ISSN 2409-3777

В Е С Н І К

Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

1 (65)
2025

Галоўная рэдакцыйная калегія:
д-р гіст. навук прафесар Д. С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р экан. навук прафесар Н. У. Макоўская (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я. Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. В. Марчанка (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
канд. гіст. навук А. І. Галавач (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар В. А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В. І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В. М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар М. М. Дабравольскі (Тула)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А. С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. М. Сідарэнка (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А. В. Цімошчанка (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н. П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А. Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С. У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М. В. Акуліч (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт М. М. Дайнэка (Гомель)
канд. біял. навук дацэнт І. А. Жарына (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А. В. Марачкаў (Магілёў)
д-р мед. навук Н. І. Сімчанка (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар Г. М. Раганаў (Магілёў)

Навукова-метадычны часопіс "Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова" ўключаны ў РІНЦ (Расійскі індэкс навуковага цытавання), ліцэнзійны дагавор № 811-12/2014

АДРАС РЭДАКЦЫІ:
212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
vesnik_mdu@mail.ru

© МДУ імя А. А. Куляшова, 2025

MOGILEV STATE A. KULESHOV UNIVERSITY BULLETIN

THEORETICAL-SCIENTIFIC JOURNAL

Founded in December 1998

Series B. NATURAL SCIENCES
(Mathematics, Physics, Biology)

Published twice per year

1 (65)
2025

Editorial Board:
Lavrinovich D. S., Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor,
Makovskaya N. V., Deputy Chief Editor, Doctor of Economic Sciences, Professor
Riyer Y. G., Deputy Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor
Marchenko I. V., Chairman of the Editorial Committee (Series B),
Ph.D., Associate Professor
Golovach E. I., Executive Secretary of the Editorial Board, Ph.D.

Mathematics, Physics:
Yerovenko V. A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Bernik V. I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Laptinsky V. N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of the Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus (Mogilev)
Dobrovolsky N. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Tula)
Sotsky A. B., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Galmak A. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Turtsevich A. S., Doctor of Technical Sciences (Minsk)
Sidorenko I. N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Timoschenko E. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)

Biology:
Maksimova N. P., Doctor of Biological Sciences, Professor (Minsk)
Naumov A. D., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Minsk)
Lazarevich S. V., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Gorky)
Akulich N. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Daineko N. M., Ph.D., Associate Professor (Gomel)
Zharina I. A., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Marochkov A. V., Doctor of Medical Sciences, Professor (Mogilev)
Simchenko N. I., Doctor of Medical Sciences (Mogilev)
Roganov G. N., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)

Theoretical-scientific journal
"Mogilev State A. Kuleshov University Bulletin"
is included in the bibliographic database
"Russian Science Citation Index",
License agreement № 811-12/2014

The editorial board address:
212022, Mogilev, Kosmonavtov Str., 1,
vesnik_mdu@mail.ru

© MSU named after A.A. Kuleshov, 2025

З М Е С Т

ЛОМОВЦЕВ Ф. Е. Формулы Римана первой смешанной задачи для общего телеграфного управления с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. II часть 7

ШИЛОВ А. В., СОТСКИЙ А. Б., ПОНКРАТОВ Д. В.
Терагерцовые сенсоры на основе прямоугольных металлических волноводов с диэлектрическим гофром 20

ЛЫСОВА В. А., КЛЕБАНОВА Н. А., КЛЕБАНОВ А. В., ДРОБЕНКОВА А. А.
Количественное определение кофеина по тушению флуоресценции аспирина..... 33

КОНДРАТЕНКОВА Е. А., СОКОЛОВСКАЯ Л. Н. Учет психофизиологических показателей младших школьников для отбора в секцию гребли 44

ПОВОРОВА О. В., ТИТОВА Н. Д., ЧЕГЕРОВА Т. И., ПОЗДНЯКОВА А. С.
Биомаркеры респираторных заболеваний как предикторы развития иммунопатологий органов дыхания детей 51

СТРИГЕЛЬСКАЯ Н. П., БУЧЕНКОВ И. Э., ЧЕРНЕЦКАЯ А. Г.
Влияние урбанизированной среды на фенологические фазы и жизненное состояние некоторых древесных растений г. Минска 58

CONTENTS

LOMOVTSEV F. E. Riemann formulas for the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients in the first quadrant of the plane. II part ... 7

SHILOV A. V., SOTSKY A. B., PONKRATOV D. V. Terahertz sensors based on rectangular metal waveguides with dielectric corrugated frame 20

LYSOVA V. A., KLEBANOVA N. A., KLEBANOV A. V., DROBENKOVA A. A. Quantitative determination of caffeine by quenching of aspirin fluorescence..... 33

KONDRATENKOVA E. A., SOKOLOVSKAYA L. N. Statistical records of psychophysiological indicators of junior schoolchildren to be selected for a rowing course 44

POVOROVA O. V., TITOVA N. D., CHEGEROVA T. I., POZDNYAKOVA A. S. Biomarkers of respiratory diseases as predictors of the development of respiratory immunopathologies in children..... 51

STRIGELSKAYA N. P., BUCHENKOV I. E., CHERNETSKAYA A. G. The impact of an urbanized environment on phenological phases and vital condition some woody plants in minsk..... 58

УДК 517.956.32

ФОРМУЛЫ РИМАНА ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ. II ЧАСТЬ[1]

Ф. Е. Ломовцев
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета
Белорусский государственный университет

В предыдущей части этой статьи методом Римана и новым методом компенсации граничного режима правой частью уравнения были получены формулы Римана единственного и устойчивого классического решения и достаточные условия корректности первой смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами. В настоящей части статьи доказана необходимость найденных требований гладкости и трех условий согласования правой части уравнения, граничного и начальных данных. Подтверждены полученные формулы Римана и критерий корректности их совпадением с известными формулами решения и критерием корректности для модельного телеграфного уравнения.

Ключевые слова: первая смешанная задача, телеграфное уравнение, глобальная теорема корректности, критерий корректности, требование гладкости, условие согласования.

Введение

В предыдущей части настоящей статьи впервые найдены достаточные условия корректности по Адамару (существования, единственности и устойчивости) первой смешанной задачи для линейного неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости для классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений (теорема 1) [1]. В настоящей статье доказана необходимость найденных ранее условий корректности этой смешанной задачи. Вывод критерия корректности на правую часть телеграфного уравнения с переменными коэффициентами использует критерий корректности из [2]. С помощью вычисленной функции Римана доказано (теорема 2), что в случае модельного телеграфного уравнения эти обобщенные формулы типа Римана и критерий корректности первой смешанной задачи из теоремы 1 совпадают с уже известными результатами из статьи [3]. В ней ранее автором настоящей работы были получены явные формулы классического (дважды непрерывно дифференцируемого) решения, часть критерия корректности и доказана теорема существования единственного и устойчивого классического решения первой смешанной задачи для неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. Результаты из [3] и настоящей работы нами распространены "методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны" из [4] на первую смешанную задачу для модельного и общего телеграфных уравнений с переменными коэффициентами в полуполосе плоскости в работах [5, 6]. Выведены обобщенные формулы типа Римана ее единственного и

[1] Работа поддержана БРФФИ РБ: проект № Ф22КИ-001 от 05.11.2021г.

© Ломовцев Ф. Е., 2025

устойчивого классического решения и установлен критерий (необходимые и достаточные условия) ее корректности во множестве классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений Этот критерий корректности состоит из требований гладкости на правую часть уравнения, граничное и начальные данные и трех условий согласования граничного режима с начальными условиями и телеграфным уравнением.

В работе автора [3] обобщались результаты кандидатской диссертации [7], в которой первая смешанная задача для однородного уравнения в полуполосе плоскости, периодическими продолжениями исходных данных задачи и коэффициентов уравнения при соответствующих предположениях на них заменяется задачей Коши для него в верхней полуплоскости. Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для более общего $(a_1 \neq a_2)$ волнового уравнения на отрезке, но с постоянными коэффициентами имеется в статье [8]. В этой статье введено понятие глобальных теорем корректности линейных краевых задач и с помощью леммы Цорна доказана теорема 1 о существовании их глобальных теорем корректности. Глобальными теоремами называются теоремы корректности краевых задач с критериями (необходимыми и достаточными условиями) их корректности по Адамару. Эта теорема 1 утверждает: каждая корректно поставленная линейная краевая задача для уравнения в частных производных имеет глобальную теорему корректной разрешимости по Адамару в некоторой паре локально выпуклых топологических векторных пространств.

Результаты настоящей работы обобщают работы [9–13] с первой смешанной задачей для простейшего $(a = const > 0,\ b = c = 0,\ q = q(x,t))$ телеграфного уравнения (1). В диссертации [9] установлены необходимые и достаточные условия на начальные данные и только достаточные условия на правую часть уравнения для классического решения первой смешанной задачи. Согласно работам [8, 10] необходимые условия $f(0,t) = f(\pi,t) = 0,\ \ t \in [0,T],$ на правую часть $f(x,t) \in C(\overline{Q})$ уравнения колебаний струны из [9] являются лишь одними из достаточных (необязательных) условий корректности первой смешанной задачи. Здесь одними из необходимых (обязательных) условий служат условия согласования $f(0,0) = f(\pi,0) = 0$ правой части f с нулевыми начальными и граничными данными. В статьях [11, 12] для волнового уравнения найдена формула и необходимые и достаточные условия на начальные данные для обобщенного (почти классического) решения смешанной задачи. Это обобщенное (один раз непрерывно дифференцируемое) решение удовлетворяет волновому уравнению почти всюду по x и t. Секвенциальным и аксиоматическим методами А. П. Хромова в работе [13] И. С. Ломов доказал существование такого обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения с комплексным суммируемым потенциалом $q(x,t)$ при нелокальном граничном условии со значением решения во внутренней точке отрезка.

Основная часть

Найдены формулы Римана и достаточные условия корректности задачи [1]

$$\mathcal{L}u(x,t) \equiv u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) + b(x,t)u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) +$$

$$+q(x,t)u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[, \qquad (1)$$

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x), u_t\,|_{t=0} = \psi(x),\ \ x > 0, \qquad (2)$$

$$u\,|_{x=0} = \mu(t),\ t > 0, \qquad (3)$$

где коэффициенты уравнения a, b, c, q – вещественные функции и исходные данные задачи f, φ, ψ, μ – заданные функции своих переменных x и t.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ – плоскость и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Из постановки смешанной задачи и определения 1 классических решений вытекают следующие необходимые условия гладкости данных

$$f \in C(G_\infty),\ \varphi \in C^2[0,+\infty[,\ \psi \in C^1[0,+\infty[,\ \mu \in C^2[0,+\infty[. \tag{4}$$

Полагая $t = 0$ в граничном режиме (3), первой и второй производных по t от граничного режима (3) с помощью начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (1) при $x = t = 0$ выводим необходимые условия согласования

$$\varphi(0) = \mu(0),\ \psi(0) = \mu'(0),$$

$$S \equiv f(0,0) + a^2(0,0)\varphi''(0) - b(0,0)\psi(0) - c(0,0)\varphi'(0) - q(0,0)\varphi(0) = \mu''(0). \tag{5}$$

Уравнение (1) на G_∞ имеет характеристические уравнения

$$dx = (-1)^i a(x,t)dt,\ i = 1,\ 2, \tag{6}$$

которым в плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x и t соответствуют два различных семейства неявных характеристик $g_i(x,t) = C_i,\ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2$ [3]. Если коэффициент $a(x,t) \geq a_0 > 0,\ (x,t) \in G_\infty$, то переменная t на характеристике $g_1(x,t) = C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}$, строго убывает, а на характеристике $g_2(x,t) = C_2,\ C_2 \in \mathbb{R}$, строго возрастает вместе с ростом x в правой плоскости Oxt. Поэтому у неявных функций $y_i = g_i(x,t),\ x \geq 0,\ t \geq 0$ существуют явные строго монотонные обратные функции $x = h_i\{y_i, t\},\ t \geq 0$, и $t = h^{(i)}[x, y_i],\ x \geq 0,\ i = 1, 2$, для которых на G_∞ верны следующие тождества обращения из [3]:

$$g_i(h_i\{y_i,t\},t) = y_i, t \geq 0,\ h_i\{g_i(x,t),t\} = x, x \geq 0,\ i = 1,2, \tag{7}$$

$$g_i(x,h^{(i)}[x,y_i]) = y_i, x \geq 0,\ h^{(i)}[x,g_i(x,t)] = t, t \geq 0,\ i = 1,2, \tag{8}$$

$$h_i\{y_i,h^{(i)}[x,y_i]\} = x, x \geq 0,\ h^{(i)}[h_i\{y_i,t\},y_i] = t, t \geq 0,\ i = 1,2. \tag{9}$$

Если коэффициент $a \in C^2(G_\infty)$, то функции $g_i, h_i, h^{(i)}$ дважды непрерывно дифференцируемы по $x, t, y_i,\ i = 1, 2$, на G_∞ ввиду статьи [3].

Характеристика $x = a_1 t$ делит четверть плоскости G_∞ на множества

$$G_- = \{(x,t) \in G_\infty : g_2(x,t) > g_2(0,0)\},\ G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : g_2(x,t) \leq g_2(0,0)\}.$$

Если в уравнении (1) продолжить функцию $a(x,t)$ четным образом на $x < 0$, то характеристики $g_i(x,t) = C_i,\ i = 1, 2$, будут заданы на верхней полуплоскости G плоскости Oxt.

В настоящей статье мы используем и продолжаем нумерацию формул из [1]. Обобщенные формулы Римана классического (дважды непрерывно дифференцируемого) решения поставленной смешанной задачи содержит

Теорема 1 [1, 14]. *Пусть коэффициенты* $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, $b, c, q \in C^1(G_\infty)$. *Первая смешанная задача (1)–(3) в* $\dot{G}_\infty$ *имеет единственное и устойчивое по* φ, ψ, f, μ *классическое решение* $u \in C^2(G_\infty)$ *тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости (4),*

$$H_i(x,t) \equiv \int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_\infty),\ i = 1, 2 \qquad (10)$$

и условия согласования (5). Классическим решением первой смешанной задачи (1)–(3) в $\dot{G}_\infty$ *является функция*

$$u_-(x,t) = \frac{(auv)(h_2\{g_2(x,t),0\},0) + (auv)(h_1\{g_1(x,t),0\},0)}{2a(x,t)} +$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)} \int_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}} [\psi(s)v(s,0) - \varphi(s)v_\tau(s,0) + b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]ds +$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} f(s,\tau)v(s,\tau;x,t)ds,\ (x,t) \in G_-, \qquad (11)$$

$$u_+(x,t) = \frac{(auv)(h_1\{g_1(x,t),0\},0) - (auv)(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\},0)}{2a(x,t)} +$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)} \int_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}} [\psi(s)v(s,0) - \varphi(s)v_\tau(s,0) + b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]ds +$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \breve{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau;|x|,t)ds + \mu(t) -$$

$$-\frac{1}{2a(0,t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(0,t),\tau\}} \breve{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau;0,t)ds,\ (x,t) \in G_+, \qquad (12)$$

где функции $\breve{f}(x,t) = f(x,t) - f_\mu(x,t) + f^{(0)}(x,t)$, $f_\mu(x,t) = \mathcal{L}\mu(t)$, $f^{(0)}(x,t)$ *из решения системы (36) интегрального уравнения Вольтерра второго рода и линейного алгебраического уравнения, а функции Римана* $v(s,\tau) = v(s,\tau;x,t)$ *– классические решения задач Гурса (19), (22) в* G_- *и (29), (30) в* G_+.

Доказательство. Достаточность теоремы 1 строго доказана в [1]. Это доказательство достаточности можно дополнить следующими пояснениями.

Критерий корректности по Адамару смешанной задачи для простейшего уравнения колебаний струны при нехарактеристических первых косых производных в нестационарных (при зависящих от времени коэффициентах) граничных условиях на полупрямой и ограниченном отрезке имеются в [15].

В статье [1] дифференциальный оператор $\mathcal{M}$ уравнений (19), (29) задач Гурса является формально сопряженным оператором к дифференциальному оператору $\mathcal{L}$ уравнения (1) в смысле распределений Шварца $\mathcal{D}'(G_-)$ [16, 17].

При коэффициентах $a \in C^2(G_\infty)$, $b, c, q \in C^1(G_\infty)$ гладкости (4), (10) на φ, ψ, f достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости решения (28) задачи Коши (25), (26) в [1] и первых трех слагаемых из (12) на G_+ при $x \geq 0$, так как функция Римана $\hat{v}$ дважды непрерывно дифференцируема на G_+ при $x \geq 0$ [18, с. 129–135].

Формулы Римана и критерий корректности задачи Коши для телеграфного уравнения с переменными коэффициентами из работы [19] используется в [1] для обоснования существования классических решений вспомогательных задач Коши. Существование единственного классического решения $\breve{u}$ задачи (1)–(3) на G_∞ и G_+ взято из теоремы 2 статьи [3], где для него обоснована достаточность гладкости на φ, ψ, f, μ из (4), (10). В доказательстве теоремы 2 из [3] о корректности задачи (1)–(3) для уравнения (1) используются теорема 1 из [3] для модельного телеграфного уравнения (см. ниже (41)), обобщение метода продолжения по параметру Шаудера [20–22] и теоремы повышения гладкости сильных решений из [22]. Метод продолжения по параметру основан на том, что линейное общее телеграфное уравнение (1) отличается от линейного модельного телеграфного уравнения (41) младшими членами, т. е. слагаемыми с первыми частными производными u_t, u_x и u.

В доказательстве теоремы 2 статьи [3] единственность классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ первой смешанной задачи (1)–(3) на G_∞ обоснована от противного с помощью энергетического неравенства для ее обобщенного сильного решения [22] (см. замечание 3).

Устойчивость классического решения u_- вида (11) на G_- и u_+ вида (12) на G_+ по φ, ψ, μ, f первой смешанной задачи (1)–(3) подробно описана в [2]. При любом $0 < T < +\infty$ решение (11) непрерывно зависит в банаховом пространстве $X^{(1)} = C^2(G_T^-)$ от φ, ψ, f в декартовом произведении $Y^{(1)}$ банаховых пространств $C^2[0,+\infty[\times C^1[0,+\infty[\times C(G_T^-)$, где множества

$G_T^- = G_T \cap G_-$, $G_T = \{(x,t) \in G_\infty : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq t \leq T\}$, с нормами из [2]:

$$\| u_-(x,t) \|_{C^2(G_T^-)} = \sup_{(x,t) \in G_T^-} \sum_{0 \leq p+j \leq 2} \left| \frac{\partial^{p+j} u(x,t)}{\partial^p x \partial^j t} \right|,$$

$$\| \varphi(x) \|_{C^2[0,+\infty[} = \sup_{0 \leq x < +\infty} \sum_{m=0}^{2} \left| \frac{d^m \varphi(x)}{dx^m} \right|, \| \psi(x) \|_{C^1[0,+\infty[} = \sup_{0 \leq x < +\infty} \sum_{m=0}^{1} \left| \frac{d^m \psi(x)}{dx^m} \right|,$$

$$\| f(x,t) \|_{C(G_T^-)} = \sup_{(x,t) \in G_T^-} \left(| f(x,t) | + \sum_{i=1}^{2} \sum_{0 \leq p+j \leq 1} \left| \frac{\partial^{p+j} H_i(x,t)}{\partial^p x \partial^j t} \right| \right). \qquad (38)$$

При любом $0 < T < +\infty$ решение (12) непрерывно зависит в банаховом пространстве $X^{(2)} = C^2(G_T^+)$ от φ, ψ, μ, f в декартовом произведении $Y^{(2)}$ банаховых пространств

$C^2[0,\Upsilon_T]\times C^1[0,\Upsilon_T]\times C^2[0,T]\times C(G^T)$, где множества $G_T^+ = G^T \cap G_+$, $G^T = \{(x,t)\in G_\infty : g_1(x,t)\le g_1(h_2\{g_2(0,0),T\},T),\quad 0\le t\le T\}$ и $\Upsilon_T = h_1\{g_1(h_2\{g_2(0,0),T\},T),0\}$, с нормами из [2]:

$$\| u_+(x,t)\|_{C^2(G_T^+)} = \max_{(x,t)\in G_T^+}\sum_{0\le p+j\le 2}\left|\frac{\partial^{p+j}u(x,t)}{\partial^p x\partial^j t}\right|, \| \varphi(x)\|_{C^2[0,\Upsilon_T]} = \max_{0\le x\le\Upsilon_T}\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}\right|,$$

$$\| \psi(x)\|_{C^1[0,\Upsilon_T]} = \max_{0\le x\le\Upsilon_T}\sum_{m=0}^{1}\left|\frac{d^m\psi(x)}{dx^m}\right|, \| \mu(t)\|_{C^2[0,T]} = \max_{0\le t\le T}\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{d^m\mu(t)}{dt^m}\right|,$$

$$\| f(x,t)\|_{C(G^T)} = \max_{(x,t)\in G^T}\left\{|f(x,t)| + \sum_{i=1}^{2}\sum_{0\le p+j\le 1}\left|\frac{\partial^{p+j}H_i(x,t)}{\partial^p x\partial^j t}\right|\right\}. \qquad (39)$$

Устойчивость решения $u\in C^2(G_\infty)$ по данным φ, ψ, μ, f также вытекает из его существования и единственности по теореме Банаха о замкнутом графике или теореме Банаха об открытом отображении.

Необходимость требований гладкости (4) и условий согласования (5) установлена нами перед теоремой 1. В статьях [2, 3] доказана необходимость (обязательность) гладкости (10) для дважды непрерывной дифференцируемости интеграла $F(x,t)$, которым в теореме 1 становятся интегралы в третьих слагаемых из (11) и (12) при функциях $v\equiv a\equiv 1$ на G_∞. Дважды непрерывная дифференцируемость интегралов из (11) и (12) не зависит от непрерывно дифференцируемых решений $v\in C^1(G_\infty\cap\Delta MPQ)$ задач Гурса (19), (22) и (29), (30) также, как от дважды непрерывно дифференцируемых коэффициента $a\in C^2(G_\infty)$, $a(x,t)\ge a_0>0$, $(x,t)\in G_\infty$ и функций g_i, h_i, $h^{(i)}$, $i=1, 2$, ниже в замечании 2. Доказательство того, что требования (10) гарантируют дважды непрерывную дифференцируемость интеграла $F\in C^2(G_\infty)$ имеется в [2, 3]. Поэтому необходимость гладкости (10) следует из дважды непрерывной дифференцируемости функции $F\in C^2(G_\infty)$ [2; 3; 15, с. 51]. Доказательство теоремы 1 завершено.

Для непрерывной правой части $f\in C[0,+\infty[$, зависящей только от x или t, требования гладкости (10) всегда выполняются [2, 3, 15].

Следствие 1. *Если непрерывная правая часть f зависит только от x или t, то утверждение теоремы 1 справедливо без требований (10).*

Важно отметить, что существование на G_∞ разрывной функции f, при которой интеграл $F(x,t)$, указанный в доказательстве необходимости теоремы 1, не будет классическим решением уравнения (41) на G_∞, не противоречит работам [2, 3], потому что согласно уравнению (41) его правая часть f должна быть непрерывной на G_∞. Иначе говоря, очевидное утверждение: «Если $F(x,t)$ – классическое решение уравнения (41) на G_∞, то f непрерывна на G_∞» равносильно его отрицанию: «Если f разрывна на G_∞, то $F(x,t)$ – неклассическое решение уравнения (41) на G_∞».

Исследования автора минимальной гладкости правой части f модельного телеграфного уравнения (см. ниже уравнение (41)) для дважды непрерывной дифференцируемости его частного решения $F(x,t)$ в работах [2, 3] указывают на то, что требования гладкости (10) на G_∞ выполняются для непрерывно дифференцируемых $f \in C^1(G_\infty)$ и даже тех непрерывных $f(x,t) \in C(G_\infty)$, у которых частные производные интегралов $\partial H_i(x,t)/\partial x$ по x или $\partial H_i(x,t)/\partial t$ по t, $i = 1, 2$ из (10) непрерывны на G_∞ (см. следствие 2).

Поэтому такая же справедливость гладкости (10) распространяется на $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, функции g_i, h_i, $h^{(i)} \in C^2(G_\infty)$, $i = 1, 2$ и функцию Римана $v(s,\tau) \in C^2(G_\infty)$.

Замечание 2. В теореме 1 для непрерывной правой части $f \in C(G_\infty)$ гладкость (10) равносильна гладкости [2, 3]:

$$\int_0^t f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)d\tau \in C^1(G_\infty),\ i = 1, 2. \tag{40}$$

Следствие 2. *В теореме 1 принадлежность интегралов (10) и интегралов (40) из предыдущего замечания 1 множеству* $C^1(G_\infty)$ *равносильна их принадлежности множеству* $C^{(0,1)}(G_\infty)$ *или множеству* $C^{(1,0)}(G_\infty)$, *где* $C^{(0,1)}(G_\infty)$ $(C^{(1,0)}(G_\infty))$ – *множества непрерывных (непрерывно дифференцируемых) по* x *и непрерывно дифференцируемых (непрерывных) по* t *функций в первой четверти плоскости* G_∞ [2, 3].

Замечание 3. Используя соответственно четность и нечетность по x продолжений коэффициентов $a \in C^2(G_\infty)$, $b, c, q \in C^1(G_\infty)$ уравнения (1) и дополнительные предположения $a_x(0,t) = 0$, $b_x(0,t) = 0$, $c(0,t) = 0$, $q_x(0,t) = 0$, $t \geq 0$, можно аналогичными рассуждениями из доказательства теоремы 1 показать, что $\hat{a} \in C^2(G)$, $\hat{b} \in C^1(G)$, $\tilde{c} \in C^1(G)$, $\hat{q} \in C^1(G)$. При таких коэффициентах вспомогательная задача Коши (25), (26) имеет единственное классическое решение $\breve{u} \in C^2(G)$ и задача Гурса (29), (30) – функцию Римана $\hat{v} \in C^2(G)$. Такая гладкость функций $\breve{u}$, $\hat{v}$ избыточна для решения $u \in C^2(G_\infty)$ задачи (1) – (3) в первой четверти плоскости G_∞.

Из теоремы 1 выведем классическое решение и критерий корректности первой смешанной задачи для модельного телеграфного уравнения из [3]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(x,t) \equiv u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - \\ -a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) = \tilde{f}(x,t),\ (x,t) \in \dot{G}_\infty,\end{aligned} \tag{41}$$

при начальных условиях (2) и граничном режиме (3).

Из постановки смешанной задачи (41), (2), (3) и определения 1 из [3] следуют необходимые условия гладкости (4) данных и условия согласования

$$\varphi(0) = \mu(0),\ \psi(0) = \mu'(0),$$

$$\tilde{S} \equiv \tilde{f}(0,0) + a^2(0,0)\varphi''(0) + a^{-1}(0,0)a_t(0,0)\psi(0) + a(0,0)a_x(0,0)\varphi'(0) = \mu''(0). \tag{42}$$

Найдем формулы классического решения и критерий корректности по Адамару первой смешанной задачи (41), (2), (3) из формул Римана (11), (12) и критерия корректности первой смешанной задачи (1)–(3) в теореме 1.

Теорема 2 [3]. *Пусть* $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$. *Первая смешанная задача (41), (2), (3) в* $\dot{G}_\infty$ *имеет единственное и устойчивое по* $\varphi, \psi, \tilde{f}, \mu$ *классическое решение* $u \in C^2(G_\infty)$ *тогда и только тогда, когда верны требования гладкости (4), (10) при* $f = \tilde{f}$ *и условия согласования (42). Классическим решением задачи (41), (2), (3) в* $\dot{G}_\infty$ *является функция*

$$\hat{u}_-(x,t) = \frac{\varphi(h_2\{g_2(x,t),0\}) + \varphi(h_1\{g_1(x,t),0\})}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu,0)}d\nu +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(s,\tau)}{a(s,\tau)}ds,\ (x,t) \in G_-, \tag{43}$$

$$\hat{u}_+(x,t) = \frac{\varphi(h_1\{g_1(x,t),0\}) - \varphi(h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\})}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}} \frac{\psi(\nu)}{a(\nu,0)}d\nu + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}ds + \mu(h^{(2)}[0,g_2(x,t)]) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]} d\tau \int\limits_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),\tau\}}^{h_2\{g_2(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}ds,\ (x,t) \in G_+. \tag{44}$$

Доказательство. Сначала выведем формулы (43), (44) формального решения задачи (41), (2), (3) на G_- и G_+ из формул Римана (11), (12).

1). Множество G_-. Для модельного телеграфного уравнения (41) решением $\hat{v} \in C^2(G_\infty)$, $C(G)$, $C^2(G \setminus G_\infty)$ задач Гурса (19), (22) на G_- и (29), (30) на G_+ из теоремы 1 служит функция Римана из [23]:

$$\hat{v}(s,\tau) = v(|s|,\tau) = \hat{v}(s,\tau;x,t) = a(|x|,t) / a(|s|,\tau),\ (s,\tau) \in G.$$

В этом также можно убедиться подстановкой этой функции Римана в телеграфные уравнения (19), (29) и условия Гурса (22), (30) при коэффициентах $\hat{b}(s,\tau) = -\hat{a}^{-1}(s,\tau)\hat{a}_\tau(s,\tau)$, $\tilde{c}(s,\tau) = -\hat{a}(s,\tau)\hat{a}_s(s,\tau)$ и $\hat{q}(s,\tau) = 0$. Других функций Римана этих задач Гурса не существует, так как решение каждой задачи Гурса единственно и задача Гурса (19), (22) на G_- – частный случай задачи Гурса (29), (30) на верхней полуплоскости G.

Подставляем функцию Римана $v(s,\tau) = a(|x|,t) / a(|s|,\tau)$ в решение (11):

$$\frac{(auv)(h_2\{g_2(x,t),0\},0)+(auv)(h_1\{g_1(x,t),0\},0)}{2a(x,t)}=$$

$$=\frac{1}{2a(x,t)}\left[a(x,t)\frac{a(s,\tau)}{a(s,\tau)}u(s,\tau)\Big|_{\tau=0}^{s=h_2\{g_2(x,t),0\}}+a(x,t)\frac{a(s,\tau)}{a(s,\tau)}u(s,\tau)\Big|_{\tau=0}^{s=h_1\{g_1(x,t),0\}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[u(s,\tau)\Big|_{\tau=0}^{s=h_2\{g_2(x,t),0\}}+u(s,\tau)\Big|_{\tau=0}^{s=h_1\{g_1(x,t),0\}}\right]=\frac{\varphi(h_2\{g_2(x,t),0\})+\varphi(h_1\{g_1(x,t),0\})}{2},$$

$$\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}\psi(s)v(s,0)ds=\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}\psi(s)\frac{a(x,t)}{a(s,0)}ds=\frac{1}{2}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}\frac{\psi(s)}{a(s,0)}ds,$$

$$\frac{-1}{2a(x,t)}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}[\varphi(s)v_\tau(s,0)-b(s,0)\varphi(s)v(s,0)]ds=$$

$$=\frac{1}{2a(x,t)}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),0\}}^{h_1\{g_1(x,t),0\}}\varphi(s)\left[\frac{a(x,t)a_\tau(s,0)}{a^2(s,0)}-\frac{a^{-1}(s,0)a_\tau(s,0)a(x,t)}{a(s,0)}\right]ds=0,$$

$$\frac{1}{2a(x,t)}\int_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\tilde{f}(s,\tau)v(s,\tau)ds=\frac{1}{2a(x,t)}\int_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\tilde{f}(s,\tau)\frac{a(x,t)}{a(s,\tau)}ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{\tilde{f}(s,\tau)}{a(s,\tau)}ds,\ (x,t)\in G_-.\qquad(45)$$

Это указывает на то, что решение (11) становится решением (43) на G_-.

2). Множество G_+. Вывод первых трех слагаемых решения (44) из формулы Римана (12) аналогичен равенствам (45). Согласно нашему выводу формулы Римана (12) классического решения u_+ задачи (1)–(3) на G_+ его последний интеграл, равный значению предпоследнего двойного интеграла по ΔMPG при $x=0$, имеет величину

$$\mathfrak{U}(x,t)\equiv-\frac{1}{2a(0,t)}\int_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(0,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(0,t),\tau\}}\tilde{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau;0,t)ds=$$

$$=-\frac{1}{2a(0,t)}\left(\int_0^t d\tau\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\tilde{f}(|s|,\tau)v(|s|,\tau;x,t)ds\right)\Bigg|_{x=0},\ (x,t)\in G_+,$$

так как в (12) функция $\breve{f}=\tilde{f}$, поскольку в [3] решение задачи (41), (2), (3) получено методом характеристик, а не нашим методом компенсации правой частью уравнения. Подставляем функцию $v(|s|,\tau)=a(|x|,t)/a(|s|,\tau)$ и меняем порядок интегрирования

$$-\frac{a(0,t)}{2a(0,t)}\left(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}ds\right)\Bigg|_{x=0} = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}^{h_2\{g_2(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}ds\right)\Bigg|_{x=0}.$$

Сначала во внешнем интеграле делаем замену переменной интегрирования

$$\tilde{\tau} = h^{(2)}[0, g_2(x,\tau)],\ \tau \geq 0, \tag{46}$$

и приходим к повторному двойному интегралу

$$\mathfrak{U}(x,t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]} d\tilde{\tau}\left(\int\limits_{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}^{h_2\{g_2(x,t),\tau\}} \frac{\tilde{f}(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)}ds\right)\Bigg|_{x=0}, \tag{47}$$

так как внешний нижний предел интегрирования равен $\tilde{\tau} = h^{(2)}[0,\ g_2(x,\tau)]|_{x=0,\tau=0} = \tau|_{\tau=0} = 0$ по второму тождеству обращения из (8) при $i = 2$, внешний верхний предел интегрирования равен $\tilde{\tau} = h^{(2)}[0,\ g_2(x,\tau)]|_{\tau=t} = h^{(2)}[0,g_2(x,t)]$ и из тождества $h^{(2)}[0,g_2(x,\tau)]|_{x=0} = \tau,\ \tau \geq 0$, в (8) при $i = 2$ следует равенство $d\tilde{\tau} = (\partial h^{(2)}[0,\ g_2(x,\tau)]/\partial\tau)|_{x=0}\, d\tau = d\tau$. Здесь производная по τ и след при $x = 0$ коммутируют. В функции $h^{(2)}[0,g_2(x,t)]$ уже $x = 0$, так как к функции $y_2 = g_2(x,t)$ обратной при $x = 0$ является функция

$$t = h^{(2)}[x, y_2]|_{x=0} = h^{(2)}[0, y_2] = h^{(2)}[0,g_2(x,t)],\ t \geq 0.$$

Итак, после замены (46) в интеграле $\mathfrak{U}(x,t)$ верхний предел интегрирования t внешнего повторного интеграла при $x = 0$ стал равным $h^{(2)}[0,g_2(x,t)]$ в (47). Поэтому во внутреннем повторном интеграле из $\mathfrak{U}(x,t)$ замена (46) при $x = 0$ равносильна замене t на $h^{(2)}[0,g_2(x,t)]$. Кроме того, во внутреннем повторном интеграле из (47) замена (46) при $x = 0$ равносильна замене $\tilde{\tau} = h^{(2)}[0,g_2(x,\tau)]|_{x=0} = \tau,\ \tau \geq 0,$ по второй формуле обращения из (8) при $i = 2$. В результате этих замен находим

$$\mathfrak{U}(x,t) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^{h^{(2)}[0,g_2(x,t)]} d\tilde{\tau} \int\limits_{h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),\tilde{\tau}\}}^{h_2\{g_2(x,t),\tilde{\tau}\}} \frac{\tilde{f}(|s|,\tilde{\tau})}{a(|s|,\tilde{\tau})}ds,\ (x,t) \in G_+, \tag{48}$$

так как по первой формуле обращения из (8) при $i = 2$ пределы интегрирования равны

$$h_2\{g_2(0,t),\tau\} = h_2\{g_2(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),\tilde{\tau}\} = h_2\{g_2(x,t),\tilde{\tau}\},$$

$$h_1\{g_1(0,t),\tau\} = h_1\{g_1(0,h^{(2)}[0,g_2(x,t)]),\tilde{\tau}\}.$$

В граничном данном $\mu(t)$ формулы (12) можно тоже заменить t на $h^{(2)}[0,g_2(x,t)]$, т. е. $\mu(t)$ на $\mu(h^{(2)}[0,g_2(x,t)])$. Граничное данное $\mu(h^{(2)}[0,g_2(x,t)])$ для $\mu(t) \in C^2[0,+\infty[$ и интеграл (48) служат классическими решениями однородного модельного телеграфного уравнения (41) на G_+, так как они имеют вид слагаемого $\mathfrak{F}_2(g_2(x,t)),\ \forall\mathfrak{F}_2 \in C^2(\mathbb{R})$, общего интеграла уравнения (41) при $\tilde{f} = 0$ на G_∞ из [2, 3].

Из теоремы 1 следует дважды непрерывная дифференцируемость найденных из общих формул Римана (11) и (12) решений (43) на G_-, (44) на G_+ и (43), (44) на критической характеристике $g_2(x,t) = g_2(0,0)$ для первой смешанной задачи (41),

(2), (3), а также критерий ее корректности. Эта гладкость решений (43), (44) и критерий корректности задачи (41), (2), (3) подробно и конструктивно исследованы в [3]. Теорема 2 доказана.

Замечание 4. При доказательстве теорем 1 и 2 в [3] была показана только достаточность требований гладкости (10). Их необходимость также подтверждает работа автора [2]. В диссертации [7] нет формулы (44) решения задачи (41), (2), (3) на G_+.

Следствие 3. *Если непрерывная правая часть* $\tilde{f}$ *зависит только от* x *или* t, *то утверждение теоремы 2 справедливо без требований (10).*

Для непрерывной правой части $\tilde{f} \in C[0,+\infty[$, зависящей только от x или t, требования гладкости (10) всегда выполняются [2, 3, 15].

Замечание 5. В теореме 2, где $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, для зависящей от x и t и непрерывной правой части $\tilde{f} \in C(G_\infty)$ гладкость (10) равносильна гладкости (40) из нашего замечания 1 [2, 3, 15].

Следствие 4. *В теореме 2 принадлежность интегралов (10) и равносильных интегралов (40) множеству* $C^1(G_\infty)$ *эквивалентна их принадлежности множеству* $C^{(0,1)}(G_\infty)$ *или* $C^{(1,0)}(G_\infty)$, *где* $C^{(0,1)}(G_\infty)$ $(C^{(1,0)}(G_\infty))$ *– множества непрерывных (непрерывно дифференцируемых) по* x *и непрерывно дифференцируемых (непрерывных) по* t *функций в первой четверти плоскости* G_∞ *[2, 3, 15].*

Заключение

Показана необходимость требований гладкости и условий согласования (4), (5), (40) для формул Римана (11), (12) единственного и устойчивого классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ первой смешанной задачи (1)–(3) для общего линейного неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. Эти формулы Римана содержат неявные функции характеристик уравнения (1). Из формул Римана (11), (12) и критерия корректности (4), (5), (40) выведены уже известные формулы классического решения (43), (44) и критерий корректности (4), (40), (42) первой смешанной задачи (41), (2), (3) для неоднородного модельного телеграфного уравнения со специальными переменными коэффициентами в первой четверти плоскости, которые ранее были установлены автором в статье [3]. Это служит подтверждением справедливости полученных формул Римана (11), (12) и критерия корректности (4), (5), (40) настоящей работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Ломовцев, Ф. Е.*** Формулы Римана первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. I часть / Ф. Е. Ломовцев // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2023. – № 2 (62). – С. 16–31.

2. ***Lomovtsev, F. E.*** The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate $a(x,t)$ on the Half-Line / F. E. Lomovtsev // Труды 10-го междунар. науч. семинара «AMADE-2021». – БГУ – ИВЦ Минфина, 2022. – С. 43–53.

3. ***Ломовцев, Ф. Е.*** Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой / Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2021. – № 1. – С. 18–38.

4. ***Ломовцев, Ф. Е.*** Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны / Ф. Е. Ломовцев // Тезисы доклада Шестых Богдановских чтений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск, 7–10 дек. 2015 г. – 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.

5. ***Lomovtsev, F. E.*** Global Correctness Theorem of the First Mixed Problem for the Model Telegraph Equation at the Rate a(x,t) in the Half-Strip of the Plane / F. E. Lomovtsev // Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianky Kupaly. Ser. 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka. Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne. – 2021. – Vol. 11, № 3. – P. 13–26.

6. ***Lomovtsev, F. E.*** Global Correctness Theorem to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Segment / F. E. Lomovtsev // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 62–73.

7. ***Барановская, С. Н.*** О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / С. Н. Барановская. – Минск, 1991. – 59 с.

8. ***Ломовцев, Ф. Е.*** Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости / Ф. Е. Ломовцев // Вестнік Гродзенскага дзяржаунага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2021. – Т. 11, № 1. – С. 68–82.

9. ***Чернятин, В. А.*** Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.01.02 / В. А. Чернятин ; АН УССР, Ин-т математики. – Киев, 1990. – 27 с.

10. ***Корнев, В. В.*** Резольвентный подход к методу Фурье в смешанной задаче для неоднородного волнового уравнения / В. В. Корнев, А. П. Хромов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, вып. 4. – С. 403–412.

11. ***Хромов, А. П.*** Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения / А. П. Хромов, В. В. Корнев // Доклады Академии наук. – 2019. – Т. 484, № 1. – С. 18–20.

12. ***Хромов, А. П.*** Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала / А. П. Хромов // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 5. – С. 717–731.

13. ***Ломов, И. С.*** Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы / И. С. Ломов // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 11. – С. 1471–1483.

14. ***Lomovtsev, F. E.*** Riemann Formula of the Classical Solution to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Half-Line / F. E. Lomovtsev // Tez. dokl. Seventh Bogdanov Readings on ordinary differential equations dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professor Yu.S. Bogdanov, Minsk, June 1–4 2021. – Minsk, 2021. – P. 201–203.

15. ***Новиков, Е. Н.*** Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Е. Н. Новиков. – Минск, 2017. – 258 с.

16. ***Schwartz, L.*** Theorie des distributions / L. Schwartz. – Paris : Hermann, 1951. – T. 2. – 169 p.

17. ***Владимиров, В. С.*** Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.

18. ***Тихонов, А. Н.*** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 2004. – 798 с.

19. ***Lomovtsev, F. E.*** Generalized Riemann Formula of the Classical Solution to the Cauchy Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients / F. E. Lomovtsev // Материалы Междунар. конф.: XXXIV Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXII», посвященной памяти А. Д. Баева. – Воронеж, 3–9 мая 2021г. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. – С. 288–289.

20. ***Schauder, J.*** Über lineare elliptiche Differentialgleichungen zweiter Ordnung / J. Schauder // Math. Z. – 1934. – Vol. 38. – P. 257–282.

21. ***Ладыженская, О. А.*** Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1973. – 408 с.

22. ***Ломовцев, Ф. Е.*** О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменной областью определения операторных коэффициентов / Ф. Е. Ломовцев // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 873–886.

23. ***Ломовцев, Ф. Е.*** Задача Гурса для сопряженного модельного телеграфного уравнения со скоростью *a(x,t)* в верхней полуплоскости / Ф. Е. Ломовцев // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2022. – № 4. – С. 92–102.

Поступила в редакцию 23.07.2024 г.

Контакты: lomovcev@bsu.by (Ломовцев Федор Егорович)

Lomovtsev F. E. **RIEMANN FORMULAS FOR THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE GENERAL TELEGRAPH EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN THE FIRST QUADRANT OF THE PLANE. II.**

In the previous part of this article, using the right-hand side of the equation, the Riemann method and the new compensation method for the boundary regime were applied to derive the Riemann formulas for a unique and stable classical solution and sufficient correctness conditions for the first mixed problem for an inhomogeneous telegraph equation with variable coefficients in the first quadrant of the plane. In this part of the article, the necessity of these correctness conditions based on the smoothness requirements and three compatibility conditions for the right-hand side of the equation, boundary, and initial data is proved. Important corollaries from the proved global correctness theorem are given. The validity of the obtained Riemann formulas and the correctness criterion is confirmed by proving their agreement with with the known solution formulas and the correctness criterion for the first mixed problem for the model telegraph equation.

Keywords: first mixed problem, telegraph equation, global correctness theorem, correctness criterion, smoothness requirement, matching condition.

УДК 537.874.6: 681.7.068

ТЕРАГЕРЦОВЫЕ СЕНСОРЫ НА ОСНОВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ГОФРОМ

А. В. Шилов
старший преподаватель
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. Б. Сотский
доктор физико-математических наук, профессор
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Д. В. Понкратов
аспирант кафедры физики и компьютерных технологий
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В настоящей работе исследована проблема создания высокочувствительных сенсоров на основе прямоугольных металлических волноводов с полой сердцевиной и внутренней микроструктурой в виде диэлектрического гофра на одной из границ. Разработан метод расчета полей мод указанных волноводов, основанный на перемножении клеточных матриц. Определены возможные типы мод в названных волноводах. Подробно исследованы вопросы прохождения через них излучения ТЕ поляризации. На этой основе рассчитаны оптимальные параметры волноводов для их использования в газовых и жидкостных сенсорах. Показано, что для сенсорных приложений предпочтительны волноводы с глубоким гофром.

Ключевые слова: прямоугольный металлический волновод, брэгговские дифракционные решетки, высокочувствительные терагерцовые сенсоры.

Введение

В настоящее время активно развиваются терагерцовые (ТГц) технологии, в которых используется излучение с длинами волн миллиметрового порядка (0,03 – 3 мм) [1]. Среди популярных областей применения можно выделить системы связи и безопасности, микросъемку с высоким разрешением, а также спектроскопию различных веществ [1]. Так, ТГц сенсоры состава водных растворов востребованы в медицине и микробиологии [2]. Однако их создание сталкивается с высоким поглощением ТГц излучения водой, вследствие которого слой воды толщиной больше 200 мкм для ТГц излучения практически не прозрачен [3]. Эта особенность затрудняет импульсную ТГц спектроскопию растворов с использованием стандартной схемы, в которой исследуемое вещество помещается в просвечиваемую кювету [4].

Практический интерес представляют компактные волноводные ТГц сенсоры. Их чувствительные элементы не требуют изгибов, поэтому они могут быть выполнены в виде отрезков прямолинейных прямоугольных металлических волноводов с полой сердцевиной и диэлектрическим микроструктурным заполнением в виде диэлектрического гофра субволнового периода на одной из границ волновода. Можно ожидать, что при условии заполнения сердцевины таких волноводов исследуемой средой сенсоры данного типа будут обладать высокой чувствительностью к параметрам среды благодаря их

[1] Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «1.15 Фотоника и электроника для инноваций».

© Шилов А. В., Сотский А. Б., Понкратов Д. В., 2025

резонансному пропусканию. Основанием для этого является широкое использование в различных сенсорах оптического диапазона волокон с актиническими брэгговскими дифракционными решетками [5; 6]. Так, в работе [6] предложили сенсор газообразного водорода на основе сильно протравленной волоконной брэгговской решетки, покрытой композитной пленкой Pd/Ni. Аналогичным образом, в [7] продемонстрировали полированный сбоку датчик водорода на решетке с остаточной толщиной 20 мкм, покрытой композитной пленкой Pd/Ag, пригодный для мониторинга концентрации растворенного водорода в масле силового трансформатора. Однако алгоритмы, используемые для расчета таких волокон, применимы к анализу лишь слабо неоднородных волноведущих структур [5; 8], к которым упомянутые ТГц волноводы не относятся. В результате возникает необходимость в формулировке и программной реализации алгоритмов их расчета.

В настоящей работе разработан метод расчета полей мод прямоугольных металлических волноводов с полой сердцевиной и внутренней микроструктурой в виде диэлектрического гофра на одной из границ, основанный на перемножении клеточных матриц. Определены возможные типы мод в названных волноводах. Подробно исследованы вопросы прохождения через них излучения ТЕ поляризации. На этой основе рассчитаны оптимальные параметры волноводов для их использования в газовых и жидкостных сенсорах.

Электродинамическая модель волноводной структуры

Конфигурация исследуемых структур иллюстрируется рисунком 1. Область сенсора, заполняемая исследуемой жидкой, либо газовой средой, представляет собой бокс, изолированный от среды, заполняющей регулярный волновод в областях $z < 0$ и $z > L$ пробками толщины w_0, выполненными из того же материала, что и диэлектрический гофр в области сенсора. Гофр имеет NP периодов. Структура одного периода изображена в центральной части рисунка 1, б.

В поперечном сечении рассматриваемых волноводов могут быть выделены однородные по оси z частичные области двух типов: прямоугольный металлический волновод с полой сердцевиной и прямоугольный металлический волновод со слоистым диэлектрическим заполнением, для которого выполняется условие

$$\nabla_x \varepsilon = 0 . \qquad (1)$$

Ограничимся исследованием мод частичной области второго типа, поскольку частичная область первого типа является ее частным случаем. Компоненты полей этих мод подчиняются двум сопряженным системам [9; 10]

$$\Delta H_x^{(\nu)} + k_0^2(\varepsilon - \beta_\nu^2) H_x^{(\nu)} = \varepsilon^{-1}\nabla_y \varepsilon(\nabla_y H_x^{(\nu)} - \nabla_x H_y^{(\nu)}), \qquad (2)$$

$$\Delta H_y^{(\nu)} + k_0^2(\varepsilon - \beta_\nu^2) H_y^{(\nu)} = -\varepsilon^{-1}\nabla_x \varepsilon(\nabla_y H_x^{(\nu)} - \nabla_x H_y^{(\nu)}), \qquad (3)$$

$$\Delta E_y^{(\nu)} + k_0^2(\varepsilon - \beta_\nu^2) E_y^{(\nu)} = -\nabla_y[\varepsilon^{-1}(E_x^{(\nu)}\nabla_x \varepsilon + E_y^{(\nu)}\nabla_y \varepsilon)], \qquad (4)$$

$$\Delta E_x^{(\nu)} + k_0^2(\varepsilon - \beta_\nu^2) E_x^{(\nu)} = -\nabla_x[\varepsilon^{-1}(E_x^{(\nu)}\nabla_x \varepsilon + E_y^{(\nu)}\nabla_y \varepsilon)], \qquad (5)$$

где $\nu = 1,2,...$ – номер моды, β_ν – ее безразмерная постоянная распространения, $k_0 = \omega\, c^{-1} = 2\pi f c^{-1}$ – волновое число вакуума

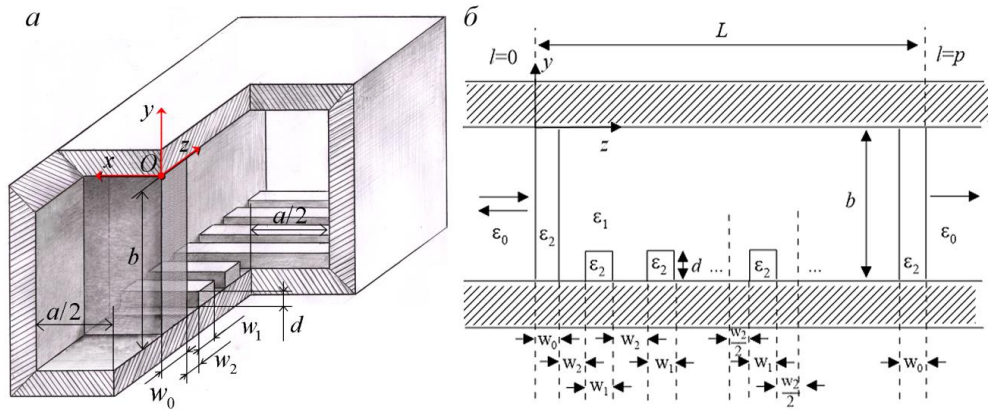

Рисунок 1 – Конфигурация исследуемых волноводов: а) – общий вид, б) – сечение структуры плоскостью $x = 0$

В силу (1) – (5) все моды в l - й частичной области разделяются на два типа с тождественно равными нулю компонентами поля E_y, либо H_y. Тогда для мод первого типа можно получить уравнения:

$$\Delta E_{lx1}^{(\nu)} + k_0^2(\varepsilon_l - \beta_{l\nu1}^2)E_{lx1}^{(\nu)} = 0\,,\ \nabla_x E_{lx1}^{(\nu)}\Big|_{x=\pm a/2} = 0\,,\ E_{lx1}^{(\nu)}\Big|_{y=0,-b} = 0\,, \tag{6}$$

$$E_{ly1}^{(\nu)} = 0\,,\ E_{lz1}^{(\nu)} = q(i\,\beta_{l\nu1})^{-1}\nabla_x E_{lx1}^{(\nu)}\,, \tag{7}$$

$$H_{lx1}^{(\nu)} = -q\,\frac{\nabla_y \nabla_x E_{x1}^{(\nu)}}{\beta_{l\nu1}\omega\mu}\,,\ H_{ly1}^{(\nu)} = \frac{q[i\,\beta_{l\nu1}E_{lx1}^{(\nu)} + (i\,\beta_{l\nu1})^{-1}\nabla_x^2 E_{lx1}^{(\nu)}]}{i\omega\mu}\,,\ H_{lz1}^{(\nu)} = \frac{\nabla_y E_{lx1}^{(\nu)}}{i\omega\mu}\,, \tag{8}$$

где μ – магнитная проницаемость вакуума (среды предполагаются не магнитными), ν –- номер моды, $q = 1$ в случае, если мода распространяется в положительном направлении оси $0z$, $q = -1$ – если в обратном направлении (временная зависимость рассматриваемых монохроматических компонент берется в форме $\exp(i\omega t)$), $\varepsilon_l = \varepsilon_l(y)$ – диэлектрическая проницаемость l - й частичной области.

Решение задачи (6) методом разделения переменных дает:

$$E_{lx1}^{(\nu)} = [C_{l\nu1}^{(q)}\exp(-i\beta_{l\nu1}z) + C_{l\nu1}^{(q)}\exp(i\beta_{l\nu1}z)]e_{ln}(y)\xi_k(x)\,, \tag{9}$$

$$\xi_k(x) = \sin(\gamma_k x)\ \ (k = 1, 3, \ldots),\ \gamma_k = k\pi a^{-1}\,, \tag{10}$$

$$\xi_k(x) = \cos(\gamma_k x)\ \ (k = 0, 2, \ldots), \tag{11}$$

где $C_{l\nu1}^{(+1),(-1)}$ – амплитуды мод, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси $0z$, функции $e_{ln}(y)$ являются решениями задачи Штурма-Лиувилля для плоского металлического волновода со слоистым заполнением

$$\nabla_y^2 e_{ln} + k_0^2(\varepsilon - s_{ln1}^2)e_{ln} = 0\,,\ e_{ln}\Big|_{y=0,-b} = 0\,, \tag{12}$$

где s_{ln1}^2 $(n = 1, 2, \ldots)$ - спектральный параметр. Таким образом, ν в записи

$$\beta_{l\nu1}^2 = s_{ln1}^2 - \gamma_k^2 \tag{13}$$

определяется комбинациями номеров k и n.

Для мод второго типа имеем:

$$\varepsilon_l \nabla_y \varepsilon_l^{-1} \nabla_y H_{lx2}^{(\nu)} + \nabla_x^2 H_{lx2}^{(\nu)} + k_0^2 (\varepsilon_l - \beta_{l\nu 2}^2) H_{lx2}^{(\nu)} = 0 \,,\; H_{lx2}^{(\nu)}\Big|_{x=\pm a/2} = 0 \,, \tag{14}$$

$$\nabla_y H_{lx2}^{(\nu)}\Big|_{y=0,-b} = 0 \,,\; H_{ly2}^{(\nu)} = 0 \,,\; H_{lz2}^{(\nu)} = q(i\beta_{l\nu 2})^{-1} \nabla_x H_{lx2}^{(\nu)} \,, \tag{15}$$

$$E_{lx2}^{(\nu)} = \frac{q\nabla_y \nabla_x H_{lx2}^{(\nu)}}{\beta_{l\nu 2}\omega\varepsilon_l\mu} \,,\; E_{ly2}^{(\nu)} = -\frac{q[\, i\beta_{l\nu 2} H_{lx2}^{(\nu)} + (i\beta_{l\nu 2})^{-1} \nabla_x^2 H_{lx2}^{(\nu)}]}{i\omega\varepsilon_l} \,,\; E_{lz2}^{(\nu)} = -\frac{q\nabla_x H_{lx2}^{(\nu)}}{i\beta_{l\nu 2}} \,. \tag{16}$$

Соотношения, аналогичные (9)–(13), принимают вид:

$$H_{lx2}^{(\nu)} = [C_{l\nu 2}^{(q)} \exp(-i\beta_{l\nu 2}) + C_{l\nu 2}^{(q)} \exp(i\beta_{l\nu 2} z)] h_n(y) \zeta_k(x) \,, \tag{17}$$

$$\zeta_k(x) = \cos(\gamma_k x) \;\; (k = 1, 3, \ldots), \tag{18}$$

$$\zeta_k(x) = \sin(\gamma_k x) \;\; (k = 2, 4, \ldots), \tag{19}$$

$$\varepsilon_l \nabla_y \varepsilon_l^{-1} \nabla_y h_{ln} + k_0^2 (\varepsilon_l - s_{ln2}^2) h_{ln} = 0 \,,\; \nabla_y h_{ln}\Big|_{y=0,-b} = 0 \,, \tag{20}$$

$$\beta_{l\nu 2}^2 = s_{ln2}^2 - \gamma_k^2 \,. \tag{21}$$

Суммарное электромагнитное поле в l - й частичной области имеет вид :

$$\mathbf{E}_l = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{p=1}^{2} \mathbf{E}_{lp}^{(\nu)} \,,\; \mathbf{H}_l = \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{p=1}^{2} \mathbf{H}_{lp}^{(\nu)} \,, \tag{22}$$

где r – порядок редукции спектральных разложений. Поле (22) однозначно определяется амплитудами мод, входящими в (9) и (17). Для нахождения этих амплитуд следует потребовать непрерывности четырех тангенциальных компонент электромагнитного поля на границах частичных областей. Применяя к полученным функциональным уравнениям процедуру Галеркина с учетом соотношений ортогональности [11]

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{0} dy \left(\mathbf{E}_{lp}^{(\nu)} \times \mathbf{H}_{lk}^{(\mu)} \right)_z = \delta_{pk} \delta_{\nu\mu} \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{0} dy \left(\mathbf{E}_{lp}^{(\nu)} \times \mathbf{H}_{lp}^{(\nu)} \right)_z \,, \tag{23}$$

нетрудно записать передаточную матрицу границы раздела частичных областей размерности $4r \times 4r$, умножение которой на вектор-столбец, составленный из амплитуд мод $C_{l\nu 1,2}^{(\pm 1)}$, определяет амплитуды мод $C_{l+1\nu 1,2}^{(\pm 1)}$. Перемножение таких матриц дает полную передаточную матрицу нерегулярного участка волновода. Пусть при $z < 0$ (частичная область $l = 0$) и при $z > L$ (частичная область $l = P$) волновод является регулярным, а амплитуды $C_{0\nu 1,2}^{(+1)}$ известны. Тогда из условий $C_{P\nu 1,2}^{(-1)} = 0$ может быть получена неоднородная алгебраическая система размерности $2r \times 2r$ относительно $2r$ неизвестных амплитуд отраженных мод $C_{0\nu 1,2}^{(-1)}$. После решения этой системы полное отраженное поле, поле в частичных областях нерегулярной области и поле, прошедшее нерегулярный участок волновода могут быть рассчитаны на основании (22). Однако реализация указанной общей вычислительной схемы достаточно трудоемка и сталкивается с вычислительными трудностями, связанными с накоплением ошибок округления при перемножении матриц.

Для упрощения расчетов целесообразно учесть явный вид полей мод в частичных областях. Ввиду известных свойств ортогональности тригонометрических функций в (10), (11), (18), (19), из (7) – (11), (15) – (20), (22), (23) можно заключить, что в передаточных матрицах границ раздела частичных областей элементы, связывающие моды с разными

коэффициентами γ_k (см. (10)) равны нулю. Кроме того, связь мод типов 1 и 2 имеет место только в том случае, когда функции $\xi_k(x)$ и $\zeta_k(x)$ имеют противоположную четность. Таким образом, если в (10), (11), (18), (19) $k \neq 0$, то электромагнитное поле в волноводе формируется модами обоих рассмотренных типов. В нем отличны от нуля все 6 компонент. Заметим, что в выделенных выше частичных областях моды типов 1 и 2 независимы, т.е. гибридный характер поле приобретает в результате дифракции на границах раздела частичных областей.

Особым является случай $k = 0$ в (11). Согласно (7), (8), в нем поле на регулярных и нерегулярных участках волновода имеет ТЕ поляризацию с однородным вдоль оси $0x$ пространственным распределением. Оно формируется модами типа 1, не связанными с модами типа 2. Эти моды могут иметь различные спектральные параметры s^2_{ln1}, совпадающие с квадратами их постоянных распространения β^2_{lv1} (см. (13)). Взаимное преобразование данных мод происходит на границах частичных областей по законам планарной оптики, хотя волновод имеет прямоугольное поперечное сечение.

В дальнейшем мы ограничимся анализом указанного простейшего случая дифракционных полей, который представляет и основной практический интерес, поскольку может быть реализован при падении на нерегулярный участок волновода его основной моды, допускающей эффективное торцевое возбуждение сфокусированным ТГц пучком.

В данном случае основные расчетные соотношения имеют вид

$$C_o^+ = N_{++} C_i^+ + N_{+-} C_i^-,$$

где N_{++} и N_{+-} – блоки размерности $r \times r$ клеточной матрицы размерности $2r \times 2r$ вида

$$N = \begin{pmatrix} N_{++} & N_{+-} \\ N_{-+} & N_{--} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

C_i^+ и C_i^- – векторы-столбцы, составленные соответственно из амплитуд падающих и отраженных мод на входе нерегулярного участка волновода, C_o^+ – вектор-столбец амплитуд мод, прошедших нерегулярный участок,

$$C_i^- = -(N_{--})^{-1} N_{-+} C_i^+. \tag{25}$$

Матрица N представляется произведением клеточных матриц со структурой, аналогичной (24):

$$N = N_o M^{NP} N_i, \tag{26}$$

где

$$(N_{o++})_{nm} = \delta_{nm} \frac{\exp(-i0.5\beta_n^{(2)} k_0 w_2)}{4\beta_n^{(0)}\beta_n} [(\beta_n^{(0)} + \beta_n)(\beta_n^{(0)} + \beta_n^{(2)}) \exp(-i\beta_n^{(0)} k_0 w_0) - \\ -(\beta_n^{(0)} - \beta_n)(\beta_n^{(0)} - \beta_n^{(2)}) \exp(i\beta_n^{(0)} k_0 w_0)], \tag{27}$$

$$(N_{o-+})_{nm} = \delta_{nm} \frac{\exp(-i0.5\beta_n^{(2)} k_0 w_2)}{4\beta_n^{(0)}\beta_n}[(\beta_n^{(0)} + \beta_n)(\beta_n^{(0)} - \beta_n^{(2)})\exp(i\beta_n^{(0)} k_0 w_0) - \\ -(\beta_n^{(0)} - \beta_n)(\beta_n^{(0)} + \beta_n^{(2)})\exp(-i\beta_n^{(0)} k_0 w_0)], \quad (29)$$

$$(N_{o--})_{nm} = \delta_{nm} \frac{\exp(i0.5\beta_n^{(2)} k_0 w_2)}{4\beta_n^{(0)}\beta_n}[(\beta_n^{(0)} + \beta_n)(\beta_n^{(0)} + \beta_n^{(2)})\exp(i\beta_n^{(0)} k_0 w_0) - \\ -(\beta_n^{(0)} - \beta_n)(\beta_n^{(0)} - \beta_n^{(2)})\exp(-i\beta_n^{(0)} k_0 w_0)], \quad (30)$$

$$(N_i)_{nm} = (N_o)_{nm}\beta_n(\beta_n^{(2)})^{-1}, \quad (31)$$

$$(M_{++})_{nm} = \frac{\exp[-i0.5(\beta_n^{(2)} + \beta_m^{(2)})k_0 w_2)]}{4\beta_n^{(2)} < (e_n^{(0)})^2 >} \times \\ \times \sum_{\mu=1}^{r} [(\beta_\mu^{(1)} + \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} + \beta_m^{(2)})\exp(-i\beta_\mu^{(1)} k_0 w_1) - \\ -(\beta_\mu^{(1)} - \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} - \beta_m^{(2)})\exp(i\beta_\mu^{(1)} k_0 w_1)]\rho_{nm\mu}, \quad (32)$$

$$(M_{+-})_{nm} = \frac{\exp[-i0.5(\beta_n^{(2)} - \beta_m^{(2)})k_0 w_2)]}{4\beta_n^{(2)} < (e_n^{(0)})^2 >} \times \\ \times \sum_{\mu=1}^{r} [(\beta_\mu^{(1)} + \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} - \beta_m^{(2)})\exp(-i\beta_\mu^{(1)} k_0 w_1) - \\ -(\beta_\mu^{(1)} - \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} + \beta_m^{(2)})\exp(i\beta_\mu^{(1)} k_0 w_1)]\rho_{nm\mu}, \quad (33)$$

$$(M_{-+})_{nm} = \frac{\exp[-i0.5(\beta_n^{(2)} - \beta_m^{(2)})k_0 w_2)]}{4\beta_n^{(2)} < (e_n^{(0)})^2 >} \times \\ \times \sum_{\mu=1}^{r} [(\beta_\mu^{(1)} + \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} - \beta_m^{(2)})\exp(i\beta_\mu^{(1)} k_0 w_1) - \\ -(\beta_\mu^{(1)} - \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} + \beta_m^{(2)})\exp(-i\beta_\mu^{(1)} k_0 w_1)]\rho_{nm\mu}, \quad (34)$$

$$(M_{--})_{nm} = \frac{\exp[i0.5(\beta_n^{(2)} + \beta_m^{(2)})k_0 w_2)]}{4\beta_n^{(2)} < (e_n^{(0)})^2 >} \times \\ \times \sum_{\mu=1}^{r} [(\beta_\mu^{(1)} + \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} + \beta_m^{(2)})\exp(i\beta_\mu^{(1)} k_0 w_1) - \\ -(\beta_\mu^{(1)} - \beta_n^{(2)})(\beta_\mu^{(1)} - \beta_m^{(2)})\exp(-i\beta_\mu^{(1)} k_0 w_1)]\rho_{nm\mu}, \quad (35)$$

$$\rho_{nm\mu} = < e_n^{(0)} e_\mu^{(1)} >< e_m^{(0)} e_\mu^{(1)} > [(\beta_\mu^{(1)} < (e_\mu^{(1)})^2 >]^{-1}, \quad (36)$$

угловые скобки обозначают интегрирование:

$$< F >= \int_{-b}^{0} F dy .$$

В (27) – (36) под $e_m^{(0)}$, β_m понимается решения спектральной задачи (12) для m - й моды регулярного полого металлического волновода, $e_m^{(1)}$, $\beta_m^{(1)}$ – решение данной задачи для m-й моды частичной области периода, заполненного слоистой средой, $\beta_m^{(2)}$ – постоянная распространения m-й моды частичной области периода, заполненной однородной средой, $\beta_m^{(0)}$ – постоянная распространения m - й моды пробок на входе и выходе участка нерегулярности.

Следует отметить, что все указанные моды являются вытекающими – их энергия вытекает в металлические стенки и поглощается там. Однако в ТГц диапазоне этот эффект практически не сказывается на поперечных распределениях полей мод, поэтому целесообразно учитывать только его влияние на затухание мод и только в случае использования отрезков волноводов с металлическими стенками метрового порядка [12]. Для соответствующих расчетов комплексных постоянных распространения мод с учетом конечности диэлектрической проницаемости металла эффективен метод вариационного разделения переменных [10, с. 43]. Однако оценки показали, что в рассмотренных ниже сенсорных структурах с сантиметровой, либо субмиллиметровой протяженностью нерегулярного участка эффект вытекания не существен.

Далее предполагается, что на вход нерегулярного участка поступает основная мода волновода. В этом случае $(C_i^+)_k = \delta_{1k}$, а энергетические коэффициенты отражения и прохождения излучения для этого участка равны

$$R = \beta_1^{-1} \sum_{j=1}^{r} \beta_j \left| (C_i^-)_j \right|^2, \; T = \beta_1^{-1} \sum_{j=1}^{r} \beta_j \left| (C_o^+)_j \right|^2.$$

Таблицы 1 и 2 иллюстрируют внутреннюю сходимость разработанной вычислительной схемы при $NP = 5$. Здесь и ниже в качестве материала диэлектрической среды выбран циклический олефиновый сополимер (COC, патентованное название «Topas») с дисперсионными характеристиками, приведенными в [13]. Данные таблиц относятся к $a = b = 3500\mu m$, $w_1 = w_2 = 200\mu m$, $f = 0.55THz$. Указанные толщины выбраны в соответствии с возможностями стандартного 3D принтера при изготовлении диэлектрического гофра на стенках волновода. Значение f соответствует одному из резонансов поглощения влажного воздуха (такой сенсор рассмотрен ниже). Табличные данные относятся к сухому воздуху ($\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 1$) и отсутствию ограничивающих пробок ($w_0 = 0\mu m$).

Таблица 1 – Внутренняя сходимость метода в случае мелкого гофра ($d = 200\mu m$)

r	R	T	$R + T$
1	0.4419	$4.1 \cdot 10^{-22}$	0.4419
5	27.9086	0.9629	28.8715
10	0.0340	0.9910	1.0250
15	0.0076	0.9922	0.9998
20	0.0069	0.9930	0.9999
25	0.0069	0.9930	0.9999

Согласно таблице 1, в случае мелкого гофра корректное описание дифракционных эффектов требует учета большого числа мод ($r > 15$). Это указывает на значительный вклад высших мод в полное поле на выходе нерегулярного участка волновода. Ввиду несовпадения постоянных распространения и групповых скоростей различных мод такая ситуация для сенсорных приложений мало пригодна [12]. Кроме того, в ней эффект отражения излучения от нерегулярного участка волновода слабо выражен.

Случай глубокого (т. е. значение высоты элементов *d* приближается к величине зазора *b*) гофра более привлекателен (таблица 2). В нем трансформация основной моды в высшие моды пренебрежимо мала, а отражение излучения от нерегулярного участка волновода существенно.

Таблица 2 – Внутренняя сходимость метода в случае глубокого гофра ($d = 3450\mu m$)

r	*R*	*T*	*R* + *T*
1	0.8192	0.1808	0.9999
5	0.8192	0.1808	0.9999
10	0.8192	0.1808	0.9999
15	0.8192	0.1808	0.9999
20	0.8192	0.1808	0.9999
25	0.8192	0.1808	0.9999

Следует отметить, что в случае полного перекрытия гофром поперечного сечения волновода ($d = b$) моды разного порядка во всех частичных областях структуры становятся ортогональными, а матрицы M_{++}, M_{+-}, M_{-+}, M_{--}, N_{++}, N_{+-}, N_{-+}, N_{--} – диагональными. В результате разработанный метод становится замкнутым. В этом случае вычисление степени матрицы в (26) по формуле Лагранжа-Сильвестра позволяет получить аналитический результат:

$$R = \left| \frac{i\beta_1^{(2)} q_1 (\beta_1 s + i\beta_1^{(0)} c) + q_2 [\beta_1 \beta_1^{(0)} c - i(\beta_1^{(0)})^2 s]}{i\beta_1^{(2)} q_1 (\beta_1 s - i\beta_1^{(0)} c) + q_2 [\beta_1 \beta_1^{(0)} c + i(\beta_1^{(0)})^2 s]} \right|^2, \tag{37}$$

$$T = |t|^2,\ t = \frac{Zq\beta_1^{(0)} [K \exp(0.5i\beta_1^{(2)} k_0 w_2) + \exp(-0.5i\beta_1^{(2)} k_0 w_2)]}{(1 - pK)(\beta_1^{(0)} c + i\beta_1 s)} \tag{38}$$

$$Z = \frac{2iQ\beta_1 \beta_1^{(0)} \exp(0.5i\beta_1^{(2)} k_0 w_2)}{\beta_1^{(0)} q_2 (i\beta_1 c - \beta_1^{(0)} s) + i\beta_1^{(2)} q_1 (i\beta_1 s + \beta_1^{(0)} c)},$$

$$q_{1,2} = Q \exp(i\beta_1^{(2)} k_0 w_2) \mp 1,$$

$$Q = (1 - Kp)[p(1 - pK) + Kt^2]^{-1},$$

$$K = \frac{i\beta_1^{(0)} (\beta_1^{(2)} - \beta_1) c + [(\beta_1^{(0)})^2 - \beta_1 \beta_1^{(2)}] s}{i\beta_1^{(0)} (\beta_1^{(2)} + \beta_1) c - [(\beta_1^{(0)})^2 + \beta_1 \beta_1^{(2)}] s},$$

$$s = \sin(\beta_1^{(0)} k_0 w_0),\ c = \cos(\beta_1^{(0)} k_0 w_0),$$

$$p = -\frac{A(\lambda_2^{NP} - \lambda_1^{NP})}{B(\lambda_2^{NP} - \lambda_1^{NP}) + \lambda_2 \lambda_1^{NP} - \lambda_1 \lambda_2^{NP}},$$

$$q = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{B(\lambda_2^{NP} - \lambda_1^{NP}) + \lambda_2\lambda_1^{NP} - \lambda_1\lambda_2^{NP}},$$

$$\lambda_{1,2} = C \pm \sqrt{C^2 - 1},$$

$$A = \frac{[(\beta_1^{(1)})^2 - \beta_1^2]\sin(\beta_1^{(1)}k_0w_1)}{2\beta_1^{(1)}\beta_1},$$

$$B = \frac{\exp(i\beta_1k_0w_2)[(\beta_1^{(1)} + \beta_1)^2\exp(i\beta_1^{(1)}k_0w_2) - (\beta_1^{(1)} - \beta_1)^2\exp(-i\beta_1^{(1)}k_0w_2)]}{4\beta_1^{(1)}\beta_1},$$

$$C = \frac{(\beta_1^{(1)})^2 + \beta_1^2)\sin(\beta_1^{(1)}k_0w_1)\sin(\beta_1k_0w_2) + 2\beta_1^{(1)}\beta_1\cos(\beta_1^{(1)}k_0w_1)\cos(\beta_1k_0w_2)}{2\beta_1^{(1)}\beta_1}.$$

Вычисления по формулам (37), (38) дают цифры, не отличающиеся от представленных в таблице 2. Это говорит о возможности расчета пропускания сенсорного бокса волновода, содержащего глубокий гофр по приведенным аналитическим формулам. Заметим, что в пределе при $d \to b$ эти формулы дают точные отражательную и пропускательную способности структуры.

2. Оптимизация параметров сенсоров газовых и жидкостных сред

Продемонстрируем возможность использования модели (37), (38) для расчета оптимизированных конфигураций сенсоров состава воздуха и водяного раствора.

Пусть наличие в воздухе примесного компонента концентрации C вызывает на частоте f приращение комплексного показателя преломления воздуха $\Delta n = CC_0^{-1}\Delta n_0$, где Δn_0 – приращение Δn при некоторой концентрации $C = C_0$. Тогда в качестве критерия оптимизации W естественно принять отношение среднеквадратичных ошибок регистрации C рассматриваемым сенсором и стандартным сенсором, измеряющим ослабление ТГц сигнала на длине трассы L, вызванное его поглощением примесным компонентом. В линейном относительно величины ошибок приближении

$$W = 2k_0L\left|\mathrm{Im}(\Delta n)\right|\left|\left.\frac{\partial T}{\partial C}\right|_{C=C_0}\right|^{-1} = k_0L\left|\mathrm{Im}(\Delta n)\right|\left|2\,\mathrm{Re}(t^*\left.\frac{\partial t}{\partial \varepsilon_1}\right|_{\varepsilon_1=1}\Delta n_0)\right|^{-1}, \qquad (39)$$

где ε_1 – диэлектрическая проницаемость воздуха, заполняющего бокс сенсора (см. рисунок 1, б). Второе равенство в (39) записано в рамках модели (37), (38). Для Δn_0 мы использовали выражение

$$\Delta n_0 = 3.34\cdot10^{-7}[(f_r^2 - f^2) + if\,9.98\cdot10^{-3}]^{-1},$$

где $f_r = 0.558THz$, соответствующее рассмотрению в качестве примесного компонента в воздухе водяного пара [12]. Отыскание минимума W относительно размеров w_1 и w_2 при $f = 0.55THz$, $NP = 50$, $d \to b$, просветляющей толщине пробок $w_0 = 274\mu m$ и указанных выше прочих размерах волновода привело к значениям $W_{\min} = 0.047$, $w_{1\,opt} = 83\mu m$, $w_{2\,opt} = 182\mu m$, ($L = 1.33cm$), $d \to b$. Более чем 20-кратный эффект увеличения эффективности рассматриваемого сенсора по сравнению со стандартным абсорбционным сенсором достигнут за счет резонансного влияния приращений вещественной части показателя преломления воздуха на пропускание сенсора в условиях брэгговского отражения излучения от нерегулярного участка волновода.

Спектры пропускания устройства при найденных оптимальных w_1 и w_2 и различном числе периодов гофра представлены на рисунке 2.

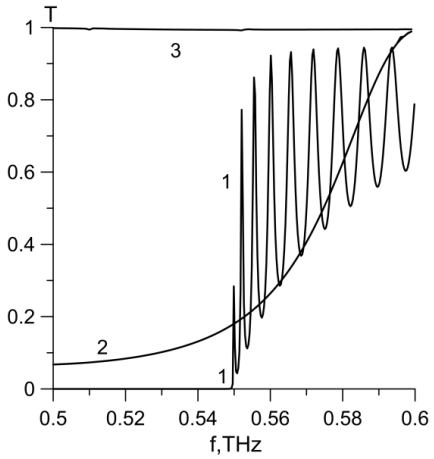

Рисунок 2 - Спектры пропускания воздушного сенсора при $Np = 50$, $d \to b = 3500\mu m$ (кривая 1), $Np = 5$, $d \to b$, $d = 3450\mu m$ (2), $Np = 5$, $d = 200\mu m$ (3)

Согласно рисунку 2, максимизация эффективности сенсора обеспечивается его работой вблизи края запрещенной зоны устройства. Этот эффект отчетливо выражен при большом числе периодов гофра и сглаживается при переходе от $NP = 50$ к $NP = 5$. Еще рисунок 2 подтверждает корректность использования модели (37), (38) в случае глубокого гофра (кривые 2, соответствующие случаям $d \to b = 3500\mu m$, и $d = 3450\mu m$ визуально неотличимы). Отметим также низкую эффективность использования в сенсоре мелкого гофра (ср. кривые 2 и 3).

Критерий (39) получен в линейном приближении зависимости пропускания устройства от концентрации C. Рисунок 3 иллюстрирует пропускание сенсора в широком диапазоне концентраций водяного пара при $f = 0.55THz$. При расчете использована модель (37), (38) при $NP = 50$, $\varepsilon_1 = 1 + 2\Delta n_0 C C_0^{-1}$.

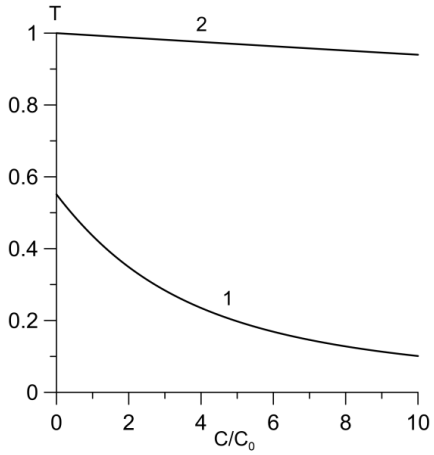

Рисунок 3 – Зависимость пропускания однородной среды (2) и нерегулярного участка волновода (1) от относительной концентрации водяного пара в воздухе

Как следует из рисунка 3, зависимость пропускания оптимизированного сенсора от концентрации примесного компонента, в отличие от пропускания стандартного сенсора является существенно нелинейной. В результате оптимизированный сенсор может эффективно работать в ограниченном диапазоне малых значений CC_0^{-1}, где зависимость $T(CC_0^{-1})$ линейна.

При детектировании малой концентрации примесного компонента в воде на основании соотношения

$$C = [I(C)I(0)^{-1} - 1]T\left(\frac{\partial T}{\partial C}\right)_{C=0}^{-1},$$

где $I(C)$ – мощность излучения на выходе устройства, среднеквадратичная ошибка определения C равна

$$\sigma(C) = \sqrt{2}\sigma(I)\left(I_0\left|\frac{\partial T}{\partial C}\right|_{C=0}\right)^{-1} = \sigma(I)I_0^{-1}\left|\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(t^*\frac{\partial t}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial C}\right)_{C=0}\right|^{-1},$$

где $\sigma(I)$ – среднеквадратичная ошибка детектирования мощности на выходе устройства, I_0 – мощность излучения на входе в устройство, а последнее равенство записано на основании модели (37), (38). Таким образом, в данном случае в качестве оптимизационного критерия естественно использовать

$$W = \left|\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(t^*\frac{\partial t}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial C}\right)_{C=0}\right|^{-1}. \qquad (40)$$

Для оценки эффективности рассматриваемого сенсора мы рассмотрели пример детектирования концентрации кокаина в воде. Использована модель Максвелла Гарнетта для диэлектрической проницаемости раствора [14, с. 98].

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_w[1 + 2C(\varepsilon_c - \varepsilon_w)(\varepsilon_c + 2\varepsilon_w)^{-1}][1 - C(\varepsilon_c - \varepsilon_w)(\varepsilon_c + 2\varepsilon_w)^{-1}]^{-1}, \qquad (41)$$

где ε_w – диэлектрическая проницаемость чистой воды [14], ε_c – диэлектрическая проницаемость чистого кокаина [15]. В качестве аргументов W рассмотрены w_0, w_1, w_2. Отыскание минимума W осуществлено на частоте $f = 1.5THz$, соответствующей одному из резонансов поглощения кокаина [15]. Результаты решения оптимизационной задачи приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Решение оптимизационной задачи для сенсора водного раствора кокаина при различном числе периодов гофра

NP	$w_{0\,opt}, \mu m$	$w_{1\,opt}, \mu m$	$w_{2\,opt}, \mu m$	W
1	14	0	18	5.01
2	16	36	7	4.35
3	24	40	6	4.30
4	22	48	4	4.29
5	30	48	4	4.29

При $NP = 1$, $w_1 = 0$ бокс сенсора представляет собой однородную кювету, заполненную раствором. Согласно таблице 3, для пробок такой кюветы существует оптимальная толщина, что объясняется образованием в них стоячих волн. В отличие от воздушного сенсора, эффект повышения эффективности сенсора раствора за счет брэгговского отражения излучения от границ разделов гофра выражен слабо. Кроме того, он наблюдается при весьма тонких частичных областях гофра, заполненных раствором. Это следствие значительного поглощения ТГц волн водой.

Спектры пропускания сенсора при табличных размерах нерегулярной области волновода иллюстрирует рисунок 4.

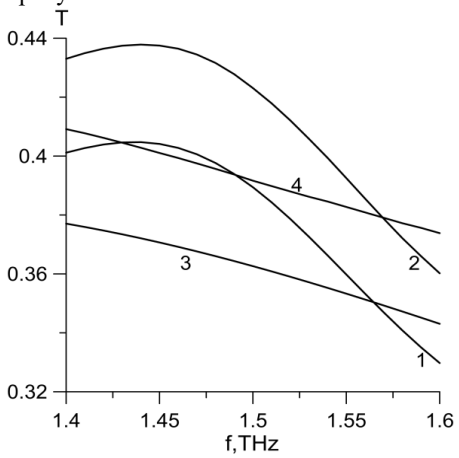

Рисунок 4 – Спектры пропускания сенсора водного раствора кокаина при $C = 0$, $NP = 4$ (кривая 1); $C = 0.1$, $NP = 4$ (2); $C = 0$, $NP = 1$ (3); $C = 0.1$, $NP = 1$ (4)

Представленные зависимости являются гораздо более пологими по сравнению с аналогичными зависимостями на рисунке 2. Это также результат сглаживающего влияния поглощения излучения водой.

Заключение

Итак, сформулированы и реализованы программно алгоритмы решения волноводных задач для вытекающих мод прямоугольных волноводов с металлизированными границами, полой сердцевиной и внутренней микроструктурой в виде диэлектрического гофра на одной из границ, основанные на перемножении клеточных матриц. Определены возможные типы мод в названных волноводах. Подробно исследованы вопросы прохождения через них излучения ТЕ поляризации. Показано, что для сенсорных приложений предпочтительны волноводы с глубоким гофром. Рассчитаны оптимальные параметры волноводов для использования в газовых и жидкостных сенсорах. Установлено, что резонансное влияние приращений вещественной части комплексного показателя преломления воздуха в условиях брэгговского отражения излучения на пропускание волновода позволяет более чем на порядок увеличить чувствительность газового сенсора по сравнению со стандартным абсорбционным сенсором. Отсутствие аналогичного эффекта в случае сенсора водного раствора объясняется существенным поглощением ТГц излучения водой.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «1.15 Фотоника и электроника для инноваций».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Ito, K.*** Analysis of transmission properties of terahertz hollow-core optical fiber by using time-domain spectroscopy and application for remote spectroscopy / K. Ito, T. Katagiri, Y. Matsuura // Journal of the Optical Society of America B. – 2017. – Vol. 34, № 1. – P. 60–65.

2. ***Ангелуц, А. А.*** Характерные отклики биологических и наноразмерных систем в терагерцовом диапазоне частот / А. А. Ангелуц [и др.] // Квантовая электроника. – 2014. – Т. 44, № 7. – С. 614–632.

3. ***Mazhorova, A.*** Label-free bacteria detection using evanescent mode of a suspended core terahertz fiber / A. Mazhorova [et al.] // Optics Express. – 2012. – Vol. 20, № 5. – P. 5344–5355.

4. ***Abdulmunem, O. M.*** THz-TDS for Detecting Glycol Contamination in Engine Oil / O. M. Abdulmunem [et al.] // Appl. Sci. – 2020. – Vol. 10, № 11. – P. 3738-1–3738-9.

5. ***Caucheteur, C.*** Polarization-Assisted Fiber Bragg Grating Sensors: Tutorial and Review / C. Caucheteur, T. Guo, J. Albert // J. Lightwave Technol. – 2017. – Vol. 35, № 16. – P. 3311–3322.

6. ***Сушко, М. Я.*** Метод компактных групп в теории диэлектрической проницаемости гетерогенных систем / М. Я. Сушко, С. Я. Крискив // ЖТФ. – 2009. – Т. 79, № 3. – С. 97–101.

7. ***Li, X. J.*** Design of terahertz metal-dielectric-metal waveguide with microfluidic sensing stub / X. J. Li, J. Song, John X. J. Zhang // Optics Communications. – 2016. – Vol. 361. – P.130–137.

8. ***Ярив, А.*** Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М. : Мир, 1987. – 616 с.

9. ***Войтович, Н. Н.*** Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения / Н. Н. Войтович [и др.] // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т. 24, № 7. – С. 1245–1263.

10. ***Сотский, А. Б.*** Теория оптических волноводных элементов: монография / А. Б. Сотский. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – 456 с.

11. ***Снайдер, А.*** Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав. – М. : Радио и связь, 1987. – 656 с.

12. ***Сотский, А. Б.*** Распространение терагерцовых импульсов в капиллярных волноводах с металлизированной границей / А. Б. Сотский, А. В. Шилов, Л. И. Сотская // Компьютерная оптика. – 2017 – Т. 41, № 6. – С. 803–811.

13. ***Bao, H.*** Fabrication and characterization of porous-core honeycomb bandgap THz fibers / H. Bao [et al.] // Optics Express. – 2012. – Vol. 20, Is. 28. – P. 29507–29517.

14. ***Consolino, L.*** Terahertz frequency metrology for spectroscopic applications: a review / L. Consolino, S. Bartalini, P. De Natale // J. Infrared Millimeter Terahertz Waves. – 2017. – Vol. 38, – P. 1289–1315.

15. ***Davies, A. G.*** Terahertz spectroscopy of explosives and drugs / A. G. Davies [et al.] // Materials Today. – 2008. – Vol. 11, № 3. – P. 18–26.

Поступила в редакцию 23.12.2024 г.

Контакты: shilov@m.msu.by (Шилов Артур Владимирович), sotsky@m.msu.by (Сотский Александр Борисович), d.v.ponkratov@yandex.by (Понкратов Дмитрий Васильевич)

Shilov A. V., Sotsky A. B., Ponkratov D. V. **TERAHERTZ SENSORS BASED ON RECTANGULAR METAL WAVEGUIDES WITH DIELECTRIC CORRUGATED FRAME**

In this paper, the authors study the problem of creating highly sensitive sensors based on rectangular metal waveguides with a hollow core and an internal microstructure in the form of a dielectric corrugation on one of the boundaries. A method has been developed for calculating the mode fields of these waveguides, based on the multiplication of cellular matrices. Possible types of modes in the waveguides have been identified. The issues of transmission of TE polarized radiation through them have been thoroughly examined. Based on this analysis, the optimal parameters for the waveguides for their use in gas and liquid sensors have been calculated. It has been demonstrated that waveguides with deep corrugation are preferable for sensor applications.

Keywords: rectangular metal waveguide, Bragg diffraction gratings, highly sensitive terahertz sensors.

УДК 54

КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОФЕИНА ПО ТУШЕНИЮ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ АСПИРИНА

В. А. Лысова
кандидат технических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Н. А. Клебанова
кандидат химических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. В. Клебанов
кандидат химических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. А. Дробенкова
выпускница факультета математики и естествознания
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В статье представлены экспериментальные данные по исследованию флуоресценции водных растворов чистого аспирина и аспирина в присутствии кофеина. Методом спектрофлуориметрии исследован процесс тушения флуоресценции аспирина в присутствии кофеина и установлен диапазон концентраций кофеина, в котором флуоресценция аспирина наиболее чувствительна к присутствию кофеина. В данном диапазоне получена градуировочная зависимость относительной флуоресценции аспирина от концентрации кофеина, которую можно использовать для определения кофеина в различных реальных объектах.

Ключевые слова: аспирин, кофеин, спонтанная флуоресценция, спектрофлуориметрия, тушение флуоресценции, относительная интенсивность флуоресценции.

Введение

Флуоресценция – это свечение, индуцированное светом. В повседневной жизни мы практически не встречаем или не замечаем это явление. Интенсивность флуоресценции слишком мала по сравнению с вызывающим ее светом. Тем не менее на сегодняшний день существуют приборы и методы, позволяющие не только выявлять, но и измерять различные параметры флуоресценции. Причем благодаря этим измерениям, можно получать уникальную информацию о молекулярной организации и функционировании биологических систем [1, 2]. За последние тридцать лет использование различных спектрофлуориметрических методов, основанных на регистрации флуоресценции, в биологических и медицинских исследованиях стремительно возросло. Обусловлено это появлением как новых технических возможностей – в первую очередь компьютеров и лазеров, – так и широкого спектра доступных флуоресцирующих молекул и молекулярных комплексов [2]. Флуоресцентная методология обеспечила решение многих принципиальных задач биологии и медицины. Благодаря высокой чувствительности и сравнительной безопасности она вытеснила многие традиционные методы, связанные с применением радиоактивных веществ.

Эффект тушения флуоресценции в последние годы привлекает внимание исследо-

© Лысова В. А., Клебанова Н. А., Клебанов А. В., Дробенкова А. А. 2025

вателей [3-7] в области биологических, биомедицинских и биохимических исследований как основа для создания простых и экспрессных методов анализа как органических биологически-активных молекул, так и некоторых комплексообразователей [4, 6]. Известно, что интенсивность флуорисценции зависит и от внутри-, и межмолекулярного взаимодействия, которое приводит к снижению излучения флуорофоров [3]. Изученные тушители флуоресценции можно разделить на четыре группы:

- тяжелые анионы и катионы (например, иодид и бромид ионы, катионы цезия и меди);
- парамагнитные ионы и молекулы, которые имеют неспаренные электроны (например, молекулярный кислород, некоторые оксосоединения азота, катион марганца (+2) и др.);
- полярные растворители (наибольшим тушащим действием обладает вода);
- акцепторы электронной энергии возбуждения.

В аналитическом обзоре [3] приведено достаточно большое количество примеров количественного определения аналитов-тушителей с использованием люминесцентных (флуоресцентных) зондов: от ионов алюминия до молекул ДНК, что подтверждает актуальность и перспективность исследования эффекта тушения различных флуорофоров как ионами металлов, так и биологически активными веществами с целью разработки методик определения веществ-тушителей. Одним из веществ-тушителей по отношению к некоторым органическим флуорофорам является кофеин [8, 9].

Кофеин относится к алкалоидом пуринового ряда. Он присутствует в листьях чая, семенах кофе, орехах кола, плодах гуараны, бобах какао, луковицах морского лука и энергетических напитках. Растениями кофеин синтезируется для стимулирования опылителей и предотвращения поедания насекомыми. В лаборатории его можно синтезировать из теобромина. Кофеин оказывает выраженное физиологическое действие на организм человека [10]: снижает вялость и утомленность, активизирует и оптимизирует механизмы возбуждения в коре головного мозга, вызывая положительные условные автоматизмы и увеличивая двигательную активность. Улучшает работу сердца и дыхания; возбуждает центральную нервную систему и сердечно-сосудистую систему; может использоваться как противоядие от отравлений барбитуратами и морфием. Кофеин увеличивает рефлекторную возбудимость спинного мозга, снижает воздействие снотворных и наркотических веществ и улучшает работу центров дыхания и движения. Вместе с тем в больших дозах кофеин оказывает негативное действие на нервную систему человека. Особенности нервной системы каждого человека должны быть учтены при определении дозировки кофеина. Он входит в состав таких лекарственных препаратов, как эмпирин, кофетамин В, кафергот и вираин [11].

В связи с тем что кофеин проявляет слабую флуоресценцию большинство известных спектрофлуориметрических методов анализа основаны на эффекте тушения флуоресценции веществ с выраженным излучением, например, 3,5-диаминобензойной кислоты [8] или аспирина [9]. Тем не менее за последнее десятилетие разработано и используется оборудование, способное зафиксировать даже такую сверхслабую флуоресценцию, которая характерна для кофеина [3, 12,13].

Целью настоящей работы являлось исследование флуоресценции аспирина в присутствии кофеина в растворе методом спектрофлуориметрии.

Материалы и методы

В качестве объектов исследования были кофеин, ацетилсалициловая кислота (аспирин), экстракты кофе, чая и энергетический напиток.

Кофеин химически чистый (ХЧ) – мелкодисперсный порошок белого цвета, молярная масса 194,19 г/моль, плотность 1,23 г/см^3, температура плавления 234 °С, температура сублимации 180 °С.

Аспирин таблетки производства the Bartell drugs company с содержанием основного вещества (ацетилсалициловой кислоты) – 325 мг / шт.

Для получения экстракта кофе использовали нерастворимый кофе-порошок марки Barista. Для получения экстракта чая использовался листовой черный чай Tess.

Основным методом исследования флуоресценции является спекрофлуориметрический анализ, который проводился на приборе спектрофлуориметр FP-8200 (производство Япония).

Приготовление стандартных растворов осуществляли следующим образом:

- приготовление раствора аспирина с концентрацией 0,04 мг/мл (стандартный раствор 1): исходя из содержания ацетилсалициловой кислоты в одной таблетке (325 мг), взвешена одна таблетка и взято 123/1000 от ее массы (0,36 г * 0,123 = 0,044 г). Полученную навеску аспирина с содержанием ацетилсалициловой кислоты 0,04 г растворили в мерной колбе на 1 литр и довели до метки дистиллированной водой;

- приготовление раствора аспирина с концентрацией 0,004 мг/мл (стандартный раствор 2): точно отмеренный объем стандартного раствора 1 – 25 мл перенесли в мерную колбу на 250 мл и довели до метки дистиллированной водой;

- приготовление раствора кофеина концентрацией 0,1 мг/мл (стандартный раствор 3): навеску кофеина массой 25 мг перенесли в мерную колбу на 250 мл и довели до метки дистиллированной водой.

Для исследования зависимости интенсивности флуоресценции аспирина от концентрации из стандартного раствора 2 методом разбавления были приготовлены растворы с концентрациями 0,0005 мг/мл, 0,001 мг/мл, 0,002 мг/мл, 0,003 мг/мл и 0,004 мг/мл.

Для исследования эффекта тушения флуоресценции аспирина в присутствии кофеина была приготовлена серия растворов с фиксированным содержанием аспирина (0,004 мг/мл) и непрерывно возрастающим содержанием кофеина. Растворы готовили непосредственно в кювете для спектрофлуориметрии. Объем кюветы составлял 3 мл. Рассчитанные объемы добавляемых растворов приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Вносимые объемы стандартных растворов аспирина и кофеина для приготовления рабочих растворов (в расчете на 3 мл)

№	V аспирина (мл) (стандартный раствор 1)	V воды (мл)	Vраствора кофеина (мл) (стандартный раствор 3)	С кофеина (мг/мл)
1	0,3	0	2,7	0,09
2	0,3	0,3	2,4	0,08
3	0,3	0,6	2,1	0,07
4	0,3	0,9	1,8	0,06
5	0,3	1,2	1,5	0,05
6	0,3	1,5	1,2	0,04
7	0,3	1,8	0,9	0,03
8	0,3	2,1	0,6	0,02
9	0,3	2,4	0,3	0,01
10	0,3	2,7	0	0

Приготовление экстрактов кофе и чая следующим образом:

Навеску молотого кофе массой 8 г помещали в стакан, заливали 100 мл кипящей дистиллированной воды и кипятили в течение 5 минут. Полученную суспензию охлаждали до +18…+20 °С, количественно переносили в мерную колбу вместимостью 100 мл и доливали дистиллированной водой до метки. Содержимое колбы взбалтывали и отстаивали 2,3 ми-

нуты, затем фильтровали через бумажный фильтр. Полученный фильтрат использовали для анализа [14].

Навеску листового чая массой 16 г помещали в стакан, заливали 100 мл кипящей дистиллированной водой и кипятили 5 минут. Полученную суспензию охлаждали до +18…+20 °С, количественно переносили в мерную колбу вместимостью 100 мл и доливали дистиллированной водой до метки. Содержимое колбы взбалтывали и отстаивали 2,3 минуты, затем фильтровали. Полученный фильтрат использовали для анализа [14].

Энергетический напиток изменениям не подвергали.

Результаты и обсуждение

Для определения длины волны с максимальной флуоресценцией аспирина были получены 3-D спектры стандартного раствора аспирина (стандартный раствор 1) в интервале длин волн возбуждения – испускания λ = 210–500 нм. Полученные данные представлены на рисунке 1.

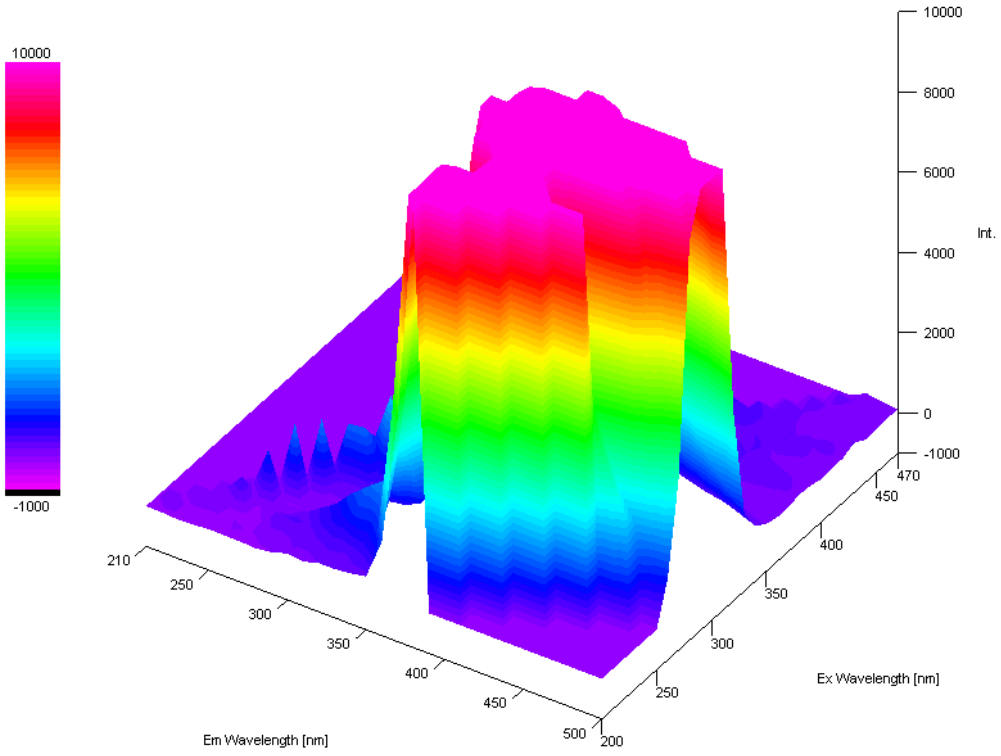

Рисунок 1 – 3-D спектр стандартного раствора 1 аспирина.
Чувствительность прибора High

Как видно из приведенных данных, пик флуоресценции аспирина наблюдается при длине волны возбуждения λ = 380 нм, длина волны испускания λ = 390 нм. Однако относительная интенсивность флуоресценции стандартного раствора аспирина 1 при заданных условиях анализа получилась очень высокая (>10000 у. е.) и проводить дальнейшие измерения с такой концентрацией аспирина нецелесообразно, поэтому был приготовлен стандартный раствор 2 с концентрацией аспирина 0,004 мг/мл (т. е. с коэффициентом разбавления 1 : 10). Полученный спектр флуоресценции стандартного раствора 2 аспирина приведен на рисунке 2.

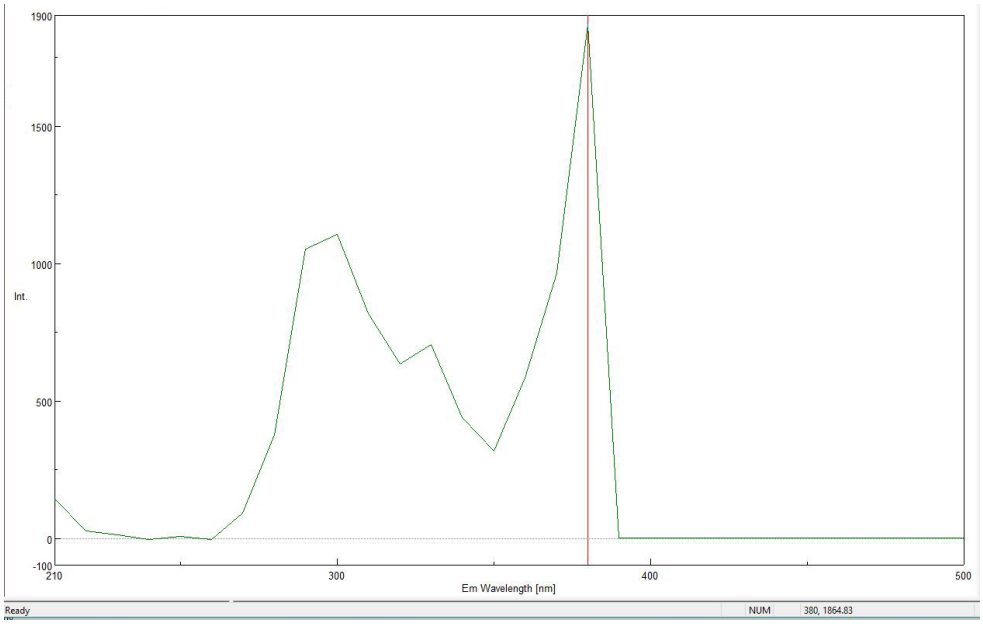

Рисунок 2 – Относительная интенсивность флуоресценции стандартного раствора 2 аспирина (концентрацией 0,004 мг/мл)

Из представленных данных видно, что пик флуоресценции стандартного раствора 2 аспирина наблюдается при длине волны 390 нм, интенсивность равна 1864,83 (усл.ед.инт.) при чувствительности прибора High. Дальнейшие исследования проводились при этих длинах волн и такой же чувствительности прибора.

Для определения зависимости относительной интенсивности флуоресценции аспирина от его концентрации были получены спектры флуоресценции для растворов с концентрациями от 0,0005 мг/мл до 0,004 мг/мл. Полученные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Интенсивность флуоресценции растворов аспирина в зависимости от концентрации

C (мг/мл)	I (усл.ед.инт.)
0,0005	326,883
0,0010	652,701
0,0020	822,358
0,0030	1064,87
0,0040	1864,83

На основании приведенных в таблице 2 данных был построен график зависимости относительной интенсивности флуоресценции аспирина от его концентрации и добавлена линия тренда (Рисунок 3).

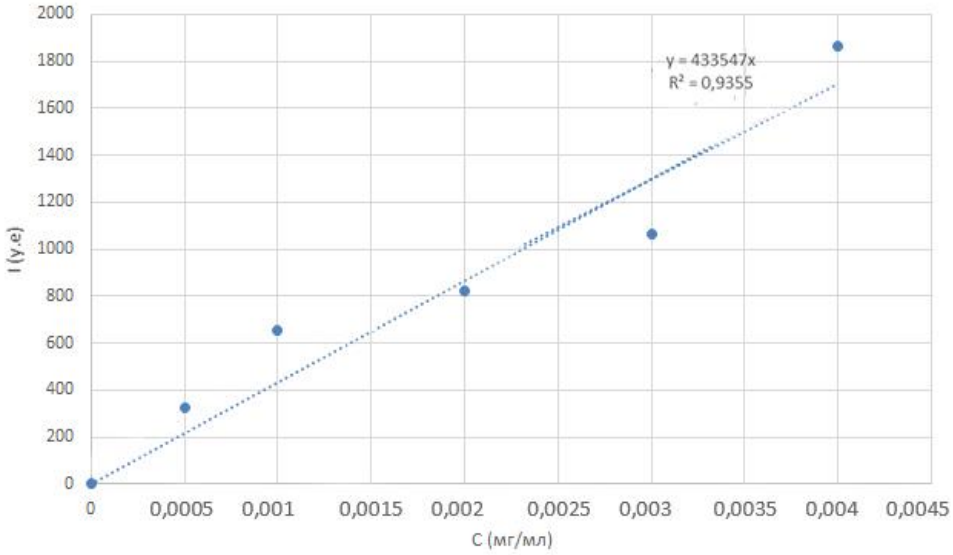

Рисунок 3 – Градуировочный график зависимости относительной интенсивности флуоресценции аспирина от его концентрации

Из приведенных данных видно, что в выбранном диапазоне концентраций аспирина 0,0005 – 0,0040 мг/мл зависимость относительной интенсивности флуоресценции аспирина от концентрации носит линейный характер с линейным коэффициентом аппроксимации R^2=0,9355.

Для исследования относительной интенсивности флуоресценции аспирина в присутствии кофеина различной концентрации были проанализированы рабочие растворы в соответствии с таблицей 1. Полученные данные представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Интенсивность относительной флуоресценции аспирина в зависимости от концентрации исследуемого раствора кофеина

С кофеина (мг/мл)	I (усл.ед.инт.)
0,09	55,84
0,08	60,14
0,07	72,94
0,06	98,19
0,05	120,18
0,04	201,03
0,03	437,68
0,02	613,13
0,01	1000

На основании полученных данных был построен градуировочный график (Рисунок 4).

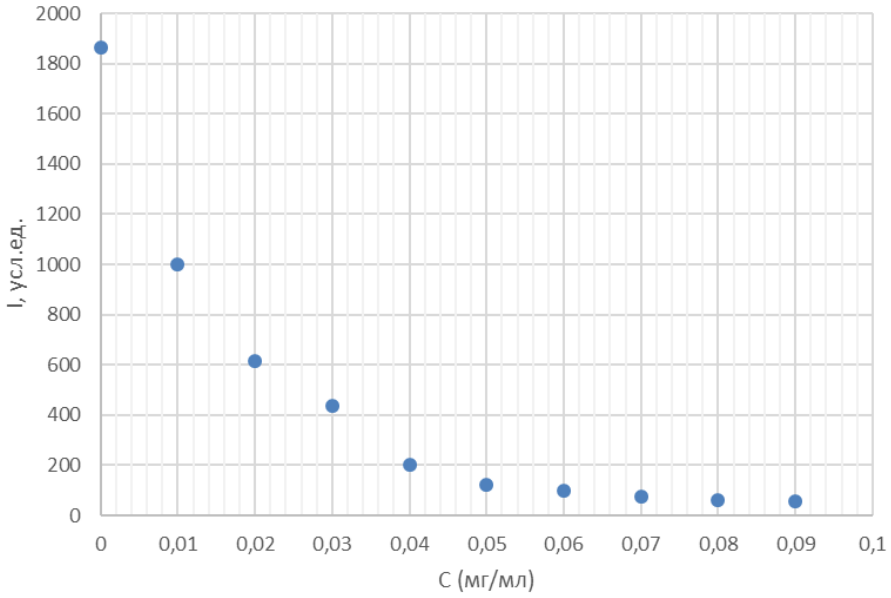

Рисунок 4 – Градуировочный график интенсивности флуоресценции аспирина в зависимости от концентрации кофеина

Как видно из приведенных данных, интенсивность флуоресценции аспирина существенно падает в присутствии кофеина концентрации 0,01 до 0,05 мг/мл. В диапазоне концентраций кофеина 0,06 – 0,09 мг/мл интенсивность флуоресценции аспирина изменяется незначительно. В связи с чем для последующих определений был выбран диапазон концентрации кофеина 0,01 – 0,05 мг/мл (Рисунок 5).

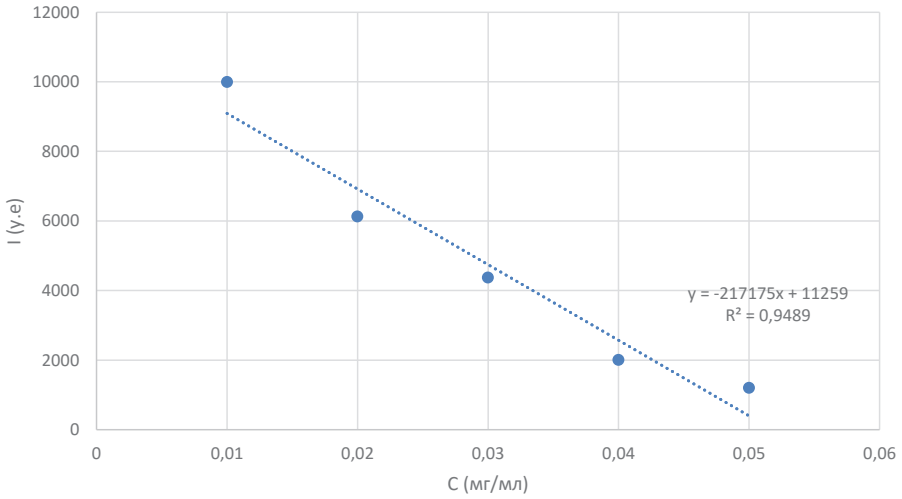

Рисунок 5 – Градуировочный график зависимости относительной интенсивности флуоресценции аспирина с диапазоном концентрации кофеина 0,01 – 0,05 мг/мл

Из приведенных данных видно, что в выбранном диапазоне концентраций аспирина 0,01 – 0,005 мг/мл зависимость относительной интенсивности флуоресценции аспирина от концентрации кофеина носит линейный характер при коэффициенте аппроксимации R^2 = 0,9489.

Для применения полученной методики определения кофеина по тушению флуоресценции аспирина были получены экстракты кофе и чая в соответствии с методикой «Определение массовой доли кофеина» [14]. Полученный экстракт кофе был проанализирован на спектрофлуориметре, для этого в кювету 3 мл было добавлено 0,3 мл стандартного раствора аспирина 1 и экстракт кофе, объемом 2,7 мл. Экспериментальные результаты 3-D спектр экстракта кофе приведены на рисунке 6.

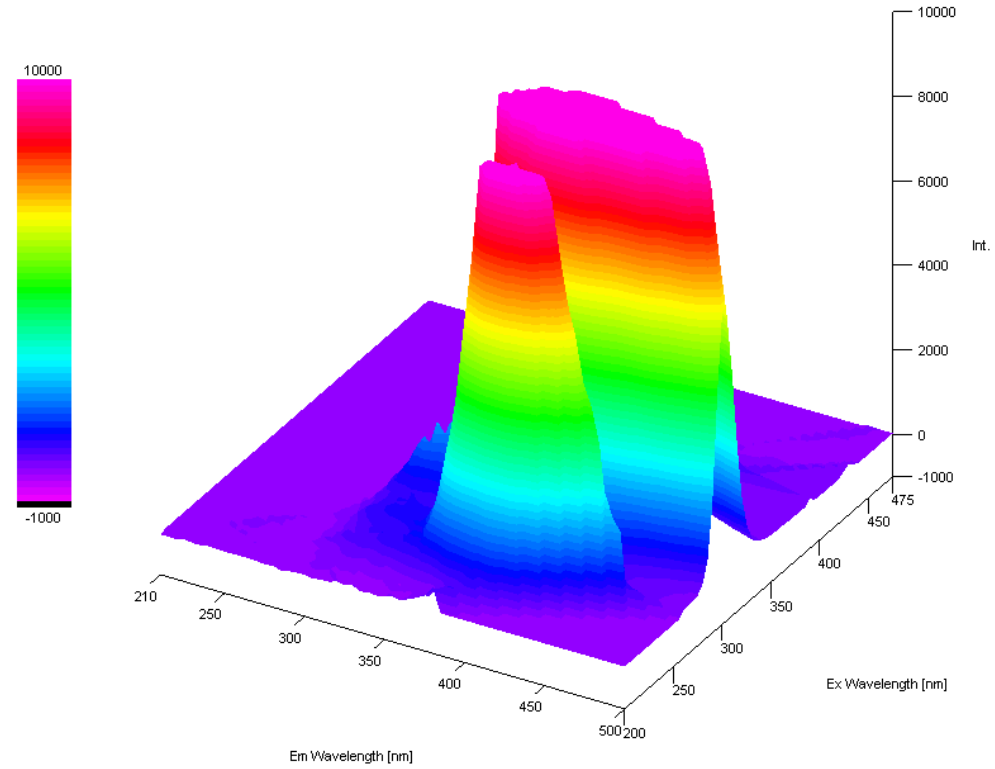

Рисунок 6 – 3-D спектр аспирина в присутствии экстракта нерастворимого кофе. Чувствительность прибора High

Из приведенных данных видно, что при длине волны λ = 380 нм относительная интенсивность флуоресценции аспирина в присутствии экстракта нерастворимого кофе равна 401,04 у.е.

Полученный в соответствии с методикой [14] экстракт чая был также исследован на спектрофлуориметре. Для чего в кювету 3 мл было добавлено 0,3 мл стандартного раствора аспирина 1 и экстракт чая, объемом 2,7 мл. Экспериментальные результаты 3-D спектр экстракта чая приведены на рисунке 7.

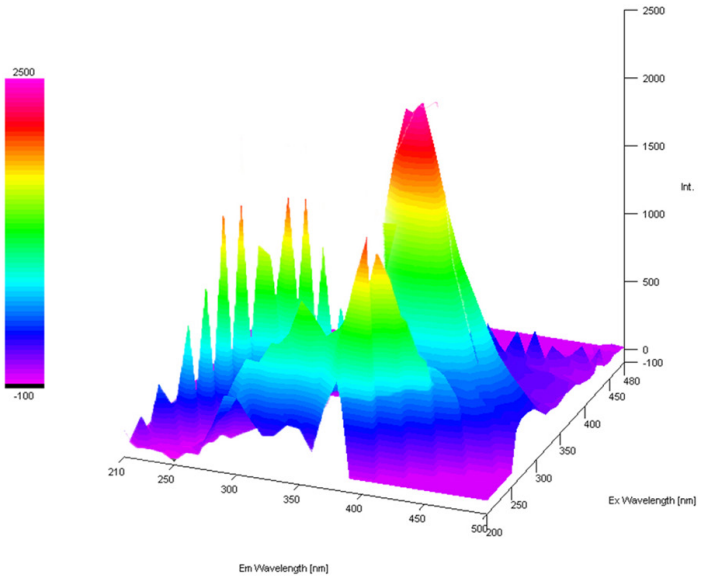

Рисунок 7 – 3-D спектр аспирина в присутствии экстракта чая. Чувствительность прибора High

Из приведенных данных видно, что при длине волны λ = 380 нм относительная интенсивность флуоресценции аспирина в присутствии экстракта листового чая равна 872,879 у. е.

Энергетический напиток динамит специальной пробоподготовке не подвергался и был проанализирован на спектрофлуориметре. В кювету 3 мл было добавлено 0,3 мл стандартного раствора аспирина 1 и энергетический напиток, объемом 2,7 мл. Экспериментальные результаты 3-D спектр энергетического напитка приведены на рисунке 8.

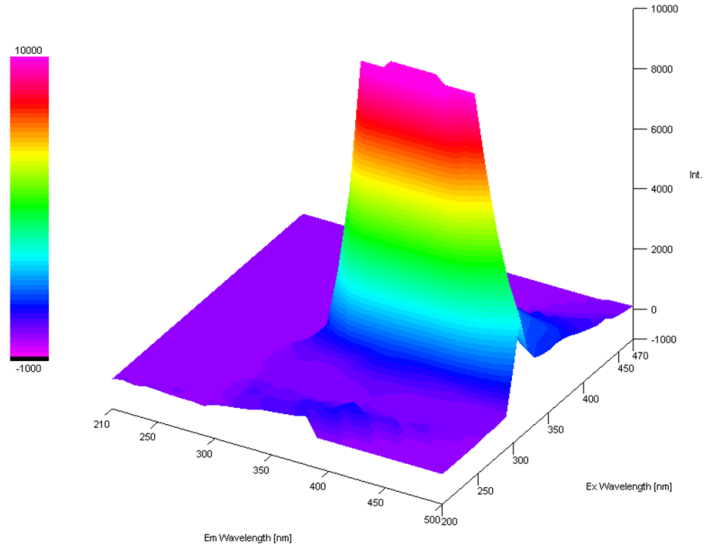

Рисунок 8 – 3-D спектр аспирина в присутствии энергетического напитка. Чувствительность прибора High

Из приведенных данных видно, что при длине волны λ = 380 нм относительная интенсивность флуоресценции аспирина в присутствии энергетического напитка равна 618,648 у. е.

Полученные данные свидетельствуют о том, что изученные напитки (экстракт нерастворимого кофе, экстракт листового чая и энергетический напиток), внесенные в одинаковом количестве, гасят интенсивность флуоресценции аспирина в разной степени (результаты приведены в таблице 4).

Таблица 4 – Относительная интенсивность флуоресценции аспирина в присутствии реальных напитков

Напиток	Интенсивность
Кофе нерастворимый	401,040
Чай черный листовой	872,879
Энергетический напиток	618,648

Используя уравнение тренда y = -217175*x+11259, полученного из градуировочного графика (рисунок 5), где y – интенсивность, а x – концентрация, была рассчитана концентрация кофеина в исследуемых растворах:

– чай черный листовой (экстракт): x = 0,0478 (мг/мл);

– кофе нерастворимый (экстракт): x = 0,0500 (мг/мл);

– энергетический напиток: x = 0,0489 (мг/мл).

Из полученных данных видно, что наибольшая концентрация кофеина обнаружена в экстракте нерастворимого кофе (0,0500 мг/мл), несколько меньшая концентрация кофеина (0,0489 мг/мл) обнаружена в энергетическом напитке, и наименьшая концентрация кофеина обнаружена в экстракте листового чая (0,0478 мг/мл).

Для определения кофеина в исходном кофе расчет проводили следующим образом: полученную концентрацию кофеина умножали на объем полученного экстракта и делили на массу навески, взятой для анализа:

$$(0{,}0005*100)/8*100\ \%=0{,}625\ \%.$$

Для определения кофеина в исходном чае расчет проводили следующим образом: полученную концентрацию кофеина умножали на объем полученного экстракта и делили на массу навески, взятой для анализа:

$$(0{,}000478*100)/16*100\ \%=0{,}299\ \%.$$

Заключение

Спектрофлуориметрический метод определения кофеина является весьма перспективным благодаря экспрессности, высокой специфичности и чувствительности, а также хорошей воспроизводимости результатов.

По результатам исследования флуоресценции водных растворов аспирина различной концентрации получена линейная зависимость относительной интенсивности флуоресценции аспирина в диапазоне концентраций от 0,0005 до 0,004 мг/мл. При изучении зависимости тушения флуоресценции аспирина в присутствии кофеина получена обратно пропорциональная линейная зависимость относительной интенсивности флуоресценции аспирина в зависимости от концентрации вводимого кофеина в диапазоне концентраций последнего 0,01–0,05 мг/мл.

На основании адаптированной методики определения кофеина были проведены анализы реальных кофеинсодержащих объектов: кофе нерастворимого, чайного напитка и энергетического напитка. Содержание кофеина в нерастворимом кофе составляет – 62,5 ppm, чайном напитке – 29,9 ppm, и энергетическом напитке – 0,0489 мг/мл, что соответствует требованиям, предъявляемым к указанным напиткам.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Введение в спектральный и люминесцентный анализ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.bsmu.by/downloads/kafedri/k_fiziki/2013-2/vveden.pdf – Дата доступа: 11.04.2024.

2. Общие закономерности хемилюминесценции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.studfiles.ru/preview/2782203/ – Дата доступа: 11.04.2024.

3. ***Weldegebreal, B***. Development of new analytical methods for the determination of caffeine content in aqueous solution of green coffee beans / B. Weldegebreal, M. Redi-Abshiro, B. S. Chandravanshi // Chemistry Central Journal. – 2017. – Vol. 11, № 126. – Access mode: https://bmcchem.biomedcentral.com/articles/10.1186/s13065-017-0356-3. – Access date: 05.04.2024.

4. ***Леоненко, И. И.*** Аналитическое применение эффектов тушения люминисценции (Обзор) / И. И. Леоненко [и др.] // Методы и объекты химического анализа. – 2012. – Т. 7, № 3. – С. 108–125.

5. ***Yan, P.*** Determination of nitrogen oxides with rhodamine B by fluorescence quenching method / P. Yan [at al.] // Int. J. Spectroscopy, 2011. – P. 1–4.

6. ***Вульфова, Д. А.*** 2-(5-[4- диметиламинофенил]-2-оксазолил)-бензойная кислота как флуоресцентный сенсор влаги в органических растворителях / Д. А. Вульфова [и др.] // Вісник Харків. нац. універ. – 2008. – № 820. – Хімія. Вип. 16, Т. 39. – С. 225–232.

7. ***Zhan, X.-Q.*** Sensitive fluorimetric determination of formaldehyde by the co-quenching effect of formaldehyde and sulfite on the fluorescence of tetra-substituted amino aluminium phthalocyanine. / X.-Q. Zhan [at al.] // Analyst (Cambridge, U. K.). – 2000. – Vol. 125. – P. 2330–2334.

8. ***Chenxu, Du.*** Fluorescence Sensing of Caffeine in Tea Beverages with 3,5-diaminobenzoic Acid / Du Chenxu [at al.] // Sensors. – 2020. – Vol. 20(3), № 819. – Access mode: https://doi.org/10.3390/s20030819. – Access date: 05.04.2024.

9. ***Smith, J.*** Analysis of Caffeine in Beverages Using Aspirin as a Fluorescent Chemosensor / J. Smith [at al.] // Chem. Educ. – 2016. – Vol. 93 (10). – P. 1776–1780. – Access mode: https://doi.org/10.1021/acs.jchemed.6b00303. – Access date: 05.04.2024.

10. ***Зайцева О. Е.*** Должны потребители кофеин-содержащих напитков знать фармакокинетику кофеина? / О. Е. Зайцева // Фундаментальные исследования. – 2015. – № 1-5. – С. 946–952.

11. ***Wierzejska, R.*** Caffeine-common ingredient in a diet and its influence on human health / R. Wierzejska // Rocz Panstw Zakl Hig. – 2012. – Vol. 63(2). – P. 141–147.

12. ***Luchiari N.*** Development of miniaturized fluorimetric device for caffeine determination using a smartphone / N. Luchiari [at al.] // RSC Advances. – 2019. – Vol. 60. –Access mode: https://doi.org/10.1039/C9RA06220C - Access date: 05.04.2024.

13. ***Горячева, И. Ю.*** Акридиновые красители в триплетном состоянии как реагенты для избирательного фосфориметрического определения полициклических ароматических углеводородов в мицеллах додецилсульфата натрия / И. Ю. Горячева, Г. В. Мельников, С. Н. Штыков // Журн. аналит. химии, 2000. – № 55(9). – С. 971–975.

14. ***Седакова, В. А.*** Анализ пищевых продуктов. Часть 1. / сост. В. А. Седакова. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2011. – 88 с.

Поступила в редакцию 22.07.2024 г.

Контакты: sedakova@m.msu.by (Лысова Валентина Антоновна), klebanova@m.msu.by (Клебанова Наталья Александровна), klebanov@m.msu.by (Клебанов Александр Владимирович), androbenkova@mail.ru (Дробенкова Анастасия Андреевна)

Lysova V. A., Klebanova N. A., Klebanov A. V., Drobenkova A. A. **QUANTITATIVE DETERMINATION OF CAFFEINE BY QUENCHING OF ASPIRIN FLUORESCENCE**

The article presents experimental data on the study of fluorescence of aqueous solutions of pure aspirin and aspirin in the presence of caffeine. Using spectrofluorometry, the process of quenching aspirin fluorescence in the presence of caffeine has been studied, and the range of caffeine concentrations in which aspirin fluorescence is most sensitive to the presence of caffeine has been established. Within this range, a calibration dependence of the relative fluorescence of aspirin as a function of caffeine concentration has been obtained, which can be used to determine caffeine in various real samples.

Keywords: aspirin, caffeine, spontaneous fluorescence, spectrofluorimetry, fluorescence quenching, relative fluorescence intensity.

УДК 612.821:796

УЧЕТ ПСИХОФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ ДЛЯ ОТБОРА В СЕКЦИЮ ГРЕБЛИ

Е. А. Кондратенкова
кандидат биологических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Л. Н. Соколовская
старший преподаватель
Московский финансово-промышленный университет «Синергия»

В работе обсуждаются данные, полученные при исследовании функционального состояния центральной нервной системы младших школьников, кандидатов для занятий греблей. Проводился анализ психофизиологических особенностей обследуемых для выявления потенциально наиболее перспективных спортсменов. Установлены качественные и количественные отличия сенсомоторного реагирования претендентов, позволяющие определить предрасположенность к занятиям данным видом спорта. Введена система оценки результатов психофизиологического тестирования, которая может быть использована для спортивной ориентации.

Ключевые слова: гребля, психофизиологические показатели, школьники, спортивный отбор.

Введение

Чтобы добиться максимально возможных результатов в современном профессиональном спорте, человеку необходимы несколько лет, а порой и десятилетий упорного труда и тяжелых тренировок. Проблема подготовки только одного высококвалифицированного атлета затрагивает целый спектр вопросов кадрового, организационного и методического характера. Поэтому очень важно уже на уровне спортивного отбора выявить наиболее талантливых, спортивно одаренных кандидатов, подходящих для данного вида спорта как по антропометрическим, так и по психофизиологическим показателям [1, 2].

Главной особенностью спортивного отбора детей является тот факт, что тренеру необходимо разглядеть в маленьком ребенке способности, которые еще не проявились. На сегодняшний день очевидно, что многие тренеры на начальных стадиях спортивного отбора в первую очередь руководствуются физическими данными потенциального кандидата. Значительно меньшее внимание уделяется исследованию психофизиологического статуса будущих спортсменов, хотя известно, что успех тренировочного процесса зависит не только от комплекции, но и от характеристик, определяемых центральной нервной системой (ЦНС) [3, 4]. Важность комплексного подхода для отбора детей в спортивные секции с обязательным использованием психофизиологического тестирования несомненна. Поэтому актуальным представилось произвести анализ сенсомоторного реагирования младших школьников с целью отбора наиболее перспективных для занятий греблей.

Основная часть

Цель: выявить особенности психофизиологических показателей у детей, кандидатов в секцию гребли, для улучшения качества спортивного отбора.

© Кондратенкова Е. А., Соколовская Л. Н., 2025

Методы: для психофизиологической диагностики применялся компьютерный комплекс «НС-ПсихоТест» (фирма «НейроСофт» г. Иваново). Исследовались показатели простой (ПЗМР) и сложных (реакция выбора (РВ) и реакция на движущийся объект (РДО) зрительно-моторных реакций). Обследование прошли 11 потенциальных кандидатов (учащиеся общеобразовательных школ г. Могилева) в секцию для занятий греблей. Было осуществлено 33 человеко-исследования и проанализировано 264 показателя. Так как для использования результатов психофизиологического тестирования в целях спортивного отбора необходимо учитывать всю совокупность полученных данных, мы присвоили испытуемым порядковые номера от 1 до 11. В соответствии с тем, был ли испытуемый худшим или лучшим по конкретному показателю, его результат оценивался соответствующей суммой баллов – от 1 до 11. Таким образом, обследуемые, набравшие наибольшее количество баллов по результатам всех тестов, будут наилучшими кандидатами для занятий греблей.

Нами был проведен анализ имеющихся литературных источников, где применялись методы психофизиологического тестирования для спортивной ориентации школьников [2, 4, 5]. Кроме того, мы учитывали полученные нами ранее экспериментальные данные, где проводился анализ наиболее эффективных психофизиологических тестов [6, 7]. Таким образом, наиболее валидными с нашей точки зрения для отбора в гребные виды спорта являются тесты ПЗМР, РВ и РДО.

Простая зрительно-моторная реакция – это элементарный вид произвольной реакции человека на зрительный стимул. ПЗМР состоит из двух последовательных компонентов: сенсорного (латентного) периода и моторного периода [8]. Известно, что этот тест, несмотря на кажущуюся простоту, является высоко информативным, так как позволяет оценить показатели, свидетельствующие о функциональном состоянии ЦНС и, как следствие, всего организма. Судя по полученным данным, наилучшее среднее время ПЗМР продемонстрировал испытуемый под № 2 с результатом 226 мс (таб. 1).

Таблица 1 – Показатели средней скорости ПЗМР у младших школьников, кандидатов для занятий греблей

Средняя скорость реакции (мс)	291	281	279	273	273	269	269	265	249	247	226
Номер испытуемого	8	3	1	5	10	11	4	7	6	9	2
Количество баллов	1	2	3	4	4	6	6	8	9	10	11

Это свидетельствует о том, что у него самая высокая скорость распространения возбуждения по нервным цепям. Учащиеся № 6 и № 9 показали приблизительно равное время реакции (247 и 249 мс соответственно). Школьник под № 7 завершил психофизиологическое тестирование с результатом 265 мс. Чуть хуже время реакции оказалось у испытуемых № 4 и № 11, их результат составил 269 мс. Одинаковую скорость ПЗМР показали школьники под № 5 и 10 (273 мс). Наихудшие результаты продемонстрировали учащиеся № 1, 3 и 8. Время их реакции составило 279, 281 и 291 мс соответственно. Это свидетельствует о том, что скорость проведения возбуждения к корковому концу зрительного анализатора у данных школьников наименьшая (таб. 1).

Для таких видов спорта, как гребля, важным является способность к концентрации внимания, стабильность выполнения монотонных действий [6, 8]. Поэтому необходимым оказалось отдельно проанализировать показатель среднеквадратичного отклонения (СО), который характеризует постоянство реагировании на зрительный стимул. Наименьший показатель среднеквадратичного отклонения продемонстрировал испытуемый № 2, что свидетельствует о высокой стабильности его сенсомоторного реагирования (таб. 2).

Таблица 2 – Показатели среднеквадратичного отклонения (ПЗМР) у младших школьников, кандидатов для занятий греблей

СО (±мс)	62,3	57,9	56,9	48,8	47,0	45,2	43,5	43,3	43,2	43,1	42,4
Номер испытуемого	8	5	9	7	11	4	6	3	1	10	2
Количество баллов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Несколько худший результат имеют школьники под № 10, 1, 3, 6 (±43,1, ±43,2, ±43,3 и ±43,5 мс соответственно). Это говорит о том, что способность стабильно отвечать на зрительный стимул у них несколько ниже. Наибольшая величина СО у школьника № 8 свидетельствует о наименьшей стабильности его сенсомоторной реакции по сравнению с другими обследуемыми (таб. 2).

Количество пропусков сигналов при выполнении теста ПЗМР является показателем, отражающим способность к концентрации внимания, а коэффициент точности Уиппла позволяет охарактеризовать эту способность [7, 8]. Число ошибок было наименьшим у школьника под № 5 (высокий коэффициент точности – 0,03 у. е.) (таб. 3).

Таблица 3 – Показатели коэффициента точности Уиппла (ПЗМР) у младших школьников, кандидатов для занятий греблей

Коэффициент точности Уиппла (у.е.)	0,16	0,16	0,13	0,11	0,11	0,09	0,09	0,08	0,05	0,04	0,03
Номер испытуемого	8	3	11	6	10	9	1	7	2	4	5
Количество баллов	1	1	3	4	4	6	6	8	9	10	11

У испытуемых под № 4 и 2 показатель коэффициента точности Уиппла составил 0,04 у. е. и 0,05 у. е. соответственно, что также свидетельствует о высокой способности к концентрации внимания (таб. 3). Наибольшее значение коэффициента точности снова оказалось у школьника под № 8. Таким образом, его способность сосредоточиться при выполнении теста оказалась наименьшей по сравнению с остальными.

Такой показатель, как уровень функциональных возможностей (УФВ), позволяет судить о способности обследуемого формировать адекватную заданию функциональную систему и достаточно длительно ее удерживать [8]. Самым высоким данный параметр оказался у школьников № 2 и № 7 (результат – 3,6 у. е.) (таб. 4). Следует отметить, что учащийся № 2 оказался обладателем наилучших результатов по трем показателям теста ПЗМР из четырех возможных. Чуть меньшим УФВ был у испытуемых под № 3, 4 и 8 (3,3, 3,2 и 3,0 у. е. соответственно). Уровень функциональных возможностей учащихся № 5 и № 11 оказался самым низким и составил 2,0 у. е. (таб. 4).

Таблица 4 – Показатели УФВ (ПЗМР) у младших школьников, кандидатов для занятий греблей

УФВ (у.е.)	2,0	2,0	2,2	2,2	2,7	2,9	3,0	3,2	3,3	3,6	3,6
Номер испытуемого	11	5	1	10	6	9	8	4	3	7	2
Количество баллов	1	1	3	3	5	6	7	8	9	10	10

Сущность реакции выбора заключается в обработке и оценке информации в ЦНС для принятия решения о моторном акте. Сложность заключается в том, что ответное действие (нажатие определенной кнопки в ответ на разные световые раздражители) нужно провести в очень короткий временной интервал, что провоцирует стрессовое состояние [6, 7, 8]. При анализе результатов РВ наилучшую среднюю скорость реакции показал учащийся под № 11 (311 мс – высокая скорость сенсомоторной реакции) (таб. 5).

Таблица 5 – Показатели средней скорости РВ у младших школьников, кандидатов для занятий греблей

Средняя скорость реакции (мс)	554	505	501	489	479	465	463	381	379	332	311
Номер испытуемого	8	3	5	9	1	7	6	4	10	2	11
Количество баллов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Это говорит о высокой подвижности нервных процессов у данного испытуемого. Школьник под № 2 завершил психофизиологическое тестирование с результатом 332 мс, что также является высоким показателем скорости сенсомоторного реагирования. Испытуемые № 4 и № 10 продемонстрировали примерно одинаковое время реакции (381 и 379 мс соответственно). Наихудшие результаты показали учащиеся № 5, № 3 и № 8 (501, 505 и 554 мс соответственно), что свидетельствует о более медленной скорости реакции в условиях эмоционального напряжения (по сравнению с остальными участниками тестирования).

Наименьшие показатели среднеквадратичного отклонения при выполнении теста РВ продемонстрировали школьники № 2, 5 и 3 (80,3, 80,4 и 80,4 мс соответственно) (таб. 6).

Таблица 6 – Показатели среднеквадратичного отклонения (РВ) у младших школьников, кандидатов для занятий греблей

СО (± мс)	128,5	124,6	117,9	106,3	98,8	98,7	92,9	82,4	80,4	80,4	80,3
Номер испытуемого	10	6	11	4	8	9	7	1	3	5	2
Количество баллов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	11

Известно, что индивидуумы с меньшим временем двигательной реакции и более высокой лабильностью нервной системы лучше адаптируются к деятельности, протекающей в жестко регламентированных условиях [7, 8]. Немного худший результат показали учащиеся под № 1, 7, 9 и 8 (±82,4, ±92,9, ±98,7 и ±98,8 мс) (таб. 6). Это свидетельствует о том, что скорость реагирования на разные цветовые стимулы у них менее стабильна по сравнению с лидером. Тем не менее, в стрессовых ситуациях у них также будет отмечаться высокая профессиональная надежность. Наименьшую стабильность сенсомоторного реагирования показал испытуемый под № 10. Именно у него величина среднеквадратичного отклонения оказалось самой высокой (±128,5 мс).

Наименьшее количество ошибок при выполнении теста РВ допустил учащийся под № 5 (высокий коэффициент точности – 0,09 у. е.) (таб. 7).

Таблица 7 – Показатели коэффициента точности Уиппла (РВ) у младших школьников, кандидатов для занятий греблей

Коэффициент точности Уиппла (у. е).	0,33	0,26	0,21	0,19	0,18	0,17	0,15	0,13	0,11	0,10	0,09
Номер испытуемого	11	10	4	1	3	2	9	6	7	8	5
Количество баллов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Это говорит о большей способности их рецепторного звена дифференцировать цветовой раздражитель чем у других. У испытуемых под № 8 и 7 и 6 показатель Уиппла составил 0,10, 0,11 и 0,13 у. е. соответственно, что также свидетельствует о высокой способности к концентрации внимания в условиях стресса (таб. 7). Наибольшие коэффициенты точности оказались у школьников № 4, 10 и 11 (0,21 у. е., 0,26 у. е. и 0,33 у. е.).

РДО является сложным сенсомоторным действием, который формируется на основе оценки скорости движения. При анализе РДО оценивалось число точных реакций, число реакций опережения и запаздывания в совокупности, так как это дает наилучшую возможность оценить баланс нервных процессов [8].

Число точных реакций оказалось наибольшим у испытуемого под № 2 (19), а соотношение количества опережений к количеству запаздываний составило 23 к 8 (таб. 8).

Таблица 8 – Показатели РДО у младших школьников, кандидатов для занятий греблей

Количество точных реакций	4	4	10	3	5	11	12	19	2	11	4
Количество реакций опережения	41	40	27	46	7	36	7	23	42	33	45
Количество реакций запаздывания	4	6	13	1	18	3	31	8	6	6	1
Номер испытуемого	10	8	4	11	3	9	1	2	7	5	6
Количество баллов	1	2	2	4	4	6	6	9	10	11	12

Наименьшее количество точных реакций было у школьника под № 7. Число его реакций опережений составило 42, а запаздываний – 6 (неуравновешенность нервных процессов с преобладанием возбуждения). Наибольшее количество реакций опережения было у школьника № 11 (46) при количестве запаздываний 1, что также говорит о неуравновешенности нервных процессов с преобладанием силы возбуждения. Наибольшее число запаздываний при выполнении теста оказалось у испытуемого № 1 (31) при количестве точных реакций и реакций опережения 12 и 7 соответственно. Следовательно, можно сделать вывод о неуравновешенности с преобладанием торможения.

Известно, что любая деятельность, в том числе и спортивная, в условиях преобладающего торможения невозможна, тогда как повышенный уровень возбуждения свидетельствует о готовности ЦНС к выполнению работы [3, 4].

После подсчета количества баллов по результатам тестов кандидаты для занятия греблей были распределены в следующем порядке:

Таблица 9 – Сумма набранных баллов младшими школьниками, кандидатами для занятий греблей

Номер испытуемого	8	11	10	3	1	9	6	4	7	5	2
Сумма набранных баллов	30	32	34	40	44	48	48	49	62	62	77

Таким образом, наибольшее суммарное количество баллов набрал испытуемый под № 2, на втором месте с одинаковым количеством баллов расположились школьники под № 5 и № 7. Учащиеся под № 4, 6 и 9 набрали 49, 48 и 48 баллов соответственно, а наименьший результат по сумме всех тестов продемонстрировал школьник под № 8.

Заключение

Для психофизиологического тестирования потенциальных спортсменов наиболее информативными, с нашей точки зрения, являются следующие методики: ПЗМР, РВ и РДО. Проанализировав результаты обследования кандидатов по этим тестам в совокупности, мы установили, что лучшие показатели продемонстрировали школьники под № 2, 5 и 7. Можно предположить, что среди всех участников тестирования данные испытуемые имеют наибольшую возможность достичь максимально высоких результатов в таком виде спорта, как гребля. Наихудшие показатели оказались у школьников под № 10, 11 и 8.

Таким образом, нами был проведен теоретический анализ литературных источников, проанализированы собственные экспериментальные данные, подобрана комплексная методика для оценки психофизиологических особенностей младших школьников, которая может быть рекомендована тренеру с целью наиболее объективного отбора кандидатов для занятий тем или иным видом спорта.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Zakharova, A.*** Physical and Psychophysiological Profiles of Sub-elite Basketball Players Novel Approach to Complex Testing / A. Zakharova, K. Mekhdieva, S. Kondratovitch // Proceedings of the 5th International Congress on Sport Sciences Research and Technology Support, 2017. – P. 132–139.

2. ***Готовцев, И. И.*** Актуальные вопросы развития физической культуры и массового спорта на современном этапе / И. И. Готовцев. – Киров : МЦНИП, 2014. – 437 с.

3. ***Микрюкова, М. Г.*** Дифференцированный подход к подготовке юных спортсменов на основе учета свойств нервной системы / М. Г. Микрюкова // Современные проблемы науки и образования. – 2015. – № 1(1). – С. 166–168.

4. ***Ильин, Е. П.*** Психология спорта / Е. П. Ильин. – СПб. : Питер, 2012. – 338 с.

5. ***Bigsby, K.*** Effects of postural control manipulation on visuomotor training performance: comparative data in healthy athletes / K. Bigsby [et al.] // Int. J. Sports PhysTher. – 2014. – № 9 (4). – P. 436–446.

6. ***Кондратенкова, Е. А.*** Особенности сенсомоторики спортсменов циклических видов спорта разной циркадианной организации и темперамента / Е. А. Кондратенкова // Совершенствование системы подготовки кадров в высшем учебном заведении: направления и технологии: сб. науч. ст. материалы XIV Междунар. науч. конф., Гродно, 9 нояб. 2022 г. / ГрГУ им. Янки Купалы ; редкол.: А. К. Лушневский [и др.]. – Гродно : ГрГУ им. Янки Купалы, 2022. – С. 159–162.

7. ***Кондратенкова, Е. А.*** Анализ психомоторики студентов–спортсменов с различной хронобиологической организацией на разных этапах подготовки / Е. А. Кондратенкова // Совершенствование системы подготовки кадров в высшем учебном заведении: направления и технологии: сб. науч. ст. материалы XV Междунар. науч. конф., Гродно, 15 нояб. 2023 г. / ГрГУ им. Янки Купалы; редкол.: гл. ред. В. М. Кривчиков ; редкол.: В. М. Кривчиков [и др.]. – Гродно : ГрГУ им. Янки Купалы, 2023. – С. 182–185.

8. ***Мантрова, И. Н.*** Методическое руководство по психофизиологической и психологической диагностике / И. Н. Мантрова. – Иваново : ООО «Нейрософт», 2007. – 216 с.

Поступила в редакцию 6.11.2024 г.

Контакты: kat-kondratenkova@yandex.ru (Кондратенкова Екатерина Александровна), liudmilasokol25@gmail.com (Соколовская Людмила Николаевна)

Kondratenkova E. A., Sokolovskaya L. N. **STATISTICAL RECORDS OF PSYCHOPHYSIOLOGICAL INDICATORS OF JUNIOR SCHOOLCHILDREN TO BE SELECTED FOR A ROWING COURSE**

The paper examines the data obtained from the study of the functional state of the central nervous system of primary school children who are candidates for rowing training. The analysis of the psychophysiological characteristics of the examinees has been carried out to identify potentially the most promising athletes. As a result, qualitative and quantitative differences in the sensorimotor responses of the applicants have been established, enabling the determination of their predisposition towards this particular sport. A system for evaluating the results of psychophysiological testing has been introduced, which can be used for sports orientation.

Keywords: rowing, psychophysiological indicators, schoolchildren, sports selection.

УДК 616-097

БИОМАРКЕРЫ РЕСПИРАТОРНЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ КАК ПРЕДИКТОРЫ РАЗВИТИЯ ИММУНОПАТОЛОГИЙ ОРГАНОВ ДЫХАНИЯ ДЕТЕЙ

О. В. Поворова
старший преподаватель кафедры естествознания факультета математики и естествознания
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Н. Д. Титова
доктор медицинских наук, доцент, профессор кафедры педиатрии института повышения квалификации и переподготовки кадров здравоохранения
Белорусский государственный медицинский университет

Т. И. Чегерова
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры экономики и управления
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. С. Позднякова
доктор медицинских наук, профессор, профессор кафедры пульмонологии, фтизиатрии, аллергологии и профпатологии с курсом повышения квалификации и переподготовки
Белорусский государственный медицинский университет

Риск развития иммунопатологий органов дыхания у детей с повторными респираторными заболеваниями оцениваются следующими предикторами: повышенным содержанием общего сывороточного IgE, CD3+CD4+ хелперных Т-лимфоцитов, CD3+ общих Т-лимфоцитов и повышенным иммунорегуляторным индексом CD4/CD8. Определены предикторы развития инфекционной и аллергической иммунопатологии органов дыхания детей.

Ключевые слова: повторные респираторные заболевания детей 1–16 лет, содержание сывороточных иммуноглобулинов, содержание субпопуляций лимфоцитов, риск развития иммунопатологий органов дыхания.

Введение

Перспективность поиска предикторов заболеваний органов дыхания определяется тем, что острые респираторные заболевания занимают первое место в структуре инфекционных заболеваний у детей (удельный вес 92–94%). Для каждого заболевания специфичны биомаркеры как объективные биологические показатели, измеряемые в организме и используемые на биохимическом уровне [1]. Биомаркеры указывают на текущее состояние организма, наличие заболевания на момент исследования. Для предсказания вероятности возникновения или развития заболеваний используют предикторы, позволяющие спрогнозировать развитие заболевания на основе наблюдений, статистически значимых зависимостей. Таким образом, предикторы используются для прогнозирования риска заболевания в будущем на основе общих статистических закономерностей, биомаркеры – для диагностики и мониторинга текущего состояния здоровья в момент измерения.

© Поворова О. В., Титова Н. Д., Чегерова Т. И., Позднякова А. С. 2025

Оценка биомаркеров может помочь объяснить эмпирические результаты клинических испытаний, связав полученные закономерности на молекулярном, клеточном уровне с клиническими реакциями. Повреждения тканей органов дыханий сопровождается качественным и количественным изменением клеток крови и секреторных жидкостей, синтезом более 30 реагентов белковой природы как биомаркеров воспаления [1, 2]. При заболеваниях органов дыхания в качестве биомаркеров используют количественное содержание клеток иммунной системы в кровотоке, относительные показатели (ОНЛ – отношение нейтрофилов к лимфоцитам; ОНЛ, умноженный на количество моноцитов; ОНЛ, умноженный на количество тромбоцитов, эритроцитарный индекс [3–5]. Биомаркеры как гетерогенные поверхностные молекулы клетки характеризуют стадию дифференцировки клетки и ее принадлежность к определенной субпопуляции или популяции. Под фенотипом клетки понимают совокупность всех поверхностных маркеров и рецепторов.

Наиболее часто используют плазменные пептидные биомаркеры воспаления: С-реактивный белок, прокальцитонин, фибриноген, фактор некроза опухолей α, интерлейкины ИЛ-6, -8, -10 и др. [2, 6], пероксид водорода [7], пресепсин [8], периостин [5], метаболиты арахидоновой кислоты (простагландины, лейкотриены и др.) [9, 10], среднелетучие метаболиты [7], матриксная металлопротеиназа [1], белки булавовидных клеток, альвеоломуцины, тумор-некротический фактор-α [11]. Повышенное содержание метаболитов NO, α1-кислого гликопротеина в конденсате выдыхаемого воздуха является биомаркером развития тяжелых форм воспаления легких, бронхиальной астмы [10, 12]. Отмечается не только повышенное содержание общего IgE, эозинофилы, FeNO, периостина, но одновременное повышение нескольких маркеров воспаления дыхательных путей, что связывают с общностью механизмов регуляции продукции IgE (ИЛ-4, -13), эозинофилов (ИЛ-4, -5, -13), синтеза FeNO (ИЛ-4, -13) [5, 13]. Сложные взаимоотношения имеющихся при респираторных заболеваниях патологических процессов на клиническом, патоморфологическом и молекулярных уровнях не всегда в полной мере отражаются по результатам диагностики. Неоднородность респираторных заболеваний, характеризующаяся множеством фенотипов, представляет собой препятствие для выявления одного биомаркера при данном заболевании. Гомеостаз организма поддерживается сложными регуляторными механизмами, включающими общие механизмы противовоспалительного ответа, выполняющих роль провоспалительных факторов при развитии патологических состояний. Предикторы позволяют спрогнозировать в будущем развитие заболеваний на основании особенностей отклонений различных биомаркеров заболеваний.

Цель исследования. Определить основные иммунологические предикторы риска формирования хронической патологии органов дыхания у детей с повторными респираторными заболеваниями.

Материалы и методы исследований

Объект исследования – дети в возрасте 1–16 лет с повторными респираторными заболеваниями (шесть и более случаев в год).

Предмет исследования – оценка содержания показателей иммунитета у детей с респираторными заболеваниями на момент клинически здорового состояния.

Анализ показателей иммунитета проводился в клинико-диагностической лаборатории УЗ «Минская областная детская клиническая больница» (УЗ «МОДКБ») (N=120). В основную группу (ОГ, N=98) входили дети с рецидивирующими болезнями верхних и нижних дыхательных путей двух основных подгрупп – с аллергическими заболеваниями (ОГ1) и без аллергических заболеваний (ОГ2): ОГ1 – страдающие хроническими аллергическими заболеваниями помимо острых респираторных инфекций (диагноз аллергической бронхиальной астмы и/или аллергического ринита, N=30); ОГ2.1 – имеющие в анамнезе за последний год помимо острых респираторных инфекций пневмонии (N=14); ОГ2.2 – с повторными респираторными заболеваниями дыхательных путей (N=54). В контрольную группу (К, N=22) вошли дети, у которых в анализируемый год было 1,2 случая респираторных заболеваний.

В ходе исследований анализировали содержание показателей периферической крови с дифференцировкой лейкоцитарной формулы; фагоцитарную активность нейтрофилов

периферической крови (фагоцитарный индекс – ФИ, фагоцитарное число – ФЧ); содержание IgM, IgG, IgA, IgE, циркулирующих иммунных комплексов (ЦИК) в сыворотке крови; содержание лимфоцитов CD3+, CD3+CD4+, CD3+CD8+, CD3−CD19+, CD3−CD56+, CD3+CD56+, CD3+CD25+, CD3+HLA-DR. Рассчитывали иммунорегуляторный индекс (CD4/CD8). В качестве референсных интервалов показателей иммунного статуса приняты референсные значения (РЗ), используемые в лаборатории УЗ «МОДКБ» [14].

У детей с повторными респираторными заболеваниями была проведена оценка риска (OR) развития иммунопатологических состояний:

$$OR=(a/b)/(c/d)\ , \qquad (1)$$

где a – число детей со значением иммунологического показателя в пределах РЗ в ОГ2.2,

b – число детей со значением иммунологического показателя в пределах РЗ в ОГ1 и/или ОГ2.1,

c – число детей со значением иммунологического показателя выше или ниже РЗ в ОГ2.2,

d – число детей со значением иммунологического показателя выше или ниже РЗ в ОГ1 и/или ОГ2.1.

Статистический анализ проводили с помощью пакета прикладных программ «Statistica 10.0». Данные представлены в виде медианы, верхнего и нижнего квартилей. Статистическая достоверность различий оценивалась с помощью критерия χ^2 Пирсона, критический уровень значимости принят 0,05.

Результаты исследований

Знание особенностей фенотипа иммунологических показателей часто болеющих детей необходимо для диагностики, лечения и профилактики иммунозависимых заболеваний. У детей, болеющих шесть и более раз в год респираторными заболеваниями, по сравнению с контрольной группой определены статистически значимые отличия по следующим изменениям в показателях иммунитета (таблица 1), которые могут быть использованы в качестве биомаркеров рекуррентных заболеваний.

В группе детей ОГ2.2 с респираторными заболеваниями более шести случаев в год отклонения в содержании следующих показателей иммунитета статистически значимо:

– выше их РЗ – лимфоцитов (в абс. и пр.ед.), фагоцитарный индекс, фагоцитарное число, иммунорегуляторный индекс (CD4/CD8), CD3−CD19+ (в абс.ед.), CD3+CD25 (в пр.ед.), CD3+HLA-DR (в абс. и пр.ед.);

– ниже их РЗ – IgA, IgG, CD3+CD4+.

У детей ОГ1 значимо выше содержание лейкоцитов, лимфоцитов, IgE, CD3+HLA-DR, фагоцитарный индекс, фагоцитарное число, иммунорегуляторный индекс (CD4/CD8). Содержание сывороточного IgA ниже диапазонов его РЗ.

У детей ОГ2.1 – выше содержание лейкоцитов, лимфоцитов, IgE, ЦИК, фагоцитарный индекс, фагоцитарное число, иммунорегуляторный индекс (CD4/CD8), CD3 Т-общих лимфоцитов, CD8 цитотоксических Т-лимфоцитов, CD19 В-лимфоцитов, CD3−CD56 лимфоцитов; ниже – IgG, IgA, IgM, CD3+CD4+ Т-хелперных лимфоцитов.

У 54,1% (n=53 из 98) детей ОГ выявлялись сочетанные нарушения по содержанию иммуноглобулинов, субпопуляций лимфоцитов. При учете 14 показателей иммунитета (IgE, IgA, IgG, IgM, C3, C4, CD3, CD4, CD8, CD19, CD3–/56, CD3+/56, CD3+/25, CD3+HLA-DR), из выявленных 45 вариантов их сочетания вне диапазона РЗ все были представлены единичными случаями в каждой изученной группе, что свидетельствует об индивидуальных особенностях иммунореагирования при респираторных заболеваниях и требует дальнейшего изучения. Изменения в содержании показателей клеточного иммунитета были определены только среди детей с изменениями в гуморальном блоке иммунитета и не выявлены среди тех детей, у которых содержание иммуноглобулинов было в пределах РЗ. Анализ по

группам позволил выделить четыре основных фенотипа иммунного статуса, соответствующие различным клиническим вариантам течения заболеваний в группах у детей с показателями, которые отличались от РЗ. Под фенотипом заболеваний понимают совокупность клинических признаков («портрет»), которые сформировались на генетическом уровне под влиянием факторов окружающей среды. Фенотип является отражением внешних проявлений заболеваний. Нами определены следующие четыре фенотипа иммунного статуса [14].

Фенотип 1. Аллергический фенотип, который характеризовался гиперпродукцией IgE, повышением иммунорегуляторного индекса (CD4/CD8), повышением уровня CD3+Т-общих и/или CD4+ Т-хелперов. Этот фенотип встречался преимущественно у детей ОГ1 и ОГ2.2.

Фенотип 2. Инфекционный фенотип – с гиперпродукцией IgG и/или IgM. Все дети с этим фенотипом были из ОГ2.2.

Фенотип 3. Иммунодефицитный фенотип – со снижением уровней IgA, IgG и/или снижением уровней В-лимфоцитов. Иммунодефицитный фенотип определялся у детей ОГ2.1 и ОГ2.2.

Фенотип 4. Комбинированный фенотип – инфекционно-аллергический характеризовался разнонаправленными изменениями в иммунограмме: гиперпродукцией IgG, IgM и/или IgE, снижением уровня IgA, повышением или снижением уровня CD3+Т-лимфоцитов общих и/или CD4+ Т-лимфоцитов хелперов, повышением уровня В-лимфоцитов (CD19+). Комбинированный фенотип определялся у детей ОГ1 и ОГ2.2.

Показатели функционального состояния различных звеньев иммунной системы у детей с рецидивами респираторных инфекций характеризуются большим разнообразием значений: 55,1% имеют иммунодефицитный фенотип, аллергический фенотип у 22,5% детей, комбинированный фенотип у 16,3%, инфекционный фенотип имеют 6,1% детей. Между изученными фенотипами определены статистически значимые различия (таблица 2).

При одновременном учете содержания показателей иммунитета четырех фенотипов определены следующие значимые изменения в иммунограммах: у аллергического и комбинированного фенотипов выше содержание сывороточного общего IgE, иммунорегуляторного индекса CD4/CD8; у иммунодефицитного и инфекционного фенотипов ниже содержание общего сывороточного IgA; у иммунодефицитного и аллергического фенотипов ниже содержание общего сывороточного IgG.

Для определения предикторов развития иммунопатологий органов дыхания у детей с повторными респираторными заболеваниями были рассчитаны риски формирования хронических аллергических, инфекционно-воспалительных процессов в дыхательных путях (рисунок 1). Риск развития иммунопатологии у ОГ2.2 рассчитывался как отношение шансов ОГ2.1 и/или ОГ1 к ОГ2.2 (формула 1).

На рисунке 1 представлены предикторы формирования иммунопатологий органов дыхания в порядке убывания величины риска их развития в трех изученных вариантах нарушения иммунореагирования. Предикторами развития хронических инфекционно-аллергических процессов в органах дыхания детей с повторными респираторными заболеваниями определены:

– повышенное содержание общего сывороточного IgE (OR=6,686 означает, что риск развития иммунопатологий в 6,686 раз выше у тех детей, у которых в состоянии клинического благополучия повышено содержание данного иммуноглобулина, $\chi2$=6,8271 p=0,0089),

– повышенное содержание хелперных CD3+CD4+ Т-лимфоцитов (OR=5,236 $\chi2$=5,7783 p=0,0556),

– повышенное содержание общих CD3+ Т-лимфоцитов (OR=4,919 $\chi2$=4,3306 p=0,0374),

– повышенное значение иммунорегуляторного индекса CD4/CD8 (OR=2,419 $\chi2$=7,2968 p=0,026).

Предикторами развития аллергической направленности иммунного ответа у детей с повторными респираторными заболеваниями определены:

– повышенное содержание общего сывороточного IgE (OR=7,913 $\chi2$=6,0559 p=0,0139),

– повышенное значение иммунорегуляторного индекса CD4/CD8 (OR=4,995 $\chi 2$=9,0129 p=0,0027),

– сниженное содержание сывороточного IgA (OR=2,629 $\chi 2$=3,5735 p=0,0587).

Предикторами инфекционных болезней органов дыхания определены:

– повышенное содержание общих CD3+ Т-лимфоцитов (OR=14,444 $\chi 2$=8,5697 p=0,0034),

– пониженное содержание CD3–CD19+ В-лимфоцитов (OR=5,459 $\chi 2$=5,6801 p=0,0172).

Заключение

Риск развития иммунопатологий органов дыхания у детей с повторными респираторными заболеваниями оцениваются следующими предикторами: повышенным содержанием общего сывороточного IgE, CD3+CD4+ хелперных Т-лимфоцитов, CD3+ общих Т-лимфоцитов и повышенным иммунорегуляторным индексом.

Предикторами развития аллергической направленности иммунного ответа у детей являются повышенное содержание общего сывороточного IgE, иммунорегуляторного индекса CD4/CD8 и сниженное содержание IgA. Предикторами развития хронических инфекционных процессов в органах дыхания определены повышенное содержание CD3+ общих Т-лимфоцитов при пониженном содержании CD3−CD19+ В-лимфоцитов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Саенко, Ю. С.*** Роль контроля уровня биомаркеров в выборе тактики реабилитации пациентов после хронических легочных заболеваний / Ю. С. Саенко [и др.] // Вестник физиотерапии и курортологии. – 2023. – Т. 29, № 4. – С. 54–58.

2. ***Зайцев, А. А.*** Биомаркеры воспаления при заболеваниях органов дыхания: клиническая практика и перспективы / А. А. Зайцев, Т. В. Кондратьева // Consilium Medicum. – 2020. – Т. 22, № 3. – С. 34–39. DOI: 10.26442/20751753.2020.3.200065.

3. ***Фетлам, Д. Л.*** Прогностические маркеры гнойно-деструктивных заболеваний легких / Д. Л. Фетлам [и др.] // Общая реаниматология. – 2024. – Т. 20, № 2. – С. 14–28. DOI: 10.15360/1813-9779-2024-2-14-28.

4. ***Устинович, Ю. А.*** Врожденная пневмония: современный взгляд / Ю. А. Устинович [и др.] // Репродуктивное здоровье Восточная Европа. – 2024. – Т. 14, № 1. – С. 65–79.

5. ***Шахова, Н. В.*** Периостин – биомаркер бронхиальной астмы / Н. В. Шахова // Вопросы современной педиатрии. – 2019. – Т. 18, № 5. – С. 339–345.

6. ***Оспельникова, Т. П.*** Особенности биомаркеров воспаления при гриппе / Т. П. Оспельникова [и др.] // Журнал микробиологии, эпидемиологии и иммунобиологии. – 2018. – № 3. – С. 67–73.

7. ***Анаев, Э. Х.*** Неинвазивные биомаркеры хронической обструктивной болезни легких / Э. Х. Анаев [и др.] // Пульмонология. – 2013. – № 3. – С. 97–104.

8. ***Журавлева, Л. П.*** Значение биомаркера пресептина в сыворотке крови при пневмониях у недоношенных новорожденных / Л. П. Журавлева, В. И. Новикова // Вестник ВГМУ. – 2020. – Т. 19, № 4. – С. 46–52.

9. ***Бурбелло, А. Т.*** Внебольничная пневмония: биомаркеры воспаления и омега-3 полиненасыщенные жирные кислоты (обзор) / А. Т. Бурбелло [и др.] // Саратовский научно-медицинский журнал. – 2014. – Т. 10, № 1. – С. 173–178.

10 ***Евтеев, В. А.*** Биомаркеры заболеваний легких / В. А. Евтеев, В. Г. Кукес, А. С. Белков // Лекарственные средства и рациональная фармакотерапия. – 2015. – № 3. – С. 12–16.

11 ***Баймаканова, Г. Е.*** Значение биомаркеров при хронической обструктивной болезни легких / Г. Е. Баймаканова, С. Н. Авдеев // Пульмонология. – 2013. – № 3. – С. 105–110.

12. ***Орлова, Г. П.*** Маркеры активности экзогенных интерстициальных заболеваний легких / Г. П. Орлова, Е. А Суркова, С. В. Лапин // Пульмонология. – 2016. – Т. 26, № 2. – С. 180–185.

13. ***Сергеева, Г. Р.*** Биомаркеры воспаления дыхательных путей у пациентов с тяжелой бронхиальной астмой в реальной клинической практике / Г. Р. Сергеева, А. В. Емельянов, Е. В. Лешенкова // Пульмонология. – 2020. – Т. 30, № 4. – С. 437–445. DOI: 10.18093/0869-0189-2020-30-4-437-445.

14. ***Поворова, О. В.*** Фенотипы иммунного статуса у детей с рецидивирующими респираторными инфекциями / О. В. Поворова, Н. Д. Титова // Иммунопатология, аллергология, инфектология. – 2021. – № 2. – С. 31–39.

Таблица 1 — Отклонения показателей иммунитета детей с повторными респираторными заболеваниями, для которых зафиксированы статистически значимые отличия

Показатели иммунитета		К&ОГ2.2		К&ОГ1		К1&ОГ2.1	
		χ2	p-level	χ2	p-level	χ2	p-level
ЛЦ↑	абс.ед.			4,6432	0,0312	3,9650	0,0465
	%	9,7353	0,0077	10,9713	0,0009	10,3024	0,0058
ЛФ↑	абс.ед.	11,8222	0,0027	11,4400	0,0007	16,1633	0,0001
IgE↑				5,9319	0,0149	3,9650	0,0465
IgA↓		14,2906	0,0002	5,9319	0,0149	11,3143	0,0008
IgG↓		6,9916	0,0303			6,1039	0,0473
IgM↓						3,9650	0,0465
ЦИК↑						3,9650	0,0465
ФИ↑		23,7623	0,0000	16,9482	0,0002	11,3143	0,0035
ФЧ↑		23,7623	0,0000	12,7111	0,0017	16,1633	0,0003
	%					9,1244	0,0025
CD3↑	абс.ед.					6,1039	0,0473
	%					3,9650	0,0465
CD8↑	абс.ед.					6,1039	0,0473
CD4↓	%	6,632	0,0363			6,1039	0,0473
CD4/CD8↑		21,33	0,0000	35,3009	0,0000	21,7582	0,0000
	%					9,1244	0,0025
CD19↑	абс.ед.	6,3892	0,0409			7,0714	0,0078
CD3−CD56+↑	абс.ед.					6,1039	0,0473
CD25↑	%	5,0684	0,0244				
	%	3,9669	0,0464	5,2946	0,0214		
HLA-DR↑	абс.ед.	7,4355	0,0243				

↑ - содержание изучаемого показателя иммунитета выше референсных значений,
↓ - ниже референсных значений.

Таблица 2 — Особенности отклонений в показателях иммунограмм в зависимости от фенотипа рекуррентных заболеваний органов дыхания, Me [25%–75%]

Отклонения показателя	χ2	p-level	фенотип 1	фенотип 2	фенотип 3	фенотип 4
IgE↑	19,9966	0,0002	167,0 [74,0–559,0]	59,0 [43,0–73,0]	55,5 [45,0–87,0]	78,5 [52,5–278,5]
IgA↓	10,5570	0,0144	1,14 [0,78–1,44]	0,795 [0–1,14]	0,755 [0,28–1,24]	0,915 [0,61–1,215]
IgG↓	28,7339	0,0001	9,375 [7,68–11,5]	13,91 [7,76–16,47]	9,33 [7,88–10,97]	11,72 [9,015–13,315]
CD4/CD8↑	18,0581	0,0061	1,925 [1,69–2,27]	1,535 [1,48–1,67]	1,58 [1,24–1,91]	1,805 [1,56–1,97]

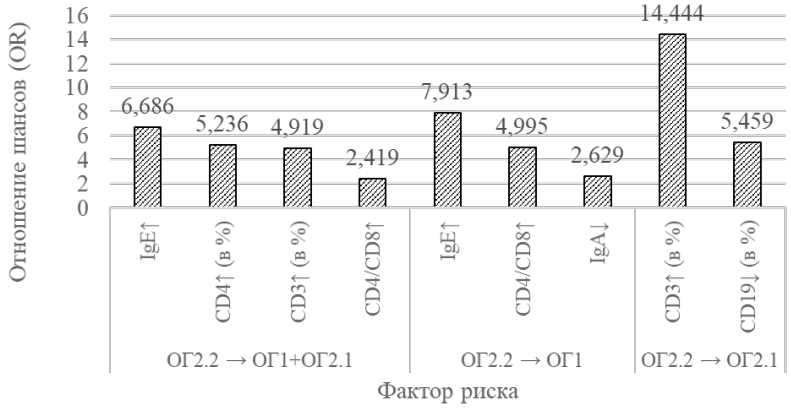

Рисунок 1 — Предикторы развития иммунопатологий органов дыхания у детей с повторными респираторными заболеваниями

Поступила в редакцию 29.11.2024 г.

Контакты: povorov@mail.ru (Поворова Оксана Викторовна), nadytitova@mail.ru (Титова Надежда Дмитриевна), chegerova@m.msu.by (Чегерова Татьяна Ивановна), anastasia-poz@yandex.ru (Позднякова Анастасия Семеновна)

Povorova O. V., Titova N. D., Chegerova T. I., Pozdnyakova A. S. **BIOMARKERS OF RESPIRATORY DISEASES AS PREDICTORS OF THE DEVELOPMENT OF RESPIRATORY IMMUNOPATHOLOGIES IN CHILDREN**

The risk of developing respiratory immunopathologies in children with recurrent respiratory diseases is assessed by the following predictors: elevated levels of total serum IgE, CD3+CD4+ helper T-lymphocytes, CD3+ total T-lymphocytes and an increased immunoregulatory index CD4/CD8. The predictors of the development of infectious and allergic immunopathology of children's respiratory organs have been determined.

Keywords: recurrent respiratory diseases in children aged 1-16 years, serum immunoglobulin levels, lymphocyte subpopulation levels, risk of developing respiratory immunopathologies.

УДК 581.552

ВЛИЯНИЕ УРБАНИЗИРОВАННОЙ СРЕДЫ НА ФЕНОЛОГИЧЕСКИЕ ФАЗЫ И ЖИЗНЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕКОТОРЫХ ДРЕВЕСНЫХ РАСТЕНИЙ г. МИНСКА

Н. П. Стригельская
старший преподаватель кафедры общей биологии и генетики
Международный государственный экологический институт имени А. Д. Сахарова Белорусского государственного университета

И. Э. Бученков
кандидат сельскохозяйственных наук, доцент, проректор по учебной работе
Полесский государственный университет

А. Г. Чернецкая
кандидат сельскохозяйственных наук, доцент, заведующий кафедрой общей биологии и генетики
Международный государственный экологический институт имени А. Д. Сахарова Белорусского государственного университета

Городская среда отличается от естественной природной практически по всем экологическим параметрам. Факторы городской среды влияют на многие показатели морфологии, биологии и биохимии растений. В статье авторами приводятся результаты изучения видового состава, наступления фенологических фаз и характеристик жизненного состояния древесных растений, используемых в озеленении г. Минска.

Ключевые слова: озеленение, урбаносреда, город Минск, видовое разнообразие, доминантные виды, фенологические фазы, жизненное состояние.

Введение

Экологический потенциал городских ландшафтов во многом детерминируется структурой растительности, ее видовым составом, полнотой, возрастом древостоев, состоянием и устойчивостью их к факторам городской среды.

Древесные растения способны значительно очищать воздух от пыли, сажи, копоти; снижать шумовой фон города; воздействовать на микроклимат города: регулировать тепловой режим и режим влажности, снижать интенсивность солнечной радиации; выделять фитонциды, обладающие мощным антимикробным действием.

Городская среда резко отличается от естественной природной практически по всем экологическим параметрам − освещенности, температурному режиму и влажности, величине солнечной радиации, составу атмосферного воздуха [1, 2].

В связи с этим актуальным является проведение исследований по изучению морфо-биологических особенностей древесных растений в условиях городской среды в сравнении с естественными популяциями.

Целью нашего исследования являлось изучение видового состава и некоторых морфо-биологических особенностей древесных растений в условиях г. Минска.

Методы и методология исследования

Исследования проведены в 2020–2023 гг., объект исследований – лиственные древесные растения, произрастающие в городе Минске и его окрестностях в составе различных эко-

© Стригельская Н. П., Бученков И. Э., Чернецкая А. Г., 2025

логических категорий насаждений: магистральные посадки (крупнейшие магистральные улицы – проспект Независимости и Партизанский проспект); парковых зонах (Лошицкий усадебно-парковый комплекс и Парк культуры и отдыха имени Челюскинцев). Согласно методическим подходам С. Н. Краснощековой (1987) [3], в качестве зон условного контроля (ЗУК) выбраны две территории: зона отдыха «Минское море» (Заславское водохранилище) и Минское городище (д. Городище).

В изученных нами функциональных зонах г. Минска были проложены маршруты, на каждом из которых были определены учетные площадки в количестве 10 штук размером 10×10 м.

На учетных площадках был проведен отбор и нумерация учетных растений доминантных видов (по 5 растений одного возраста для каждого вида). В целом было исследовано 1500 учетных растений.

Фенологические наблюдения проводили путем фиксации следующих стадий сезонных изменений: распускание почек (появление конуса листьев) ($Пб^2$), начало цветения ($Ц^2$), конец цветения ($Ц^3$), созревание плодов, семян ($Пл^3$), изменение окраски отмирающих листьев ($Л^3$), опадание листьев ($Л^4$) [4].

Жизненное состояние древесных растений оценивалось по десятибалльной шкале, учитывалось следующее: количество живых ветвей в кронах деревьев (P_1); степень облиственности крон (P_2); количество живых (без некроза) листьев в кронах (P_3); средняя величина площади живых листьев (P_4). После этого была определена суммарная оценка (максимум 40 баллов) состояния деревьев каждого вида. Оценка жизненного состояния была проведена для 5 древесных растений одного возраста для каждого вида на каждой из исследованных территорий [5, 6, 7].

Результаты исследования и их обсуждение

Сводные данные видового состава древесных растений, представленных в озеленении г. Минска и его пригородных территориях, приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Видовой состав древесных растений, используемых в озеленении изученных районов г. Минска и его окрестностей (данные за 2020–2021 гг.)

Семейство / Вид растения	Магистральные насаждения		Парковые зоны		Пригородно-рекреационные зоны	
	Проспект Независимости	Партизанский проспект	Лошицкий усадебно-парковый комплекс	Парк культуры и отдыха имени Челюскинцев	Минское море (Заславское водохранилище)	Минское городище (д. Городище)
1	2	3	4	5	6	7
Семейство Ивовые (*Salicaceae*)						
Тополь черный (*Populus nigra* L.)	+	+	+	+	+	+
Тополь белый (*P. alba* L.)	+	+	+	+	+	+
Тополь бальзамический (*P. balsamifera* L.)			+	+		

Продолжение таблицы 1

Тополь дрожащий (*P. tremula* L.)			+	+	+	+
Ива козья (*Salix caprea* L.)			+		+	+
Ива Шверина (*S.schwerinii* E. Wolf)			+			
Ива пятитычинковая (*S. pentandra* L.)			+			
Ива белая (*S. alba* L.)			+		+	+
Ива остролистная (*S. acutifolia* Willd.)			+		+	+
Ива трехтычинковая (*S. triandra* L.)			+		+	+
Ива шерстистопобеговая (*S. dasyclados* Wimm.)			+		+	+
Ива ломкая (*S. fragilis* L.)			+		+	+
Ива корзиночная (*S. viminalis* L.)			+		+	+
Семейство Березовые (*Betulaceae*)						
Береза повислая (*Betula pendula* Roth.)	+	+	+	+	+	+
Береза пушистая (*B. pubescens* Ehrh.)			+		+	+
Ольха серая (*Alnus incana* (L). Moench.)			+	+	+	+
Семейство Лещиновые (*Corylaceae*)						
Лещина обыкновенная (*Corylus avellana* L.)			+	+	+	+
Семейство Розоцветные (*Rosaceae*)						
Яблоня домашняя (*Malus domestica* Borch.)			+	+	+	+
Боярышник полумягкий (*Crataegus submollis* Sarg.)			+	+	+	+
Черемуха обыкновенная (*Padus avium* Mill.)			+	+	+	+
Черемуха Маака (*P. maackii* (Rupr.) Kom.)			+			
Вишня обыкновенная (*Cerasus vulgaris* Mill.)			+	+	+	+
Рябина обыкновенная (*Sorbus aucuparia* L.)	+	+	+	+	+	+
Слива растопыренная (*Prunus cerasifera* Ehrh.)					+	+

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7
Слива домашняя (*P. domestica* L.)					+	+
Груша обыкновенная (*P. communis* L.)			+		+	+
Яблоня лесная (*M. sylvestris* Mill.)			+	+	+	+
Боярышник однопестичный (*Cr. monogyna* Jacq.)			+	+		
Боярышник кроваво-красный (*Cr. sanguinea* Pall.)			+			
Семейство Конско-каштановые (*Hippocastanaceae*)						
Конский каштан обыкновенный (*Aesculus hyppocastanum* L.)	+	+	+	+		
Семейство Ореховые (*Juglandaceae*)						
Орех маньчжурский (*Juglans mandshurica* Maxim.)		+	+	+		
Семейство Сосновые (*Pinaceae*)						
Ель колючая (*Picea pungens* Engelm)			+	+	+	+
Ель европейская (*P. abies* (L). Karst.)			+	+	+	+
Сосна обыкновенная (*Pinus sylvestris* L.)			+	+	+	+
Ель канадская (*P. glauca* (Moench) Voss)			+			
Лжетсуга Мензиса (*Pseudotsuga menziesii* (Mirb.) Franco)			+	+		
Семейство Маслинные (*Oleaceae*)						
Лиственница сибирская (*Larix sibirica* Ledeb.)			+			
Семейство Кипарисовые (*Cupressaceae*)						
Туя западная (*Thuja occidentalis* L.)	+	+	+	+		
Ясень обыкновенный (*Fraxinus excelsior* L.)			+	+	+	+
Семейство Кленовые (*Aceraceae*)						
Клен ясенелистный (*Acer negundo* L.)	+	+	+	+	+	+

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7
Клен остролистный (*A. platnoides* L.)		+	+	+	+	+
Семейство Липовые (*Tiliaceae*)						
Липа мелколистная (*Tilia cordata* Mill.)	+	+	+	+	+	+
Липа крупнолистная (*T. platyphyllos* Scop.)	+	+	+	+		
Семейство Ильмовые (*Ulmaceae*)						
Вяз шершавый (*Ulmus glabra* Huds.)			+	+	+	+
Семейство Бобовые (*Fabaceae*)						
Карагана древовидная (*Caragana arborescens* Lam.)			+	+		
Семейство Калиновые (*Viburnaceae*)						
Калина красная (*Viburnum opulus* L.)			+	+	+	+
Семейство Буковые (*Fagaceae*)						
Дуб черешчатый (*Quercus robur* L.)			+	+	+	+
Семейство Бузиновые (*Sambucacaceae*)						
Бузина красная (*Sambucus racemosa* L.)			+	+	+	+
Семейство Лоховые (*Elaeagnaceae*)						
Лох серебристый (*Elaeagnus commutata* Bernh.)			+	+		
Семейство Бересклетовые (*Celastraceae*)						
Бересклет европейский (*Euonymus europaea* L.)					+	+

Анализ видового состава показал, что в изучаемых районах г. Минска и его пригороде произрастает более 50 видов древесных растений, относящихся к 18 семействам. Наибольшее количество видов характерно для семейств розоцветные, ивовые и сосновые. В озеленении парковых зон города также используются культурные растения (*Malus domestica* Borch., *Cerasus vulgaris* Mill., *Prunus domestica* L. и др.).

Среди деревьев, используемых в зеленом строительстве наиболее популярны, липа мелколистная (*Tilia cordata* Mill.) и тополь черный (*Populus nigra* L.). Они имеют ряд преимуществ: газоустойчивы, эффективно осаждают пыль, характеризуются быстрым ростом, имеют развитую крону и являются аккумуляторами соединений свинца и серы.

Также следует отметить, что в озеленении изученных территорий города и пригородных зон основными доминирующими породами являются:

– в магистральных насаждениях – *Populus nigra* L., *P. Alba* L., *Betula pendula* Roth., *Sorbus aucuparia* L., *Aesculus hyppocastanum* L., *Acer negundo* L., *Tilia cordata* Mill., *T. platyphyllos* Scop.;

– в парках – *Populus nigra* L., *P. alba* L., *Salix caprea* L., *S. alba* L., *S. fragilis* L., *Betula pendula* Roth., *Sorbus aucuparia* L., *Crataegus monogyna* Jacq., *Aesculus hyppocastanum* L., *Picea pungens* Engelm, *P. abies* (L). Karst., *Pinus sylvestris* L., *Acer negundo* L., *A. platnoides* L., *Tilia cordata* Mill., *T. platyphyllos* Scop., *Ulmus glabra* Huds.;

– в пригородно-рекреационных зонах –*Populus nigra* L., *P. alba* L., *P. tremula* L., *Salix caprea* L., *S. alba* L., *S. acutifolia* Willd., *S. triandra* L., *S. fragilis* L., *Betula pendula* Roth., *B. pubescens* Ehrh., *Alnus incana* (L). Moench., *Sorbus aucuparia* L., *Picea abies* (L). Karst., *Pinus sylvestris* L., *Acer negundo* L., *A. platnoides* L., *Tilia cordata* Mill., *T. platyphyllos* Scop., *Quercus robur* L.

При изучении состояния древесных насаждений проводили наблюдения за сезонными изменениями изучаемых растений. Фенофазы являются одними из важнейших показателей в сезонном развитии древесных растений и легко визуально определяются (таблица 2).

Таблица 2 – Даты наступления фенологических фаз у некоторых древесных растений (средние данные за 2020–2023 гг.)

Район	Фенологическая фаза						
	Пб[2]	Ц[2]	Ц[3]	Пл[3]	Л[3]	Л[4]	Пб[2]-Л[4]
1	2	3	4	5	6	7	8
Береза повислая *Betula pendula* Roth.							
Проспект Независимости	21.04	06.05	14.05	05.06	16.09	10.10	173
Партизанский проспект	28.04	11.05	16.05	03.06	14.09	24.10	180
Лошицкий усадебно-парковый комплекс	24.04	29.04	08.05	05.06	17.09	25.10	185
Парк культуры и отдыха имени Челюскинцев	28.04	11.05	16.05	03.06	14.09	24.10	180
Минское море (Заславское водохранилище)	25.04	30.04	09.05	06.06	18.09	26.10	185
Минское городище (д. Городище)	27.04	09.05	15.05	05.06	17.09	24.10	181
Клен ясенелистный *Acer negundo* L.							
Проспект Независимости	26.04	18.04	16.05	28.09	19.09	03.10	161
Партизанский проспект	27.04	16.04	04.05	23.09	14.09	12.10	169
Лошицкий усадебно-парковый комплекс	28.04	17.04	05.05	24.09	15.09	13.10	169
Парк культуры и отдыха имени Челюскинцев	27.04	14.04	12.05	23.09	14.09	14.10	171
Минское море (Заславское водохранилище)	29.04	18.04	06.05	25.09	16.09	14.10	169
Минское городище (д. Городище)	28.04	17.04	05.05	23.09	15.09	14.10	170

Продолжение таблицы 2

Липа мелколистная *Tilia cordata* Mill.							
Проспект Независимости	23.04	03.07	17.07	15.10	01.10	25.10	186
Партизанский проспект	18.04	01.07	15.07	09.10	04.10	01.11	198
Лошицкий усадебно-парковый комплекс	20.04	02.07	16.07	10.10	06.10	31.10	195
Парк культуры и отдыха имени Челюскинцев	20.04	03.07	15.07	11.10	06.10	02.11	197
Минское море (Заславское водохранилище)	25.04	07.07	17.07	17.10	03.10	27.10	186
Минское городище (д. Городище)	24.04	06.07	16.07	16.10	05.10	25.10	185
Рябина обыкновенная *Sorbus aucuparia* L.							
Проспект Независимости	10.05	20.05	27.05	10.09	16.09	29.09	143
Партизанский проспект	07.05	23.05	26.05	09.09	26.09	05.10	152
Лошицкий усадебно-парковый комплекс	06.05	25.05	27.05	08.09	15.09	05.10	153
Парк культуры и отдыха имени Челюскинцев	06.05	22.05	25.05	08.09	25.09	04.10	152
Минское море (Заславское водохранилище)	09.05	27.05	29.05	10.09	17.09	01.10	146
Минское городище (д. Городище)	07.05	24.05	26.05	09.09	25.09	30.09	147
Тополь черный *Populus nigra* L.							
Проспект Независимости	26.04	07.05	14.05	24.06	03.10	21.10	179
Партизанский проспект	29.04	10.05	16.05	26.06	07.10	20.10	175
Лошицкий усадебно-парковый комплекс	30.04	09.05	15.05	24.06	01.10	22.10	176
Парк культуры и отдыха имени Челюскинцев	28.04	07.05	16.05	25.06	30.09	20.10	176
Минское море (Заславское водохранилище)	01.05	11.05	18.05	27.06	28.09	16.10	169
Минское городище (д. Городище)	27.04	08.05	17.05	26.06	27.09	15.10	171

Выявлено, что у деревьев верхнего яруса в условиях города продолжительность цветения сокращается на 3,4 дня в сравнении с деревьями, произрастающими в зонах условного контроля; у низкорослых деревьев, наоборот, цветение в городских условиях более продолжительно на 1,2 дня. У липы мелколистной, цветущей в июле, продолжительность цветения также увеличивается в среднем на 3,4 дня, что можно объяснить более высокими температурами воздуха в черте города.

У большинства изученных видов в городских условиях в сравнении с зонами условного контроля наблюдается более позднее появление осенней окраски и, особенно, в зависимости от вида задержка сроков начала листопада на 4–14 дней.

Одним из показателей, который отражает степень устойчивости растений к экстремальным условиям городской среды в ходе роста и развития, выступает жизненное состояние. Под жизненным состоянием растений понимается совокупность морфоструктурных и ростовых особенностей, эффективность использования ресурсов местообитания, а также способность противостоять стрессовым воздействиям. Оценка жизненного состояния у древесных растений, используемых в городском озеленении, дает возможность обосновать рекомендации для создания наиболее продуктивных и долговечных городских зеленых насаждений [8].

В настоящее время существует ряд оценочных шкал, отражающих состояние деревьев в насаждениях города. Нами была использована шкала В. С. Николаевского (2002). Полученные данные представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Жизненное состояние древесных растений

Район исследования	Вид растения	P_1, баллы	P_2, баллы	P_3, баллы	P_4, баллы	ЖС, сумма баллов
1	2	3	4	5	6	7
Проспект Независимости	*Betula pendula* Roth.	10,0±0,0	9,8±0,1	8,7±0,3	9,1±0,4	37,6±0,8
	Acer negundo L.	9,4±0,2	10,0±0,0	9,1±0,5	8,9±0,1	37,4±0,8
	Tilia cordata Mill.	9,2±0,3	9,4±0,2	6,2±1,4	7,2±0,7	32,0±2,6
	Sorbus aucuparia L.	8,7±0,8	9,0±0,4	7,3±1,2	8,0±0,1	33,0±2,5
	Populus nigra L.	10,0±0,0	10,0±0,0	4,7±0,9	6,0±0,0	30,7±0,9
Партизанский проспект	*Betula pendula* Roth.	10,0±0,0	9,5±0,2	7,4±0,0	8,4±1,3	35,3±1,8
	Acer negundo L.	9,4±0,2	9,7±0,1	8,5±0,4	9,3±0,1	36,9±0,8
	Tilia cordata Mill.	9,3±0,7	10,0±0,0	5,8±1,0	8,4±0,2	33,5±1,9
	Sorbus aucuparia L.	9,0±0,5	9,7±0,1	8,2±0,4	9,0±0,2	35,9±1,2
	Populus nigra L.	10,0±0,0	10,0±0,0	2,6±1,0	5,2±0,7	27,8±1,7
Лошицкий усадебно-парковый комплекс	*Betula pendula* Roth.	10,0±0,0	10,0±0,0	9,2±0,3	9,0±0,0	38,2±0,3
	Acer negundo L.	9,6±0,4	9,5±0,5	9,3±0,2	9,2±0,0	37,6±1,1
	Tilia cordata Mill.	9,7±0,3	9,8±0,1	5,7±0,7	8,3±0,0	33,5±1,1
	Sorbus aucuparia L.	9,1±0,5	9,7±0,3	8,8±0,6	9,2±0,2	36,9±1,6
	Populus nigra L.	10,0±0,0	10,0±0,0	9,4±0,2	9,1±0,6	38,5±0,8
Парк культуры и отдыха имени Челюскинцев	*Betula pendula* Roth.	10,0±0,0	9,8±0,2	9,2±0,5	9,0±0,5	39,0±1,2
	Acer negundo L.	10,0±0,0	10,0±0,0	9,1±0,2	9,3±0,7	38,4±0,9
	Tilia cordata Mill.	9,7±0,1	9,8±0,1	6,4±1,5	8,9±0,3	34,8±2,0
	Sorbus aucuparia L.	9,8±0,0	9,7±0,2	9,1±0,5	9,0±0,6	37,6±1,3
	Populus nigra L.	9,7±0,3	9,8±0,2	9,2±0,4	9,0±0,4	37,7±1,3

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5	6	7
Минское море (Заславское водохранилище)	*Betula pendula* Roth.	10,0±0,0	10,0±0,0	9,8±0,2	9,6±0,3	39,4±0,5
	Acer negundo L.	9,4±0,4	9,7±0,2	9,9±0,1	9,7±0,3	38,7±1,0
	Tilia cordata Mill.	9,2±0,5	10,0±0,2	7,5±1,2	8,7±0,1	35,4±2,0
	Sorbus aucuparia L.	9,7±0,2	10,0±0,0	9,3±0,5	9,7±0,2	39,1±0,7
	Populus nigra L.	10,0±0,0	10,0±0,0	9,7±0,0	9,5±0,4	39,2±0,5
Минское городище (д. Городище)	*Betula pendula* Roth.	10,0±0,0	9,9±0,0	10,0±0,0	9,7±0,2	39,6±0,2
	Acer negundo L.	9,8±0,1	9,8±0,1	10,0±0,5	9,8±0,2	39,4±0,9
	Tilia cordata Mill.	9,4±0,1	10,0±0,0	8,1±2,0	8,9±0,2	36,4±2,3
	Sorbus aucuparia L.	9,9±0,0	10,0±0,0	9,5±0,5	9,3±0,7	38,7±1,2
	Populus nigra L.	10,0±0,0	10,0±0,0	9,8±0,0	9,6±0,1	39,4±0,0

Выявлено, что с ростом степени техногенной нагрузки соотношение категорий жизненного состояния деревьев существенно изменяется, снижается доля деревьев с хорошим состоянием и увеличивается количество усыхающих. Наибольшее количество видов, имеющих низкий жизненный балл (от 27,8±1,7), произрастают вдоль крупных автомагистралей.

Низкие баллы жизненного состояния в г. Минске наблюдаются у *Tilia cordata* Mill. (32,0±2,6) и *Sorbus aucuparia* L. (33,0±2,5), а также у *Populus nigra* L. (27,8±1,7), произрастающих вдоль Партизанского проспекта. На всех исследуемых локациях *Tilia cordata* Mill. и *Sorbus aucuparia* L. имеют значительные повреждения листовой пластинки вредителями филофагами (степень повреждения около 70%). В условиях города высокие показатели жизненного состояния наблюдаются у *Betula pendula* Roth. (39,0±1,2) и *Acer negundo* L. (38,4±0,9).

Заключение

На основании результатов изучения видового разнообразия и морфо-биологических особенностей некоторых древесных растений г. Минска можно сделать следующие выводы:

1. В изучаемых районах г. Минска и его пригороде произрастает более 50 видов древесных растений, относящихся к 18 семействам. Наибольшее количество видов характерно для семейств розоцветные (12 видов), ивовые (13) и сосновые (6). В озеленении парковых зон города также используются культурные растения (*Malus domestica* Borch., *Cerasus vulgaris* Mill., *Prunus domestica* L. и др.).

В озеленении изученных территорий города и пригородных зон основными доминирующими породами являются: *Populus nigra* L., *P. alba* L., *Betula pendula* Roth., *Sorbus aucuparia* L., *Aesculus hyppocastanum* L., *Acer negundo* L., *Tilia cordata* Mill., *T. platyphyllos* Scop.

2. Экологические факторы городской среды вызывают нарушения фенoритмов древесных растений: у деревьев верхнего яруса в условиях города продолжительность цветения сокращается на 3,4 дня, у низкорослых деревьев, наоборот, цветение более продолжительно на 1,2 дня.

3. С ростом степени техногенной нагрузки жизненное состояние деревьев существенно изменяется: снижается доля деревьев с высоким баллом и увеличивается количество усыхающих. Наибольшее количество видов древесных растений, имеющих низкий жизненный балл (от 27,8±1,7), произрастают вдоль крупных автомагистралей.

В условиях города Минска высокие показатели жизненного состояния наблюдаются у *Betula pendula* Roth. (39,0±1,2) и *Acer negundo* L. (38,4±0,9). Низкие баллы жизненного состояния в г. Минске наблюдаются у *Tilia cordata* Mill. (32,0±2,6), *Sorbus aucuparia* L. (33,0±2,5) и *Populus nigra* L. (27,8±1,7), произрастающих вдоль Партизанского проспекта.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Бухарина, И. Л.*** Биоэкологические особенности травянистых и древесных растений городских насаждений: монография / И. Л. Бухарина, А. А. Двоеглазова. – Ижевск : Изд-во «Удмуртский университет», 2010. – 184 с.

2. ***Золотаренко, В. В.*** Роль растений в городе. Влияние городских условий на растения / В. В. Золотаренко // Молодой ученый. – 2021. – № 53 (395). – С. 179–180. – Режим доступа: https://moluch.ru/archive/395/87458/ – Дата доступа: 01.02.2024.

3. ***Краснощекова, Н. С.*** Эколого-экономическая эффективность зеленых насаждений: Обзорная информация / Н. С. Краснощекова. – М. : ЦЕНТИ Минжилкомхоза РСФСР, 1987. – 44 с.

4. ***Булыгин, Н. Е.*** Дендрология / Н. Е. Булыгин, В. Т. Ярмишко. – М. : МГУЛ, 2001. – 528 с.

5. ***Николаевский, В. С.*** Экологическая оценка загрязнения среды и состояние наземных экосистем методами фитоиндикации / В. С. Николаевский. – Пушкино : ВНИИЛМ, 2002. – 220 с.

6. ***Медведева, Е. Ю.*** Биолого-экологические особенности роста и размножения гибридных тополей в городе Екатеринбурге : автореферат дис. ... канд. с.-х. наук : 06.03.03 / Е. Ю. Медведева ; Урал. гос. лесотехн. ун-т. – Екатеринбург, 2015. – 20 с.

7. ***Бухарина, И. Л.*** Эколого-биологические особенности древесных растений в урбанизированной среде: монография / И. Л. Бухарина, Т. М. Поварницина, К. Е. Ведерников. – Ижевск : ФГОУ ВПО Ижевская ГСХА, 2007. – 216 с.

8. ***Прохоренко, Н. Б.*** Оценка жизненного состояния деревьев в урбанизированных условиях Казани / Н. Б. Прохоренко, Г. В. Демина, Д. Н. Мингазова // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2017. – Вы. 19, № 2,3. – С. 507–51

Поступила в редакцию: 29.11.2024 г.

Контакты: nadya.strigelskaya@mail.ru (Стригельская Надежда Павловна, Бученков Игорь Эдуардович, Чернецкая Алла Георгиевна)

Strigelskaya N. P., Buchenkov I. E., Chernetskaya A. G. **THE IMPACT OF AN URBANIZED ENVIRONMENT ON PHENOLOGICAL PHASES AND VITAL CONDITION SOME WOODY PLANTS IN MINSK**

The urban environment differs from the natural environment in almost all environmental parameters − illumination, temperature and humidity, the amount of solar radiation, and the composition of atmospheric air. Urban environmental factors affect many indicators of plant morphology, biology, and biochemistry. In the article, the authors present the results of studying the species composition, the onset of phenological phases, and the characteristics of the vital state of woody plants used in landscaping in Minsk.

Keywords: landscaping, urban environment, Minsk city, species diversity, dominant species, phenological phases, vital condition.

Пераклад тэкстаў рэферата ў артыкулаў
на англійскую мову
Я. В. Рубанава

Тэхнічны рэдактар *А. Р. Роскач*
Камп'ютарны набор і вёрстка *В. Г. Молакава*
Карэктар *І. Г. Каржова*

Падпісана да друку 01.04.2025 г.
Фармат 70x108 1/16. Гарнітура Times New Roman.
Ум.-друк. арк. 5,9. Ул.-выд. арк. 6,8. Тыраж 40 экз. Заказ № 1360.

Установа адукацыі "Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А. А. Куляшова", 212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства
"Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля"
ЛП № 02330/23 ад 30.12.2013 г.
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў