

ISSN 2409-3777



# ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага  
ўніверсітэта

імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

*Выдаецца са снежня 1998 года*

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ  
(матэматыка, фізіка, біялогія)

*Выходзіць два разы ў год*

2 (66)  
2025

**Галоўная рэдакцыйная калегія:**

д-р гіст. навук прафесар Д. С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)  
д-р экан. навук прафесар Н. У. Макоўская (нам. галоўнага рэдактара)  
д-р гіст. навук прафесар Я. Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. В. Марчанка (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)  
канд. гіст. навук А. І. Галавач (адказны сакратар)

**Матэматыка, фізіка:**

д-р фіз.-мат. навук прафесар В. А. Еравенка (Мінск)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар В. І. Бернік (Мінск)  
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В. М. Лапцінскі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар М. М. Дабравольскі (Тула)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. Б. Соцкі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. М. Гальмак (Магілёў)  
д-р тэхнічных навук А. С. Турцэвіч (Мінск)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. М. Сідарэнка (Магілёў)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А. В. Цімошчанка (Магілёў)

**Біялогія:**

д-р біял. навук прафесар Н. П. Максімава (Мінск)  
д-р біял. навук дацэнт А. Д. Навумаў (Мінск)  
д-р біял. навук дацэнт С. У. Лазарэвіч (Горкі)  
канд. біял. навук дацэнт М. В. Акуліч (Магілёў)  
канд. біял. навук дацэнт М. М. Дайнэка (Гомель)  
канд. біял. навук дацэнт І. А. Жарына (Магілёў)  
д-р мед. навук прафесар А. В. Марачкаў (Магілёў)  
д-р мед. навук Н. І. Сімчанка (Магілёў)  
д-р хім. навук прафесар Г. М. Раганаў (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс “Веснік Магілёўскага дзяржаўнага  
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова” ўключаны ў РІНЦ  
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),  
ліцэнзійны дагавор № 811-12/2014*

**АДРАС РЭДАКЦЫІ:**

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,  
vesnik\_mdu@mail.ru

**MOGILEV STATE  
A. KULESHOV UNIVERSITY  
BULLETIN**

THEORETICAL-SCIENTIFIC JOURNAL

*Founded in December 1998*

Series B. NATURAL SCIENCES  
(Mathematics, Physics, Biology)

*Published twice per year*

**2 (66)  
2025**

#### **Editorial Board:**

Lavrinovich D. S., Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor,  
Makovskaya N. V., Deputy Chief Editor, Doctor of Economic Sciences, Professor  
Riyer Y. G., Deputy Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor  
Marchenko I. V., Chairman of the Editorial Committee (Series B),  
Ph.D., Associate Professor  
Golovach E. I., Executive Secretary of the Editorial Board, Ph.D.

#### **Mathematics, Physics:**

Yerovenko V. A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)  
Bernik V. I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)  
Laptinsky V. N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of  
the Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus  
(Mogilev)  
Dobrovolsky N. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Tula)  
Sotsky A. B., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)  
Galmak A. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)  
Turtsevich A. S., Doctor of Technical Sciences (Minsk)  
Sidorenko I. N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)  
Timoschenko E. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)

#### **Biology:**

Maksimova N. P., Doctor of Biological Sciences, Professor (Minsk)  
Naumov A. D., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Minsk)  
Lazarevich S. V., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Gorky)  
Akulich N. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)  
Daineko N. M., Ph.D., Associate Professor (Gomel)  
Zharina I. A., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)  
Marochkov A. V., Doctor of Medical Sciences, Professor (Mogilev)  
Simchenko N. I., Doctor of Medical Sciences (Mogilev)  
Roganov G. N., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)

*Theoretical-scientific journal*  
*"Mogilev State A. Kuleshov University Bulletin"*  
*is included in the bibliographic database*  
*"Russian Science Citation Index",*  
*License agreement № 811-12/2014*

The editorial board address:  
212022, Mogilev, Kosmonavtov Str., 1,  
vesnik\_mdu@mail.ru

## З М Е С Т

|                                                                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>БАЗЫЛЕВ Д. Ф.</b> Первообразные многочлены над конечными полями .....                                                                                                                        | 7  |
| <b>КЕМЕШ О. Н., КОРЛЮКОВА И. А., САКОВИЧ Н. В.</b> Действительные интервалы $p$ -адического цилиндра большой меры лебега-хаара в диофантовых приближениях .                                     | 17 |
| <b>СКОРОМНИК О. В., ПАПКОВИЧ М. В.</b> Многомерное интегральное преобразование с $h$ -функцией в ядре в весовых пространствах интегрируемых функций.....                                        | 27 |
| <b>ТИМОЩЕНКО Е. В., ХОМЧЕНКО А. В., ЮРЕВИЧ В. А.</b> Динамика излучения, отраженного двухслойной планарной структурой .....                                                                     | 45 |
| <b>ШИЛОВ А. В., СОТСКИЙ А. Б.</b> Фурье-анализ волноводных импульсов в терагерцовой спектроскопии .....                                                                                         | 55 |
| <b>ТИМОФЕЕВ С. Ф., ДАЙНЕКО Н. М., КАРПЕНКО Н. И.</b> Оценка параметров миграции $^{137}\text{Cs}$ в системе почва-растение в условиях пойменного луга р. Ипуть.....                             | 70 |
| <b>МАРКЕВИЧ А. С., ДЕМЕНКОВА Я. К., КАБАЕВА А. С., ЦУРИКОВ А. Г.</b> Оценка плотности популяции и годового прироста лишайника <i>phaeophyscia orbicularis</i> на территории города Гомеля ..... | 81 |

## C O N T E N T S

|                                                                                                                                                                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>BAZYLEU D. F.</b> Primitive polynomials over finite fields.....                                                                                                                                                  | 7  |
| <b>KEMESH O. N., KORLYUKOVA I. A., SAKOVICH N. V.</b> Real intervals of the p-adic cylinder of large lebesgue-haar measure in diophantine approximations .....                                                      | 17 |
| <b>SKOROMNIK O. V., PAPKOVICH M. V.</b> Multidimensional integral transformation with h-function in the kernel in weighted spaces of integrable functions .....                                                     | 27 |
| <b>TIMOSHCHENKO E. V., KHOMCHENKO A. V., YUREVICH V. A.</b> Dynamics of radiation reflected by a two-layer planar structure .....                                                                                   | 45 |
| <b>SHILOV A. V., SOTSKYA A. B.</b> Fourier analysis of waveguide pulses in terahertz spectroscopy.....                                                                                                              | 55 |
| <b>TIMOFEEV S. F., DAINKO N. M., KARPENKO N. I.</b> Assessment of $^{137}\text{Cs}$ migration parameters in the soil-plant system under the conditions of a floodland meadow of the Iput river .....                | 70 |
| <b>MARKEVICH A. S., DZEMIANKOVA YA. K., KABAYEVA A. S., TSURYKAU A. G.</b> Estimation of population density and annual growth of lichen <i>phaeophyscia orbicularis</i> in the territory of the city of Gomel ..... | 81 |

# МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, БИОЛОГИЯ

УДК 512.624.2

## ПЕРВООБРАЗНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

**Д. Ф. Базылев**

заведующий кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета, кандидат физико-математических наук  
Белорусский государственный университет

*В работе рассматривается обобщение для многочленов над конечными полями понятия первообразного корня в модулярной арифметике. Получены условия, которые обеспечивают существование или отсутствие первообразных многочленов. Ряд свойств сохраняется в сравнении со свойствами первообразных корней. Но имеются также и существенные отличия, которые приведены в статье. Эти результаты могут быть использованы при построении криптографических систем с открытым ключом.*

**Ключевые слова:** многочлены над конечными полями, первообразные элементы, криптографические системы.

### Введение

Возросший в последнее время интерес к криптографии обусловлен необходимостью обеспечения конфиденциальности переданной информации. Один из первых и самых распространенных подходов основан на использовании криптосистемы RSA [1]. Позднее появились модификации этого алгоритма. Например, алгоритм, основанный на теории эллиптических кривых [2]. При анализе криптоустойчивости таких алгоритмов используют, например, тест Соловея – Штрассена [3, с. 149] или тест Рабина – Миллера [4, с. 152].

Эти алгоритмы и тесты используют свойства первообразных корней в модулярной арифметике. В работе [5] предлагается обобщение функции Эйлера для многочленов над конечными полями и излагаются некоторые свойства этой функции. Поэтому для построения алгоритмов, использующих многочлены над конечными полями, необходимо описать свойства первообразных элементов в этом множестве.

### Основная часть

Пусть  $F_p$  – конечное поле, состоящее из  $p$  элементов,  $g(x)$  – многочлен положительной степени над полем  $F_p$ . Обозначим через  $\varphi(g)$  количество всех ненулевых многочленов над  $F_p$ , которые взаимно просты с многочленом  $g(x)$  и степени которых меньше степени многочлена  $g(x)$ . Множество этих многочленов обозначим  $U_g = \{g_1(x), g_2(x), \dots, g_{\varphi(g)}(x)\}$  и назовем базой многочле-

нов для многочлена  $g(x)$ . Если же  $g(x)$  – многочлен нулевой степени над полем  $F_p$ , то будем считать  $\varphi(g) = 1$ . Введем следующее обозначение:  $\tilde{g} = p^{\deg(g)}$ , где  $g(x) \in F_p[x]$ . Справедливы следующие утверждения:

1) пусть  $f(x), g(x) \in F_p[x]$ ,  $\deg(g) > 0$ ,  $\text{НОД}(f; g) = 1$ ,

тогда  $f^{\varphi(g)} \equiv 1 \pmod{g}$ .

2) пусть  $g(x) = \prod_{i=1}^k g_i^{m_i}(x)$  – каноническое разложение многочлена  $g(x)$

на степени неприводимых над  $F_p$  многочленов  $g_1(x), \dots, g_k(x)$ , тогда

$$\varphi(g) = \tilde{g} \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{\tilde{g}_i}\right).$$

Эти свойства являются обобщением формулы Эйлера и формулы для вычисления функции Эйлера [6].

В настоящей работе мы рассмотрим обобщение понятия первообразного корня в модулярной арифметике, а также соответствующие свойства.

**Определение.** Пусть  $f(x), g(x) \in F_p[x]$ ,  $\deg(g) > 0$ ,  $\text{НОД}(f; g) = 1$ .

Наименьшее натуральное число  $n$  такое, что  $f^n \equiv 1 \pmod{g}$ , называется показателем многочлена  $f(x)$  по модулю многочлена  $g(x)$  и обозначается  $n = P_g(f)$ .

Так как  $f^{\varphi(g)} \equiv 1 \pmod{g}$ , то  $P_g(f)$  всегда существует.

Сформулируем некоторые свойства показателей.

**Теорема 1.** Пусть  $n = P_g(f)$ , тогда справедливы следующие утверждения.

1) Многочлены  $1 = f^0, f^1, \dots, f^{n-1}$  попарно не сравнимы по модулю  $g$ .

2)  $f^{k_1} \equiv f^{k_2} \pmod{g}$  тогда и только тогда, когда  $k_1 \equiv k_2 \pmod{n}$ .

В частности,  $f^k \equiv 1 \pmod{g}$  тогда и только тогда, когда  $k \equiv 0 \pmod{n}$ .

3)  $\varphi(g) \equiv 0 \pmod{n}$ .

4) Если  $P_g(f) = ab$  для некоторых  $a, b \in \mathbb{N}$ , то  $P_g(f^a) = b$ .

5) Если  $\text{НОД}(P_g(f_1); P_g(f_2)) = 1$ , то  $P_g(f_1 f_2) = P_g(f_1) P_g(f_2)$ .

6) Если  $\text{НОД}(f_1 f_2; g) = 1$ ,  $f_1 \equiv f_2 \pmod{g}$ , то  $P_g(f_1) = P_g(f_2)$ .

**Доказательство.** 1) Предположим, что  $f^{k_1} \equiv f^{k_2} \pmod{g}$  для некоторых  $0 \leq k_1 < k_2 < n$ , тогда  $f^{k_1}(f^{k_2-k_1} - 1) \equiv 0 \pmod{g}$ , значит,  $f^{k_2-k_1} \equiv 1 \pmod{g}$ , поскольку  $\text{НОД}(f^{k_1}; g) = 1$ . Так как  $0 < k_2 - k_1 < n$ ,  $n = P_g(f)$ , то получено противоречие. Что и требовалось доказать.

2) Пусть  $k_1 = nq_1 + r_1$ ,  $k_2 = nq_2 + r_2$ ,  $0 \leq r_1 < n$ ,  $0 \leq r_2 < n$ .

Так как  $f^n \equiv 1 \pmod{g}$ , то  $f^{k_1} \equiv (f^n)^{q_1} f^{r_1} \equiv f^{r_1} \pmod{g}$ .

Аналогично получаем  $f^{k_2} \equiv f^{r_2} \pmod{g}$ .

Имеем  $f^{k_1} \equiv f^{k_2} \pmod{g} \Leftrightarrow f^{r_1} \equiv f^{r_2} \pmod{g} \Leftrightarrow r_1 = r_2 \Leftrightarrow$

$k_1 - nq_1 = k_2 - nq_2 \Leftrightarrow k_1 - k_2 = n(q_1 - q_2) \Leftrightarrow k_1 \equiv k_2 \pmod{n}$ .

В частности,  $f^k \equiv 1 \pmod{g} \Leftrightarrow f^k \equiv f^0 \pmod{g} \Leftrightarrow k \equiv 0 \pmod{n}$ .

3) Так как  $f^{\varphi(g)} \equiv 1 \pmod{g}$ , то, согласно свойству 2), получаем требуемое.

4) Пусть  $k = P_g(f^a)$ , тогда  $f^{ak} \equiv (f^a)^k \equiv 1 \pmod{g}$ , следовательно,  $ak \equiv 0 \pmod{ab}$ , поскольку  $P_g(f) = ab$ . Значит,  $k \equiv 0 \pmod{b}$ . Так как  $P_g(f) = ab$ , то  $(f^a)^b \equiv f^{ab} \equiv 1 \pmod{g}$ , следовательно,  $b \equiv 0 \pmod{k}$ , поскольку  $P_g(f^a) = k$ . Так как  $k \equiv 0 \pmod{b}$ ,  $b \equiv 0 \pmod{k}$ , то  $k = b$ .

5) Пусть  $k = P_g(f_1 f_2)$ ,  $a = P_g(f_1)$ ,  $b = P_g(f_2)$ ,

тогда  $(f_1 f_2)^k \equiv 1 \pmod{g}$ ,  $f_1^a \equiv 1 \pmod{g}$ ,  $f_2^b \equiv 1 \pmod{g}$ , следовательно,  $f_1^{kb} \equiv f_1^{kb} (f_2^b)^k \equiv ((f_1 f_2)^k)^b \equiv 1 \pmod{g}$ , значит,  $kb \equiv 0 \pmod{a}$ . Учитывая  $\text{НОД}(a; b) = 1$ , получаем  $k \equiv 0 \pmod{a}$ . Аналогично устанавливаем  $k \equiv 0 \pmod{b}$ . Так как  $k \equiv 0 \pmod{a}$ ,  $k \equiv 0 \pmod{b}$ ,  $\text{НОД}(a; b) = 1$ , то  $k \equiv 0 \pmod{ab}$ . Так как  $(f_1 f_2)^{ab} \equiv (f_1^a)^b (f_2^b)^a \equiv 1 \pmod{g}$ , то  $ab \equiv 0 \pmod{k}$ . Следовательно,  $k = ab$ .

6) Пусть  $a = P_g(f_1)$ ,  $b = P_g(f_2)$ , тогда  $f_1^a \equiv 1 \pmod{g}$ ,  $f_2^b \equiv 1 \pmod{g}$ .

Так как  $f_1 \equiv f_2 \pmod{g}$ , то  $f_1^b \equiv f_2^b \equiv 1 \pmod{g}$ , следовательно,  $b \equiv 0 \pmod{a}$ . Аналогично получаем  $a \equiv 0 \pmod{b}$ . Следовательно,  $a = b$ .

Теорема доказана.

**Определение.** Если  $P_g(f) = \varphi(g)$ , то многочлен  $f(x)$  называется первообразным многочленом по модулю  $g(x)$ .

**Теорема 2.** Пусть многочлен  $g(x)$  неприводим над  $F_p$ , тогда существует первообразный многочлен по модулю  $g(x)$ .

**Доказательство.** Вначале проверим справедливость следующей леммы.

**Лемма.** Пусть  $K = F_p[x]$ ,  $a_i(x) \in K$ ,

$G(y) = a_k(x)y^k + \dots + a_1(x)y + a_0(x) \in K[y]$ ,  $g(x) \in K$ ,  $U_g$  – база неприводимых многочленов для многочлена  $g(x)$ . Если сравнение  $G(y) \equiv 0 \pmod{g}$  имеет более  $k$  различных решений, принадлежащих множеству  $U_g$ , то  $a_i(x) \equiv 0 \pmod{g}$  для любого  $i = 1, \dots, k$ .

**Доказательство леммы.** Пусть  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_{k+1}(x) \in U_g$  являются различными решениями сравнения  $G(y) \equiv 0 \pmod{g}$ ,

т. е.  $G(g_i(x)) \equiv 0 \pmod{g}$  для  $i = 1, 2, \dots, k+1$ . Разделим многочлен  $G(y)$  на многочлен  $(y - g_1(x)) \cdot (y - g_2(x)) \cdot \dots \cdot (y - g_k(x))$  с остатком:

$$G(y) = c_k(x) \cdot (y - g_1(x)) \cdot (y - g_2(x)) \cdot \dots \cdot (y - g_k(x)) + r_k(y),$$

где  $c_k(x) = a_k(x)$ ,  $\deg(r_k) < k$  или  $r_k(y) = 0$ . Разделим многочлен  $r_k(y)$  на  $(y - g_1(x)) \cdot (y - g_2(x)) \cdot \dots \cdot (y - g_{k-1}(x))$  с остатком:

$$r_k(y) = c_{k-1}(x) \cdot (y - g_1(x)) \cdot (y - g_2(x)) \cdot \dots \cdot (y - g_{k-1}(x)) + r_{k-1}(y),$$

где  $c_{k-1}(x) \in F_p[x]$ ,  $\deg(r_{k-1}) < k-1$  или  $r_{k-1}(y) = 0$ .

И так далее продолжаем этот процесс. В результате получаем  $G(y) = c_k(x) \cdot (y - g_1(x)) \cdot \dots \cdot (y - g_k(x)) + c_{k-1}(x) \cdot (y - g_1(x)) \cdot \dots \cdot (y - g_{k-1}(x)) + \dots + c_1(x) \cdot (y - g_1(x)) + c_0(x)$ , где  $c_i(x) \in F_p[x]$ . Так как  $G(g_1(x)) \equiv 0 \pmod{g}$ , то  $c_0(x) \equiv 0 \pmod{g}$ . Так как  $G(g_2(x)) \equiv 0 \pmod{g}$ , то  $c_1(x) \cdot (g_2(x) - g_1(x)) + c_0(x) \equiv 0 \pmod{g}$ . Так как  $g_1(x), g_2(x) \in U_g$ , то  $g_2(x) - g_1(x)$  не делится на  $g(x)$ . Учитывая  $c_0(x) \equiv 0 \pmod{g}$ , получаем  $c_1(x) \equiv 0 \pmod{g}$ . И так далее, рассматривая  $G(g_3(x)), \dots, G(g_{k+1}(x))$ , получаем  $c_2(x) \equiv \dots \equiv c_k(x) \equiv 0 \pmod{g}$ .

$$\text{Так как } G(y) = a_k(x)y^k + \dots + a_1(x)y + a_0(x),$$

$G(y) = c_k(x) \cdot (y - g_1(x)) \cdot \dots \cdot (y - g_k(x)) + c_{k-1}(x) \cdot (y - g_1(x)) \cdot \dots \cdot (y - g_{k-1}(x)) + \dots + c_1(x) \cdot (y - g_1(x)) + c_0(x)$ , то каждый многочлен  $a_i(x)$  является линейной комбинацией многочленов  $c_1(x), \dots, c_k(x)$ . Учитывая  $c_i(x) \equiv 0 \pmod{g}$  для любого  $i$ , получаем  $a_i(x) \equiv 0 \pmod{g}$  для любого  $i$ .

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы.

Рассмотрим случай  $p = 2$ ,  $\deg(g) = 1$ . Тогда  $g(x) = x$  или  $g(x) = x + 1$ .

Следовательно,  $U_g = \{1\}$  – база неприводимых многочленов по модулю  $g(x)$ ,

$\varphi(g) = |U_g| = 1$ . Если  $g(x) = x$ , то многочлен  $f(x) = x + 1$  является первообразным многочленом по модулю  $g(x)$ , поскольку  $f^1 \equiv 1 \pmod{g}$ . Если  $g(x) = x + 1$ , то многочлен  $f(x) = x$  является первообразным многочленом по модулю  $g(x)$ , поскольку  $f^1 \equiv 1 \pmod{g}$ .

Пусть теперь  $p \geq 3$  или  $\deg(g) \geq 2$ .

Пусть  $U_g = \{g_1(x), g_2(x), \dots, g_{\varphi(g)}(x)\}$ ;  $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(g)}$  – показатели многочленов  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_{\varphi(g)}(x)$  по модулю  $g(x)$ ;  $a = \text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(g)})$ .

Покажем, что  $a > 1$ . Действительно, если  $p \geq 3$ , то  $2 \in U_g$ , причем показатель многочлена 2 не равен 1 по модулю  $g(x)$ . Следовательно, в этом случае  $a > 1$ . Если же  $\deg(g) \geq 2$ , то  $x \in U_g$ , причем показатель многочлена 2 не равен 1 по модулю  $g(x)$ . Действительно, если  $x \notin U_g$ , то НОД  $(x; g(x)) \neq 1$ , значит,  $g(x) \equiv 0 \pmod{x}$ , что невозможно, поскольку  $g(x)$  неприводим и  $\deg(g) \geq 2$ . Следовательно, и в этом случае  $a > 1$ .

Пусть  $a = q_1^{c_1} q_2^{c_2} \dots q_k^{c_k}$  – каноническое разложение числа  $a$ , тогда среди чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(g)}$  найдется число  $b$ , делящееся на  $q_1^{c_1}$ , т. е.  $b = b_1 q_1^{c_1}$ . Пусть  $b_1$  – показатель некоторого многочлена  $z_1(x) \in U_g$  по модулю  $g(x)$ , тогда  $q_1^{c_1}$  – показатель многочлена  $t_1(x) = (z_1(x))^{b_1}$  по модулю  $g(x)$ . Аналогично находим многочлены  $t_2(x), t_3(x), \dots, t_k(x)$ , показатели которых равны  $q_2^{c_2}, q_3^{c_3}, \dots, q_k^{c_k}$ . Следовательно,  $q_1^{c_1} q_2^{c_2} \dots q_k^{c_k}$  – показатель многочлена  $T(x) = t_1(x) t_2(x) \dots t_k(x)$  по модулю  $g(x)$ , т. е.  $a = P_g(T)$ .

Так как  $g_i \in U_g$ , то НОД  $(g_i; g) = 1$ , следовательно,  $g_i^{\varphi(g)} \equiv 1 \pmod{g}$  для любого  $i$ , значит,  $\varphi(g) \equiv 0 \pmod{a_i}$ , поскольку  $a_i = P_g(g_i)$ . Поэтому  $\varphi(g) \equiv 0 \pmod{a}$ , поскольку  $a = \text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(g)})$ . Значит,  $\varphi(g) \geq a$ .

Так как  $g_i^{a_i} \equiv 1 \pmod{g}$ ,  $a \equiv 0 \pmod{a_i}$ , то  $g_i^a \equiv 1 \pmod{g}$  для любого  $i$ . Пусть  $G(y) = y^a - 1$ , тогда  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_{\varphi(g)}(x)$  являются решениями сравнения  $G(y) \equiv 0 \pmod{g}$ . Так как не все коэффициенты многочлена  $G(y)$  делятся на многочлен  $g(x)$ , то, согласно предыдущей лемме,  $\deg(G) \geq \varphi(g)$ , т. е.  $a \geq \varphi(g)$ .

Так как  $\varphi(g) \geq a$ ,  $a \geq \varphi(g)$ , то  $a = \varphi(g)$ . Итак,  $\varphi(g) = a = P_g(T)$ .

Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $g(x) = \prod_{i=1}^k g_i^{m_i}(x)$  – разложение многочлена  $g(x)$  на степени неприводимых над  $F_p$  многочленов  $g_1, g_2, \dots, g_k$ . Если  $k \geq 2$  и  $p \geq 3$ , то не существует первообразного многочлена по модулю  $g(x)$ .

**Доказательство.** Предположим, что существует первообразный многочлен  $f(x)$  по модулю  $g(x)$ , тогда НОД  $(f; g) = 1$ . Так как  $g(x) = \prod_{i=1}^k g_i^{m_i}(x)$ , то  $\varphi(g) = \prod_{i=1}^k (\tilde{g}_i^{m_i-1} \cdot (\tilde{g}_i - 1))$ , причем  $\tilde{g}_i - 1 \equiv p^{\deg(g_i)} - 1 \equiv 0 \pmod{p-1}$ . Пусть  $w = \text{НОК}(\tilde{g}_1^{m_1-1} \cdot (\tilde{g}_1 - 1); \dots; \tilde{g}_k^{m_k-1} \cdot (\tilde{g}_k - 1))$ . Так как  $\tilde{g}_i - 1 \equiv 0 \pmod{p-1}$

для любого  $i$ , то  $w \leq \frac{\prod_{i=1}^k (\tilde{g}_i^{m_i-1} \cdot (\tilde{g}_i - 1))}{p-1} = \frac{\varphi(g)}{p-1} < \varphi(g)$ , т. е.  $w < \varphi(g)$ .

Так как  $\text{НОД}(f; g) = 1$ , то  $\text{НОД}(f; g_i^{m_i}) = 1$ , следовательно,  $f^{\varphi(g_i^{m_i})} \equiv 1 \pmod{g_i^{m_i}}$ . Так как  $\varphi(g_i^{m_i}) = \tilde{g}_i^{m_i}(\tilde{g}_i - 1)$ , то  $w \equiv 0 \pmod{\varphi(g_i^{m_i})}$ , следовательно,  $f^w \equiv 1 \pmod{g_i^{m_i}}$  для любого  $i$ , значит,  $f^w \equiv 1 \pmod{g}$ . Учитывая  $\varphi(g) = P_g(f)$ , получаем  $w \equiv 0 \pmod{\varphi(g)}$ , что невозможно, поскольку  $w < \varphi(g)$ .

Теорема доказана.

**Теорема 4.** Пусть  $g(x) = \prod_{i=1}^k g_i^{m_i}(x)$  – разложение многочлена  $g(x)$  на

степени неприводимых над  $F_2$  многочленов  $g_1, g_2, \dots, g_k$  и  $k \geq 2$ , тогда справедливы следующие утверждения:

1) если  $m_1 \geq 2, m_2 \geq 2$ , то не существует первообразного многочлена по модулю  $g$ ;

2) если  $\text{НОД}(\deg(g_1); \deg(g_2)) \geq 2$ , то не существует первообразного многочлена по модулю  $g$ .

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  – первообразный многочлен по модулю  $g(x)$ . Как и в предыдущей теореме обозначим через  $w = \text{НОК}(\tilde{g}_1^{m_1-1} \cdot (\tilde{g}_1 - 1); \dots; \tilde{g}_k^{m_k-1} \cdot (\tilde{g}_k - 1))$ . Аналогично получаем  $w \equiv 0 \pmod{\varphi(g)}$ ,

где  $\varphi(g) = \prod_{i=1}^k (\tilde{g}_i^{m_i-1} \cdot (\tilde{g}_i - 1))$ .

Пусть  $m_1 \geq 2, m_2 \geq 2$ , тогда  $\tilde{g}_1^{m_1-1} \equiv (2^{\deg(g_1)})^{m_1-1} \equiv 0 \pmod{2}$ .

Аналогично получаем  $\tilde{g}_2^{m_2-1} \equiv 0 \pmod{2}$ . Следовательно,

$$w \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^k (\tilde{g}_i^{m_i-1} \cdot (\tilde{g}_i - 1)) = \frac{\varphi(g)}{2} < \varphi(g), \quad \text{что невозможно, поскольку}$$

$$w \equiv 0 \pmod{\varphi(g)}.$$

Пусть  $d = \text{НОД}(\deg(g_1); \deg(g_2)) \geq 2$ ,

тогда  $\tilde{g}_1 - 1 \equiv 2^{\deg(g_1)} - 1 \equiv 0 \pmod{2^d - 1}$ . Аналогично получаем

$$\tilde{g}_2 - 1 \equiv 2^{\deg(g_2)} - 1 \equiv 0 \pmod{2^d - 1}, \quad \text{причем } 2^d - 1 \geq 3. \quad \text{Следовательно,}$$

$$w \leq \frac{1}{2^d - 1} \prod_{i=1}^k (\tilde{g}_i^{m_i-1} \cdot (\tilde{g}_i - 1)) = \frac{\varphi(g)}{2^d - 1} < \varphi(g), \quad \text{что невозможно, поскольку}$$

$$w \equiv 0 \pmod{\varphi(g)}.$$

Теорема доказана.

**Теорема 5.** Пусть  $f(x), g(x) \in F_p[x]$ ,  $\deg(g) > 0$ ,  $\text{НОД}(f; g) = 1$ ,  $\varphi(g) = \prod_{i=1}^m q_i^{a_i}$  – каноническое разложение числа  $\varphi(g)$ . Многочлен  $f(x)$  является первообразным многочленом по модулю  $g(x)$  тогда и только тогда, когда  $f^{\frac{\varphi(g)}{q_i}} \not\equiv 1 \pmod{g}$  для  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**Доказательство.** Необходимость очевидна, поскольку  $\varphi(g)$  – наименьший показатель многочлена  $f(x)$  по модулю  $g(x)$ .

Докажем достаточность. Пусть  $d = P_g(f)$ , тогда  $\varphi(g) \equiv 0 \pmod{d}$ , следовательно,  $\varphi(g) \geq d$ . Предположим, что  $\varphi(g) \neq d$ , тогда  $\varphi(g) > d$ . Пусть  $q$  – простой делитель числа  $\frac{\varphi(g)}{d}$ , т. е.  $\frac{\varphi(g)}{d} = qx$  для некоторого  $x \in \mathbb{N}$ , тогда  $\frac{\varphi(g)}{q} = dx$ , причем  $q$  – простой делитель числа  $\varphi(g)$ . Следовательно,

$$f^{\frac{\varphi(g)}{q}} \equiv (f^d)^x \equiv 1^x \equiv 1 \pmod{g}, \text{ что противоречит условию. Значит, } \varphi(g) = d.$$

Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что существование первообразного многочлена зависит от выбора поля  $F_p$ , а именно, если мы будем рассматривать один и тот же многочлен  $g(x)$  над разными полями  $F_p$ , то в одном случае будет существовать первообразный многочлен по модулю  $g(x)$ , а в другом случае – нет.

**Пример 1.** Пусть  $g(x) = x^n \in F_p[x]$ ,  $p$  – простое число,  $n \in \mathbb{N}$ . Первообразный многочлен по модулю  $g^n(x)$  существует тогда и только тогда, когда  $n = 1$  или  $n = 2$ , или  $\{n = 3; p = 2\}$ .

**Доказательство.** 1) Покажем, что если  $a$  – первообразный корень по модулю  $p$ , то  $a$  – первообразный многочлен по модулю  $g(x)$ . Так как  $g(x) = x$ , то  $\varphi(g) = \tilde{g} - 1 = p^{\deg(g)} - 1 = p - 1$ . Так как  $a^{p-1} = 1$  в  $F_p$ ,  $a^k \neq 1$  для любого  $k$  ( $0 < k < p - 1$ ) в  $F_p$ , то  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{g}$ , причем  $p - 1$  является наименьшим показателем. Следовательно,  $\varphi(g) = p - 1 = P_g(a)$ .

2) Покажем, что если  $a$  – первообразный корень по модулю  $p$ , то  $x + a$  является первообразным многочленом по модулю  $g^2$ . Так как  $g(x) = x$ , то  $\tilde{g} = p^{\deg(g)} = p$ , следовательно,  $\varphi(g^2) = (\tilde{g})^2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{g}}\right) = p^2 - p$ . Так как  $a^{p-1} = 1$  в  $F_p$ , то  $a \neq 0$ , следовательно,  $\text{НОД}(x + a; x^2) = 1$ , значит,

$(x+a)^{\varphi(g^2)} \equiv 1 \pmod{g^2}$ . Предположим, что существует натуральное число  $k$  такое, что  $(x+a)^k \equiv 1 \pmod{x^2}$ , причем  $k < \varphi(g^2) = p^2 - p$ . Тогда  $a^k + ka^{k-1}x \equiv 1 \pmod{x^2}$ , следовательно,  $a^k = 1, ka^{k-1} = 0$  в  $F_p$ , т. е.  $a^k = 1, k = 0$  в  $F_p$ . Значит,  $k \equiv 0 \pmod{p-1}, k \equiv 0 \pmod{p}$ , т. е.  $k \equiv 0 \pmod{p^2 - p}$ , что невозможно, поскольку  $0 < k < p^2 - p$ .

3) Покажем, что если  $p = 2$ , то  $x+1$  является первообразным многочленом по модулю  $g^3$ . Так как  $g(x) = x$ , то  $\tilde{g} = 2^{\deg(g)} = 2$ , следовательно,  $\varphi(g^3) = (\tilde{g})^3 \left(1 - \frac{1}{\tilde{g}}\right) = 4$ . Кроме того, несложно проверить, что при  $k = 1, 2, 3$  сравнение  $(x+1)^k \equiv 1 \pmod{x^3}$  не выполняется.

4) Покажем, что если  $\{n = 3; p \geq 3\}$  или  $n \geq 4$ , то не существует первообразного многочлена по модулю  $g^n$ . Предположим, что существует первообразный многочлен  $f(x)$  по модулю  $g^n(x)$ . Пусть  $r(x)$  – остаток при делении многочлена  $f(x)$  на многочлен  $g^n(x)$ , тогда  $r(x)$  – также первообразный многочлен по модулю  $g^n$ ,  $r(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ , причем  $\text{НОД}(r; g^n) = 1$ . Так как  $\text{НОД}(r; g^n) = (r; x^n) = 1$ , то  $a_0 \neq 0$  в  $F_p$ , следовательно,  $a_0^{p-1} = 1$  в  $F_p$ . Так как  $g(x) = x$ , то  $\tilde{g} = p^{\deg(g)} = p$ , следовательно,  $\varphi(g^n) = (\tilde{g})^n \left(1 - \frac{1}{\tilde{g}}\right) = p^{n-1}(p-1)$ . Так как  $\{n = 3; p \geq 3\}$  или  $n \geq 4$ , то  $p^{n-2} \geq n$ . Следовательно,  $(r(x))^{p^{n-2}} \equiv (a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0)^{p^{n-2}} \equiv a_{n-1}^{p^{n-2}}(x^{n-1})^{p^{n-2}} + \dots + a_1^{p^{n-2}}x^{p^{n-2}} + a_0^{p^{n-2}} \equiv a_0^{p^{n-2}} \pmod{x^n}$ , значит,  $(r(x))^{p^{n-2}(p-1)} \equiv (a_0^{p^{n-2}})^{p-1} \equiv (a_0^{p-1})^{p^{n-2}} \equiv 1^{p^{n-2}} \equiv 1 \pmod{x^n}$ , что невозможно, поскольку  $p^{n-2}(p-1) < p^{n-1}(p-1) = \varphi(g^n)$ .

Что и требовалось доказать.

Как видим из предыдущего примера, первообразный многочлен по модулю  $x^3$  существует тогда и только тогда, когда  $x^3 \in F_2[x]$ .

Следующий пример показывает, что первообразные многочлены существуют не только по модулю примарной степени или произведения двух примарных степеней неприводимых многочленов. Тем самым мы обнаруживаем существенное отличие от модулярной арифметики, поскольку первообразные корни по модулю  $m$  существуют только при  $m = 2, 4, p^k, 2p^k$ .

**Пример 2.** Пусть  $g_1(x) = x, g_2(x) = x+1, g_3(x) = x^2 + x + 1$  – неприводимые над полем  $F_2$  взаимно простые многочлены, тогда существует первообразный многочлен по модулю  $g_1g_2g_3$ .

**Доказательство.** Покажем, что многочлен  $f(x) = x^3 + x + 1$  является первообразным многочленом по модулю  $g_1 g_2 g_3$ . Так как  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $g_3(x)$  – неприводимые над  $F_2$  многочлены, то

$$\varphi(g_1 g_2 g_3) = (\tilde{g}_1 \tilde{g}_2 \tilde{g}_3) \left(1 - \frac{1}{\tilde{g}_1}\right) \left(1 - \frac{1}{\tilde{g}_2}\right) \left(1 - \frac{1}{\tilde{g}_3}\right) = 3, \quad \text{поскольку}$$

$\tilde{g}_1 = 2^{\deg(g_1)} = 2$ ,  $\tilde{g}_2 = 2^{\deg(g_2)} = 2$ ,  $\tilde{g}_3 = 2^{\deg(g_3)} = 4$ . Так как многочлен  $f(x)$  не делится на неприводимые многочлены  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $g_3(x)$ , то НОД  $(f; g_1 g_2 g_3) = 1$ , следовательно,  $f^{\varphi(g_1 g_2 g_3)} \equiv 1 \pmod{g_1 g_2 g_3}$ , т. е.  $f^3 \equiv 1 \pmod{g_1 g_2 g_3}$ . Кроме того, несложно проверить, что при  $k = 1, 2$  сравнение  $f^k \equiv 1 \pmod{g_1 g_2 g_3}$  не выполняется.

Что и требовалось доказать.

### Заключение

Таким образом, получены свойства первообразных многочленов над полем  $F_p$ . Это показывает преимущество в изучении первообразных корней в модулярной арифметике и в теории многочленов над конечными полями. Для одного и того же многочлена  $f(x)$  может существовать первообразный многочлен по модулю  $f(x)$  над одним конечным полем, но при этом не существовать первообразного многочлена по модулю  $f(x)$  над другим конечным полем. Кроме того, первообразные многочлены могут существовать по модулю произведения более двух примарных степеней различных неприводимых многочленов, в то время как, в модулярной арифметике первообразные корни могут существовать по модулю произведения не более двух примарных степеней различных простых чисел. Факт такого научно-теоретического дуализма объясняет возрастающую значимость конечных полей в криптографии указывает на важность изучения свойств многочленов над конечными полями.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Rivest, R. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems / R. Rivest, A. Shamir, L. Adleman // Communications of the ACM. – 1978. – Vol. 21. – P. 120–126.
2. **Болотов, А. А.** Элементарное введение в эллиптическую криптографию. Алгебраические и алгоритмические основы / А. А. Болотов, С. Б. Гашков, А. Б. Фролов, А. А. Часовских. – М. : КомКнига, 2006. – 328 с.
3. **Коблиц, Н.** Курс теории чисел и криптографии / Н. Коблиц. – М. : ТВП, 2001. – 254 с.
4. **Глухов, М. М.** Введение в теоретико-числовые методы криптографии / М. М. Глухов, И. А. Круглов, А. Б. Пичкур, А. В. Черемушкин. – СПб. : Лань, 2011. – 400 с.
5. **Базылев, Д. Ф.** О некоторых криптографических свойствах функции Эйлера для многочленов над конечным полем / Д. Ф. Базылев // Сб. науч. ст. Воен. акад. Респ. Беларусь. – 2019. – № 37. – С. 44–49.
6. **Бухштаб, А. А.** Теория чисел / А. А. Бухштаб. – М. : Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1960. – 375 с.

Поступила в редакцию 01.06.2025 г.

Контакты: bazylev@bsu.by (Базылев Дмитрий Федорович)

**Bazyleu D. F. PRIMITIVE POLYNOMIALS OVER FINITE FIELDS**

*The paper considers a generalization to the case of polynomials over finite fields of the notion of a primitive root in modular arithmetic. The conditions that ensure the existence or absence of primitive polynomials are obtained. A number of properties are preserved in comparison with the properties of primitive roots. But there are also significant differences which are given in the article. The results can be used in the construction of cryptographic systems with a public key.*

**Keywords:** polynomials over finite fields, primitive elements, cryptographic systems.

УДК 511.42

## ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ $p$ -АДИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА БОЛЬШОЙ МЕРЫ ЛЕБЕГА–ХААРА В ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

**О. Н. Кемеш**кандидат физико-математических наук, доцент  
Белорусский государственный аграрно-технический университет**И. А. Корлюкова**кандидат физико-математических наук, доцент  
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы**Н. В. Сакович**кандидат физико-математических наук, доцент  
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

*Теория диофантовых приближений возникла из теории Дирихле и Минковского, в которых были доказаны оценки сверху при замене действительных чисел рациональными числами и трансцендентных чисел алгебраическими. В последнее время появились работы, в которых найдены оценки меры Лебега множества таких интервалов  $I \subset \mathbb{R}$ , для которых неравенства  $|P(x)| < H^{-\omega}$  в полиномах  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  степени  $\deg P(x) = n$  и высоты  $H = H(P)$ , равной максимуму модуля коэффициентов  $P(x)$ . В данной работе получены оценки снизу мер Лебега-Хаара множеств  $\sigma(P)$  решений систем неравенств*

$$|P(x)| < H^{-v_1}, \quad |P(\omega)|_p < H^{-v_2}, \quad v_i > 0, \quad -1 \leq v_1 + v_2 < \frac{n+1}{3}.$$

*Доказательство основано на недавних результатах Д. Клейнбока, Г. Маргулиса и В. Бересневича в метрической теории диофантовых приближений.*

**Ключевые слова:** диофантовы приближения, алгебраические числа, дискриминанты, поле  $p$ -адических чисел, совместные приближения.

### Введение

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

многочлен с целыми коэффициентами степени  $n$  и высоты  $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ . Дискриминантом многочлена  $P$  с корнями  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  называется число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \quad (2)$$

Если дискриминант записать как определитель матрицы, содержащей коэффициенты многочлена  $P$ , не имеющего кратных корней, то нетрудно получить неравенства

$$1 \leq |D(P)| < c_1 Q^{2n-2}. \quad (3)$$

Положительные величины, зависящие только от  $n$  и не зависящие от  $H$  и  $Q > 0$ , будем обозначать  $c(n)$ ; где это необходимо, эти константы будут пронумерованы  $c_j = c_j(n), j = 1, 2, \dots$ . Символ  $\#B$  – это количество элементов конечного множества  $B$ ,  $\mu A$  – меры Лебега и Хаара измеримых множеств  $A \subset \mathbb{R}, A \subset \mathbb{Q}_p$ .

Рассмотрим неравенство

$$|P(x)| < \varepsilon, \varepsilon > 0. \quad (4)$$

Решением неравенства (4) является множество действительных чисел  $x \in \mathbb{R}$ , представляющее собой объединение не более, чем  $m \leq n$ , интервалов  $I_n$  длины  $\mu I_n \leq 2^{n-1} \varepsilon |P'(\alpha_1)|$ , где  $\alpha_1$  – ближайший к  $x$  корень  $P(x)$ . Используя дискриминант многочлена (1), можно доказать оценку  $|P'(\alpha_1)| > c_2 H^{-n+1}$ .

Оценка снизу для  $|P'(\alpha_1)|$  позволяет получить оценки меры решений неравенства (4), однако, их недостаточно для получения точных результатов (проблема Малера, проблемы Бейкера-Шмидта, аналоги теоремы Хинчина). Поэтому кроме оценки снизу для  $|P'(\alpha_1)|$  необходимо иметь оценки сверху количества полиномов, для которых эти оценки выполняются.

В работе получены наилучшие к настоящему времени результаты, позволяющие доказать новые теоремы в метрической теории диофантовых приближений. Найдены новые оценки для количества многочленов третьей и четвертой степени с заданными дискриминантами, делящимися на большую степень простого числа.

Рассмотрим следующий класс многочленов при натуральном  $Q > 1$ :

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x]: \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}. \quad (5)$$

В (5) степень многочлена  $P(x)$  обозначена  $\deg P$ ,  $H$  – высота  $P(x)$ .

В работе Фолькмана показано, что проблема Малера [1] будет решена, если найти при  $0 \leq v \leq n-1$  асимптотическое поведение величины  $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ , где

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P \in \mathcal{P}_n(Q): 1 \leq |D(P)| < Q^{2n-2-2v}\}. \quad (6)$$

Исследование класса полиномов  $\mathcal{P}_n(Q, v)$  важно в теории диофантовых уравнений и диофантовых приближений. Давенпорт нашел оценку сверху для

суммы значений дискриминантов многочленов из класса  $\mathcal{P}_3(Q, v)$ , что позволило Фолькману доказать кубический случай известной проблемы Малера. Широко применял оценки дискриминантов в задачах метрической теории диофантовых приближений В. Г. Спринджук [2, 3]. Им и Р. Бейкером найдена оценка снизу  $\#\mathcal{P}_n(Q, v) > c_3 Q^{n+1-2v}$  для  $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$ . И Д.В. Коледой сверху  $\#\mathcal{P}_n(Q, v) < c_3' Q^{n+1-v}$  для  $0 \leq v \leq 1$ .

В последние 20 лет в теории диофантовых приближений было получено несколько значительных результатов, связанных с проблемой Малера 1932 года [4–6], так и ее обобщением на невырожденные функции и поверхности [7–9]. Новые методы оказались полезными в задачах по оценкам количества целочисленных полиномов с малыми значениями модулей производных в корнях полиномов [10] и заданными оценками модулей дискриминантов [1, 11–19]. Некоторые из результатов приведены в монографиях [20–22].

### Основная часть

Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – корни  $P(x)$  как действительные, так и комплексные. В некоторых задачах принципиально доказать, является ли корень  $\alpha_i$  действительным алгебраическим числом или  $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

**Лемма 1.** Если полином  $P(x)$  удовлетворяет условию  $|a_n| > ch, h = h(P)$ , то

$$\max_{(i)} |\alpha_i| \leq \frac{n}{c} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (0 < c \leq 1). \quad (7)$$

**Лемма 2.** Пусть  $P \in \mathbf{P}_n(h)$ ,  $w$  – вещественное или комплексное число,  $w \in S(\alpha_1)$ . Тогда

$$|w - \alpha_1| < 2^n \min \left( \frac{|P(w)|}{|P'(\alpha_1)|}, \left( \frac{|P(w)|}{|P'(\alpha_1)|} |\alpha_1 - \alpha_2| \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (8)$$

**Лемма 3.** Для полинома (1) имеем

$$\max_{(i)} |P(l)| \geq c(n) \max_{(i)} |\alpha_i|,$$

где  $l, i$  принимают значения  $0, 1, \dots, n$ .

**Лемма 4.** Пусть  $P_1, P_2, \dots, P_k$  – полиномы. Тогда

$$h(P_1 P_2 \dots P_k) > ch(P_1) h(P_2) \dots h(P_k),$$

где  $c$  зависит лишь от степеней полиномов  $P_1, P_2, \dots, P_k, c > 0$ .

**Лемма 5.** Пусть  $|\alpha_h|$  – бесконечная последовательность положительных чисел. Для почти всех комплексных чисел существует лишь конечное число решений неравенства

$$|a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3| < h^{-1} \alpha_h \quad (9)$$

в целых числах  $a_0, a_1, a_2, a_3$  с условием  $\max(|a_0|, |a_1|, |a_2|, |a_3|) \leq h$ , если только

$$\sum_{h=1}^{\infty} h^{-1} \alpha_h^2 < \infty.$$

Леммы 1–5 доказаны в [2, 3, 22].

#### Разбиение на $\varepsilon$ -классы в $\mathbb{R}$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  – произвольное, малое и в дальнейшем фиксированное число. Корни  $\alpha$  полиномов  $P \in \mathbf{P}_n$  разобьем на классы ( $\varepsilon$ -классы) следующим образом.

Пусть  $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  – все корни полинома  $P$ , минимального для  $\alpha$ , лежащие в верхней полуплоскости и удовлетворяющие условию

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_k| < 1. \quad (10)$$

Считаем, что  $k \geq 2$ . Положим  $h = h(P)$ ,

$$m = \left\lceil \frac{n}{\varepsilon} \right\rceil + 1, |\alpha_1 - \alpha_i| = h^{-\rho_i} \quad (i = 2, 3, \dots, k). \quad (11)$$

и определим целые числа  $r_2, r_3, \dots, r_k$  из неравенств

$$\frac{r_i}{m} \leq \rho_i < \frac{r_i + 1}{m} \quad (i = 2, 3, \dots, k). \quad (12)$$

Тогда

$$h^{-(r_i+1)/m} < |\alpha_1 - \alpha_i| \leq h^{-r_i/m} \quad (i = 2, 3, \dots, k). \quad (13)$$

В силу (10)  $\rho_2 \geq \rho_3 \geq \dots \geq \rho_k > 0$ , а в силу (12)  $r_i = [m\rho_i]$ ,  $r_2 \geq r_3 \geq \dots \geq r_k \geq 0$ . Таким образом, с каждым корнем  $\alpha_1 = \alpha$  полинома  $P$  можем связать целочисленный вектор  $r = (r_2, r_3, \dots, r_k)$  с неотрицательными компонентами, при этом выполняются неравенства (13).

#### Поле $p$ -адических чисел.

Пусть  $F(x)$  – полином над  $K'$ ,  $K'$  – конечное расширение  $K$ ,  $F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ . Считаем, что все корни  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  полинома  $F$  различны и упорядочены так, что

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_k|.$$

Для каждого корня  $\alpha_i$  определим множество  $S(\alpha_i)$  тех точек  $\omega$  поля  $K$ , которые удовлетворяют условию

$$\min_{(j)} |\omega - \alpha_j| = |\omega - \alpha_i| \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

**Лемма 6.** [3, 22]. Пусть  $\omega \in S(\alpha_1)$ . Тогда

$$|\omega - \alpha_1| \leq \min \left( \frac{|F(\omega)|}{|F'(\alpha_1)|}, \left( \frac{|F(\omega)|}{|F'(\alpha_1)|} |\alpha_1 - \alpha_2| \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

**Лемма 7.** [3, 22]. Пусть  $\omega \in K$  определена условием

$$|\omega_0 - \alpha_1| \leq \max |\omega - \alpha_1|, \quad \omega \in \sigma_1(F),$$

где максимум берется по всем  $\omega$  из области  $\sigma_1(F)$ . Тогда

1. Если  $|\omega_0 - \alpha_1| \leq |\alpha_1 - \alpha_2|$ , то область  $\sigma_1(F)$  есть круг

$$|\omega - \alpha_1| \leq |\omega_0 - \alpha_1| = \frac{|F(\omega_0)|}{|F'(\alpha_1)|}.$$

1. Если  $|\omega_0 - \alpha_1| \geq |\alpha_1 - \alpha_2|$ , то область  $\sigma_1(F)$  есть пересечение  $S(\alpha_1)$  с кругом

$$|\omega - \alpha_1| \leq |\omega_0 - \alpha_1| \left( \frac{|F(\omega)|}{|F'(\alpha_1)|} |\alpha_1 - \alpha_2| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Лемма 8.** [3, 22]. Если  $|a_n|_p \geq 1$ , то  $|\alpha_j|_p < \rho^{-n}$ .

#### Разбиение на $p$ -классы в поле $\mathbb{Q}_p$ .

В дальнейшем предполагаем, что  $n \geq 3$ .

Выберем произвольно  $\varepsilon > 0$  и сделаем разбиение корней полиномов  $F \in F_n^*$  на классы аналогично тому, как это делалось в первой части работы.

Пусть  $F \in F_n^*$ ,  $\alpha = \alpha_1$  — некоторый корень  $F$ , а остальные корни полинома  $F$  занумерованы так, что

$$|a_1 - \alpha_2|_p \leq |a_1 - \alpha_3|_p \leq \dots \leq |a_1 - \alpha_k|_p \leq 1 \leq \dots \leq |a_1 - \alpha_n|_p. \quad (14)$$

Мы считаем здесь, что существует корень полинома  $\alpha_k$ , удовлетворяющий неравенству  $|a_1 - \alpha_k|_p \leq 1$ .

Положим  $m = \left\lceil \frac{n}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ ,  $|\alpha_1 - \alpha_i| = h^{-\rho_i}$  ( $i = 2, 3, \dots, k$ ).

Определим целые числа  $r_2, r_3, \dots, r_k$  неравенствами

$$\frac{r_i}{m} \leq \rho_i < \frac{r_i + 1}{m} \quad (i = 2, 3, \dots, k). \quad (15)$$

Очевидно, тогда

$$h^{-(r_i+1)/m} < |\alpha_1 - \alpha_i| \leq h^{-r_i/m} \quad (i = 2, 3, \dots, k).$$

В силу (14)  $\rho_2 \geq \rho_3 \geq \dots \geq \rho_k \geq 0$ , так что из (15) следует

$$r_i = [m\rho_i], r_2 \geq r_3 \geq \dots \geq r_k \geq 0. \quad (16)$$

Теперь каждому корню  $\alpha = \alpha_1$  полинома  $F \in F_n^*$  мы сопоставляем целочисленный вектор  $r = (r_2, r_3, \dots, r_k)$  с неотрицательными компонентами. Все  $\alpha$ , имеющие один и тот же вектор  $r$ , объединяем в один класс  $K_\varepsilon(r) = K(r)$ .

**Лемма 9.** [3, 22]. Если класс  $K(r)$  содержит бесконечное число элементов, то

$$\sum_{i=2}^k (j-1) \frac{r_j}{m} \leq n-1.$$

**Лемма 10.** [12]. Пусть  $B_1$  множество решений системы неравенств

$$\begin{aligned} \delta_0 H^{-v_0} &< |P(x)| < c_0 H^{-v_0}; \\ \delta_0 H^{-v_j} &< |P^{(j)}(x)| < c_0 H^{-v_j}; \\ &\dots \\ \delta_0 H &< |P^{(k)}(x)| < c_0 H; \\ v_0 + v_1 + \dots + v_j &= n - k, \quad 1 \leq j \leq k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \\ v_0 - v_1 &\geq v_1 - v_2 \geq v_2 - v_3 \geq \dots \geq v_{j-1} - v_j. \end{aligned}$$

в неприводимых полиномах  $P(x)$  степени  $n$  и высоты  $H$ ,  $H \leq Q$ . Тогда существуют такие числа  $\delta_0 = \delta_0(n) < c_0 = c_0(n)$  и натуральное число  $Q = Q(n)$  такое, где  $\mu_1$  — мера Лебега.  $\mu_1 B_1 > \frac{3}{4} \mu_1 I$ .

**Лемма 11.** Пусть  $K$  — некоторый цилиндр в  $Q_p, \mathcal{Z}_1 \subset K$  — множество  $p$ -адических чисел, для которых справедлива система неравенств

$$\begin{aligned} \delta_0 H^{-w_0} &< |P(w)|_p < c_0 H^{-w_0}; \\ \delta_0 H^{-w_j} &< |P^{(j)}(w)|_p < c_0 H^{-w_j}; \\ &\dots \\ \delta_0 &< |P^{(k)}(w)|_p < c_0; \\ w_0 + w_1 + \dots + w_j &= n + 1 - k, \quad 1 \leq j \leq k, \quad 1 \leq k \leq n-1, \\ w_0 - w_1 &\geq w_1 - w_2 \geq w_2 - w_3 \geq \dots \geq w_{j-1} - w_j. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда существуют такие действительные числа  $\delta_0, c_0$  и натуральное число  $Q > Q_0(n)$  такие, что

$$\mu_2 Z_1 > \frac{3}{4} \mu_2 K,$$

где  $\mu_2$  – мера Хаара в  $Q_p$ .

**Лемма 12. (Лемма Гензеля).** Пусть  $P(w) \in \mathbb{Z}_p[w]$ ,  $w \in \mathbb{Z}_p$  и  $|P(w)| < |P'(w)|_p^2$ . Тогда существует целое алгебраическое число  $\alpha \in Q_p$ , такое, что  $P(\alpha) = 0$ ,  $|P'(\alpha)|_p = |P'(w)|_p$ , и

$$|x - \alpha|_p < |P(x)|_p |P'(w)|_p^{-1} < |P'(w)|_p.$$

Лемма 12 вместе с леммами позволяет доказать утверждения о распределении алгебраических  $p$ -адических чисел  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  из алгебраического замыкания  $\bar{Q}_p$ .

**Лемма 13.** Если  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  упорядочены так, что

$$|w - \alpha_1|_p \leq |w - \alpha_2|_p \leq \dots \leq |w - \alpha_n|_p, \quad (18)$$

то верны следующие неравенства

$$\left| \frac{1}{j!} p^{(j)}(w) \right|_p \leq |a_n|_p |w - \alpha_{j+1}|_p \dots |w - \alpha_n|_p.$$

и поэтому при  $|w - \alpha_j|_p < |w - \alpha_{j+1}|_p$  выполняется неравенство (18).

**Лемма 14.** Пусть  $w \in \mathbb{Z}_p$  и  $Q > 1$  числа  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  как в лемме 13. Положим  $d_j = \Theta_{j-1} - \Theta_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , и предположим, что

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0.$$

Тогда корни  $P(w)$  удовлетворяют неравенствам

$$|w - \alpha_j|_p \leq \delta_0^{-1} Q^{-d_j}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

**Теорема.** Пусть  $\bar{u} = (x, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$  и

$$\begin{aligned} |P(x)| &< c_0 H^{-v_0}, |P'(x)|_p > \delta_0 Q^{v_1} \\ |P(w)|_p &< c_0 H^{-w_0}, |P'(w)|_p > \delta_0 Q^{w_1} \\ v_0 - v_1 &\geq v_1 + 1, w_0 - w_1 \geq w_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда существуют интервал  $I$  и цилиндр  $K$ , такие, что выполняется система неравенств (19),  $n \geq 3$  и

$$\begin{aligned} \mu(I \times K) &> c Q^{-(v_0 + w_0) + v_1 + w_1}, \\ -1 &< v_1 + w_1 < \frac{n-2}{3}. \end{aligned} \quad (20)$$

*Доказательство.* Предварительно докажем, что координаты вектора  $\bar{u} = (x, w)$  принадлежат  $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_p$ . Из леммы 10 следует, что

$$|P(x)| < c_0 H^{-v_0}, |P'(x)| > \delta_0 Q^{v_1}. \quad (21)$$

В (21) возможны 4 случая. Они аналогичны. И поэтому будем считать, что  $|P(x)| > 0, |P'(x)| < 0$ .

В этом случае (21) можно переписать в виде

$$0 < |P(x)| < c_0 H^{-v_0}, -\delta_0 Q^{v_1} < |P'(x)| < 0. \quad (22)$$

Возьмем точку  $x$ , для которой верны неравенства (22) и точку

$$x_1 = x - 2c_0^{-1} |P'(x_1)|^{-1}. \quad (23)$$

Покажем, что в этой точке  $P(x_1) < 0$ . В самом деле из формулы Лагранжа

$$P(x_1) = P(x) + P'(x_1)(x_1 - x) + \frac{1}{2} P''(\xi)(x_1 - x)^2, \quad (24)$$

где  $x_i \leq \xi \leq x$ . Из (23) и (24) имеем  $P'(x_1) < 0$ . Это означает, что в точках  $x_1$  и  $x$  полином принимает значения разных знаков. Отсюда следует, что между ними находится действительный корень полинома  $P(x)$ . Теперь используем теорему Гензеля и получим, что корень  $P(w)$  из алгебраического замыкания  $\bar{\mathbb{Q}}_p$  лежит в  $\mathbb{Q}_p$ .

Из лемм 9 – 14 следует, что система неравенств (17) верна для множеств  $B_2$  точек  $\bar{u} = (x, w)$  и  $\mu B_2 > \frac{9}{15} (\mu_1 I \times \mu_2 K)$ . Оценки сверху в (17) для значений  $|P(x)|$  и  $|P(w)|_p$  получаются с использованием принципа ящиков Дирихле при  $v_0 + w_1 \leq n - 1$ . Воспользуемся леммами 10, 11 и оценками снизу для  $|P'(x)|$  и  $|P'(w)|$  из (20). Получим из леммы

$$|x - \alpha_1| \asymp c Q^{-v_0+v_1}, |w - \gamma_1|_p \asymp c Q^{-w_0+w_1}.$$

Так как  $v_0 \geq 2v_1 + 1, w_0 \geq 2w_1$ , то

$$v_1 + w_1 \leq \frac{n-2}{3}. \quad (21).$$

Из неравенства (20) можно получить значения меры Лебега-Хаара – интервалов  $I$  и цилиндров  $K$ , учитывая оценки снизу для  $v_1 \geq 1$  и  $w_1 \geq 1$ . Теорема может быть обобщена на совместные приближения в пространстве

$$\Omega = R^k \times \mathbb{Q}_p^l, \quad k \geq 1, l \geq 1.$$

### Заключение

Доказанная теорема улучшила результаты, известные ранее в теории диофантовых приближений. В поле  $p$ -адических чисел это новая теорема. Методы доказательства могут быть перенесены на совместные приближения.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Mahler, K.** An inequality for the discriminant of a polynomial / K. Mahler // Michigan Math. – 1964. – Vol. 11. – P. 257–262.
2. **Sprindzuk, V. G.** Mahler's problem in metric number theory, volume / V. G. Sprindzuk // Translations of Mathematical Monographs. Vol. 25. – American Mathematical Society, Providence, RI, 1969. – 192 p.
3. **Спринджук, В. Г.** Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1965. – № 2. – С. 379–436.
4. **Bernik, V. I.** Lengths of the intervals where integer polynomials can attain small values / V. Bernik, D. Basilyev, N. Kalosha, Z. Panteleeva // Dokl. Nats. Frfd. Nayk Belarusi. – 2024. – Vol. 68, № 8. – P. 447–453.
5. **Beresnevich, V. V.** On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. V. Beresnevich // Acta Arithmetica. – 1999. – Vol. 90, № 2. – P. 97–112.
6. **Берник, В.** О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Vol. 53, № 1. – P. 17–28.
7. **Beresnevich V.** Metric Diophantine approximation: The Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds / V. Beresnevich, V. Bernik, D. Kleinbock, G. A. Margulis // Mosc. Math. J. – 2002. – Vol. 2. – P. 203–225.
8. **Bernik, V. I.** Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standards and multiplicative versions / V. I. Bernik, D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis // Internat. Res. Notices. – 2001. – Vol. 9. – P. 453–486.
9. **Kleinbock, D. Y.** Flows on Homogeneous Spaces and Diophantine Approximation on Manifolds / D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis // Annals of Mathematics. – 1998. – Vol. 148, № 1. – P. 339–360.
10. **Lewis, R.** A formal Proof of Hensel's Lemma over the  $p$ -adic Integers. In Proceedings of the 8<sup>th</sup> ACM SIGPLAN International Conference on Certified Programs and Proofs (CPP'19) / R. Lewis. – URL: <https://doi.org/10.1145/3293880.3294089> (date of access: 1.06.2025)
11. **Badziahin, D.** Simultaneous Diophantine approximation to points on the Veronese curve [Electronic resource] / D. Badziahin. – URL: <https://arxiv.org/abs/2403.17685> (date of access: 2.06.2025)
12. **Beresnevich, V. V.** Integral polynomials with small discriminants and resultants / V. V. Beresnevich, V. I. Bernik, F. Götze // Advances in Mathematics. – 2016. – Vol. 298. – P. 393–412.
13. **Beresnevich, V.** Simultaneous approximation of zero by an integral polynomials, its derivative, and small values of discriminants. / V. Beresnevich // Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi. – 2010. – Vol. 54. – P. 26–28.
14. **Bernik, V. I.** Exact upper bounds for the number of the polynomials with given discriminants / V. I. Bernik, N. Budarina, F. Goetze // Lithuanian Mathematical Journal. – 2017. – Vol. 57. – P. 283–293.
15. **Bernik, V. I.** How do discriminants of integer polynomials depend on the mutual arrangement of roots? / V. Bernik, N. Budarina, H. O'Donnell // Chebyshev collection. – 2015. – Vol. 16, № 1. – P. 153–162.
16. **Bernik, V. I.** Discriminants of integer polynomials in the archimedean and non-archimedean metrics / V. Bernik, N. Budarina, H. O'Donnell // Acta Mathematica Hungarica. – 2018. – Vol. 154, №2. – P. 265–278.

17. **Budarina, N.** New estimates for the number of integer polynomials with given discriminants / N. Budarina, V. Bernik, H. O'Donnell // Lithuanian Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 60. – P. 1–8.
18. **Koleda, D.** On the distribution of polynomial discriminants: totally real case / D. Koleda // Lithuanian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 59. – P. 67–80.
19. **Yuan, J.** On the number of polynomials with small discriminants in the euclidean and  $p$ -adic metrics. / J. Yuan, N. Budarina, D. Dickinson // Acta Mathematica Sinica. – 2012. – Vol. 28. – P. 467–476.
20. **Bugeaud, Y.** Approximation by algebraic numbers / Y. Bugeaud // Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press. – 2004. – Vol. 160. – 290 p.
21. **Schmidt, W. M.** Diophantine approximation / W. M. Schmidt. – Springer-Verlag, Berlin and New York, 1980. – 299 p.
22. **Bernik V. I.** Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson // Cambridge : CUP, 1999. – Vol. 137. – 172 p.

Поступила в редакцію 10.06.2025 г.

Контакты: kemesh.oksana@gmail.com (Кемеш Оксана Николаевна), korlyukova\_ia@grsu.by (Корлюкова Ирина Александровна), sakovich\_nv@m.msu.by (Сакович Наталья Владимировна)

**Kemesh O. N., Korlyukova I. A., Sakovich N. V. REAL INTERVALS OF THE  $p$ -ADIC CYLINDER OF LARGE LEBESGUE-HAAR MEASURE IN DIOPHANTINE APPROXIMATIONS**

*The theory of Diophantine approximations arose from the theory of Dirichlet and Minkowski, in which upper bounds were proved by replacing real numbers with rational numbers and transcendental numbers with algebraic ones. Recently, there have been papers in which estimates of the Lebesgue measure of a set of such intervals have been found  $I \subset \mathbb{R}$ , for which inequalities  $|P(x)| < H^{-\omega}$  in polynomials  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  degrees  $\deg P(x) = n$  and heights  $H = H(P)$ , equal to the maximum of the coefficient modulus  $P(x)$ . In this paper, we obtain estimates from below of Lebesgue-Haar measures of sets  $\sigma(P)$  solutions to systems of inequalities*

$$|P(x)| < H^{-v_1}, \quad |P(\omega)|_p < H^{-v_2}, \quad v_i > 0, \quad -1 \leq v_1 + v_2 < \frac{n+1}{3}.$$

*The proof is based on recent results by D. Kleinbock, G. Margulis, and V. Beresnevich in the metric theory of Diophantine approximations*

**Keywords:** Diophantine approximations, algebraic numbers, discriminants,  $p$ -adic number field, simultaneous approximations.

УДК 517.983

# МНОГОМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С Н-ФУНКЦИЕЙ В ЯДРЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

**О. В. Скоромник**

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и компьютерной безопасности

Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой

**М. В. Папкович**

старший преподаватель кафедры математики и компьютерной безопасности

Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой

*Работа посвящена исследованию многомерного интегрального преобразования с Н-функцией Фокса в ядре в весовых пространствах, измеримых по Лебегу функций в области  $\mathbb{R}_+^n$  с положительными координатами. С помощью методики, основанной на применении многомерного преобразования Меллина и его свойств, получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора исследуемого преобразования из одних весовых пространств интегрируемых функций в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям. Для рассматриваемого преобразования установлены различные интегральные представления. Результаты исследования обобщают результаты, полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования.*

**Ключевые слова:** многомерное интегральное преобразование, Н-функция Фокса, преобразование Меллина, весовое пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.

## Введение

Рассматривается многомерное интегральное преобразование [1; 2 формула (1)]:

$$(H f)(x) = \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n} \left[ x t \left| \begin{matrix} (a_i, \bar{\alpha}_i)_{1,p} \\ (b_j, \bar{\beta}_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt \quad (x > 0), \quad (1)$$

где ([1–3]; [4], §28; [5], гл.1; [6, 7])  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ;  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ;

$\mathbb{R}^n$  – Евклидово  $n$ -мерное пространство;  $x \cdot t = \sum_{k=1}^n x_k t_k$  – их скалярное произ-

ведение, в частности  $x \cdot 1 = \sum_{k=1}^n x_k$  для  $1 = (1, 1, \dots, 1)$ . Неравенство  $x > t$  означает

$x_1 > t_1, x_2 > t_2, \dots, x_n > t_n$ , аналогично для знаков  $\geq, <, \leq$ ;  $\int_0^\infty := \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty$ ;

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  – множество натуральных чисел,  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ ,  $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$  ( $k_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, 2, \dots, n$ ) – мультииндекс

с  $k! = k_1! k_2! \dots k_n!$  и  $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ ;  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n, x > 0\}$ ; для

$\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{R}_+^n$   $D^\kappa = \frac{\partial^{|k|}}{(\partial x_1)^{\kappa_1} (\partial x_2)^{\kappa_2} \dots (\partial x_n)^{\kappa_n}}$ ;  $dt = dt_1 \dots dt_n$ ;

$t^\kappa = t_1^{\kappa_1} \cdot t_2^{\kappa_2} \dots t_n^{\kappa_n}$ ;  $f(t) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ;  $\mathbb{C}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) –  $n$ -мерное пространство ком-

плексных чисел  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  ( $z_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, n$ );  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ ;

$\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ;  $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx_1 \cdot dx_2 \dots dx_n}$ ;  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$  и

$m_1 = m_2 = \dots = m_n$ ;  $n = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_n) \in \mathbb{N}_0^n$  и  $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = \dots = \bar{n}_n$ ;  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{N}_0^n$  и

$p_1 = p_2 = \dots = p_n$ ;  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{N}_0^n$  и  $q_1 = q_2 = \dots = q_n$ ; ( $0 \leq m \leq q, 0 \leq n \leq p$ );

$\mathbf{a}_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in \mathbb{C}$  ( $i_1 = 1, 2, \dots, p_1; \dots; i_n = 1, 2, \dots, p_n$ );

$\mathbf{b}_j = (b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n})$ ,  $1 \leq j \leq q$ ,  $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n} \in \mathbb{C}$  ( $j_1 = 1, 2, \dots, q_1; \dots; j_n = 1, 2, \dots, q_n$ );

$\bar{\alpha}_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n})$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n} \in \mathbb{R}_1^+$

( $i_1 = 1, 2, \dots, p_1; \dots; i_n = 1, 2, \dots, p_n$ );

$\bar{\beta}_j = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n})$ ,  $1 \leq j \leq q$ ,  $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n} \in \mathbb{R}_1^+$

( $j_1 = 1, 2, \dots, q_1; \dots; j_n = 1, 2, \dots, q_n$ ).

Функция в ядре преобразования (1)

$$H_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} \mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i \\ \mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j \end{matrix} \right]_{1,p} = \prod_{k=1}^n H_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[ x_k t_k \begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \right] \quad (2)$$

представляет собой произведение  $H$ - функций Фокса  $H_{p,q}^{m,n}[z]$ :

$$H_{p,q}^{m,n}[z] \equiv H_{p,q}^{m,n} \left[ z \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \quad z \neq 0, \quad (3)$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)}. \quad (4)$$

В представлении (3)  $L$  – специально выбранный бесконечный контур [8, раздел 1.1], пустые произведения в (4), если таковые имеются, считаются равными единице.

$H$ -функция является наиболее общей из известных специальных функций и включает в себя в качестве частных случаев элементарные функции и специальные функции гипергеометрического типа и типа Бесселя, а также  $G$ -функцию Мейера. С теорией  $H$ -функции (3) можно ознакомиться в ([8], гл. 1–4; [9] раздел 8.3; [10], гл.2; [11], гл.1).

Из-за общности  $H$ -функции Фокса многие специальные интегральные преобразования имеют вид, изучаемый в данной работе, в том числе операторы с такими ядрами, как обобщенные гипергеометрические функции, классические гипергеометрические функции, функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя и другие. Более того, рассматриваемый класс охватывает наиболее важные дробные интегральные операторы, такие как операторы типа Римана – Лиувилля.

В работе [1] были изучены функциональные свойства преобразования (1) в весовых пространствах  $\mathfrak{L}_{\bar{\mathbf{v}}, \bar{2}}$ , измеримых по Лебегу функций

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  на  $\mathbb{R}_+^n$ , таких что

$$\|f\|_{\bar{\mathbf{v}}, \bar{2}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_n^{v_n \cdot 2-1} \left\{ \dots \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{v_2 \cdot 2-1} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{v_1 \cdot 2-1} |f(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \right\} dx_2 \right\} \dots \right\} dx_n \right\}^{1/2} < \infty,$$

$$\bar{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v_1 = v_2 = \dots = v_n, \quad \bar{2} = (2, \dots, 2).$$

Работа [2] посвящена расширению полученных результатов от  $\bar{r} = 2$  до любого  $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq \bar{r} < \infty$ ,  $r_1 = r_2 = \dots = r_n$ .

Настоящая работа продолжает эти исследования: устанавливаются условия ограниченности и взаимной однозначности оператора преобразования (1), различные интегральные представления, дается описание образов такого оператора в весовых пространствах  $\mathfrak{L}_{\bar{\mathbf{v}}, \bar{r}}$  интегрируемых функций  $f(x)$ , таких что

$$\|f\|_{\bar{\mathbf{v}}, \bar{r}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_n^{v_n \cdot 2-1} \left\{ \dots \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{v_2 \cdot 2-1} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{v_1 \cdot 2-1} |f(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \right\} dx_2 \right\} \dots \right\} dx_n \right\}^{1/2} < \infty,$$

$$\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq \bar{r} < \infty, \quad r_1 = r_2 = \dots = r_n, \quad \bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n, \\ v_1 = \dots = v_n.$$

Все результаты для преобразования (1) обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования ([8], глава 4.1):

$$(Hf)(x) = \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n} \left[ xt \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt, \quad x > 0 \quad (5)$$

в пространстве  $\mathfrak{L}_{v,r}$  измеримых по Лебегу функций  $f$  на  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ , для которых  $\|f\|_{v,r} < \infty$ , где

$$\|f\|_{v,r} = \left( \int_0^\infty \left| t^v f(t) \right|^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (1 \leq r < \infty, v \in \mathbb{R}).$$

Н-преобразование (5) обобщает многие интегральные преобразования: преобразования с G-функцией Мейера, преобразования Лапласа и Ханкеля, преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса, преобразования с другими гипергеометрическими функциями и функциями Бесселя. Обзор результатов и библиографию в этой области для одномерного случая можно найти в монографии [8]. Кроме того, рассматриваемый в данной статье тип интегральных преобразований обобщает известные интегральные преобразования с функцией Лежандра в ядрах (12) и операторы Бушмана – Эрдейи [13; 14]. Классы операторов с Н-функцией Фокса также важны в теории интегральных преобразований [15–17], в теории операторов дробного интегро-дифференцирования и приложениях [18; 19].

### Вспомогательные сведения.

Свойства Н-функции  $H_{p,q}^{m,n}[z]$  (3) зависят от констант ([8], формулы (1.1.7)–(1.1.15)):

$$a^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_j - \sum_{j=m+1}^q \beta_j, \quad \Delta = \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i; \quad (6)$$

$$\delta = \prod_{i=1}^p \alpha_i^{-\alpha_i} \prod_{j=1}^q \beta_j^{\beta_j}; \quad (7)$$

$$\mu = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-q}{2}; \quad (8)$$

$$a_1^* = \sum_{j=1}^m \beta_j - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i; a_2^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{j=m+1}^q \beta_j; a_1^* + a_2^* = a^*, a_1^* - a_2^* = \Delta; \quad (9)$$

$$\xi = \sum_{j=1}^m b_j - \sum_{j=m+1}^q b_j + \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=n+1}^p a_i. \quad (10)$$

Пустые суммы в (6), (8), (9), (10) и пустые произведения в (7), если таковые имеются, считаются равными единице и нулю соответственно.

Нам понадобятся: формула понижения для  $H$ -функции [8, формула (2.1.1)]

$$H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q-1}, (a_1, \alpha_1) \end{matrix} \right. \right] = H_{p-1,q-1}^{m,n-1} \left[ z \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{2,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q-1} \end{matrix} \right. \right], \quad n \geq 1 \text{ и } q > m; \quad (11)$$

равенство [8, формула (2.2.7)]

$$\left( \frac{d}{dz} \right)^k \left( z^{-\sigma b_1/\beta_1} H_{p,q}^{m,n} \left[ z^\sigma \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] \right) = \left( \frac{-\sigma}{\beta_1} \right)^k z^{-k-\sigma b_1/\beta_1} H_{p,q}^{m,n} \left[ z^\sigma \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_1 + k_1 \beta_1), (b_j, \beta_j)_{2,q} \end{matrix} \right. \right], \quad (12)$$

$$m \geq 1, \quad \sigma = \beta_1, \quad k > 1.$$

**Теорема 1.** [8, Теорема 3.4] Пусть  $\alpha < \gamma < \beta$  и выполняется любое из условий  $a^* > 0$  или  $a^* = 0$  и  $\Delta\gamma + \operatorname{Re}(\mu) < -1$ . Тогда для любого  $x > 0$  (кроме значений  $x$ , когда  $a^* = 0$  и  $\Delta = 0$ ) выполняется равенство

$$H_{p,q}^{m,n} \left[ x \left| \begin{matrix} (a_p, \alpha_p) \\ (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} (a_p, \alpha_p) \\ (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right] t \Big|_t x^{-t} dt$$

и справедлива оценка

$$\left| H_{p,q}^{m,n} \left[ x \left| \begin{matrix} (a_p, \alpha_p) \\ (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right. \right] \right| \leq A_\gamma x^{-\gamma}, \quad (13)$$

где  $A_\gamma$  – положительная постоянная, зависящая только от  $\gamma$ .

Многомерное преобразование Меллина функции  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ , определяется по формуле:

$$(\mathfrak{M}f)(s) = f^*(s) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(t) t^{s-1} dt, \quad \operatorname{Re}(s) = \bar{v}, \quad (14)$$

$s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ . Обратное преобразование Меллина дается формулой:

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \cdots \int_{\gamma_n - i\infty}^{\gamma_n + i\infty} x^{-s} g(s) ds,$$

$x \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\gamma_j = \operatorname{Re}(s_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). С теорией многомерного преобразования Меллина (114) можно ознакомиться, например, в книгах ([5], глава 1; [20; 21]).

Многомерные интегралы дробного интегрирования  $I_{0+; \sigma, \eta}^\alpha f$  и  $I_{-; \sigma, \eta}^\alpha f$  типа Эрдейи – Кобера определены для  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$  ( $\operatorname{Re}(\alpha_k) > 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ ),  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n$  формулами [3]:

$$\left(I_{0+; \sigma, \eta}^\alpha f\right)(x) = \frac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(x^\sigma - t^\sigma\right)^{\alpha-1} t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t) dt \quad (x > 0), \quad (15)$$

$$\left(I_{-; \sigma, \eta}^\alpha f\right)(x) = \frac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \left(t^\sigma - x^\sigma\right)^{\alpha-1} t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(t) dt \quad (x > 0). \quad (16)$$

Через  $[X, Y]$  обозначим множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$ .

Условия ограниченности операторов преобразований (15), (16) и преобразований Меллина (14) от (15), (16) получены из утверждений для соответствующих одномерных случаев [8, теорема 3.2] с учетом результатов в [3].

**Теорема 2.** *Справедливы следующие утверждения:*

*а) Если  $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ ,  $1 \leq r_k \leq \infty$ ,  $r_k = r_l$ ,  $k \neq l$  ( $k = \overline{1, n}$ );  $\operatorname{Re}(\alpha_k) > 0$  и  $v_k < \sigma_k(1 + \operatorname{Re}(\eta_k))$  ( $k = \overline{1, n}$ ), тогда для всех  $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n)$ ,  $\bar{s}_k \geq r_k$ , таких что  $1/\bar{s}_k > 1/r_k - \operatorname{Re}(\alpha_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), оператор  $I_{0+; \sigma, \eta}^\alpha \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}, \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{s}}]$  и является взаимно однозначным. Для  $1 \leq r_k \leq 2$ ,  $r_k = r_l$ ,  $k \neq l$  ( $k, l = \overline{1, n}$ ), и  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$  выполняется равенство:*

$$(\mathfrak{M} I_{0+; \sigma, \eta}^\alpha f)(s) = \frac{\Gamma\left(1 + \eta - \frac{s}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(1 + \eta + \alpha - \frac{s}{\sigma}\right)} (\mathfrak{M} f)(s) \quad (\operatorname{Re}(s) = v). \quad (17)$$

*б) Если  $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ ,  $1 \leq r_k \leq \infty$ ,  $r_k = r_l$ ,  $k \neq l$  ( $k, l = \overline{1, n}$ );  $\operatorname{Re}(\alpha_k) > 0$  и  $v_k > -\sigma_k \operatorname{Re}(\eta_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), тогда для всех  $\bar{s} = (\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n)$ ,  $\bar{s}_k \geq r_k$ , таких что  $1/\bar{s}_k > 1/r_k - \operatorname{Re}(\alpha_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), оператор  $I_{-; \sigma, \eta}^\alpha \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}, \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{s}}]$  и является взаимно*

однозначным. Для  $1 \leq r_k \leq 2$ ,  $r_k = r_l, k \neq l$  ( $k, l = 1, n$ ), и  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$  выполняется равенство:

$$(\mathfrak{M} I_{-; \sigma, \eta}^{\alpha} f)(s) = \frac{\Gamma\left(\eta + \frac{s}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\eta + \alpha + \frac{s}{\sigma}\right)} (\mathfrak{M} f)(s) \quad (\operatorname{Re}(s) = v). \quad (18)$$

Для формулировки результатов для  $H$ -преобразования (1) нам понадобятся следующие многомерные постоянные, аналогичные одномерному случаю, определяемые через параметры  $H$ -функции (3) ([8], (3.4.1), (3.4.2), (1.1.7) – (1.1.13)):

пусть  $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ ,  $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_n)$ , где

$$\tilde{\alpha}_1 = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_1 \leq m_1} \left[ \frac{\operatorname{Re}(b_{j_1})}{\beta_{j_1}} \right], & m_1 > 0, \\ -\infty, & m_1 = 0, \end{cases} \quad \tilde{\beta}_1 = \begin{cases} \min_{1 \leq i_1 \leq \bar{n}_1} \left[ \frac{1 - \operatorname{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}} \right], & \bar{n}_1 > 0, \\ \infty, & \bar{n}_1 = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\tilde{\alpha}_n = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_n \leq m_n} \left[ \frac{\operatorname{Re}(b_{j_n})}{\beta_{j_n}} \right], & m_n > 0, \\ -\infty, & m_n = 0, \end{cases} \quad \tilde{\beta}_n = \begin{cases} \min_{1 \leq i_n \leq \bar{n}_n} \left[ \frac{1 - \operatorname{Re}(a_{i_n})}{\alpha_{i_n}} \right], & \bar{n}_n > 0, \\ \infty, & \bar{n}_n = 0, \end{cases}$$

пусть  $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ ,  $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$  и

$$a_1^* = \sum_{i=1}^{\bar{n}_1} \alpha_{i_1} - \sum_{i=\bar{n}_1+1}^{p_1} \alpha_{i_1} + \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{j_1} - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} \beta_{j_1}, \quad \Delta_1 = \sum_{j=1}^{q_1} \beta_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_{i_1},$$

...

(20)

$$a_n^* = \sum_{i=1}^{\bar{n}_n} \alpha_{i_n} - \sum_{i=\bar{n}_n+1}^{p_n} \alpha_{i_n} + \sum_{j=1}^{m_n} \beta_{j_n} - \sum_{j=m_n+1}^{q_n} \beta_{j_n}, \quad \Delta_n = \sum_{j=1}^{q_n} \beta_{j_n} - \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_{i_n};$$

пусть  $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  и

$$\delta_1 = \prod_{i=1}^{p_1} \alpha_{i_1}^{-\alpha_{i_1}} \prod_{j=1}^{q_1} \beta_{j_1}^{\beta_{j_1}}, \dots, \delta_n = \prod_{i=1}^{p_n} \alpha_{i_n}^{-\alpha_{i_n}} \prod_{j=1}^{q_n} \beta_{j_n}^{\beta_{j_n}}; \quad (21)$$

пусть  $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  и

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{q_1} b_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i_1} + \frac{p_1 - q_1}{2}, \dots, \mu_n = \sum_{j=1}^{q_n} b_{j_n} - \sum_{i=1}^{p_n} a_{i_n} + \frac{p_n - q_n}{2}. \quad (22)$$

Исключительным множеством  $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$  функции  $\overline{\mathcal{H}}_{p,q}^{m,n}(s)$ :

$$\overline{\mathcal{H}}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \overline{\mathcal{H}}_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \overline{\alpha}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \overline{\beta}_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = \prod_{k=1}^n \mathcal{H}_{p_k, q_k}^{m_k, \overline{n}_k} \left[ \begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \middle| s_k \right] \quad (23)$$

назовем множество векторов  $\overline{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  ( $v_1 = v_2 = \dots = v_n$ ) таких, что  $\tilde{\alpha}_k < 1 - v_k < \tilde{\beta}_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), где параметры  $\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) определены формулами (20) и функции  $\mathcal{H}_{p_k, q_k}^{m_k, \overline{n}_k}(s_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) вида (4) имеют нули на прямых  $\operatorname{Re}(s_k) = 1 - v_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), соответственно, [1, формула (27)].

Многомерное преобразование Меллина (14) от (1) выражается формулой [1, формула (28)]:

$$(\mathfrak{M} \mathcal{H} f)(s) = \overline{\mathcal{H}}_{p,q}^{m,n} \left[ \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M} f)(1-s). \quad (24)$$

В следующей теореме представлены функциональные свойства многомерного преобразования  $\mathcal{H} f$  (1) в пространстве  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbf{v}}, \overline{2}}$  для случая, когда постоянные (20) и (22) принимают значения  $a_k^* = \Delta_k = 0$ ,  $\operatorname{Re}(\mu_k) < 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и  $\overline{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  ( $v_k = v_l, k \neq l$ ).

**Теорема 3.** [1, Теорема 3] Пусть

$$\tilde{\alpha}_k < 1 - v_k < \tilde{\beta}_k; \quad v_k = v_l, \quad k \neq l \quad (k, l = \overline{1, n}); \quad (25)$$

и выполняется любое из условий:

$$a_k^* > 0 \quad (k = \overline{1, n}) \quad (26)$$

или

$$a_k^* = 0; \quad \Delta_k [1 - v_k] + \operatorname{Re}(\mu_k) \leq 0, \quad (k = \overline{1, n}). \quad (27)$$

Верны следующие утверждения:

а) Существует взаимно однозначное преобразование  $\mathcal{H} \in [\mathcal{L}_{\overline{\mathbf{v}}, \overline{2}}, \mathcal{L}_{1-\overline{\mathbf{v}}, \overline{2}}]$  такое, что равенство (24) выполняется для  $f \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbf{v}}, \overline{2}}$  и  $\operatorname{Re}(s) = 1 - \overline{\mathbf{v}}$ .

Если  $a_k^* = 0$ ;  $\Delta_k [1 - v_k] + \operatorname{Re}(\mu_k) = 0$ , ( $k = \overline{1, n}$ ) и  $\overline{\mathbf{v}} \notin \mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$ , то оператор  $\mathcal{H}$  преобразования (1) биективно отображает  $\mathcal{L}_{\overline{\mathbf{v}}, \overline{2}}$  на  $\mathcal{L}_{1-\overline{\mathbf{v}}, \overline{2}}$ .

b) Если  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$  и  $g \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ , то имеет место формула:

$$\int_0^{\infty} f(x)(H g)(x) dx = \int_0^{\infty} (H f)(x)g(x) dx. \quad (28)$$

c) Пусть  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ ,  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ ,  $\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ . Если  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{v})\bar{h} - 1$ , то преобразование  $H f$  (1) представимо в виде

$$(H f)(x) = \bar{h} x^{1 - (\bar{\lambda} + 1)/\bar{h}} \frac{d}{dx} x^{(\bar{\lambda} + 1)/\bar{h}} \int_0^{\infty} H_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ xt \left| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, q}, (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \right. \right] f(t) dt, \quad (29)$$

при  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{v})\bar{h} - 1$  выражается формулой

$$(H f)(x) = -\bar{h} x^{1 - (\bar{\lambda} + 1)/\bar{h}} \frac{d}{dx} x^{(\bar{\lambda} + 1)/\bar{h}} \int_0^{\infty} H_{p+1, q+1}^{m+1, n} \left[ xt \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, p}, (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt. \quad (30)$$

d) Преобразование  $H f$  не зависит от  $\bar{v}$  в том смысле что, если  $\bar{v}$  и  $\bar{\bar{v}}$  удовлетворяют (25) и выполняются условия (26) или (27), и если преобразования  $H f$  и  $\tilde{H} f$  определяются в пространствах  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$  и  $\mathcal{L}_{\bar{\bar{v}}, \bar{2}}$  равенством (24), то  $H f = \tilde{H} f$  для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}} \cap \mathcal{L}_{\bar{\bar{v}}, \bar{2}}$ .

Приведем свойства преобразования  $H f$  (1) в пространствах  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$ ,  $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 < \bar{r} < \infty$ ,  $r_k = r_l$ ,  $k \neq l$ ;  $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $v_k = v_l$ ,  $k \neq l$ ; когда константы (20) и (22) равны соответственно  $a_k^* = \Delta_k = 0$ ,  $\operatorname{Re}(\mu_k) = 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

**Теорема 4.** [2, теорема 3] Пусть

$$a_k^* = 0, \quad \Delta_k = 0, \quad \operatorname{Re}(\mu_k) = 0 \quad (k = \overline{1, n}); \quad \text{и} \quad \tilde{\alpha}_k < 1 - v_k < \tilde{\beta}_k, \quad v_k = v_l, \quad k \neq l \quad (k, l = \overline{1, n}).$$

Пусть  $1 < r_k < \infty$ ,  $r_k = r_l$ ,  $k \neq l$  ( $k, l = \overline{1, n}$ ).

a) Преобразование  $H f$  (1), определенное на  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ , может быть продолжено на  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$  до элемента  $[\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}, \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{r}}]$ .

b) Если  $1 < r_k \leq 2$ ,  $v_k = v_l$ ,  $k \neq l$  ( $k, l = \overline{1, n}$ ), то преобразование  $H f$  взаимно однозначно и выполняется равенство (24) для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$ .

c) Если  $\bar{v} \notin \mathcal{E}_{\bar{r}}$ , то преобразование  $H f$  (1) взаимно однозначно на  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$ , и его образ описывается равенством:

$$H(\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}) = \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{r}}. \quad (31)$$

d) Если  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$  и  $g \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}'}$ ,  $\bar{r}' = \bar{r} / (\bar{r} - 1)$ , то выполняется равенство (28):

e) Если  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$ ,  $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ ,  $\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ , то преобразование  $H f$  (1) определяется равенством (29) для  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{v})\bar{h} - 1$  или равенством (30) для  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{v})\bar{h} - 1$ .

#### Н-преобразование в $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$ -пространствах при $a^* = \Delta = 0$ и $\operatorname{Re}(\bar{\mu}) < 0$

Опираясь на результаты теоремы 3 и теоремы 4, в данной части работы изучим преобразование (1) в пространствах  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$ ,  $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 < \bar{r} < \infty$ ,  $r_k = r_l, k \neq l$ ;  $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $v_k = v_l, k \neq l$ , когда постоянные (20) и (22) принимают значения  $a_k^* = \Delta_k = 0$ ,  $\operatorname{Re}(\mu_k) < 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Полученные результаты обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного случая [8, глава 4.2].

**Теорема 5.** Пусть  $a_k^* = \Delta_k = 0$ ,  $\operatorname{Re}(\mu_k) < 0$  ( $k = \overline{1, n}$ );  $\tilde{\alpha}_k < 1 - v_k < \tilde{\beta}_k$ ;  $v_k = v_l, k \neq l$  ( $k = \overline{1, n}$ );  $m_k > 0$  или  $\bar{n}_k > 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Пусть  $1 < r_k < \infty$ ,  $r_k = r_l, k \neq l$  ( $k, l = \overline{1, n}$ ).

Имеют место следующие утверждения.

a) Преобразование  $H f$  (1), определенное на  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ , может быть продолжено на  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$  до элемента  $H \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}, \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{s}}]$  для всех  $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ,  $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ ,  $s_k \geq r_k$  таких, что  $1/s_k > 1/r_k + \operatorname{Re}(\mu_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ).

b) Если  $1 < r_k \leq 2$ ,  $r_k = r_l, k \neq l$  ( $k, l = \overline{1, n}$ ), то  $H f$  преобразование (1) взаимно однозначно и выполняется равенство (24).

c) Пусть  $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\gamma_k = \gamma_l, k \neq l$  ( $k, l = \overline{1, n}$ ). Если  $\bar{v} \notin \mathcal{E}_{\bar{\gamma}}$ , то преобразование  $H f$  (1) взаимно однозначно на  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$  и его образ описывается равенствами:

$$H(\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}) = I_{-; \bar{\gamma}, -\tilde{\alpha}/\bar{\gamma}}^{-\bar{\mu}}(\mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{r}}) \quad (32)$$

для  $m_k > 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ) и

$$H(\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}) = I_{0+; \bar{\gamma}, \tilde{\beta}/\bar{\gamma}-1}^{-\bar{\mu}}(\mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{r}}) \quad (33)$$

для  $\bar{n}_k > 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Если  $\bar{v} \in \mathcal{E}_{\bar{H}}$ , то множество  $H(\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}})$  является подмножеством правых частей (32) и (33) соответственно.

d) Если  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$  и  $g \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{s}}$ ,  $1 < s_k < \infty$ ,  $1 < r_k < \infty$ ,  $r_k = r_l$ ,  $k \neq l$  ( $k, l = \overline{1, n}$ ) и  $1 \leq 1/r_k + 1/s_k < 1 - \operatorname{Re}(\mu_k)$  ( $k = \overline{1, n}$ ), то выполняется равенство (28):

e) Если  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$ ,  $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$  и  $\bar{h} > 0$ , то преобразование  $H f$  определяется равенством (29) для  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{v})\bar{h} - 1$ , или равенством (30) для  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{v})\bar{h} - 1$ . Более того,  $H f$  представимо в виде (1).

**Доказательство.** Так как по условию  $\tilde{\alpha}_k < 1 - v_k < \tilde{\beta}_k$ ,  $v_k = v_l$ ,  $k \neq l$  ( $k, l = \overline{1, n}$ );  $a_k^* = 0$  и  $\Delta_k [1 - v_k] + \operatorname{Re}(\mu_k) = \operatorname{Re}(\mu_k) < 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ), тогда на основании **теоремы 3** преобразование  $H f$  (1) определено в пространстве  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{2}}$ .

Если  $m_k > 0$  или  $\bar{n}_k > 0$ , то  $\tilde{\alpha}_k$  или  $\tilde{\beta}_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) определяются соответствующими равенствами в (19). Устанавливаем, что

$$\bar{H}_1(\mathbf{s}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mathbf{s} - \tilde{\alpha}}{\bar{\gamma}} - \bar{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathbf{s} - \tilde{\alpha}}{\bar{\gamma}}\right)} \bar{H}(\mathbf{s}) = \bar{H}_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{m}+1, \mathbf{n}} \left[ \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1, \mathbf{p}}, \left(-\frac{\tilde{\alpha}}{\bar{\gamma}}, \frac{1}{\bar{\gamma}}\right) \\ \left(-\bar{\mu} - \frac{\tilde{\alpha}}{\bar{\gamma}}, \frac{1}{\bar{\gamma}}\right), (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1, \mathbf{q}} \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] =$$

$$= \prod_{k=1}^n \bar{H}_{p_k+1, q_k+1}^{m_k+1, n_k} \left[ \begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1, p_k}, \left(-\frac{\tilde{\alpha}_k}{\gamma_k}, \frac{1}{\gamma_k}\right) \\ \left(-\mu_k - \frac{\tilde{\alpha}_k}{\gamma_k}, \frac{1}{\gamma_k}\right), (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \middle| s_k \right]$$

для  $m_k > 0$ ,

$$\bar{H}_2(\mathbf{s}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\tilde{\beta} - \mathbf{s}}{\bar{\gamma}} - \bar{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{\beta} - \mathbf{s}}{\bar{\gamma}}\right)} \bar{H}(\mathbf{s}) = \bar{H}_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}+1} \left[ \begin{matrix} \left(1 + \bar{\mu} - \frac{\tilde{\beta}}{\bar{\gamma}}, \frac{1}{\bar{\gamma}}\right), (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1, \mathbf{p}} \\ (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1, \mathbf{q}}, \left(1 - \frac{\tilde{\beta}}{\bar{\gamma}}, \frac{1}{\bar{\gamma}}\right) \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] =$$

(35)

$$= \prod_{k=1}^n \mathcal{H}_{p_k+1, q_k+1}^{m_k, n_k+1} \left[ \begin{matrix} \left( 1 + \mu_k - \frac{\tilde{\beta}_k}{\gamma_k}, \frac{1}{\gamma_k} \right), (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1, q_k}, \left( 1 - \frac{\tilde{\beta}_k}{\gamma_k}, \frac{1}{\gamma_k} \right) \end{matrix} \middle| s_k \right]$$

для  $n_k > 0$ .

Обозначим через

$$\tilde{\alpha}^1 = (\tilde{\alpha}_1^1, \dots, \tilde{\alpha}_n^1), \tilde{\beta}^1 = (\tilde{\beta}_1^1, \dots, \tilde{\beta}_n^1), \tilde{a}^1 = (\tilde{a}_1^1, \dots, \tilde{a}_n^1), \Delta^1 = (\Delta_1^1, \dots, \Delta_n^1), \bar{\delta}^1 = (\delta_1^1, \dots, \delta_n^1), \bar{\mu}^1 = (\mu_1^1, \dots, \mu_n^1);$$

$$\tilde{\alpha}^2 = (\tilde{\alpha}_1^2, \dots, \tilde{\alpha}_n^2), \tilde{\beta}^2 = (\tilde{\beta}_1^2, \dots, \tilde{\beta}_n^2), \tilde{a}^2 = (\tilde{a}_1^2, \dots, \tilde{a}_n^2), \Delta^2 = (\Delta_1^2, \dots, \Delta_n^2), \bar{\delta}^2 = (\delta_1^2, \dots, \delta_n^2), \bar{\mu}^1 = (\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$$

постоянные для функций  $\bar{\mathcal{H}}_1$  и  $\bar{\mathcal{H}}_2$  соответственно, которые определяем через таковые в (19) – (22) для функции  $\bar{\mathcal{H}}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_k^1 &= \max[\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_k + \bar{\gamma} \operatorname{Re}(\mu_k)] = \tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k^1 = \tilde{\beta}_k, \\ \tilde{a}_k^1 &= a_k^* = 0, \Delta_k^1 = \Delta_k = 0, \delta_k^1 = \delta_k, \bar{\mu}_k^1 = 0, \quad (k = \overline{1, n}); \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_k^2 &= \tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k^2 = \min[\tilde{\beta}_k, \tilde{\beta}_k - \bar{\gamma} \operatorname{Re}(\mu_k)] = \tilde{\beta}_k, \\ \tilde{a}^2 &= a_k^* = 0, \Delta_k^2 = \Delta_k = 0, \delta_k^2 = \delta_k, \bar{\mu}_k^2 = 0, \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

На основании (36) заключаем, что исключительные множества  $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{H}}_1}^-$  и  $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{H}}_2}^-$  для  $\bar{\mathcal{H}}_1$  и  $\bar{\mathcal{H}}_2$  в определении (23) совпадают с множеством  $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{H}}}^-$  для функции  $\bar{\mathcal{H}}$ . Так как  $\mu_k^1 = 0$ ,  $\mu_k^2 = 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ), то по **теореме 4**  $\tilde{\mathcal{H}}_1 \in [\mathcal{L}_{\bar{\gamma}, \bar{r}}, \mathcal{L}_{1-\bar{\gamma}, \bar{r}}]$  и  $\tilde{\mathcal{H}}_2 \in [\mathcal{L}_{\bar{\gamma}, \bar{r}}, \mathcal{L}_{1-\bar{\gamma}, \bar{r}}]$  для  $m > 0$  и для  $n > 0$ , соответственно. Далее, если  $f \in \mathcal{L}_{\bar{\gamma}, \bar{r}}^-$  и  $1 < \bar{r} < 2$ , тогда согласно (24):

$$(\mathfrak{M} \tilde{\mathcal{H}}_i f)(s) = \bar{\mathcal{H}}_i(s) (\mathfrak{M} f)(1-s) \quad (\operatorname{Re}(s) = 1 - \bar{\gamma}; i = 1, 2). \quad (37)$$

Установили, что

$$\mathcal{H}_1 = \Gamma_{-; \bar{\gamma}, -\tilde{\alpha}/\bar{\gamma}}^{-\bar{\mu}} \tilde{\mathcal{H}}_1 \quad (38)$$

для  $m > 0$  и

$$\mathcal{H}_2 = \Gamma_{0+; \bar{\gamma}, \tilde{\beta}/\bar{\gamma}-1}^{-\bar{\mu}} \tilde{\mathcal{H}}_2 \quad (39)$$

для  $n > 0$ .

Пусть а)  $m > 0$  или б)  $n > 0$ . Пусть  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_n)$  и  $r_1 = \dots = r_n$ ;  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_n)$  и  $s_1 = \dots = s_2$ ;  $1 \leq \bar{r} \leq \infty, \bar{s} \geq \bar{r}$ ,  $1/\bar{s} > 1/\bar{r} + \operatorname{Re}(\bar{\mu})$ . Из **теоремы 2(b)** и **теоремы 2(a)**

следует, что  $I_{-; \tilde{\gamma}, -\tilde{\alpha}/\tilde{\gamma}}^{-\tilde{\mu}} \in [\mathcal{L}_{1-\tilde{\nu}, \tilde{r}}, \mathcal{L}_{1-\tilde{\nu}, \tilde{s}}]$  для  $\tilde{\alpha} < 1 - \tilde{\nu}$  и  $I_{0+; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}/\tilde{\gamma}-1}^{-\tilde{\mu}} \in [\mathcal{L}_{1-\tilde{\nu}, \tilde{r}}, \mathcal{L}_{1-\tilde{\nu}, \tilde{s}}]$  для  $\tilde{\beta} > 1 - \tilde{\nu}$  соответственно. Отсюда, если  $\tilde{\alpha} < 1 - \tilde{\nu} < \tilde{\beta}$  и  $1 < \tilde{r} < \infty$  получаем  $\tilde{H}_i \in [\mathcal{L}_{\tilde{\nu}, \tilde{r}}, \mathcal{L}_{1-\tilde{\nu}, \tilde{s}}]$  ( $i = 1, 2$ ) для всех  $\tilde{s} \geq \tilde{r}$  с  $1/\tilde{s} > 1/\tilde{r} + \operatorname{Re}(\tilde{\mu})$ . Так как по **теореме 2(a)** и **теореме 2(b)** операторы  $I_{-; \tilde{\gamma}, -\tilde{\alpha}/\tilde{\gamma}}^{-\tilde{\mu}}$  и  $I_{0+; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}/\tilde{\gamma}-1}^{-\tilde{\mu}}$  взаимно однозначны на  $\mathcal{L}_{1-\tilde{\nu}, \tilde{r}}$ , то из пунктов (b), (c) **теоремы 4** следует, что если  $\tilde{\nu} \notin \mathcal{E}_{\tilde{H}}$  или если  $1 < \tilde{r} \leq 2$ , то  $H_i$  ( $i = 1, 2$ ) взаимно однозначны на  $\mathcal{L}_{\tilde{\nu}, \tilde{r}}$ . Для  $f \in \mathcal{L}_{\tilde{\nu}, \tilde{r}}$ ,  $\tilde{\alpha} < 1 - \tilde{\nu} < \tilde{\beta}$  и  $1 < \tilde{r} \leq 2$ , учитывая (38), (18), (37), (34) и (39), (17), (37), (35) получаем:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M} H_1 f)(s) &= (\mathfrak{M} I_{-; \tilde{\gamma}, -\tilde{\alpha}/\tilde{\gamma}}^{-\tilde{\mu}} \tilde{H}_1 f)(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{s - \tilde{\alpha}}{\tilde{\gamma}}\right)}{\Gamma\left(\frac{s - \tilde{\alpha}}{\tilde{\gamma}} - \tilde{\mu}\right)} (\mathfrak{M} \tilde{H}_1 f)(s) = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{s - \tilde{\alpha}}{\tilde{\gamma}}\right)}{\Gamma\left(\frac{s - \tilde{\alpha}}{\tilde{\gamma}} - \tilde{\mu}\right)} \bar{\mathcal{H}}_1(s)(\mathfrak{M} f)(1-s) = \bar{\mathcal{H}}(s)(\mathfrak{M} f)(1-s) \quad (\operatorname{Re}(s) = 1 - \tilde{\nu}) \end{aligned} \quad (40)$$

для случая а) и

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M} H_2 f)(s) &= (\mathfrak{M} I_{0+; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}/\tilde{\gamma}-1}^{-\tilde{\mu}} \tilde{H}_2 f)(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{\tilde{\beta} - s}{\tilde{\gamma}}\right)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{\beta} - s}{\tilde{\gamma}} - \tilde{\mu}\right)} (\mathfrak{M} \tilde{H}_2 f)(s) = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\tilde{\beta} - s}{\tilde{\gamma}}\right)}{\Gamma\left(\frac{\tilde{\beta} - s}{\tilde{\gamma}} - \tilde{\mu}\right)} \bar{\mathcal{H}}_2(s)(\mathfrak{M} f)(1-s) = \bar{\mathcal{H}}(s)(\mathfrak{M} f)(1-s) \quad (\operatorname{Re}(s) = 1 - \tilde{\nu}) \end{aligned} \quad (41)$$

для случая б), соответственно. В частности, для  $f \in \mathcal{L}_{\tilde{\nu}, 2}$ ,  $\tilde{\alpha} < 1 - \tilde{\nu} < \tilde{\beta}$ , выполняется равенство:

$$(\mathfrak{M} H_i f)(s) = (\mathfrak{M} H f)(s) \quad (\operatorname{Re}(s) = 1 - \tilde{\nu}; i = 1, 2),$$

для случаев а) и б), соответственно. Получили, что  $H = H_i$  на  $\mathcal{L}_{\tilde{\nu}, 2}$  ( $i = 1, 2$ ). Таким образом, преобразование  $H f$  может быть расширено на  $\mathcal{L}_{\tilde{\nu}, \tilde{r}}$ , если определить его как  $H_1 f$  для случая а) и как  $H_2 f$  для случая б), и  $H \in [\mathcal{L}_{\tilde{\nu}, \tilde{r}}, \mathcal{L}_{1-\tilde{\nu}, \tilde{s}}]$  для всех  $\tilde{s} \geq \tilde{r}$  таких, что  $1/\tilde{s} > 1/\tilde{r} + \operatorname{Re}(\tilde{\mu})$ . Это завершает доказательство (а).

Утверждение (б) следует из того, что преобразования  $\tilde{H}_i f$  ( $i = 1, 2$ ) взаимно

однозначны по **теореме 4** и из того, что  $I_{-; \bar{\gamma}, -\tilde{\alpha}/\bar{\gamma}}^{-\bar{\mu}} f$  и  $I_{0+; \bar{\gamma}, \tilde{\beta}/\bar{\gamma}-1}^{-\bar{\mu}} f$  взаимно однозначны также.

Докажем (с). Если условия **теоремы 5** выполняются, то в соответствии с **теоремой 4**  $\tilde{H}_i(\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}) \subseteq \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{r}} (i=1, 2)$ . Если при этом  $\bar{v} \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}^{-}$ , то  $\tilde{H}_i(\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}) = \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{r}} (i=1, 2)$ . Поэтому из формул (38), (40), и (39), (41) следует: для а)  $H(\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}) \subseteq I_{-; \bar{\gamma}, -\tilde{\alpha}/\bar{\gamma}}^{-\bar{\mu}}(\mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{r}})$ , и если  $\bar{v} \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}^{-}$ , то  $H(\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}) = I_{-; \bar{\gamma}, -\tilde{\alpha}/\bar{\gamma}}^{-\bar{\mu}}(\mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{r}})$ , что означает выполнение (32); для б)  $H(\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}) \subseteq I_{0+; \bar{\gamma}, \tilde{\beta}/\bar{\gamma}-1}^{-\bar{\mu}}(\mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{r}})$ , и если  $\bar{v} \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}^{-}$ , то  $H(\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}) = I_{0+; \bar{\gamma}, \tilde{\beta}/\bar{\gamma}-1}^{-\bar{\mu}}(\mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{r}})$ , то есть выполняется (33). Утверждение (с) доказано.

Чтобы установить (28) для  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$  и  $g \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{s}}$ ,  $1 < \bar{r} < \infty$ ,  $1 < \bar{s} < \infty$  и  $1 \leq 1/\bar{r} + 1/\bar{s} < 1 - \operatorname{Re}(\bar{\mu})$ , покажем, что обе части (28) ограниченные билинейные функционалы на  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}} \times \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{s}}$ . Из предположения имеем, что  $\bar{r}' \geq \bar{s}(1/\bar{r} + 1/\bar{r}') = 1$  и  $1/\bar{r}' > 1/\bar{s} + \operatorname{Re}(\bar{\mu})$ , следовательно  $H \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{s}}, \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{r}'}]$  по утверждению (а). Применяя неравенство Гельдера [8, 4.1.13]

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_a^b |g(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, -\infty \leq a < b \leq \infty \right), \quad (42)$$

получаем

$$\left| \int_0^\infty f(x)(Hg)(x) dx \right| = \left| \int_0^\infty x^{\bar{v}-1/\bar{r}} f(x) x^{1/\bar{r}-\bar{v}} (Hg)(x) dx \right| \leq \|f\|_{\bar{v}, \bar{r}} \|Hg\|_{1-\bar{v}, \bar{r}'} \leq K \|f\|_{\bar{v}, \bar{r}} \|g\|_{\bar{v}, \bar{s}},$$

где  $K$  – оценка для оператора  $H \in [\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{s}}, \mathcal{L}_{1-\bar{v}, \bar{r}'}]$ . Следовательно левая часть (28) представляет ограниченный билинейный функционал на  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}} \times \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{s}}$ . Аналогично показывается, что правая часть (28) представляет такой же функционал на  $\mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}} \times \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{s}}$ . Таким образом утверждение (d) доказано.

Наконец, докажем (е). Пусть  $f \in \mathcal{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$ ,  $1 < \bar{r} < \infty$ . Тогда представления (29) и (30) при  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1-\bar{v})\bar{h} - 1$  и  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1-\bar{v})\bar{h} - 1$ , соответственно, получаем из утверждения (с) **теоремы 3** с учетом утверждения (е) **теоремы 4**.

Обозначим через  $\tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_n)$  постоянную для функции  $H_{p+1, q+1}^{m, n+1}(t) = \prod_{k=1}^n H_{p_k+1, q_k+1}^{m_k, \bar{n}_k+1}[t_k]$  в ядре (29) вместо  $\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  в (22) для  $H$ -функции (2). Согласно (22)  $\tilde{\mu} = \bar{\mu} - 1$ , тогда из условия, что  $\operatorname{Re}(\bar{\mu}) < 0$  следует

$\operatorname{Re}(\tilde{\mu}) < -1$ . Так как  $\tilde{\alpha}_k < 1 - \nu_k < \tilde{\beta}_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), из [8, теорема 1.2] следует, что при  $\operatorname{Re}(\lambda_k) > (1 - \nu_k)h_k - 1$  ( $k = \overline{1, n}$ ), функции  $H_{p_k+1, q_k+1}^{m_k, \bar{n}_k+1}[t_k]$  ( $k = \overline{1, n}$ ) непрерывно дифференцируемы относительно  $t_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) на  $\mathbb{R}_+$ . Отсюда в (29) возможна операция дифференцирования под знаком интеграла. Применяя равенства (11) и (12), получаем:

$$\begin{aligned} (Hf)(x) &= \bar{h} x^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{dx} x^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \int_0^\infty H_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ xt \left| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1, q}, (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right. \right] f(t) dt = \\ &= \bar{h} x^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \int_0^\infty t^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d(xt)} \left\{ (xt)^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} H_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ xt \left| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1, q}, (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right. \right] \right\} f(t) dt = \end{aligned} \quad (43)$$

$$= \int_0^\infty H_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ xt \left| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1, q}, (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right. \right] f(t) dt = \int_0^\infty H_{p, q}^{m, n} \left[ xt \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \bar{\alpha}_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \bar{\beta}_j)_{1, q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt,$$

при условии, что последний интеграл в (43) существует. Существование этого интеграла докажем, используя **теорему 1**. Выберем  $\bar{\gamma}^1 = (\gamma_1^1, \dots, \gamma_n^1)$  и  $\bar{\gamma}^2 = (\gamma_1^2, \dots, \gamma_n^2)$  так, чтобы  $\tilde{\alpha}_k < \gamma_k^1 < 1 - \nu_k < \gamma_k^2 < \tilde{\beta}_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). В соответствии с (13) найдутся постоянные  $A_1$  и  $A_2$  такие, что почти для всех  $t_k > 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ) будут выполняться неравенства:

$$\left| H_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k}(t_k) \right| \leq A_i t_k^{-\gamma_k^i} \quad (k = \overline{1, n}; i = 1, 2).$$

Используя неравенство Гельдера (42), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| H_{p+1, q+1}^{m, n+1}(xt) f(t) \right| dt &\leq \left( \int_0^\infty \left| H_{p+1, q+1}^{m, n+1}(xt) t^{1/\bar{r}-\bar{\nu}} \right|^{\bar{r}'} dt \right)^{1/\bar{r}'} \|f\|_{\bar{\nu}, \bar{r}} \leq \\ &\leq \left[ A_1 x^{-\bar{\gamma}^1} \left( \int_0^{1/x} t^{\bar{r}'(1-\bar{\nu}-\bar{\gamma}^1)-1} dt \right)^{1/\bar{r}'} + A_2 x^{-\bar{\gamma}^2} \left( \int_{1/x}^\infty t^{\bar{r}'(1-\bar{\nu}-\bar{\gamma}^2)-1} dt \right)^{1/\bar{r}'} \right] \|f\|_{\bar{\nu}, \bar{r}} \leq C x^{\bar{\nu}-1} < \infty, \end{aligned}$$

где

$$C = \left( A_1 [\bar{r}'(1-\bar{\nu}-\bar{\gamma}^1)]^{-1/\bar{r}'} + A_2 [\bar{r}'(\bar{\gamma}^2 + \bar{\nu}) - 1]^{-1/\bar{r}'} \right) \|f\|_{\bar{\nu}, \bar{r}}.$$

Для случая  $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$  доказательство проводится аналогично. Таким образом, теорема доказана.

## Заключение

Опираясь на результаты **теоремы 3** и **теоремы 4**, в работе получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора преобразования (1) из одних пространств  $\mathcal{L}_{\vec{v},\vec{r}}$  в другие, даны описания образов оператора преобразования, доказан аналог формулы интегрирования по частям, установлены интегральные представления для случая, когда постоянные (20) и (22) для  $H$ -функции (2) в ядре преобразования (1) принимают значения  $a_k^* = \Delta_k = 0$ ,  $\operatorname{Re}(\mu_k) < 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Результаты обобщают ранее полученные для соответствующего одномерного случая.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01 «Управление асимптотическими характеристиками дискретных и непрерывных динамических систем; разработка аппарата дробного интегро-дифференцирования для изучения задач разрешимости дифференциальных уравнений дробного порядка и асимптотики их решений, №ГР 20211316 от 15.05.2021» в рамках задания «Развитие конструктивных и асимптотических методов исследования сложных управляемых дифференциальных и дискретных систем», сроки выполнения НИР 2021 – 2025».

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Sitnik, S. M.** Multi-Dimensional Integral Transform with Fox Function in Kernel in Lebesgue-Type Spaces / S. M. Sitnik, O. V. Skoromnik // *Mathematics*. – 2024. – Vol. 12 (12). – URL: <https://doi.org/10.3390/math12121829> (дата обращения: 10.06.2025)
2. **Sitnik, S. M.** A Special Type of Multi-Dimensional Integral Transform with Fox H-Function in Lebesgue – type Weighted Spaces / S. M. Sitnik, O. V. Skoromnik, M. V. Papkovich // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2024. – Vol. 45, № 9. – P. 4613–4623. DOI: 10.1134/S1995080224605253
3. **Sitnik, S. M.** One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels / S. M. Sitnik, O. V. Skoromnik // *Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics*. – Cham, Switzerland : Birkhäuser Basel (Springer), 2020. – P. 293–319.
4. **Самко, С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
5. **Kilbas, A. A.** Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam : Elsevier, 2006. – 523 p.
6. **Папкович, М. В.** Многомерные модифицированные G-преобразования и интегральные преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций / М. В. Папкович, О. В. Скоромник // *Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя П. М. Машэрава*. – 2022. – № 1. – С. 11–25.
7. **Sitnik, S. M.** Some Multi-dimensional Modified G- and H- Integral Transforms on  $L_{\vec{v},\vec{r}}$ -Spaces / S. M. Sitnik, O. V. Skoromnik, M. V. Papkovich // *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. – 2023. – Vol. 423. – P. 193–214.
8. **Kilbas, A. A.** H - Transforms. Theory and Applications / A. A. Kilbas, M. H. Saigo. – London : Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
9. **Прудников, А. П.** Интегралы и ряды / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1986. – Т. 3: Дополнительные главы. – 801 с.
10. **Mathai, A. M.** The H - Function with Applications in Statistics and Other Disciplines / A. M. Mathai, R. K. Saxena. – New York – London – Sydney : Halsted Press book John Wiley, 1978. – 192 p.

11. **Srivastava, H. M.** The H-function of One and Two Variables with Applications / H. M. Srivastava, K. C. Gupta, S. L. Goyal. – New-Delhi-Madras : South Asian Publishers, 1982. – 415 p.
12. **Скоромник, О. В.** Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах и интегральные уравнения первого рода / О. В. Скоромник. – Новополюк : ПГУ, 2019. – 180 с.
13. **Ситник, С. М.** Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана–Эрдейи, (представлена академиком С. М. Никольским) / С. М. Ситник // Доклады Академии Наук СССР. – 1991. – 320:6. – С. 1326–1330.
14. **Sitnik, S. M.** A short survey of recent results on Buschman-Erdelyi transmutations / S. M. Sitnik // Journal of Inequalities and Special Functions, 8:1, Special issue To honor Prof. Ivan Dimovskis contributions. – 2017. – P. 140–157. URL: <http://ilirias.com/jiasf/repository/docs/JIASF8-1-12.pdf>
15. **Катрахов, В. В.** Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений / В. В. Катрахов, С. М. Ситник // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2018. – 64:2. – С. 211–426. arXiv: arXiv:1809.10887
16. **Ситник, С. М.** Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. – Москва : Физматлит, 2019. – 224 с.
17. **Kravchenko, V. V.** Transmutation Operators and Applications, Trends in Mathematics / V. V. Kravchenko, S. M. Sitnik. – Springer Nature Switzerland AG, Basel, 2020, XVII. – 686 p. URL: <https://www.springer.com/gp/book/9783030359133>
18. **Shishkina, E.** Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics, Mathematics in Science and Engineering / E. Shishkina, S. Sitnik. – Elsevier : Academic Press, 2020. – 592 p. URL: <https://www.elsevier.com/books/transmutations-singular-and-fractional-differential-equations-with-applications-to-mathematical-physics/shishkina/978-0-12-819781-3>
19. **Уринов, А. К.** Дробные интегралы и производные (обобщения и приложения), учебное пособие / А. К. Уринов, С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина, Ш. Т. Каримов ; ред. А. П. Солдатов, И. С. Ломов, Э. Т. Каримов. – Узбекистан : Изд. «Фаргона», 2022. – 192 с.
20. **Прудников, А. П.** Вычисление интегралов и преобразование Меллина / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ, 27, ВИНТИ, М., 1989. – С. 3–146; Journal of Soviet Mathematics. – 1991. – Vol. 54. – P. 1239–1341.
21. **Brychkov, Yu. A.** Multidimensional Integral Transformations / Yu. A. Brychkov, H.-Y. Glaeske, A. P. Prudnikov, Vu Kim Tuan. – Gordon and Breach, Philadelphia, 1992. – 404 p.

Поступила в редакцию 12.06.2025 г.

Контакты: [skoromnik@gmail.com](mailto:skoromnik@gmail.com) (Скоромник Оксана Валерьевна),  
[mparkovich@yandex.ru](mailto:mparkovich@yandex.ru) (Папкович Марина Викторовна)

**Skoromnik O. V., Papkovich M. V. MULTIDIMENSIONAL INTEGRAL TRANSFORMATION WITH H-FUNCTION IN THE KERNEL IN WEIGHTED SPACES OF INTEGRABLE FUNCTIONS**

*The work is devoted to the study of a multidimensional integral transformation with a Fox H-function in the kernel in weighted spaces of Lebesgue measurable functions in the domain with positive coordinates. Using a technique based on the application of the multidimensional Mellin transform and its properties, the conditions of boundedness and mutual uniqueness of the operator of the investigated transformation from one*

*weighted spaces of integrable functions to another are obtained, and an analogue of the integration by parts formula is proved. Various integral representations are established for the considered transformation. The research results summarize the results obtained earlier for the corresponding one-dimensional transformation.*

**Keywords:** multi-dimensional integral transform, Fox's H-function, Mellin transform, weighted space of integrable functions, fractional integrals and derivative.

УДК 535.222 + 621.378

## ДИНАМИКА ИЗЛУЧЕНИЯ, ОТРАЖЕННОГО ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАНАРНОЙ СТРУКТУРОЙ

**Е. В. Тимощенко**

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

**А. В. Хомченко**

доктор физико-математических наук

Белорусско-Российский университет

**В. А. Юревич**

доктор физико-математических наук, профессор

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

*На основе предложенной модификации уравнений Максвелла - Блоха проанализированы следствия оптической бистабильности в низкоразмерной структуре из двух резонансно поляризуемых слоев. В результате моделирования процесса нелинейного отражения света системой активных слоев установлена возможность самоиндуцированной неустойчивости действующего в структуре когерентного светового поля. Нелинейный эффект модуляции излучения, стимулированной неустойчивостью, подтверждает поставленный эксперимент.*

**Ключевые слова:** оптическая нелинейность, резонансное взаимодействие, квантово-размерная полупроводниковая структура, двухслойная планарная структура, самомодуляция оптического излучения.

### Введение

Развитие спектральных оптических методов обработки информации в последнее время связано с применением различных интерферометров. В их резонаторных схемах возможно как сканирование по спектру излучения источников когерентного излучения путем изменения показателя преломления электрооптического элемента, так и все виды модуляции излучаемого светового поля, в том числе и модуляции добротности лазерных резонаторов видимой и ИК области спектра [1; 2]. Между тем очевидно, что использование такого рода модуляторов усложняет схему и увеличивает размеры приборов, что способно снизить их надежность.

Оптимальным решением проблемы модуляции с применением внешних миниатюрных и стабильно работающих устройств может быть включение в оптическую схему устройств активных тонкопленочных элементов на основе резонансно поляризуемых активных сред [3; 4]. Для этих целей особо перспективны планарные низкоразмерные массивы квантовых излучателей, например, формируемые из полупроводниковых квантовых точек (КТ) [5; 6].

В настоящей работе при допущениях, аналогичных работе [7], рассмотрена динамика прохождения светового поля сквозь планарную структуру из двух тонких оптических слоев. Материалы обоих активных объектов формируются из резонансных центров, способных поглощать и переизлучать световое поле, и характеризуются различными временами релаксации населенности и разными сечениями перехода. Для условий нормального падения световой волны последовательно учитывается отражение на границах раздела и реакция сред на резонансное излучение при его прохождении сквозь оба слоя. Существенным при этом будет учет резонансной нелинейности поглощения в составляющих системах, а также фазовой нелинейности в одном из слоев. Предполагается, что этому слою присуща нелинейная рефракция, стимулированная переходами, соседними с основным (резонансным), а также смещение частоты резонанса поглощения, вызванное взаимным влиянием электрических дипольных моментов активных центров в условиях их относительно высокой концентрации. Оба механизма фазовой нелинейности типичны для массивов из КТ. Характеристики отклика среды нелинейного слоя оказываются особо чувствительными к фазе излучения, поэтому обусловленная нелинейностью фазовая динамика может стать причиной амплитудно-фазовой связи и некоторых интересных особенностей взаимодействия. Среди них – амплитудная неустойчивость излучения, которая индуцируется этой динамикой. Такая неустойчивость, в частности, может проявиться в возникновении периодических колебаний во временной структуре интенсивности излучения, отраженного или прошедшего сквозь систему из резонансно поляризуемых слоев.

#### Формулировка задачи. Бистабильность отражения

Предполагается, что на обеих поверхностях границы раздела диэлектрических сред с различием проницаемостей расположены тонкие пленки из резонансных 2-уровневых активных центров (рис. 1). На образованную пленками планарную структуру со стороны среды с проницаемостью  $\epsilon'_1$  падает плоская световая волна, несущая непрерывное поле  $E_i$  с частотой  $\omega$ . Вторая из пленок характеризуется нелинейностью (как указано, фактически должна представлять собой массив КТ), реакция ее среды с проницаемостью  $\epsilon_2$  на падающее поле  $E_1$ , описывается в приближении среднего поля и выражается соотношением, аналогичным полученному в [8] в приближении сверхтонкого слоя. Дисперсионное соотношение для интенсивностей, которое формулируется на основе электродинамических соотношений на границах раздела, тогда учитывает отстройку частоты резонансной моды от частоты падающего поля.

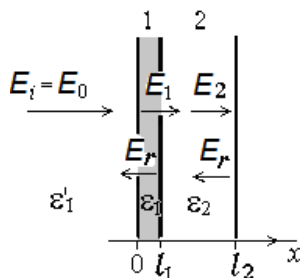


Рисунок 1 – Схема расположения элементов в пленочной структуре: 1 – тонкая активная пленка, 2 – тонкий активный слой, образующий нелинейный массив (поля  $E_1$  и  $E_r$  рассматриваются как поля внутри пленки 1 и 2)

Длительность импульса внешнего поля предполагается значительно большей периода световой волны и времени поперечной релаксации активных частиц в средах слоев. Допущение об особо малой толщине пленок позволяет для связи квазистационарных огибающих электрических полей с откликом сред использовать граничные условия на поверхности раздела, поэтому за основу расчетной модели далее будет принят аналог системы уравнений, формулируемый на основе представлений, изложенных в [7], где использованы подходы, основанные на обобщенной двухуровневой схеме [9]. Комплексные величины поля падающей волны ( $E_i$ ) и индуцированной ею поляризованности в среде оказываются связанными с полями отраженной ( $E_r$ ) в первой из пленок и прошедших (действующих на атомы в пленках) волн ( $E_1, E_2$ ) алгебраическими соотношениями. В приводимой далее их записи параметры с индексами 1 и 2 описывают среды первой и второй пленок, использованы не имеющие размерности нормированные величины  $e = 2E_0\mu_1\sqrt{\varepsilon_1 T_{11}T_{21}} / (\hbar(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_1'}))$ ,  $e_{1,2} = E_{1,2}\mu_{1,2}\sqrt{T_{11,2}T_{21,2}} / \hbar$ , а

также нормирующий параметр  $\sigma = \frac{\mu_2^2 T_{12} T_{22}}{\mu_1^2 T_{11} T_{21}}$  (отношение сечений перехода в пленках):

$$\begin{aligned} e_1 &= e - \kappa_1 \rho_1 \sqrt{T_{11}/T_{21}} - \sigma e_r, & e_2 &= e_1/\sigma - \kappa_2 \rho_2 \sqrt{T_{21}/T_{22}} + i\beta \Delta n e_2 \\ e_r &= \kappa_2 \rho_2 \sqrt{T_{21}/T_{22}} + i\beta \Delta n e_2. \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $\rho_{1,2}$  – вероятностные комплексные переменные поляризованности в обоих слоях,  $\Delta n$  – вариация населенности во второй пленке. Показатели ненасыщенного резонансного поглощения и коэффициент нелинейной рефракции

$$\kappa_1 = \frac{\mu_1^2 N_1 \omega_{01}}{\varepsilon_0 c \hbar (\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_1'})} T_{21}, \quad \kappa_2 = \frac{\mu_2^2 N_2 \omega_{02}}{\varepsilon_0 c \hbar (\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})} T_{22}, \quad \beta = \frac{2\pi \varepsilon_0 \hbar}{\mu_2^2 T_{22}} \Delta \alpha$$

определены величиной дипольных моментов активных центров (значением соответствующих элементов матрицы плотности)  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .  $N_{1,2}$  – поверхностная плотность активных частиц,  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$  – резонансные частоты,  $T_{11,2}$  – времена продольной релаксации,  $T_{21,2}$  – времена поперечной (фазовой) релаксации в переходах,  $\Delta \alpha$  – различие поляризуемости на уровнях перехода во втором слое.

В тех же представлениях поля и основных параметров (1) в соответствии с [10] записаны уравнения Блоха для электрических моментов дипольных активных частиц ( $p_{1,2} = \rho_{1,2} \sqrt{T_{11,2}/T_{21,2}}$ ):

$$\begin{aligned} T_{21} \frac{dp_1}{dt} &= n_1 e_1 - p_1 (1 + i\Delta), & T_{22} \frac{dp_2}{dt} &= n_2 e_2 - p_2 (1 + i\gamma n_2), \\ T_{11,2} \frac{dn_{1,2}}{dt} &= 1 - n_{1,2} - \frac{1}{2} (p_{1,2}^* e_{1,2} + p_{1,2} e_{1,2}^*), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $n_{1,2}$  – вероятностные переменные разности населенностей,  $\Delta = (\omega - \omega_{01}) \cdot T_{21}$  – нормированная величина линейной отстройки частоты от центра линии резонансного поглощения  $\omega_{01}$  (дефекта частоты). Во втором из

слоев по аналогии с [6] введением локальной поправки Лоренца для действующего на активные центры светового поля учитывается нелинейное смещение центральной частоты спектральной линии поглощения из-за диполь-дипольного

взаимодействия;  $\gamma = \frac{\mu_2^2 N_2}{3\epsilon_0 \hbar} T_{22}$  – нормирующий коэффициент в локальной по-

правке Лоренца.

Система (1), (2) представляют собой модификацию уравнений Максвелла–Блоха, которая может быть использована для описания динамики излучения, в разных временных режимах воздействующего на структуру из двух тонких резонансных пленок. В приближении некогерентного взаимодействия, когда характерные длительности зондирующего извне поля значительно превышают времена фазовой релаксации, что соответствует и рассматриваемой ситуации с непрерывным возбуждающим полем, для представления поляризованностей  $p_1, p_2$  применимо адиабатическое представление:

$$p_1 = n_1 \epsilon_1 / (1 + \Delta^2), \quad p_2 = n_2 \epsilon_2 / (1 + \gamma^2 n_2^2),$$

Тогда модель взаимодействия двухслойной системы с непрерывным внешним полем, определяемой нормированной величиной  $e$ , значительно упрощается и может быть выражена кинетическими уравнениями для разностей населенностей:

$$\begin{aligned} T_{11} \frac{dn_1}{dt} &= 1 - n_1 (1 + |G_1|^2 e^2), \quad T_{12} \frac{dn_2}{dt} = 1 - n_2 (1 + |G_2|^2 e^2), \\ G_1 &= \left( F + i \frac{\beta \Delta n + B}{C} \right) \cdot \left( F^2 + \frac{\beta^2 \Delta n^2 - B^2}{C^2} \right)^{-1}, \quad F = \frac{\kappa_1 n_1}{1 + \Delta^2} + \frac{A}{C}, \\ A &= \sigma \frac{\kappa_2 n_2}{1 + \gamma^2 n_2^2}, \quad B = \sigma \frac{\kappa_2 \gamma n_2^2}{1 + \gamma^2 n_2^2}, \quad C = A^2 - B^2 + \beta^2 \Delta n^2, \\ G_2 &= \frac{1}{D} \{ A \cdot \operatorname{Re} G_1 + (\beta \Delta n - B) \cdot \operatorname{Im} G_2 - i [(\beta \Delta n + B) \cdot \operatorname{Re} G_1 - A \cdot \operatorname{Im} G_1] \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Нелинейная кинетическая система (3) для условия непрерывного возбуждения полем величины  $e$ , которую можно определить как управляющий параметр, имеет автономный характер и обладает двумя степенями свободы, допуская качественное изучение ее равновесных состояний методами теории устойчивости. Этот анализ, однако, составит предмет отдельной задачи.

Равновесные значения расчетной модели (3)  $n_{1S}, n_{2S}$  могут быть определены из сингулярных пределов обоих дифференциальных уравнений и выражаются системой нелинейных алгебраических уравнений в формальном плане относительно простых:

$$n_{1S} = (1 + |G_{1S}|^2 e^2)^{-1}, \quad n_{2S} = (1 + |G_{2S}|^2 e^2)^{-1}, \quad (4)$$

где коэффициенты  $G_{1S}$  и  $G_{2S}$  выражаются также, как и в представлении (3), но являются функциями стационарных значений  $n_{1S}$  и  $n_{2S}$ . Отметим, однако, что

связь стационарных значений  $n_{1s}$  и  $n_{2s}$  нетривиальна и в определенном диапазоне изменения управляющего параметра  $e$  – бистабильна.

Для иллюстрации возможности этого важного свойства реакции двухслойной структуры на когерентное поле проведем расчет нелинейной зависимости ее отражательной способности в равновесном состоянии на основе соотношений, следующих из (4) с учетом представлений (3):

$$I_s = e^2 \left[ F_s^2 + \frac{(\beta \Delta n_s + B_s)^2}{C_s^2} \right] \cdot \left( F_s^2 + \frac{\beta^2 \Delta n_s^2 - B_s^2}{C_s^2} \right)^{-2}, \quad n_{1s} = \left( 1 + \left| \frac{G_{1s}}{G_{2s}} \right|^2 \frac{1 - n_{2s}}{n_{2s}} \right)^{-1}, \quad (5)$$

где  $I_s = |e_{1s}|^2$  – нормированная интенсивность поля в первой пленке, величины  $B_s$ ,  $C_s$ ,  $F_s$ , соответствуют стационарным значениям  $n_{1s}$  и  $n_{2s}$ .

Соотношения (5) допускают параметрический расчет, для этого следует положить значение  $n_{2s}$  линейно нарастающим в пределах (0, 1).

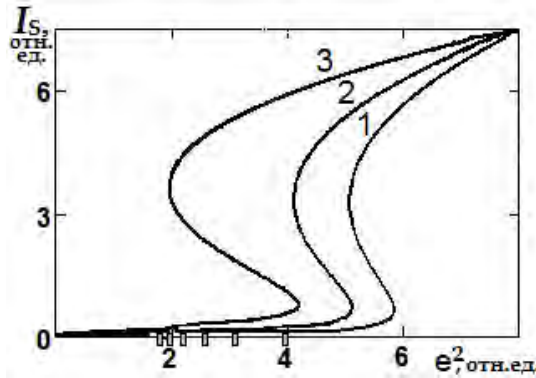


Рисунок 2 – Зависимость нормированной интенсивности отраженного поля от интенсивности возбуждающего поля:  $\kappa_1 = 0.8$ ,  $\kappa_2 = 1.5$  (кривая 1), 1.8 (2), 2.5 (3),  $\Delta = 0.4$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\gamma = 1.5$ ,  $\sigma = 0.33$ . На горизонтальной оси указаны значения интенсивности возбуждения, которые используются в иллюстрации результатов численного моделирования, приведенной на рисунке 3.

Расчет нелинейных зависимостей резонансного отражения проведен для параметров пленок, известных из обзора литературных источников. Показано (рис. 2), что в определенной области величин возбуждающего поля нелинейные зависимости неоднозначны. Наличие бистабильного изгиба кривых означает возможность резкого переключения отражения и гистерезисного поведения материального отклика системы пленок.

### Моделирование процесса нелинейного отражения

Существование бистабильности и гистерезисных переключений способно стимулировать нестабильность в динамическом поведении действующего на активные центры и отраженного поля с развитием автоколебательного процесса [11]. Устойчивость периодических решений для нормированной интенсивности  $I(t) = |e_1|^2$  и его характер исследованы путем численного интегрирования системы нелинейных уравнений (3) методом Рунге-Кутты. Проводилось моделирование эффекта самоиндуцированной нестабильности излучения в предположение,

что воздействующий на пленочную структуру сигнал непрерывен. В эпизодах расчета, в основном, варьировалась именно характеризующая его величина нормированной напряженности светового поля  $e$ . Начальные условия соответствовали близости разности населённости в обеих пленках к невозбужденному состоянию, то есть,  $n_1(t=0) \leq 1.0$  и  $n_2(t=0) \leq 1.0$ .

Нужно отметить, что довольно типичной картиной при расчете временного хода интенсивности  $I$  были обычные аperiodические кривые, интенсивность снижалась до стационарного уровня по релаксационной экспоненте. Однако при определенном уровне возбуждения для ряда сочетаний параметров временная картина излучения представляла осцилляторную структуру. Примеры многократных расчетов подобной временной динамики отраженного излучения приведены на рисунке 3. Отметим, что значения уровня возбуждения, выбранные для расчета, отмечены на шкале  $e^2$  рисунка 2, параметры нелинейности соответствовали кривой 3 рисунка 2.

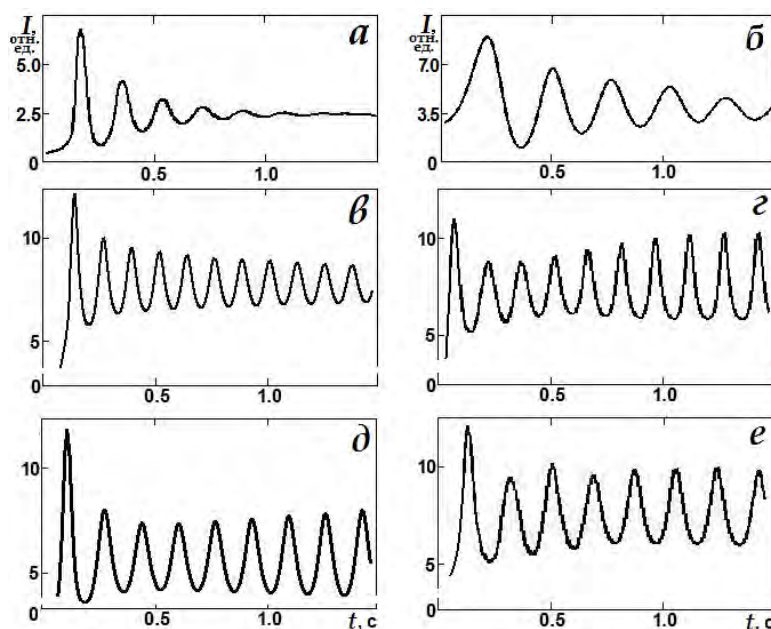


Рисунок 3 – Временная зависимость нормированной интенсивности отраженного поля:  $e = 1.35$  (а),  $1.4$  (б),  $1.5$  (в),  $1.6$  (г),  $1.8$  (д),  $2.0$  (е),  $\kappa_1 = 0.8$ ,  $\kappa_2 = 2.5$ ,  $\Delta = 0.4$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\gamma = 1.5$ ,  $T_{11} = 0.5$  с,  $T_{12} = 0.1$  с

Отмечается, что с нарастанием параметра возбуждения  $e$  численные решения (3) приобретали форму серии колебаний. По мере приближения параметра  $e$  к значениям области бистабильности квазиосцилляторный сценарий релаксирующей к равновесному уровню интенсивности  $I$  (рис. 3, а, б) сменялся картиной регулярной модуляции (рис. 3, в – е). Модуляционной составляющей  $I$  присущ относительно невысокий контраст, в целом, определенным образом связанный с величиной частоты модуляции. Переходу к устойчивой регулярной структуре в интенсивности предшествует этап «разгорания» – несколько всплесков с нарастающим периодом и амплитудой колебаний.

### Данные эксперимента и обсуждение результатов

Подобные временные зависимости интенсивности  $I_{\text{отр}}$  наблюдались в эксперименте. Динамику отраженного излучения регистрировали в схеме призматического возбуждения излучением *He-Ne* лазером волноводной моды двухслойной тонкопленочной структуры, проводя измерения при различных значениях  $Y_0$ . Результаты проведенного эксперимента приведены на рисунке 4. Исследуемая структура представляла собой два тонких слоя, изготовленных последовательным осаждением линейных оптических материалов на основание призмы связи [3]. В качестве диэлектрической среды с проницаемостью  $\varepsilon_1$  использовалась пленка толщиной 0.71 мкм, осажденная высокочастотным распылением кварцевого стекла, а проводящая пленка с проницаемостью  $\varepsilon_2$  толщиной 0.5 мкм получена ВЧ распылением керамической мишени из смеси  $\text{SnO}_2$  и  $\text{Sb}_2\text{O}_3$ . Показатель преломления, коэффициент поглощения и толщина пленок измерялись с применением методов фурье – спектроскопии волноводных мод. Нелинейный показатель преломления и нелинейный коэффициент поглощения пленок были также определены волноводным методом, основанным на регистрации изменений углового фурье – спектра отраженного светового пучка в ходе последовательного увеличения интенсивности зондирующего светового пучка в условиях самовоздействия на длине волны 0.6328 мкм [3]. Изготовленная структура имела следующие параметры  $\varepsilon_1 = 2.1798$ ,  $\kappa_1 n_{01} / 1 + \Delta^2 \approx 1.6 \cdot 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 3.2443$ ,  $\kappa_2 n_{02} \approx 1 \times 10^{-3}$ ,  $\beta \cdot \kappa_1 I_{\text{нас}} \approx 2.8 \times 10^{-4}$  и  $\beta \cdot \kappa_2 I_{\text{нас}} \approx 1.9 \times 10^{-3}$  ( $I_{\text{нас}} \sim 0.2 \dots 1 \cdot 10^4 \text{ Вт/см}^2$ ), которые были близки к величинам, используемым для расчетов по (3).

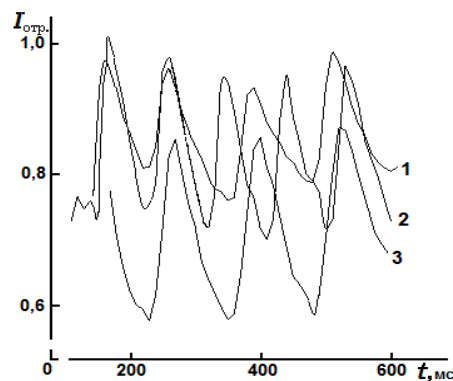


Рисунок 4 – Экспериментально измеренная интенсивность излучения, отраженного планарной структурой: уровень возбуждения примерно соответствует  $e = 1.4$  (кривая 1), 1.5 (2), 2.0 (3);  $\beta_2 = 0.2$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $T_{12} = 5 \cdot 10^{-2}$  с (временная шкала – в миллисекундах)

Качественное сходство экспериментальной и расчётных картин модуляции излучения, в целом, присутствует. Отмечается также наличие периода «разгорания», и увеличение частоты модуляции с ростом возбуждения. Судя по расчетам, можно предположить, что механизм происхождения регулярной составляющей в интенсивности излучения, отраженного или прошедшего систему тонких пленок имеет балансный характер. Фазовая самомодуляция светового поля в резонансной среде изменяет эффективность вынужденного поглощения, периодически

ослабляя его в одном слое и интенсифицируя в другом. В итоге выходная интенсивность при определенном уровне внешнего возбуждения (даже при квазистационарных его величинах) способна балансировать возле равновесных значений. Рассчитанные и приведенные на рисунках осцилляции интенсивности описывают именно этот процесс – явление самоиндуцированной неустойчивости в излучении, прошедшем резонансную систему планарных слоев с различием времени релаксации..

Анализ многократных расчетов временных зависимостей, подобных изображенным на рисунке 3, позволяет сделать определенные выводы. Во-первых, о том, что для существования такого режима взаимодействия необходимо значительное различие релаксационных констант  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ , характеризующих обратимость пропускания пленок с насыщаемым поглощением при снижении мощности возбуждения. Режим может возникать в определенном диапазоне («области неустойчивости») внешней интенсивности  $|e|^2$ , который зависит от дефекта частоты  $\Delta\omega = \omega - \omega_{01}$ . Во-вторых, существование и размер «области неустойчивости» определяется величинами параметров нелинейности  $\beta$  и  $\gamma$ , при этом данная зависимость носит пороговый характер. Отметим, что при  $\beta = 0$  и  $\gamma = 0$  «зона» бистабильности на шкале  $|e|^2$ , выделяемая на рисунке 2, отсутствует для любых сочетаний коэффициентов (5). Последнее может свидетельствовать, в частности, о том, что анализируемая в работе неустойчивость поля существенно связана со свойством индуцированной когерентным световым полем фазовой нелинейности в средах пленочной структуры.

### Заключение

Проведено экспериментальное исследование самоиндуцированной неустойчивости излучения, которая выражается в периодической модуляции с относительно невысоким контрастом первоначально непрерывного излучения. Анализ показал, что это явление следует считать эффектом особого, нелинейного резонанса. Показано, что эффект носит балансный характер и должен проявляться при значительном различии характерных времен релаксации излучения и отклика в средах, образующих пленочную структуру. Исследованная выше расчетная модель может быть основой для изучения динамики генерации в низкоразмерных системах. Такие системы используются в устройстве вертикально излучающих лазеров. Лазеры этого типа, излучающие в режиме серии коротких световых импульсов с относительно невысокой средней мощностью, как предполагается, могут стыковаться с интегральными электронными схемами [12, 13].

Изучение нелинейных свойств распространения света в квазидвумерных слоистых массивах, образованных КТ, особо перспективно в связи с возможностью их применения в устройствах нанофотоники [14, 15]. Отметим, что в схемах расчета кинетики излучения в низкоразмерных структурах на основе КТ необходим учет неоднородного уширения спектральных линий поглощения (усиления), поэтому применение адиабатического исключения поляризованности и получаемых на этой основе выражений для форм-фактора спектральных линий представляется некорректным.

Связанные с резонансной нелинейностью светодинамические эффекты можно применять для целей создания компактных устройств управления света светом. Представляется возможным также использование эффектов подобного рода

для диагностики нелинейных оптических свойств тонких слоев сред, образующих планарную структуру, а также для определения параметров активного поглощения оптического излучения в таких системах.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «1.15 Фотоника и электроника для инноваций».

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Пилипович, В. А. Амплитудная модуляция света путем электрооптического управления многолучевой интерференцией в интерферометре Фабри–Перо / В. А. Пилипович, В. Б. Залесский, А. И. Конойко, В. М. Кравченко // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 4. – С. 41–45.
2. Залесский, В. Б. Амплитудная электрооптическая модуляция излучения последовательными резонаторами Фабри–Перо / В. Б. Залесский, А. И. Конойко, В. М. Кравченко, А. С. Кузьмицкая // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматыч. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 217–223.
3. Glasunova, E. V. Self-induced instability of radiation in thin-film planar structure / E. V. Glasunova, A. V. Khomchenko, V. A. Yurevich // Nonlinear Optical Phenomena: Proc. SPIE / Eds. K. Drabovich, V. Makarov, Y.-R. Shen. – 2006. – Vol. 6259. – P. 62590Y(1–10).
4. Злодеев, И. В. Трансформация гауссова импульса при отражении от резонансной тонкопленочной структуры / И. В. Злодеев, Ю. Ф. Наседкина, Д. И. Семенов / Опт. и спектр. – 2012. – Т. 113, № 2. – С. 234–241.
5. Malikov, R. Nonlinear optical response of a 2D quantum dot supercrystal / R. Malikov, I. Ryzhov, V. Malyshev // EPJ Web of Conferences. – 2017. – Vol. 161. – 02014.
6. Nonlinear optical response of a two-dimensional quantum-dot supercrystal: Emerging multistability, periodic and aperiodic self-oscillations, chaos, and transient chaos / I. V. Ryzhov [et al.] // Phys. Rev. – 2019. – Vol. A100. – P. 033820-1-15.
7. Тимошенко, Е. В. Расчет эффективности бистабильного тонкопленочного отражателя / Е. В. Тимошенко, Ю. В. Юревич // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 3 (40). – С. 44–49.
8. Юдсон, В. И. Нелинейная резонансная оптика тонких пленок: метод обратной задачи / В. И. Юдсон, В. И. Рупасов // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 93. – С. 494–501.
9. Afanas'ev, A. A. Local-field effects in a dense ensemble of resonant atoms: Model of a generalized two-level system / A. A. Afanas'ev [et al.] // Phys. Rev. A. – 1999. – Vol. 60, № 2. – P. 1523–1529.
10. Ханин, Я. И. Основы динамики лазеров / Я. И. Ханин. – М. : Физматлит, 1999. – 368 с.
11. Yurevich, V. A. Resonant reflection by active thin layer / V. A. Yurevich, Yu. V. Yurevich, E. V. Timoschenko // ЖПС – Минск, 2016. – Т. 83, вып. 6. – С. 307–308.
12. Tropper, A. C. Vertical-external-cavity semiconductor lasers / A. C. Tropper [et al.] // J. Phys. D. – 2004. – Vol. 37, № 9. – P. R75–R85.
13. Петренко А. А. Характеризация режимов лазерной генерации вертикально-излучающих лазеров спектрального диапазона 1,3 мкм на основе короткопериодной сверхрешетки InGaAs/InGaAlAs / А. А. Петренко [и др.] // Оптический журнал. – 2021. – Т. 88, № 12. – С. 11–16. <http://doi.org/10.17586/1023-5086-2021-88-12-11-16>.
14. Жуков, А. Е. Лазеры и микролазеры на основе квантовых точек / А. Е. Жуков. – СПб. : ПолитехПресс, 2019. – 42 с.
15. Zhukov A. Fast switching between the ground- and excited-state lasing in a quantum-dot microdisk triggered by sub-ps pulses / A. Zhukov [et al.] // Opt. Lett. – 2024. – № 49. – P. 330–333.

Поступила в редакцию 02.06.2025 г.

Контакты: timoshchenko@m.msu.by (Тимощенко Елена Валерьевна, Хомченко Александр Васильевич, Юревич Владимир Антонович)

***Timoshchenko E. V., Khomchenko A. V., Yurevich V. A. DYNAMICS OF RADIATION REFLECTED BY A TWO-LAYER PLANAR STRUCTURE***

*Based on the proposed modification of the Maxwell-Bloch equations, the consequences of optical bistability in a low-dimensional structure of two resonantly polarized layers are analyzed. As a result of modeling the process of nonlinear reflection of light by a system of active layers, the possibility of self-induced instability of the coherent light field acting in the structure is established. The nonlinear effect of radiation modulation stimulated by instability confirms the experiment.*

**Keywords:** optical nonlinearity, resonant interaction, quantum-dimensional semiconductor structure, two-layer planar structure, self-modulation of optical radiation.

УДК 537.874.6: 681.7.068

## ФУРЬЕ-АНАЛИЗ ВОЛНОВОДНЫХ ИМПУЛЬСОВ В ТЕРАГЕРЦОВОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

**А. В. Шилов**

старший преподаватель

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

**А. Б. Сотский**

доктор физико-математических наук, профессор

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

*В настоящей работе исследована проблема восстановления спектров комплексных волноводных показателей преломления и концентрации примесей в воздушной среде, заполняющей металлodieлектрический волновод, либо капиллярное микроструктурное волокно по спектрам выходных терагерцовых импульсов. Предложена техника фильтрации вкладов различных мод в спектр выходного импульса, основанная на преобразовании Фурье-Габора данного импульса. Обосновано применение такого преобразования к количественному определению дисперсии групповой скорости мод. Установлено, что для определения малых значений концентрации примесного компонента в воздухе с помощью волноводной ТГц спектроскопии предпочтительны фазовые измерения, означающие восстановление вещественной части спектра приращения показателя преломления воздуха.*

**Ключевые слова:** терагерцовая спектроскопия, металлodieлектрический волновод, капиллярное микроструктурное волокно, преобразование Габора, высокочувствительные терагерцовые сенсоры.

### Введение

В настоящее время активно развиваются терагерцовые (ТГц) технологии, в которых используется излучение с длинами волн миллиметрового порядка (0,03 – 3 мм) [1]. Большое распространение достаточно недорогих источников ТГц излучения в виде фотоантенн [2] обуславливает их использование в системах связи и безопасности, медицинских системах и спектроскопии различных веществ [1]. Так, в наиболее популярной в современных исследованиях ТГц спектроскопии во временной области (от англ. time domain spectroscopy) сканирование осуществляется ультракороткими пикосекундными импульсами [2], имеющими ширину спектра, сравнимую с несущей частотой. Такие сенсоры газовых сред и водных растворов востребованы в медицине и микробиологии [3, 4]. В частности в [4] показано, что отчетливая спектральная сигнатура на 1,54 ТГц порошка дипикотиновой кислоты (DPA) позволяет эффективно идентифицировать бактерии или споры. Однако, в целом, создание высокочувствительных сенсоров сталкивается с высоким поглощением ТГц излучения водой, вследствие которого слой воды толщиной больше 200 мкм для ТГц излучения практически не прозрачен [5]. Выходом из такой ситуации является использование различных волноводных структур для увеличения длины взаимодействия с исследуемой средой и, как следствие, повышение чувствительности сенсора [1, 6–10].

Несмотря на достаточно полное исследование распространения мод ТГц волноводов в случае монохроматического излучения [7–9], вопросы ТГц спектроско-

© Шилов А. В., Сотский А. Б., 2025

пии во временной области примесных компонентов в средах, заполняющих полую сердцевину волноводов, либо каналы микроструктурной оболочки волокна изучены не достаточно. Пропускание через волноводы широкополосных ТГц импульсов, за исключением работы [6], исследовалось в основном экспериментально, с использованием сравнительно коротких отрезков волноводов, длина которых не превосходила 45 см [1, 9]. Качественные соображения, приведенные в [10] и расчеты, выполненные в [6], позволяют лишь предположить, что основным ограничивающим фактором при такой спектроскопии является многомодовый режим работы волноводов, который может реализоваться при передаче широкополосных импульсов, используемых в ТГц спектроскопии.

В настоящей работе эффективный метод расчета широкополосных ТГц импульсов в волноводах, примененный в [6] для металлодиэлектрических волноводов развит для диэлектрических капиллярных микроструктурных волокон. Для улучшения чувствительности ТГц спектроскопии во временной области и преодоления ограничивающего фактора в виде многомодового режима работы предложена техника фильтрации вкладов различных мод в спектр выходного импульса, основанная на преобразовании Габора данного импульса. Обосновано также применение такого преобразования к количественному определению дисперсии групповой скорости мод. Численное моделирование выполнено в разработанных компьютерных программах на примерах определения примесей паров воды в воздухе, заполняющем полую сердцевину металлодиэлектрических и капиллярных микроструктурных волноводах, результаты которого приведены ниже.

### Основная часть

Приведем основные соотношения методики расчета широкополосных импульсов в волноводах, рассмотренной в [6]. Ключевой ее особенностью является представление электромагнитного поля импульса в волноводе, ориентированном вдоль оси  $Oz$ , в виде суммы импульсов полей волноводных мод [6] по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(r, \varphi, z, t) \\ \mathbf{H}(r, \varphi, z, t) \end{pmatrix} = A \sum_{v=0}^m \begin{pmatrix} \mathbf{E}_v(r, \varphi, z, t) \\ \mathbf{H}_v(r, \varphi, z, t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $v$  – номер моды,  $m + 1$  – число учитываемых мод,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_v(r, \varphi, z, t) \\ \mathbf{H}_v(r, \varphi, z, t) \end{pmatrix} = 4\pi \operatorname{Re} \int_0^\infty C_v(f) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_v(r, \varphi, f) \\ \mathbf{h}_v(r, \varphi, f) \end{pmatrix} \exp\{i[2\pi ft - k_0 \beta_v(f)z]\} df, \quad (2)$$

$C_v$  – амплитуда,  $\beta_v$  – безразмерная постоянная распространения,  $\mathbf{e}_v$  и  $\mathbf{h}_v$  – векторы электрического и магнитного поля моды,  $f$  – частота,  $k_0 = 2\pi f c^{-1}$  – волновое число вакуума,  $A$  – амплитуда линейно поляризованного возбуждающего импульса на входе в волновод, пространственно-временное распределение которого соответствует модели Астона [6] и берется в виде

$$E_y = A \exp(-r^2 w^{-2}) P(t t_s^{-1}), \quad (3)$$

где  $w$  – пространственный радиус пучка гауссова профиля,  $P(tt_s^{-1})$  – функция параболического цилиндра,  $t_s$  – масштабный фактор. Ключевую роль при расчете электромагнитного поля (1), (2) играет построение зависимостей  $\beta_v(f)$  и  $C_v(f)$ , которые определяются в результате решения дисперсионных уравнений и использования соотношений ортогональности [6]. Соответствующие расчеты выполнены в настоящей работе методом функций Грина [11].

В качестве металлодиэлектрического волновода с поллой сердцевинной был выбран серебряный волновод кругового сечения, в котором сердцевина отделена от металла диэлектрическим слоем с проницаемостью  $\varepsilon_L$  и толщиной  $d$ , который находится между металлическим покрытием и поллой сердцевинной. Здесь и далее диэлектриком служит полипропилен с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_L = 2.247 - i0.0036$  [12]. Дисперсия серебра рассчитывалась по модели Друде [13]. При расчетах было выбрано значение толщины диэлектрического слоя  $d = 40.9$  мкм, которое согласно формуле (1) работы [6], является оптимальным на частоте 1 ТГц. Расчеты выполнены для волноводов с диаметром поллой сердцевинной  $D = 3$  мм. Экспериментальные образцы таких волноводов демонстрируют приемлемые гибкость и затухание ТГц сигналов [1, 7, 8]. Для диэлектрической проницаемости среды, заполняющей полую сердцевину металлодиэлектрического волновода и каналы микроструктурного волновода использована модель [6]

$$\varepsilon_b(f) = 1 + 2C\Delta n(f), \quad \Delta n(f) = \sum_{j=1}^{29} a_j [b_j(f_j^2 - f^2) + ifb_j^2]^{-1}, \quad (4)$$

где  $C$  – относительная концентрация водяного пара ( $C = 1$  соответствует лабораторным условиям),  $f$  берется в ТГц, а значения  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $f_j$ , существенные для диапазона  $1.5 \text{ ТГц} \geq f \geq 0.5 \text{ ТГц}$ , приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Константы дисперсионной модели насыщенного пара (4)

| $j$ | $a_j \cdot 10^9, \text{ ТГц}^3$ | $b_j \cdot 10^3, \text{ ТГц}$ | $f_j, \text{ ТГц}$ |
|-----|---------------------------------|-------------------------------|--------------------|
| 2   | 3.33                            | 9.98                          | 0.557              |
| 3   | 2.42                            | 9.98                          | 0.752              |
| 4   | 1.91                            | 9.98                          | 0.988              |
| 5   | 8.42                            | 9.98                          | 1.096              |
| 6   | 3.07                            | 9.98                          | 1.112              |
| 7   | 7.19                            | 8.14                          | 1.162              |
| 8   | 3.12                            | 9.38                          | 1.206              |
| 9   | 3.16                            | 9.98                          | 1.228              |
| 10  | 4.97                            | 7.62                          | 1.411              |

Определяющее значение для передаточных характеристик волновода имеет дисперсия мнимых частей постоянных распространения мод. Она иллюстрируется рисунком 1, где приведены дисперсионные кривые для 6 мод низшего порядка симметрии  $HE_{1v}$ , заметно влияющих на форму входного и выходного ТГц импульсов [6].

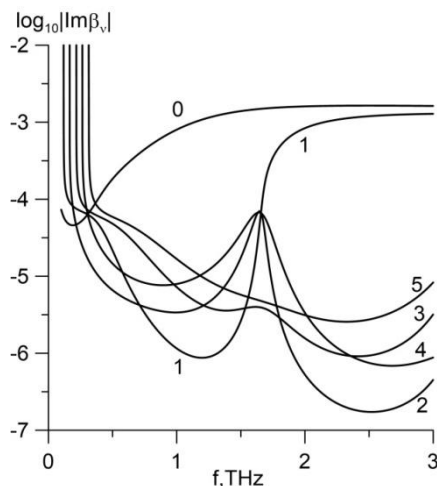


Рисунок 1 – Спектры затухания низших  $HE_{1v}$  мод метало - диэлектрического волновода с поллой сердцевинной; номера кривых совпадают с  $v$

Отклонение зависимостей на рисунке 1 от аналогичных зависимостей работы [6] объясняется использованием различных значений  $\varepsilon_L$ . Согласно рисунку 1, в диапазоне  $0.1 \text{ ТГц} \leq f \leq 3.0 \text{ ТГц}$  металлдиэлектрический волновод является существенно многомодовым. Этот диапазон соответствует ширине спектра входного импульса с параметрами  $w = 800 \text{ мкм}$ ,  $t_s = 0.2769 \text{ пс}$  [6], которые использованы в дальнейших расчетах.

На рисунке 2 представлены спектры групповых скоростей мод, определяющие динамику выходного импульса. Данная динамика иллюстрируется рисунком 3, где сопоставлены строго рассчитанные импульсы напряженности  $y$  – компоненты электрического поля  $E_y^{(0)}(\tau)$  и  $E_y(\tau)$  на оси волновода ( $r = 0$ ) на выходе отрезка волновода длины  $L = 1 \text{ м}$  при наличии ( $E_y(\tau)$ ) и отсутствии ( $E_y^{(0)}(\tau)$ ) примеси водяного пара в воздухе, заполняющем полую сердцевину волновода. Здесь и далее использовано обозначение  $\tau = t - Lc^{-1}$  и для имитации измерительных погрешностей к значениям  $E_y^{(0)}(\tau)$  и  $E_y(\tau)$  добавлены смещения, полученные нормальным генератором случайных чисел с дисперсией, соответствующей отношению сигнал / шум = 1000.

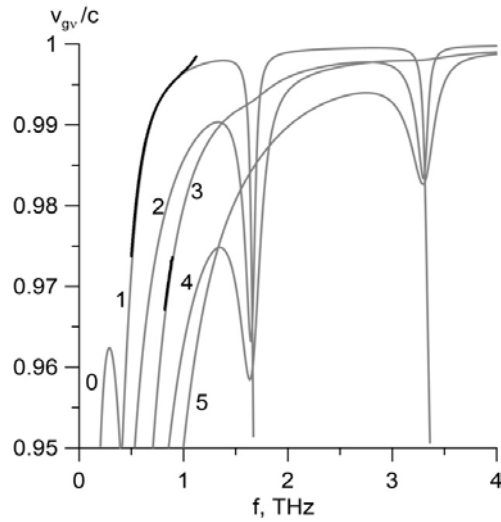


Рисунок 2 – Спектры отнесенных к скорости света групповых скоростей низших  $HE_{1v}$  мод метало - диэлектрического волновода с поллой сердцевиной (серые кривые, номера которых совпадают с  $v$ ). Черные кривые – результат преобразования Габора выходного импульса

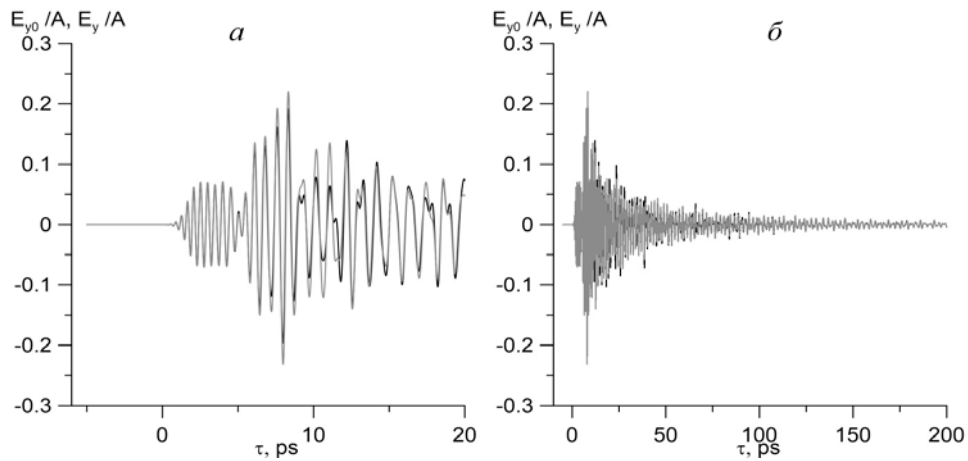


Рисунок 3 – Импульсы на выходе металлодиэлектрического волновода при отсутствии (серые кривые,  $C = 0$ ) и наличии (черные кривые,  $C=1$ ) в его поллой сердцевины водяного пара с относительной концентрацией  $C$  в увеличенном а) и уменьшенном б) масштабах

Обратная задача волноводной ТГц спектроскопии сводится к анализу отношения [6]

$$\frac{\hat{E}_y(f)}{\hat{E}_y^{(0)}(f)} = \frac{\sum_{v=1}^m C_v e_{vy} \exp \left[ -ik_0 \left( \beta_v + \frac{\partial \beta_v}{\partial n} \Delta n \right) L \right]}{\sum_{v=1}^m C_v e_{vy} \exp \left[ -ik_0 \beta_v L \right]}, \quad (5)$$

где  $\hat{E}_y^{(0)}(f)$  и  $\hat{E}_y(f)$  – фурье-образы функций  $E_y^{(0)}(\tau)$  и  $E_y(\tau)$ , заданных на экспериментальном интервале  $\Delta\tau$  (на рисунке 3, а при  $\Delta\tau = 200$  пс). При стандартной объемной ТГц спектроскопии воздуха ( $D \rightarrow \infty$ ) в (5) можно положить

$$\partial\beta_v / \partial n = 1, \quad (6)$$

в результате чего

$$-C \operatorname{Im} \Delta n = Ck = -(k_0 L)^{-1} \ln \left| \hat{E}_y(f) [\hat{E}_y^{(0)}(f)]^{-1} \right|, \quad (7)$$

$$C \operatorname{Re} \Delta n = -(k_0 L)^{-1} \arg \{ \hat{E}_y(f) [\hat{E}_y^{(0)}(f)]^{-1} \}. \quad (8)$$

В случае волноводной ТГц спектроскопии условие (6) с высокой точностью выполняется только для основной моды волновода ( $v = 1$ ), а для остальных мод оно нарушено, что существенно затрудняет решение обратной задачи по определению  $C \Delta n$ . В результате использование выражений (7) и (8) может привести к возникновению межмодовых шумов. Сказанное иллюстрируется кривыми на рисунке 4, рассчитанными на основании (7), (8) с использованием данных рисунка 3, а при шаге дискретизации временной переменной  $\delta\tau = 0.01$  пс (этот шаг использован и в дальнейших расчетах).

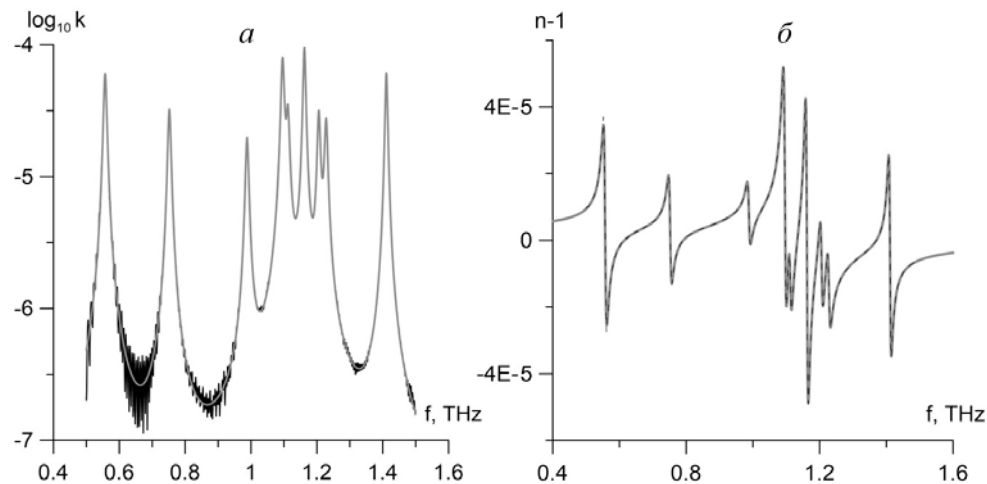


Рисунок 4 – Решение обратной задачи волноводной ТГц спектроскопии для металлодиэлектрического волновода с поллой сердцевиной для мнимой а) и вещественной б) частей преломления показателя преломления сердцевины, вызванного наличием в воздухе водяного пара концентрации  $C = 1$ . Серые кривые – точные данные, черные кривые – решение обратной задачи на основании (7), (8);  $n - 1 = \operatorname{Re} \Delta n$

Черные быстро колеблющиеся кривые на рисунке 4, а – результат межмодового шума. Этот шум практически отсутствует в окрестности максимумов спектра поглощения примеси, что объясняется подавлением высших мод за счет их повышенного поглощения водяным паром. Еще можно отметить гораздо более низкую

чувствительность к межмодовому шуму фазовых измерений (см. рисунок 4, б). Этот интересный факт обнаружен здесь впервые.

Согласно рисунку 1, оптимальная частота для детектирования значения  $C$  составляет 1.2 ТГц. На этой частоте основная мода имеет минимум затухания, который значительно меньше затухания остальных мод. Кроме того, этот минимум отвечает практически полной локализации энергии моды в воздушной среде, что эквивалентно условию  $\partial\beta_v / \partial n \approx 1$  [6]. Таблица 2 иллюстрирует точность решения обратной задачи по определению концентрации  $C$  из зависимостей, представленных на рисунке 4 и аналогичных им, соответствующих  $C = 0.1$ ,  $C = 0.01$ . В таблице  $C$  – точное значение концентрации,  $C_r^{(k)}$  и  $C_r^{(n)}$  – результаты ее восстановления на основании (7) и (8) соответственно.

Таблица 2 – Определение концентрации примеси  $C$

| Тип волновода                            | $C$  | $C_r^{(k)}$ | $C_r^{(n)}$ |
|------------------------------------------|------|-------------|-------------|
| Металлодиэлектрический;<br>$f = 1.2$ ТГц | 1    | 1.002       | 1.000       |
|                                          | 0.1  | 0.0995      | 1.019       |
|                                          | 0.01 | 0.0100      | 0.00954     |
| Микроструктурный;<br>$f = 1.45$ ТГц      | 1    | 1.006       | 0.998       |
|                                          | 0.1  | 0.114       | 0.100       |
|                                          | 0.01 | 0.00588     | 0.010       |

Согласно таблице 2, восстановление концентрации примесного компонента может быть успешно осуществлено при использовании оптимальной для данного волновода частоты. Вместе с тем из рисунка 4, а следует, что проблема межмодового шума может существенно усложнить абсорбционную волноводную ТГц спектроскопию примесных компонентов на отдельных участках спектра. Покажем, что эту проблему можно преодолеть путем фильтрации высших мод с помощью преобразования Габора выходного импульса.

Для рассматриваемых волноводов характерно сохранение направления поляризации излучения. Поэтому если на входе волновода электрическое поле было поляризовано вдоль оси  $Oy$ , то на выходе волновода в центре его сердцевины будет регистрироваться сигнал, пропорциональный сумме модовых импульсов:

$$E_y(\tau) = 2 \operatorname{Re} \sum_{v=0}^m \int_{-\infty}^{\infty} C_v(f) e_v(f) \exp \{i[2\pi f \tau - k_0(\beta_v - 1)L]\} df, \quad (9)$$

где  $\tau = t - Lc^{-1}$ ,  $e_v(f) = e_{vy}(0, \varphi, f)$ .

Применим к сигналу (9) преобразование Фурье-Габора с гауссовым окном [14]:

$$G(f') = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} E_v(\tau) \exp[-i2\pi f'(\tau - \tau_0) - (\tau - \tau_0)^2 T^{-2}] d\tau, \quad (10)$$

где  $\tau_0$  – центр окна,  $T$  – его полуширина. Согласно (9), (10),

$$G(f') = \sum_{v=1}^m G_v(f'), \quad (11)$$

$$G_v(f') = \Gamma_v(f') + \Gamma_v^*(-f'), \quad (12)$$

$$\Gamma_v(f') = T \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_v(f) e_v(f) \exp\{i[2\pi f \tau_0 - k_0 L (\beta_v - 1) - \pi^2 (f - f')^2 T^2]\} df. \quad (13)$$

Предположим, что протяженность волновода  $L$  такова, что  $k_0 L \gg 1$ . В этом случае интеграл (13) допускает аналитическую оценку методом перевала [15]:

$$\Gamma_v(f') = F_v(f_{vs}) \exp\{i[2\pi f \tau_0 - k_0 L (\beta_v - 1) - \pi^2 (f - f')^2 T^2]\}_{f=f_{vs}}, \quad (14)$$

$$\text{где } F_v(f) = \exp(i \frac{3}{4} \pi) (2\pi)^2 T C_v(f) e_v(f) [2k_0 L (2f^{-1} \frac{d\beta_v}{df} + \frac{d^2\beta_v}{df^2})]^{-\frac{1}{2}} \{1 + O[(k_0 L)^{-1}]\} \quad (15)$$

– медленно изменяющаяся функция частоты (характерным масштабом ее изменения является средняя частота спектра импульса на входе в волновод),  $f_{vs}$  – седловая точка, которая определяется из уравнения

$$v_{gv}(f_{vs}) c^{-1} (1 + \tau_0 c L^{-1}) = 1, \quad (16)$$

где  $v_{gv}(f) c^{-1} = \text{Re}(\beta_v + f d\beta_v / df)^{-1}$  – групповая скорость  $v$ -й моды, отнесенная к скорости света.

Из (11), (12), (14) следует, что если параметр  $T$  выбрать в соответствии с условием  $\exp[\pi^2 (f_{\mu s} - f_{vs})^2 T^2] \ll 1$ , то функция  $|G(f')|$  будет иметь изолированные максимумы с координатами  $f' = f_{vs}$ , где  $v = 0, 1, \dots$ . Согласно (14), (15), величины этих максимумов будут определяться условиями возбуждения соответствующих мод и их затуханием на длине волновода. Таким образом, применив преобразование (10) к импульсу напряженности электрического поля, измеряемого на выходе волновода, и определив частотные координаты максиму-

мов функции  $|G(f)|$ , можно по формуле (16) найти групповые скорости мод на частотах  $f_{vs}$ .

Для практической реализации описанной выше методики преобразование Габора импульса напряженности электрического поля  $E_y(\tau)$  на выходе волновода вида (10) может быть представлено как

$$G(f) = \sum_{v=0}^m A_v \exp\{-[0.5\pi(f_{vs} - f)T]^2\} + A_v^* \exp\{-[0.5\pi(f_{vs} + f)T]^2\}. \quad (17)$$

Здесь  $A_v$  – комплексные константы, определяемые дисперсионными характеристиками волновода и условиями его возбуждения, звездочка – комплексное сопряжение,  $f_{vs}$  – седловая частота для  $v$ -й моды, которая удовлетворяет уравнению (16). Параметры модели (17)  $A_v$ ,  $A_v^*$  и  $f_{vs}$  могут быть определены по экспериментальному импульсу  $E_y(\tau)$  методом наименьших квадратов с целевой функцией

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left| G(f) - \sum_{v=0}^m \left\{ A_v \exp\left\{-\left[\frac{\pi}{2}(f_{vs} - f)T\right]^2\right\} + A_v^* \exp\left\{-\left[\frac{\pi}{2}(f_{vs} + f)T\right]^2\right\} \right\} \right|^2 df,$$

где  $G(f)$  имеет вид (10). Данный метод приводит к алгебраической системе относительно неизвестных  $A_v$  и  $A_v^*$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} \exp\{-0.5[\pi T(f_{vs} - f_{\mu s})]^2\} + A_{\mu}^* \exp\{-0.5[\pi T(f_{vs} + f_{\mu s})]^2\} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_y(\tau) \exp\{-2[(\tau - \tau_0)T^{-1}]^2 - i2\pi f_{vs}(\tau - \tau_0)\} d\tau, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^m A_{\mu} \exp\{-0.5[\pi T(f_{vs} + f_{\mu s})]^2\} + A_{\mu}^* \exp\{-0.5[\pi T(f_{vs} - f_{\mu s})]^2\} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_y(\tau) \exp\{-2[(\tau - \tau_0)T^{-1}]^2 + i2\pi f_{vs}(\tau - \tau_0)\} d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

При выполнении системы (18), (19)

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_y^2(\tau) \exp\{-2[(\tau - \tau_0)T^{-1}]^2\} d\tau - \\ - \frac{2}{T\sqrt{\pi}} \sum_{v=0}^m \int_{-\infty}^{\infty} E_y(\tau) \exp\{-2[(\tau - \tau_0)T^{-1}]^2 + i2\pi f_{vs}(\tau - \tau_0)\} d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Значения  $f_{vs}$  находятся из условия минимума функционала (20) градиентным методом, где в качестве нулевых приближений могут быть выбраны корни уравнения

$$\operatorname{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} E_y(\tau)(\tau - \tau_0) \exp \{ -2[(\tau - \tau_0)T^{-1}]^2 + i2\pi f_{vs}(\tau - \tau_0) \} d\tau \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} E_y(\tau) \exp \{ -2[(\tau - \tau_0)T^{-1}]^2 - i2\pi f_{vs}(\tau - \tau_0) \} d\tau \right\} = 0,$$

которое при условиях

$$|f_{vs} - f_{\mu s}| >> 2(T\sqrt{\pi})^{-1} \quad (21)$$

( $\mu \neq v$ ) эквивалентно  $\partial I / \partial f_{vs} = 0$ .

При выполнении неравенств (17), (21) и в приближении (6)

$$-C \operatorname{Im} \Delta n = Ck = -(2\pi f_{vs} c^{-1} L)^{-1} \ln |G(f_{vs})[G_0(f_{vs})]^{-1}|, \quad (22)$$

$$C \operatorname{Re} \Delta n = -(2\pi f_{vs} c^{-1} L)^{-1} \arg \{G(f_{vs})[G_0(f_{vs})]^{-1}\}, \quad (23)$$

где функции  $G(f_{vs})$  и  $G_0(f_{vs})$  рассчитываются по формуле (10) по экспериментальным импульсам  $E_y(\tau)$  и  $E_y^{(0)}(\tau)$ , соответственно. В отличие от (7) и (8) выражения (22) и (23) относятся только к одной моде, что означает селекцию мод преобразованием Габора. Данная селекция устраняет проблему межмодового шума при волноводной ТГц спектроскопии воздушных примесей. Ключевым элементом при применении формул (22) и (23) является вычисление седловых частот  $f_{vs}$  по описанной выше схеме.

Заметим, что изменяя величину  $\tau_0$  можно построить зависимость  $f_{vs}(\tau_0)$ . Тогда выражение (16) позволяет экспериментально исследовать дисперсию групповой скорости моды, что важно для экспериментальной проверки теоретических моделей, используемых для расчета волноводов.

Об эффективности использования описанных преобразований Габора позволяют судить рисунок 2, кривые на котором соответствуют  $C = 0$  и рисунок 5, где  $C = 1$ . Представленные на них данные относятся к длине волновода  $L = 2$  м и соответствуют частотам  $f_{vs}$ , на которых  $|G_0(f_{vs})|$  достигает максимума.

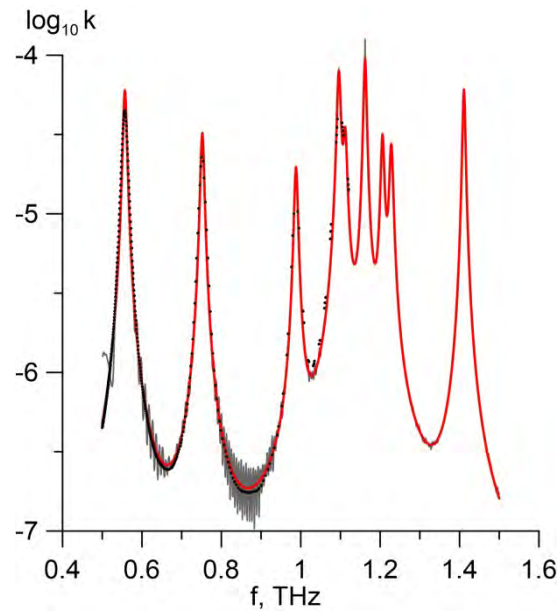


Рисунок 5 – Решение обратной задачи волноводной ТГц спектроскопии для металлодиэлектрического волновода для мнимой части приращения показателя преломления сердцевинны, вызванного наличием примеси в воздухе водяного пара концентрации  $C = 1$ . Красная кривая – точный спектр, серая кривая – стандартное приближение (7), дискретные точки – приближение (22)

Представленные выше результаты относятся к сенсорам на основе металлодиэлектрических волноводов, которые в гибком варианте весьма сложны для изготовления. Более простую альтернативу представляют сенсоры воздушных примесей с чувствительными элементами в виде диэлектрических микроструктурных волноводов. Их достоинством является квази-одномодовый режим работы, исключающий межмодовые шумы, а недостатками – наличие дискретных окон прозрачности в спектре пропускания и значительные потери ТГц сигнала между такими областями [12].

Продemonстрируем результаты, которые относятся к реализации разработанных методов применительно к расчету сенсора на основе капиллярного микроструктурного волокна с поллой сердцевинной. Для этого так же, как и в случае металлодиэлектрического капилляра, использованы модель приращения показателя преломления воздуха (4). Расчеты выполнены для полипропиленового капиллярного микроструктурного волокна, образованного кольцом из 8 полых капилляров с толщиной стенки  $d$ , плотно упакованных в трубке с внутренним диаметром  $D$  [12]. Используются значения  $d=170\text{мкм}$ ,  $D=1860\text{мкм}$ ,  $L=20\text{см}$ , соответствующие экспериментальному образцу волновода, исследованному в [12]. Пропускание данного волновода обеспечивается основной модой в трех окнах прозрачности  $0.710\text{ ТГц} \leq f \leq 0.797\text{ ТГц}$ ,  $1.196\text{ ТГц} \leq f \leq 1.582\text{ ТГц}$ ,  $1.993\text{ ТГц} \leq f \leq 2.371\text{ ТГц}$ , что исключает проблему межмодовых шумов при ТГц спектроскопии примесных компонентов. На этом основании решение обратной задачи ТГц спектроскопии осуществлялось по формулам (5) – (8). При расчетах использованы спектры постоянных распро-

странения моды, приведенные в [12] и рассчитанные методом интегральных уравнений [11].

Рисунок 6 иллюстрирует влияние водяного пара на выходной импульс волновода.

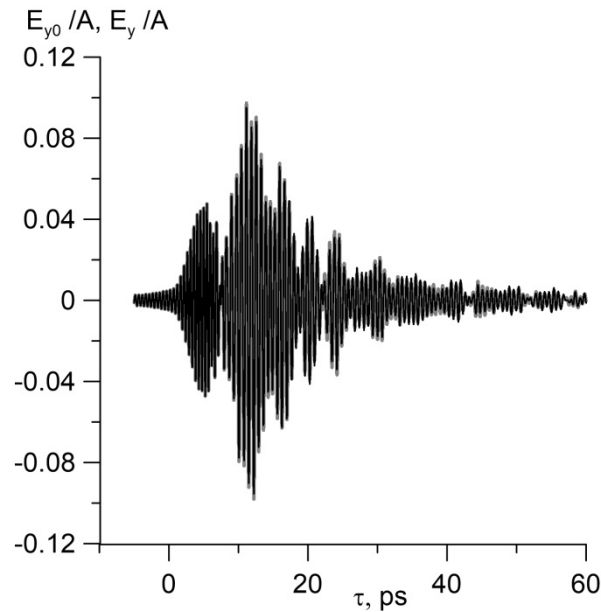


Рисунок 6 – Импульсы на выходе капиллярного микроструктурного волокна при отсутствии (серая кривая,  $C=0$ ) и наличии (черная кривая,  $C=1$ ) в его каналах водяного пара с относительной концентрацией  $C$

Форма импульса, представленного на рисунке 6 и реконструированного численным моделированием при  $C = 0$ , подобна экспериментальной форме в [12], однако их детальное соответствие не наблюдается. Это можно объяснить некоторым отклонением использованного при расчетах задающего импульса от экспериментального.

На рисунке 7 представлено решение обратной задачи ТГц спектроскопии о восстановлении спектра  $\Delta n(f)$  для случая  $C = 1$ . Как и следовало ожидать, корректные результаты для  $\Delta n(f)$  получаются только в пределах указанных выше окон прозрачности. Поскольку при максимуме пропускания волновода на частоте  $f = 1.45$  ТГц с высокой точностью реализуется условие (6), определение концентрации примеси естественно проводить на указанной частоте. Соответствующие данные собраны в нижней части таблицы 2. Их рассмотрение снова свидетельствует о преимуществе использования  $\text{Re}[\Delta n(f)]$ . Однако этот результат можно отнести только к детектированию малых значений  $C$ . В частности, расчеты показали, что при  $C = 10$  в (8) возникает проблема однозначного определения  $\arg\{\hat{E}_y(f)[\hat{E}_y^{(0)}(f)]^{-1}\}$ .

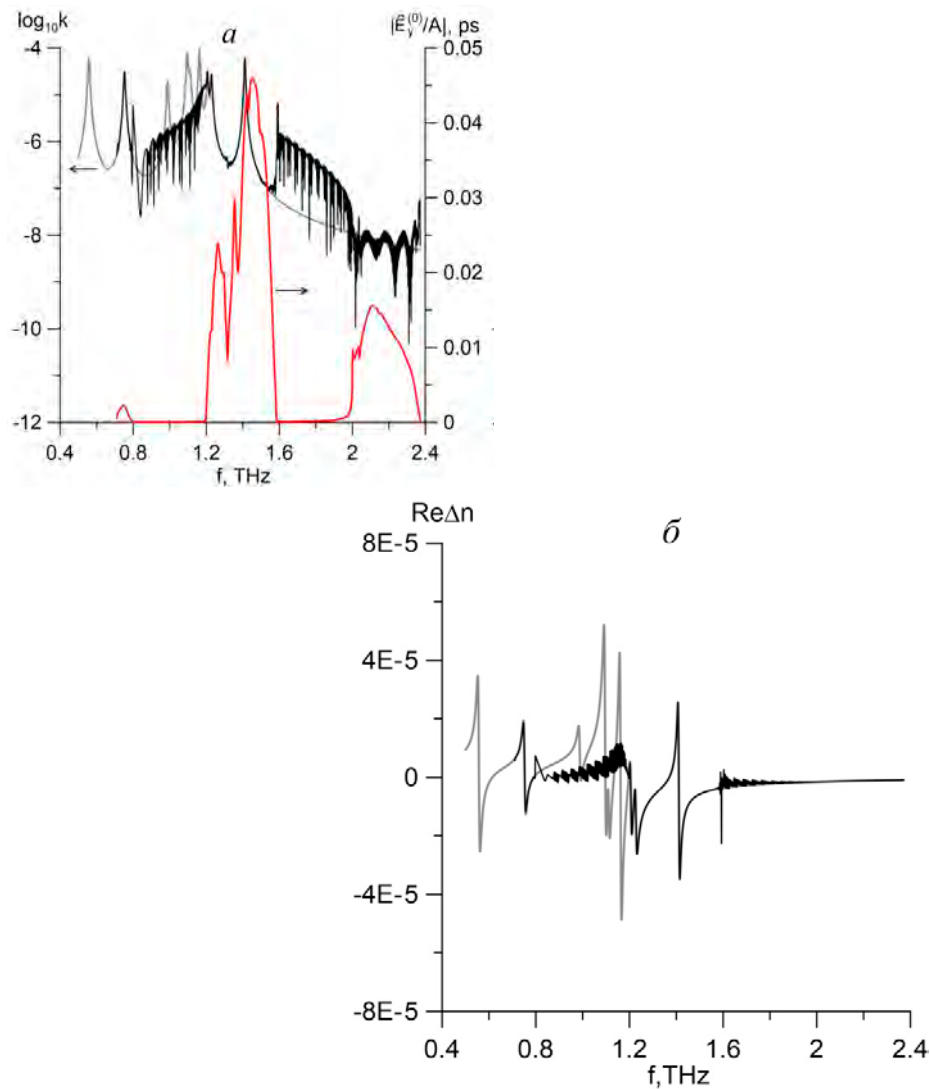


Рисунок 7 – Решение обратной задачи волноводной ТГц спектроскопии в случае микроструктурного волокна для мнимой а) и вещественной б) частей приращения показателя преломления каналов, вызванного наличием примеси в воздухе водяного пара концентрации  $C=1$ . Серые кривые – точные данные, черные кривые – решение обратной задачи на основании (7), (8), красная кривая – спектр пропускания волновода при  $C=0$

### Заключение

Итак, разработаны методы оценки спектров комплексных волноводных показателей преломления и концентрации примесных компонентов в воздушной среде, заполняющей полую сердцевину металлодиэлектрического волновода, либо каналы диэлектрического капиллярного микроструктурного волокна по спектрам выходных ТГц импульсов. Показано, что основной причиной шумов при определении спектра приращения мнимой части показателя преломления зондируемой среды является различная чувствительность постоянных распространения мод разного

порядка к детектируемой примеси. Для преодоления данной проблемы предложена техника фильтрации вкладов различных мод в спектр выходного импульса, основанная на преобразовании Габора данного импульса. Обосновано также применение такого преобразования к количественному определению дисперсии групповой скорости мод. Установлено, что для определения малых значений концентрации примесного компонента в воздухе с помощью волноводной ТГц спектроскопии предпочтительны фазовые измерения, означающие восстановление вещественной части спектра приращения показателя преломления воздуха.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «1.15 Фотоника и электроника для инноваций».

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Ito, K.** Analysis of transmission properties of terahertz hollow-core optical fiber by using time-domain spectroscopy and application for remote spectroscopy / K. Ito, T. Katagiri, Y. Matsuura // *Journal of the Optical Society of America B*. – 2017. – Vol. 34, № 1. – P. 60–65.
2. Fourier-transform THz spectroscopy based on electric-field interferometry using THz-PMT / H. Takahashi [et al.] // *Optics Express*. – 2024. – Vol. 32, iss. 7. – P. 12774–12782.
3. **Ангелуц, А. А.** Характерные отклики биологических и наноразмерных систем в терагерцовом диапазоне частот / А. А. Ангелуц [и др.] // *Квантовая электроника*. – 2014. – Т. 44, № 7. – С. 614–632.
4. Continuous-wave terahertz spectroscopy of plasmas and biomolecules / D. F. Plusquellic [et al.] // *International journal of high speed electronics and systems*. – 2003. – Vol. 13, № 04. – P. 1287–1306.
5. **Mazhorova, A.** Label-free bacteria detection using evanescent mode of a suspended core terahertz fiber / A. Mazhorova [et al.] // *Optics Express*. – 2012. – Vol. 20, № 5. – P. 5344–5355.
6. **Сотский, А. Б.** Распространение терагерцовых импульсов в капиллярных волноводах с металлизированной границей / А. Б. Сотский, А. В. Шилов, Л. И. Сотская // *Компьютерная оптика*. – 2017. – Т. 41, № 6. – С. 803–811.
7. Hollow polycarbonate waveguides with inner Cucoatings for delivery of terahertz radiation / J. A. Harrington, R. George, P. Pedersen, E. Mueller // *Optics Express*. – 2004. – Vol. 12, № 21. – P. 5263–5268.
8. **Matsuura, Y.** Hollow optical fibers loaded with an inner dielectric film for terahertz broadband spectroscopy / Y. Matsuura, E. Takeda // *Journal of the Optical Society of America B*. – 2008. – Vol. 25, № 12. – P. 1949–1954.
9. Terahertz wave transmission in flexible polystyrene-lined hollow metallic waveguides for the 2.5-5 THz band / M. Navarro-Cia [et al.] // *Optics Express*. – 2013. – Vol. 21, № 20. – P. 23748–23755.
10. Terahertz waveguides with low transmission losses: characterization and applications / O. Mitrofanov [et al.] // *Proc. SPIE* – 2014. – Vol. 9199. – P. 919901-1–919901-8.
11. **Сотский, А. Б.** Теория оптических волноводных элементов: моногр. / А. Б. Сотский. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – 456с.
12. Eight-capillary cladding THz waveguide with low propagation losses and dispersion / M. M. Nazarov [et al.] // *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology*. – 2018. – Vol. 8, Issue 2. – P. 183–191.
13. Optical properties of the metals Al, Co, Cu, Au, Fe, Pb, Ni, Pd, Pt, Ag, Ti, and W in the infrared and far infrared / M. A. Ordal [et al.] // *Appl. Opt.* – 1983. – Vol. 22, № 7. – P. 1099–1120.
14. Excitation and propagation of surface electromagnetic waves studied by terahertz spectrochronography / M. M. Nazarov [et al.] // *Laser Phys. Lett.* – 2005 – Vol. 2, № 10. – P. 471–475.
15. **Корн, Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1977. – 831 с.

Поступила в редакцию 01.06.2025 г.

Контакты: shilov@m.msu.by (Шилов Артур Владимирович), sotsky@m.msu.by (Сотский Александр Борисович)

**Shilov A. V., Sotsky A. B. FOURIER ANALYSIS OF WAVEGUIDE PULSES IN TERAHERTZ SPECTROSCOPY**

*The paper addresses the problem of reconstructing the spectra of complex waveguide refractive indices and impurity component concentrations in an air medium filling a metal-dielectric waveguide or a dielectric capillary microstructured fiber from the spectra of output terahertz pulses. The authors propose a technique for filtering the contributions of different modes to the spectrum of an output pulse based on the Gabor transform of a given pulse. The use of this transform to quantitatively determine the mode group velocity dispersion is substantiated. It is established that phase measurements, which mean reconstructing the real part of the spectrum of the air refractive index increment, are preferable for determining small values of the impurity component concentration in air using waveguide THz spectroscopy.*

**Keywords:** terahertz spectroscopy, metal-dielectric waveguide, capillary microstructured fiber, Gabor transform, highly sensitive terahertz sensors.

УДК 574.52:546.36\*137:581.526.452(282.247.321.7)

## ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МИГРАЦИИ $^{137}\text{Cs}$ В СИСТЕМЕ ПОЧВА–РАСТЕНИЕ В УСЛОВИЯХ ПОЙМЕННОГО ЛУГА Р. ИПУТЬ

**С. Ф. Тимофеев**

кандидат сельскохозяйственных наук, доцент

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

**Н. М. Дайнеко**

кандидат биологических наук, доцент

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

**Н. И. Карпенко**

магистр

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

*На пойменном луге реки Ипуть изучали миграцию  $^{137}\text{Cs}$  в системе почва–растение. Установлено, что в горизонтах почвы 0–10 см находится от 43 до 85 % от общего количества радиоцезия. В водной вытяжке из почвы содержится около 0,5–1,0 % радионуклида, в ацетатно-аммонийной вытяжке около 1,7–1,8 %, в одномолярной и шестимолярной соляной кислоте соответственно 1,6–1,9 и 18,0–21,0 %. Основная часть радионуклида прочно зафиксирована почвенным поглощающим комплексом и не доступна для растений. Растительный покров представлен осоково-разнотравными сообществами. Наибольшая удельная активность радионуклида выявлена для группы осоковых. За период 2004–2024 гг зафиксировано снижение коэффициента пропорциональности с 7,4 до 2,5 Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>.*

**Ключевые слова:** пойменный луг, миграция  $^{137}\text{Cs}$  в звене почва–растение, агроботанические группы растений, торфяно-болотная почва, радиоэкологическая обстановка.

### Введение

Основой животноводства является прочная кормовая база, основанная на продукции растениеводства, получаемой с полей и лугов. Качество животноводческой продукции зависит в немалой степени и от качества самих кормов. Применительно к луговому кормопроизводству это означает видовой состав растений, фазу потребления, а в условиях радиоактивного загрязнения это и содержание радионуклидов. В связи с этим на содержание радионуклидов в кормах влияние оказывают не только плотность радиоактивного загрязнения, но и процессы, связанные с затоплением. Как известно, на заливных лугах, загрязненных радионуклидами, происходят процессы как вертикальной, так и горизонтальной миграции радиоактивных веществ. Полученные результаты показали, что интенсивность вертикальной миграции  $^{137}\text{Cs}$  в гидроморфных почвах существенно выше, чем в сопряженных с ними автоморфных [1, 2].

В результате полевых исследований установлено, что в бассейнах малых водосборов при перераспределении  $^{137}\text{Cs}$  горизонтальная миграция радионуклида в почве имеет значительно большее влияние чем вертикальная [3, 4].

© Тимофеев С. Ф., Дайнеко Н. М., Карпенко Н. И., 2025

В немалой степени это связано с движением воды при затоплении и при сходе воды. Интенсивность поступления радионуклидов в растения во многом зависит от режима увлажнения почвы. Вынос их многолетними травами наименьший при изменении от оптимального водообеспечения в сторону иссушения почвы при формировании урожая [5].

Характерной особенностью пострадавших районов является преобладание низкоплодородных песчаных и торфяных почв, характеризующихся высоким переходом радиоактивного цезия в растения, а далее в продукцию животноводства.

Поскольку авария произошла во второй половине весеннего сезона, ее воздействие на сельское хозяйство было серьезным, так как сельскохозяйственные животные находились на выпасе, а незагрязненные запасы кормов, в качестве альтернативы зеленым кормам, практически отсутствовали. Потребление загрязненных продуктов питания было и остается одним из ведущих путей формирования доз облучения населения в пострадавших районах [6].

Установлено, что накопление радионуклида в травостое зависит от его распределения по профилю почвы, ее агрохимических показателей, также от типа луга. На почвах с высоким уровнем увлажнения радионуклиды более доступны растениям, чем при дефиците влаги. Кроме того, в кислой среде ионы радиоцезия находятся в более доступном для растений состоянии, чем при слабокислой, нейтральной и слабощелочной среде.

Преобладание осокового разнотравья на низинном луге также способствует большому накоплению  $^{137}\text{Cs}$  в травостое, по сравнению со злаковым и злаково-бобовым разнотравьем, преобладающими на суходольном и пойменном лугах [7–10].

В связи с изложенным возникла необходимость оценки радиоэкологической ситуации на пойменном луге реки Ипуть. Данная территория находится в окрестностях населенного пункта Дубовый Лог Добрушского района Гомельской области. Населенный пункт расположен на территории зоны с правом отселения.

Для выполнения поставленной цели на данном этапе необходимо было решить несколько задач.

Прежде всего, оценить реальные уровни радиоактивного загрязнения травостоя.

Затем выявить особенности аккумуляции радионуклида в зависимости от биологических особенностей луговых растений.

Необходимым элементом работы является и прогноз радиоэкологической ситуации на пойменном луге.

### Основная часть

Объектом исследований был пойменный луг р. Ипуть в окрестностях нп Дубовый Лог Добрушского района Гомельской области.

Описание растительности и отбор почвенно-растительных проб для определения содержания  $^{137}\text{Cs}$  в вегетационные периоды 2004 г и 2022-2024 гг. проводили по общепринятым методикам.

При определении видового состава растений использовали определитель растений [11,12].

Сопряженные растительные и почвенные пробы отбирали в ходе экспедиционных работ. Для этого на выделенных площадках срезали растения и раскладывали по агроботаническим группам. Выделенные группы растений впоследствии

взвешивали и доводили до воздушно сухого состояния. На этих же площадках с помощью пробоотборника диаметром 83 мм по горизонтам отбирали почву.

Радиологический анализ почвенных проб и растительных образцов выполняли в Институте леса НАН РБ. Измерение активности  $^{137}\text{Cs}$  выполнялось радиометрическим методом с использованием бета-гамма-спектрометра «МКС-АТ1315».

#### Результаты исследований.

Заливной луг расположен вдоль правого берега р. Ипуть между нп Дубовый Лог и бывшим нп Вылево. Длина около 5600 метров. Ширина в наиболее узкой части 330 метров, наиболее широкой части около 1900 метров.

Поперечный профиль центральной поймы достаточно выровненный. Высота профиля варьирует в пределах 122–125 метров.

Надпойменная терраса резко отличается от центральной и притеррасной поймы. Высота надпойменной террасы 155 метров и длина около 3000 метров. Притеррасная пойма имеет высоту 122–125 метров. Перепад высот около 3 метров. Максимальный уклон не превышает 3 %.

Исследования были начаты в июле 2004 г после схода воды. Плотность радиоактивного загрязнения была в пределах  $9 \pm 5 \text{ Ки/км}^2$ . Видовой состав растительности достаточно однообразный и представлен следующими видами: осока острая, подмаренник северный, манник водяной, частуха подорожниковая, калужница болотная, лютик болотный, сусак зонтичный. Иногда встречались на повышенных местах короставник полевой, щетинник сизый, чина луговая, мышиный горошек. Чистовидовых травостоев было немного. Доминирующим видом была осока острая.

Отбор растительных проб производили на участке площадью около 130 гектаров на 12 контурах. Пробная площадка составляла один квадратный метр. Всего было отобрано более шестидесяти растительных проб. Продуктивность зеленой массы составляла от 152 до 380 ц/га. Как уже ранее отмечалось, травостой был представлен сообществами на основе осоки острой с присутствием разнотравья и изредка злаков.

После соответствующей пробоподготовки было выполнено определение содержания радионуклида в травостое. Существующими нормативами было предусмотрено предельное содержание радиоцезия в сене, то есть воздушно-сухом веществе для получения молока цельного 1300 Бк/кг, а для переработки на масло – 1850 Бк/кг.

Содержание радиоцезия в анализируемых пробах растений варьировало от 229 до 6810 Бк/кг (таблица 1).

Таблица 1 – Содержание радиоцезия в травостое агроботанических групп, Бк/кг, 2004 г

| Контур | Агроботанические группы, %                      | Продуктивность зеленой массы, ц/га | Мин  | Макс | Среднее | $\sigma$ |
|--------|-------------------------------------------------|------------------------------------|------|------|---------|----------|
| 1      | O <sub>100</sub>                                | 189 ± 31                           | 1090 | 3610 | 1990    | 1406     |
| 2      | O <sub>88</sub> P <sub>12</sub>                 | 211 ± 28                           | 6190 | 6530 | 6360    | 954      |
| 3      | O <sub>71</sub> P <sub>14</sub> З <sub>14</sub> | 340 ± 57                           | 1350 | 1930 | 1640    | 250      |

Продолжение таблицы 1

|              |                                                                 |           |      |      |      |      |
|--------------|-----------------------------------------------------------------|-----------|------|------|------|------|
| 4            | O <sub>70</sub> P <sub>10</sub> З <sub>20</sub>                 | 212 ± 43  | 988  | 6810 | 2890 | 2265 |
| 5            | O <sub>68</sub> P <sub>19</sub> З <sub>12</sub> Б <sub>1</sub>  | 190 ± 43  | 1600 | 5920 | 2716 | 1814 |
| 6            | O <sub>66</sub> P <sub>28</sub> З <sub>6</sub>                  | 251 ± 31  | 1700 | 5440 | 3460 | 1547 |
| 7            | O <sub>63</sub> P <sub>27</sub> З <sub>10</sub>                 | 193 ± 46  | 385  | 2890 | 1402 | 988  |
| 8            | O <sub>60</sub> P <sub>23</sub> З <sub>17</sub>                 | 269 ± 48  | 595  | 2650 | 1348 | 1132 |
| 9            | O <sub>58</sub> P <sub>11</sub> З <sub>29</sub> Б <sub>2</sub>  | 335 ± 48  | 229  | 2720 | 1502 | 1016 |
| 10           | O <sub>56</sub> P <sub>14</sub> З <sub>28</sub> Б <sub>2</sub>  | 380 ± 180 | 1010 | 2530 | 1744 | 672  |
| 11           | O <sub>45</sub> P <sub>55</sub>                                 | 237 ± 10  | 933  | 2860 | 1897 | 380  |
| 12           | O <sub>25</sub> P <sub>32</sub> З <sub>39</sub> Б <sub>10</sub> | 152 ± 11  | 1630 | 3500 | 2565 | 308  |
| Сред-<br>нее |                                                                 | 244 ± 68  | 229  | 6810 | 2459 | 1397 |

Примечание: агроботанические группы О – Осоковые, Р – Разнотравье, З – Злаковые, Б – Бобовые.

Не выявлена корреляция между агроботаническим составом травостоя контуров, продуктивностью и содержанием радионуклида в травостое. Среднее содержание радионуклида в травостое контуров составило от 1348 до 6360 Бк/кг. Для оценки соотношений между количеством радионуклида в почве и в растениях использовали коэффициент пропорциональности или перехода КП. Среднее значение КП составляло  $7,38 \pm 4,20$  Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>.

Отсюда можно заключить, что лишь часть травостоя контуров пригодно для скормливания с целью получения молока на переработку. Но использовать травостой отдельных контуров для заготовки корма экономически не выгодно.

Выявлены существенные различия по содержанию радионуклида в 2004 г и по агроботаническим группам растений (таблица 2). Более высокая удельная активность радионуклида характерна для осоковых. На нескольких контурах были выделены чистовидовые сообщества осоковых. Варьирование по содержанию радиоцезия составляло от 2230 до 5440 Бк/кг при среднем значении 3482 Бк/кг. Это связано с особенностями гидрологического режима, то есть большим увлажнением участков под осоковыми. Содержание радионуклида в разнотравье было существенно меньше.

Таблица 2 – Удельная активность радионуклида по агроботаническим группам, Бк/кг

| Группа      | Ср              | Мин  | Макс |
|-------------|-----------------|------|------|
| Осоки       | $3482 \pm 1427$ | 2230 | 5440 |
| Разнотравье | $1589 \pm 1053$ | 476  | 3500 |

Высокое содержание радионуклида при относительно небольшой плотности радиоактивного загрязнения почвы может быть связано с типом почвы, продолжительностью затопления и выровненностью рельефа пойменного луга. При затоплении луга происходило сильное движение воды от реки до надпойменной террасы.

Необходимо отметить, что в 2004 г видовой состав характеризуется в основном малоценными в кормовом отношении растениями. Основная часть травостоя не соответствовала существующим на то время нормативам. Среднее содержание радионуклида в травостое составляло  $2459 \pm 1397$  Бк/кг.

На основании полученных результатов было сформулировано предложение о нецелесообразности использования травостоя в ближайшие 10–15 лет.

Как известно, одним из основных показателей качества травяных кормов являются агроботанический состав и содержание радионуклидов. Ранее отмечалось, что в условиях речной долины р. Ипуть в окрестностях нп Дубовый Лог травостой представлен исключительно осоками и разнотравьем. Осоку в молодом возрасте можно использовать в качестве корма. Степень хозяйственного использования зависит от продолжительности затопления. При продолжительном затоплении въезд сельскохозяйственных машин ограничен, осока перерастает и не заготавливается. Ситуация осложняется тем, что мелиоративная система заболочена и плохо регулирует сброс воды в р. Ипуть.

Для оценки плотности радиоактивного загрязнения полигона через 18 лет, то есть в 2022 г, производили отбор почвы по горизонтам 0–10 и 10–20 см.

Почвенный покров представлен низинным торфяником. Результаты представлены в таблице 3. Удельная активность радионуклида составляла от 3,0 до 4,6 кБк/кг в слое 0–10 см и от 0,8 до 3,9 кБк/кг в горизонте 10–20 см. Установлено, что в горизонтах 0–10 см находится от 43 до 85 % радионуклида. В горизонте 10–20 см зафиксировано от 15 до 56 %.

Для оценки плотности радиоактивного загрязнения произвели расчеты на основании удельной активности радионуклида в почве. Плотность сложения составляла  $0,5 \text{ г/см}^3$ .

Таблица 3 – Распределение  $^{137}\text{Cs}$  по горизонтам почвы, 2022 г.

| № п/п | Горизонт, см | Единицы измерения                      | Репер 1   | Репер 2   | Репер 3   | Среднее   |
|-------|--------------|----------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 1     | 0-10         | кБк/кг                                 | 4,62      | 3,02      | 3,28      | 3,64      |
| 2     | 10-20        | кБк/кг                                 | 0,81      | 3,90      | 0,76      | 1,82      |
|       | 0-20         | кБк/м <sup>2</sup> /Ки/км <sup>2</sup> | 271,7/7,3 | 345,7/9,3 | 202,2/5,5 | 273,2/7,4 |

Плотность радиоактивного загрязнения обследованных участков может составить от 5 до 9 Ки/км<sup>2</sup> при средней величине около 7 Ки/км<sup>2</sup>.

На торфянике имеет место более интенсивная миграция радиоцезия по горизонтам по сравнению с минеральными почвами.

Важнейшим параметром, формирующим доступность радиоцезия для растений, является биологическая доступность радионуклида. По нашим данным в водной вытяжке из почвы содержится около 0,5–1,0 % радионуклида, в ацетатно-аммонийной вытяжке около 1,7–1,8 %, в одномолярной и шестимолярной соляной кислоте соответственно 1,6–1,9 и 18,0–21,0 %. Это означает что основная часть радионуклида прочно зафиксирована почвенным поглощающим комплексом и не доступна для растений.

Одной из задач исследований была оценка содержания радиоцезия в травостое.

стое. Важно отметить, что река Ипуть является притоком реки Сож. На реке Сож не было разлива на протяжении 2015-2021 гг. Это безусловно отражалось и на изучаемых объектах. Например, наблюдалось существенное распространение ивы с надпойменной террасы на притеррасную поймы. Это может быть свидетельством изменения гидрологического режима и формирования сукцессий. В результате в отдельных частях крупноосокового типа луга происходило увеличение доли разнотравья.

Содержание радиоцезия в воздушно-сухой массе составляло от 99 до 1375 Бк/кг (таблица 4). Значения КП составляли от 0,36 до 5,03 при среднем значении 1,58 Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>. В 2004 г среднее значение КП составляло 7,38 Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>, то есть уменьшение более чем в 4 раза.

Таблица 4 – Содержание радиоцезия в растительном покрове, 2022 г

| №п/п | Доминирующий вид    | Бк/кг      |
|------|---------------------|------------|
| 1    | Ежеголовник прямой  | 99 ± 87    |
| 2    | Ситняг болотный     | 137 ± 88   |
| 3    | Тростник болотный   | 158 ± 43   |
| 4    | Чистец болотный     | 225 ± 73   |
| 5    | Звездчатка болотная | 261 ± 86   |
| 6    | Сусак зонтичный     | 394 ± 110  |
| 7    | Двукосточник        | 414 ± 105  |
| 8    | Щавель кислый       | 822 ± 129  |
| 9    | Осока острая        | 1375 ± 275 |
|      | Мин                 | 99         |
|      | Сред                | 432        |
|      | Мах                 | 1375       |

Сравнение результатов анализа данных 2022 г с данными 2004 г показали снижение содержания радионуклида в травостое. Выявлено, что при общем снижении содержания радионуклида в травостое, 2459 Бк/кг в 2004 г и 432 Бк/кг в 2022 г, удельная активность радиоцезия в осоке острой продолжает оставаться высокой.

Исследования были продолжены в 2023 г. В ходе НИР было выделено 3 объекта. Удельная активность радиоцезия в торфяно-болотной почве составляла от 3,04 до 5,47 кБк/кг.

Объекты исследований представлены сообществами, содержащими по 2,3 агроботанические группы (таблица 5). На объекте 1 выделены 3 агроботанические группы включающие 7 видов. Объект 2 представлен 2 группами и 4 видами. На 3 объекте выделены 3 группы и 7 видов растений.

Группа осоковых представлена осокой острой и осокой заячьей, разнотравье – сусаком зонтичным, дербенником иволистным, омежником водным, ситником болотным, подмаренником цепким, частухой подорожниковой, василистником желтым. Злаковые виды – это манник болотный, канареечник тростниковидный, бекмания обыкновенная, тростник обыкновенный, полевица многоукосная и лисохвост луговой. Таким образом, осоки представлены 2 видами, разнотравье 8 и злаки 7 видами.

Таблица 5 – Аккумуляция  $^{137}\text{Cs}$  почвенно-растительным покровом пойменного луга на территории урочища Немер Добрушского района, 2023 г

| № объекта | Вид растения                | Бк/кг          |
|-----------|-----------------------------|----------------|
| 1         | Осока острая                | $380 \pm 94$   |
|           | Сусак зонтичный             | $200 \pm 100$  |
|           | Дербенник иволистный        | $302 \pm 76$   |
|           | Омежник водный              | $331 \pm 84$   |
|           | Ситник болотный             | $415 \pm 83$   |
|           | Манник болотный             | $268 \pm 66$   |
|           | Канареечник тростниковидный | $336 \pm 75$   |
|           |                             |                |
| 2         | Частуха подорожниковая      | $852 \pm 120$  |
|           | Подмаренник цепкий          | $893 \pm 54$   |
|           | Бекмания обыкновенная       | $688 \pm 137$  |
|           | Тростник обыкновенный       | $853 \pm 85$   |
|           |                             |                |
| 3         | Осока заячья                | $1387 \pm 111$ |
|           | Осока острая                | $1261 \pm 100$ |
|           | Василистник желтый          | $1430 \pm 143$ |
|           | Дербенник иволистный        | $1483 \pm 250$ |
|           | Манник болотный             | $1048 \pm 94$  |
|           | Полевица многоукосная       | $1383 \pm 248$ |
|           | Лисохвост луговой           | $1839 \pm 257$ |
|           | Среднее                     | 853            |
|           | Мин                         | 200            |
|           | Макс                        | 1839           |
|           | Ст отклонение               | 516            |

Минимальное и максимальные значения количества радионуклида в группе осок было 380–1387 при среднем значении  $1009 \pm 549$  Бк/кг, у злаков 268–1839 при среднем  $916 \pm 563$  Бк/кг и у разнотравья соответственно 200–1483 и 738 Бк/кг.

Среднее значение удельной активности радионуклида составляло 853 Бк/кг. Среднее значение КП составляло  $2,67 \pm 1,62$  Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>. По содержанию радиоцезия выделены 5 видов с превышением норматива по данному параметру. Это полевица многоукосная, лисохвост луговой, василистник желтый, дербенник иволистный и осока заячья. Все эти виды произрастали на 3 объекте.

Удельная активность радиоцезия в почве на изучаемом объекте в 2024 г со-

ставляла  $2,6 \pm 0,5$  Бк/кг. Содержание радионуклида в травостое составляло от 108 до 1463 Бк/кг при среднем значении 659 Бк/кг (таблица 6). Среднее значение КП составило  $2,54 \pm 1,76$  Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>.

*Таблица 6 – Аккумуляция <sup>137</sup>Cs почвенно-растительным покровом пойменного луга на территории урочища Немер Добрушского района, 2024 г*

| № п/п | Вид растения           | Бк/кг          |
|-------|------------------------|----------------|
| 1     | Аир обыкновенный       | $108 \pm 31$   |
| 2     | Частуха подорожниковая | $494 \pm 102$  |
| 3     | Ситник развесистый     | $459 \pm 98$   |
| 4     | Тростник обыкновенный  | $614 \pm 127$  |
| 5     | Черда трехраздельная   | $817 \pm 163$  |
| 6     | Осока острая           | $1464 \pm 293$ |
|       | Среднее                | 659            |

Общий анализ полученных данных свидетельствует о существенном снижении удельной активности радиоцезия в группах осоковых и разнотравье, то есть основных группах травостоя пойменного луга (таблица 7). Злаки занимали относительно небольшое место в структуре травостоя.

*Таблица 7 – Динамика удельной активности <sup>137</sup>Cs в травостое, Бк/кг*

| Агроботани-<br>ческая группа | 2004 г          | 2022 г          | 2023 г          | 2024 г          | R2     | 2034 г |
|------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------|--------|
| Осоки                        | $3482 \pm 1427$ | $1375 \pm 275$  | $1009 \pm 549$  | $1464 \pm 293$  | 0,639  | 600    |
| Разнотравье                  | $1589 \pm 1053$ | $394 \pm 311$   | $738 \pm 510$   | $470 \pm 290$   | 0,5977 | 200    |
| Злаки                        |                 | $286 \pm 181$   | $916 \pm 563$   | $614 \pm 127$   | 0,1806 |        |
| Среднее                      | 2459            | 432             | 853             | 659             |        |        |
| КП                           | $7,38 \pm 4,20$ | $1,58 \pm 1,52$ | $2,67 \pm 1,62$ | $2,54 \pm 1,76$ |        |        |

Как уже ранее отмечалось, для общей оценки динамики содержания радионуклида в системе почва-растение использовали коэффициент пропорциональности или перехода КП. Значения КП варьировали от 7,38 в 2004 г до 2,54 Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup> в 2024 г. Уменьшение параметра в среднем составило от 2,8 до 4,7 раз. Это свидетельствует об общем снижении аккумуляции радионуклида в травостое пойменного луга.

### Заключение

За годы проведения исследований плотность радиоактивного загрязнения исследовательского полигона <sup>137</sup>Cs существенно снизилась, что связано как с процес-

сами естественного распада радионуклида, так и горизонтальной и вертикальной миграцией. Так, плотность радиоактивного загрязнения исследуемой территории в 2004 г составляла  $9 \pm 5$  Ки/км<sup>2</sup>. Через 18 лет данный параметр составил около 7 Ки/км<sup>2</sup>. В горизонтах 0–10 см продолжает находиться от 43 до 85 % радионуклида.

Установлено, что основная часть радионуклида прочно зафиксирована почвенным поглощающим комплексом и не доступна для растений. По нашим данным в водной вытяжке содержится около 0,5–1,0 % радионуклида, в ацетатно-аммонийной вытяжке около 1,7–1,8 %, в одномолярной и шестимолярной соляной кислоте соответственно 1,6–1,9 и 18,0–21,0 %.

Растительный покров представлен осоково-разнотравными сообществами. На изучаемых объектах осоки составляли от 100 до 25 % травостоя, разнотравье от 55 до 10 %, злаки от 39 до 6 %, бобовые от 10 до 1 %.

Продуктивность зеленой массы травостоя варьировала от 152 до 380 ц/га при среднем значении  $244 \pm 68$  ц/га.

В 2004 г содержание радиоцезия в травостое варьировало от 229 до 6810 Бк/кг. Не выявлена корреляция между агроботаническим составом травостоя контуров, продуктивностью и содержанием радионуклида в травостое. Среднее содержание радионуклида в травостое контуров составило от 1348 до 6360 Бк/кг. Среднее значение КП составляло  $7,38 \pm 4,20$  Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>.

Более высокая удельная активность радионуклида характерна для осоковых. На нескольких контурах были выделены чистовидовые сообщества осоковых. Варьирование по содержанию радиоцезия составляло от 2230 до 5440 Бк/кг при среднем значении 3482 Бк/кг. Это связано с особенностями гидрологического режима, то есть большим увлажнением участков под осоковыми. Содержание радионуклида в разнотравье было существенно меньше. В 2022 г содержание радиоцезия в воздушно-сухой массе составляло от 99 до 1375 Бк/кг.

Значения КП составляли от 0,36 до 5,03 при среднем значении 1,58 Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>. В 2004 г среднее значение КП составляло 7,38 Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>, то есть уменьшение более чем в 4 раза.

Выявлено, что при общем снижении содержания радионуклида в травостое, 2459 Бк/кг в 2004 г и 432 Бк/кг в 2022 г, удельная активность радиоцезия в осоке острой продолжает оставаться высокой.

В 2023 г среднее значение удельной активности радионуклида в травостое составляло 853 Бк/кг. Среднее значение КП было в пределах  $2,67 \pm 1,62$  Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>. По содержанию радиоцезия выделены 5 видов с превышением норматива по данному параметру. Это полевица многоукосная, лисохвост луговой, василистник желтый, дербенник иволистный и осока заячья. Все эти виды произрастали на одном объекте.

В 2024 г содержание радионуклида в травостое составляло от 108 до 1463 Бк/кг при среднем значении 659 Бк/кг. Среднее значение КП составило  $2,54 \pm 1,76$  Бк/кг:кБк/м<sup>2</sup>.

На основании полученных данных прогнозные значения удельной активности радионуклида в травостое на 2034 г составят для осоковых около 600 Бк/кг, разнотравья около 200 Бк/кг. Данный параметр для злаковых будет зависеть от смены гидрологического режима и сукцессионных процессов. Таким образом, весь травостой будет пригоден для хозяйственного использования.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Анисимов, В. С.** Вертикальная миграция  $^{137}\text{Cs}$  чернобыльских выпадений в различных ландшафтах / В. С. Анисимов, В. К. Кузнецов, А. И. Санжаров // Радиационная биология. Радиоэкология. – 2021. – Т. 61. – № 3. – С. 286–300.
2. Вертикальное распределение Cs-137 в почвах агрокатен Брянской области / В. Г. Линник, А. П. Борисов, О. М. Иваницкий [и др.] // Геохимия. – 2020. – Т. 65. – № 12. – С. 1198–1211.
3. **Манзон, Д. А.** Динамика миграции цезия-137 после чернобыльской аварии на территории русской равнины : автореф. дисс. ... канд. географич. наук : 25.00.36 / Дмитрий Андреевич Манзон. – М., 2010. – 26 с.
4. **Черныш, А. Ф.** Миграция и аккумуляция радионуклидов в эродированных агроландшафтах Белорусского Полесья / А. Ф. Черныш, В. С. Аношко // Вестник БГУ. Сер. 2. – 2006. – № 1. – С. 98–102.
5. **Веренич, А. Ф.** Влияние доз минеральных удобрений и водного режима пойменной торфяной почвы на накопление радионуклидов многолетними травами / А. Ф. Веренич, Н. А. Бобровский, А. А. Зайцев [и др.] // Мелиорация переувлажненных земель. – 2007. – №1(57). – С. 145–151.
6. **Фесенко, С. В.** Авария на Чернобыльской АЭС: защитные и реабилитационные мероприятия в сельском хозяйстве / С. В. Фесенко, Н. И. Санжарова, Н. Н. Исамов [и др.] // Радиационная биология. Радиоэкология. – 2021. – Т. 61. – № 3. – С. 261–276.
7. **Романенко, А. А.** Миграция цезия-137 в системе почва - растение на различных типах естественных лугов / А. А. Романенко, Г. В. Левкина // Аграрная наука. – 2015. – №7. – С. 7–9.
8. **Сапегин, Л. М.** Хозяйственная типология пойменных лугов Белорусского Полесья / Л. М. Сапегин, Н. М. Дайнеко // Изучение и сохранение пойменных лугов : материалы Международного совещания, Калуга, 26-28 июня 2013 г. – Калуга : ООО «Ноосфера», 2013. – С. 53–58.
9. **Дайнеко, Н. М.** Состав и структура пойменных лугов бассейна р. Сож : моногр. / Н. М. Дайнеко, С. Ф. Тимофеев. – Чернигов : Десна Полиграф, 2020. – 208 с.
10. **Тимофеева, Т. А.** Латеральные геохимические барьеры трансупераквальных ландшафтов (на примере поймы р. Сож) / Т. А. Тимофеева // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2017. – № 3 (102). – С. 66–71.
11. **Сауткина, Т. А.** Определитель высших растений Беларуси / Т. А. Сауткина [и др.] ; БГУ ; под ред. В. И. Парфенова. – Мн. : Дизайн-ПРО, 1999. – 471 с.
12. **Гигевич, Г. С.** Высшие водные растения Беларуси: эколого-биологическая характеристика, использование и охрана / Г. С. Гигевич, Б. П. Власов, Г. В. Вынаев. – Минск : БГУ, 2001. – 230 с.

Поступила в редакцию 22.01.2025 г.

Контакты: timofeev@gsu.by, sertimo@mail.ru (Тимофеев Сергей Федорович), dajneko@gsu.by (Дайнеко Николай Михайлович), karpenkonikolaj23@gmail.com (Карпенко Николай Игоревич)

**Timofeev S. F., Daineko N. M., Karpenko N. I. ASSESSMENT OF  $^{137}\text{CS}$  MIGRATION PARAMETERS IN THE SOIL-PLANT SYSTEM UNDER THE CONDITIONS OF A FLOODLAND MEADOW OF THE IPUT RIVER**

*In the floodplain meadow of the Iput River, the migration of  $^{137}\text{Cs}$  in the soil-plant system has been studied. It has been established that in soil horizons of 0-10 cm there is from 43 to 85 % of the total amount of radiocesium. The aqueous extract contains*

*about 0.5-1.01 % of the radionuclide, the ammonium acetate extract contains about 1.7-1.8 %, and the one-molar and six-molar hydrochloric acid contains 1.6-1.9 and 18-21 %, respectively. The main part of the radionuclide is firmly fixed by the soil absorption complex and is not accessible to plants. The vegetation cover is represented by sedge-forb communities. The highest specific activity of the radionuclide has been detected for the sedge group. For the period 2004-2024, a decrease in the proportionality coefficient has been recorded from 7.38 to 2.54 Bq/kg: kBq/m<sup>2</sup>.*

**Keywords:** floodplain meadow, migration of <sup>137</sup>Cs in the soil-plant link, agrobotanical groups of plants, radioecological situation.

УДК 582.29(476)

## ОЦЕНКА ПЛОТНОСТИ ПОПУЛЯЦИИ И ГОДОВОГО ПРИРОСТА ЛИШАЙНИКА *PHAEORHYSZIA ORBICULARIS* НА ТЕРРИТОРИИ ГОРОДА ГОМЕЛЯ

**А. С. Маркевич**

студентка 4 курса, кафедра биологии  
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

**Я. К. Деменкова**

студентка 4 курса, кафедра биологии  
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

**А. С. Кабаева**

студентка 4 курса, кафедра биологии  
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

**А. Г. Цуриков**

доктор биологических наук, доцент, профессор кафедры биологии  
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины  
профессор кафедры общей и биоорганической химии  
Гомельский государственный медицинский университет

*Целью исследования является оценка плотности популяции и годового прироста лишайника *Phaeorhyszia orbicularis* на липе сердцевидной в г. Гомеле. Методология исследования включала измерение линейных размеров 202 слоевищ на 6 деревьях с последующей статистической обработкой результатов. Плотность популяции лишайника *Phaeorhyszia orbicularis* на липе сердцевидной варьирует от 138 до 2152 слоевищ/м<sup>2</sup>. Средний прирост слоевищ лишайника в изучаемых нами условиях за 1 год составил по высоте таллома  $0,100 \pm 0,015$  см и по ширине таллома  $0,090 \pm 0,014$  см. На первых этапах онтогенеза интенсивность прироста слоевищ лишайника *Phaeorhyszia orbicularis* относительно высока, с увеличением возраста талломов интенсивность прироста слоевищ снижается.*

**Ключевые слова:** экология, биоиндикаторы, лишеномониторинг, лишеноиндикация, онтогенез, динамика роста.

### Введение

Лишенометрия – биоиндикационный метод, позволяющий определить возраст субстратов на основании размеров слоевищ произрастающих на них лишайников. Метод лишенометрического датирования основан на следующих предположениях: преимущественно обнаженные поверхности изначально не заселены лишайниками; инвазия (колонизация, сукцессия) первично обнаженного субстрата начинается в момент появления этого субстрата; с момента инвазии рост лишайников подчиняется определенным закономерностям, позволяющим прогнозировать ход роста в условиях однородного макроклимата, рост является функцией времени, прошедшего с момента заселения [1].

© Маркевич А. С., Деменкова Я. К., Кабаева А. С., Цуриков А. Г. 2025

Известно, что лишайники накапливают тяжелые металлы и другие химические соединения техногенного характера, содержащиеся в атмосферных осадках, в 2–5 раз активнее, чем высшие растения, то есть являются гипераккумуляторами [2]. Благодаря этим особенностям они часто используются в изучении степени загрязнения антропогенного влияния на окружающую среду – лишеноиндикации и лишеномониторинге. Однако лишайники характеризуются крайне медленной скоростью роста. В литературе приводятся разрозненные данные о скорости прироста отдельных видов, часто только пороговые значения для экстремальных условий произрастаний (от 0,01 мм в год для накипных до 100 мм в год для кустистых видов)[3].

К настоящему времени методики оценки возраста слоевищ эпифитных листоватых лишайников, используемых в экологическом мониторинге, не разработаны[1], и остается острым вопрос, за какой период времени слоевища накопили выявленные количества загрязнителей. В связи с этим оценка популяционной структуры, а также скорости и динамики прироста распространенных видов эпифитных макролишайников в городской среде представляется актуальной задачей.

#### Материал и методика исследований

Исследования проводили на территории города Гомеля по улице Песина, 80 возле корпуса № 3 учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» 21.08.2022 и 15.07.2023 (рисунок 1). В качестве форофита была выбрана липа сердцевидная (*Tilia cordata* Mill.). Всего нами было заложено 6 учетных площадок на 6 деревьях. Учетные площадки закладывали на высоте наибольшей плотности слоевищ, т. е. между 1 и 2 метрами. Окружность ствола обследованных деревьев варьировала от 22 до 89 см. В зависимости от плотности популяции лишайника размер учетной площадки варьировал в пределах 120–725 см<sup>2</sup>. Для измерения линейных размеров использовали разметочный циркуль, который прикладывали к слоевищу по высоте и ширине и переносили на миллиметровую линейку и округляли до ближайших 0,1 см по правилам математического округления. Плотность популяции *Phaeophyscia orbicularis* (Neck.) Moberg оценивали как число слоевищ на обследуемой части дерева [4]. Общий объем материала составил 202 слоевища.

Для оценки размерной структуры популяции *Phaeophyscia orbicularis* применяли методы описательной статистики, однофакторного дисперсионного анализа, а также корреляционного анализа.

Погодные условия в день измерений были следующими: температура +25° С, малооблачно, ветер 6 м/с, давление 758 мм рт. ст., влажность воздуха 43%. Погодные условия через год были следующими: температура + 24° С, слегка облачно, ветер 6 м/с, давление 762 мм рт. ст., влажность воздуха 43%.

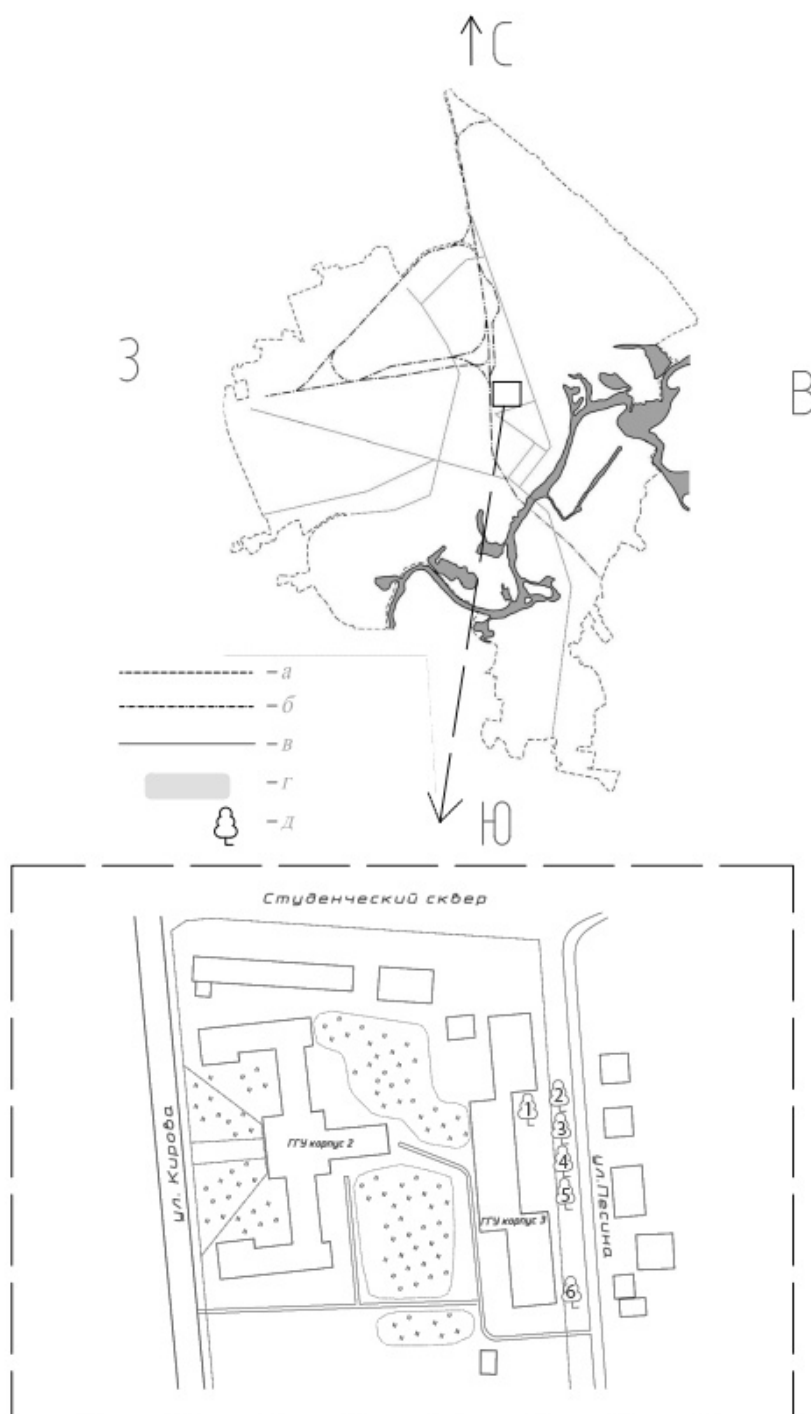


Рисунок 1 – Карта-схема исследуемого участка (а – границы города Гомеля, б – железнодорожные пути, в – основные автотранспортные магистрали, г – река Сож, д – заложенные пробные участки)

### Результаты исследований и их обсуждение

Плотность популяции лишайника *Phaeophyscia orbicularis* на липе сердцевидной варьирует от 138 до 2152 слоевищ/м<sup>2</sup> (рисунок 2). При этом плотность популяции лишайника увеличивается при приближении к студенческому скверу ( $F=8,82$ ;  $p=0,01$ ).

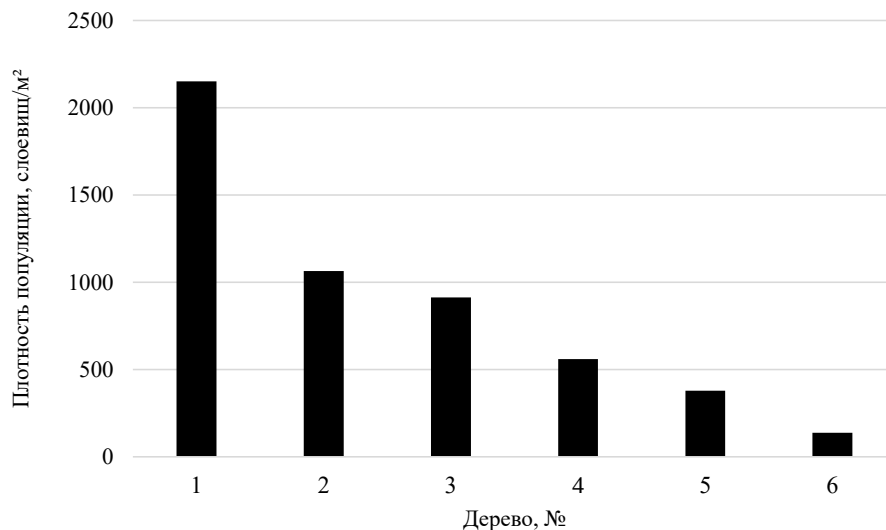


Рисунок 2– Плотность популяции *Phaeophyscia orbicularis*

Размерная структура популяции лишайника *Phaeophyscia orbicularis* показана на рисунке 3.

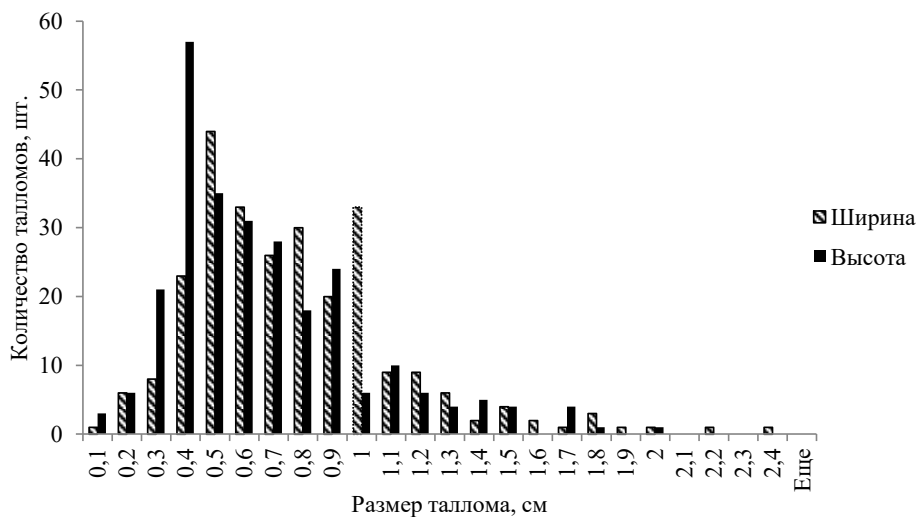


Рисунок 3– Размерная структура популяции *Phaeophyscia orbicularis*

Размерная структура популяции *Phaeophyscia orbicularis* статистически отличается у разных деревьев (таблицы 2, 3).

Таблица 2 – Корреляция размерной структуры (ширина таллома) популяции *Phaeophyscia orbicularis* исследованных деревьев (серым цветом выделены значения с  $r \geq 0,70$ )

| Дерево, номер | Дерево, номер |      |      |      |      |      |      |
|---------------|---------------|------|------|------|------|------|------|
|               |               | 1    | 6    | 3    | 4    | 2    | 5    |
|               | 1             | -    | 0,88 | 0,71 | 0,84 | 0,59 | 0,53 |
|               | 6             | 0,88 | -    | 0,77 | 0,81 | 0,58 | 0,64 |
|               | 3             | 0,71 | 0,77 | -    | 0,61 | 0,64 | 0,51 |
|               | 4             | 0,84 | 0,81 | 0,61 | -    | 0,74 | 0,55 |
|               | 2             | 0,59 | 0,58 | 0,64 | 0,74 | -    | 0,51 |
|               | 5             | 0,53 | 0,64 | 0,51 | 0,55 | 0,51 | -    |

Таблица 3 – Корреляция размерной структуры (высота таллома) популяции *Phaeophyscia orbicularis* исследованных деревьев (серым цветом выделены значения с  $r \geq 0,70$ )

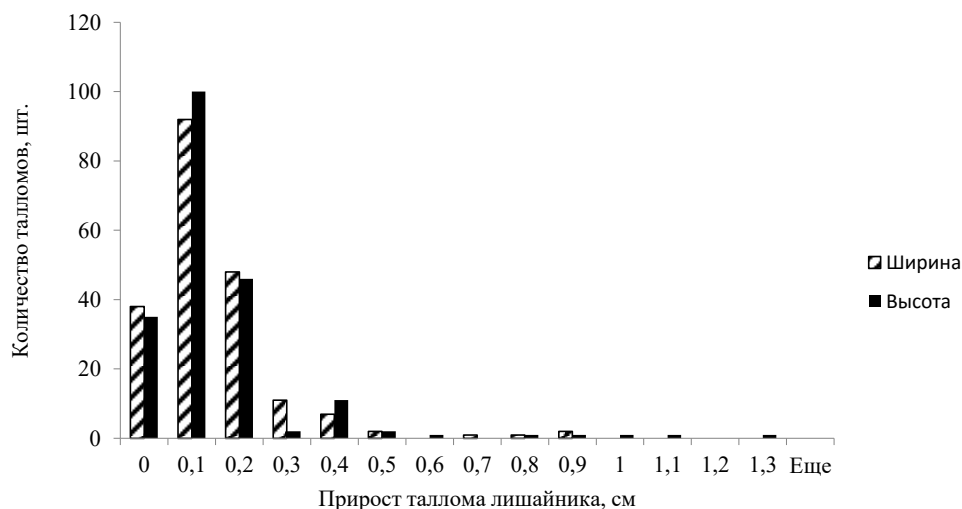
| Дерево, номер | Дерево, номер |      |      |      |      |      |      |
|---------------|---------------|------|------|------|------|------|------|
|               |               | 1    | 4    | 3    | 5    | 6    | 2    |
|               | 1             | -    | 0,81 | 0,80 | 0,42 | 0,46 | 0,32 |
|               | 4             | 0,81 | -    | 0,64 | 0,33 | 0,59 | 0,22 |
|               | 3             | 0,80 | 0,64 | -    | 0,47 | 0,62 | 0,47 |
|               | 5             | 0,42 | 0,33 | 0,47 | -    | 0,29 | 0,54 |
|               | 6             | 0,46 | 0,59 | 0,62 | 0,29 | -    | 0,64 |
|               | 2             | 0,32 | 0,22 | 0,47 | 0,54 | 0,64 | -    |

При сравнении ширины талломов *Phaeophyscia orbicularis* на различных стволах деревьев методом корреляционного анализа была выявлена группа из 4 форофитов, у которых наиболее часто были отмечены талломы шириной 0,5 см. На оставшихся деревьях чаще встречались более крупные слоевища шириной 0,7–1,0 см (таблица 2).

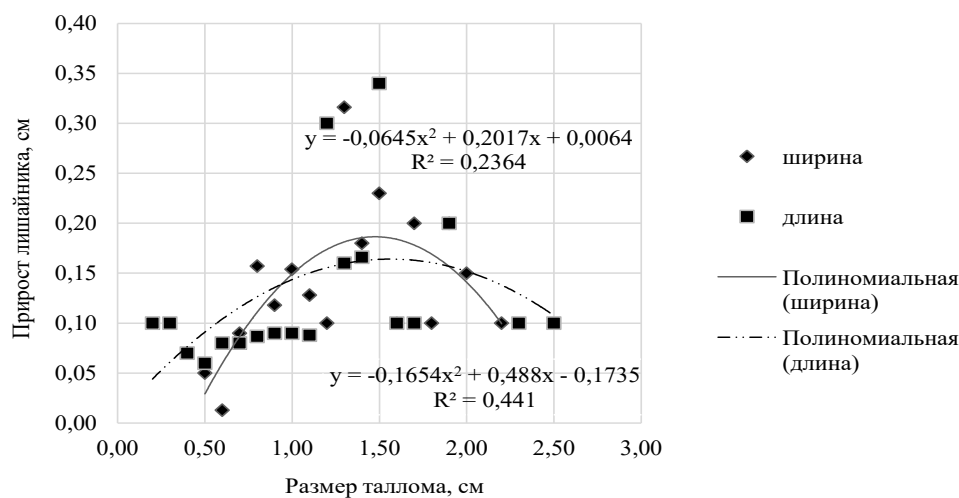
При сравнении высоты талломов лишайников *Phaeophyscia orbicularis* на различных стволах деревьев также была выявлена группа форофитов, на которых наиболее часто были выявлены талломынебольшой высоты(0,4–0,5см) (таблица 3). На остальных деревьях наиболее часто были отмечены талломы *Phaeophyscia orbicularis* высотой 0,6–1,0 см.

В целом можно отметить, что деревья, сформировавшие схожие группы по ширине и высоте талломов лишайников, совпадают. Таким образом, среди исследованных гомогенных посадок липы сердцевидной выявлены форофиты, на которых преобладают лишайники с меньшими (0,5 × 0,4–0,5 см) и более крупными (0,7–1,0 × 0,6–1,0 см) талломами лишайников *Phaeophyscia orbicularis*. Различия размеров слоевищ лишайников на разных деревьях в пределах одного местообитания могут быть обусловлены микроклиматическими условиями, а также возрастом дерева и структурой коры, определяющими разное время заселения дерева слоевищами [5].

Для изучения динамики прироста слоевищ лишайника *Phaeophyscia orbicularis* нами были сопоставлены данные линейных размеров слоевищ за 2022 и 2023 гг. Средний прирост слоевищ лишайника в изучаемых нами условиях за 1 год составил по высоте 0,100±0,015 см и по ширине 0,090±0,014 см. Наибольшее число талломов лишайников за 1 год приросло на 0,1–0,2 см. (рисунок 4).

Рисунок 4 – Годовой прирост лишайника *Phaeophyscia orbicularis*

С учетом полученных данных были построены кривые роста талломов *Phaeophyscia orbicularis* (рисунок 5).

Рисунок 5 – Кривая роста талломов *Phaeophyscia orbicularis* (высота и ширина, см)

Полученные данные свидетельствуют о нелинейной динамике прироста слоевищ *Phaeophyscia orbicularis*. На ранних стадиях онтогенеза интенсивность прироста слоевищ лишайника увеличивается, а с увеличением возраста талломов интенсивность прироста слоевищ снижается.

Полученные результаты могут быть использованы для разработки методики определения возраста эпифитных лишайников.

### Заклучение

По результатам изучения статистических параметров *Phaeophyscia orbicularis* на липе сердцевидной в г. Гомеле выявлено, что плотность популяции лишайника на разных деревьях существенно отличалась и составила от 138 до 2152 слоевищ/м<sup>2</sup> при среднем значении  $867,9 \pm 291,8$  слоевищ/м<sup>2</sup>. Среди исследованных посадок липы выявлены форофиты, на которых преобладают лишайники с меньшими ( $0,5 \times 0,4$ – $0,5$  см) и более крупными ( $0,7$ – $1,0 \times 0,6$ – $1,0$  см) талломами *Phaeophyscia orbicularis*. Средний прирост слоевищ лишайника *Phaeophyscia orbicularis* в изучаемых нами условиях за 1 год составил по высоте 0,10 см и по ширине 0,09 см. Данные результаты необходимо учитывать при разработке методики определения возраста популяции лишайников для проведения экологического мониторинга окружающей среды.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Martin J.** Epilithic lichens community structure and applications in lichenometry / J. Martin. – Tallin : Euroacademy, 2010. – 137 с.
2. **Шербакова, А. И.** Биологически активные вещества лишайников / А. И. Шербакова, А. В. Коптина, А. В. Канарский // Лесной журнал. – 2013. – № 3. – С. 7–16.
3. **Харитонов, Н. П.** Лишайники и их изучение / Н. П. Харитонов // Исследователь. – 2009. – № 34. – С. 182–198.
4. **Суетина, Ю. Г.** Структура популяции лишайника *Hypogymnia physodes* (L.) Nyl. на разных форофитах / Ю. Г. Суетина // Известия Самарского научного центра РАН. – 2016. – Т. 18, № 1. – С. 217–220.
5. **Суетина, Ю. Г.** Онтогенез и структура популяции *Xanthoria parietina* (L.) Th. Fr. в различных экологических условиях / Ю. Г. Суетина // Экология. – 2001. – № 3. – С. 203–208.

Поступила в редакцию 02.12.2024 г.

Контакты: angelymarkevich@yandex.by (Маркевич Ангелина Сергеевна, Демченкова Яна Константиновна, Кабаева Ангелина Сергеевна, Цуриков Андрей Геннадьевич)

### **Markevich A. S., Dzemiankova Ya. K., Kabayeva A. S., Tsurykau A. G.** ESTIMATION OF POPULATION DENSITY AND ANNUAL GROWTH OF LICHEN *PHAEOPHYSCIA ORBICULARIS* IN THE TERRITORY OF THE CITY OF GOMEL

*The aim of the study is to assess the population density and annual growth of the lichen Phaeophyscia orbicularis on linden trees in Gomel. The research methodology includes measuring the linear dimensions of 202 thalli on 6 trees, followed by statistical analysis. The population density of Phaeophyscia orbicularis on linden varies from 138 to 2152 thalli/m<sup>2</sup>. The average annual growth of lichen thalli is  $0.100 \pm 0.015$  cm in height of the thallus and  $0.090 \pm 0.014$  cm in width of the thallus. At the early stages of ontogenesis, the growth rate of the lichen thalli of Phaeophyscia orbicularis is higher, later the growth rate decreases.*

**Keywords:** ecology, bioindicators, lichen monitoring, lichen indication, ontogenesis, growth dynamics.

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў  
на англійскую мову  
*Я. В. Рубанавы*

Тэхнічны рэдактар *А. Р. Роскач*  
Камп'ютарны набор і вёрстка *В. Г. Каленціонава*  
Карэктар *І. Г. Каржова*

Падпісана да друку 27.08.2025 г.  
Фармат 70х108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Гарнітура Times New Roman.  
Ум.-друк. арк. 7,6 . Ул.-выд. арк. 8,8. Тыраж 25 экз. Заказ № 2902.

Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт  
імя А. А. Куляшова”, 212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1.  
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,  
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства  
“Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля”  
ЛП № 02330/23 ад 30.12.2013 г.  
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў