'_m)} \right]. \quad (4)$$

The imaginary addition (4) is averaged over the field localization region and essentially expresses the gain coefficient of the laser diode, determining the rate of intensity growth at frequency  $\omega$  in the active layer. The initial value  $\chi''_{m0}$  is proportional to the initial value of inversion  $n_0$ . Further, analogously to [8], we take into account the influence of the quasi-resonant component of susceptibility on the real part of permittivity. This component is associated with radiation absorption in transitions adjacent to the resonant one and formally depends on the difference in polarizabilities of elementary QE at the levels of the main transition. It is precisely this contribution that primarily determines the refractive nonlinearity of the active element measured in [5] and the associated automodulation frequency shift of generation in semiconductor lasers. In the scientific literature, it is often called the spectral broadening of the field [9], associated with the dynamics of the so-called Henry factor. The magnitude of spectral broadening is proportional to the resonant variation of inversion and depends linearly on  $\Delta\alpha$  – the difference in polarizabilities of QE at the levels of the main transition.

Besides, in the expression for the nonlinear frequency addition, it is advisable to consider the shift of the resonant transition frequency initiated by the polarizing influence of near fields of dipoles. Its contribution to the change in frequency detuning has been measured and can be estimated by taking into account the local Lorentz correction [10] to the effective field acting on the QE. The dynamic factor of frequency shift, which is due to dipole-dipole interaction, is considered particularly significant in the radiation processes of quantum dot lasers [11, 12]. Its representation in subsequent computational estimates is used the same as in [8].

Taking into account both mechanisms of phase nonlinearity, we write the expression for frequency variation (4) as follows:

$$\Omega = \frac{\mu^2 N \omega}{6 \varepsilon_0 \hbar \varepsilon_{nr}} T_2 \left[ n_m / (1 + \Delta^2) - n_0 - \frac{2 \delta c}{\omega} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{n_m^2 / (1 + \Delta^2)^2 + \vartheta^2} - \vartheta \right)} \right] \quad (5)$$

$$\vartheta(n_m) = n_m \Delta / (1 + \Delta^2) - \beta(n_0 - n_m), \quad \Delta = \Delta_0 + \gamma n_m, \quad \beta = 2 \pi \Delta \alpha \varepsilon_0 \hbar / \mu^2 T_2, \quad \gamma = \mu^2 N T_2 / 3 \varepsilon_0 \hbar.$$

Here, in the expression for the modified resonant addition  $\vartheta(n_m)$ , there is a coefficient  $\beta$ , which relates the change in refractive index to the variation in the concentration of dipole QE. The parameter  $\gamma$  defines the normalized coefficient in the local Lorentz correction.

### Modeling of the stationary generation regime of lasers based on quantum-size structures

Let us analyze the stationary laser model. It is based on nonlinear transfer equations for counterpropagating waves with steady-state field strength amplitudes  $E_{\pm}$ , forming one of the cavity modes — a standing light wave, known, for example, from [13]. The inclusion of resonant addition (5) in the calculation system, as in [6], means taking into account additional losses in the cavity. These losses are associated with changes in radiation divergence due to nonlinear refraction. For normalized field intensities  $S_{\pm}(x) = \mu^2 \tau_1 T_2 |E_{\pm}(x)|^2 / \hbar^2$ , where  $\tau_1$  is the longitudinal relaxation time or, in the case of laser diodes, spontaneous recombination time, the equations of the computational scheme taking into account (5) are written as:

$$\frac{dS_{\pm}}{dx} = \kappa \left[ \frac{n_{ms}}{1 + \Delta^2} - \rho \sqrt{\sqrt{\left( \frac{n_{ms}}{1 + \Delta^2} \right)^2 + \vartheta_s^2} - \vartheta_s - \sigma} \right] S_{\pm},$$

$$\gamma_s = [\Delta - \beta(S_+ + S_-)] / (1 + \Delta^2 + S_+ + S_-), \quad (6)$$

$$n_{ms} = 1 / \left[ 1 + (S_+ + S_-) / (1 + \Delta^2) \right], \quad \kappa = \frac{\mu^2 N \omega}{3 \varepsilon_0 \hbar \eta c} T_2 n_0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

where  $\kappa$  is the gain coefficient achieved due to the pump current,  $\sigma$  is the relative parameter of linear losses,  $\eta l$  is the optical length of the active layer,  $\rho = \delta c \sqrt{2} / \omega$ .

Equations (6) were solved with boundary conditions corresponding to reflection conditions at the left facet ( $x = 0$ ) with a fully reflecting mirror, and at the right facet ( $x = l$ ) with partial reflection (energy reflection coefficient  $r = 0.32$ ):

$$S_+(x=0) = S_-(x=0), \quad S_-(x=l) = rS_+(x=l). \quad (7)$$

For conditions (7), the system of equations (6) is analytically solvable only partially. Namely, for the functions  $S(x) = S_+(x) + S_-(x)$  and  $R(x) = S_+(x) - S_-(x)$ , a simple solution in quadratures is possible:  $S^2(x) - R^2(x) = 4r R(l)/(1-r)^2$ . This relation reduces the problem of determining the dependence  $S(x)$  to solving one nonlinear differential equation, which is convenient to write in the form:

$$\kappa \frac{dx}{dS} = \frac{1 + \Delta^2 + S}{F \left\{ 1 - \rho \sqrt{(1 + \Delta^2 + S)} \left[ \sqrt{1 + (\Delta - \beta S)^2} - \Delta + \beta S \right] - \sigma (1 + \Delta^2 + S) \right\}}, \quad (8)$$

$$F = \sqrt{S^2 - 4rR^2(l)/(1-r)^2}, \quad (1+r)R(l)/(1-r) \leq S \leq 2\sqrt{r}R(l)/(1-r).$$

Considering the quantity  $S$  as an independent variable (non-negative and linearly increasing), one can perform numerical integration of (8) within the indicated limits. These limits are determined by the values of the power flux at the reflecting and "output" facets. The parametric integration of the original system (6), simplified in this way, makes it possible to obtain a numerical solution of (8) with respect to the gain parameter  $\kappa l$  and to construct the dependence of the output power flux  $I = (1-r) Y_+(x=l)$  on the pump parameter  $\alpha = \kappa l / (\sigma l - \ln(r)/2)$ .

Figure 1 presents the results of the numerical modeling of the system of equations (8), illustrating the output intensity  $I(\alpha)$  as a function of the pump parameter for different values of the transverse inversion inhomogeneity parameter and frequency detuning.

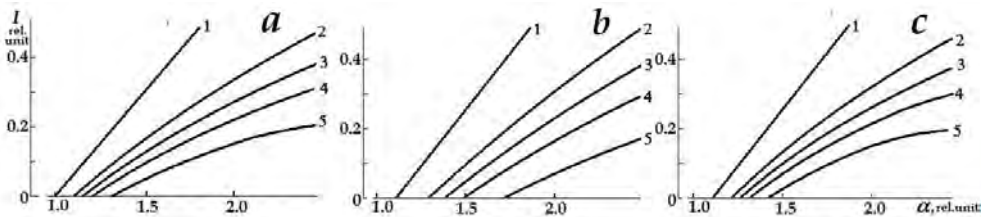


Figure 1. Output intensity as a function of the pump parameter for various values of the transverse inversion inhomogeneity parameter and frequency detuning:

$\rho = 0$  (curve 1), 0.1 (2), 0.14 (3), 0.18 (4), 0.25 (5);  $\Delta_0 = 0$  (a),  $-0.5$  (b),  $0.5$  (c);  $\beta = 0.15$ ,  $\gamma = 1.58$ ,  $\omega = 1.5 \cdot 10^{15} \text{ rad/c}$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $\eta l = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $\tau_1 = 1.0 \cdot 10^{-9} \text{ с}$ ,  $T_2 = 1.0 \cdot 10^{-12} \text{ с}$ .

In constructing the dependencies shown in Figure 1, the corresponding coefficients of system (6) were determined based on injection laser parameters known from the scientific literature, for example, [2, 14]. As can be seen from the plots in Figure 1, with a more pronounced refractive index inhomogeneity (i.e., larger values of  $\rho$ ), the effective gain level required for the onset of lasing must increase. It is evident that the output power curves originate from values greater than 1, which corresponds to the threshold value for the exact resonance frequency  $\omega = \omega_{12}$ . The threshold values naturally increase as the linear frequency detuning  $\Delta_0$ . This can be observed by comparing the behavior of the curves in panels a-c of Figure 1. Thus, an increase in both of these factors – inhomogeneity and frequency detuning – will also require a relative increase in the pump current for lasing to develop. As the inhomogeneity parameter increases, the output power decreases, and the curves in Figure 1 become increasingly nonlinear. Furthermore, we note an asymmetry in the growth behavior of the  $I(\alpha)$  curves in Figure 1 depending on the sign of the frequency detuning  $\Delta_0$ .

This trend is more clearly demonstrated by the curves in Figure 2. These illustrate the dependencies of the normalized output radiation intensity on the mode frequency at a certain above-threshold pump level  $\alpha$ . Such curves can be used to characterize the spectral dependence of the gain.

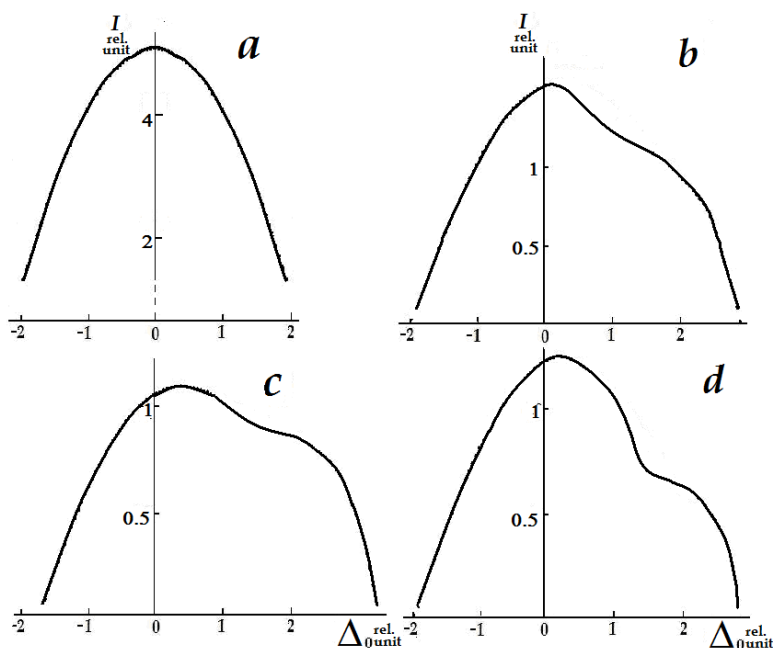


Figure 2 - Spectral dependence of the output intensity for various values of the transverse inversion inhomogeneity parameter and the resonant nonlinearity parameter:

$$\rho = 0 \text{ (a), } 0.12 \text{ (b), } 0.2 \text{ (c, d); } \beta = 0 \text{ (a) } 0.1 \text{ (b, c), } 0.15 \text{ (d) } \omega = 1.5 \cdot 10^{15} \text{ рад/с,}$$

$$\sigma = 0.2, \gamma = 1.58$$

$$\eta l = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ м, } \tau_1 = 1.0 \cdot 10^{-9} \text{ с, } T_2 = 1.0 \cdot 10^{-12} \text{ с.}$$

The natural shape of the symmetric gain resonance is shown in Figure 2 (a) and was calculated in the absence of nonlinear refraction. Panels b-d of Figure 2 demonstrate quasi-resonant curves with a short-wavelength shift of the maximum and asymmetric broadening. This deformation of the radiation characteristics, presented in panels b-d of Figure 2, arises from changes in the light loss level due to self-focusing. Furthermore, panels b-d of Figure 2 show that the deformation of the radiation characteristics depends on the parameters of transverse inhomogeneity and resonant nonlinear refraction.

### Conclusion

In this work, a theoretical investigation of the dynamic characteristics of the steady-state generation regime of injection lasers based on quantum-confined structures has been conducted within the framework of a semiclassical approach, taking into account the resonant nonlinearity of the refractive index in the active layer. A computational model has been formulated that incorporates two mechanisms of phase nonlinearity: the quasi-resonant susceptibility component arising from the difference in polarizabilities of quantum emitters at the fundamental transition levels, and the resonant frequency shift due to dipole-dipole interaction with consideration of the local Lorentz correction. Based on nonlinear transfer equations for counter-propagating waves, a system of differential equations describing the steady-state laser generation regime has been derived and numerically solved, accounting for the transverse inhomogeneity of the population inversion.

Numerical modeling has revealed that an increase in the transverse inhomogeneity parameter of the refractive index leads to an elevation of the threshold gain level and a reduction in the output radiation power. A pronounced asymmetry in the spectral gain characteristics has been identified: resonant self-focusing gives rise to a short-wavelength shift of the spectral dependence maximum and its asymmetric broadening. The obtained results indicate that the spectral broadening of the generation field in lasers based on quantum-confined structures may, to a certain extent, be attributed to the self-focusing effect associated with the phase nonlinearity of the resonant material response, which is essential for the correct interpretation of experimental data and the optimization of injection laser parameters.

**Funding.** This work was supported by the State Scientific Research Program of the Republic of Belarus "Photonics and Electronics for Innovation," subprogram "Photonics and Its Applications."

## LIST OF REFERENCES

1. *Елисеєв, П. Г.* Полупроводниковые лазеры – от гомопереходов до квантовых точек / П. Г. Елисеєв // Квант. электрон. – 2002. – Т. 32, № 12. – С. 1085–1098.
2. Theoretical and experimental study of optical gain, refractive index change, and linewidth enhancement factor of p-doped quantum-dot lasers / J. Kim [et al.] // IEEE J. Quant. Electr. – 2006. – Vol. 42, № 9. – P. 952–958.
3. *Ржанов, А. Г.* Пространственное и спектральное разделение каналов генерации излучения в мощных лазерных диодах / А. Г. Ржанов // Изв. РАН. Серия физ. – 2021. – Т. 85, № 2. – С. 250–254.
4. *Гончаренко, А. М.* Волноводные свойства  $p-n$  - перехода и электромагнитная теория полупроводниковых лазеров / А. М. Гончаренко, В. А. Карпенко, С. Н. Столяров // Препринт Института физики АН БССР. – 1976. – 96 с.
5. *Богатов, А. П.* Явления в полупроводниковых лазерах, связанные с нелинейной рефракцией и влиянием носителей тока на показатель преломления / А. П. Богатов, П. Г. Елисеєв // Тр. ФИАН. – 1986. – Т. 166. – С. 15–51.
6. Влияние нелинейности показателя преломления на динамику излучения полупроводниковых лазеров / П. Г. Аллахвердян [и др.] // Квант. электрон. – 1972. – № 6. – С. 53–59.
7. *Garmire, E.* Resonant optical nonlinearities in semiconductors / E. Garmire // IEEE Journ. Sel. Top. Quant. Electron. – 2000. – Vol. 6, № 6. – P.1094–1110.
8. *Timoshchenko, E.* Resonance model of self-pulsation in quantum dot lasers under conditions of nonlinear frequency chirp / E. Timoshchenko, V. Yurevich, Yu. Yurevich // Journ. Appl. Spectroscopy. – 2025. – Vol. 92, № 5. – P. 1022–1029.
9. *Henry, C. H.* Theory of the linewidth of semiconductor lasers / C. H. Henry // IEEE J. Quant. Electron. – 1982. – Vol. 18, № 2. – P. 259–264.
10. Linear and Nonlinear Optical Measurements of the Lorentz Local Field / J. J. Maki [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1991. – Vol. 67, № 8. – P. 972–975.
11. Nonlinear optical dynamics of a 2D semiconductor quantum dot supercrystal: Emerging multistability, self-oscillations and chaos / V. A. Malyshev [et al.] // J. of Phys.: Conf. Series. – 2019. – Vol. 1220 (012006).
12. Nonlinear optical response of a two-dimensional quantum-dot supercrystal: Emerging multistability, periodic and aperiodic self-oscillations, chaos, and transient chaos / I. V. Ryzhov [et al.] // Phys. Rev. A. – 2019. – Vol. 100. – P. 033820 – 1–15.
13. *Самсон, А. М.* Автоколебания в лазерах / А. М. Самсон, Л. А. Котомцева, Н. А. Лойко – Мн. : Навука і тэхніка, 1990 – 316 с.
14. Light Emitting Devices Based on Quantum Well-Dots / A. E. Zhukov [et al.] // Appl. Sci. – 2020. – Vol. 10. – 1038–1–27.

Received by the editors on 08.01.2026

Contacts: evtima@gmail.com (Timoschenko Elena Valerievna)

### **Тимошенко Е. В. СПЕКТРАЛЬНОЕ СМЕЩЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРОВ НА СТРУКТУРАХ С КВАНТОВОРАЗМЕРНЫМИ ЭФФЕКТАМИ В УСЛОВИЯХ РЕЗОНАНСНОЙ САМОФОКУСИРОВКИ**

*На основе полуклассического подхода к анализу процессов резонансного взаимодействия когерентного излучения с веществом проведена расчетная оценка характеристик стационарного режима генерации лазеров на квантоворазмерных структурах. Исследование показало, что волноводные свойства усиливающего элемента и явление самофокусировки излучения играют важную роль в процессе генерации. Эти эффекты стимулируются фазовой резонансной нелинейностью материального отклика элемента, что в свою очередь влияет на выходную мощность сигнала.*

**Ключевые слова:** инжекционные лазеры, квантоворазмерные структуры, резонансная нелинейность показателя преломления, спектральное уширение линии поглощения, волноводные свойства усиливающего элемента, самофокусировочная неустойчивость излучения.

УДК 533.6.013

## DESIGN AND FLIGHT PERFORMANCE ANALYSIS OF ZENGZHANG-1 3D-PRINTED GEOPHYSICAL ROCKET

### Runchen Gao

master's student of the Department of Physics and Aerospace Technologies  
Belarusian State University

### Faxin Shen

PhD student of the Radio Astronomy and VLBI Research Group  
Yunnan Observatories, Chinese Academy of Sciences

### A. A. Spiridonov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences  
Belarusian State University

*The design and results of a numerical analysis of the flight of the two-stage modular geophysical rocket Zengzhang-1 are presented. The flight dynamics analysis of the rocket (length 1795 mm, diameter 131 mm, mass 8797 g) for a given thrust profile of the L2200G rocket engine yielded estimated maximum parameters: flight altitude 3078 m, velocity 493 m/s (Mach 1.46), and acceleration 377 m/s<sup>2</sup>. The rocket's layout and use of fins ensure a positive static margin and its controllability during both the powered ascent and ballistic flight phases. Simulation of the rocket's angular motion demonstrated that the flight occurs vertically, with minimal aerodynamic drag throughout the entire flight phase up to separation.*

**Keywords:** Geophysical rocket, 3D printing technologies, stability margin, rocket flight dynamics.

### Introduction

Geophysical rockets are crucial for aerospace research, offering an affordable way to access suborbital flight for atmospheric studies, microgravity experiments, and technology validation [1]. They are cost-effective, easy to operate, and deploy rapidly, making them ideal for education and science. Small-scale rockets, particularly in academia, allow students to engage in the full design-to-recovery cycle and provide a platform for testing flight technologies [2]. Programs like NASA's Student Launch and ESA's REXUS/BEXUS highlight their value in practical learning. Additive manufacturing, especially 3D printing, has revolutionized rocket production. Unlike traditional methods using expensive aluminum or composite laminates, 3D printing enables rapid, low-cost prototyping of complex geometries, perfect for educational and research rockets [3].

This study introduces a novel, low-cost geophysical rocket designed to reach 3 km altitude with a scientific payload. Its key innovations include being entirely 3D-printed from PETG, a modular two-section design for payload and propulsion, a dual-bay parachute recovery system, and achieving supersonic flight despite material constraints.

This work aims to guide future low-cost geophysical rocket projects and advance additive manufacturing in aerospace education and research.

### Rocket Design

#### a) Modular Configuration

The rocket employs a two-section modular architecture. The forward module houses the payload and parachute bay, while the aft module contains the propulsion system. These are connected by a 60 mm coupler, which ensures both structural rigidity and ease of assembly. This design philosophy offers several advantages: flexibility in mission payload integration, improved safety during recovery by separating payload from propulsion, and enhanced manufacturability since modules can be independently 3D-printed. The vehicle measures 1795 mm in total length with a 131 mm diameter and has a gross mass of 8749 g. The payload bay is 300 mm long and 125 mm in diameter, capable of accommodating sensors or small experimental devices. Mass distribution between the payload and propulsion sections was carefully considered to balance the center of gravity (CG) and center of pressure (CP) for stable flight.

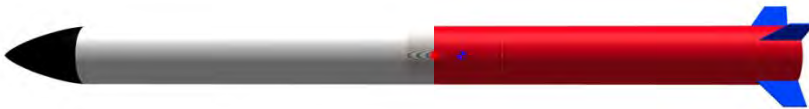


Figure 1 - ZZ-1 rocket model

#### b) Propulsion System

The L2200G solid rocket motor was selected as the propulsion system. Key specifications are total impulse of  $\sim 5104$  Ns, average thrust of 2200 N, peak thrust of 2519 N, and a burn duration of  $\sim 2.3$  s. With a gross mass of 4.78 kg and propellant mass of 2.52 kg, the motor provides a thrust-to-weight ratio exceeding 25, enabling rapid acceleration to supersonic speeds. The thrust profile is characterized by an initial sharp peak followed by sustained high thrust until burnout. This minimizes the influence of atmospheric turbulence near the ground. However, the extremely high acceleration of up to 38G imposes significant structural and payload survivability requirements. Additionally, thermal protection measures must be implemented to prevent PETG deformation near the motor casing [4].

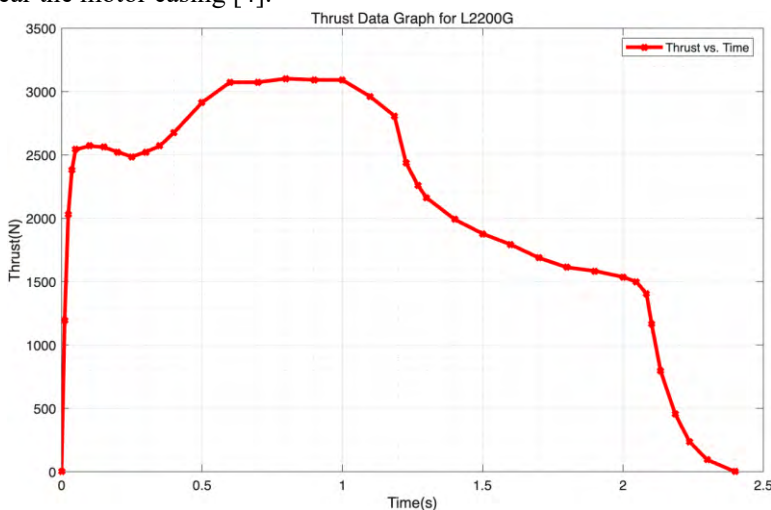


Figure 2 - Thrust data graph for L2200G solid rocket motor

### c) Aerodynamic Design and Stability

Aerodynamic configuration plays a critical role in ensuring both stability and efficient flight performance. The rocket employs a Haack series nose cone, which is specifically designed to minimize drag. The Haack series family of nose cones is well-known for its ability to reduce wave drag in supersonic and transonic flight regimes. The shape parameter of the nose cone governs its drag-reducing properties, with a parameter of 0 producing a Von Karman nose cone (LD-Haack), ideal for minimizing drag for fixed length and diameter. In this design, we use a shape parameter of 0.333, which results in an LV-Haack nose cone, optimized to minimize drag for a fixed length and volume [5]. This design choice ensures that the rocket maintains a smooth and efficient flight trajectory at high speeds, particularly when crossing the transonic and supersonic regimes [6].

### d) Material and Manufacturing

The rocket body is fabricated using PETG (Polyethylene Terephthalate Glycol-modified), with an assumed density of  $1.25 \text{ g/cm}^3$ , like PLA. PETG was selected due to its superior thermal and mechanical properties compared to PLA while maintaining compatibility with standard FDM 3D printing. Its higher glass transition temperature ( $\sim 80 \text{ }^\circ\text{C}$ ) and improved impact resistance make PETG more suitable for small rockets subjected to high acceleration and motor exhaust heating [7, 8].

### e) Recovery System

A dual-bay recovery system was adopted. Both the payload bay and propulsion section deploy independent 2500 mm parachute made of ripstop nylon ( $67 \text{ g/m}^2$ ) with twelve shroud lines of 1200 mm length each. This configuration improves reliability by ensuring partial deceleration even if one parachute fails. Furthermore, separating the payload from the motor section enhances safety and reduces the risk of impact damage.

## Dynamic Analysis of the Rocket

### a) Rocket Coordinate System Definition

In rocket dynamics modeling, the following coordinate systems are mainly used, as shown in Figure 5 and Figure 6.

#### (1) Geodetic coordinate system $S_D (O_D X_D Y_D Z_D)$ :

The celestial northeast coordinate system is used. The origin  $O_D$  is taken as the projection of the rocket launch point on the ground. The  $O_D X_D$  axis points to the north of the launch point. The  $O_D Y_D$  axis is vertical to the ground and is positive upward. The  $O_D Z_D$  axis points to the east of the launch point. Without considering the rotation of the earth, this coordinate system is regarded as an inertial coordinate system.

#### (2) Carried geodetic coordinate system $S_a (O_a X_a Y_a Z_a)$ :

The origin  $O_a$  is taken as the center of mass of the rocket. The coordinate axes  $O_a X_a$ ,  $O_a Y_a$ , and  $O_a Z_a$  are parallel to  $O_D X_D$ ,  $O_D Y_D$ , and  $O_D Z_D$  of the geodetic coordinate system  $S_D$ .

#### (3) Rocket body coordinate system $S_t (O_t X_t Y_t Z_t)$ :

The origin  $O_t$  is taken as the center of mass of the rocket, the  $O_t X_t$  axis points to the nose cone along the longitudinal axis of the rocket body, the  $O_t Y_t$  axis is located in

the rocket symmetry plane and is perpendicular to the  $O_t X_t$  axis, the  $O_t Z_t$  axis is perpendicular to the rocket symmetry plane and conforms to the right-hand rule with the  $O_t X_t$  axis and the  $O_t Y_t$  axis.

(1) Airflow coordinate system  $S_q (O_q X_q Y_q Z_q)$ :

The origin  $O_q$  is taken as the center of mass of the rocket, the  $O_q X_q$  axis is along the rocket's airspeed  $\vec{U}$ , the  $O_q Y_q$  axis is located in the rocket symmetry plane and is perpendicular to the  $O_q X_q$  axis, and the  $O_q Z_q$  axis conforms to the right-hand rule with the  $O_q X_q$  axis and the  $O_q Y_q$  axis.

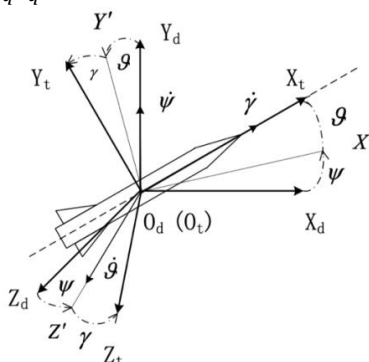


Figure 4 - The conversion relationship between the  $S_d$  and  $S_t$

The relationship between the carried geodetic coordinate system  $S_d$  and the rocket body coordinate system  $S_t$  is determined by three angles: pitch angle  $\vartheta$ , yaw angle  $\psi$ , and roll angle  $\gamma$ . First, rotate the carried geodetic coordinate system  $S_d$  around the  $O_d Y_d$  axis by angle  $\psi$ , transforming the coordinate system to  $O_d X' Y_d Z'$ . Then, rotate it around the  $O_d X'$  axis by angle  $\vartheta$ , transforming the coordinate system to  $O_d X_t Y' Z'$ . Finally, rotate it around the  $O_t X_t$  axis by angle  $\gamma$ , transforming the coordinate system to  $O_t X_t Y_t Z_t$ . This completes the transformation from the carried geodetic coordinate system  $S_d$  to the rocket coordinate system  $S_t$ . The corresponding coordinate transformation matrix  $B_d^t$  is:

$$B_d^t = B_x(\gamma)B_z(\vartheta)B_y(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta\cos\psi & \sin\vartheta & -\cos\vartheta\sin\psi \\ -\cos\gamma\sin\vartheta\cos\psi + \sin\gamma\sin\psi & \cos\gamma\cos\vartheta & \cos\gamma\sin\vartheta\sin\psi + \sin\gamma\cos\psi \\ \sin\gamma\sin\vartheta\cos\psi + \cos\gamma\sin\psi & -\sin\gamma\cos\vartheta & -\sin\gamma\sin\vartheta\sin\psi + \cos\gamma\cos\psi \end{bmatrix} \quad (1)$$

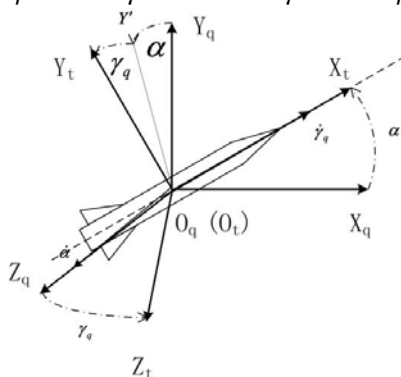


Figure 5 - The conversion relationship between the  $S_d$  and  $S_q$

The relationship between the airflow coordinate system  $S_q$  and the rocket body coordinate system  $S_t$  is determined by the total angle of attack  $\alpha$  and the longitudinal roll angle  $\gamma_q$ . First, the airflow coordinate system  $S_q$  is rotated by an angle  $\alpha$  around the  $O_q Z_q$  axis to become the coordinate system  $O_q X_t Y' Z_q$ . Then, the coordinate system is rotated by an angle  $\gamma_q$  around the  $O_q X_t$  axis to become the coordinate system  $O_t X_t Y_t Z_t$ . This completes the transformation from the airflow coordinate system  $S_q$  to the rocket body coordinate system  $S_t$ . The corresponding coordinate transformation matrix  $B_q^t$  is:

$$B_q^t = B_x(\gamma_q)B_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\cos\gamma_q & \cos\alpha\cos\gamma_q & \sin\gamma_q \\ \sin\alpha\sin\gamma_q & -\cos\alpha\sin\gamma_q & \cos\gamma_q \end{bmatrix} \quad (2)$$

#### b) Rocket Trajectory Equation

In flight, the rocket is affected not only by the engine thrust  $P$  acting on the center of mass and the gravity  $mg$ , but also by the aerodynamic force  $R$ . In the airflow coordinate system, the aerodynamic force  $R$  can be decomposed into the aerodynamic drag  $Q$  along the axial direction and the aerodynamic lift  $Y$  along the normal direction, that is :

$$R = [-Q \ Y \ 0] \quad (3)$$

$$Q = \frac{1}{2} C_x \rho v^2 S_M \quad (4)$$

$$Y = \frac{1}{2} C_y \rho v^2 S_M \quad (5)$$

Because the center of pressure of a rocket is generally not coincident with the center of mass, let the distance from the center of mass to the rocket nose cone be  $x_g$ , and the distance from the center of pressure to the rocket arrow cone be  $x_p$ , so the distance between the center of mass and the center of pressure is  $L$ ,

$$L = [x_g - x_p \ 0 \ 0] \quad (6)$$

Therefore, the aerodynamic force will generate a torque  $M_q$  to make the rocket rotate around the center of mass

$$M_q = L \times (B_q^t R) \quad (7)$$

#### 1) Centroid kinematics equation

In the carried geodetic coordinate system  $S_d$ , the rocket is affected by gravity, aerodynamic force and engine thrust, and the differential equation of center of mass motion is:

$$m \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{xd} \\ v_{yd} \\ v_{zd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} + B_t^d B_q^t \begin{bmatrix} -Q \\ Y \\ 0 \end{bmatrix} + B_t^d \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

#### 2) Rotational kinematics equation

In the rocket body coordinate system  $S_t$ , the kinematics equation of the rocket rotating around the center of mass is:

$$\begin{cases} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\omega_z\omega_y = M_{q,xt} \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z = M_{q,yt} \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_y\omega_x = M_{q,zt} \end{cases} \quad (9)$$

The rocket is a rotating body, so  $I_y = I_z = I$ , therefore

$$\begin{cases} I_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_{q,xt} \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I - I_z)\omega_x\omega_z = M_{q,yt} \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I - I_x)\omega_y\omega_x = M_{q,zt} \end{cases} \quad (10)$$

1) System centroid kinematics equation

In the geodetic coordinate system  $S_D$ , the rocket's dynamic equations can be expressed as :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{xD} \\ v_{yD} \\ v_{zD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{xD} \\ v_{yD} \\ v_{zD} \end{bmatrix} = B_t^d \begin{bmatrix} u_{c,xt} \\ u_{c,yt} \\ u_{c,zt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} wind_{xd} \\ wind_{yd} \\ wind_{zd} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Among them,  $u_c$  is the airspeed value of the rocket's center of mass,  $u_{c,xt}$ ,  $u_{c,yt}$ ,  $u_{c,zt}$  are the components of  $u_c$  in the rocket body coordinate system  $S_t$ . The relationship between rocket ground speed  $\vec{V}$ , airspeed  $\vec{U}$ , and wind speed  $\vec{W}$  is:

$$\vec{U} = \vec{V} - \vec{W} \quad (12)$$

2) System rotation around the centroid kinematics equation

Based on the transformation relationship between the carried geodetic coordinate system  $S_d$  and the rocket body coordinate system  $S_t$ , the rotational angular velocity of the rocket relative to the carried geodetic coordinate system  $S_d$  is the sum of vectors  $\psi$ ,  $\vartheta$ , and  $\gamma$ , therefore:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + B_x(\gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} + B_x(\gamma)B_z(\vartheta) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\vartheta & 0 \\ 0 & \cos\vartheta\cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\cos\vartheta\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Through matrix transformation, we can obtain:

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\cos\gamma\tan\vartheta & \sin\gamma\tan\vartheta \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \cos\vartheta & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (14)$$

By combining the above equations (8)-(14), the six-degree-of-freedom trajectory equation for rockets can be obtained [7,8].

**Flight Performance Analysis**

a) Flight Phases.

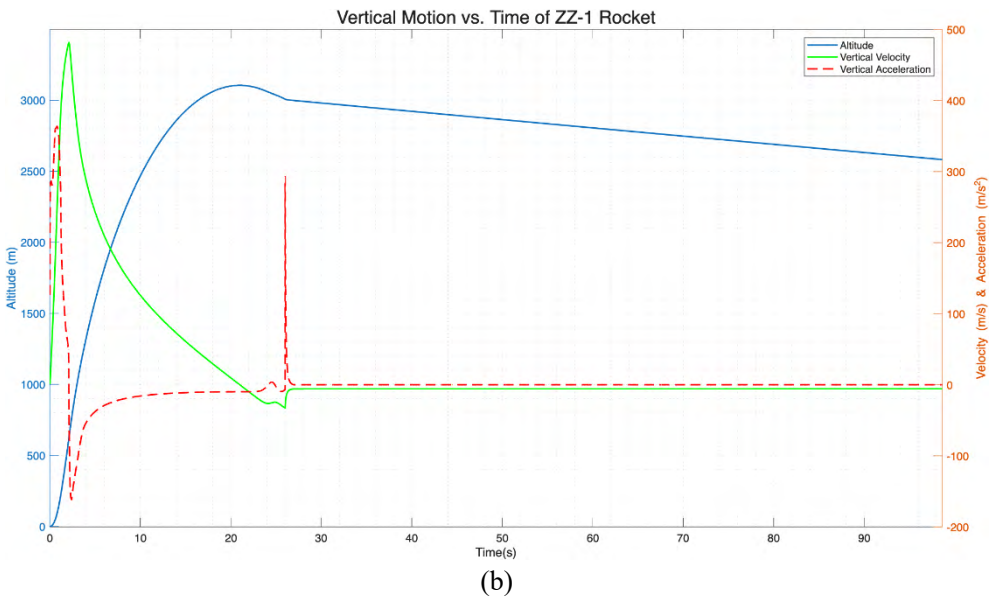
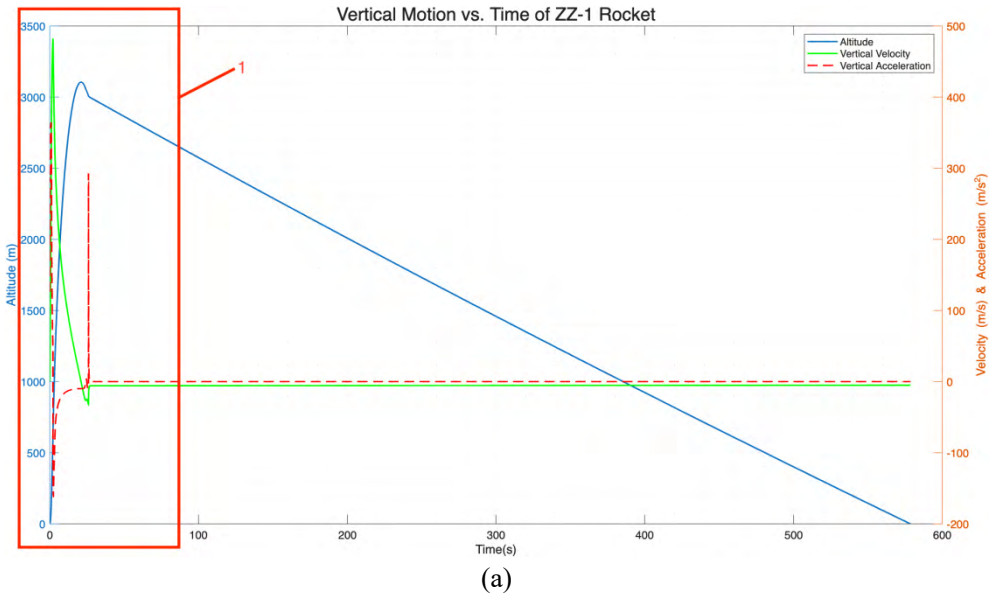


Figure 6 Vertical Motion parameters vs. Time of ZZ-1 rocket over a time interval (0, 600 s) of the entire flight (a) and during the rocket flight stage (0, 100 s) – region 1 (b)

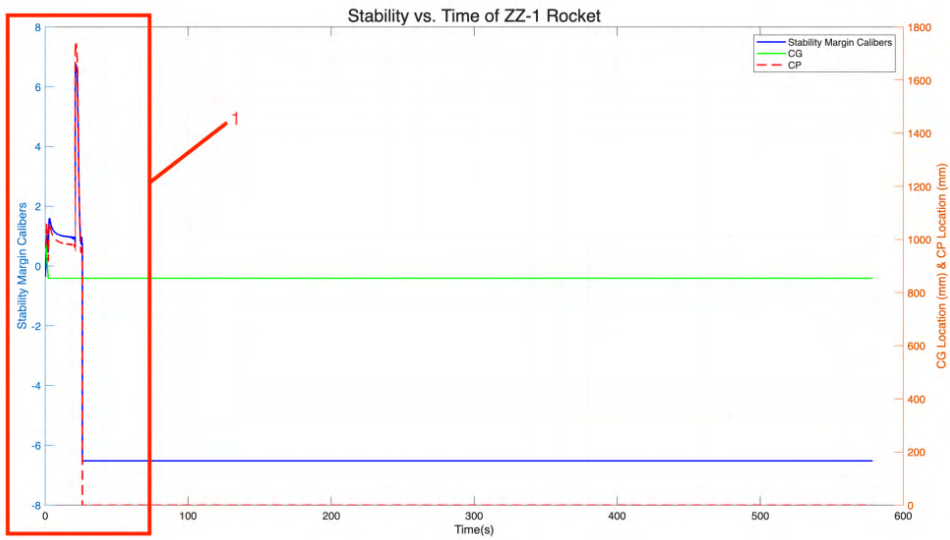
The flight trajectory is divided into four phases:

1. Powered ascent (0 – 2.3s): Rapid acceleration under motor thrust, peaking at  $377 \text{ m/s}^2$ . Structural loads are highest in this phase.
2. Ballistic coast (2.3 – 20.7s): After burnout, the rocket coasts upward. Crossing the transonic regime, drag peaks, but aerodynamic shaping mitigates shock formation.
3. Apogee and separation (20.7s): At 3078m altitude, velocity decreases to near zero. The recovery system is deployed, separating the payload and motor sections.

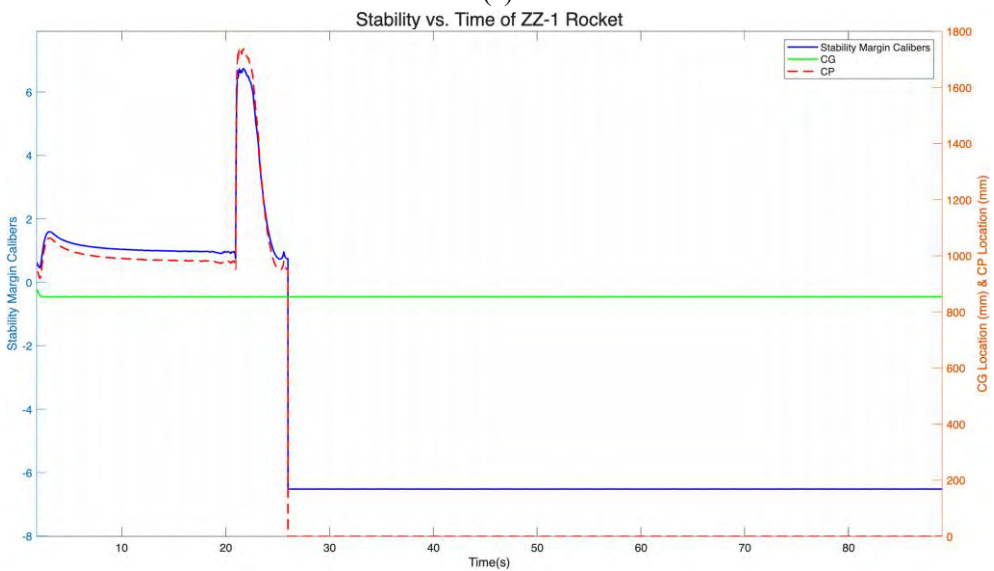
4. Descent and landing (20.7s–touchdown): Both sections descend under parachutes, ensuring a safe landing with minimal impact energy.

b) Dynamic Analysis of Stability Margin During Flight

Although performance targets are met, the static margin of only 0.42 calibers indicates marginal stability. In turbulent or windy conditions, the rocket could experience significant pitch or yaw excursions. Improving aerodynamic stability through design adjustments will be essential for consistent real-world performance.



(a)



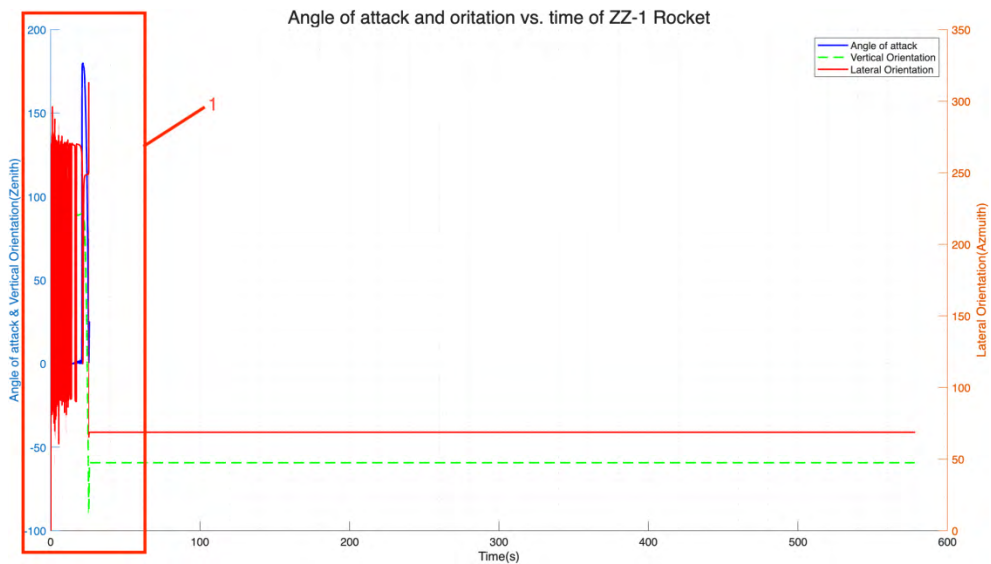
(b)

Figure 7 Stability vs. Time of ZZ-1 rocket over a time interval (0, 600 s) of the entire flight (a) and during the rocket flight stage (0, 90 s) – region 1 (b)

After the engine ignition, the stability margin (blue line) of the rocket rapidly increases from near zero, reaching a peak of approximately 1.4 radial lengths at about 2.5 seconds. This trend is typical: as the velocity increases, especially in the transonic region, the center of pressure (CP, red line) moves backward, increasing the distance from the center of gravity (CG, green line), resulting in an increase in stability margin. Subsequently, the margin slightly decreases and stabilizes at approximately 0.8 radial lengths until the engine shuts down. Throughout the entire powered flight phase, the stability margin remains positive, ensuring the controllability and attitude rigidity of the rocket under maximum dynamic pressure conditions [9,10].

### c) Dynamic Analysis of Attitude During Flight

The rocket ignited and left the launch rail at approximately  $t = 1.5$  s, entering the powered ascent phase. During this phase, the vehicle's vertical orientation (green curve) was stably maintained at  $90^\circ$ , indicating a near-perfect vertical trajectory and effective attitude hold. Concurrently, the angle of attack (blue curve), after a minor initial perturbation, rapidly converged to and remained near  $0^\circ$ . This provides strong evidence of the rocket's excellent longitudinal aerodynamic stability. This stability ensures that the vehicle flew with a minimal frontal cross-section through the region of maximum dynamic pressure, thereby reducing aerodynamic drag and enhancing flight efficiency [11,12].



(a)

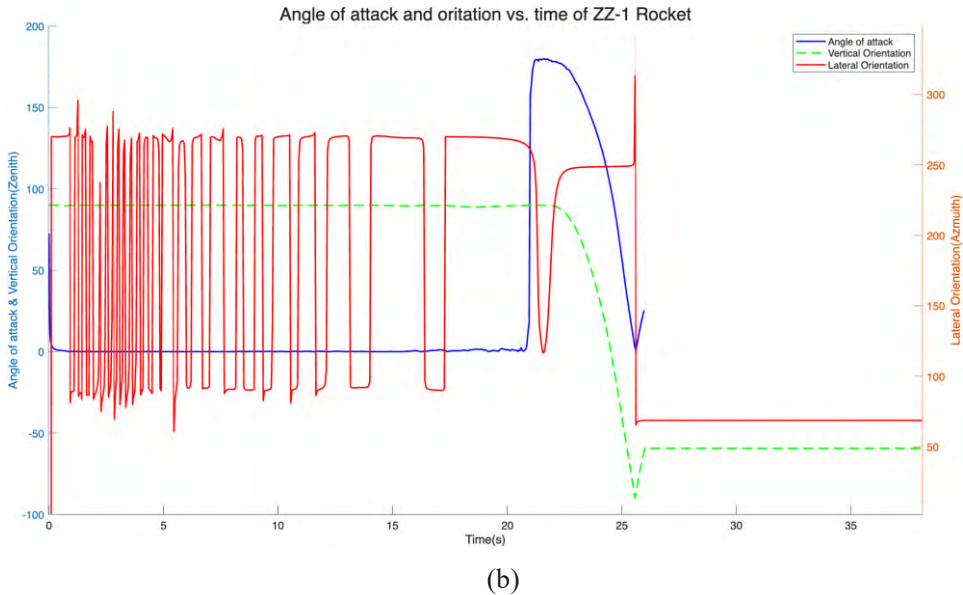


Figure 8 Angle of attack and orientation vs. time of ZZ-1 rocket over a time interval (0, 600 s) of the entire flight (a) and during the rocket flight stage (0, 40 s) – region 1 (b)

In contrast, the lateral orientation (red curve) exhibited violent, high-frequency oscillations during this phase, with the azimuth fluctuating rapidly between approximately  $30^\circ$  and  $170^\circ$ . This phenomenon indicates a significant roll anomaly while the motor was burning.

### Conclusion

This study successfully demonstrates the comprehensive design and simulated flight performance of a geophysical rocket constructed entirely from PETG using additive manufacturing. The six-degree-of-freedom (6-DOF) flight simulation indicates the vehicle is capable of reaching an apogee of 3078 m and a peak velocity of 493 m/s (Mach 1.46), propelled by a maximum acceleration of  $377 \text{ m/s}^2$  (38.4 G). These results provide strong theoretical evidence that 3D-printed PETG structures can withstand the significant aerodynamic and structural stresses inherent in transonic and supersonic flight regimes. Furthermore, the dynamic analysis confirmed positive flight stability throughout the critical powered ascent phase (0–2.3 s), with a static margin peaking at approximately 1.4 calibers. The simulation showed the vehicle's angle of attack converging rapidly to near-zero, validating the aerodynamic design's ability to maintain a stable, low-drag vertical trajectory. This modeling effort confirms the feasibility of the proposed modular architecture and material choice for demanding flight profiles. Building on this validated model, future work will prioritize the fabrication and empirical testing of a physical prototype. This vehicle will be integrated with an avionics suite to capture real-world flight data, which is essential for refining the simulation models presented herein. Additionally, research into advanced materials, such as carbon fiber reinforced plastics (CFRP), will be conducted to enhance structural and thermal performance for missions involving higher-thrust motors. In conclusion, this re-

search establishes a robust design framework for the rapid and low-cost development of geophysical rockets, showcasing the significant potential of additive manufacturing to advance aerospace research and education.

#### LIST OF REFERENCES

1. *Perkins, E. W.* NACA RM A52H28: Theoretical Hap for Minimum Pre Me Drag Derived by Von Karman and by Haack / E. W. Perkins. – Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1958. – 598 p.
2. NASA Sounding Rockets User Handbook / R.H. Burth [et al.] [Electronic resource]. – 2025. – URL: <https://sites.wff.nasa.gov/code810/files/SRHB.pdf>. (date of access: 11.09.2025).
3. *Sutton, G. P.* Rocket Propulsion Elements / G. P. Sutton, O. Biblarz. – New York : John Wiley & Sons, 2016. – 767 p.
4. *Navarrete, L.* Sounding Rockets: analysis, simulation and optimization of a solid propellant motor using Hopsan / L. Navarrete, P. Krus // Transportation Research Procedia. – 2018. – Vol. 29. – P. 255–267. doi: 10.1016/j.trpro.2018.02.023.
5. Integration validation of key components for small geophysical rockets / Y. Yun [et al.] // Aerospace Science and Technology. – 2020. – Vol. 100. – P. 105823. doi: 10.1016/j.ast.2020.105823.
6. *Kumar, D.* Design and Structural Analysis of Solid Rocket Motor Casing Hardware used in Aerospace Applications / D. Kumar, S. Nayana, S. Shree // Journal of Aeronautics & Aerospace Engineering. – 2016. – Vol. 5(2). – P. 1000166. doi: 10.4172/2168-9792.1000166.
7. Surface-Modified Electrospun Glass Nanofibers from Silane Treatment and Their Use for High-Performance Epoxy-Based Nanocomposite Materials / A. Mali [et al.] // Materials. – 2023. – Vol. 16. – P. 6817. doi: 10.3390/ma16206817.
8. *Bista, N.* Additive Manufacturing of Rocket Propulsion System: A Review. / N. Bista, S. A. Gampa, V. Dharaiya // Journal of Materials and Metallurgical Engineering. – 2022. – Vol. 12 (2). – P. 1–9. doi: 10.37591/JoMME.
9. Development of the Polish Small Sounding Rocket Program / A. Okninski [et al.] // Acta Astronautica. – 2015. – Vol. 108. – P. 46–56. doi: 10.1016/j.actaastro.2014.12.001.
10. *Khan, M. A.* Conceptual Design and Structural Analysis of Solid Rocket Motor Casing / M. A. Khan, B. K. Chaitanya, E. R. Cholleti // International Journal of Computational Engineering Science. – 2017. – Vol. 7(2). – P. 23–28.
11. *Zipfel, P.* Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics / P. Zipfel. – Reston : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001. – 551 p. doi:10.2514/4.107535.
12. Aircraft control and simulation / B. L. Stevens, F. L. Lewis, E. N. Johnson. – New York : John Wiley & Sons, 2016. – 764 p.

Received by the editors on 02.12.2025

Contacts: [rcr.gaozh@bsu.by](mailto:rcr.gaozh@bsu.by) (Runchen Gao, Faxin Shen, Spiridonov Alexander Alexandrovich)

#### **Гао Жуньчэнь, Шэнь Фасинь, Спиридонов А. А. ПРОЕКТИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЛЕТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ ZENGZHANG-1, СОЗДАННОЙ ПО ТЕХНОЛОГИИ 3-D ПЕЧАТИ**

*Представлены конструкция и результаты численного анализа движения двухступенчатой модульной геофизической ракеты Zengzhang-1. Анализ динамики полета ракеты длиной 1795 мм, диаметром 131 мм, массой 8797 г для заданного профиля силы тяги ракетного двигателя L2200G позволил оценить максимальные высоту полета 3078 м, скорость движения 493 м/с (1,46 Маха) и ускорение 377 м/с<sup>2</sup>. Компоновка ракеты и применение стабилизаторов обеспечивает положительный запас устойчивости и ее управляемость на активном и баллистическом участках полета. Моделирование углового движения ракеты показало, что полет происходит вертикально с минимальным лобовым сопротивлением на всем участке полета вплоть до разделения.*

**Ключевые слова:** геофизическая ракета, технологии аддитивного производства, запас устойчивости, динамика полета ракеты.

УДК 579.8:631.8:631.46:633.14

## ВЛИЯНИЕ БИОПРЕПАРАТА ГРАМИСИЛ В ПОСЕВАХ ОЗИМОЙ ПШЕНИЦЫ НА МИКРОБОЦЕНОЗ ПОЧВЫ

### **Н. М. Дайнеко**

кандидат биологических наук, доцент кафедры биологии  
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

### **И. И. Концевая**

кандидат биологических наук, доцент кафедры биологии  
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

### **С. Ф. Тимофеев**

кандидат сельскохозяйственных наук, доцент кафедры биологии  
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

### **Д. В. Дайнеко**

студент биологического факультета  
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

### **Е. А. Айглова**

студент биологического факультета  
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

*На основе микробиологического анализа биопрепарата Грамисил, применявшегося для прикорневой подкормки озимой пшеницы в фазе кущения в осенний и весенний периоды, изучено его влияние на микробные процессы в почвах юго-восточного региона Беларуси. Установлено, что сроки внесения не оказывают существенного воздействия на трансформацию почвенных белковых соединений. Анализ эколого-трофических коэффициентов и индексов показал, что направленность ключевых процессов деструкции промежуточного органического вещества и его начальной гумификации остается неизменной независимо от периода применения препарата.*

**Ключевые слова:** озимая пшеница, микробоценоз почвы, эколого-трофические группы почвенных микроорганизмов, Грамисил.

### **Введение**

Уникальный по своим характеристикам биопрепарат Грамисил спроектирован в Институте микробиологии НАН Беларуси. Состав препарата и результаты начальных тестов по эффективности его использования для роста и развития озимой пшеницы представлены в [1]. Ранее нами было проанализировано влияние Грамисила в однолетнем полевом опыте в посевах озимого ячменя на взаимоотношения

основных эколого-трофических групп микроорганизмов [2]. Другие сведения по исследованию действенности применения микробного препарата Грамисил в литературе отсутствуют.

Следует подчеркнуть, что на текущий период производство сельскохозяйственной продукции развивается в рамках направления устойчивого сельского хозяйства, максимально соответствующее экологическому подходу в земледелии и растениеводстве. В этом научном и производственном проекте предполагается активное использование микроорганизмов в составе микробных препаратов как дополнительный и, возможно, основной источник необходимых растениям микро- и макроэлементов [3], в частности фосфора [4].

В аналитическом обзоре [3] обсуждаются экспериментальные работы исследователей в разных странах мира на тему увеличения плодородия почвы с целенаправленным привлечением консорциума почвенных микроорганизмов. При этом авторы отмечают, что производители микробных препаратов заинтересованы в их тестировании в реальных полевых почвенных условиях, что практически не выполняется, и в определении позитивного эффекта от использования на плодородие в агробиоценозах. Таким образом несомненна актуальность темы данного исследования.

### Методы исследования

Исследования выполняли на протяжении двух лет в осенне-весенний период 2023–2025 годов на землях агрокомбината «Южный» вблизи н. п. Лопатино Гомельского района Гомельской области. Объект исследований – активность основных групп микроорганизмов при обработке биопрепаратом Грамисил в посевах озимой пшеницы.

Опыт был заложен на дерново-подзолистой легкосуглинистой почве на посевах озимой пшеницы сорта «Амелия»:

- 1) контроль (к) – без обработки посевов биопрепаратом Грамисил;
- 2) обработка посевов озимой пшеницы биопрепаратом Грамисил (опыт (о)).

В эксперименте изучали два срока внесения биопрепаратов: 1) в осенний период – в фазу начало кущения; 2) в весенний период – в фазу кущения; с нормой расхода биопрепарата, равной 3 л/га.

Отбор почвенных образцов выполняли по следующим фазам роста и развития озимой пшеницы: кущения, выход в трубку, цветения, восковая спелость. Закладка опытов, количественный учет микробного сообщества почвы, статистический анализ проводили согласно общепринятому алгоритму работы [2].

### Основная часть

По данным Гомельоблгидромета, метеоусловия в вегетационный период 2024 года характеризовались существенными колебаниями температуры воздуха и осадками по декадам, что в некоторые месяцы отразилось на неравномерном выпадении осадков [5], и что могло оказать отрицательное воздействие на рост и развитие почвенных микроорганизмов [6]. В исследуемый период 2025 года на территории Гомельской области температурный режим отличался высокой контрастностью как по декадам внутри месяца, так и между разными месяцами. В от-

ношении осадков отмечены благоприятные условия по влагообеспеченности для роста и развития сельскохозяйственных культур [7, 8].

Влажность почвы менялась в соответствии с климатическими характеристиками за анализируемый вегетационный период.

В частности, начальный показатель влажности почвы (ее забор был выполнен в ноябре 2023 года и в конце апреля 2024 года) составил 21,7–27,3%, что характеризует обеспеченность почвы водой на оптимальном уровне. В дальнейшем при отборе почвы в мае выявлено снижение влажности почвы до 12,4–16,4%. Для образцов почвы к3 и о3, отобранных в конце второй декады июля отмечено существенное снижение показателя влажности почвы до 0,9–2,2%. Напоминаем, что в июле количество осадков суммарно составило 84% нормы, что характеризует данный летний месяц как засушливый период.

В 2025 году в вегетационном периоде на колебания значений коэффициента влажности почвы оказало влияние перераспределение осадков по декадам месяца. Например, в первой декаде мая установлено значение показателя на уровне 7,4–9,1%, в то время как в третьей декаде отмечали чрезмерное количество осадков [7]. Соответственно, и значения коэффициента влажности почвы возросли до 14,9 и 18,2%. Далее для июньских образцов почвы отмечено существенное снижение показателя влажности почвы до 8,2–9,1%. Несомненно, почвенная вода обуславливает жизнедеятельность представителей как эукариот, так и прокариот.

Численность представителей изучаемого микробоценоза почвы при осеннем и весеннем внесении препарата Грамисил в посевах озимой пшеницы 2024 года показана, соответственно, в таблицах 1 и 2.

Динамика снижения численности по большинству изучаемых групп микроорганизмов от фазы кущения или фазы выход в трубку к фазе восковая спелость в контрольных образцах почвы, установленная при обоих сроках внесения биопрепарата, в первую очередь объясняется метеорологическими условиями вегетационного периода 2024 года, которые сказались на уменьшении влажности почвы от 21,7 % в мае до 0,9 % в июле.

Следует отметить статистически достоверное однонаправленное действие тестируемого биопрепарата в отношении большинства изученных групп микроорганизмов почвы, отобранной в фазе выход в трубку, независимо от сроков внесения Грамисила. В частности, в опыте «осеннее внесение биопрепарата» в указанную фазу установлено существенное снижение численности представителей всех анализируемых экологических ниш, кроме группы фосфатмобилизирующих бактерий, у которых, наоборот, наблюдали возрастание численности в 4 раза по сравнению со значением контрольного варианта. В почве, отобранной в фазе восковая спелость, только по отдельным группам бактерий отмечено достоверное уменьшение показателя КОЕ/г при обоих сроках внесения Грамисила. В почве, отобранной в фазе кущения при осеннем внесении биопрепарата, также отмечали существенное снижение численности для представителей группы аммонифицирующих и фосфатмобилизирующих бактерий, соответственно, в 1,8 и 2,5 раза. В то время как в 1,8 раза возросла численность амилитических микроорганизмов (таблица 1).

Таблица 1 – Численность представителей микробоценоза почвы при осеннем внесении биопрепарата Грамисил в посевах озимой пшеницы, КОЕ/г абс.сух. почвы  $\times 10^6$  (2024)

Группа микроорганизмов	Фаза кущения		Фаза выход в трубку		Фаза восковая спелость	
	к1	о1	к2	о2	к3	о3
аммонифицирующие	40,8±6,2	28,6±0,9*	30,9±3,5	8,4±1,1*	19,9±2,6	18,9±4,7
споровые аммонификаторы	1,8±0,3	2,8±0,5	2,8±0,2	1,5±0,2*	1,4±0,3	2,0±0,1
амилолитические	28,6±2,4	44,7±2,5*	46,2±1,5	16,1±1,5*	27,6±2,8	29,5±2,6
фосфатмобилизующие	2,5±0,1	0,1±0,1*	0,1±0,03	0,4±0,06*	0,2±0,1	0,01±0,007*
олигонитрофильные	32,1±5,4	40,0±3,2	28,3±1,0	20,3±2,6*	26,7±3,4	28,4±4,1
олигокарбофильные	50,7±8,6	69,0±6,2	61,0±1,5	18,2±3,3*	26,5±2,7	18,6±3,6*
автохтонные	52,0±8,2	50,8±4,1	53,4±3,2	10,5±0,9*	30,0±1,6	15,5±0,9*
микробицеты, $\times 10^3$	19,0±1,1	11,0±0,7*	7,8±0,4	4,1±0,4*	6,4±0,1	7,9±0,04*

Примечание: \*статистически достоверно при  $p < 0,05$  по сравнению с соответствующим контролем

В опыте «весеннее внесение Грамисила» во всех экологических нишах отмечали в опытных образцах либо существенное снижение численности представителей изучаемого микробного сообщества почвы, либо сопоставимое с контрольным образцом количественное участие (таблица 2).

Таблица 2 – Численность представителей микробоценоза почвы при весеннем внесении биопрепарата Грамисил в посевах озимой пшеницы, КОЕ/г абс.сух. почвы  $\times 10^6$  (2024)

Группа микроорганизмов	Фаза выход в трубку		Фаза восковая спелость	
	к2	о2	к3	о3
аммонифицирующие	30,9±3,5	25,3±2,3	16,4±3,3	16,5±5,1
споровые аммонификаторы	2,7±0,2	2,5±0,2	1,8±0,1	1,0±0,1*
амилолитические	46,2±1,5	31,4±2,0*	25,7±6,2	33,4±1,8
фосфатмобилизующие	0,1±0,03	0,04±0,02*	0,02±0,01	0,02±0,01
олигонитрофильные	28,3±1,0	28,7±4,0	18,7±1,8	17,1±2,5
олигокарбофильные	60,9±1,5	50,0±3,7*	42,9±4,5	31,2±2,1*
автохтонные	53,4±3,2	29,8±5,8*	14,8±0,3	18,8±2,2
микробицеты, $\times 10^3$	7,8±0,4	8,2±0,8	7,3±0,5	6,5±0,6

Примечание: \*статистически достоверно при  $p < 0,05$  по сравнению с соответствующим контролем

Такие данные свидетельствуют о влиянии засушливого периода на численность микроорганизмов опытных вариантов в большей степени по сравнению с

контролем. Здесь в отношении опытных образцов можно предположить активизацию энергозатратных процессов адаптации к засухе у бактерий, в том числе при участии комплекса микроорганизмов биопрепарата Грамисил. Напоминаем, что бактерии комплекса способны продуцировать фермент АЦК-дезаминазу, которая способна снижать уровень «стрессового этилена» у растений, предотвращая у них подавление роста, более быстрое старение, способствуя устойчивости к засухе [9]. И такой эффект частично сохраняется и на стадии восковой спелости, когда численность микроорганизмов в опытных образцах уже в меньшей степени отличается от значений в контроле при более жестких условиях засухи, когда коэффициент влажности почвы равен 0,9 %. Если говорить конкретно о пшенице, то следует упомянуть обзор [10], в котором рассматриваются различные фундаментальные механизмы взаимодействия *Bacillus* spp. с растениями пшеницы в условиях засухи, которые могут быть использованы, с точки зрения автора обзора, для разработки микробных препаратов и их применения в экологически ориентированной технологии культивирования упомянутого злака в условиях неустойчивого климата.

Рассмотрим влияние сроков внесения биопрепарата Грамисил (осенний и весенний сроки) на количественный состав и качественный спектр представителей почвенного микробиоценоза в образцах почвы, отобранных в полевых посевах озимой пшеницы 2025 года.

Таблица 3 – Численность представителей микробиоценоза почвы при осеннем внесении биопрепарата Грамисил в посевах озимой пшеницы, КОЕ/г абс.сух. почвы  $\times 10^6$  (2025)

Группа микроорганизмов	Фаза кушения		Фаза выход в трубку		Фаза цветения	
	к1	о1	к2	о2	к3	о3
аммонифицирующие	24,3±4,0	24,8±0,9	26,8±4,9	8,8±0,4*	31,4±1,5	15,8±3,0*
споровые аммонификаторы	2,3±0,1	1,7±0,1*	2,3±0,3	32,6±3,2*	2,7±0,1	2,0±0,1
амилолитические	30,4±2,1	15,0±0,4*	35,3±3,2	13,3±1,1*	45,1±2,0	18,1±2,7*
фосфатмобилизующие	0,4±0,02	0,2±0,03*	0,2±0,03	0,2±0,01	0,2±0,02	0,2±0,01
олигонитрофильные	31,0±0,5	11,5±0,9*	35,2±3,6	14,6±1,4*	42,2±3,1	31,3±6,1
олигокарбофильные	45,3±3,1	41,5±4,1	30,2±2,6	34,2±5,8	9,5±0,3	15,5±2,6
автохтонные	70,8±6,5	19,9±3,3*	18,2±2,6	4,9±0,7*	24,0±0,6	11,4±1,2*
микробицеты, $\times 10^3$	38,1±3,5	142,2±2,4*	11,8±0,7	60,2±5,9*	31,6±2,7	86,5±1,9*

Примечание: \*статистически достоверно при  $p < 0,05$  по сравнению с соответствующим контролем

Таблица 4 – Численность представителей микробиоценоза почвы при весеннем внесении биопрепарата Грамисил в посевах озимой пшеницы, КОЕ/г абс.сух. почвы  $\times 10^6$  (2025)

Группа микроорганизмов	Фаза выход в трубку		Фаза цветения	
	к2	о2	к3	о3
аммонифицирующие	26,8±4,9	13,3±2,3*	31,4±1,5	14,3±3,0*
споровые аммонификаторы	2,3±0,3	1,7±0,1	2,7±0,1	23,3±1,5*

Продолжение таблицы 4

амилолитические	35,3±3,2	14,8±1,0*	45,1±2,0	45,5±6,5
фосфатмобилизующие	0,2±0,03	0,3±0,07*	0,2±0,02	0,2±0,1
олигонитрофильные	35,2±3,6	15,5±1,7*	42,2±3,1	25,8±3,6*
олигокарбофильные	30,2±2,6	30,5±4,2	9,5±0,3	15,3±5,2
автохтонные	18,2±2,6	4,7±1,3*	24,0±0,6	72,5±9,6*
микромитцы, $\times 10^3$	11,8±0,7	39,1±5,9*	31,6±2,7	118,4±3,5*

Примечание: \*статистически достоверно при  $p < 0,05$  по сравнению с соответствующим контролем.

При анализе данных таблиц 3 и 4 установлено, что большая часть представителей зимогенной и олиготрофной экологических ниш на всех фазах отбора почвы, независимо от сроков внесения биопрепарата, в опытных вариантах по отношению к контрольным значениям сохраняет одинаковую направленность в изменении показателя КОЕ/г. Чаще это либо сопоставимая с контролем численность, либо существенное снижение численности микроорганизмов. По группе «споровые аммонификаторы» отмечена несколько иная реакция. В частности, при осеннем внесении биопрепарата установлено резкое в 14 раз увеличение численности бактерий почвы, отобранной в фазу выхода в трубку (таблица 3). В образцах, отобранных в фазу цветения, выявлен возврат численности в опытном варианте к контрольному значению. При весеннем внесении биопрепарата подобный пик численности споровых аммонификаторов установлен для опытных образцов, отобранных в фазу цветения (таблица 4). Для пояснения упомянутых опытных данных по споровым аммонификаторам, большинство из которых представлены аэробными видами рода *Bacillus*, следует, во-первых, указать на изменение влажности почвы по срокам ее отбора: 7,4–9,1 % (в фазе кущения), 14,9–18,2 % (в фазе выход в трубку), 8,2–9,1 % (в фазе цветения), т. е. засушливый период чередуется с умеренной влажностью почвы. Во-вторых, в многочисленных исследованиях доказано, что *Bacillus* spp. являются природными регуляторами роста, относящимися к группе PGPB (Plant Growth-Promoting Bacteria), стимулирующих рост растений [10] и реализующих их адаптивный потенциал при неблагоприятных условиях среды. Мы можем констатировать задержку активного роста и развития спорообразующих бактерий, которая выразилась в увеличении показателя КОЕ/г при весеннем внесении биопрепарата в фазу цветения по сравнению с более ранним проявлением активности роста бактерий в фазе выход в трубку при обработке биопрепаратом в осенний период. Однако имеющиеся в литературе результаты, тем не менее не позволяют четко определить механизмы *Bacillus*-опосредованной засухоустойчивости пшеницы, а наоборот поднимают множество новых вопросов, связанных в том числе с метаболическими путями бацилл [10].

Отдельно следует упомянуть представителей автохтонной экологической ниши, относящейся к коренной почвенной микробиоте, которая контролирует процессы разложения специфического органического вещества, трансформации и продуцирования гумусовых соединений почвы. Как известно, при нормальном питательном режиме автохтонная микробиота обычно не доминирует [11]. Таким образом, полученные в эксперименте существенно сниженные по сравнению с контролем значения численности микроорганизмов опытных вариантов свидетельствуют об оптимальном количественном и качественном составе их питатель-

ного субстрата, независимо от сроков внесения Грамисила. Активное развитие автохтонных микроорганизмов было отмечено при весеннем внесении биопрепарата в образцах почвы, отобранной в фазе цветения, о чем свидетельствует значение КОЕ/г равное  $72,5 \pm 9,6$  (таблица 4). Обращаем внимание, что аналогичный результат ( $70,85 \pm 6,5$  КОЕ/г) был получен для контрольного варианта к1, при отборе почвы в фазе кушения в опыте «осеннее внесение биопрепарата» (таблица 3). Как известно, обсуждаемая микробиота не способна усваивать элементы питания из легкодоступного органического вещества. Автохтонные микроорганизмы используют только специфические органические компоненты почвы различной степени гумификации как источник энергии и субстраты биосинтетических процессов. По-видимому, после зимнего и ранневесеннего периода в почве происходит накопление разных форм гумусовых компонентов, что могло повлиять на активизацию микроорганизмов автохтонной группы, в то время как на протяжении исследуемого вегетационного периода действие биопрепарата Грамисил подавляет процессы изменения гумусового режима почвы. Упомянутое значение КОЕ/г в опыте, равное  $72,5 \pm 9,6$ , с нашей точки зрения, частично объясняется также активизацией представителей микромицетов.

В отношении микромицетов миксотрофно-синтетической экологической ниши следует подчеркнуть существенное возрастание показателя КОЕ грибных зачатков/г в опытных вариантах по сравнению с контролем, независимо от сроков внесения биопрепарата и сроков отбора почвы. Как известно, микромицеты активно участвуют в процессах деструкции и трансформации как свежего, так и промежуточного, и специфического вещества почвы, включая продуцирование пигментов гумусовых соединений.

Проанализируем влияние биопрепарата Грамисил на эколого-трофические индексы и коэффициенты (таблица 5).

*Таблица 5 – Влияние биопрепарата Грамисил на эколого-трофические индексы и коэффициенты*

Показатели	Фаза кушения		Фаза выход в трубку				Фаза цветения/восковая спелость			
	к1о	о1о	к2о	о2о	к2в	о2в	к3о	о3о	к3в	о3в
<b>2024 год</b>										
коэффициент минерализации	0,7	1,6	1,5	1,9	1,5	1,2	1,4	1,6	1,6	2,0
индекс олиготрофности	1,2	2,4	2,0	2,2	2,0	2,0	1,3	1,0	2,6	1,9
коэффициент педотрофности	1,3	1,8	1,7	1,2	1,7	1,2	1,5	0,8	0,9	1,1
<b>2025 год</b>										
коэффициент минерализации	1,3	0,6	1,3	1,5	1,3	1,1	1,4	1,2	1,4	3,2
индекс олиготрофности	1,9	1,7	1,1	3,9	1,1	2,3	0,3	1,0	0,3	1,1
коэффициент педотрофности	2,9	0,8	0,7	0,6	0,7	0,4	0,8	0,7	0,8	5,1

Примечание: о – осеннее внесение биопрепарата; в – весеннее внесение биопрепарата

На основании микробиологического анализа отобранных образцов почвы установлено, что на протяжении двух лет исследования в опытных вариантах по сравнению с контрольными доминировали иммобилизационные процессы либо

незначительно снижались во всех сроках отбора. Имеет смысл акцентировать внимание на значении коэффициента минерализации, равное 3,2, определенное для опытного образца почвы, отобранного в фазе цветения в 2025 году. Такая величина значения может указывать на повышение скорости разложения гумуса. Существенную разницу более чем в 2 раза отмечали в образцах почвы, отобранной в фазе кушения: в 2024 году – в сторону увеличения коэффициента минерализации, в 2025 году – в сторону уменьшения значения коэффициента минерализации. В первом случае это определено сильным развитием аммонификаторов, что указывает на большую обеспеченность почвы аммиачным азотом, во втором случае снижается степень развития амилитической части микробной флоры, и, соответственно, ее активность в связывании свободного азота [11]. Последнее подтверждается также существенным уменьшением численности олигонитрофильных бактерий, которые включают азотфиксирующие бактерии.

Не установлено существенного влияния сроков внесения биопрепарата под культуры на процессы превращения белковых соединений почвы.

Индекс олиготрофности Аристовской характеризует активность олиготрофной части почвенного микробоценоза, которая принимает участие в превращении промежуточного органического вещества до конечных продуктов специфического органического вещества, включающих, в частности, гуминовые кислоты, гумины и иные соединения. Значения индекса олиготрофности, установленные при изучении почвенных образцов опытных вариантов исследуемых двух вегетационных периодов, вне зависимости от сроков внесения Грамисила, указывают на одинаковую направленность процессов (таблица 5).

В то же время по годам есть отличия для образцов почвы, отобранных в фазах кушения и восковая спелость/цветение. Значение показателя «индекс олиготрофности», полученный на основании анализа образцов почвы, отобранных в фазу кушения и равный 2,4 (в контроле – 1,2) свидетельствует о том, что биопрепарат Грамисил в 2024 году индуцировал замедление процессов деструкции промежуточного органического вещества, а в 2025 году аналогичные результаты получены в фазе выход в трубку (абсолютное снижение активности процессов биохимического упрощения органических остатков) и фазе восковая спелость/цветение (относительное замедление скорости процессов превращения в отношении значений контроля). Вышесказанное может указывать на переход изучаемого микробоценоза в более устойчивое состояние, близкое к состоянию климаксовой системы [11].

Значения коэффициента педотрофности (таблица 5), установленные на основании изучения опытных образцов почвы обоих вегетационных периодов, в частности с 1,7 до 1,2 и с 0,7 до 0,4, отобранных в фазе выход в трубку, свидетельствуют о снижении в большей или меньшей степени устойчивости изучаемого биогеоценоза к негативным воздействиям по сравнению с контролем в виду уменьшения величины анализируемого коэффициента. В данный период замедление процессов деструкции промежуточного органического вещества определяет снижение активности процессов превращения специфического органического вещества почвы через реакции поликонденсации и полимеризации в гумусовые вещества почвы. В свою очередь, для опытных образцов почвы, отобранных в фазах кушения и восковой спелости/цветения, выявлена разная реакция по годам. Более высокое значение коэффициента педотрофности, равное 1,8 (в контроле 1,3), и значение 5,1 (в контроле 0,8) свидетельствуют об усилении гумификации промежуточного

вещества представителями олиготрофной микробной ниши, что инициирует интенсификацию процессов разложения, трансформации и продуцирования гумуса. Данные процессы существенно повышают устойчивость ценоза к негативным воздействиям со стороны прежде всего биотических факторов среды [11].

### Заклучение

На основании выполненного микробиологического изучения биопрепарата Грамисил, используемого для прикорневой подкормки в фазе кущения в двух сроках (осенний и весенний периоды) в посевах озимой пшеницы, культивированной на почвах юго-восточного региона республики, установлено следующее:

1) внесение биопрепарата Грамисил приводит для большинства представителей микроорганизмов почвы зимогенной, олиготрофной, автохтонной экологических ниш к достоверному снижению их численности по сравнению с контролем, что, вероятно, связано с активизацией энергозатратных процессов адаптивности представителей микробного сообщества опытных вариантов к меняющимся биотическим и абиотическим компонентам агроэкосистемы, включая стрессовые метеоусловия;

2) значения эколого-трофических коэффициентов и индексов свидетельствуют об отсутствии существенного влияния сроков внесения биопрепарата под озимую пшеницу на процессы превращения белковых соединений почвы и на одинаковую направленность процессов деструкции промежуточного органического вещества и его начальной гумификации.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Препарат микробный «Грамисил», [Электронный ресурс]. – URL: <https://pesticidy.by/mikrobiologicheskie-udobreniya/preparat-mikrobnuyj-gramisil-zh/>. (дата обращения: 20.01.2025).
2. **Концевая, И. И.** Влияние биопрепарата Грамисил в посевах озимого ячменя на агрономические ценные группы почвенных микроорганизмов / И. И. Концевая [и др.] // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2025. – № 3 (150). – С. 25–31.
3. **Чернова, Т. И.** Управление почвенными микробными сообществами: возможности и перспективы / Т. И. Чернова, М. В. Семенова // Почвоведение. – 2021. – № 12. – С. 1506–1522.
4. **Timofeeva, A.** Prospects for Using Phosphate-Solubilizing Microorganisms as Natural Fertilizers in Agriculture / A. Timofeeva, M. Galyamova, S. Sedykh // Plants. – 2022. – № 11. – P. 2119.
5. Климатическая характеристика мая 2024 года [Электронный ресурс]. – URL: <https://pogoda.by/information/news/21916>. (дата обращения: 20.11.2025).
6. **Концевая, И. И.** Влияние микробных удобрений на взаимоотношения основных эколого-трофических групп почвенных микроорганизмов в посевах ярового ячменя в условиях засухи / И.И. Концевая [и др.]. // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2024. – № 3 (144). – С. 46–51.
7. Климатическая характеристика весеннего сезона 2025 года [Электронный ресурс]. – URL: <https://belgidromet.by/ru/climatolog-ru/view/klimaticheskaja-xarakteristika-vesennego-sezona-2025-goda-9949-2025/> (дата обращения: 25.10.2025).
8. Климатическая характеристика летнего сезона 2025 года [Электронный ресурс]. – URL: <https://belgidromet.by/ru/climatolog-ru/view/klimaticheskaja-xarakteristika-letnego-sezona-2025-goda-10625-2025/> (дата обращения: 25.10.2025).
9. **Yang, S. F.** Ethylene Biosynthesis and its Regulation in Higher Plants / S. F. Yang, N. E. Hoffman // Annual review of plant biology. – 1984. – Vol. 35. – P. 155–189. <https://doi.org/10.1146/annurev.pp.35.060184.001103>

10. *Ласточкина, О. В.* Адаптация и устойчивость растений пшеницы к засухе, опосредованная природными регуляторами роста *Bacillus* spp.: механизмы реализации и практическая значимость / О. В. Ласточкина // Сельскохозяйственная биология. – 2021. – Т. 51, № 5. – С. 843–867. doi: 10.15389/agrobiology.2021.5.843rus

11. *Титова, В. И.* Методы оценки функционирования микробиоценоза почвы, участвующего в трансформации органического вещества: науч. метод. пособие / В. И. Титова, А. В. Козлов. – Н. Новгород : Нижегород с.-х. акад., 2012. – 192 с.

Поступила в редакцию 09.01.2026 г.

Контакты: [dajneko@gsu.by](mailto:dajneko@gsu.by) (Дайнеко Николай Михайлович, Концевая Ирина Ильинична, Тимофеев Сергей Федорович, Дайнеко Дарья Валентиновна, Айглова Екатерина Александровна).

*Daineko N. M., Kontsevaya I. I., Timofeev S. F., Daineko D. V., Aiglova E. A.*  
**INFLUENCE OF THE BIOPREPARATION GRAMISIL IN WINTER WHEAT CROPS ON AGRONOMICALLY VALUABLE GROUPS OF SOIL MICROORGANISMS**

*A microbiological study of the biopreparation “Gramisil” used for root application during the tillering phase of winter wheat in two application periods (autumn and spring) was conducted in the soils of the southeastern region of Belarus. The analysis of ecologo-trophic coefficients and indices revealed that the timing of the biopreparation application does not have a significant impact on the transformation processes of soil protein compounds. The study demonstrated a consistent direction in the processes of intermediate organic matter destruction and its initial humification, regardless of the application period.*

**Keywords:** winter wheat, soil microbiocenosis, ecologo-trophic groups of soil microorganisms, Gramisil.

УДК 633.2.033:539.16.04:504.5:546.36\*137:637.5:637.1

## ВЛИЯНИЕ БИОЛОГИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ ТРАВСТОЯ И ПЛОТНОСТИ РАДИОАКТИВНОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ НА ПАРАМЕТРЫ ПЕРЕХОДА $^{137}\text{Cs}$ В МОЛОЧНО-МЯСНУЮ ПРОДУКЦИЮ КРС

**Н. И. Карпенко**

аспирант

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

**С. Ф. Тимофеев**

кандидат сельскохозяйственных наук, доцент

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

*Проводили исследования поймы р. Сож, было установлено, что при выгульном содержании КРС в летний период в качестве корма можно использовать злаки и осоки при различной  $Q_n$ . Введение в рацион КРС представителей подгруппы бобовые возможно лишь при  $Q_n$  35 Ки/км<sup>2</sup> для выращивания молодняка на мясо. При стойловом содержании КРС в зимний период рекомендуется использовать в рационе скота сено, заготавливаемое из подгруппы многолетних злаковых трав. Между тем возможно введение в рацион КРС сена, заготавливаемого, в том числе из подгруппы многолетних бобовых трав при  $Q_n$  35 и 14 Ки/км<sup>2</sup>, как для выращивания молодняка КРС на мясо, так и для лактирующих коров. Полученные результаты обуславливают комбинированное влияние параметров  $Q_n$  и  $A$  на изменение значений КП (около 96%).*

**Ключевые слова:** пойма, миграция  $^{137}\text{Cs}$ , молочно-мясная продукция, травянистые корма, крупный рогатый скот.

### Введение

Развитие сельского хозяйства – это неотъемлемая составляющая экономики всего мира. В условиях конкуренции на мировом рынке создается спрос на качественные продукты питания. В сельскохозяйственном производстве Республики Беларусь важная роль отводится молочно-мясной промышленности, которая является важнейшим фактором развития устойчивой и стабильной экономики. Качество мясо-молочной продукции обусловлено многими факторами, в том числе содержанием радионуклидов.

Радиационное загрязнение представляет собой один из параметров, понижающих качества такой продукции. Потребление загрязненной радионуклидами пищи приводит к повышению доз внутреннего облучения населения [1]. Как известно, качество молочно-мясной продукции в немалой степени зависит от рациона сельскохозяйственных животных. Неотъемлемая часть последнего – это объемы потребления и качество заготавливаемых кормов.

После катастрофы на ЧАЭС значительные площади луговых сообществ в поймах рек Днепр, Сож, Припять и их притоков оказались загрязнены долгоживущими радионуклидами; из состава сельскохозяйственных были выведены земли, загрязненные  $^{137}\text{Cs}$  более 40 Ки/км<sup>2</sup>, и вошедшие в состав зон отчуждения и отселения. Площадь таких земель составила 216,3 тыс. га в Гомельской и 47,0 тыс. га в Могилевской областях [2, 3].

© Карпенко Н. И., Тимофеев С. Ф., 2026

В настоящее время в сельскохозяйственном пользовании нашей страны находится около 848 тыс. га земель, загрязненных  $^{137}\text{Cs}$  с плотностью от 1 до 40 Ки/км<sup>2</sup>, из которых 39,4% находятся в Гомельской и 19,7% в Могилевской областях. Как известно, основной задачей кормопроизводства является заготовка и производство кормов, соответствующих действующим нормативам [4]. Пойменные луга являются важнейшими экосистемами, используемыми в качестве сенокосно-пастбищных угодий.

В условиях радиоактивного загрязнения заливных лугов  $^{137}\text{Cs}$  мигрирует в звене почва-растение-организм животного [5, 6]. Необходимо отметить, что пойменные луга даже при низкой плотности радиоактивного загрязнения (от 111 кБк/м<sup>2</sup> или от 3,0 Ки/км<sup>2</sup>) могут быть источником получения кормов с повышенным содержанием радионуклидов [7].

Луга в Республике Беларусь занимают более 3,2 млн га, на долю пойменных приходится 5,2 % лугов. В Гомельской области всего 0,6 млн га лугов, из них пойменных – 92,1 тыс. га или более половины (54,6 %) всех пойм Беларуси. Значительные площади заливных лугов Гомельщины связаны с поймой рек Сож и Припять. Природные луга в пойме р. Сож являются важными природно-ландшафтными комплексами и ценными естественными кормовыми угодьями [8]. Поймы используются в основном для выгульного содержания крупного рогатого скота (далее КРС) в летний период. Основным компонентом рациона КРС при таком содержании является зеленый корм. В этом случае зеленые корма определяются как референтный компонент рациона. Стоит отметить существующие отличия между рационами кормления лактирующих коров, а также КРС, выращиваемого на мясо при стойловом содержании в зимний период.

Основой рациона лактирующих коров в зимне-стойловый период содержания в большинстве случаев служат грубые корма, одним из которых является сено, а также различные концентраты, тогда как при откорме животных на мясо основной вклад в рацион вносит силос [9, 10, с. 42]. Так или иначе, поймы играют важную роль в сельскохозяйственном производстве, являясь источником получения дешевых кормов.

По нашему мнению, в условиях радиоактивного загрязнения необходимо продолжение мониторинговых исследований заливных лугов, которые используются в сельском хозяйстве как в качестве пастбищ, так и в качестве сенокосов.

Так как точность прогнозирования накопления  $^{137}\text{Cs}$  в сочных и грубых кормах зависит от значений показателей коэффициента пропорциональности или перехода (далее КП), которые, в свою очередь, изменяются под воздействием следующих факторов: тип почвы и ее свойства, время поступления радионуклидов в почву, климатические условия и др., в виду этого необходимо регулярно актуализировать их значения.

В наших исследованиях изучали фрагмент поймы р. Сож, который с различной регулярностью используется в качестве пастбища для КРС. Исследуемый фрагмент поймы располагается в окрестностях нп. Шерстин Ветковского района Гомельской области.

Цель исследования: на основании изучения параметров миграции  $^{137}\text{Cs}$  в звене почва-растение-организм оценить переход  $^{137}\text{Cs}$  в мясо-молочную продукцию КРС при различной плотности загрязнения.

Задачи исследования:

1) Оценить значения коэффициента пропорциональности или перехода в звене почва-растение для травостоя пойменного луга.

2) Определить концентрацию  $^{137}\text{Cs}$  ( $A_{\text{пр}}$ ) в мясо-молочной продукции при различной плотности загрязнения ( $Q_{\text{п}}$ ).

3) Выявить влияние биологических особенностей растений и плотности радиоактивного загрязнения на прогнозные параметры накопления  $^{137}\text{Cs}$  в молоке и мясе.

*Методы исследования:* полевой, гамма-спектрометрический, статистический анализ. Полевые исследования проводились путем отбора проб растительных образцов в фазе укосной спелости. Растения срезали, после чего с помощью «Определителя высших растений Беларуси» [11], а также пакетов цифровых прикладных программ PlantNet и PictureThis определяли видовой состав растительности. Сопреженные почвенные образцы отбирали методом учетных площадок. Для определения плотности загрязнения выполняли отбор кернов почвы послойно, шагом 5 см, на глубину до 20 см специализированным пробоотборником с внутренним диаметром 8,3 см. Конструкция прибора минимизировала смещение слоев почвы. Среднюю пробу для спектрометрирования отбирали методом квартования [12 с. 17–19]. В камеральных условиях путем использования бета-гамма-спектрометра МКС-АТ1315 изучали параметры содержания  $^{137}\text{Cs}$  в почвенно-растительных пробах. Спектрометрический анализ отобранных проб выполняли в Институте радиобиологии НАН Беларуси. Статистическую обработку результатов исследований проводили по Б. А. Доспехову [13].

### Основная часть

Как упоминали ранее, проводили исследования фрагмента пойменного луга р. Сож. На территории поймы периодически осуществляют летний выпас КРС. Данная периодичность имеет нерегулярный характер, в целом пойма используется в качестве пастбища в основном в летнее время. Кроме того, некоторые фрагменты луговых угодий задействованы в качестве объектов для заготовки сена.

На основании ранее проведенных исследований путем анализа удельной активности  $^{137}\text{Cs}$  в почвенных образцах было установлено, что средняя плотность загрязнения ( $Q_{\text{п}}$ ) изучаемой территории радионуклидом  $^{137}\text{Cs}$  варьировала от 1288 кБк/м<sup>2</sup> в 2019 г., 540 кБк/м<sup>2</sup> в 2022 г. до 532 кБк/м<sup>2</sup> в 2025 г. или 35 Ки/км<sup>2</sup> в 2019 г., 15 Ки/км<sup>2</sup> в 2022 г. и 14 Ки/км<sup>2</sup> в 2025 г. Такая вариабельность параметров загрязнения, вероятно, обусловлена неравномерностью и нерегулярностью затопления поймы.

Необходимо отметить, что до 2015 г. затопление пойменного луга наблюдалось систематически. Начиная с 2015 г., на фоне изменения климата нами было отмечено прекращение затопления поймы вплоть до 2021 года. После длительного периода отсутствия затопления пойменного луга в весенний период 2022 г. было зафиксировано половодье, которое прослеживалось до 2025 г. включительно. По данным Государственного учреждения «Республиканский центр по гидрометеорологии, контролю радиоактивного загрязнения и мониторингу окружающей среды», а также нашим наблюдениям, в результате сезонных паводков в Гомельской области отмечалось повышение уровня воды в реке Сож, а также на изучаемом участке. Вероятно, такие колебания в периодичности затопления поймы обуславливают неравномерность распределения радионуклида по горизонтам почвы, что выражается в полученных значениях плотности загрязнения.

При проведении исследований на заранее подготовленных площадках, используемых для выпаса скота, а также заготовки грубых кормов, отбирали пробы растений. Растительные образцы представлены злаковыми, бобовыми, разнотравными и осоковыми агроботаническими подгруппами. Отобранные растения разбирали и анализировали по видовому и агроботаническому составу. После чего высушивали до воздушно-сухого состояния, затем дополнительно просушивали в сушильном шкафу при температуре 60 °С до постоянной массы [14, с. 3–9], в последующем измельчали на роторной мельнице и определяли удельную активность  $^{137}\text{Cs}$ . При спектрометрировании растительных образцов использовали сосуд Маринелли объемом 0,5 л. Такая геометрия сосуда обеспечивает наилучшую плотность заполнения, необходимую для получения наиболее достоверных результатов удельной активности  $^{137}\text{Cs}$  в изучаемых пробах растений. Плотность радиоактивного загрязнения ( $Q_n$ ) определяли путем пересчета удельной активности  $^{137}\text{Cs}$  в Бк/кг на массу почвы на 1 м<sup>2</sup>, то есть кБк/м<sup>2</sup>.

При проведении исследований, на основании рациона КРС, корма подразделяли на две группы.

– Зеленая масса (влажность 82%) – при пастбищном кормлении в летний период. Эту группу подразделяли на агроботанические подгруппы растений (таблица 1).

Таблица 1 – Результаты значений КП  $^{137}\text{Cs}$  в изучаемых агроботанических подгруппах в зависимости от  $Q_n$

№ п.п.	Агроботаническая подгруппа	Год	$Q_n$ кБк/м <sup>2</sup> / Ки/км <sup>2</sup>	КП Бк/кг:кБк/м <sup>2</sup>
1	злаковые	2019	1288 / 35	0,03
		2022	540 / 15	0,15
		2025	532 / 14	0,17
2	Бобовые	2019	1288 / 35	0,15
		2022	540 / 15	0,56
		2025	532 / 14	0,47
3	разнотравье	2019	1288 / 35	0,10
		2022	540 / 15	0,32
		2025	532 / 14	0,36
4	осоковые	2019	1288 / 35	0,04
		2022	540 / 15	0,20
		2025	532 / 14	0,11

– Сено (влажность 16%) – кормление КРС при стойловом содержании в зимний период, представлено двумя подгруппами (таблица 2):

Таблица 2 – КП  $^{137}\text{Cs}$  в изучаемых подгруппах в зависимости от  $Q_n$

№ п.п.	Подгруппа	Год	$Q_n$ кБк/м <sup>2</sup> / Ки/км <sup>2</sup>	КП Бк/кг:кБк/м <sup>2</sup>
1	многолетние злаковые травы на пойменных землях	2019	1288 / 35	0,13
		2022	540 / 15	0,71
		2025	532 / 14	0,78
2	многолетние бобовые травы на пойменных землях	2019	1288 / 35	0,68
		2022	540 / 15	2,56
		2025	532 / 14	2,16

Для определения концентрации радионуклида в сене использовали коэффициент перехода или пропорциональности (КП), формула 1.

$$\text{КП} = A / Q_n \quad (1),$$

где КП – коэффициент перехода или пропорциональности Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>,

A – удельная активность Бк/кг,

Q<sub>n</sub> – плотность загрязнения почвы кБк/м<sup>2</sup>.

Для зеленой массы при расчете значений КП вводили поправочный коэффициент, который равен 4,6 [8, с. 156], в результате чего формула 1 имела вид:

$$\text{КП} = (A / 4,6) / Q_n \quad (2)$$

Для определения накопления <sup>137</sup>Cs в молоке и мясе КРС в зависимости от кормовой подгруппы и Q<sub>n</sub> использовали формулу 3 [15, с. 264–265]:

$$A_{\text{пр}} = \text{КП} \times Q_n \quad (3),$$

где A<sub>пр</sub> – концентрация радионуклида в продукте (кормовой подгруппе) для получения молока-говядины Бк/кг,

КП – коэффициент перехода радионуклида из почвы в продукт Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>,

Q<sub>n</sub> – содержание радионуклида в почве кБк/м<sup>2</sup>.

Полученные результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Прогноз концентрации <sup>137</sup>Cs в продукте (молоке-говядине) в зависимости от кормовой подгруппы и Q<sub>n</sub>

Год	Q <sub>n</sub> кБк/м <sup>2</sup> / Ки/км <sup>2</sup>	Группа корма	Кормовая подгруппа	A <sub>пр</sub> , Бк/кг	РДУ для получения мяса, Бк/кг	РДУ для получения молока цельного, Бк/кг
2019	1288 / 35	Зеленая масса	злаковые	37	240	165
2022	540 / 15			83		
2025	532 / 14			89		
2019	1288 / 35		бобовые	189		
2022	540 / 15			301		
2025	532 / 14			250		
2019	1288 / 35		разнотравье	128		
2022	540 / 15			174		
2025	532 / 14			191		
2019	1288 / 35		осоковые	55		
2022	540 / 15			110		
2025	532 / 14			58		
2019	1288 / 35	Сено	многолетние злаковые травы	168	1300	
2022	540 / 15			383		
2025	532 / 14		на пойменных землях	411		
2019	1288 / 35		многолетние бобовые травы на пойменных землях	870		
2022	540 / 15			1384		
2025	532 / 14			1152		

Полученные результаты исследований анализировали в соответствии с «Республиканскими допустимыми уровнями содержания  $^{137}\text{Cs}$  и  $^{90}\text{Sr}$  в сельскохозяйственном сырье и кормах» [16].

Было установлено, что прогнозные оценки превышения действующих нормативов могут быть в следующих случаях:

1. При использовании зеленой массы растений подгруппы бобовые на корм скоту для заготовки молока цельного. Прогноз превышения нормативов просчитан как при 35, так и 14, 15 Ки/км<sup>2</sup>. Для подгруппы разнотравье превышения допустимых уровней могут быть как при  $Q_{\text{н}}$  15 Ки/км<sup>2</sup> (2022 г.) – 174 из допустимых 165 Бк/кг, так и при  $Q_{\text{н}}$  загрязнения 14 Ки/км<sup>2</sup> (2025 г.) – 191 из 165 Бк/кг.

2. При использовании зеленой массы растений подгруппы бобовые для заключительного откорма при  $Q_{\text{н}}$  15 Ки/км<sup>2</sup> (2022 г.) – 301 из допустимых 240 Бк/кг, а также при  $Q_{\text{н}}$  14 Ки/км<sup>2</sup> (2025 г.) – 250 из 240 Бк/кг.

3. При использовании для заготовки сена на корм скоту представителей подгруппы многолетние бобовые травы на пойменных землях с  $Q_{\text{н}}$  15 Ки/км<sup>2</sup> (2022 г.) – 1384 из допустимых 1300 Бк/кг.

Проведенная прогнозная оценка содержания радионуклида в мясо-молочной продукции позволяет ранжировать травянистые корма по следующим категориям:

1. Условно чистый зеленый корм. Корм используемый при выгульном содержании КРС в летний период, в который входят злаки и осоки ( $Q_{\text{н}}$  35, 15, 14 Ки/км<sup>2</sup>). Установлено, что  $Q_{\text{н}}$  не оказывает существенного влияния на радиационное загрязнение такого корма. Однако отсутствие в рационе белка, который обеспечивается потреблением трав из подгруппы бобовые, не может обеспечить сбалансированное питание КРС. Введение в рацион КРС бобовых возможно при  $Q_{\text{н}}$  35 Ки/км<sup>2</sup> для выращивания молодняка КРС на мясо.

2. Условно загрязненный корм. В данную группу входят многолетние бобовые травы на пойменных землях при  $Q_{\text{н}}$  15 Ки/км<sup>2</sup>. Возможно введение в рацион КРС данной подгруппы кормов если  $Q_{\text{н}}$  составляет 35 или 14 Ки/км<sup>2</sup> для заготовки сена при стойловом содержании, в том числе для лактирующих коров.

На основании поставленных задач производили расчеты КП радионуклида  $^{137}\text{Cs}$  для изучаемого фрагмента поймы реки Сож при иных значениях плотности загрязнения почвы (таблица 4). Расчет осуществляли с помощью формул 1-2, используя среднюю удельную активность ( $A_{\text{ср}}$ ), полученную на основании результатов исследования 2019-2025 гг. отдельно для конкретной агроботанической подгруппы.

Таблица 4 – Прогноз значений КП  $^{137}\text{Cs}$  в зависимости от  $Q_{\text{н}}$

Кормовая группа	Кормовая подгруппа	$Q_{\text{н}}$ кБк/м <sup>2</sup> / Ки/км <sup>2</sup>	КП Бк/кг:кБк/м <sup>2</sup>
зеленая масса	бобовые	1480 / 40	0,21
		1110 / 30	0,28
		740 / 20	0,42
		370 / 10	0,84
	злаковые	1480 / 40	0,05
		1110 / 30	0,06
		740 / 20	0,09
		370 / 10	0,19

Продолжение таблицы 4

	разнотравье	1480 / 40	0,11
		1110 / 30	0,15
		740 / 20	0,22
		370 / 10	0,44
	осоковые	1480 / 40	0,05
		1110 / 30	0,07
		740 / 20	0,10
		370 / 10	0,20
Сено	многолетние бобовые травы на пойменных землях	1480 / 40	0,77
		1110 / 30	1,02
		740 / 20	1,53
		370 / 10	3,07
	многолетние злаковые травы на пойменных землях	1480 / 40	0,22
		1110 / 30	0,29
		740 / 20	0,43
		370 / 10	0,87

Оценку влияния  $Q_n$  на изменение значений КП проводили в программе STATISTICA версии 10 – это система для статистического анализа данных, включающая широкий набор аналитических процедур и методов, таких как корреляционный анализ, многомерная регрессия, методы кластеризации, а также предоставляющая пользователям возможность работать с более чем 100 типами графиков.

Для определения степени влияния одного параметра ( $Q_n$ ) на другой (КП) выполняли регрессионный анализ путем моделирования результатов исследования. Регрессионный анализ помогает количественно оценить и смоделировать корреляцию между изменением  $Q_n$  и параметрами КП. Результаты моделирования представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Результаты регрессионного анализа влияния  $Q_n$  на КП

Статистические показатели	Значения
множест. R	0,61
множест. $R^2$	0,39
скоррект. $R^2$	0,33
F (1, 12)	6,31
P	0,03
стандартная ошибка оценки	0,14

Значение 0,61 множественного коэффициента корреляции означает умеренную положительную связи между предиктором ( $Q_n$ ) и зависимой переменной (КП). Зависимая переменная, то есть КП на 61% объясняется воздействием  $Q_n$ . Предиктор оказывает статистически значимое влияние ( $p < 0.05$ ). Тем не менее, данная математическая модель объясняет лишь около трети вариации зависимой переменной ( $R^2 \approx 0,39$ ). Это означает что лишь 39% изменчивости КП зависит от плотности загрязнения. Большая часть изменчивости объясняется другими факторами, в зависимости от контекста (или не включенными в модель или случайными).

Дополнительно проводили анализ проверки полученных данных на нормальность остатков (рисунок 1). Нормальность остатков позволяет убедиться в адекватности и надежности полученных результатов.

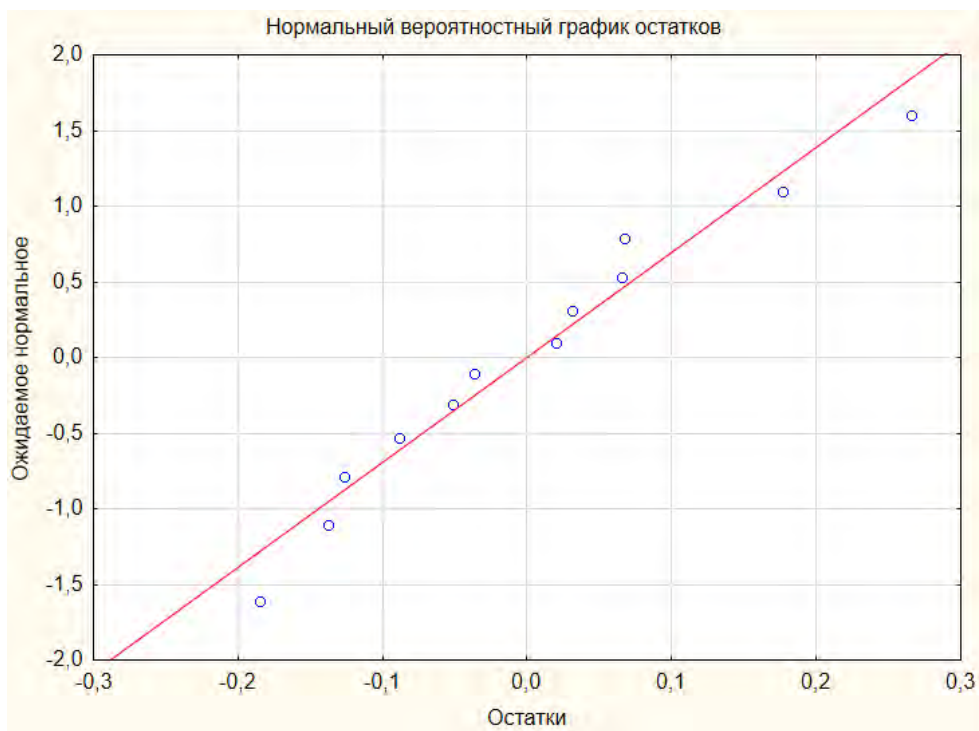


Рисунок 1 – Результаты анализа полученных данных на нормальность остатков

В приведенном анализе наблюдаемые значения довольно плотно укладываются вдоль теоретически ожидаемой прямой, это означает, что анализируемые данные подчиняются закону нормального распределения. Следовательно, модель адекватно оценивает используемые параметры.

Влияние совокупности параметров ( $Q_d$ ,  $A$ ) на КП определяли аналогичным способом. Полученные результаты представлены в таблице 6.

Таблица 6 – Результаты регрессионного анализа влияния  $Q_d$  и  $A$  на КП

Статистические показатели	Значения
множест. R	0,98
множест. $R^2$	0,96
скоррект. $R^2$	0,95
F (2, 9)	99,23
P	0,00000073
стандартная ошибка оценки	0,039

Полученная математическая модель объясняет примерно 98% вариации зависимой переменной. Около 96% объясняется совокупностью предикторов, что означает высокую объясняющую способность модели. Высокие значения R и  $R^2$  свидетельствуют о сильной связи между предикторами и зависимой переменной. Приведенные данные обуславливают достоверность результатов, что означает

комбинированное влияние  $Q_{II}$  и  $A$  на изменение значений КП. Отсюда следует, что модель очень хорошо описывает данные и является высоко прогнозной. Это высокий показатель, указывающий на то, что факторы в модели тесно связаны с тем, что она прогнозирует.

Возможность применения регрессионного анализа оценивали путем проверки однородности регрессии (рисунок 2).

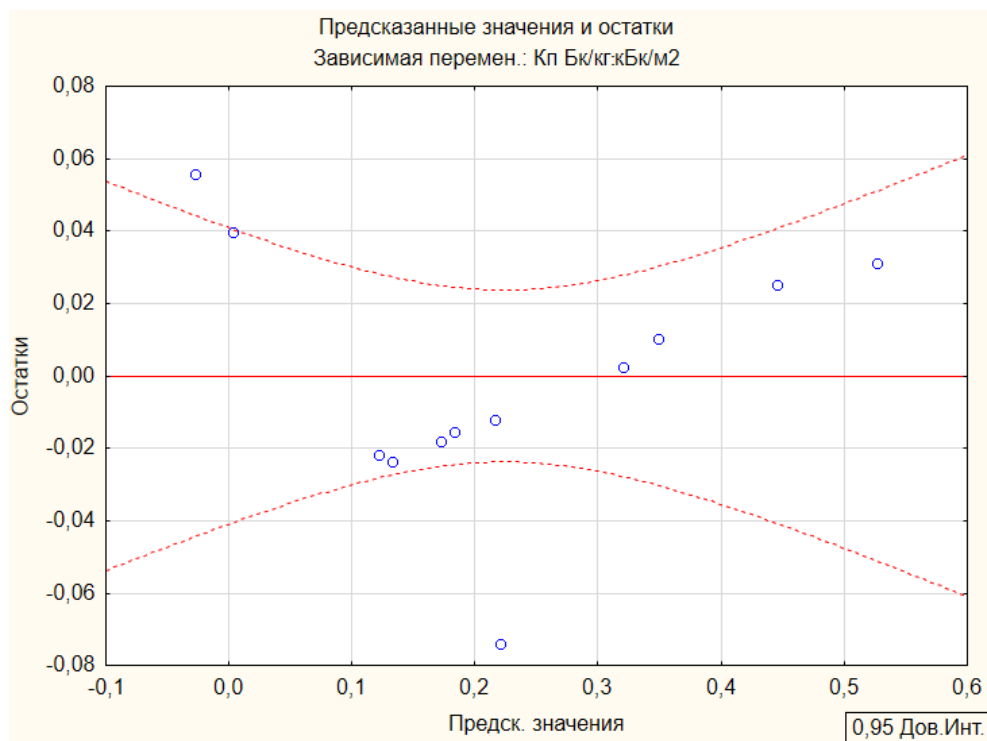


Рисунок 2 – Результат проверки однородности дисперсии

Так как точки на данном графике располагаются хаотично и каких-либо закономерностей не проявляется, это означает соблюдение исследуемых условий и объективность применения регрессионного анализа. Следовательно, модель адекватно оценивает используемые параметры.

### Заключение

При выгульном содержании КРС в летний период в качестве корма можно использовать злаки и осоки как при  $Q_{II}$  14 Ки/км<sup>2</sup>, так и при  $Q_{II}$  35 Ки/км<sup>2</sup>. Установлено, что  $Q_{II}$  не оказывает существенного влияния на радиационное загрязнение такого корма, однако отсутствие в рационе белка, которое обеспечивается потреблением трав из подгруппы бобовых, не может гарантировать сбалансированное питание КРС. Введение в рацион КРС представителей подгруппы бобовые возможно лишь при  $Q_{II}$  35 Ки/км<sup>2</sup>, для выращивания молодняка на мясо.

При стойловом содержании КРС в зимний период рекомендуется использовать в рационе скота сено, заготавливаемое из подгруппы многолетних злаковых

трав. Между тем возможно введение в рацион КРС сена, заготовливаемого, в том числе из подгруппы многолетних бобовых трав при  $Q_{II}$  35 и 14 Ки/км<sup>2</sup>, как для выращивания молодняка КРС на мясо, так и для лактирующих коров.

На основании проведенного статистического анализа было установлено, что 39% изменчивости КП зависит от плотности загрязнения. Большая часть изменчивости объясняется другими факторами в зависимости от контекста (или не включенными в модель или случайными). Полученные результаты обуславливают комбинированное влияние параметров  $Q_{II}$  и  $A$  на изменение значений КП (около 96%).

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Зубец, М. В.* Актуальные проблемы и задачи научного сопровождения производства сельскохозяйственной продукции в зоне радиоактивного загрязнения Чернобыльской АЭС / М. В. Зубец [и др.] // *Агроекологічний журнал*. – 2011. – № 1. – С. 5–20.

2. *Алексахин, Р. М.* Радиоактивное загрязнение почв как тип их деградации / Р. М. Алексахин // *Почвоведение*. – 2009. – № 12. – С. 1487–1498.

3. *Карпенко, А. Ф.* Эколого-экономические проблемы агропроизводства Гомельской области после Чернобыльской катастрофы : моногр. / А. Ф. Карпенко. – Брянск : Дельта, 2012. – 258 с.

4. *Ласько, Т. В.* Параметры перехода <sup>137</sup>Cs в основные кормовые культуры в отдаленный постчернобыльский период / Т. В. Ласько, А. Ф. Карпенко // *Актуальные проблемы интенсивного развития животноводства*. – 2021. – № 24-1. – С. 182–190.

5. *Квасникова, Е. В.* Роль ландшафтных факторов в изменении поля радиоактивного загрязнения <sup>137</sup>Cs в Брянском Полесье / Е. В. Квасникова [и др.] // *Метеорология и Гидрология*. – 2005. – № 6. – С. 83–91.

6. *Подольяк, А. Г.* Рекомендации по использованию загрязненных радионуклидами пойменных земель Белорусского Полесья / А. Г. Подольяк [и др.] // *Комчернобыль. РНИУП «Институт радиологии»*. Комитет по с. х. и продовольствию Гомельского облисполкома. – Гомель, 2001. – 27 с.

7. *Агеева, Т. Н.* Радиоэкологическая оценка пойменных лугов реки Днепр на территории Быховского района / Т. Н. Агеева [и др.] // *Экологический вестник*. – 2014. – № 3. – С. 15–21.

8. *Ласько, Т. В.* Пойменные земли – резерв кормов для животноводства на загрязненной радионуклидами территории / Т. В. Ласько // *Актуальные проблемы интенсивного развития животноводства*. – 2022. – № 25-1. – С. 150–157.

9. *Руководство по производству молока, выращиванию и откорму молодняка крупного рогатого скота: отраслевой регламент* / Минский областной исполнительный комитет, Комитет по сельскому хозяйству и продовольствию ; под ред. А.М. Лапотко. – Несвиж, 2008. – 368 с.

10. *Фесенко, С. В.* Нормативное регулирование содержания <sup>137</sup>Cs в кормах сельскохозяйственных животных: методические подходы и современные проблемы / С. В. Фесенко [и др.] // *Радиоэкологические последствия аварии на Чернобыльской атомной электростанции: научные результаты и практические итоги реабилитации (к 35-й годовщине аварии)* : Труды ФГБНУ ВНИИРАЭ. Том Выпуск 4. – Обнинск : Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Всероссийский научно-исследовательский институт радиологии и агроэкологии», 2021. – С. 39–49.

11. *Сауткина, Т. А.* Определитель высших растений Беларуси / Т. А. Сауткина [и др.] ; БГУ ; под ред. В. И. Парфенова. – Мн. : Дизайн-ПРО, 1999. – 471 с.

12. *Спирина, В. З.* Агрохимические методы исследования почв, растений и удобрений : учеб. пособие / В. З. Спирина, Т. П. Соловьева. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2014. – 336 с.

13. *Доспехов, Б. А.* Методика полевого опыта: (С основами статистической обработки результатов исследований) (учебники и учеб. пособия для высш. с.-х. учеб. заведений) / Б. А. Доспехов. – М. : Колос, 1979. – 416 с.

14. **Брехова, Л. И.** Информационно-аналитическое обеспечение природоохранной деятельности в сельском хозяйстве : учеб.-метод. пособие / Л. И. Брехова [и др.]. – Воронеж : Вор. гос. ун-т, 2009. – 41 с.

15. **Сироткин, А. Н.** Радиоэкология сельскохозяйственных животных // А. Н. Сироткин, Р. Г. Ильязов. – Казань : Издательство «Фан», 2000. – 384 с.

16. Министерство сельского хозяйства и продовольствия Республики Беларусь : [сайт]. – Мн., 2007–2025. – URL: <https://mshp.gov.by/ru/radiologiya-ru/view/respublikanskiy-dopustimyye-urovni-soderzhanija-tsezija-137-i-strontsiya-90-v-selskoxozjajstvennom-syrje-i--2599/> (дата обращения: 09.12.2025).

Поступила в редакцию 17.12.2025 г.

Контакты: [karpenkonikolaj23@gmail.com](mailto:karpenkonikolaj23@gmail.com) (Карпенко Николай Игоревич), [sertimo@mail.ru](mailto:sertimo@mail.ru) (Тимофеев Сергей Федорович)

***Karpenka M. I., Tsimafeyeu S. F.* INFLUENCE OF BIOLOGICAL CHARACTERISTICS OF GRASS STAND AND DENSITY OF RADIOACTIVE CONTAMINATION ON THE PARAMETERS OF  $^{137}\text{CS}$  TRANSITION INTO DAIRY AND MEAT PRODUCTS OF CATTLE**

*A study of the Sozh River floodplain revealed that, when cattle are kept outside in the summer, cereals and sedges can be used as feed at various P. Legumes can only be introduced into the cattle diet at a P of 35 Ci/km<sup>2</sup>, for raising young cattle for meat. When cattle are kept indoors in winter, hay harvested from the perennial grass subgroup is recommended. Meanwhile, hay harvested from perennial legumes at P of 35 and 14 Ci/km<sup>2</sup> can be introduced into the cattle diet, both for raising young cattle for meat and for lactating cows. The obtained results indicate the combined influence of P and A on changes in TF values (approximately 96%).*

**Keywords:** floodplain,  $^{137}\text{Cs}$  migration, dairy and meat products, herbaceous forages, cattle.

УДК 574.24

## АНАТОМО-МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ МЕЖКЛЕТНИКОВ УСТЬИЧНОГО АППАРАТА ЛИСТЬЕВ *PICEA ABIES* В УСЛОВИЯХ УРБАНИЗИРОВАННОЙ СРЕДЫ ОБИТАНИЯ

### О. В. Поворова

старший преподаватель кафедры естествознания факультета математики и естествознания

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

### В. А. Ливинская

доцент кафедры финансы и бухгалтер экономического факультета, кандидат физико-математических наук

Белорусско-Российский университет

### И. И. Ткачев

студент кафедры естествознания факультета математики и естествознания

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

*Показатели газообмена поперечного среза листа Picea abies (отношение суммы площадей межклетников устьичных аппаратов к площади листа на том же поперечном срезе; отношение суммы периметров межклетников устьичных аппаратов к периметру листа на том же поперечном срезе) ниже в районах городской среды произрастания растений с повышенным содержанием продуктов сгорания автотранспорта и со смешанным типом загрязнения (автотранспорт, промышленность) по сравнению с контрольным районом.*

**Ключевые слова:** межклетники устьиц, поперечный срез листа, *Picea abies*.

### Введение

Ухудшение состояния древесных растений в городской среде обитания происходит из-за множества разнообразных факторов: запыленности и загазованности атмосферы; загрязнения почв и грунтовых вод; нарушения естественного водного режима грунтовых вод; высокой плотности коммунальных сооружений, расположенных в корнеобитаемом слое; широкого распространения площадей с насыпным грунтом, полностью лишенным природных свойств почв; использования при озеленении города слабоустойчивых к загрязнению растений. Адаптивные изменения роста, морфогенеза и метаболизма древесных голосеменных растений к стрессу – специфический отклик растений на стрессовые воздействия [1]. Для основных метаболических процессов растений регулирующую функцию поступления/выведения газообразных веществ выполняет устьичный аппарат, в состав которого входят замыкающие клетки с соседними околоустьичными клетками, щель. Под щелью расположена крупная дыхательная полость (межклетник), окруженная клетками мезофилла листа. Щель может расширяться/сужаться, регулируя транспирацию и газообмен, реагируя на внешние условия и физиологические изменения в тканях листа. Из внешних факторов на устьичный аппарат больше всего влияют влаж-

ность воздуха, условия водоснабжения, свет, температура, а из внутренних – парциальное давление  $\text{CO}_2$  в системе межклетников, состояние гидратации растения, ионный баланс, фитогормоны [2]. Основной источник загрязняющих веществ в городе – автотранспорт, поэтому вещества, содержащиеся в выбросах автотранспорта, попадают в листья при газообмене через открытые устьица, токсичные вещества накапливаются в межклетниках и через клеточные стенки проникают к клеткам мезофилла. Устьичный аппарат, регулируя поступление основного источника загрязнения городской среды – продуктов сгорания топлива автотранспорта, адаптирует растение к среде обитания, проявляя свойства газочувствительности и газоустойчивости, что может быть использовано в биомониторинге среды обитания растения.

**Цель исследования** – определить особенности межклетников устьичных аппаратов *Picea abies* в условиях урбанизированной среды обитания растений.

### Материалы и методы исследований

Объект исследования – поперечный срез листа *Picea abies*, предмет исследования – периметр и площадь поперечного среза листа, периметр и площадь межклетника каждого устьица.

Выбирались места произрастания деревьев на удалении 20–40 м от автомобильных дорог с дополнительной нагрузкой, снижающей уровень доступной почвенной влаги для растения и характеризующей экосистему города, – вытаптывание, асфальтное или плиточное покрытие вдоль мест произрастания голосеменных растений. В черте г. Могилева выбраны три района произрастания растений с повышенным содержанием продуктов сгорания топлива автомашин: P1 – ул. Бялыницкого-Бирули 5, 7, 7а; P2 – ул. Якубовского 55, 69, 69а; P3 – центр города – ул. Первомайская, д.25, ул. Пионерская 23а. Четвертый район P4 со смешанным типом загрязнения (автотранспорт, промышленность) – ОАО «Можелит» (ул. Челюскинцев). В качестве контроля (К) был выбран пригород Могилева, д. Затишье.

На каждом участке отбирали по десять листьев одинаковой длины на высоте 150–170 см от поверхности земли с трех взрослых деревьев Ели европейской в солнечные дни в 12 часов (20–22°C) с одинаковой влажностью воздуха (68–70 %) в три периода активного вегетативного сезона 2025 года: НВС – начало вегетативного сезона (последняя неделя мая, после цветения), СВС – середина вегетативного сезона (середина июля), КВС – конец активного вегетативного сезона (первая неделя сентября).

Для изучения особенностей межклетников устьиц на поперечном срезе иглового листа *Picea abies* использовали методы исследования – гистологический метод приготовления окрашенных препаратов поперечного среза листа, метод микроскопирования, метод фотосъемки, статистические методы анализа.

На предметном стекле делали тонкий поперечный срез листа лезвием, который препаративной иглой переносили в 1 каплю 1%-ного раствора флороглюцина. Через минуту добавляли 1,2 капли дымящей соляной кислоты и накрывали покровным стеклом, микроскопировали на «Биолам» (окуляр х7, объектив х8, при этом изначально было установлено соответствие между длиной в 1 миллиметр, и размерами, нанесенными на окуляр), фотографировали. Фотографии обрабатывали в программе ImageJ на персональном компьютере с операционной системой «Windows 10». Методика обработки фотографий срезов:

- В меню «File» во вкладке «Open» выбрать необходимую фотографию.
- Инструментом «Straight» выделяем отрезок на фотографии, длиной в миллиметр.
- В меню «Analyze» выбираем вкладку «Set Scale».
- В окне «Set Scale» выставляем известную дистанцию в 1 миллиметр и ставим галочку рядом с надписью «Global» для того, чтобы все последующие фотографии обрабатывались с теми же выставленными значениями.
- В меню «Set Measurements» выбираем параметры, которые необходимо измерить.
- С помощью инструмента «Polygon selections» выделяем часть среза, параметры которой нужны для работы.
- В меню «Analyze» в самом верху нажимаем вкладку «Measure», и необходимые параметры появляются в отдельном окне, которые переносим в сводную таблицу.

Проводили один поперечный срез по середине одного листа. В каждом районе исследования проанализировано 90 срезов (по 10 листьев с каждого дерева, три дерева, три периода наблюдения), в целом – 450 срезов. Проводились расчеты периметров и площадей каждого межклетника устьиц на одном поперечном срезе листа. Рассчитывали два показателя, характеризующих эффективность газообмена (X) на поперечном срезе хвоинки:

- Эффективная площадь газообмена (X1) как отношение суммы площадей межклетников устьиц к площади листа на том же поперечном срезе по формуле  $X1 = \sum S_n / S$ ,

- Эффективная поверхность газообмена (X2) как отношение суммы периметров межклетников устьиц к периметру листа на том же поперечном срезе по формуле  $X2 = \sum P_n / P$ ,

где P – периметр и S – площадь поперечного среза листа,

$P_n$  – периметр и  $S_n$  – площадь каждого межклетника устьиц на поперечном срезе листа.

### Результаты исследований

Согласно литературным данным, токсичные вещества накапливаются в межклетниках и через клеточные стенки проникают к клеткам мезофилла. В настоящем исследовании определено, что число устьиц снижено в районах с повышенной экологической нагрузкой в 1,2–1,3 раза в активные периоды вегетации по сравнению с контрольным районом. Определив, что число устьиц может быть биоиндикационным параметром [3], характеризующим газочувствительность голосеменных растений к химическим поллютантам в условиях промышленного города, были изучены параметры межклетников устьиц как газовоспринимающего аппарата растений (Таблица 1). Как видно из данных Таблицы 1, медиана значений периметров и площадей межклетников устьиц выше в контрольном районе в начальных периодах вегетации по сравнению с более поздними периодами наблюдения, а также со всеми изучаемыми районами урбанизированных территорий. Медиана периметра межклетников в начале активного вегетативного сезона выше в 1,21 и 1,23 раза по сравнению с периодами СВС и КВС у растений контрольного района; в других изучаемых районах определена схожая тенденция, однако с менее выраженной закономерностью. Таким образом, нами определено, что в районах произрастания с дополнительными поллютантами снижается число устьиц, периметр и площадь межклетников устьиц.

Для характеристики эффективности газообмена и транспирации растений нами рассчитаны показатели: общий периметр/общая площадь поперечного среза листа, суммарный периметр/суммарная площадь всех межклетников устьиц на данном срезе при помощи специальной компьютерной программы и рассчитали соотношение данных показателей. Растениям помогает сохраниться в условиях повышенного загрязнения выключение газовоспринимающего аппарата (устьиц). Результаты изучения эффективной поверхности поперечного среза листа для газообмена и транспирации растений в зависимости от экологических факторов среды жизни представлены на рисунке 1. На графике представлены ящики с усами (boxplots), где центральная линия в ящике соответствует медиане, границы ящика – первому (Q1) и третьему (Q3) квартилям (межквартильный размах, IQR). Усы простираются до самых крайних наблюдений, находящихся в пределах  $1,5 \times IQR$  от соответствующего квартиля. Наблюдения за пределами этого диапазона считаются выбросами (в данном исследовании не отображены). Разноцветные боксплоты рассчитаны по результатам исходных данных и окрашены в соответствии с этапом проведения измерений в зависимости от периода активного вегетативного сезона растения. Как видно из данных рисунка, медиана значений эффективности газообмена по двум изучаемым показателям (X1 и X2) у деревьев контрольного района во все периоды активного вегетационного сезона выше в 1,4–1,6 раз по сравнению с деревьями урбанизированных территорий. Параметрический t-тест, t-тест с поправкой Бонферрони для множественных сравнений выявили, что рассчитанные показатели X1 и X2 растений, произрастающих в черте города во всех четырех изучаемых районах, статистически значимо отличаются от показателей растений контрольного района (в каждом районе P1, P2, P3, P4, в каждом из трех периодов активного вегетативного сезона НВС, СВС, КВС;  $p < 0,001$ ).

Таким образом, показатели устьичных аппаратов (число устьиц, периметр и площадь межклетников) являются чувствительными к факторам городской среды обитания. Межклетник устьичного аппарата образован оболочками клеток мезофилла листа, поэтому чем больше периметр и площадь межклетника, тем больше содержится в нем газообразных веществ и тем больше их включится в обмен веществ растения. В качестве биоиндикатора газочувствительности Ели европейской определены показатели межклетников устьичных аппаратов, рассчитанные как отношение суммы площадей/периметров межклетников к площади/периметру листа на том же поперечном срезе, которые могут быть рекомендованы при озеленении урбанизированных территорий для выбора газоустойчивых видов и сортов растений, экологическом мониторинге их среды обитания.

Для озеленения городов с повышенной антропогенной нагрузкой рекомендуются только те виды растений, которые устойчивы к промышленным и автотранспортным поллютантам, легко переносят городские условия. По степени газоустойчивости *Picea abies* относится, по Н. Десслеру, к очень чувствительным видам древесных растений к факторам городской среды обитания [4]. Газоустойчивость различных сортов *Picea abies* варьирует от низких до высоких показателей. Так, например, сорта *Picea abies* «*Acrocona*» и «*Nidiformis*» определены как менее перспективные и перспективные, соответственно, для озеленения городских территорий [5]. Для успешного выращивания голосеменных растений рекомендуют использовать семена, адаптированные к местным условиям ландшафтной среды [6, 7], поэтому перспективным для г. Могилева представляется получение поса-

дочного материала из семян *Picea abies* тех растений, которые сейчас произрастают в черте города.

### Заключение

Число устьиц, периметр и площадь межклетников устьиц на поперечном срезе листа *Picea abies* ниже у растений, произрастающих в урбанизированной среде. Эффективная площадь газообмена (отношение суммы площадей межклетников устьичных аппаратов к площади поперечного среза листа) и эффективная поверхность газообмена (отношение суммы периметров межклетников устьичных аппаратов к периметру поперечного среза листа) ниже 1,4–1,6 раз в районах городской среды обитания растений с повышенным содержанием продуктов сгорания топлива автомашин и со смешанным типом загрязнения (автотранспорт, промышленность) по сравнению с контрольным районом.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Wang, L. Stomatal improvement for crop stress resistance / L. Wang, C. Chang // J Exp Bot. – 2024. – Vol. 75, № 7. – P. 1823–1833. – DOI: 10.1093/jxb/erad 477.
2. Hofmann, T. A. Impact of climate-driven changes in temperature on stomatal anatomy and physiology / T. A. Hofmann, W. Atkinson, M. Fan [et al.] // Philosophical Transactions. – 2025. – Vol. 380(1927). – P. 20240244. – DOI: 10.1098/rstb.2024.0244.
3. Поворова, О. В. Влияние качества урбанизированной среды г. Могилева на количественные характеристики устьиц Сосны обыкновенной (*Pinus sylvestris*) / О. В. Поворова, В. А. Ливинская // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі. – 2019. – № 2 (54). – С. 79–89.
4. Самохвалов, К. В. Опыт разработки рекомендательного списка древесных растений для озеленения и реконструкции зеленых насаждений города Чебоксары на основе оценки качества городской среды / К. В. Самохвалов, Е. А. Синичкин // Самарский научный вестник. – 2020. – Т. 9, № 3. – С. 122–128.
5. Гнаткович, П. С. Перспективные виды и формы хвойных экзотов для озеленения населенных пунктов северных территорий Иркутской области / П. С. Гнаткович, Е. М. Рунова // Успехи современного естествознания. – 2021. – № 6. – С. 13–21.
6. Тюкавина, О. Н. Практика повышения посевных качеств семян Сосны обыкновенной (*Pinus sylvestris* L.) и Ели европейской (*Picea abies* L.) / О. Н. Тюкавина, Н. А. Демина // Лесной вестник. – 2022. – Т. 26, № 6. – С. 75–91.
7. Воробьев, Р. А. Эффективность создания лесных культур Ели европейской в Нижегородской области / Р. А. Воробьев, Н. Н. Бессчетнова, В. П. Бессчетнов [и др.] // Вестник Нижегородского государственного аграрного университета. – 2023. – Т. 40, № 4. – С. 24–35.

Поступила в редакцию 16.12.2025 г.

Контакты: povorov@mail.ru (Поворова Оксана Викторовна), viktoriya.livinskaya@mail.ru (Ливинская Виктория Александровна), srazyivse@gmail.com (Ткачев Илья Игоревич)

### **Povarava A. V., Livinskaya V. A., Tkachou I. I. ANATOMO-MORPHOLOGICAL FEATURES OF THE INTERCELLULAR STRUCTURE OF THE *PICEA ABIES* LEAVES IN AN URBANIZED ENVIRONMENT**

*The gas exchange indicators of the cross-section of the leaf (the ratio of the sum of the areas of the intercellular spaces to the area of the leaf on the same cross-section; the ratio of the sum of the perimeters of the intercellular spaces to the perimeter of the*

leaf on the same cross-section) are lower in the areas of urban habitat of plant growth with increased content of combustion products of motor vehicles and with mixed type of pollution (motor transport, industry) in comparison with the control area.

**Keywords:** intercellular spaces of stomata, cross-section of the leaf, *Picea abies*.

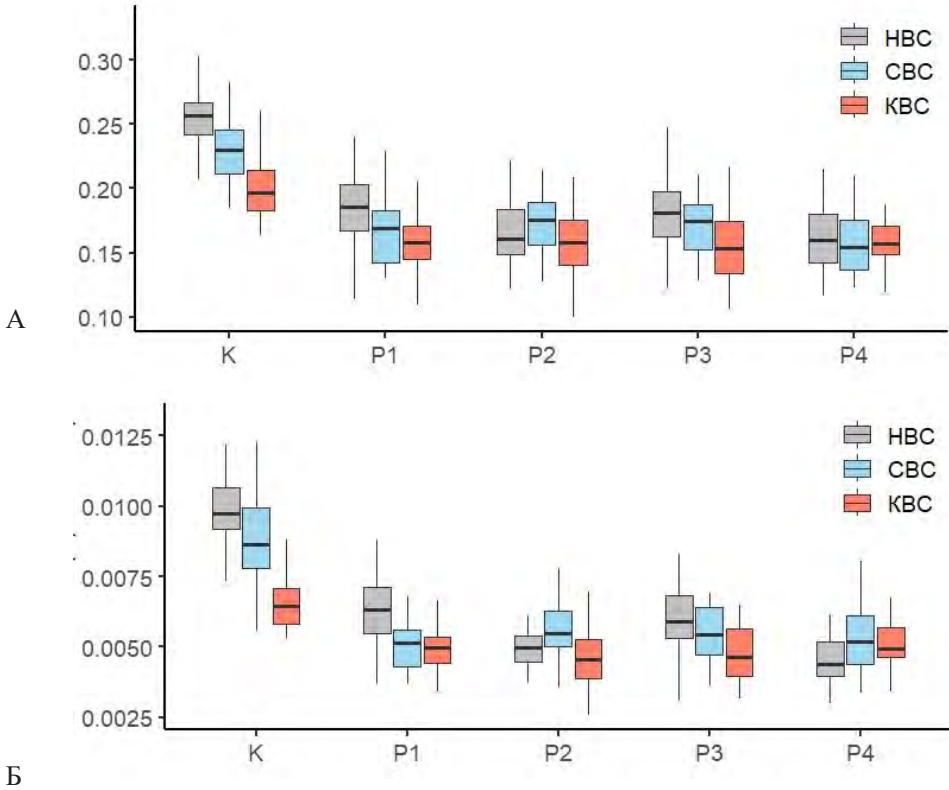


Рисунок 1 – Эффективная поверхность (А) и площадь (Б) газообмена поперечного среза листа *Picea abies* (ось X – районы исследования; ось Y – эффективность газообмена, единицы)

Таблица 1 – Описательная статистика изучаемых параметров устьичных аппаратов листьев *Picea abies*, Me[Q1;Q3]

	К	P1	P2	P3	P4
<b>НВС</b>					
Периметр межклетника устьиц, мм	0,074[0,068;0,081]	0,063[0,056;0,073]	0,062[0,056;0,069]	0,058[0,052;0,064]	0,059[0,054;0,064]
Периметр поперечного среза, мм	6[3;8]	5,5[3;8]	5[3;8]	5,5[3;8]	5[3;8]
Площадь межклетника устьиц, мм <sup>2</sup>	0,0004[0,0003;0,0005]	0,0003[0,0002;0,00033]	0,0002[0,00019;0,0003]	0,0002[0,00017;0,0003]	0,0002[0,00019;0,0003]
Площадь поперечного среза, мм <sup>2</sup>	2,038[1,997;2,11]	1,955[1,88;2,028]	2,072[2,022;2,107]	1,815[1,772;1,851]	2,093[2,053;2,137]
<b>СВС</b>					
Периметр межклетника устьиц, мм	0,061[0,056;0,067]	0,057[0,052;0,063]	0,057[0,053;0,064]	0,058[0,052;0,064]	0,054[0,049;0,06]
Периметр поперечного среза, мм	6[3;8]	5[3;8]	5[3;8]	5[3;8]	5,5[3;8]
Площадь межклетника устьиц, мм <sup>2</sup>	0,0003[0,00021;0,00031]	0,0002[0,00019;0,00027]	0,0002[0,00019;0,00027]	0,0002[0,00018;0,00026]	0,0002[0,00016;0,00024]
Площадь поперечного среза, мм <sup>2</sup>	1,798[1,77;1,825]	1,994[1,962;2,041]	1,969[1,934;2,025]	1,98[1,959;2,011]	1,847[1,744;1,931]

Продолжение таблицы 1

КВС						
Периметр межклетника устьиц, мм	0,06[0,054;0,067]	0,055[0,051;0,06]	0,055[0,05;0,06]	0,055[0,051;0,059]	0,054[0,048;0,059]	
Периметр поперечного среза, мм	5[3;8]	5[3;8]	5[3;8]	6[3;8]	6[3;8]	
Площадь межклетника устьиц, мм <sup>2</sup>	0,0002[0,00019;0,00032]	0,0002[0,00018;0,00025]	0,0002[0,00017;0,00025]	0,0002[0,00017;0,00024]	0,0002[0,00016;0,00023]	
Площадь поперечного среза, мм <sup>2</sup>	2,099[1,996;2,149]	1,965[1,939;1,981]	2,032[2,001;2,097]	1,944[1,904;2,001]	2,05[1,937;2,082]	

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў  
на англійскую мову  
*Я. В. Рубанава*

Тэхнічны рэдактар *А. Р. Роскач*  
Камп'ютарны набор і вёрстка *В. Г. Каленціонава*  
Карэктар *І. Г. Каржова*

Падпісана да друку 14.04.2026 г.

Фармат 70x108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Гарнітура Times New Roman.  
Ум.-друк. арк. 6,4 . Ул.-выд. арк. 8. Тыраж 25 экз. Заказ № 1513.

Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт  
імя А. А. Куляшова”, 212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1.  
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,  
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства  
“Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля”  
ЛП № 02330/23 ад 30.12.2013 г.  
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў