

ISSN 2409-3777



# ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага  
ўніверсітэта

імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

*Выдаецца са снежня 1998 года*

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ  
(матэматыка, фізіка, біялогія)

*Выходзіць два разы ў год*

**2 (64)**  
**2024**

**Галоўная рэдакцыйная калегія:**

д-р гіст. навук прафесар Д. С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)  
д-р экан. навук прафесар Н. У. Макоўская (нам. галоўнага рэдактара)  
д-р гіст. навук прафесар Я. Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. В. Марчанка (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)  
канд. гіст. навук А. І. Галавач (адказны сакратар)

**Матэматыка, фізіка:**

д-р фіз.-мат. навук прафесар В. А. Еравенка (Мінск)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар В. І. Бернік (Мінск)  
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В. М. Лапцінскі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар М. М. Дабравольскі (Тула)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. Б. Соцкі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. М. Гальмак (Магілёў)  
д-р тэхнічных навук А. С. Турцэвіч (Мінск)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. М. Сідарэнка (Магілёў)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А. В. Цімошчанка (Магілёў)

**Біялогія:**

д-р біял. навук прафесар Н. П. Максімава (Мінск)  
д-р біял. навук дацэнт А. Д. Навумаў (Мінск)  
д-р біял. навук дацэнт С. У. Лазарэвіч (Горкі)  
канд. біял. навук дацэнт М. В. Акуліч (Магілёў)  
канд. біял. навук дацэнт М. М. Дайнэка (Гомель)  
канд. біял. навук дацэнт І. А. Жарына (Магілёў)  
д-р мед. навук прафесар А. В. Марачкаў (Магілёў)  
д-р мед. навук Н. І. Сімчанка (Магілёў)  
д-р хім. навук прафесар Г. М. Раганаў (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс “Веснік Магілёўскага дзяржаўнага  
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова” ўключаны ў РИНЦ  
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),  
ліцэнзійны дагавор № 811-12/2014*

**АДРАС РЭДАКЦЫІ:**

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,  
vesnik\_mdu@mail.ru

**MOGILEV STATE  
A. KULESHOV UNIVERSITY  
BULLETIN**

THEORETICAL-SCIENTIFIC JOURNAL

*Founded in December 1998*

Series B. NATURAL SCIENCES  
(Mathematics, Physics, Biology)

*Published twice per year*

**2 (64)  
2024**

#### **Editorial Board:**

Lavrinovich D. S., Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor,  
Makovskaya N. V., Deputy Chief Editor, Doctor of Economic Sciences, Professor  
Riyer Y. G., Deputy Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor  
Marchenko I. V., Chairman of the Editorial Committee (Series B),  
Ph.D., Associate Professor  
Golovach E. I., Executive Secretary of the Editorial Board, Ph.D.

#### **Mathematics, Physics:**

Yerovenko V. A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)  
Bernik V. I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)  
Laptinsky V. N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of  
the Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus  
(Mogilev)  
Dobrovolsky N. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Tula)  
Sotsky A. B., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)  
Galmak A. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)  
Turtsevich A. S., Doctor of Technical Sciences (Minsk)  
Sidorenko I. N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)  
Timoschenko E. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)

#### **Biology:**

Maksimova N. P., Doctor of Biological Sciences, Professor (Minsk)  
Naumov A. D., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Minsk)  
Lazarevich S. V., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Gorky)  
Akulich N. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)  
Daineko N. M., Ph.D., Associate Professor (Gomel)  
Zharina I. A., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)  
Marochkov A. V., Doctor of Medical Sciences, Professor (Mogilev)  
Simchenko N. I., Doctor of Medical Sciences (Mogilev)  
Roganov G. N., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)

*Theoretical-scientific journal*  
*“Mogilev State A. Kuleshov University Bulletin”*  
*is included in the bibliographic database*  
*“Russian Science Citation Index”,*  
*License agreement № 811-12/2014*

The editorial board address:  
212022, Mogilev, Kosmonavtov Str., 1,  
vesnik\_mdu@mail.ru

## З М Е С Т

<b>ДЕМЕНЧУК А. К.</b> Синтез асинхронного режима в линейной периодической системе управления с невырожденным нижним диагональным блоком усреднения матрицы коэффициентов.....	7
<b>КЕМЕШ О. Н., МОРОЗОВА И. М., САКОВИЧ Н. В., ШАМУКОВА Н. В.</b> Диофантовы приближения и делимость дискриминантов на большую степень простого числа.....	17
<b>НОСКОВА М. С.</b> Оценка точности расчета коэффициента пропускания и радиуса узкого пучка излучения в бинарной марковской смеси.....	26
<b>KUZMICH A. M., BURYA V., OVSIYUK E. M.</b> Matrix Structure of the Maxwell Equations in Nonhomogeneous Anisotropic Media, and Riemannian Space Geometry .....	37
<b>КОЛМАКОВ П. Ю., ЖЕРНОСЕКОВ Д. Д.</b> Процесс суберинизации и обмен n-ацетилглюкозамина в консортивных взаимоотношениях « <i>Picea abies</i> – эктомикоризные грибы» .....	49
<b>ОСТРИКОВА М. Я., ОСТРИКОВ О. М.</b> Использование моделей динамики численности единичной микробной популяции для математического описания развития микробиома человека.....	57
<b>БОЛСУН И. М., ЦУРИКОВ А. Г., ГОЛУБКОВ В. В., БЕЛЫЙ П. Н.</b> Ревизия лишайников рода <i>Usnea</i> Беларуси. II. <i>Usnea Florida</i> и <i>Usnea Subfloridana</i> .....	65
<b>ВОЛОБУЕВ В. С., ДИКУСАР Е. А., АКИШИНА Е. А., ШИКАНОВ С. С.</b> Анализ зависимости биологической активности от некоторых расчетных физических параметров молекул бензоциклопентахинолинов и бензакридинов .....	74

## C O N T E N T S

<b>DEMENCHUK A. K.</b> Synthesis of an Asynchronous Mode in a Linear Periodic Control System with a Non-Degenerate Lower Diagonal Block of the Averaging Coefficient Matrix .....	7
<b>KEMESH O. N., MOROZOVA I. M., SAKOVICH N. V., SHAMUKOVA N. V.</b> Diophantine Approximations and Division of Discriminants by a Large Power of a Prime Number.....	17
<b>NOSKOVA M. S.</b> Estimation of the Accuracy of Calculating the Transmittance Coefficient and Radius of a Narrow Radiation Beam in a Binary Markov Mixture .....	26
<b>KUZMICH A. M., BURYA V., OVSIYUK E. M.</b> Matrix Structure of the Maxwell Equations in Nonhomogeneous Anisotropic Media, and Riemannian Space Geometry .....	37
<b>KOLMAKOV P. YU., ZHERNOSEKOV D. D.</b> The Process of Suberization and Metabolism of n-acetylglucosamine in a Consortive Relationship “Picea Abies – Ectomycorrhizal Fungi” .....	49
<b>OSTRIKOVA M. YA., OSTRIKOV O. M.</b> Using Models of Number Dynamics of a Single Microbial Population for a Mathematical Description of the Development of the Human Microbiome .....	57
<b>BOLSUN I. M., TSURYKAU A. H., GOLUBKOV V. V., BELY P. N.</b> Revision of the Lichen Genus <i>Usnea</i> in Belarus. II. <i>Usnea Florida</i> and <i>Usnea Subfloridana</i> .....	65
<b>VOLOBUEV V. S., DIKUSAR E. A., AKISHINA E. A., SHIKANOV S. S.</b> Analysis of the Dependence of Biological Activity on some Calculated Physical Parameters of Benzocyclopentaquinoline and Benzacridine Molecules .....	74

# МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 517.926.4:517.977.1

## СИНТЕЗ АСИНХРОННОГО РЕЖИМА В ЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ С НЕВЫРОЖДЕННЫМ НИЖНИМ ДИАГОНАЛЬНЫМ БЛОКОМ УСРЕДНЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ<sup>1</sup>

**А. К. Деменчук**

доктор физико-математических наук, профессор  
Институт математики НАН Беларуси

*Рассматривается линейная периодическая система управления с постоянной матрицей при управлении. Программное управление является периодическим, причем множество его частот содержится в модуле частот матрицы коэффициентов. Предполагается, что у матрицы при управлении есть линейно зависимые столбцы, усреднение матрицы коэффициентов приводится к специальному виду с невырожденным правым нижним диагональным блоком и остальными тривиальными блоками. Для рассматриваемого класса систем указаны достаточные условия, при выполнении которых осуществляется построение управляющего воздействия, переводящего систему в асинхронный режим.*

**Ключевые слова:** линейная дифференциальная система управления, сильно нерегулярное периодическое решение, асинхронный спектр.

### Введение и постановка задачи

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{z} = A_1(t)z + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

в которой  $A_1(t)$  – непрерывная  $\omega$ -периодическая  $n \times n$ -матрица,  $B$  – постоянная  $n \times r$ -матрица  $r \leq n$ ,  $u$  – управление. Вопросы управляемости линейных систем изучались во многих работах в предположении совпадения частот решения и самой системы (см., напр., [1, 2] и др.). Такой подход был обусловлен тем, что до середины XX века исследования по периодическим решениям дифференциальных систем базировались на предположении о соизмеримости периодов решения и самой системы. Такого рода утверждение содержалось, например, в монографии [3, с. 11]. В 1950 г. на его ошибочность указал Х. Массера в работе [4]. Он впервые привел условия существования решений дифференциальных систем с иррациональным отношением периодов решения и системы. Отмеченный результат Х. Массеры положил начало новому направлению в качественной теории дифференциальных уравнений, которое впоследствии развивалось Я. Курцвейлем и О. Вейвдой [5], Н. П. Еругиным [6], И. В. Гайшуном [7], Э. И. Грудо, [8], В. Т. Боруховым [9] и др. Такие периодические решения и их обобщения были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр – асинхронным, а описываемые ими колебания – асинхронными. Эффект асинхронного

<sup>1</sup> Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси по заданию 1.2.01 «Развитие конструктивных и асимптотических методов исследования сложных управляемых дифференциальных и дискретных систем» ГПНИ «Конвергенция – 2025» (подпрограмма «Математические модели и методы») в рамках гранта Президента Республики Беларусь.

возбуждение незатухающих колебаний нашел реализацию в ряде технических устройств [10; 11]. Задача построения периодических дифференциальных систем, функционирующих в асинхронном режиме, сформулирована в работе [12] как задача управления асинхронным спектром.

В качестве управляющего воздействия  $u(\cdot)$  в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические  $r$ -вектор-функции, множество частот которых содержится в модуле частот матрицы коэффициентов. Применительно к системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством  $L$  состоит в следующем: выбрать такое программное управление

$$u = u(t) \quad (2)$$

из указанного допустимого множества, чтобы замкнутая система

$$\dot{z} = A_1(t)z + Bu(t) \quad (3)$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с множеством частот  $L$ .

Если же требовать наличие у системы (3) только сильно нерегулярного решения, без наперед заданного целевого множества, то такую, несколько менее жесткую задачу, будем называть задачей синтеза асинхронного режима (возбуждения асинхронных колебаний).

Вопросы разрешимости сформулированных задач для системы (1) с нулевым средним значением матрицы коэффициентов исследованы в работе [13]. В [14] рассмотрена система (1) с нулевыми строками матрицы при управлении, при этом среднее значение матрицы коэффициентов имеет невырожденный левый верхний диагональный блок и остальное ее блоки – нулевые. Вопрос исследования системы (1) с правым нижним блоком усреднения матрицы коэффициентов оставался открытым. В настоящей статье дано решение задачи управления асинхронным спектром в случае, когда система (1) приводится к виду с невырожденным указанным диагональным блоком.

**Вспомогательные сведения.** Для непрерывной на всей числовой оси  $\omega$ -периодической вещественнозначной  $n \times m$ -матричной функции  $F(t)$  (вектора при  $m = 1$ ) определим ее среднее значение

$$\hat{F} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} F(t) dt$$

и осциллирующую часть

$$\tilde{F}(t) = F(t) - \hat{F}.$$

Через  $\text{rank}_{\text{col}} F$  обозначим столбцовый ранг матрицы  $F(t)$  – наибольшее число линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и строчный ранг  $\text{rank}_{\text{row}} F$ . Очевидно, что в общем случае строчный и столбцовый ранги периодической матрицы не обязаны совпадать. Например, для  $2\pi$ -периодической матрицы

$$F(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 2 \sin t \\ \cos t & 2 \cos t \end{pmatrix}.$$

Имеем  $\text{rank}_{\text{col}} F = 1$ , а  $\text{rank}_{\text{row}} F = 2$ . Сказанное, разумеется, не относится к постоянным матрицам.



Частотами  $\omega$ -периодической функции являются числа вида  $k \frac{2\pi}{\omega}$ ,  $k \in N$ .

**Определение.** Решение с периодом  $\Omega$  системы (3) называется сильно нерегулярным, если числа  $\omega$  и  $\Omega$  несоизмеримы, т. е. их отношение является иррациональным числом.

На основании [15, с. 20] можно сформулировать необходимые в дальнейшем следующие две леммы.

**Лемма 1.** Пусть у постоянной  $n \times r$ -матрицы  $B$  число строк не меньше числа столбцов и столбцы линейно зависимы

$$\text{rank } B = r_1 < r, \quad r \leq n. \quad (4)$$

Тогда найдется постоянная неособенная  $n \times n$ -матрица  $S$  такая, что

$$SB = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{r_1, r} \end{pmatrix}, \quad \text{rank } B_{r_1, r} = r_1. \quad (5)$$

**Лемма 2.** Пусть  $\text{rank}_{\text{col}} F = m_1 < m$ . Тогда найдется постоянная неособенная  $m \times m$ -матрица  $Q$  такая, что у матрицы  $F(t)Q$  будет  $m - m_1$  нулевых первых столбцов, в то время как остальные  $m_1$  столбцов будут линейно независимы.

Из работы [16] вытекает

**Лемма 3.** Если столбцы  $\omega$ -периодической матрицы  $F(t)$  линейно независимы, то у линейной алгебраической однородной системы

$$F(t)z = 0$$

отсутствуют сильно нерегулярные периодические решения  $z = z(t)$ , отличные от тривиального.

**Основная часть.** В случае, когда столбцы матрицы при управлении линейно независимы, решение задачи управления асинхронным спектром для системы (1) приведено в [17]. Поэтому далее полагаем, что выполняется неравенство (4). В таком случае, согласно лемме 1, стандартными средствами линейной алгебры можно построить матрицу  $S$  со свойством (5).

Основное предположение настоящей работы состоит в следующем. Допустим, что среднее значение  $\hat{A}_1$  матрицы коэффициентов представимо в виде

$$\hat{A} = S^{-1} \hat{A}_1 S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}_{r_1, r_1}^{(22)} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_{r_1, r_1}^{(22)} = \text{diag}(\hat{a}_{n-r_1+1, n-r_1+1}, \dots, \hat{a}_{n, n}), \quad \det \hat{A}_{r_1, r_1}^{(22)} \neq 0. \quad (6)$$

Через  $A^{(1)}(t)$  обозначим  $(n - r_1) \times n$ -матрицу, составленную из первых  $n - r_1$  строк матрицы  $A(t) = S^{-1} A_1(t) S$ .

Справедлива

**Теорема.** Пусть наряду с предположениями (4), (6) выполняется условие

$$\text{rank}_{\text{col}} A^{(1)} = k < n. \quad (7)$$

Тогда существует  $\omega$ -периодическое управление  $u = u(t)$ , переводящее систему в асинхронный режим.

**Доказательство.** Искомое программное управление будем искать в виде

$$u = u(t) = \hat{u} + \tilde{u}(t).$$

Согласно постановке задачи управление должно быть таким, чтобы у замкнутой таким управлением системы (3) появилось сильно нерегулярное решение  $z = z(t)$  с некоторым множеством частот. Из работы [8] следует, что в смысле существования требуемого периодического решения  $z(t)$  система (3) эквивалентна следующей системе:

$$\dot{z} = \hat{A}_1 z + B\hat{u}, \quad \tilde{A}_1(t)z + B\tilde{u}(t) = 0. \quad (8)$$

Поэтому поставленная задача сводится к построению такой вектор-функции  $u(t)$  из допустимого множества, чтобы система (8) имела решение  $z(t)$ .

Выполним замену фазовой переменной

$$z = Sx, \quad (9)$$

которая приводит систему (8) к системе

$$\dot{x} = \hat{A}x + D\hat{u}, \quad \tilde{A}(t)x + D\tilde{u}(t) = 0, \quad A(t) = S^{-1}A_1(t)S, \quad D = SB.$$

В соответствии с представлением матрицы  $D$  в виде (5)

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{r_1, r} \end{pmatrix},$$

с целью согласования размерностей, примем следующие обозначения для матрицы  $A(t)$ . Пусть  $A_{n-r_1, n-r_1}^{(11)}(t)$ ,  $A_{r_1, n-r_1}^{(21)}(t)$  – ее левые верхний и нижний, а  $A_{n-r_1, r_1}^{(12)}(t)$ ,  $A_{r_1, r_1}^{(22)}(t)$  – правые верхний и нижний блоки (нижние индексы указывают размерность):

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{n-r_1, n-r_1}^{(11)}(t) & A_{n-r_1, r_1}^{(12)}(t) \\ A_{r_1, n-r_1}^{(21)}(t) & A_{r_1, r_1}^{(22)}(t) \end{pmatrix}.$$

Соответственно такому представлению усредненную матрицу  $\hat{A}$  в свою очередь разобьем на четыре блока таких же размерностей:

$$\hat{A}_{n-r_1, n-r_1}^{(11)}, \quad \hat{A}_{r_1, n-r_1}^{(21)}, \quad \hat{A}_{n-r_1, r_1}^{(12)}, \quad \hat{A}_{r_1, r_1}^{(22)},$$

среди которых, с учетом условия (6), только последний нетривиален. Аналогично представим и осциллирующую часть  $\tilde{A}(t)$ :

$$\tilde{A}_{n-r_1, n-r_1}^{(11)}(t), \quad \tilde{A}_{r_1, n-r_1}^{(21)}(t), \quad \tilde{A}_{n-r_1, r_1}^{(12)}(t), \quad \tilde{A}_{r_1, r_1}^{(22)}(t).$$

Далее для упрощения записи нижние индексы у этих матриц опускаем. Положим для фазового вектора

$$x = \text{col}(x', x''), \quad x' = \text{col}(x_1, \dots, x_{n-r_1}), \quad x'' = \text{col}(x_{n-r_1+1}, \dots, x_n).$$

Тогда последняя система примет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{x}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}^{(11)} & \hat{A}^{(12)} \\ \hat{A}^{(21)} & \hat{A}^{(22)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_{r_1, r} \end{pmatrix} \hat{u},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}^{(11)}(t) & \tilde{A}^{(12)}(t) \\ \tilde{A}^{(21)}(t) & \tilde{A}^{(22)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_{r_1, r} \end{pmatrix} \tilde{u}(t) = 0,$$

откуда в силу предположения (6) о нетривиальности только правого нижнего блока усреднения матрицы коэффициентов получаем систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= 0, \\ \dot{x}'' &= \hat{A}^{(22)}x'' + B_{r,r}\hat{u}, \\ A^{(11)}(t)x' + A^{(12)}(t)x'' &= 0, \\ A^{(21)}(t)x' + \tilde{A}^{(22)}(t)x'' + B_{r,r}\tilde{u}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что периодическое решение  $x = x'(t)$  первого уравнения системы (10) может быть только стационарным. Поскольку блок  $\hat{A}^{(22)}$  диагональный и невырожденный, а неоднородная часть  $B_{r,r}\hat{u}$  постоянная, то периодическое решение  $x = x''(t)$  второго уравнения, а значит, и решение  $x' = x'(t)$ ,  $x'' = x''(t)$  всей системы (10) также может быть только стационарным.

С учетом принятых ранее обозначений запишем третье уравнение системы (10) в виде

$$A^{(1)}(t) \operatorname{col}(x', x'') = 0.$$

В силу условия (7) из леммы 2 следует, что найдется постоянная неособенная  $n \times n$ -матрица  $Q$  такая, что у матрицы  $A^{(1)}(t)Q$  первые  $n-k$  столбцов будут нулевыми, а остальные  $k$  столбцов будут линейно независимыми. Выполнив в этом уравнении замену переменных

$$\operatorname{col}(x', x'') = Qy,$$

получим уравнение

$$A^{(1)}(t)Qy = 0.$$

Поскольку матрица  $A^{(1)}(t)Q$  является  $\omega$ -периодической и ее последние  $k$  столбцов линейно независимы, то из леммы 3 вытекает, что соответствующие компоненты сильно нерегулярного периодического решения  $y = y(t)$  этого уравнения должны быть нулевыми

$$y(t) = \operatorname{col}(y^{(1)}(t), 0, \dots, 0),$$

где  $y^{(1)}(t) = \operatorname{col}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t))$ ,  $\varphi_j(t)$ ,  $j = \overline{1, n-k}$  – некоторые произвольные периодические функции периода  $\Omega$ , несоизмеримого с  $\omega$ . Поскольку выше отмечено, что искомое периодическое решение  $x = x(t) = \operatorname{col}(x'(t), x''(t))$  может быть только стационарным, то в силу неособенности матрицы  $Q$  вектор  $y = y(t)$  также должен быть постоянным. Значит,  $\varphi_j(t) \equiv \alpha_j$ ,  $j = \overline{1, n-k}$  и

$$y(t) = \operatorname{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}, 0, \dots, 0),$$

где  $\alpha_j$ ,  $j = \overline{1, n-k}$  – некоторые произвольные вещественные постоянные. Поэтому, с учетом произведенной замены переменных, компоненты искомого периодического решения первых двух уравнений системы (10) представимы следующим образом

$$\operatorname{col}(x'(t), x''(t)) = Q \operatorname{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}, 0, \dots, 0).$$

Уточним вид этого решения. Обозначим матрицу, образованную  $n-k$  первыми столбцами матрицы  $Q$  через  $Q^{(1)}$ , и разобьем ее на вертикальные блоки  $Q_{11}^{(1)}$ ,  $Q_{21}^{(1)}$ ,

размерностей по строкам соответственно  $n - r_1, r_1$ . Такое разбиение позволит получить более детальный вид последней записи решения

$$\text{col}(x'(t), x''(t)) = \begin{pmatrix} Q_{11}^{(1)} \\ Q_{21}^{(1)} \end{pmatrix} \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}),$$

откуда находим

$$x'(t) = Q_{11}^{(1)} \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}), \quad x''(t) = Q_{21}^{(1)} \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}). \quad (11)$$

По построению векторы (11) – решение третьего уравнения системы (10). Кроме того, как нетрудно видеть, стационарный вектор  $x'(t) = Q_{11}^{(1)} \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k})$  является решением ее первого уравнения.

Выясним, при каких условиях вектор  $x''(t)$  удовлетворяет второму уравнению системы (10). Для этого, подставляя в это уравнение значение  $x''(t) = Q_{21}^{(1)} \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k})$ , получим условие на стационарную составляющую управления

$$B_{r_1, r} \hat{u} + \hat{A}^{(22)} Q_{21}^{(1)} \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) = 0. \quad (12)$$

Иначе говоря, вектор  $x''(t)$  будет решением второго уравнения системы (10) лишь тогда, когда вектор  $\hat{u}$  удовлетворяет равенству (12).

В силу рангового условия (4) вспомогательное линейное неоднородное матричное уравнение

$$B_{r_1, r} V_{r, r_1} + E = 0$$

с коэффициентом  $B_{r_1, r}$  и единичной  $r_1 \times r_1$ -матрицей  $E$  имеет некоторое частное решение  $V_{r, r_1} = V$ . Несложно убедиться в том, что постоянный вектор

$$\hat{u} = \hat{u}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) = -VA^{(22)} Q_{21}^{(1)} \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) \quad (13)$$

будет удовлетворять равенству (12). Это означает, что при выборе стационарной составляющей управления  $\hat{u}$  в виде (13) вектор  $x''(t)$  – решение второго уравнения системы (10).

Далее выясним, при каких условиях векторы  $x'(t), x''(t)$  удовлетворяют четвертому уравнению системы (10). С этой целью, подставляя их значения в это уравнение, получим условие на осциллирующую составляющую управления

$$B_{r_1, r} \tilde{u}(t) + A^{(21)}(t) Q_{11}^{(1)} \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) + A^{(22)}(t) Q_{21}^{(1)} \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) = 0. \quad (14)$$

Другими словами, векторы  $x'(t), x''(t)$  будут решениями последнего уравнения системы (10) лишь тогда, когда вектор  $\tilde{u}(t)$  удовлетворяет равенству (14).

Построим векторно-значную  $\omega$ -периодическую функцию с нулевым средним значением

$$\tilde{u} = \tilde{u}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) = -V \left( A^{(21)}(t) Q_{11}^{(1)} \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) + A^{(22)}(t) Q_{21}^{(1)} \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) \right). \quad (15)$$

Подставляя ее в равенство (14), получим

$$B_{r_1, r} \left( -V \left( A^{(21)}(t) Q_{11}^{(1)} \operatorname{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) + A^{(22)}(t) Q_{21}^{(1)} \operatorname{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) \right) + \right. \\ \left. + A^{(21)}(t) Q_{11}^{(1)} \operatorname{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) + A^{(22)}(t) Q_{21}^{(1)} \operatorname{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) \right) = 0$$

или, после элементарных преобразований,

$$(B_{r_1, r} V + E) \left( A^{(21)}(t) Q_{11}^{(1)} + A^{(22)}(t) Q_{21}^{(1)} \right) \operatorname{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k}) = 0.$$

Полученное равенство является верным, так как матрица  $V$  – решение вспомогательного матричного уравнения, т. е.

$$B_{r_1, r} V + E = 0.$$

Поэтому при выборе осциллирующей составляющей управления  $\tilde{y}(t)$  в виде (15) векторы  $x'(t)$ ,  $x''(t)$  – решением последнего уравнения, а вместе с этим и всей системы (10).

Возвращаясь к исходным переменным, принимая во внимание замену (9), находим требуемое решение системы (8)

$$z = z(t) = S^{-1} \operatorname{col}(x'(t), x''(t)),$$

которое в силу [8], будет также решением замкнутой системы (3). Таким образом, управлением (13), (15) реализуется асинхронный режим в системе (1).

Теорема доказана.

В заключение приведем пример, иллюстрирующий конструктивность полученного результата. С этой целью возьмем следующую линейную  $2\pi$ -периодическую систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu = \begin{pmatrix} \sin t & 2 \sin t & \sin t \\ \sin 2t & 2 \sin 2t & \sin 2t \\ \xi_1(t) & \xi_2(t) & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

в которой  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  – произвольные непрерывные периодические с периодом  $2\pi$  и нулевым средним значением скалярные функции, хотя бы одно из вещественных чисел  $b_1$ ,  $b_2$ , скажем  $b_1$ , отлично от нуля.

Вначале проверим условия теоремы. Ранговое условие (4) показывает, что в данном случае ранг  $r_1$  матрицы  $B$  меньше числа столбцов и равен единице, при этом в построении преобразования (9) с матрицей  $S$  нет необходимости, поскольку  $B$  уже приведена к виду (5), а усреднение матрицы коэффициентов

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

согласуется с (6), т. е. правый нижний  $1 \times 1$ -блок невырожденный. Для проверки условия (7) из первых двух строк матрицы  $A(t)$  составим  $2 \times 3$ -матрицу

$$A^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 2 \sin t & \sin t \\ \sin 2t & 2 \sin 2t & \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Как видим, ее столбцовый ранг  $k$  равен единице и меньше числа столбцов.

Итак, все условия теоремы выполнены.

Далее для решения поставленной задачи воспользуемся алгоритмом доказательства теоремы. Для исходной системы запишем соответствующий аналог системы (10)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= 0, \\ \dot{x}_3 &= x_3 + (b_1 \quad b_2) \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix}, \\ A^{(1)}(t) \operatorname{col}(x_1, x_2, x_3) &= \begin{pmatrix} \sin t & 2 \sin t & \sin t \\ \sin 2t & 2 \sin 2t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (10') \\ (\xi_1(t) \quad \xi_2(t)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &+ (\cos t - 1)x_3 + (b_1 \quad b_2) \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(t) \\ \tilde{u}_2(t) \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Согласно лемме 2 построим постоянную неособенную матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

такую, что преобразование

$$x = Qy$$

приводит третье из полученных уравнений системы (10') к виду

$$\begin{pmatrix} \sin t & 2 \sin t & \sin t \\ \sin 2t & 2 \sin 2t & \sin t \end{pmatrix} Qy = \begin{pmatrix} \sin t & 2 \sin t & \sin t \\ \sin 2t & 2 \sin 2t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin t \\ 0 & 0 & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда в силу леммы 3 находим структуру сильно нерегулярного периодического решения

$$y_1 = y_1(t) = \varphi_1(t), \quad y_2 = y_2(t) = \varphi_2(t), \quad y_3 = y_3(t) = 0,$$

где  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  – некоторые непрерывные периодические с периодом  $\Omega$ , несоизмеримым с  $2\pi$ . Возвращаясь к исходным переменным

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

находим

$$x_1(t) = \varphi_1(t), \quad x_2(t) = \varphi_2(t), \quad x_3(t) = -\varphi_1(t) - 2\varphi_2(t).$$

Из первого уравнение из (10') следует, что  $\varphi_1(t) \equiv \alpha_1$ ,  $\varphi_2(t) \equiv \alpha_2$ , где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  – некоторые вещественные постоянные, т. е.  $x_1(t) \equiv \alpha_1$ ,  $x_2(t) \equiv \alpha_2$ ,  $x_3(t) \equiv -\alpha_1 - 2\alpha_2$ .

Подставляя  $x_3(t)$  во второе уравнение системы (10'), получаем равенство

$$-\alpha_1 - 2\alpha_2 + b_1 \hat{u}_1 + b_2 \hat{u}_2 = 0,$$

откуда имеем

$$\hat{u}_1 = \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} \hat{u}_2,$$

при этом вторая компонента  $\hat{u}_2$  стационарной составляющей управления может оставаться произвольной. Аналогично, после подстановки  $x(t)$  в последнее уравнение из системы (10') находим линейную форму для компонент осциллирующей части искомого управления

$$b_1 \tilde{u}_1(t) + b_2 \tilde{u}_2(t) = -(\xi_1(t)\alpha_1 + \xi_2(t)\alpha_2 + (\cos t - 1)(-\alpha_1 - 2\alpha_2)).$$

### Заключение

Для класса линейных периодических систем управления с вырождением блоков среднего значения матрицы коэффициентов построено периодическое воздействие того же периода, что и сама система, переводящее систему в асинхронный режим, при котором замкнутая управлением система имеет сильно нерегулярное периодическое решение. Алгоритм проиллюстрирован примером.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Зубов, В. И.* Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М. : Наука, 1975. – 495 с.
2. *Макаров, Е. К.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е. К. Макаров, С. Н. Попова. – Минск : Беларус. навука, 2012. – 407 с.
3. *Малкин, И. Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. – М.-Л. : ОГИЗ, 1949. – 244 с.
4. *Massera, J. L.* Observaciones sobre las soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J. L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria. – 1950. – V. 4, № 1. – P. 37–45.
5. *Курцвейль, Я.* О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. матем. журнал. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.
6. *Еругин, Н. П.* О периодических решениях дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин // Прикл. матем. и механика. – 1956. – Т. 20, вып. 1. – С. 148–152.
7. *Гайшун, И. В.* Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами / И. В. Гайшун // Докл. АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 8. – С. 684–686.
8. *Грудо, Э. И.* О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем / Э. И. Грудо, А. К. Деменчук // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 3. – С. 409–416.
9. *Борухов, В. Т.* Сильно инвариантные подпространства неавтономных линейных периодических систем и их решения с периодом, несоизмеримым с периодом системы / В. Т. Борухов // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 5. – С. 585–591.
10. *Папалекси, Н. Д.* Об одном случае параметрически связанных систем / Н. Д. Папалекси // Journ. Of Phys. Acad. Sc. USSR. – 1939. – Т. 1. – С. 373–379.
11. *Пеннер, Д. И.* Колебания с саморегулирующимся временем взаимодействия / Д. И. Пеннер, Я. Б. Дубошинский, Д. Б. Дубошинский // ДАН СССР. – 1972. – Т. 204, № 5. – С. 1065–1066.
12. *Деменчук, А. К.* Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний / А. К. Деменчук // Доклады НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 4. – С. 37–42.
13. *Деменчук, А. К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Труды Института математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 31–34.
14. *Деменчук, А. К.* Управление асинхронным спектром линейных периодических систем с невырожденным левым верхним диагональным блоком среднего значения матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Труды Института математики. – 2022. – Т. 30, № 1, 2. – С. 22–29.
15. *Хорн, Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Наука, 1989. – 655 с.
16. *Demenchuk, A. K.* Partially irregular almost periodic solutions of ordinary differential systems / A. K. Demenchuk // Math. Bohemica. – 2001. – V. 126, № 1. – P. 221–228.
17. *Деменчук, А. К.* Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга / А. К. Деменчук // Труды Института математики. – 2019. – Т. 27, № 1, 2. – С. 23–28.

Поступила в редакцию 17.02.2024 г.

Контакты: demenchuk@im.bas-net.by (Деменчук Александр Константинович).

***Demenchuk A. K. SYNTHESIS OF AN ASYNCHRONOUS MODE IN A LINEAR PERIODIC CONTROL SYSTEM WITH A NON-DEGENERATE LOWER DIAGONAL BLOCK OF THE AVERAGING COEFFICIENT MATRIX***

*A linear periodic control system with a constant matrix under control is considered. Program control is periodic, and the set of its frequencies is contained in the frequency module of the coefficient matrix. It is assumed that the control matrix has linearly dependent columns; the averaging of the coefficient matrix is reduced to a special form with a non-degenerate lower right diagonal block and the remaining trivial blocks. For the class of systems under consideration, sufficient conditions are given, under which the construction of a control action is carried out, transferring the system to an asynchronous mode.*

**Keywords:** linear differential control system, strongly irregular periodic solution, asynchronous spectrum.



УДК 511.42

## ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ДЕЛИМОСТЬ ДИСКРИМИНАНТОВ НА БОЛЬШУЮ СТЕПЕНЬ ПРОСТОГО ЧИСЛА

**О. Н. Кемеш**

кандидат физико-математических наук  
Белорусский государственный аграрный технический университет

**И. М. Морозова**

кандидат физико-математических наук, доцент  
Военная академия Республики Беларусь

**Н. В. Сакович**

кандидат физико-математических наук, доцент  
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

**Н. В. Шамукова**

кандидат физико-математических наук, доцент  
Военная академия Республики Беларусь

*В данной статье дается обзор основных результатов, полученных ранее при решении проблем оценки количества многочленов с заданной диофантовой структурой, а также предложен метод, позволяющий получить точную оценку количества полиномов при всех значениях параметра  $v$ .*

**Ключевые слова:** Мера Лебега, мера Хаара, размерность Хаусдорфа, диофантовы приближения, дискриминанты целочисленных полиномов,  $p$ -адические числа.

### Введение

Около двух веков назад Дирихле [1] доказал теорему, в которой получил существенное улучшение, полученных ранее результатов, при замене действительных чисел рациональными числами.

Теорема Дирихле. Для любого  $x \in \mathbb{R}$  и натурального числа  $Q > 1$  всегда существуют целые числа  $p$  и  $q$ ,  $1 \leq q \leq Q$ , такие, что

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq q^{-1} Q^{-1}. \quad (1)$$

Неравенство (1) усиливалось и обобщалось во многих статьях и монографиях [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Область математики, связанная с неравенством (1), получила название теории диофантовых приближений.

Преобразовав (1), получаем, что неравенство

$$|qx - p| < q^{-1}, \quad 1 \leq q \leq Q \quad (2)$$

имеет бесконечное число решений для любого  $x$  из интервала  $I = [a, b]$  в целых  $p$  и натуральных числах  $q$ , где в (2) под знаком модуля находится полином  $qx - p$  первой степени.

Сформулируем несколько задач, связанных с обобщением неравенства (2) на полиномы степени  $\deg P = n$  и высоты  $H = H(P) = \max |a_i|$ ,  $0 \leq i \leq n$  вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0, a_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq n. \quad (3)$$

Существует простой метод, названный принципом ящиков Дирихле, позволяющий обобщить неравенство (2) на полиномы произвольной степени.

Далее  $c_1 = c_1(n)$ ,  $c_2, \dots$  величины, зависящие только от  $n$  и не зависящие от  $H$  и  $Q$ . Обозначим  $\mu_1$  и  $\mu_2$  меру Лебега в  $\mathbb{R}$  и  $\mu_2$  меру Хаара в  $\mathbb{Q}_p$  – поле  $p$ -адических чисел, а  $\dim B$  – размерность Хаусдорфа множества  $B \subset \mathbb{R}$ . Для  $x > 0$  введем монотонно убывающую функцию  $\psi(x) > 0$ . Обозначим  $\mathcal{L}_n(\Psi)$  – множество  $x \in I$ , для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1} \Psi(H)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах (3).

При  $\Psi_1(H) = H^{-w}$ ,  $w > 3n - 1$  К. Малер [7] доказал, что  $\mu_1 \mathcal{L}_n(\Psi_1) = 0$  и предложил (гипотеза Малера), что  $\mu_1 \mathcal{L}_n(\Psi_2) = 0$ ,  $\Psi_2(H) = H^{-w_1}$  и  $w_1 > 1$ .

**Теорема 1.** (Спринджук [2, 8]). Гипотеза Малера справедлива.

Ровно 100 лет назад А. Я. Хинчин [9] доказал, что верно следующее утверждение.

**Теорема 2.** Верно равенство

$$\mu_1 \mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ b - a, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases}$$

В конце XX века В. И. Берник [5] и В. В. Бересневич [10] обобщили и усилили теоремы 1 и 2.

**Теорема 3.** Справедливы равенства

$$\mu_1 \mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu_1 I, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases}$$

Несколько ранее А. Бейкер и В. Шмидт [11] и В. Н. Берник [4] нашли точное значение размерности Хаусдорфа множества  $M_n(w)$  тех  $x \in I$ , для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-v}, v > n$$

имеет бесконечное число решений в полиномах  $P(x)$

**Теорема 4.** Размерность Хаусдорфа множества  $n(v)$  равна  $dim n(v) = \frac{n+1}{v+1}$ .

Результаты, аналогичные теоремам 1–4, были получены для поля  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Q}_p$  [3, 12], а также в поле формальных степенных рядов.

Методы, разработанные при доказательстве указанных выше результатов, оказались полезными для решения ряда прикладных задач [13, 14]. В последние годы стали популярными задачи, по оценкам сверху и снизу количества полиномов заданной степени и высоты, у которых производные в корнях полиномов их дискриминанты и результаты лежат в указанных заранее границах [15], [16], [17]. Следует отметить разнообразие применяемых при решении таких задач методов анализа, алгебры, геометрии чисел, теории вероятностей и теории динамических систем.

### Основная часть

В данной статье мы исследуем величины дискриминантов целочисленных полиномов, а также выясняем, на какую степень простого числа могут делиться дискриминанты.

Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – корни  $P(x)$  как действительные, так и комплексные. В некоторых задачах принципиально важно знать, является ли корень  $\alpha_i$  действительным алгебраическим числом или  $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

При исследовании структуры множества решений неравенства  $|P(x)| < H^{-w}$ ,  $w > 0$  важно выделить как количество интервалов  $\sigma(P)$ , так и размеры этих интервалов.

Обозначим через  $s(\alpha_i)$  множество тех  $x$ , для которых корень  $\alpha_i$  является ближайшим корнем к  $x$ . Удобно положить  $i = 1$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\alpha_i$  – ближайший к  $x$  корень  $P(x)$ . Тогда

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1} |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1}; \quad (4)$$

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1} \min_{2 \leq j \leq n} \left( |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1} (|\alpha - \alpha_2| \cdots |\alpha_1 - \alpha_j|)^{\frac{1}{j}} \right). \quad (5)$$

Приведенные в (4), (5) оценки являются точными в том смысле, что всегда можно указать интервал  $1 \leq j \leq n$ , для которого выполняется неравенство, противоположное (4), (5). Это доказано в [17]. В [18] показано, что оценки длин интервалов  $|x - \alpha_1|$  можно получить через величины дискриминантов  $P(x)$ .

Если применить лемму 1 к неравенству  $|P(x)| < H^{-w}$ , то становится ясно, что множество решений неравенства можно покрыть объединением интервалов, содержащих корни  $P(x)$ .

Поэтому первые продвижения в проблеме Малера были связаны с оценками сверху для количества полиномов с малыми значениями модулей производных и детерминантов  $P(x)$  [15, 19].

Рассмотрим задачи диофантовых приближений в  $\mathbb{Q}_p$  – поле  $p$ -адических чисел.

Для  $\alpha_i \in \mathbb{Q}_p$  множество

$$K_i = K_i(w, p^{-k_i}) = \{w \in \mathbb{Q}_p : |w - \alpha_i|_p < p^{-k_i}, k_i \in \mathbb{Z}\} \quad (6)$$

будем называть цилиндром в  $\mathbb{Q}_p$ . Как и при определении меры Лебега  $\mu_1$  в  $R$  введем для любого множества  $B_1 \subset \mathbb{Q}_p$  покрытие  $B_1$  цилиндрами  $K$  меры  $\mu_2 = p^{-k}$ . Возьмем множество

$$B_2 = \inf \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

по всем покрытиям  $B_1$ .

Величину  $B_2$  назовем мерой Хаара  $\mu_2$  множества  $B_1$ . Из (6) следует, что каждую точку цилиндра можно рассматривать как его центр, и если два цилиндра пересекаются, то один из них содержит второй.

Нетрудно доказать, используя принцип ящика Дирихле [3, 6], что точная верхняя грань  $v_1 > 0$ , для которых существует бесконечно много векторов  $\bar{q} = (q_0, q_1, \dots, q_n)$ , удовлетворяющих неравенству

$$|q_n w^n + \dots + q_1 w + q_0|_p < \max_{0 \leq i \leq n} |q_i|^{-v_1}.$$

Не менее  $n + 1$  для любого  $n$ . Множество неприводимых примитивных полиномов с целыми рациональными числами,  $a_0, a_2, \dots, a_n$ , удовлетворяющими неравенству

$$\max(|a_0|; |a_1|; \dots; |a_{n-1}|) \leq a_n = Q.$$

Обозначим через  $\mathcal{P}_n(Q)$ . Корни полиномов  $P(w) \in \mathcal{P}_n(Q)$  принадлежат алгебраическому замыканию  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  поля  $\mathbb{Q}_p$ , на которые мы продолжим нормирование  $|\dots|_p$  как в §6.1 как в [3, 6] и будем обозначать  $|w|_p$  для всех  $w \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ .

Приведем несколько лемм.

**Лемма 2** [3, 6]. Для всех корней  $\gamma_i$  полиномов  $P(w) \in \mathcal{P}_n(Q)$  справедливы неравенства  $|\gamma_i|_p \leq p$ .

Корни  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  полиномов  $P(w)$  упорядочим следующим образом

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_p \leq |\gamma_1 - \gamma_3|_p \leq \dots \leq |\gamma_1 - \gamma_n|_p.$$

Через  $S(\gamma_i)$  будем обозначать множество  $w \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ , для которых

$$\min_{1 \leq k \leq n} |w - \gamma_k|_p = |w - \gamma_i|_p,$$

и далее полагаем, что  $i = 1$ .

Для полинома  $P(w)$  с высотой  $\frac{Q}{2} < H = H(P) \leq Q$  и достаточно малого числа  $\varepsilon_1 > 0$  введем натуральное число  $T$  и действительные числа  $\rho_i$  из равенств

$$T = [\varepsilon_1^{-1}] + 1, \quad |\gamma_1 - \gamma_i|_p = Q^{-\rho_i}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Определим целые числа  $l_2, \dots, l_n$  из неравенств

$$\frac{l_{i-1}}{T} \leq \rho_i < \frac{l_i}{T}.$$

Из леммы 2 следует, что  $\frac{l_i}{T} \geq -1$  [3,6], для достаточно больших  $Q$ . Положим

$$P_i = T^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} l_{i+1}.$$

Используя дискриминанты полиномов  $\mathcal{P}(w) \in \mathcal{P}_n(Q)$ , несложно показать, что справедлива

**Лемма 3** [3, 6]. Количество векторов  $\bar{l} = (l_2, \dots, l_n)$  зависит только от  $\varepsilon_1$  и  $n$ , но не зависит от  $H$  и  $Q$ . Множество полиномов  $P(w) \in \mathcal{P}_n(Q)$  с одним и тем же вектором  $\bar{l}$  будет обозначать  $\mathcal{P}_n(Q, \bar{l})$ .

**Лемма 4.** Пусть  $\mathcal{P}_n(w) \in \mathcal{P}_n(Q)$ ,  $w \in S(\gamma_1)$ .

Тогда

$$|w - \gamma_1|_p \leq |P(w)|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1}$$

$$|w - \gamma_1|_p \leq \min_{2 \leq j \leq n} \left( |P(w)|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1} |\gamma_1 - \gamma_2|_p \cdots |\gamma_1 - \gamma_j|_p \right)^{\frac{1}{j}}.$$

**Лемма 5.** Пусть полиномы. И  $P_1(w)$  и  $P_2(w)$  из  $\mathcal{P}_n(Q)$  степени не более  $n$  и высоты не более  $Q$  не имеют общих корней в  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  и на цилиндре  $K$ ,  $\mu_2 K = Q^{-\eta}$  удовлетворяют неравенству

$$\max_{w \in K} (|P_1(w)|_p, |P_2(w)|_p) < Q^{-\tau_1}, \quad \tau_1 > 0.$$

Тогда для любого  $\delta > 0$  и  $Q > Q_0(\delta)$  верно неравенство

$$\tau_1 + 2 \sum_{s=1}^n \max(\tau_1 - s\eta, 0) < 2n + \delta.$$

Лемма 5 доказана для  $s = 1$  в [3, 8], а при произвольном  $s$  доказана в [19].

Каждое ненулевое рациональное число  $\frac{a}{b}$  ( $a, b = 1$ ) можно записать в виде  $\frac{a_1 p^m}{b}$ , ( $a_1, p_1 = 1$ ) при некотором  $m \in \mathbb{Z}$ . Определим  $p$ -адическую норму числа

$$|a|_p = \begin{cases} 0, & \text{если } m=0, \\ p^{-m}, & \text{если } m \neq 0. \end{cases}$$

Для любых  $a$  и  $b$  справедливо равенство  $|ab|_p = |a|_p |b|_p$ , неравенство

$$|a + b|_p \leq \max(|a|_p, |b|_p) \tag{7}$$

и если  $|a|_p \neq |b|_p$ , то

$$|a + b|_p = \max(|a|_p, |b|_p) \tag{8}$$

Таким образом, введенную норму называют неархимедовой в отличие от архимедовой нормы  $|a|$  – модуль  $a$ . Отметим справедливость неравенства

$$|a|^{-1} \leq |a|_p.$$

Пополнение поля рациональных чисел по архимедовой норме приводит к полю действительных чисел  $R$ , а по неархимедовой норме (7), (8) – к полю  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Q}_p$ . Каждый элемент  $w \in \mathbb{Q}_p$  может быть единственным образом записан в виде

$$w = \sum_{r=t}^{\infty} d_k p^r, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq d_k \leq p - 1.$$

При неотрицательном  $r$  имеем  $|w|_p \leq 1$  и число  $w$  называется целыми  $p$ -адическим числом. Множество целых  $p$ -адических чисел образует кольцо. Для многочлена  $P(w)$  с целыми коэффициентами  $a_j$  и корнями  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  обозначим через  $D(P)$  величину

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\alpha_i - \alpha_j|^2,$$

которую назовем дискриминантом полинома  $P(w)$ .

В действительном случае дискриминант – это целое число, равное 0, тогда и только тогда, когда  $P(x)$  имеет кратные корни.

Для  $0 \leq v \leq 2$  обозначим через

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P(x) \in Z[x]: 1 \leq |D(P)| < Q^{2n-2} Q^{-2v}\}. \quad (9)$$

В [16] доказано, что

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) \gg Q^{n+1} Q^{2n-2-2v} - \frac{n+2}{n} v, \quad 0 \leq v \leq n - 1. \quad (10)$$

В [20], что для любого  $\varepsilon > 0$  и  $Q > Q_0(\varepsilon)$  верно неравенство

$$\#\mathcal{P}_3(Q, v) < Q^{4-\frac{5}{3}v}, \quad 0 \leq v \leq 2.$$

Таким образом при  $0 \leq v \leq 2$

$$cQ^{4-\frac{5}{3}v} < \#\mathcal{P}_3(Q, v) < Q^{4-\frac{5}{3}v+\varepsilon}.$$

Верхняя оценка в (9), (10) была доказана методами метрической теории диофантовых приближений.

В данной статье мы обобщаем верхнюю оценку в (10) на поле  $p$ -адических чисел.

**Теорема 6.** Для любого  $\varepsilon > 0$  и  $Q > Q_0(\varepsilon)$  справедливо неравенство

$$\#\mathcal{P}_3(Q, v_1) < Q^{4-\frac{5}{3}v_1+\varepsilon}, \quad 0 \leq v_1 \leq 2, \quad (11)$$

где множество  $\mathcal{P}_3(Q, v_1)$  состоит из полиномов третьей степени, для которых верно неравенство

$$|D(P)|_p < Q_n^4 \prod (\gamma_i - \gamma_j)^{\frac{1}{p}}. \quad (12)$$

Доказательство теоремы.

Случай больших  $v_i$ .

Покроем цилиндр  $K \subset Q_p$  объединением цилиндров

$$M = \cup_{i=1}^S K_i, \mu_2 K_i = Q^{-\rho_2}, S = Q^{\rho_2}.$$

Три корня  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  полинома  $P_3(\varepsilon)$  упорядочим следующим образом:

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_p = Q^{-\rho_2}, |\gamma_1 - \gamma_3|_p = Q^{-\rho_3}, |\gamma_2 - \gamma_3|_p = Q^{-\rho_3}, v_1 = \rho_2 + 2\rho_3, \quad (13)$$

при необходимости корни меняем местами. Если выполняется неравенство, противоположное (13), то существуют тройки  $\overline{\gamma}_1 = (\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \gamma_{i_3}); \overline{\gamma}_2 = (\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \gamma_{j_3}), i \neq j$  и цилиндр  $K_i$ , которому принадлежит не менее  $T_1 = Q^{\frac{\varepsilon}{2}}$  троек  $\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2$  с условием

$$|\gamma_{i_1} - \gamma_{j_1}|_p < Q^{-4 + \frac{5}{3}v - \frac{\varepsilon}{2}}. \quad (14)$$

Неравенство (14) по лемме выполняется для некоторых неприводимых полиномов  $P_1(w), P_2(w)$ . Рассмотрим результат полиномов

$$\text{Res}(P_1, P_2) = a_{3i}^3 a_{3j}^3 \prod |\gamma_{i_s} - \gamma_{j_t}|_p \quad (15)$$

в поле  $p$ -адических чисел.

Так как

$$\begin{aligned} 0 \neq \text{Res}(P_1, P_2) \in \mathbb{Z}, \quad |a_{3i}^3|_p \leq 1, \quad |a_{3j}^3| \leq 1, \\ |\gamma_{i_s} - \gamma_{j_t}|_p \leq Q^{-\rho_2}, \quad \max(s, t) \leq 2, \\ |\gamma_{i_s} - \gamma_{j_t}|_p < Q^{-\rho_3}, \quad s = 3 \text{ или } t=3, \end{aligned}$$

то (15) можно записать в виде

$$|D(P)|_p = |Q_4^3|_p |\gamma_1 - \gamma_2|_p^2 = |\gamma_1 - \gamma_3|_p^2 < Q^{-2w}, \quad 0 \leq w \leq 2.$$

Заметим, что полиномы  $P(w)$  на данном этапе можно считать неприводимыми, так как количество неприводимых полиномов можно оценить:

$$\#\mathcal{P}_{red}(w) \in \mathcal{P}_3(Q) \ll Q^{3n}.$$

Для доказательства теоремы 6 проведем классификацию корней из алгебраического замыкания  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  поля  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Q}_p$ . Пусть выполнено неравенство, противоположное формулировке теоремы 6. Представим цилиндр  $K$  в виде объединения цилиндров  $K_i$  с мерой Хаара  $\mu_2$ , равной  $Q^{-l_2 T^{-1}}$ . Пусть на одном из таких цилиндров  $J_i$  окажется не менее  $Q^{4 - \frac{5}{3}w + \frac{\varepsilon}{2}}$  полиномов  $P(\omega)$  с дискриминантами  $D(P)$  такими, что  $|D(P)|_p < c_{17} Q^{-2w}$ . Разложим эти полиномы на цилиндре  $J_1$  в ряд Тейлора в окрестности корня  $\gamma_1$ . В итоге получим не менее  $Q^{4 - \frac{5}{3}w - l_2 T^{-1} + \frac{\varepsilon}{2}}$  полиномов  $P(\omega)$ , удовлетворяющих неравенствам

$$|P_i(\omega)|_p < c_{18} Q^{-2p_1 - p_3 - \frac{\varepsilon}{4}}. \quad (16)$$

Применим к полиномам (16) принцип ящиков Дирихле, чтобы уменьшить степени  $P_i(\omega)$  до второй и первой соответственно. Если среди новых полиномов окажутся полиномы  $R_j(\omega)$  без общих корней, то применим к ним следующую лемму.

**Лемма 6.** Пусть целочисленные полиномы  $P_i(\omega)$ ,  $i = 1, 2$ , не имеют в цилиндре  $K$  меры Хаара  $Q^{-\eta}$ ,  $\eta > 0$  общих корней. Пусть

$$\max_{\omega \in K} (|P_1(\omega)|_p, |P_2(\omega)|_p) < Q^{-\tau_1}, \quad \tau_1 > 0.$$

Тогда при любом  $\delta > 0$  и  $Q > Q_0(\delta)$  справедливо неравенство

$$\tau_1 + 2 \sum_{k=1}^n \max(\tau_1 - k\eta, 0) < 2n + \delta.$$

Для неприводимых полиномов  $R_j(\omega)$  лемма приводит к противоречию. Приводимые полиномы  $R_j(\omega)$  второй степени разложим на линейные множители

$$R_j(\omega) = (a_1\omega + b_1)(a_2\omega + b_2).$$

Поскольку мы можем точно оценить как сверху, так и снизу меры множеств  $\omega \in \mathbb{Q}_p$ , для которого верны неравенства  $|a_i\omega + b_i|_p < Q^{-w_i}$ ,  $w_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ , то получим для  $R_j(\omega)$  неравенства, которые приведут к противоречию.

### Заключение

Доказанная теорема улучшила результаты, полученные ранее при исследовании проблемы диофантовых приближений на поле  $p$ -адических чисел, а методика доказательства имеет перспективы для дальнейшего развития и получения более сильных оценок.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Нестеренко, Ю. В.* Теория чисел: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Ю. В. Нестеренко. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 22 с.
2. *Хинчин, А. Я.* Избранные труды по теории чисел / А. Я. Хинчин. – М.: МЦНМО, 2006. – 260 с.
3. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 184 с.
4. *Берник, В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arith. – 1983. – Т. 42, № 3. – С. 219–253.
5. *Берник, В.* О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Vol. 53, № 1. – P. 17–28.
6. *Bernik, V. I.* Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson // Cambridge Tracts in Mathematics, 137, 1999. – 186 p.
7. *Mahler, K.* Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106, № 1. – P. 131–139.
8. *Спринджук, В. Г.* Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР. Сер. Мат., 29. – 1965. – № 2. – С. 379–436.
9. *Khinchine, A.* Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khinchine // Math. Ann. – 1924. – Vol. 93, № 1–2. – P. 115–125.
10. *Beresnevich, V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999. – Vol. 50, № 2. – P. 97–112.
11. *Baker, A.* Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. M. Schmidt // Proc. London Math. Soc. (3). – 1970. – Vol. 21. – P. 1–11.
12. *Beresnevich, V.* Bernik, V. I., Kovalevskaya E. I. On approximation of p-adic numbers by p-adic algebraic numbers / V. Beresnevich, V. I. Bernik, E. I. Kovalevskaya // Journal of Number Theory. – 2005. – Vol. 111. – P. 33–36.



13. **Пташник, Б. И.** Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. – Киев : Наукова думка, 1984. – 264 с.
14. **Beresnevich, V.** Number theory meets wireless communications: an introduction for dummies like us / V. Beresnevich, S. Velani // Springer International Publishing. – 2020. – P. 1–67.
15. **Васильев, Д. В.** Об оценках сверху числа минимальных полиномов с малой производной в корне / Д. В. Васильев, А. С. Кудин // Чебышевский сборник. – 2019. – Т. 20, вып. 2. – С. 47–53.
16. **Beresnevich, V.** The distribution of close conjugate algebraic numbers / V. Beresnevich, V. Bernik, F. Götze // Compos. Math. – 2010. – Vol. 146, № 5. – P. 1165–1179.
17. **Пантелеева, Ж. И.** Количество алгебраических чисел с малой производной минимального многочлена / Ж. И. Пантелеева // Вестник МГУ имени А. А. Кулешова. – 2022. – № 2 (60). – С. 33–38.
18. **Beresnevich, V. V.** Integral polynomials with small discriminants and resultants / V. V. Beresnevich, V. I. Bernik, F. Götze // Advances in Mathematics, 298 – 2016. – P. 393–412.
19. **Кудин, А. С.** Об оценке снизу количества целочисленных многочленов заданной степени с малой производной в корне / А. С. Кудин // Вести НАН Беларуси. Сер. физ-мат. наук. – 2014. – № 4. – С. 112–115.
20. **Badziahin, D.** Simultaneous Diophantine approximation to points on the Veronese curve (to arXiv: 2403.17685v2).

Поступила в редакцию 17.06.2024 г.

Контакты: kemesh.oksana@gmail.com (Кемеш Оксана Николаевна), inna.morozova@tut.by (Морозова Инна Михайловна), sakovichnv@tut.by (Сакович Наталья Владимировна), shamukova\_n@mail.ru (Шамукова Наталья Валентиновна).

***Kemesh O. N., Morozova I. M., Sakovich N. V., Shamukova N. V.* DIOPHANTINE APPROXIMATIONS AND DIVISION OF DISCRIMINANTS BY A LARGE POWER OF A PRIME NUMBER**

*The article provides an overview of the main results obtained earlier in solving the problems of estimating the number of polynomials with a given Diophantine structure, and also proposes a method enabling to obtain an accurate estimate of the number of polynomials for all values of the parameter  $v$ .*

**Keywords:** Lebesgue measure, Haar measure, Hausdorff dimension, Diophantine approximations, discriminants of integer polynomials,  $p$ -adic numbers.

УДК 535.361:535.317.1

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ПРОПУСКАНИЯ И РАДИУСА УЗКОГО ПУЧКА ИЗЛУЧЕНИЯ В БИНАРНОЙ МАРКОВСКОЙ СМЕСИ

**М. С. Носкова**

кандидат физико-математических наук

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

*В работе проводится сравнительный анализ результатов расчета пространственного распределения освещенности в бинарной марковской смеси аналитическим методом, основанным на малоугловом приближении, и методом численного моделирования Монте-Карло.*

*Расчеты, проведенные обоими методами, дают близкие в количественном отношении результаты для бинарных марковских смесей с разными оптическими параметрами, и демонстрируют одни и те же закономерности по сравнению с переносом излучения в эквивалентной однородной смеси.*

**Ключевые слова:** стохастический перенос излучения, бинарная марковская смесь, малоугловое приближение, численное моделирование, метод Монте-Карло.

### Введение

Перенос излучения в стохастических неоднородных рассеивающих средах – одно из актуальных направлений современной оптики, широко применяемое для решения научных и практических задач.

Основная цель теории стохастического переноса излучения – установить связь между статистическими характеристиками параметров среды и статистическими характеристиками полей излучения [1–9].

Распространенным вариантом стохастической среды является **случайно-неоднородная смесь** (СНС) – среда, состоящая из несмешивающихся компонент, с разными оптическими характеристиками [6, 7]. Линейные размеры участков пространства, занимаемых компонентами (хорды компонент), являются случайными величинами.

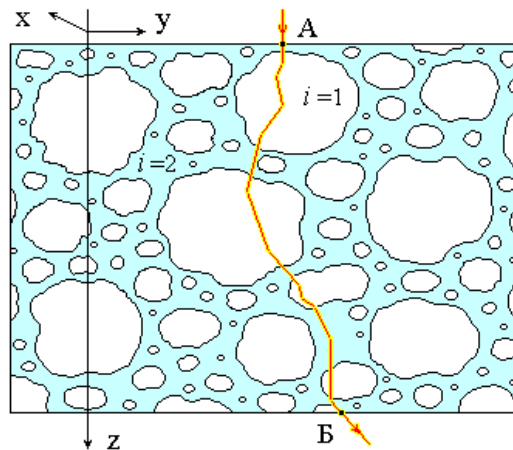


Рисунок 1 – Схематическое изображение разорванной облачности

В атмосферной оптике двухкомпонентной СНС является разорванная облачность (Рис. 1): пересекающий ее фотон (кривая АБ) проходит сквозь чередующиеся участки облаков (компонента  $i=1$ ) и межоблачного пространства (компонента  $i=2$ ). Внутренняя структура каждой из компонент считается однородной. Стохастичность задачи проявляется только в статистике распределения облачного поля, т. е. в вероятности присутствия в данной точке облака или ясного неба.

Другие примеры СНС показаны на рис. 2, где 1 – биологические ткани, пронизанные мелкими кровеносными сосудами; 2 – легочная ткань; 3 – бетонная защита ядерных реакторов; 4 – кипящая вода как теплоноситель в ядерных реакторах.

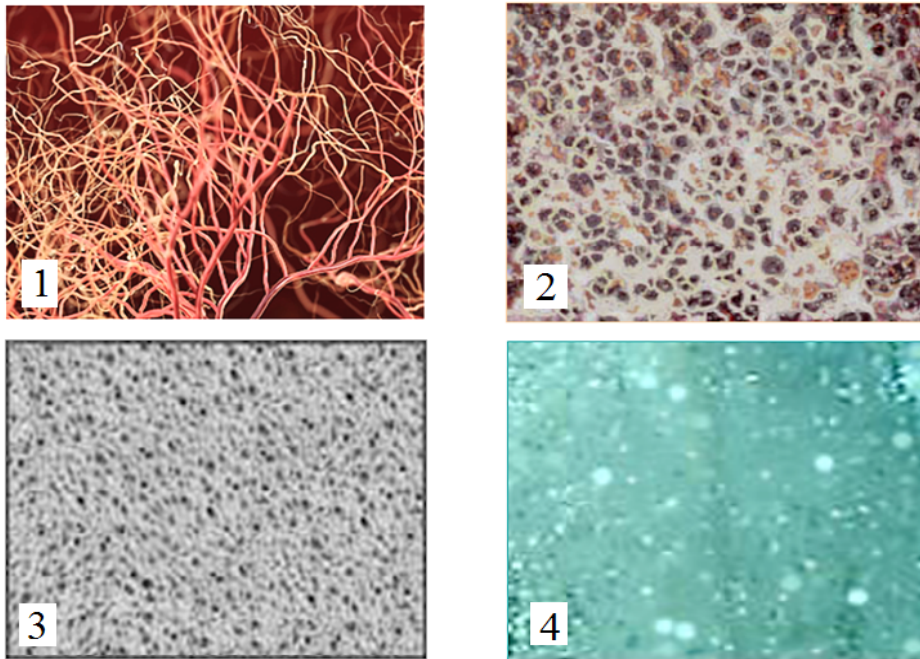


Рисунок 2 – Примеры случайно неоднородных смесей

При решении любой физической задачи наиболее ценным результатом является аналитическое решение, однако, строгие аналитические решения стохастического уравнения переноса с произвольной статистикой существуют лишь для некоторых частных случаев [6, 7, 10–12].

Поэтому большой интерес представляет разработка приближенных методов описания стохастического переноса, базирующиеся на аналитическом усреднении и зависящих от небольшого количества входных параметров.

#### Постановка задачи

Стационарное уравнение переноса излучения в среде имеет вид [1]:

$$\Omega \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \Omega) + \varepsilon(\mathbf{r})I(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \Omega') f(\Omega \cdot \Omega', \mathbf{r}) d\Omega' + B(\mathbf{r}, \Omega), \quad (1)$$

где  $I(\mathbf{r}, \Omega)$  – интенсивность излучения в точке  $\mathbf{r}$  в направлении, определяемом единичным вектором  $\Omega$ ,

$\nabla = \mathbf{i} \partial / \partial x + \mathbf{j} \partial / \partial y + \mathbf{k} \partial / \partial z$  – оператор градиента,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  – единичные векторы декартовой системы координат,  $\sigma(\mathbf{r})$  – показатель рассеяния,  $\varepsilon(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r}) + \sigma(\mathbf{r})$  – показатель экстинкции,  $k(\mathbf{r})$  – показатель поглощения,

$f(\Omega \cdot \Omega', \mathbf{r})$  – индикатриса рассеяния, функция, описывающая вероятность изменения направления движения фотона из  $\Omega$  в  $\Omega'$  при однократном рассеянии,

$B(\mathbf{r}, \Omega)$  – функция источников.

Одна из распространенных моделей случайно-неоднородной смеси с произвольным размером неоднородностей – **бинарная марковская смесь** (далее БМС) – среда, состоящая из двух несмешивающихся веществ (компонент), случайным образом распределенных в пространстве, каждое из которых имеет свои оптические характеристики [12–15].

Чередование компонент 1 и 2 вдоль произвольной прямой, проходящей сквозь слой БМС, представляет собой Марковский дискретный случайный процесс. Линейные размеры областей пространства, занимаемых компонентами, – случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону:

$$\varphi_i(s_i) = \frac{1}{l_i} \exp\left(-\frac{s_i}{l_i}\right), \quad (2)$$

где  $\varphi_i(s_i)$  – функция плотности вероятности случайной величины  $s_i$ , характеризующей линейные размеры участков пространства, занимаемых  $i$ -й компонентой смеси вдоль направления распространения пучка ( $i$  – индекс, указывающий номер компоненты),  $l_i$  – среднее значение  $s_i$  (средние хорды компонент). Внутренняя структура каждой из компонент считается однородной.

В БМС уравнение переноса (1) превращается в систему двух связанных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega) + \varepsilon_1 p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega) &= \frac{\sigma_1}{4\pi} \int_{4\pi} p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega') f_1(\Omega \cdot \Omega') d\Omega' + p_1 B_1 - \frac{p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega)}{l_1} + \frac{p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega)}{l_2}, \\ \Omega \cdot \nabla p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega) + \varepsilon_2 p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega) &= \frac{\sigma_2}{4\pi} \int_{4\pi} p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega') f_2(\Omega \cdot \Omega') d\Omega' + p_2 B_2 - \frac{p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega)}{l_2} + \frac{p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega)}{l_1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $I_i(\mathbf{r}, \Omega)$  – условное значение интенсивности в компоненте  $i$ ,

$\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  – соответственно показатели рассеяния и ослабления  $i$ -й компоненты,

$f_i(\Omega \cdot \Omega')$  – индикатриса рассеяния  $i$ -й компоненты,

$l_i$  – средние хорды компонент,

$p_i = \frac{l_i}{(l_1 + l_2)}$  – вероятность нахождения компоненты  $i$  в произвольной точке объема, занимаемого БМС,

$B_i(\mathbf{r}, \Omega)$  – функции источников.

Среднее значение интенсивности излучения в БМС определяется как

$$\langle I(\mathbf{r}, \Omega) \rangle = p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega) + p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega). \quad (4)$$

Марковская модель позволяет создавать удобные для практического применения алгоритмы расчета усредненных характеристик излучения, используя небольшое число параметров.

В работах [13, 14] система (3) решалась аналитически в случае изотропной индикатрисы рассеяния. Однако многие природные среды, в том числе атмосферная облачность, имеют вытянутую индикатрису рассеяния, что позволяет применять к ним малоугловое приближение и метод преобразования Фурье [1–3]. В рамках данного приближения можно получить некоторые интегральные характеристики излучения в аналитическом виде [16–21], что дает возможность для анализа закономерностей переноса излучения в стохастических средах.

Необходимым элементом формирования физической модели является определение ее области применимости. В работе [22] проводится качественная оценка применимости модели БМС для описания стохастического переноса излучения. Показано, что фрактальная размерность БМС совпадает с фрактальной размерностью многих природных сред, что говорит о широкой области применимости данной модели.

Хотя малоугловое рассеяние само по себе с высокой степенью точности соответствует принципу причинности, лежащему в основе марковских процессов, полученные в его рамках нуждаются в дополнительной проверке.

**Цель настоящей работы** – оценить точность аналитического метода описания переноса излучения, основанного на малоугловом приближении [13–17] с помощью метода численного моделирования Монте-Карло.

### Результаты, полученные в рамках модели БМС

С помощью стандартных приближений малоугловой теории [1–3] в работах [16–20] получены аналитические выражения для пространственных моментов освещенности угловых моментов интенсивности.

Пусть узкий азимутально-симметричный пучок падает перпендикулярно плоской границе БМС, как показано на рис. 1. Ось  $z$  декартовой системы координат совпадает с осью пучка, плоскость  $x$   $y$  совпадает с границей БМС.

В этом случае пространственные моменты освещенности  $E(x, y, z)$  для однородной среды определяются следующим образом:

$$M_{nk}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^k E(x, y, z) dx dy, \quad (5)$$

$E(x, y, z) = \int_{4\pi} \Omega_z I(x, y, z, \Omega) d\Omega$  – освещенность в точке  $(x, y, z)$  на плоскости  $z = const$ .

Усредненное значение пространственных моментов для БМС

$$\langle M_{nk}(z) \rangle = p_1 M_{nk}^{(1)}(z) + p_2 M_{nk}^{(2)}(z), \quad (6)$$

где  $M_{nk}^{(i)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^k E_i(x, y, z) dx dy$  – средние значения пространственных моментов освещенности  $E_i(x, y, z) = \int_{4\pi} \Omega_z I_i(x, y, z, \Omega) d\Omega$  при условии, что точка  $(0, 0, z)$  находится в компоненте  $i$ .

Наибольший интерес представляют моменты первых порядков. Момент нулевого порядка  $\langle M_{00} \rangle$  определяет среднее значение энергии, переносимой узким пучком единичной мощности в среде через плоскость  $z = \text{const}$ , или средний коэффициент пропускания БМС:

$$K_B(z) = \langle M_{00}(z) \rangle. \quad (7)$$

Квадратные корни из отношения пространственных моментов освещенности второго порядка к нулевому моменту определяют усредненное значение радиуса пучка в плоскости  $z = \text{const}$ .

$$R_B(z) = \sqrt{\frac{\langle M_{20}(z) \rangle + \langle M_{02}(z) \rangle}{\langle M_{00}(z) \rangle}}. \quad (8)$$

Более подробно формулы для расчетов среднего коэффициента пропускания БМС и среднего радиуса узкого пучка излучения представлены в [21].

### Моделирование методом Монте-Карло

Метод Монте-Карло является универсальным для решения стохастических задач. В этой области значительные успехи достигнуты, например, при описании распространения солнечного излучения в кучевой облачности [23–28]. Тем не менее, для выявления основных закономерностей стохастического переноса необходимо проводить вычисления для большого числа реализаций статистики. Поэтому численные и аналитические методы при создании теории стохастического переноса должны дополнять друг друга.

Моделирование проводилось на основе методов, приведенных в [29].

БМС рассматривается как одномерная стохастическая среда, состоящая из чередующихся плоских слоев случайной толщины, занимаемых первой или второй компонентами. В области применимости малоуглового приближения, зависимость переноса излучения от размера неоднородностей в направлении, перпендикулярном оси пучка, минимальна, что и оправдывает переход к одномерной модели.

Излучение падает на плоскую поверхность среды вдоль ее нормали, ось  $z$  декартовой системы координат совпадает с осью пучка, плоскость  $x$   $y$  совпадает с границей БМС. Малоугловое рассеяние моделировалось с использованием аппроксимации Хензи-Гринштейна [30].

Пучек считается бесконечно узким и мононаправленным, координаты точки входа фотонов в БМС  $(0, 0, 0)$ , а начальное значение координат единичного вектора, определяющего направление движения,  $(0, 0, 1)$ .

Порядок чередования компонент и толщина слоев, занимаемых первой и второй компонентами смеси, разыгрывался для каждого фотона отдельно, по мере его прохождения сквозь слой среды. Данный метод дает высокую степень усредненности результатов.

Траектории фотонов в горизонтальном направлении ограничены условием:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 8H.$$

Количество фотонов, отсеянных данным условием, составляет менее 0,5%.

Коеффіціент пропускання рассчитывался как отношение числа фотонов на выходе из слоя среды к числу фотонов на входе. Радиус пучка рассчитывается по координатам точек выхода фотонов из среды.

Алгоритм и процедура расчета коэффициента пропускания БМС может быть легко адаптирована для расчета коэффициентов пропускания стохастических сред с произвольной статистикой [22].

### Численные расчеты

Чтобы показать влияние стохастичности среды на перенос излучения, в работе производится также расчет коэффициента пропускания и радиуса пучка эквивалентной однородной смеси.

Эквивалентная однородная смесь – среда, в которой компоненты, составляющие БМС, не разделены, а перемешаны равномерно.

При расчетах использованы безразмерные оптические параметры:

$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2$  – средний коэффициент экстинкции,  $\tau = \langle \varepsilon \rangle z$  – оптическая глубина слоя,  $\Lambda_i = \sigma_i / \varepsilon_i$  – вероятности выживания фотона в единичном столкновении,  $\mu_i$  – средние косинусы углов рассеяния,  $\tilde{l}_i = \langle \varepsilon \rangle l_i$  – безразмерные средние хорды компонент,  $\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i / \langle \varepsilon \rangle$  – величины относительных флуктуаций показателей ослабления.

Каждое значение рассчитано для 100000 фотонов.

На рис. 3 и рис. 4 показаны результаты расчетов коэффициента пропускания  $K_B(\tau)$  и радиуса пучка  $R_B(z)$  в БМС с параметрами разорванной облачности, в которой компонентой-1 является облако, компонентой-2 – межоблачная среда. Межоблачные промежутки заполнены теми же частицами, что и облака, но со значительно меньшей концентрацией.

Оптические параметры разорванной облачности:

облако:  $\tilde{\varepsilon}_1 = 1.95$ ,  $\Lambda_1 = 0.9$ ,  $\mu_1 = 0.95$ ,

межоблачная среда:  $\tilde{\varepsilon}_2 = 0.05$ ,  $\Lambda_2 = 0.9$ ,  $\mu_2 = 0.95$ .

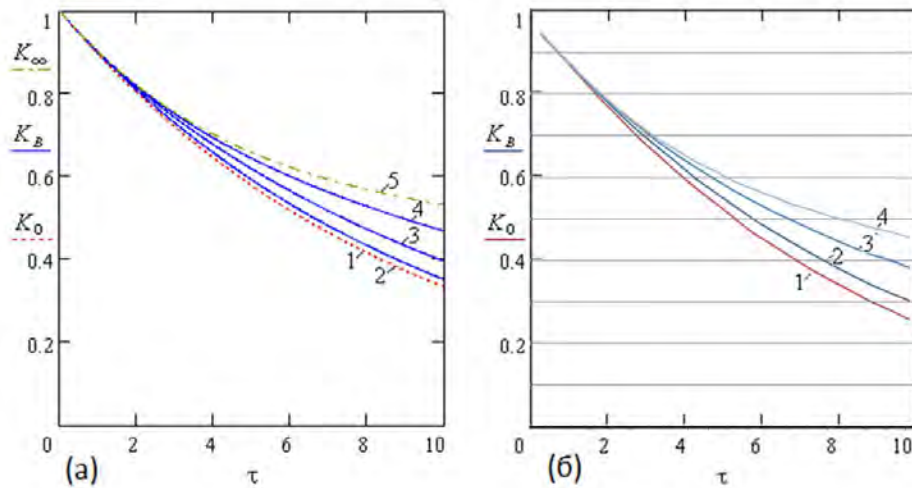


Рисунок 3 – Зависимость коэффициента пропускания от оптической глубины слоя в разорванной облачности.

На рис. 3 результаты расчетов коэффициента пропускания разорванной облачности (а) – аналитическое решение (7); (б) – метод Монте-Карло.

Кривая 1 на (а) и (б) представляет  $K_0(\tau)$  – значение коэффициента пропускания эквивалентной однородной смеси (для разорванной облачности), оно же предельное значение  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow 0$ .

Кривые 2, 3, 4 на (а) и (б) представляют  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 16$  соответственно.

Кривая 5 на (а) это  $K_\infty(\tau)$  – предельное значение  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow \infty$ . Физически этот предел соответствует случаю, когда половина неба занята мощным облаком, а вторая половина свободна. В данной статье эта ситуация методом Монте-Карло не рассчитывалась.

Оба метода расчета дают количественно близкие результаты и показывают, что коэффициент пропускания разорванной облачности заметно превышает коэффициент пропускания эквивалентной однородной смеси. Это соответствует тому факту, что для фотона, пролетающего сквозь стохастическую смесь, вероятность испытать столкновение с частицей и при этом поглотиться или рассеяться всегда ниже, чем в однородной смеси.

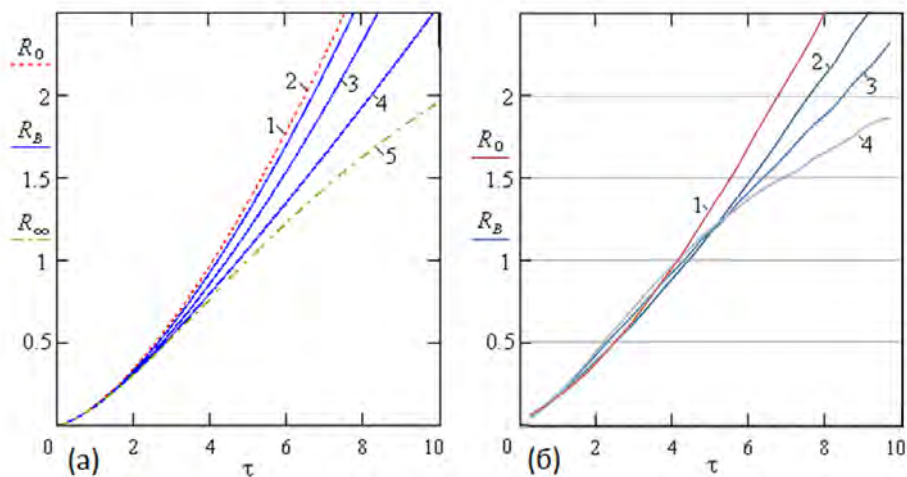


Рисунок 4 – Зависимость радиуса пучка излучения от оптической глубины слоя в разорванной облачности.

На рис. 4 показаны результаты расчетов радиуса пучка излучения в разорванной облачности: (а) – аналитическое решение (8); (б) – расчет методом Монте-Карло.

Кривая 1 на (а) и (б) представляет  $R_0(\tau)$  – значение коэффициента пропускания эквивалентной однородной смеси соответствующее разорванной облачности, т. е. предельное значение  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow 0$ .

Кривые 2, 3, 4 представляют  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 16$  соответственно.

Кривая 5 представляет  $R_\infty(\tau)$  – предельное значение  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow \infty$ . Методом Монте-Карло не рассчитывалось.



Аналитические расчеты на рис. 4 (а) показывают, что в БМС модели разорванной облачности радиус пучка заметно меньше, чем в соответствующей эквивалентной однородной смеси.

Расчеты по методу Монте-Карло на рис. 4 (б) дают более сложную картину на оптических глубинах меньших  $\tau = 5$ , но при  $\tau > 5$  радиус пучка в БМС демонстрирует такую же зависимость, что и в аналитической модели на рис. 4 (а).

Оба метода расчета показывают, что с ростом оптической глубины радиус пучка в разорванной облачности заметно меньше, чем в эквивалентной однородной смеси. Этот результат также подтверждает, что в стохастической смеси рассеянных фотонов меньше, чем в эквивалентной однородной смеси, и они реже испытывают столкновения с рассеивающими частицами.

На рис. 5 и рис. 6 показаны результаты расчетов коэффициента пропускания  $K_B(\tau)$  и радиуса пучка  $R_B(z)$  в модельной БМС, в которой компонента-1 – оптически плотная и сильнопоглощающая, компонента-2 – разреженная и сильнорассеивающая. Подобными оптическими параметрами могут обладать облака дыма или вулканические облака [8].

Оптические параметры дымовой облачности:

облака дыма:  $\tilde{\epsilon}_1 = 1.6$ ,  $\Lambda_1 = 0.1$ ,  $\mu_1 = 0.99$ ;

междоблачная среда:  $\tilde{\epsilon}_2 = 0.4$ ,  $\Lambda_2 = 0.9$ ,  $\mu_2 = 0.9$ .

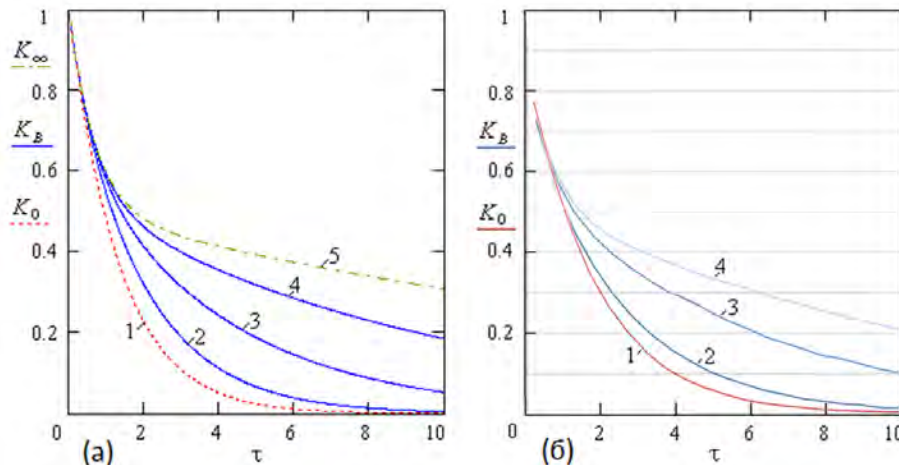


Рисунок 5 – Зависимость коэффициента пропускания от оптической глубины слоя в дымовой облачности

На рис. 5 показаны результаты расчетов коэффициента пропускания дымовой облачности (а) – аналитическое решение (7); (б) – метод Монте-Карло.

Кривая 1 на (а) и (б) представляет  $K_0(\tau)$  – значение коэффициента пропускания эквивалентной однородной смеси (для дымовой облачности), – предельное значение  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow 0$ .

Кривые 2, 3, 4 на (а) и (б) представляют  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 16$  соответственно.

Кривая 5 на (а) это  $K_\infty(\tau)$  – предельное значение  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow \infty$ . Методом Монте-Карло не рассчитывалось.

Оба метода расчета показывают, что коэффициент пропускания дымовой облачности в несколько раз превышает коэффициент пропускания соответствующей эквивалентной однородной смеси, и дают количественно близкие результаты.

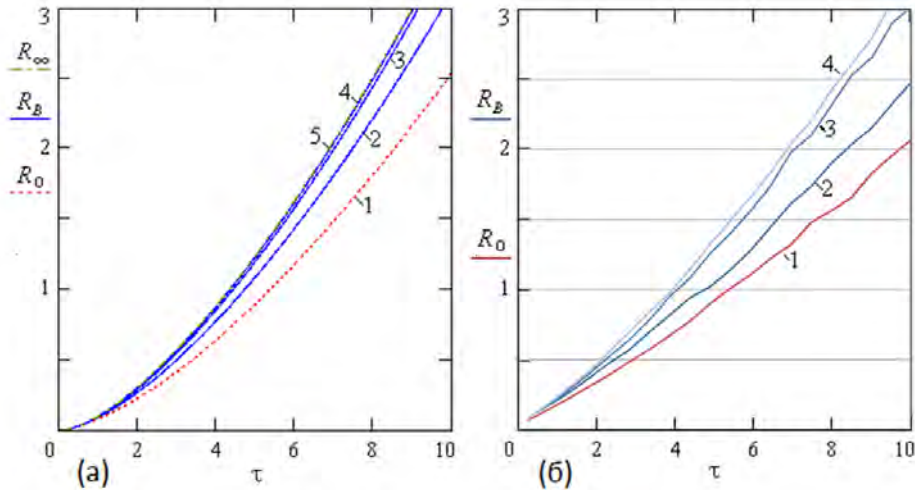


Рисунок 6 – Зависимость радиуса пучка излучения от оптической глубины слоя в дымовой облачности

На рис. 6 показаны результаты расчетов радиуса пучка излучения в дымовой облачности: (а) – аналитическое решение (8); (б) – метод Монте-Карло.

Кривая 1 на (а) и (б) представляет  $R_0(\tau)$  – значение коэффициента пропускания эквивалентной однородной смеси, – значение  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow 0$ .

Кривые 2, 3, 4 соответственно  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 16$ .

Кривая 5 представляет  $R_\infty(\tau)$  – предельное значение  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow \infty$ . Методом Монте-Карло не рассчитывалось.

Результаты расчетов, проведенных как аналитическим методом, так и методом Монте-Карло показывают, что средний радиус пучка излучения в дымовой облачности значительно превышает средний радиус пучка излучения в соответствующей эквивалентной однородной смеси для всех значений оптической глубины слоя.

Это объясняется тем, что в компоненте-1 (дымовые облака) оптически плотной и сильнопоглощающей рассеивается небольшое количество фотонов, да и те быстро поглощаются, не успев перейти в разреженную компоненту-2. Таким образом, подавляющее большинство рассеянных фотонов в данной БМС происходит из компоненты-2 (межоблачная среда), разреженной и сильно рассеивающей.

### Заключение

Результаты расчетов методом Монте-Карло, приведенные на рис. 3–6 показывают, что аналитический метод, основанный на малоугловом приближении, дает вполне адекватное описание переноса излучения в стохастической среде, соответствующей параметрам бинарной марковской смеси.

Предложенный подход позволяет быстро рассчитывать пространственно-угловое распределение интенсивности в БМС и передаточные характеристики БМС, дает возможность исследовать их зависимость от оптических параметров БМС и размера средних хорд компонент.

Таким образом, малоугловая модель БМС, являясь сравнительно простой и наглядной, позволяет учитывать ряд эффектов, вызванных стохастичностью среды, и может служить основой для разработки алгоритмов описания переноса излучения в средах с произвольным уровнем пространственных флуктуаций.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Зеге, Э. П.* Перенос изображения в рассеивающей среде / Э. П. Зеге, А. П. Иванов, И. Л. Кацев. – Мн. : Наука и техника, 1985. – 327 с.
2. *Исимару, А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах : в 2 т. / А. Исимару. – М. : Мир, 1981. – Т. 1. – 280 с.
3. *Показеев, К. В.* Океанология. Оптика океана / К. В. Показеев, Т. О. Чаплина. – М. : Юрайт. 2019. – 270 с.
4. *Малинка, А. В.* Учет влияния атмосферы при интерпретации данных спутниковых и наземных оптических измерений / А. В. Малинка [и др.] // ЖПС. – 2016. – Т. 83, № 5. – С. 698–707.
5. *Зуев, В. Е.* Оптика атмосферы и климат / В. Е. Зуев, Г. А. Титов. – Томск : Изд-во «Спектр» ИОА, 1996. – 271 с.
6. *Валентюк, А. Н.* Оптическое изображение при дистанционном наблюдении / А. Н. Валентюк, К. Г. Предко. – Мн. : Наука и техника, 1991. – 359 с.
7. *Pomraning, G. C.* Linear Kinetic Theory and Particle Transport in Stochastic Mixtures / G. C. Pomraning. – World Scientific Publishing, Singapore, 1991. – 235 p.
8. *Филей, А. А.* Построение моделей оптических параметров вулканических облаков для задач дистанционного зондирования Земли из космоса / А. А. Филей // Оптика атмосферы и океана. – 2020. – Т. 33, № 2. – С. 127–134.
9. *Byvank, T.* Design of experiments to spectroscopically characterize radiation flow in stochastic media / T. Byvank [at al.] // Phys. Plasmas. – 2024. – Vol. 31, Issue 4. – Access mode: <https://doi.org/10.1063/5.0198139>. – Date of access: 01.06.2024.
10. *Valentyuk, A. N.* Stochastic radiative transfer and causality condition / A. N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1995. – Vol. 53, № 6. – P. 693–704.
11. *Valentyuk, A. N.* A functional description of stochastic radiative transfer / A. N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1996. – Vol. 56. – P. 447–464.
12. *Valentyuk, A. N.* Stochastic radiative transfer in M-component markovian mixtures / A. N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1998. – Vol. 60, № 6. – P. 1069–1086.
13. *Помранинг, Г. С.* Асимптотические уравнения переноса излучения в атмосфере с частичной облачностью / Г. С. Помранинг // Оптика атмосферы и океана. – 1996. – Т. 9, № 1. – С. 14–29.
14. *Помранинг, Г. С.* Взаимодействия облако-радиация: модель Титова и другие модели / Г. С. Помранинг // Оптика атмосферы и океана. – 1999. – Т. 12, № 3. – С. 215–221.
15. *Kassianov, E. I.* Stochastic radiative transfer in Markovian mixtures: Past, present, and future / E. I. Kassianov, D. Veron. // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2011. – V. 112, № 5. – P. 566–576.
16. *Noskova, M.* Stochastic laser-beam transfer through a binary Markovian mixture / M. Noskova, A. Valentyuk. // Appl. Opt. – 1997. – Vol. 36, № 30. – P. 325–331.
17. *Валентюк, А. Н.* Угловая структура лазерного излучения в бинарной марковской смеси / А. Н. Валентюк, М. С. Носкова // ЖПС. – 1999. – Т. 66, № 1. – С. 36–42.
18. *Носкова, М. С.* Оптическая передаточная функция бинарной марковской смеси / М. С. Носкова // ЖПС. – 2004. – Т. 71, № 2. – С. 198–203.
19. *Носкова, М. С.* Итерационное решение задачи определения оптической передаточной функции бинарной марковской смеси / М. С. Носкова // Оптический журнал. – 2004. – Т. 71, № 9. – С. 16–19.
20. *Noskova, M. S.* Small angle model of radiative transfer in a binary markovian mixture / M. S. Noskova // Twelfth Joint International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics / Atmospheric Physics, Tomsk, Russia, 27-30 June 2005. / Institute of Atmospheric Optics SB RAS; ed. by G. G. Matvienko, G. A. Zherebtsov, Proc. of SPIE Vol. 6160, 2006. – P. 616016-1 – 616016-7.

20. **Носкова, М. С.** Аналитические решения уравнения переноса излучения в бинарной марковской смеси в малоугловом приближении / М. С. Носкова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2022. – Т. 60, № 2. – С. 46–57.
21. **Носкова, М. С.** Бинарная марковская смесь как модель стохастической среды / М. С. Носкова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2024. – Т. 63, № 1. – С. 28–36.
22. **Каргин, Б. А.** Имитационное моделирование кучевой облачности для исследования процессов переноса солнечной радиации в атмосфере методом Монте-Карло / Б. А. Каргин, С. М. Пригарин // Оптика атмосферы и океана. – 1994. – Т. 7, № 9. – С. 1275–1287.
23. **Zuev, V. E.** Radiative transfer in cloud fields with random geometry / V. E. Zuev, G. A. Titov // – J. Atmos. Sci. – 1995. – Vol. 52. – P. 176–190.
24. **Титов, Г. А.** Радиационные эффекты неоднородных облаков / Г. А. Титов, Е. И. Касьянов // Оптика атмосферы и океана. – 1999. – Т. 12, № 10. – С. 911–921.
25. **Kassianov, E.** Stochastic radiative transfer in multilayer broken clouds. Part I: Markovian approach / E. Kassianov // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2003. – Vol. 77, № 4. – P. 373–393.
26. **Kassianov, E.** Stochastic radiative transfer in multilayer broken clouds. Part II: validation test / E. Kassianov [et al.] // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2003. – Vol. 77, № 4. – P. 373–393.
27. **Kassianov, E. I.** Stochastic radiative transfer in Markovian mixtures: Past, present, and future / E. I. Kassianov, D. Veron. // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2011. – Vol. 112, № 5. – P. 566–576.
28. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / Г. И. Марчук [и др.]; под общ. ред. Г. И. Марчука. – М. : Наука, 1976. – 216 с.
29. **Букатый, В. И.** Пространственное и угловое распределение светового поля в ансамбле частиц с сильно вытянутой индикатрисой рассеяния / В. И. Букатый, Т. К. Кронберг, Д. В. Михеев // Оптика атмосферы и океана. – 2001. – Т. 14, № 3. – С. 230–232.

Поступила в редакцию 06.06.2024 г.

Контакты: noskova@msu.by (Носкова Марина Сергеевна).

**Noskova M. S. ESTIMATION OF THE ACCURACY OF CALCULATING THE TRANSMITTANCE COEFFICIENT AND RADIUS OF A NARROW RADIATION BEAM IN A BINARY MARKOV MIXTURE**

*The work provides a comparative analysis of the results of calculating the spatial distribution of radiation in a binary Markov mixture using the analytical method based on a small-angle approximation and the Monte Carlo numerical simulation method.*

*The calculations carried out by both methods give quantitatively similar results for binary Markov mixtures with different optical parameters, and demonstrate the same patterns compared to radiative transfer in an equivalent homogeneous mixture.*

**Keywords:** stochastic radiative transfer, binary Markov mixture, small-angle approximation, numerical simulation, Monte Carlo method.

УДК 537.8

## MATRIX STRUCTURE OF THE MAXWELL EQUATIONS IN NONHOMOGENEOUS ANISOTROPIC MEDIA, AND RIEMANNIAN SPACE GEOMETRY

**A. M. Kuzmich**

master's student, trainee teacher  
Brest State A. S. Pushkin University

**A. V. Bury**

graduate student  
B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus

**E. M. Ovsyuk**

Doctor of Science in Physics and Mathematics, Docent,  
Mozyr State Pedagogical I. P. Shamyakin University

*In the present paper, we consider applications of the Majorana – Oppenheimer matrix complex formalism in Maxwell electrodynamics. First we detail this approach in the vacuum case, also we develop this technics in presence of any nonuniform and anisotropic media. After that we generalize this approach to Riemannian space-time, for the vacuum case and in presence of any media. We specify two simple examples: the non-uniform anisotropic media of special type, and the medium which is non-uniform along the axis  $z$ , both of them can be simulated completely by Riemannian geometry.*

**Keywords:** Maxwell equations, Majorana – Oppenheimer formalism, anisotropic media, constitutive relations, Riemannian geometry, simulating the media.

### Introduction

Special Relativity arose from the study of the symmetry properties of the Maxwell equations: Lorentz [1], Poincare [2], Einstein [3], Minkowski [4]. Analysis of the Maxwell equations with respect to Lorentz transformations was the first object of relativity theory [5]. After discovering the relativistic equation for a particle with spin 1/2 by Dirac [6], much work was done to study spinors and vectors within the Lorentz group: Möglich [7], Ivanenko – Landau [8], Neumann [9], Van der Waerden [10], Juvet [11]. It was shown that any quantity which transforms linearly under Lorentz transformations is a spinor of some rank, so the spinors may be considered as fundamental quantities for the field theory. The spinor formulation of Maxwell equations was studied by Laporte and Uhlenbeck [12], see also Rumer [13]. In 1931, Majorana [14] and Oppenheimer [15] have proposed a new matrix equation for the Maxwell theory which is similar to the Dirac equation. Before Majorana and Oppenheimer, the important study was done by Silberstein [16]; he showed the possibility of formulating the Maxwell equations in the terms of complex 3-vector entities as well. Silberstein in his second paper [17] wrote that the complex form of the Maxwell equations had been known before; he refers to the second volume of the lecture notes on the differential equations of mathematical physics by Riemann which were edited and published by H. Weber in 1901 [18]. This fact was noted by Bialynicki-Birula [19].

The analogy between the effects of curved space-time geometry and the matter equations in electrodynamics has attracted attention in recent years [20–29].

In the present paper, first we formulate the Majorana – Oppenheimer approach in electrodynamics in the vacuum case and Cartesian coordinates. Then we extend this approach to arbitrary nonhomogeneous anisotropic media. At this we need to introduce two complex 3-vector variables. In this way, the matrix complex form of the electrodynamics in arbitrary media arises. After that we generalize this approach to Riemannian space-time, for the vacuum case and in presence of any media. We specify in detail the structure of the Maxwell equations in any anisotropic and nonhomogeneous media, on the background of Riemannian space-time. We specify in detail one simple example for a medium which is nonhomogeneous along the axis  $z$ . Also we discuss a special class of media that may be simulated by Riemannian geometry.

### Majorana – Oppenheimer formalism in electrodynamics

Let us start with the Maxwell equations in media:

$$\operatorname{div} c\mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{B}}{\partial ct}, \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \operatorname{rot} c\mathbf{B} = \mu\mu_0 c\mathbf{J} + \epsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial ct}. \quad (1)$$

First we detail the vacuum case

$$\operatorname{div} c\mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{B}}{\partial ct}, \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \operatorname{rot} c\mathbf{B} = \mu_0 c\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial ct}. \quad (2)$$

With notations  $j^a = (\rho, \mathbf{J} / c)$ ,  $c^2 = 1 / \epsilon_0 \mu_0$ , the last equations may be presented shorter:

$$\operatorname{div} c\mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial c\mathbf{B}}{\partial ct}, \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \operatorname{rot} c\mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial ct}. \quad (3)$$

In explicit component form they read:

$$\begin{aligned} \partial_1 cB^1 + \partial_2 cB^2 + \partial_3 cB^3 &= 0, & \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2 + \partial_0 cB^1 &= 0, \\ \partial_3 E^1 - \partial_1 E^3 + \partial_0 cB^2 &= 0, & \partial_1 E^2 - \partial_2 E^1 + \partial_0 cB^3 &= 0, \\ \partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 &= j^0 / \epsilon_0, & \partial_2 cB^3 - \partial_3 cB^2 - \partial_0 E^1 &= j^1 / \epsilon_0, \\ \partial_3 cB^1 - \partial_1 cB^3 - \partial_0 E^2 &= j^2 / \epsilon_0, & \partial_1 cB^2 - \partial_2 cB^1 - \partial_0 E^3 &= j^3 / \epsilon_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Let us introduce the complex variable  $\psi^k = E^k + icB^k$ ,  $k=1,2,3$ ; then the 8 real equations (4) may be combined into 4 complex ones:

$$\begin{aligned} \partial_1 \Psi^1 + \partial_2 \Psi^0 + \partial_3 \Psi^3 &= j^0 / \epsilon_0, & -i\partial_0 \psi^1 + (\partial_2 \psi^3 - \partial_3 \psi^2) &= i j^1 / \epsilon_0, \\ -i\partial_0 \psi^2 + (\partial_3 \psi^1 - \partial_1 \psi^3) &= i j^2 / \epsilon_0, & -i\partial_0 \psi^3 + (\partial_1 \psi^2 - \partial_2 \psi^1) &= i j^3 / \epsilon_0. \end{aligned} \quad (5)$$

These equations may be presented in the matrix form:

$$(-i\partial_0 + \alpha^j \partial_j) \Psi = J, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}, \quad J = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{pmatrix} j^0 \\ i j^1 \\ i j^2 \\ i j^3 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

where 4-dimensional matrices are specified by the formulas:

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

these matrices possess simple algebraic properties:

$$\begin{aligned} (\alpha^1)^2 = -I, \quad (\alpha^2)^2 = -I, \quad (\alpha^3)^2 = -I, \quad \alpha^1 \alpha^2 = -\alpha^2 \alpha^1 = \alpha^3, \\ \alpha^2 \alpha^3 = -\alpha^3 \alpha^2 = \alpha^1, \quad \alpha^3 \alpha^1 = -\alpha^1 \alpha^3 = \alpha^2. \end{aligned} \quad (7)$$

### Matrix form of the Maxwell theory in arbitrary media

According to Minkowski approach [4], in presence of any medium, we should use two electromagnetic tensors,  $F^{ab}$  and  $H^{ab}$  and two subsystems (without sources and with sources):

$$\begin{aligned} F^{ab}, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \partial_0 c \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{E} = 0, \\ H^{ab}, \quad \text{div} \mathbf{D} = \rho, \quad -\partial_0 \mathbf{D} + \text{rot} \mathbf{H} / c = \mathbf{j}; \end{aligned} \quad (8)$$

they transform independently by as antisymmetric tensors under the Lorentz group. To these tensors  $F^{ab}$  and  $H^{ab}$ , there correspond different complex vectors:

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{E}(x) + ic\mathbf{B}(x), \quad \mathbf{h}(x) = \frac{1}{\epsilon_0} (\mathbf{D}(x) + i \frac{\mathbf{H}(x)}{c}). \quad (9)$$

By this reason, in the Majorana – Oppenheimer approach we should use two sets of the matrices  $\alpha^i$  and  $\beta^i$ , and two field functions. It should be mentioned that the vectors  $\mathbf{f}(x)$  and  $\mathbf{h}(x)$  transform as 3-vectors under the complex rotation group  $SO(3,C)$ , the last is isomorphic to the real Lorentz group  $SO(1,3)$ .

For homogeneous isotropic medium, the constitutive relations have the form  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu \mu_0} \mathbf{B}$ . For inhomogeneous and anisotropic media, the constitutive relations become more complicated (for simplicity we assume that the matrices  $\epsilon_{ij}(x), \mu_{ij}(x)$  are digonal):

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_{ij}(x) E_j, \quad H_i = \frac{1}{\mu_0 \mu_{ij}(x)} B_j \equiv \frac{\tau_{ij}(x)}{\mu_0} B_j, \quad (10)$$

where 3-dimensional matrices  $\epsilon_{ij}(x), \tau_{ij}(x)$  are tensors of dielectric and magnetic permittivities. Instead of the component form, we will apply the matrix notations:

$$\mathbf{D}(x) = \epsilon_0 \hat{\epsilon}(x) \mathbf{E}(x), \quad \mathbf{H}(x) = \frac{\hat{\tau}(x)}{\mu_0} \mathbf{B}(x); \quad (11)$$

recall that  $x = (x_0 = ct, x, y, z)$ . The matrices  $\hat{\epsilon}(x)$  and  $\hat{\mu}(x)$  are defined as follows:

$$\hat{\epsilon}(x) = \begin{vmatrix} \epsilon_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3(x) \end{vmatrix}, \quad \hat{\mu}^{-1}(x) = \begin{vmatrix} \tau_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3(x) \end{vmatrix} = \hat{\tau}(x). \quad (12)$$

Below we will take into account the constitutive relations:

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{E}(x) + ic\mathbf{B}(x), \quad \mathbf{h}(x) = \hat{\epsilon}(x) \mathbf{E}(x) + i \hat{\tau}(x) c\mathbf{B}(x). \quad (13)$$

The Maxwell equations in such media may be presented in the complex form as follows:

$$\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} + i c\mathbf{B} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad -i\partial_0 \left( \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} + ic\mathbf{B} \right) + \operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + i \frac{\mathbf{H}}{c} \right) = \frac{i}{\epsilon_0} \mathbf{j}. \quad (14)$$

It is convenient to apply the complex quantities:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{h} + \mathbf{f}}{2}, \quad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{h}^* - \mathbf{f}^*}{2}; \quad (15)$$

they transform as different representations under the group  $SO(3.C)$ :  $\mathbf{M}' = O\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}' = O^*\mathbf{N}$ . For Euclidean rotations we have  $O^* = O$ ; for Lorentzian rotations we have  $O^* = O^{-1}$ .

In the defining formulas (15), let us take into account the constitutive relations (13), so we get:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{h} + \mathbf{f}}{2} = \frac{1}{2} (1 + \hat{\epsilon}(x)) \mathbf{E}(x) + \frac{i}{2} (1 + \hat{\tau}(x)) c\mathbf{B}(x); \quad (16)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{h}^* - \mathbf{f}^*}{2} = -\frac{1}{2} (1 - \hat{\epsilon}(x)) \mathbf{E}(x) + \frac{i}{2} (1 - \hat{\tau}(x)) c\mathbf{B}(x). \quad (17)$$

In  $M, N$ -notations, Maxwell equations (14) may be presented shorter:

$$\operatorname{div} \mathbf{M} + \operatorname{div} \mathbf{N} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad -i\partial_0 \mathbf{M} + \operatorname{rot} \mathbf{M} - i\partial_0 \mathbf{N} - \operatorname{rot} \mathbf{N} = \frac{i}{\epsilon_0} \mathbf{j}; \quad (18)$$

in the matrix notations they take the form:

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial_i) \mathbf{M} + (-i\partial_0 + \beta^i \partial_i) \mathbf{N} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{M} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{N} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{J} = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{vmatrix} \rho \\ \mathbf{j} \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Matrices  $\beta^i$  are specified by the formulas:

$$\beta^1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (20)$$

algebraic properties of all 6 matrices are:



$$\begin{aligned}
 (\alpha^1)^2 &= -I, \quad (\alpha^2)^2 = -I, \quad (\alpha^3)^2 = -I, \\
 \alpha^1 \alpha^2 &= -\alpha^2 \alpha^1 = +\alpha^3, \quad \alpha^2 \alpha^3 = -\alpha^3 \alpha^2 = +\alpha^1, \quad \alpha^3 \alpha^1 = -\alpha^1 \alpha^3 = +\alpha^2, \\
 (\beta^1)^2 &= -I, (\beta^2)^2 = -I, (\beta^3)^2 = -I, \\
 \beta^1 \beta^2 &= -\beta^2 \beta^1 = -\beta^3, \quad \beta^2 \beta^3 = -\beta^3 \beta^2 = -\beta^1, \quad \beta^3 \beta^1 = -\beta^1 \beta^3 = -\beta^2;
 \end{aligned} \tag{21}$$

these two matrix sets commute with each other,  $\alpha^k \beta^l = \beta^l \alpha^k$ .

In the nonuniform and anisotropic media, the quantities  $\mathbf{M}$  and  $\mathbf{N}$  are specified as:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \frac{1}{2}(1 + \hat{\epsilon}(x)) \mathbf{E}(x) + \frac{i}{2}(1 + \hat{\tau}(x)) c\mathbf{B}(x) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (1 + \epsilon_1)E_1 \\ (1 + \epsilon_2)E_2 \\ (1 + \epsilon_3)E_3 \end{vmatrix} + \frac{i}{2} \begin{vmatrix} (1 + \tau_1)cB_1 \\ (1 + \tau_2)cB_2 \\ (1 + \tau_3)cB_3 \end{vmatrix}, \\
 \mathbf{N} &= -\frac{1}{2}(1 - \hat{\epsilon}(x)) \mathbf{E}(x) + \frac{i}{2}(1 - \hat{\tau}(x)) c\mathbf{B}(x) = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} (1 - \epsilon_1)E_1 \\ (1 - \epsilon_2)E_2 \\ (1 - \epsilon_3)E_3 \end{vmatrix} + \frac{i}{2} \begin{vmatrix} (1 - \tau_1)cB_1 \\ (1 - \tau_2)cB_2 \\ (1 - \tau_3)cB_3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

In explicit form, equation (19) reads:

$$\begin{aligned}
 \partial_1(M_1 + N_1) + \partial_2(M_2 + N_2) + \partial_3(M_3 + N_3) &= \rho / \epsilon_0, \\
 -i\partial_0(M_1 + N_1) - \partial_3(M_2 - N_2) + \partial_2(M_3 - N_3) &= ij_1 / \epsilon_0, \\
 \partial_3(M_1 + N_1) - i\partial_0(M_2 + N_2) - \partial_1(M_3 - N_3) &= ij_2 / \epsilon_0, \\
 -\partial_2(M_1 - N_1) + \partial_1(M_2 - N_2) - i\partial_0(M_3 + N_3) &= ij_3 / \epsilon_0.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Taking into account expressions for components of the vectors:

$$\begin{aligned}
 M_1 + N_1 &= \frac{1}{2}(1 + \epsilon_1)E_1 + \frac{i}{2}(1 + \tau_1)cB_1 - \frac{1}{2}(1 - \epsilon_1)E_1 + \frac{i}{2}(1 - \tau_1)cB_1 = \epsilon_1 E_1 + icB_1, \\
 M_1 - N_1 &= \frac{1}{2}(1 + \epsilon_1)E_1 + \frac{i}{2}(1 + \tau_1)cB_1 + \frac{1}{2}(1 - \epsilon_1)E_1 - \frac{i}{2}(1 - \tau_1)cB_1 = E_1 + i\tau_1 cB_1, \\
 M_2 + N_2 &= \epsilon_2 E_2 + icB_2, \quad M_3 + N_3 = \epsilon_3 E_3 + icB_3, \\
 M_2 - N_2 &= E_2 + i\tau_2 cB_2, \quad M_3 - N_3 = E_3 + i\tau_3 cB_3.
 \end{aligned}$$

we can rewrite equations (23) as follows:

$$\begin{aligned}
 [\partial_1 \epsilon_1 E_1 + \partial_2 \epsilon_2 E_2 + \partial_3 \epsilon_3 E_3] + i[\partial_1 cB_1 + \partial_2 cB_2 + \partial_3 cB_3] &= \rho / \epsilon_0, \\
 [\partial_0 cB_1 + i\partial_2 \tau_3 cB_3 - i\partial_3 \tau_2 cB_2] &= ij_1 / \epsilon_0, \\
 [\partial_0 cB_2 + i\partial_3 \tau_1 cB_1 - i\partial_1 \tau_3 cB_3] &= ij_2 / \epsilon_0, \\
 [\partial_0 cB_3 + i\partial_1 \tau_2 cB_2 - i\partial_2 \tau_1 cB_1] &= ij_3 / \epsilon_0.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Let us write down equations conjugated to (24):

$$\begin{aligned}
 [\partial_1 \epsilon_1 E_1 + \partial_2 \epsilon_2 E_2 + \partial_3 \epsilon_3 E_3] - i[\partial_1 cB_1 + \partial_2 cB_2 + \partial_3 cB_3] &= \rho / \epsilon_0, \\
 [\partial_0 cB_1 - i\partial_2 \tau_3 cB_3 + i\partial_3 \tau_2 cB_2] &= -ij_1 / \epsilon_0, \\
 [\partial_0 cB_2 - i\partial_3 \tau_1 cB_1 + i\partial_1 \tau_3 cB_3] &= -ij_2 / \epsilon_0, \\
 [\partial_0 cB_3 - i\partial_1 \tau_2 cB_2 + i\partial_2 \tau_1 cB_1] &= -ij_3 / \epsilon_0.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Summing corresponding equations from (24) and (25), we obtain:

$$\partial_1 \epsilon_1 E_1 + \partial_2 \epsilon_2 E_2 + \partial_3 \epsilon_3 E_3 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad [\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2] + \partial_0 c B_1 = 0, \quad (26)$$

$$[\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3] + \partial_0 c B_2 = 0, \quad [\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1] + \partial_0 c B_3 = 0;$$

similarly after subtracting corresponding equations we get:

$$\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0, \quad -\partial_0 \epsilon_1 E_1 + [\partial_2 \tau_3 c B_3 - \partial_3 \tau_2 c B_2] = \frac{1}{\epsilon_0} j_1, \quad (27)$$

$$-\partial_0 \epsilon_2 E_2 + [\partial_3 \tau_1 c B_1 - \partial_1 \tau_3 c B_3] = \frac{1}{\epsilon_0} j_2, \quad -\partial_0 \epsilon_3 E_3 + [\partial_1 \tau_2 c B_2 - \partial_2 \tau_1 c B_1] = \frac{1}{\epsilon_0} j_3.$$

As expected, there arise two groups of equations for real variables:

$$\begin{aligned} \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 &= 0, & \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + \partial_0 c B_1 &= 0, \\ \partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 + \partial_0 c B_2 &= 0, & \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + \partial_0 c B_3 &= 0; \end{aligned} \quad (28)$$

and

$$\partial_1 \epsilon_1 E_1 + \partial_2 \epsilon_2 E_2 + \partial_3 \epsilon_3 E_3 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad -\partial_0 \epsilon_1 E_1 + [\partial_2 \tau_3 c B_3 - \partial_3 \tau_2 c B_2] = \frac{1}{\epsilon_0} j_1, \quad (29)$$

$$-\partial_0 \epsilon_2 E_2 + [\partial_3 \tau_1 c B_1 - \partial_1 \tau_3 c B_3] = \frac{1}{\epsilon_0} j_2, \quad -\partial_0 \epsilon_3 E_3 + [\partial_1 \tau_2 c B_2 - \partial_2 \tau_1 c B_1] = \frac{1}{\epsilon_0} j_3;$$

equations with sources may be presented differently:

$$\begin{aligned} [\epsilon_1 \partial_1 E_1 + \epsilon_2 \partial_2 E_2 + \epsilon_3 \partial_3 E_3] + [(\partial_1 \epsilon_1) E_1 + (\partial_2 \epsilon_2) E_2 + (\partial_3 \epsilon_3) E_3] &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ [-\epsilon_1 \partial_0 E_1 + c \tau_3 \partial_2 B_3 - \tau_2 \partial_3 c B_2] + [-(\partial_0 \epsilon_1) E_1 + (\partial_2 \tau_3) c B_3 - (\partial_3 \tau_2) c B_2] &= \frac{1}{\epsilon_0} j_1, \end{aligned} \quad (30)$$

$$[-\epsilon_2 \partial_0 E_2 + \tau_1 \partial_3 c B_1 - \tau_3 \partial_1 c B_3] + [-(\partial_0 \epsilon_2) E_2 + (\partial_3 \tau_1) c B_1 - (\partial_1 \tau_3) c B_3] = \frac{1}{\epsilon_0} j_2,$$

$$[-(\partial_0 \epsilon_3) E_3 + (\partial_1 \tau_2) c B_2 - (\partial_2 \tau_1) c B_1] + [-\epsilon_3 (\partial_0 E_3) + \tau_2 \partial_1 c B_2 - \tau_1 \partial_2 c B_1] = \frac{1}{\epsilon_0} j_3.$$

Below, for brevity we will simplify the notation,  $c\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ .

### Simple examples

Let us restrict ourselves to the isotropic nonuniform media:

$$\epsilon_1(x) = \epsilon_2(x) = \epsilon_3(x) = \epsilon(x), \quad \tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau_3(x) = \tau(x), \quad (31)$$

then equations with sources become simpler:

$$\begin{aligned} \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 + \left(\frac{\partial_1 \epsilon}{\epsilon}\right) E_1 + \left(\frac{\partial_2 \epsilon}{\epsilon}\right) E_2 + \left(\frac{\partial_3 \epsilon}{\epsilon}\right) E_3 &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon} \rho, \\ \left[-\frac{\epsilon}{\tau} \partial_0 E_1 + \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2\right] + \left[-\frac{\epsilon}{\tau} \frac{\partial_0 \epsilon}{\epsilon} E_1 + \frac{\partial_2 \tau}{\tau} B_3 - \frac{\partial_3 \tau}{\tau} B_2\right] &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\tau} j_1, \\ \left[-\frac{\epsilon}{\tau} \partial_0 E_2 + \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3\right] + \left[-\frac{\epsilon}{\tau} \frac{\partial_0 \epsilon}{\epsilon} E_2 + \frac{\partial_3 \tau}{\tau} B_1 - \frac{\partial_1 \tau}{\tau} B_3\right] &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\tau} j_2, \\ \left[-\frac{\epsilon}{\tau} (\partial_0 E_3) + \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1\right] + \left[-\frac{\epsilon}{\tau} \frac{\partial_0 \epsilon}{\epsilon} E_3 + \frac{\partial_1 \tau}{\tau} B_2 - \frac{\partial_2 \tau}{\tau} B_1\right] &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\tau} j_3. \end{aligned} \quad (32)$$

With the use of notations:

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_1} = e_1, \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_2} = e_2, \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_3} = e_3, \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_1} = b_1, \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_2} = b_2, \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_3} = b_3, \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_0} = e_0, \frac{\epsilon}{\tau} = \Delta, \quad (33)$$

equations (32) may be written sorter:

$$\begin{aligned} (\partial_1 + e_1(x))E_1 + (\partial_2 + e_2(x))E_2 + (\partial_3 + e_3(x))E_3 &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon} \rho, \\ -\Delta(x)(\partial_0 + e_0(x))E_1 + (\partial_2 + b_2(x))B_3 - (\partial_3 + b_3(x))B_2 &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\tau} j_1, \\ -\Delta(x)(\partial_0 + e_0(x))E_2 + (\partial_3 + b_3(x))B_1 - (\partial_1 + b_1(x))B_3 &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\tau} j_2, \\ -\Delta(x)(\partial_0 + e_0(x))E_3 + (\partial_1 + b_1(x))B_2 - (\partial_2 + b_2(x))B_1 &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\tau} j_3; \end{aligned} \quad (34)$$

below we add equations without sources:

$$\begin{aligned} c\partial_0 B_1 + \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 &= 0, \quad +c\partial_0 B_2 - \partial_1 E_3 + \partial_3 E_1 = 0, \\ c\partial_0 B_3 + \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 &= 0, \quad \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

In equations (34), the quantities  $\Delta(x), \tau(x), e_0(x), e_i(x), b_i(x)$ , may be associated with some effective potentials, which are determined by the tensors of electric and magnetic permittivities. In order to simplify the problem, let us impose one additional constraint  $\Delta(x)=1$ ; this leads to  $\tau(x)=\epsilon(x)$ ,  $b_i(x)=e_i(x)$ . For such media, the structure of equations with sources becomes much more simple:

$$\begin{aligned} (\partial_1 + e_1)E_1 + (\partial_2 + e_2)E_2 + (\partial_3 + e_3)E_3 &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon} \rho, \\ -(\partial_0 + e_0)E_1 + (\partial_2 + e_2)B_3 - (\partial_3 + e_3)B_2 &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon} j_1, \\ -(\partial_0 + e_0)E_2 + (\partial_3 + e_3)B_1 - (\partial_1 + e_1)B_3 &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon} j_2, \\ -(\partial_0 + e_0)E_3 + (\partial_1 + e_1)B_2 - (\partial_2 + e_2)B_1 &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon} j_3. \end{aligned} \quad (36)$$

It should be noted that the media of the type  $\tau(x)=\epsilon(x)$ ,  $b_i(x)=e_i(x)$  related to eqs. (36) may be simulated by the Riemannian geometry [30, 31].

Now, let us consider another example: the non-uniform media anisotropic along the axis  $x_3=z$ , and without sources. So we impose the following constraints:

$$\epsilon_1(x)=1, \epsilon_2(x)=1, \epsilon_3(x)=\epsilon(z), \quad \tau_1(x)=1, \tau_2(x)=1, \tau_3(x)=\tau(z), \quad (37)$$

then equations with sources become simpler:

$$\begin{aligned} \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 + \frac{1}{\epsilon_3(z)} \epsilon_3'(z) E_3 &= 0, \quad -\frac{\epsilon}{\tau} \partial_0 E_1 + \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 - \frac{1}{\tau_3(x)} \tau_3'(z) B_2 = 0, \\ -\frac{\epsilon}{\tau} \partial_0 E_2 + \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 + \frac{1}{\tau_3} \tau_3' B_1 &= 0, \quad -\frac{\epsilon}{\tau} \partial_0 E_3 + \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

In order to simplify the problem, let us impose one additional constraint  $\epsilon_3 = \tau_3 = U(z)$ ; for such a media, the structure of the Maxwell equations becomes much more simple:

$$\begin{aligned} \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 + \frac{U'}{U} E_3 &= 0, \quad \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = 0, \\ -\partial_t E_1 + \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 - \frac{U'}{U} B_2 &= 0, \quad -\partial_t E_2 + \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 + \frac{U'}{U} B_1 = 0, \quad -\partial_t E_3 + \partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 = 0, \\ \partial_t B_1 + \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 &= 0, \quad \partial_t B_2 - \partial_1 E_3 + \partial_3 E_1 = 0, \quad \partial_t B_3 + \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0; \end{aligned} \quad (39)$$

recall that we have made the change in notations,  $cB_i \rightarrow B_i$ ,  $c\partial_0 = \partial_t$ . It should be noted that the media with equations (39) may be simulated by the Riemannian geometry [30, 31].

### Maxwell equations in Riemannian space-time

Maxwell equation in Minkowski space for the vacuum case:

$$(\alpha^0 \partial_0 + \alpha^j \partial_j) \Psi = J, \quad \alpha^0 = -iI, \quad \Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + ic\mathbf{B} \end{vmatrix}, \quad J = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{vmatrix} \rho \\ \mathbf{j} \end{vmatrix} \quad (40)$$

may be extended to an arbitrary Riemannian space  $dS^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta$ . The new form of the main equation is based on the use of tetrad formalism, and the generalized form reads as follows:

$$\begin{aligned} \alpha^\rho(x) [\partial_\rho + A_\rho(x)] \Psi(x) &= J(x), \\ \alpha^\rho(x) &= \alpha^c e_{(c)}^\rho(x), \quad A_\rho(x) = \frac{1}{2} j^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\rho e_{(b)\beta}, \end{aligned} \quad (41)$$

where  $e_{(c)}^\rho(x)$  stands for a tetrad;  $A_\rho(x)$  is the so called connection;  $\nabla_\rho$  stands for the covariant derivative;  $j^{ab}$  designate generators of the 3-vector representation of the complex group  $SO(3.C)$ , their explicit form is given in [31].

This new equation (41) takes into account the influence of the external gravitational fields on Maxwell electrodynamics. Besides, it gives tools to study the Maxwell equations with the use of any curvilinear coordinates parameterizing the space-time, in Minkowski space as well. Equation (41) may be presented with the use of the Ricci rotation coefficients:

$$\alpha^c (e_{(c)}^\rho(x) \partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab} \gamma_{abc}(x)) \Psi(x) = J(x), \quad \gamma_{bac} = -e_{(b)\beta;\alpha} e_{(a)}^\beta e_{(c)}^\alpha. \quad (42)$$

This new equations (41), (42) are symmetric under the local Lorenz group; this property correlates with the 6-parametric freedom in choosing the tetrad  $e_{(c)}^\alpha(x)$  at the fixed metrical tensor  $g_{\alpha\beta}(x)$ .

### Maxwell equations in Riemannian space in presence of media

Now we turn to the matrix form of the Maxwell equations in media, and extend it for an arbitrary Riemannian space-time. We start with the equation in Minkovski space

$$(-i\partial_0 + \alpha^i \partial_i) M(x) + (-i\partial_0 + \beta^i \partial_i) N(x) = J(x); \quad (43)$$

its generalized form, consistent with requirements of General Relativity, is

$$\alpha^\rho(x)(\partial_\rho + A_\rho(x))M(x) + \beta^\rho(x)(\partial_\rho + B_\rho(x))N(x) = J(x), \quad (44)$$

two connections  $A(x)$  and  $B_\rho = A^*(x)$  correspond to different fields variables,  $M(x)$  and  $N(x)$ .

### The constitutive relations in Riemannian space-time

Let us turn again to the Maxwell equations in Riemannian space-time

$$\alpha^\rho(\partial_\rho + A_\rho)M + \beta^\rho(\partial_\rho + B_\rho)N = J, \quad (45)$$

and take into account the above definitions:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + ic\mathbf{B} &= \mathbf{f}, & \frac{1}{\epsilon_0}(\mathbf{D} + i\mathbf{H} / c) &= \mathbf{h}, \\ \mathbf{M} &= \frac{\mathbf{h} + \mathbf{f}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} + \mathbf{E}\right) + \frac{i}{2}\left(c\mathbf{B} + \frac{\mathbf{H}}{\epsilon_0 c}\right), \\ \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{h}^* - \mathbf{f}^*}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} - \mathbf{E}\right) + \frac{i}{2}\left(c\mathbf{B} - \frac{\mathbf{H}}{\epsilon_0 c}\right). \end{aligned} \quad (46)$$

In more detailed form, the main equation (45) reads:

$$\begin{aligned} -i(e_{(0)}^\rho \partial_\rho + \frac{1}{2}j^{ab}\gamma_{ab0})M + \alpha^k(e_{(k)}^\rho \partial_\rho + \frac{1}{2}j^{ab}\gamma_{abk})M - \\ -i(e_{(0)}^\rho \partial_\rho + \frac{1}{2}j^{ab}\gamma_{ab0})N + \beta^k(e_{(k)}^\rho \partial_\rho + \frac{1}{2}j^{*ab}\gamma_{abk})N = J(x). \end{aligned} \quad (47)$$

Below we will use the following notations (expressions for the spin matrices  $s^i$  are given in the [31]):

$$\begin{aligned} e_{(0)}^\rho(x)\partial_\rho &= \partial_{(0)}, & e_{(k)}^\rho(x)\partial_\rho &= \partial_{(k)}, \\ \frac{1}{2}j^{ab}\gamma_{abc} &= s^1(\gamma_{23c} + i\gamma_{01c}) + s^2(\gamma_{31c} + i\gamma_{02c}) + s^3(\gamma_{12c} + i\gamma_{03c}), \\ \frac{1}{2}j^{*ab}\gamma_{abc} &= s^1(\gamma_{23c} - i\gamma_{01c}) + s^2(\gamma_{31c} - i\gamma_{02c}) + s^3(\gamma_{12c} - i\gamma_{03c}), \\ (\gamma_{01c}, \gamma_{02c}, \gamma_{03c}) &= \mathbf{v}_c(x), & (\gamma_{23c}, \gamma_{31c}, \gamma_{12c}) &= \mathbf{p}_c(x), \quad c = 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (48)$$

the quantities  $\mathbf{v}_c(x)$  and  $\mathbf{p}_c(x)$  represent 24 Ricci rotation coefficients. Further, allowing for the constitutive relations, from (47) we get:

$$\begin{aligned} (\alpha^k \partial_{(k)} + \mathbf{sv}_0 + \alpha^k \mathbf{sp}_k) \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} 0 \\ (1 + \hat{\epsilon}) \mathbf{E} \end{array} \right| + (\partial_{(0)} + \mathbf{sp}_0 - \alpha^k \mathbf{sv}_k) \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} 0 \\ (1 + \hat{\tau}) \mathbf{B} \end{array} \right| + \\ + (\beta^k \partial_{(k)} - \mathbf{sv}_0 + \beta^k \mathbf{sp}_k) \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} 0 \\ (-1 + \hat{\epsilon}) \mathbf{E} \end{array} \right| + (\partial_{(0)} + \mathbf{sp}_0 + \beta^k \mathbf{sv}_k) \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} 0 \\ (1 - \hat{\tau}) \mathbf{B} \end{array} \right| = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} \rho \\ 0 \end{array} \right|, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} (\alpha^k \partial_{(k)} + \mathbf{sv}_0 + \alpha^k \mathbf{sp}_k) \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} 0 \\ (1 + \hat{\tau}) \mathbf{B} \end{array} \right| - (\partial_{(0)} + \mathbf{sp}_0 - \alpha^k \mathbf{sv}_k) \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} 0 \\ (1 + \hat{\epsilon}) \mathbf{E} \end{array} \right| + \\ + (\beta^k \partial_{(k)} - \mathbf{sv}_0 + \beta^k \mathbf{sp}_k) \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} 0 \\ (1 - \hat{\tau}) \mathbf{B} \end{array} \right| - (\partial_{(0)} + \mathbf{sp}_0 + \beta^k \mathbf{sv}_k) \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} 0 \\ (-1 + \hat{\epsilon}) \mathbf{E} \end{array} \right| = \frac{1}{\epsilon_0} \left| \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{j} \end{array} \right|. \end{aligned} \quad (50)$$

If we restrict ourselves to static metrics of the following diagonal structure (they not depend on the time variable):

$$g_{\alpha\beta}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33}(x) \end{vmatrix}, \quad e_{(a)}^\alpha(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{(1)}^1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{(2)}^2(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{(3)}^3(x) \end{vmatrix}, \quad (51)$$

we get more simple equations:

$$\begin{aligned} (e_{(1)}^1 \partial_1 + p_2 - p_3)B_1 + (e_{(2)}^2 \partial_2 + p_3 - p_1)B_2 + (e_{(3)}^3 \partial_3 + p_1 - p_2)B_3 &= 0, \\ -(e_{(3)}^3 \partial_3 - p_2)E_2 + (e_{(2)}^2 \partial_2 + p_3)E_3 - (p_3 + p_2)E_1 + \partial_0 B_1 &= 0, \\ -(e_{(1)}^1 \partial_1 - p_3)E_3 + (e_{(3)}^3 \partial_3 + p_1)E_1 - (p_3 + p_1)E_2 + \partial_0 B_2 &= 0, \\ -(e_{(2)}^2 \partial_2 - p_1)E_1 + (e_{(1)}^1 \partial_1 + p_2)E_2 - (p_1 + p_2)E_3 + \partial_0 B_3 &= 0, \\ (e_{(1)}^1 \partial_1 + p_2 - p_3)\epsilon_1 E_1 + (e_{(2)}^2 \partial_2 + p_3 - p_1)\epsilon_2 E_2 + (e_{(3)}^3 \partial_3 + p_1 - p_2)\epsilon_3 E_3 &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ -(e_{(3)}^3 \partial_3 - p_2)\tau_2 B_2 + (e_{(2)}^2 \partial_2 + p_3)\tau_3 B_3 - (p_3 + p_2)\tau_1 B_1 + \partial_0 E_1 &= \frac{j_1}{\epsilon_0}, \\ -(e_{(1)}^1 \partial_1 - p_3)\tau_3 B_3 + (e_{(3)}^3 \partial_3 + p_1)\tau_1 B_1 - (p_3 + p_1)\tau_2 B_2 + \partial_0 E_2 &= \frac{j_2}{\epsilon_0}, \\ -(e_{(2)}^2 \partial_2 - p_1)\tau_1 B_1 + (e_{(1)}^1 \partial_1 + p_2)\tau_2 B_2 - (p_1 + p_2)\tau_3 B_3 + \partial_0 E_3 &= \frac{j_3}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (55)$$

These equations are valid for any anisotropic nonuniform media, when using any curvilinear coordinates. We should remember that explicit form of the above equations depends on the choice of tetrad, and besides it depends on the used coordinates. In particular, relationships between the field functions specified for different tetrads are determined by the local gauge transformations; for more details see in [30, 31].

### Conclusion

We have focused on application of the known Majorana – Oppenheimer formalism for Maxwell electrodynamics in nonuniform anisotropic media, this formalism is extended to space-time with non-Euclidian geometry. This approach is effective when using the curvilinear coordinates in Minkowsky space as well.

In particular, we detail the case of special isotropic and nonuniform medium for which the tensor of electric and magnetic permittivity are proportional to each other; the situation is of special interest because the relevant constitutive relations may be simulated by Riemannian geometry [5, 30, 31]. We consider one simple example of such media, when it is nonuniform along the axis  $z$ . It may be noted that there are known many exact solutions of the Maxwell equations on the background of different space-time models, and each of these solutions may be considered as exact solutions in flat space but in some special media.

## REFERENCES

1. **Lorentz, H. A.** Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light / H. A. Lorentz // Proceedings of the Section of Sciences, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. – 1904. – Vol. 6. – P. 809–831.
2. **Poincaré, H.** Sur la dynamique de l'électron / H. Poincaré // Rendiconti del circolo matematico di Palermo. – 1906. – Vol. 21. – P. 129–176.
3. **Einstein, A.** Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper / A. Einstein, J. Laub // Ann. der Phys. – 1908. – Vol. 26. – P. 532–540.
4. **Minkowski, H.** Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern / H. Minkowski // Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse. – 1908. – P. 53–111; reprint in Math. Ann. – 1910. – Vol. 68. – P. 472–525.
5. **Mandelstam, L. I.** Elektrodynamik der anisotropen Medien und der speziellen Relativitätstheorie / L. I. Mandelstam, I. E. Tamm // Math. Annalen. – 1925. – Vol. 95. – P. 154–160.
6. **Dirac, P. A. M.** The Quantum Theory of the Electron / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 117. – P. 610–624.
7. **Möglich, F.** Zur Quantentheorie des rotierenden Elektrons / F. Möglich // Zeit. Phys. – 1928. – Vol. 48. – P. 852–867.
8. **Ivanenko, D.** Zur theorie des magnetischen electrons / D. Ivanenko, L. Landau // Zeit. Phys. – 1928. – Vol. 48. – P. 340–348.
9. **Neumann, J.** Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des relativistischen Drehelektrens / J. Neumann // Zeit. Phys. – 1929. – Vol. 48. – P. 868–881.
10. **Van der Waerden, B.** Spinoranalyse. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen / B. Van der Waerden // Math. Physik. Kl. – 1929. – P. 100–109.
11. **Juvet, G.** Opérateurs de Dirac et Équations de Maxwell / G. Juvet // Comm. Math. Helv. – 1930. – Vol. 2. – P. 225–235.
12. **Laporte, O.** Application of Spinor Analysis to the Maxwell and Dirac Equations / O. Laporte, G. Uhlenbeck // Phys. Rev. – 1931. – Vol. 37. – P. 1380–1397.
13. **Rumer, Yu.** Spinor Analysis / Yu. Rumer. – Moscow – Leningrad : GONTI, 1936. – 104 p. (in Russian).
14. **Majorana, E.** Scientific Papers, Unpublished, Deposited at the “Domus Galileana”. Pisa, quaderno 2, p. 101/1; 3, p. 11, 160; 15, p. 16; 17, p. 83, 159.
15. **Oppenheimer, J.** Note on Light Quanta and the Electromagnetic Field / J. Oppenheimer // Phys. Rev. – 1931. – Vol. 38. – P. 725–746.
16. **Silberstein, L.** Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung / L. Silberstein // Ann. der Phys. – 1907. – Vol. 22, no 3. – P. 579–586.
17. **Silberstein, L.** Nachtrag zur Abhandlung Über „elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung“ / L. Silberstein // Ann. der Phys. – 1907. – Vol. 24, no 14. – P. 783–784.
18. **Weber, H.** Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen / H. Weber. – Braunschweig : F. Vieweg und Sohn, 1901. – 348 p.
19. **Bialynicki-Birula, I.** Photon Wave Function / I. Bialynicki-Birula // Progress in Optics. – 1996. – Vol. 36. – P. 248–294.
20. Spinor methods in group theory and polarization optics / O. V. Veko [at al.]. – Minsk : Belarusian Science, 2019. – 409 p. (in Russian).
21. Spinor Maxwell equations in Riemannian space-time and modeling constitutive relations / A. V. Ivashkevich [at al.] // Chapter in: Understanding Quaternions. – Eds. Du Peng, Haibao Hu, Dong Ding, and Zhouyue Li. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2020. – P. 105–150.
22. Optics in anisotropic inhomogeneous media and Lagrange geometry / M. Neagu [at al.] // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2022. – Vol. 19, no. 10. – 2250152 (14 pages).
23. Maxwell electrodynamics in media, geometry effect on constitutive relations / N. G. Krylova [at al.] // Materials Physics and Mechanics. – 2022. – Vol. 49(1). – P. 1–16.
24. Maxwell electrodynamics, complex rotation group, media / A. V. Ivashkevich [at al.] // Materials Physics and Mechanics. – 2022. – Vol. 49(1). – P. 17–43.
25. **Krylova, N.** Geometrization of the theory of electromagnetic and spinor fields on the background of the Schwarzschild space-time / N. Krylova, V. Red'kov // Doklady BGUIR. – 2022. – Vol. 19(8). – P. 26–30 (in Russian).
26. **Livadiotis, G.** Complex symmetric formulation of Maxwell equations for fields and potentials / G. Livadiotis // Mathematics. – 2018. – Vol. 6. – P. 114–123.
27. **Khan, S. A.** Quantum methodologies in Maxwell optics / S. A. Khan // Advances in imaging and electron physics. – 2017. – Vol. 201. – P. 57–135.

28. *Khan, S. A.* Polarization in Maxwell optics / S. A. Khan // *Optik*. – 2017. – Vol. 131. – P. 733–748.
29. *Scofield, D. F.* Quantum Mass-Spacetimes – A Clifford and Lie Algebraic Approach / D. F. Scofield // *Advances in Applied Clifford Algebras*. – 2015. – Vol. – 25. – P. 673–706.
30. *Red'kov, V. M.* Fields of particles in Riemannian space and the Lorentz groups / V. M. Red'kov. – Minsk : Belarussian Science, 2009. – 486 p. (in Russian).
31. *Ovsiyuk, E. M.* Maxwell electrodynamics in space with non-Euclidean geometry / E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov. – Mozyr : Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, 2011. – 228 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 12.04.2024 г.

Контакты: miss.nastya.01@list.ru (Кузьмич Анастасия Михайловна), anton.buryu.97@mail.ru (Бурый Антон Васильевич), e.ovsiyuk@mail.ru (Овсиюк Елена Михайловна).

**Кузьмич А. М., Бурый А. В., Овсиюк Е. М. МАТРИЧНАЯ СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ И ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА**

*Исследовано применение матричного комплексного формализма Майораны – Оппенгеймера в электродинамике Максвелла. Сначала этот подход детализирован для вакуума, далее учитывается наличие неоднородных и анизотропных сред. Выполнено обобщение ковариантного формализма на риманову геометрию пространства–времени таким образом, чтобы учесть присутствие материальных сред. Рассмотрены два простых примера: неоднородная анизотропная среда специального типа и среда, неоднородная вдоль оси  $z$ . Эти среды можно моделировать с помощью римановой геометрии.*

**Ключевые слова:** уравнения Максвелла, формализм Майораны – Оппенгеймера, анизотропные среды, материальные уравнения, риманова геометрия, моделирование сред.



УДК 581.19:582.28

**ПРОЦЕСС СУБЕРИНИЗАЦИИ И ОБМЕН  
N-АЦЕТИЛГЛЮКОЗАМИНА  
В КОНСОРТИВНЫХ ВЗАИМОТНОШЕНИЯХ  
«PICEA ABIES – ЭКТОМИКОРИЗНЫЕ ГРИБЫ»**

**П. Ю. Колмаков**

кандидат биологических наук,  
доцент кафедры фундаментальной и прикладной биологии  
Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

**Д. Д. Жерносеков**

доктор биологических наук,  
профессор кафедры фундаментальной и прикладной биологии  
Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

*В процессе эволюции растения выработали механизмы, позволяющие им дифференцированно реагировать на проникновение грибного компонента и на установление консортивных связей. Благодаря процессам суберинизации и десуберинизации фитобионты способны регулировать поступление питательных веществ в микобионт (грибной компонент). В работе рассмотрены возможные молекулярные аспекты регуляции процессов суберинизации в области мембранных контактов фитобионта и микобионта и обмена N-ацетилглюкозамина (NAG) на модельной системе «Picea abies (L.) H. Karst. – эктомикоризные грибы». Сделано предположение, что суберинизация клеток корневого окончания влияет на поступление питательных веществ по радиальному апопластическому пути.*

**Ключевые слова:** молекулярный механизм, N-ацетилглюкозамин, аденилатциклаза, хитиназы, хитиновые элиситоры, пелотоны, микориза, суберинизация.

### Введение

Ассоциации, как динамические системы живых организмов, осуществляются на различных уровнях: экологическом, физиологическом, морфологическом, молекулярно-генетическом, биохимическом. Наиболее интересны в рассмотрении механизмы ассоциаций далеко разнородных живых организмов, приводящих к появлению новых свойств, расширяющих жизненные возможности конгломератов. Отбор в природе происходит у многокомпонентных организмов, у комплексов, с модификацией их в единое целое с приобретением более жизненно стойких свойств.

Разносторонние исследования конгломератов разнородных живых организмов не достигли того уровня, когда можно четко определить их вклад в биоэнергетику экосистем [1]. Можно лишь сказать, что в эктотрофной микоризе наиболее важным является взаимосвязь микобионта с фитобионтом, а не с растительным сообществом [2]. Взаимоотношения в ассоциациях проявляются рядом признаков, обеспечивающих гомеостаз организма на качественно новом уровне. Примером могут быть процессы суберинизации клеток фитобионта, контролирующихся селективное поглощение веществ в многоклеточных организмах.

Известно, что синтез суберина является ответной реакцией на стресс и может регулироваться корневыми окончаниями, контролируя его синтез и разрушение. Суберин играет важную роль в адаптивных физиологически значимых реакциях гомеостаза питательных веществ [3].

На своем пути от центра к периферии корня вещества могут радиально транспортироваться по трем путям: симпластическому, апопластическому и связанному трансклеточному пути [4; 5]. Эндодермальная суберинизация со своей пластичностью имеет огромное значение для свободного радиального транспорта через гормональную регуляцию суберинизации и десуберинизации [3].

Взаимодействие разнородных организмов происходит в процессе действия определенных регуляторных механизмов через мессенджеры (посредники), например, через гифальные клубки (пелотоны), расположенные внутри клеток коры корневого окончания [6]. Пелотоны сходны с плазмалеммой, матриксом контактной зоны и зачастую при определенных условиях лишены аденилатциклазной активности [7]. При передаче сигнала аденилатциклаза активируется связанными с плазматической мембраной рецепторами и с G-белками (GPCR), которые передают стимулы в клетку [8]. На мембране пелотона наблюдается наличие нейтральных и кислых фосфатаз, катализирующих дефосфорилирование субстрата (как правило другого белка) [9]. АТФ-азная активность связана с работой белков-переносчиков НМА (*heavy metal ATPase*) [10]. Ген AtHMA4 (подкласс Zn/Co/Cd/Pb НМА) контролирует механизм поддержания постоянной концентрации металлов в физиологических пределах в растительном компоненте [11].

Хитиназы играют ключевую роль в защитной системе растительного компонента. Их синтез индуцируется внедрением микобионта [12; 13; 14]. Грибной компонент постоянно выделяет хитиновые элиситоры, которые индуцируют каскад защитных реакций у растительного компонента. Хитиназы фитобионта, переводя хитиновые элиситоры в мелкие неактивные единицы (мономеры N-ацетилглюкозамина (NAG)), стимулируют суберинизацию клеточных мембран. В этом случае не выявляются защитные реакции и симбиоз не устанавливается [13; 15]. Накопление N-ацетилглюкозамина в апопласте и связывание с олигосахаридами оказывает сильное влияние на архитектуру клеточной стенки и при этом активируется сигнальный каскад [16]. Наличие киназы (AtCERK1) в растительном компоненте, как рецептора распознавания элиситоров грибного компонента напрямую связывает хитин через лизинового мотив (Lys M), содержащий эктодомен (AtCERK1-ECD) для активации иммунного ответа. Эктодомен ингибируется короткими олигомерами хитина (N-ацетилглюкозамина) [17]. Мономер N-ацетилглюкозамина синтезируется всеми эукариотами и выполняет структурную функцию в составе биополимеров [18; 19].

В работе проведено исследование апопластического пути на примере модельной системы «*Picea abies* (L.) H. Karst. – эктомикоризные грибы». Данная система полноценно может существовать только там, где еще не сформировались пояски Каспари (CS), тотальная суберинизация клеток в экзодерме, мезодерме и эндодерме.

#### Материалы и методы исследования

**Цель.** Изучить возможный механизм процессов суберинизации и обмена N-ацетилглюкозамина в консортивных взаимоотношениях.

**Задача.** Рассмотреть возможные молекулярные аспекты регуляции процессов суберинизации в области мембранных соприкосновений и обмена N-ацетилглюкозамина на модельной системе «*Picea abies* (L.) H. Karst. – эктомикоризные грибы».

**Объекты исследований.** Модельный комплекс (ассоциация, конгломерат): агарикиоидные базидиомицеты из эколого-трофической группы «микоризообразователи» (микобионт, грибной компонент) и *Picea abies* (фитобионт, растительный компонент).

Модельный комплекс оценивается как «эктотрофная микориза», оказавшая наиболее глубокое воздействие на эволюцию растительных сообществ. В данном случае рассматриваются конгломераты с гистотропным мицелием, специализированным к определенным типам клеток и тканям корня. Это является четким диагностическим признаком для разграничения микоризы от псевдомикоризы и грибных паразитических инфекций [1].

### Результаты исследований

Схема установления положительного контакта грибного и растительного компонентов.

В пелтонах формируется аденилатциклазная активность при внедрении грибного компонента. Из АТФ образуется цАМФ+ФФ, который переводит протеинкиназу из неактивной формы в активную с последующей инициацией фосфорилирования белков. Данный возможный биохимический процесс показан на рисунке 1.



Рисунок 1 – Схема работы аденилатциклазной активности в активных центрах на мембране пелтона

Хитиназы растительного компонента расщепляют хитин и хитозан грибного компонента до мономеров N-ацетилглюкозамина с последующим присоединением к созревающим белкам эндоплазматического ретикулума в цис-зоне аппарата Гольджи. Небольшие цепи N-ацетилглюкозамина (до восьми звеньев) уже не воспринимаются растительным компонентом как элиситоры и могут быть использованы для изменения свойств целлюлозы в клетках фитобионта, избегая возникновения стрессовой реакции [20]. Далее, небольшие цепи соединений белка с N-ацетилглюкозамином транспортируются везикулами в цитоплазматическую мембрану, где в результате экзоцитоза высвобождают свое содержимое в межклеточное пространство, сливаясь с цитоплазматической мембраной [21]. N-ацетилглюкозамин встраивается между полисахаридами клеточной стенки, тем самым меняя её архитектуру, стимулируя одновременно образование боковых корней [22; 23]. Морфологически это приводит к изменениям в пространственном распределении

корневой системы в модельном объекте *Picea abies* (L.) Н. Karst [24]. Изменения баланса ионов  $\text{Na}^+$  и питательных веществ стимулируют нарушения процессов суберинизации [25]. Выделяемые микобионтом элиситоры инициируют вывод ионов  $\text{K}^+$  из апопласта у фитобионта, тем самым вызывая их дефицит и замедление процесса суберинизации [3]. Данный факт объясняет наличие транспортных путей радиального тока сахаров из осевого цилиндра к экзодерме в корневых окончаниях *Picea abies* через пропускные клетки в эндодерме к мантии. Таким образом, грибной компонент транспортирует сахара из осевого цилиндра корневого окончания по апопластному пути. Возле направленного тока углеводов, в соседних клетках в мезодерме наблюдается скопление пелотонов и усиление суберинизации клеток. Возможный молекулярный механизм которой представлен на рисунке 2.

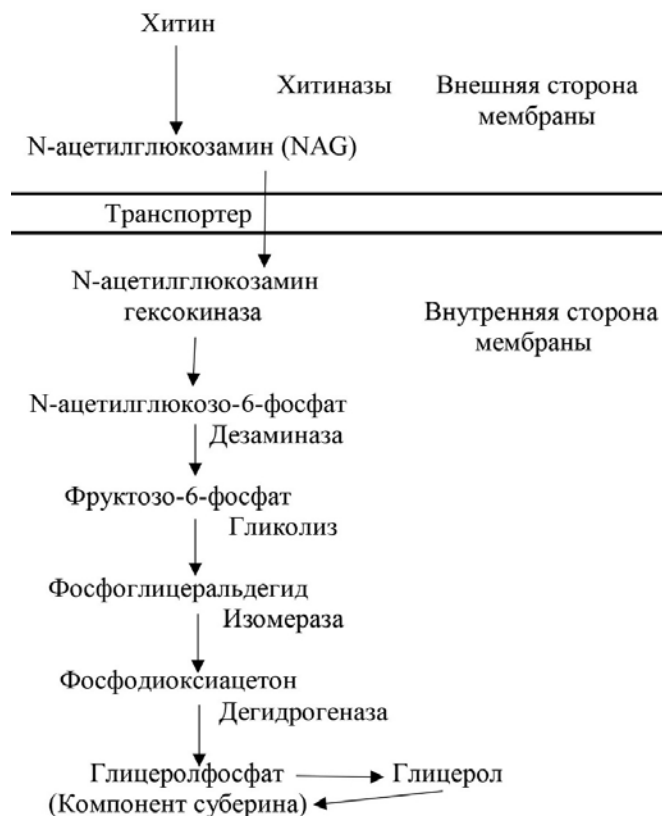


Рисунок 2 – Возможная схема образования компонентов суберина из N-ацетилглюкозамина

Показанный на рисунке 2 путь преобразования компонентов хитина в элементы суберина у фитобионтов имеет элементы подобия и у бактериальных организмов [26].

Апопластический транспорт регулирует образование ламелл суберина [3]. Поступление сахаров из осевого цилиндра к периферии в радиальном сечении корневого окончания является причиной дефекта в виде многоуровневой суберинизации тканей и активации системы SGN/CIFs у соседних с радиальным током углеводов клеток. Сигнальный путь SGN/CIFs контролирует образование суберина. Роль дефекта суберинизации не ясна [25].

Характерной особенностью клеточных стенок растительного компонента в зоне сети Гартига является наличие на них кислых инвертаз, расщепляющих сахарозу до простых сахаров в апопластном компартменте [27]. Эти простые сахара могут быть усвоены грибными гифами [28]. Работа таких ферментов, углеводного метаболизма, играет важную роль в формировании устойчивости к воздействию биотических и абиотических стрессовых факторов [29]. Важную роль, скорее всего, играет тип инвертаз, связанных с клеточной стенкой и расщепляющих сахара в апопласте (апопластические инвертазы) [30]. Активность кислых инвертаз в значительной степени регулируется стрессовыми факторами [31; 32; 33].

В своей работе мы провели анатомо-морфологические исследования авторских микрофотографий и выявили следующее: наличие транспортных путей; выборочную суберинизацию клеток корневого окончания, значение пропускных клеток, скопление пелотонов в активных центрах первичной коры. Результаты представлены на оригинальных рисунках-фотографиях 3, 4, 5, 6.

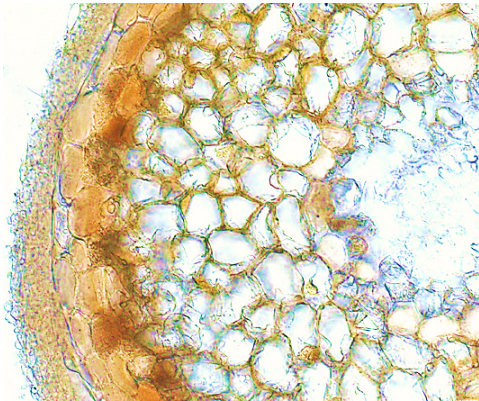


Рисунок 3 – Сконцентрированность пелотонов и арбускул между радиальными транспортными путями

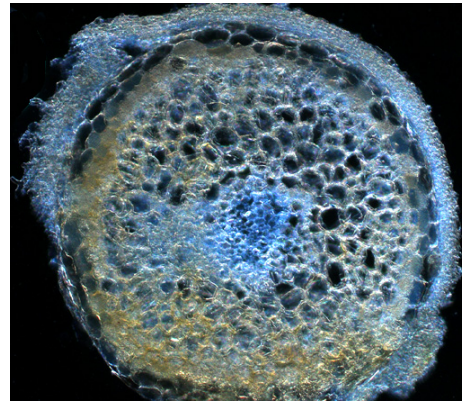


Рисунок 4 – Радиальный поток углеводов из осевого цилиндра через пропускные клетки к периферии корня

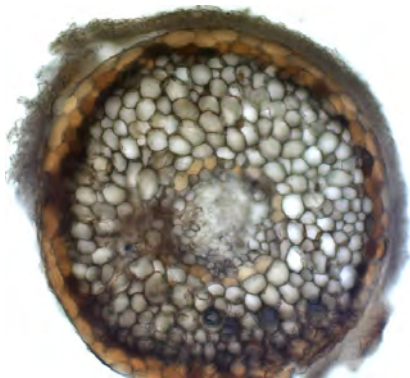


Рисунок 5 – Выборочная суберинизация эндодермы и мезодермы. Наличие радиальных «путей» тока углеводов из стели к периферии корневого окончания

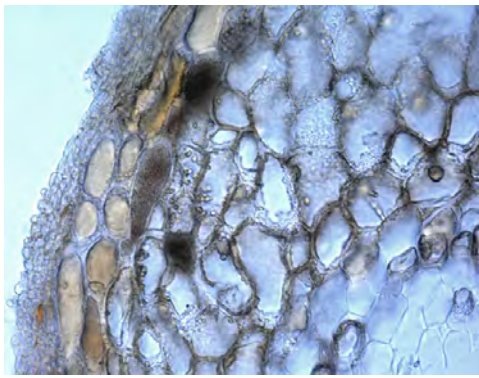


Рисунок 6 – Пропускные клетки в эндодерме, через которые происходит радиальный ток углеводов к мезодерме. Скопление пелотонов и суберинизация у примыкающих к радиальному току клетках мезодермы

Схема установления отрицательного контакта грибного и растительного компонентов.

Активация кислых фосфатаз при определенных условиях на мембранах пелотонов ведет к нарушению АТФ-азной активности через катализацию дефосфорилирования субстратных белков. Хитиновые элиситоры микобионта переводятся растительными хитиназами в олигомеры N-ацетилглюкозамина (более восьми звеньев), тем самым выключая аденилатциклазную активность на мембранах пелотонов.

Изменения в фосфорилировании белков могут инактивироваться внеклеточными хитиназами и глюканазами растительного компонента и разрушение хитиновых элиситоров грибного компонента предотвращает индукцию выброса ионов калия и хлора, защелачивание внеклеточного пространства и синтез перекиси водорода клетками *Picea abies* [15; 34]. В этом случае предотвращается распознавание микобионта, не происходит установление симбиоза.

### Заключение

Таким образом, на примере системы «*Picea abies* – эктомикоризные грибы» мы впервые описали процесс установления консортивных связей в апопластном пространстве, используя анатомические исследования авторских микрофотографий.

Логично предположить, что суберинизация играет роль контролирующего фактора в проникновении микобионта. Данный процесс, по-видимому, регулируется молекулярными механизмами (АТФ-азной активностью, специфическим действием хитиназ, которое формирует определенную длину фрагментов, состоящих из N-ацетилглюкозамина).

Таким образом, можно сделать заключение, что факт положительного консортивного контакта приводит к формированию четко выраженных транспортных путей грибного компонента вследствие изменения обычного объема и формы паренхимных клеток и межклетников коры в корневом микоризном окончании. Образование пелотонов связано со стрессовыми процессами в системе «*Picea abies* – эктомикоризные грибы». Работа кислых инвертаз связана с наличием транспортных гифальных путей, поставляющих сахара из осевого цилиндра к периферии, что наблюдается на поперечных срезах микоризных корневых окончаний.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Каратыгин, И. В.** Коэволюция грибов и растений / И. В. Каратыгин. – Санкт-Петербург : Гидрометеониздат, 1993. – 115 с.
2. **Колмаков, П. Ю.** Эколого-ценотическая характеристика *Russula exalbicans* (Pers.) Melzer & Zvára в растительных сообществах дубово-темнохвойных лесов Белорусско-Валдайского поозерья / П. Ю. Колмаков, О. В. Созинов // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 5. Эканоміка. Сацыялогія. Біялогія. – 2023. – Т. 13. – № 1. – С. 98–106.
3. **Barberon, M.** Adaptation of root function by nutrient-induced plasticity of endodermal differentiation / M. Barberon, J.E.M. Vermeer, D. De Bellis et al. // Cell. – 2016. – 164. – P. 447–459.
4. **Barberon, M.** Radial transport of nutrients: the plant root as a polarized epithelium / M. Barberon, N. Geldner // Plant Physiology. – 2014. – Vol. 166 (2). – P. 528–537.
5. **Andersen, T.G.** Suberization – the second life of endodermal cell / T.G. Andersen, M. Barberon, N. Geldner // Current Opinion in Plant Biology. – 2015. – Vol. 28. – P. 9–15.
6. **Taylor, D. L.** Mycorrhizal specificity and function in myco-heterotrophic plants / D. L. Taylor, T. D. Bruns, J. R. Leake et al. // Mycorrhizal Ecology. Ecological Studies. – Berlin, 2002. – Vol. 157. – P. 375–413.
7. **Воронина, Е. Ю.** Микозы в наземных экосистемах: экологические, физиологические и молекулярно-генетические аспекты микоризных симбиозов / Е. Ю. Воронина // Микология сегодня. – Москва : Национальная академия микологии, 2007. – Т. 1. – С. 142–234.

8. **David, L. N.** Lehninger principles of biochemistry / L. N. David, M. M. Cox. – W.H. Freeman, 2004. – P. 1100.
9. **Peterson, R. L.** Exploring structural definitions of mycorrhizas, with emphasis on nutrient-exchange interfaces / R. L. Peterson, H. B. Massicotte // Canadian Journal of Botany. – 2004. – Vol. 82. – P. 1074–1088.
10. **Казнина, Н. М.** Физиолого-биохимические и молекулярно-генетические механизмы устойчивости растений семейства *Poaceae* к тяжелым металлам: диссертация на соискание ученой степени доктора биологических наук: 03.01.05 / Н. М. Казнина. – Петрозаводск, 2016. – 358 с.
11. **Mills, R. F.** Functional expression of AtHMA4, a P-1B-type ATPase of the Zn/Co/Cd/Pb subclass / R. F. Mills, G. C. Krijger, P. J. Baccarini et al. // The Plant Journal. – 2003. – V. 35(2). – P. 164–176.
12. **Albrecht, C.** Chitinase and peroxidase activities are induced in Eucalyptus roots according to aggressiveness of Australian ectomycorrhizal strains of *Pisolithus* sp. / C. Albrecht, T. Burgess, B. Dell et al. // New Phytologist. – 1994. – Vol. 127. – P. 217–222.
13. **Harrison, M. J.** Molecular and cellular aspects of the arbuscular mycorrhizal symbiosis / M. J. Harrison // Annual Review of Plant Physiology and Plant Molecular Biology. – 1999. – Vol. 50. – P. 361–389.
14. **Salzer, P. A.** A mycorrhiza-inducible plant chitinase accelerates the life cycle of arbuscular mycorrhizal fungi / P. Salzer, M. Elfstrand, A. Wiemken et al. // Biology of Plant-Microbe Interactions. – 2004. – Vol. 4. – P. 464–467.
15. **Martin, F.** Developmental cross talking in the ectomycorrhizal symbiosis: signals and communication genes / F. Martin, S. Duplessis, F. Ditengou et al. // New Phytologist. – 2001. – Vol. 151. – P. 145–154.
16. **Vanholme, B.** Accumulation of N-acetylglucosamine oligomers in the plant cell wall affects plant architecture in dose-dependent and conditional manner / B. Vanholme, R. Vanholme, H. Turumtay et al. // Plant Physiology. – 2014. – Vol. 165. – Issue 1. – P. 290–308.
17. **Miya, A.** CERK1, a LysM receptor kinase, is essential for chitin elicitor signaling in Arabidopsis / A. Miya, P. Albert, T. Sninya et al. // Plant Biology. – USA: PNAS, 2007. – Vol. 104. – № 49. – P. 19613–19618.
18. **Kamel, M.** Inhibition of elastase enzyme release from human polymorphonuclear leukocytes by N-acetyl-galactosamine and N-acetyl-glucosamine / M. Kamel, M. Hanafi, M. Bassiouni // Clinical and Experimental Rheumatology. – 1991. – Vol. 9. – № 1. – P. 17–21. – PMID 2054963.
19. **Ченцов, Ю. С.** Цитология с элементами клеточной патологии / Ю. С. Ченцов. – М. : «Медицинское информационное агентство», 2010. – 361 с.
20. **Liu, T.** Chitin-induced dimerization activates a plant immune receptor / T. Liu, Z. Liu, Ch. Song et al. // Science. – 2012. – Vol. 336 (6085). – P. 1160–1164.
21. Устройство и функционирование эндоплазматического ретикулума и Аппарата Гольджи [Электронный ресурс] / Химический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова. 2023. – Режим доступа: <https://www.chem.msu.ru/rus/teaching/kolman/224.htm>, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус.
22. **Cosgrove, D. J.** Growth of the plant cell wall / D. J. Cosgrove // Nature Reviews Molecular Cell Biology. – Vol. 6. – 2005. – P. 850–861.
23. **Kumpf, R. P.** Floral organ abscission peptide IDA and its HAE/HSL2 receptors control cell separation during lateral root emergence / R. P. Kumpf, S. Chun-Lin, A. Larrieu et al. // Biological Sciences. – USA: PNAS, 2013. – Vol. 110 (13). – P. 5235–5240.
24. **Колмаков П. Ю.** Структурные особенности индивидуальной консорции / П. Ю. Колмаков, Е. В. Антонова // Веснік ВДУ. – 2019. – № 2 (103). – С. 36–44.
25. **Shukla, V.** Suberin plasticity to developmental and exogenous cues is regulated by a set of MYB transcription factors / V. Shukla, J.-P. Han, F. Cleard et al. // Plant Biology. – 2021. – Vol. 118. – № 39. – P. 1–11.
26. **Ansari, S.** N-acetylglucosamine sensing and metabolic engineering for attenuating human and plant pathogens / S. Ansari, V. Kumar, D. N. Bhatt et al. // Bioengineering. – 2022. – Vol. 9 (64). – P. 1–15.
27. **Elliott, K. J.** Isolation and characterization of fruit vacuolar invertase genes from two tomato species and temporal differences in mRNA levels during fruit ripening / K. J. Elliott, W. O. Butler, C. D. Dickinson et al. // Plant Molecular Biology. – 1993. – V. 21. – P. 515–524.
28. **Nehls, U.** Carbohydrate metabolism in ectomycorrhizas: gene expression, monosaccharide transport and metabolic control / U. Nehls, S. Mikolajewski, E. Magel et al. // New Phytologist. – 2001. – Vol. 150. – P. 533–541.
29. **Draffehn, A. M.** Natural diversity of potato (*Solanum tuberosum*) invertases / A. M. Draffehn, M. Sebastian, L. Li et al. // BMC Plant Biol. – 2010. – V. 10. – P. 271–286.
30. **Ji, X.** Structure, evolution, and expression of the two invertase gene families of rice / X. Ji, W. Van den Ende, A. Van Laere et al. // Molecular Evolution. – 2005. – V. 60 (5). – P. 615–634.
31. **Koch, K.** Sucrose metabolism: regulatory mechanisms and pivotal roles in sugar sensing and plant development / K. Koch // Current Opinion Plant Biology. – 2004. – V. 7. – P. 235–246.

32. **Ruan, Y-L.** Sugar input, metabolism, and signaling mediated by invertase: roles in development, yield potential, and response to drought and heat / Y-L. Ruan, Y. Jin, Y-J. Yang et al. // *Molecular Plant*. – 2010. – V. 3. – P. 942–955.

33. **Albacete, A.** Trick and treat: A review on the function and regulation of plant invertases in the abiotic stress response / A. Albacete, D. K. Grosskinsky, T. Roitsch // *Phyton – Annales Rei Botanicae*. – 2011. – V. 50. – P. 181–204.

34. **Harrison, M. J.** Molecular and cellular aspects of the arbuscular mycorrhizal symbiosis / M. J. Harrison // *Annual Review of Plant Physiology and Plant Molecular Biology*. – 1999. – Vol. 50. – P. 361–389.

Поступила в редакцию 5.09.2023 г.

Контакты: [pavel\\_kolmakov@list.ru](mailto:pavel_kolmakov@list.ru) (Колмаков Павел Юрьевич, Жерносеков Дмитрий Данилович).

**Kolmakov P. Yu., Zhernosekov D. D. THE PROCESS OF SUBERIZATION AND METABOLISM OF N-ACETYLGLUCOSAMINE IN A CONSORTIVE RELATIONSHIP “PICEA ABIES – ECTOMYCORRHIZAL FUNGI”**

*In the process of evolution, plants have developed mechanisms that allow them to respond differentially to the penetration of the fungal component and the establishment of consort relationships. Due to the processes of suberization and desubерization, phytobionts are able to regulate the supply of nutrients to the mycobiont (fungal component). The article considers possible molecular aspects of regulation of suberization in the area of membrane contacts between phytobiont and mycobiont and the N-acetylglucosamine (NAG) pathway on the model system “Picea abies (L.) H. Karst. – ectomycorrhizal fungi”. It is concluded that suberization of root terminal cells affects the supply of nutrients through the radial apoplastic pathway.*

**Keywords:** molecular mechanism, N-acetylglucosamine, adenylate cyclase, chitinases, chitin elicitors, pelotons, mycorrhiza, suberization.



УДК 57.087.1:004.4:574.9:582.929.4

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ЕДИНИЧНОЙ МИКРОБНОЙ ПОПУЛЯЦИИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ РАЗВИТИЯ МИКРОБИОМА ЧЕЛОВЕКА

**М. Я. Острикова**

кандидат биологических наук  
Институт леса НАН Беларуси

**О. М. Остриков**

доктор технических наук, кандидат физико-математических наук, доцент  
Белорусский государственный университет транспорта

*Показана возможность применимости моделей Мальтуса, Гомпертца и Ферхюльста динамики численности единичной микробной популяции для математического описания развития микробиома человека. Установлено, что подбор эмпирических коэффициентов дает возможность получения математических соотношений для хорошо согласующегося описания экспериментальных данных, полученных для колоний микроорганизмов микробиома человека.*

**Ключевые слова:** микробиом человека, динамика единичной микробной популяции.

### Введение

Исследование микробиома человека в настоящее время является одним из наиболее актуальных и перспективных направлений научных исследований медицинских и биологических наук.

Согласно современным представлениям, микробиом человека представляет собой сообщество комменсальных микроорганизмов в комплексе с генетическим материалом, молекулами межклеточного взаимодействия и средой обитания. Симбиотическая микрофлора играет огромную роль в обеспечении здорового состояния организма человека и выполняет важные функции, такие как синтез независимых аминокислот и витаминов, биодegradация ряда неперевариваемых полисахаридов, детоксикация ксенобиотиков, поддержание иммунитета, защита от патогенов. Разнообразие и численность микробного состава человека изменяется под действием разных факторов внешней среды, условий проживания, пола и возраста, а также при появлении различных патологических состояний. Появляются новые исследовательские данные о взаимосвязи состава микробиоты с разными патологиями, такими как воспалительные заболевания кишечника, ожирение, сердечно-сосудистые, аутоиммунные и аллергические заболевания [1].

В течение длительного времени изучение состава и анализ функциональной активности микробиоты человека было затруднительно в связи с невозможностью культивирования подавляющего большинства микроорганизмов на питательных средах [2]. Внедрение методов высокопроизводительного секвенирования за последнее десятилетие значительно углубило понимание структуры и вариаций

микробиоты. Исследователи получили возможность очень точной и комплексной оценки всего микробного сообщества с глубиной до тысячных долей процента (по содержанию микроба). Это позволило выйти на новый уровень понимания взаимосвязи здоровья человека и состояния его микробиома [3].

Несмотря на активно развивающиеся исследования, существует необходимость использования знаний и методов в областях, выходящих за рамки только медицинской и биологической наук [4; 5]. В работе [5] в качестве одного из таких методов предложено использовать математическое моделирование.

Целью данной работы стало математическое описание динамики микробиома человека с использованием моделей динамики единичной микробной популяции.

### Модель Мальтуса

В качестве простейшей математической модели развития единичной микробной популяции микробиома человека можно рассматривать модель Мальтуса [6]. Эта модель широко используется в динамике популяций и имеет в своей основе уравнение

$$\dot{N} = aN, \quad (1)$$

где в нашем случае  $N$  – число микроорганизмов в единичной популяции микробиома в текущий момент времени  $t$  (т. е.  $N = N(t)$ );  $a$  – коэффициент.

Пусть начальная численность микроорганизмов популяции равна

$$N(0) = N_0. \quad (2)$$

В этом случае решением уравнения (1) будет [6; 7]

$$N(t) = N_0 e^{at}. \quad (3)$$

В (3) коэффициент  $a$  можно представить в виде

$$a = \alpha - \beta, \quad (4)$$

где принято:  $\alpha$  – скорость деления микроорганизмов;  $\beta$  – их смертность.

При  $\alpha > \beta$ , согласно (3), единичная наблюдаемая микробная популяция микробиома бесконечно растет, а при  $\alpha < \beta$  – уменьшается. В частном случае, когда  $\alpha \approx \beta$ , численность микроорганизмов микробиома постоянна.

На рисунке 1 приведен пример использования модели Мальтуса для описания процесса кратковременной стимуляции роста единичной микробной популяции микробиома. В работе [8], например, в качестве такого толчка к изменению активности роста колоний микроорганизмов кишечного микробиома послужили гемопоэтические стволовые клетки.

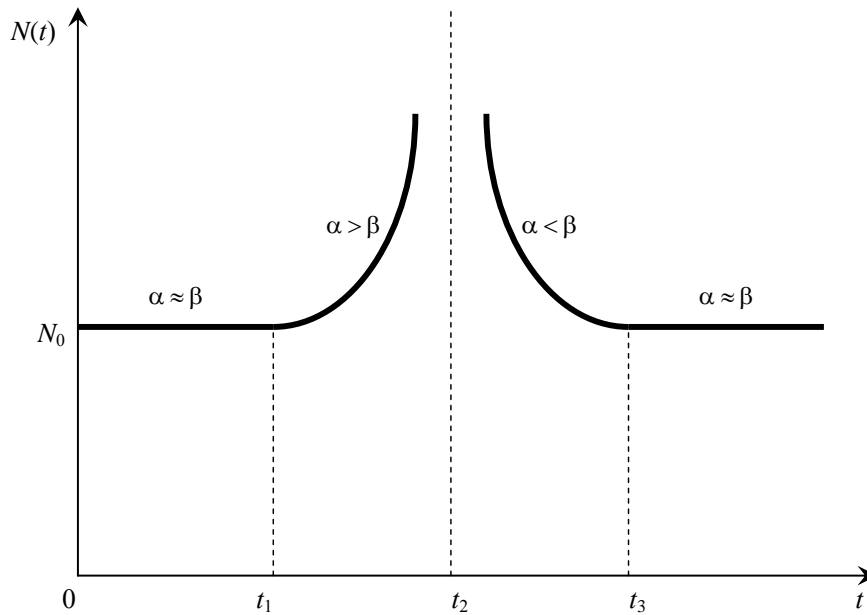


Рисунок 1 – Схематическое изображение графического описания процесса временной активации процесса роста единичной микробной популяции микробиома человека

За начальный момент времени  $t = 0$  примем момент, когда численность микроорганизмов в наблюдаемой в организме человека единичной микробной популяции микробиома стабилизировалась ( $\alpha \approx \beta$ ) и приняла равновесное значение  $N_0$  (рисунок 1). Пусть в момент времени  $t_1$  на микробиом человека подействовал фактор, активизировавший рост рассматриваемой единичной микробной популяции ( $\alpha > \beta$ ). Рост численности данной микробной популяции на временном интервале  $t_1 < t < t_2$  хорошо описывается функцией (3). Допустим, что в момент времени, близкий к  $t_2$ , действие стимулирующего рост популяции фактора прекратилось. Это привело к наблюдаемому (рисунок 1) на временном интервале  $t_2 < t < t_3$  уменьшению численности микроорганизмов в рассматриваемой микробной популяции микробиома (т. е.  $\alpha < \beta$ ) до стабильного значения  $N_0$  при  $t > t_3$ .

К одному из недостатков модели Мальтуса в решении приведенной выше задачи можно отнести сложность в описании с ее помощью поведения функции  $N(t)$  на временном интервале в окрестности  $t_2$ . Эту проблему можно решить, приняв, например,  $a = a(t)$ . Тогда (1) запишется в виде:

$$\dot{N} = a(t)N. \quad (5)$$

Это уравнение имеет общее решение [6]:

$$N(t) = N_0 \exp\left(\int_0^t a(\tau) d\tau\right). \quad (6)$$

Здесь  $\tau$  – параметр интегрирования.

В простейшем случае в качестве функции  $a = a(\tau)$  можно выбрать функцию второго порядка.

### Модель Гомпертца

Учитывать продолжительность жизни микроорганизмов единичной популяции в предположении увеличения смертности по экспоненциальному закону в условиях ограниченности ресурсов жизнедеятельности позволяет модель Гомпертца.

В основе данной модели лежит уравнение [6]

$$\dot{N} = a \left( 1 - \frac{\ln N}{\ln N_c} \right) N, \quad (7)$$

где  $N_c$  – емкость среды, т. е. максимальное количество микроорганизмов при имеющемся объеме ресурсов жизнедеятельности.

Решение уравнения (7) имеет вид:

$$N(t) = N_c \left( \frac{N_0}{N_c} \right)^{\exp\left(-\frac{at}{\ln N_c}\right)}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что при  $t \rightarrow \infty$   $N \rightarrow N_c$ . Это позволяет в данной модели ввести временной параметр  $\tau_p$  стабилизации численности микроорганизмов в единичной популяции. В частности, в примере, показанном на рисунке 1, в качестве такого временного интервала численной релаксации микроорганизмов может быть выбран интервал  $t_2 < t < t_3$ , т.е.  $\tau_p = t_3 - t_2$ . Более того, на временном интервале  $t_2 < t < \infty$  рассматриваемый на рисунке 1 процесс математически может быть описан решением (8) уравнения модели Гомпертца.

Также модель Гомпертца удобна в описании процессов восстановления численности микробной популяции после подавления ее воздействием, например, антибиотика. Схематически такая картина представлена на рисунке 2.

Допустим, что наряду с другими, выбранная микробная популяция микробиома человека попала под действие антибиотика. Пусть к моменту прекращения действия антибиотика численность выделенной микробной популяции сократилась до  $N_0$ . Согласно (8) на временном интервале  $0 < t < \tau_p$  численность микроорганизмов в популяции начала расти до максимального значения  $N_c$ . При отсутствии других факторов, влияющих на рост популяции, ее численность  $N_c$  остается постоянной в течение длительного времени (рисунок 2).

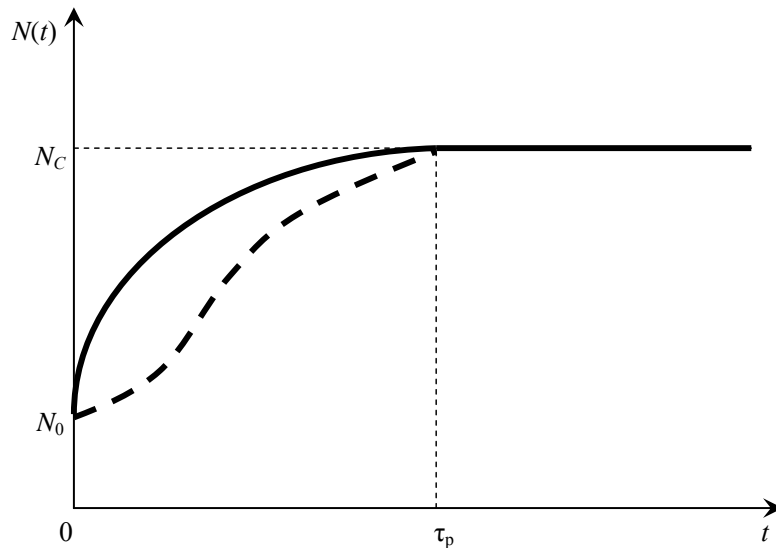


Рисунок 2 – Схематическое изображение восстановления численности единичной микробной популяции микробиома человека после подавления ее воздействием антибиотика (сплошная линия – модель Гомпертца; пунктирная – модель Ферхюльста)

#### Модель Ферхюльста

Учитывать влияние на численность единичной микробной популяции микробиома человека ограниченности пищевых и других ресурсов можно с помощью модели Ферхюльста. В основе этой модели лежит уравнение [6]:

$$\dot{N} = a \left( 1 - \frac{N}{N_c} \right) N, \quad (9)$$

решение которого имеет вид:

$$N(t) = \frac{N_c N_0}{N_0 + (N_c - N_0) e^{-at}}. \quad (10)$$

Как правило,  $N_0 = N_c/2$ . Поэтому на кривой  $N(t)$  модели Ферхюльста на временном участке  $0 < t < \tau_p$ , в отличие от кривой модели Гомпертца имеется перегиб (рисунок 2).

#### Примеры численных расчетов

В работе [4] рассматривалась динамика относительной плотности грамотрицательных бактерий в кишечнике у пациентов при аллогенной трансплантации гемопоэтических стволовых клеток без инфицирования кровотока и при его инфицировании. Экспериментально было получено, что относительная плотность грамотрицательных бактерий в кишечнике в этом случае является функцией с одним максимумом. Примем все грамотрицательные бактерии в кишечнике человека за единичную популяцию и опишем ее динамику моделью Мальтуса с переменным

по времени коэффициентом  $a$ . Тогда на основании решения (6) уравнения (5) для относительной плотности  $\varepsilon(t)$  грамотрицательных бактерий запишем:

$$\varepsilon(t) = C\varepsilon_0 \exp\left(\int_{-t}^t a(\tau) d\tau\right), \quad (11)$$

где  $\varepsilon_0$  – начальная относительная плотность грамотрицательных бактерий;  $C$  – корреляционный коэффициент.

Функцию  $a(\tau)$  представим в виде:

$$a(\tau) = \frac{(\tau - \tau_0)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{b(\tau - \tau_0)^2}{\sigma^2}\right). \quad (12)$$

Здесь  $\tau_0$  – коэффициент, корректирующий положение максимума функции на временной оси;  $b$  и  $\sigma$  – эмпирические коэффициенты.

Результаты расчетов представлены на рисунке 3. В расчетах принималось:  $C = 0,01$ ;  $\varepsilon_0 = 2$ ;  $\tau_0 = 2$  (рисунок 3, а) и  $\tau_0 = -2$  (рисунок 3, б);  $b = -1$  и  $\sigma = -8$ . Следует отметить, что все параметры, рассматриваемые в работе, несут смысл эмпирических параметров.

В работе [9] показана динамика кишечной микробиоты у новорожденных в первые два года жизни. Для математического описания динамики микроорганизмов *Faecalibacterium prausnitzii* воспользуемся моделью Гомпертца, преобразовав (8) к виду:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_c \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_c}\right)^{\exp\left(-\frac{a(t-t_0)}{\ln\varepsilon_c}\right)}, \quad (13)$$

где  $\varepsilon_c$  – максимальная относительная плотность микроорганизмов;  $t_0$  – параметр, регулирующий положение особенностей кривой  $\varepsilon(t)$  вдоль временной оси.

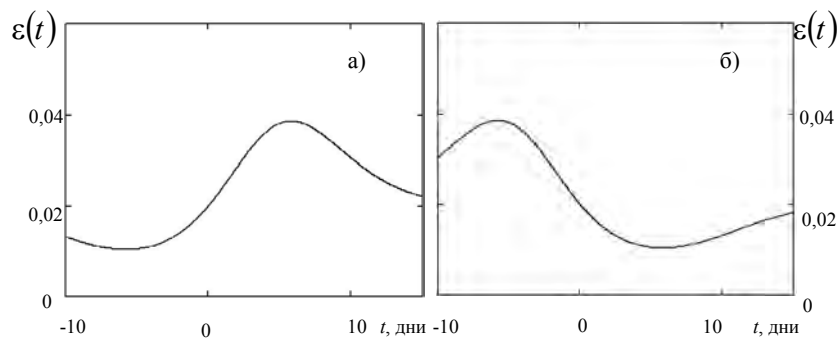


Рисунок 3 – Рассчитанная на основе модели Мальтуса динамика относительной плотности грамотрицательных бактерий в кишечнике у пациентов при аллогенной трансплантации гемопоэтических стволовых клеток: а – без инфицирования кровотока и б – при инфицировании кровотока; 0 – день выполнения трансплантации (а) и первый день эпизода грамотрицательной инфекции кровотока (б)

На рисунке 4а представлен результат расчета, согласующийся с приведенным в [9] результатом. Принималось:  $\varepsilon_0 = 0,6$   $\varepsilon_c = 0,9$   $t_0 = 20$  (месяцев)  $a = -0,1$  (месяцев<sup>-1</sup>).

Для математического же описания динамики микроорганизмов *Dorea fornicigenerans* воспользуемся моделью Ферхюльста, модифицировав соотношение (10), и приведем его к виду:

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_c \varepsilon_0}{\varepsilon_0 + (\varepsilon_c - \varepsilon_0) e^{-a(t-t_0)}}. \quad (14)$$

В данном случае принималось:  $\varepsilon_0 = 0,85$   $\varepsilon_c = 1$   $t_0 = 22$  (месяцев)  $a = 0,57$  (месяцев<sup>-1</sup>). Результат расчета представлен на рисунке 4б.

Как видно из рисунка 4 и смысла моделей Гомпертца и Ферхюльста [6], на втором году жизни развитие таких микроорганизмов, как *Faecalibacterium prausnitzii* и *Dorea fornicigenerans*, на втором году жизни человека происходит в условиях ограниченности ресурсов в его кишечнике для их жизнедеятельности.

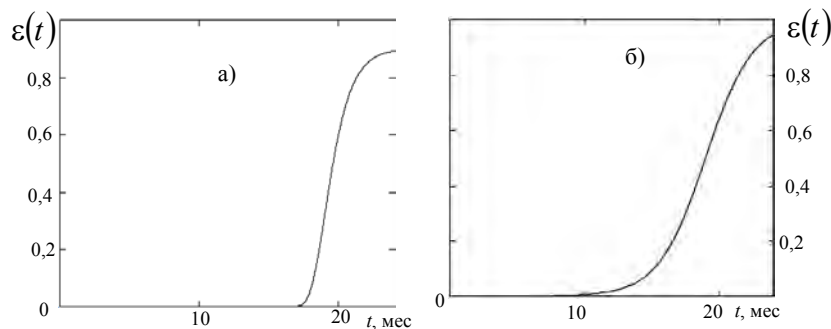


Рисунок 4 – Результаты расчетов динамики микроорганизмов в микробиоме кишечника новорожденного в первые два года жизни: а – *Faecalibacterium prausnitzii* (модель Гомпертца) и б – *Dorea fornicigenerans* (модель Ферхюльста)

### Заключение

Таким образом, впервые показана возможность математического описания динамики микробиома человека с использованием моделей динамики единичной микробной популяции. Получены эмпирические математические соотношения, хорошо описывающие экспериментальные данные по динамике развития групп микроорганизмов, составляющих микробиом человека. На основе модели Мальтуса дано математическое описание динамики относительной плотности грамотрицательных бактерий в кишечнике у пациентов при аллогенной трансплантации гемопоэтических стволовых клеток. С помощью моделей Гомпертца и Ферхюльста получены математические соотношения, которые близко к экспериментальным данным описывают динамику микроорганизмов *Faecalibacterium prausnitzii* и *Dorea fornicigenerans* в микробиоме кишечника новорожденного в первые два года жизни.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. **Стома, И. О.** Микробиом человека на стыке инфектологии и других разделов медицины: современное состояние проблемы и переоценка взглядов на патогенез заболеваний / И. О. Стома, Н. Д. Ющук // Инфекционные болезни: новости, мнения, обучение. – 2019. – Т. 8, № 3. – С. 78–84.
2. **Kurokawa, K.** Comparative metagenomics revealed commonly enriched gene sets in human gut microbiomes / K. Kurokawa [et al.] // DNA Res. – 2007. – Vol. 14, N 4. – P. 169–181.
3. **Martin, D. H.** The microbiota of the human genitourinary tract: trying to see the forest through the trees / D. H. Martin [et al.] // Trans Am Clin Climatol Assoc. 2012; 123: 242–56.
4. **Стома, И. О.** Микробиом человека / И. О. Стома, И. А. Карпов. – Белорусский государственный медицинский университет, Минский научно-практический центр хирургии, трансплантологии и гематологии. – Минск : Доктор Дизайн, 2018. – 122 с.
5. **Острикова, М. Я.** Принципы математического моделирования динамики развития единичной микробной популяции микробиома человека / М. Я. Острикова, О. М. Остриков // Современный взгляд на проблемы внутренней медицины: сборник научных трудов по материалам I Междунар. научно-практ. конф., Курск, 1 дек. 2022 г. / Курский гос. мед. ун-т, сост. А. А. Денисов; отв. ред. Е. М. Хардикова. – Курск : КГМУ, 2022. – С. 45–46.
6. **Соколов, С. В.** Модели динамики популяций / С. В. Соколов. – СПб. : Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. – 61 с.
7. **Воднев, В. Т.** Основные математические формулы: Справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Мн. : Выш. шк., 1988. – 269 с.
8. **Стома, И. О.** Состав кишечного микробиома как предиктор инфекций кровотока, вызванных грамотрицательными бактериями, у пациентов при трансплантации гемопоэтических стволовых клеток / И. О. Стома // Инфекционные болезни: новости, мнения, обучение. – 2020. – Т. 9, № 1. – С. 109–115.
9. Микробиота и здоровье ребенка [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://www.biocodexmicrobiotainstitute.com/sites/default/files/2021-08/child\\_health\\_rus-QR.pdf](http://www.biocodexmicrobiotainstitute.com/sites/default/files/2021-08/child_health_rus-QR.pdf). – Дата доступа: 23.02.2024.

Поступила в редакцию 15.04.2024 г.

Контакты: [omostrikov@mail.ru](mailto:omostrikov@mail.ru) (Острикова Марина Яковлевна, Остриков Олег Михайлович).

***Ostrikova M. Ya., Ostrikov O. M. USING MODELS OF NUMBER DYNAMICS OF A SINGLE MICROBIAL POPULATION FOR A MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE DEVELOPMENT OF THE HUMAN MICROBIOME***

*The possibility of applicability of the Malthus, Gompertz and Verhulst models of the dynamics of a single microbial population for a mathematical description of the development of the human microbiome is shown. It has been established that the selection of empirical coefficients makes it possible to obtain mathematical relationships for a well-consistent description of experimental data obtained for colonies of microorganisms of the human microbiome.*

**Keywords:** human microbiome, dynamics of a single microbial population.



УДК 57.063.7:582.29(476)

## РЕВИЗИЯ ЛИШАЙНИКОВ РОДА *USNEA* БЕЛАРУСИ. II. *USNEA FLORIDA* И *USNEA SUBFLORIDANA*

**И. М. Болсун**

студент биологического факультета  
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

**А. Г. Цуриков**

доктор биологических наук, доцент, профессор кафедры биологии  
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины  
профессор кафедры общей и биоорганической химии  
Гомельский государственный медицинский университет

**В. В. Голубков**

кандидат биологических наук, доцент

**П. Н. Белый**

кандидат биологических наук, доцент, ученый секретарь  
Центральный ботанический сад НАН Беларуси

*Проведена ревизия доступного гербарного материала лишайников рода Usnea, собранного на территории Беларуси в период 1924–2018 гг. Методом тонкослойной хроматографии выявлено два вида лишайников рода Usnea, содержащих скваматовую и тамноловую кислоты – Usnea florida (9 образцов) и U. subfloridana (97 образцов). В статье приводятся морфологические описания данных видов, их химический состав, особенности экологии и данные по распространению на территории Беларуси.*

**Ключевые слова:** биоразнообразие, распространение, экология, вторичные метаболиты, скваматовая кислота, тамноловая кислота.

### Введение

Род *Usnea* Dill. ex Adans. является одним из крупнейших в семействе Parmeliaceae и включает около 350 видов [1]. Его представители характеризуются кустистым, длинным, нитевидным, повисающим или торчащим разветвленным талломом с плотной центральной осью, которая становится заметной, когда ветвь растягивается и кора распадается на части. Виды рода *Usnea* содержат усниновую кислоту в коровом слое, благодаря которой слоевище имеет желтоватый оттенок. Этот род также известен своей сложной таксономией – по всему миру опубликовано более 770 названий, и около половины из них считаются синонимами [2].

Определение гербарных образцов в Беларуси традиционно основывалось на морфолого-анатомических критериях и применении цветных точечных капельных химических реакций, что не всегда является надежным и не позволяет достоверно определить образец в соответствии с современными видовыми концепциями изучаемого рода. В связи с этим ревизия доступного гербарного материала лишайни-

ков рода *Usnea*, собранного ранее на территории Беларуси, с применением современных методов идентификации представляется актуальной.

#### Методы исследования

Материалом для данного исследования послужили образцы лишайников рода *Usnea*, хранящиеся в гербариях Института экспериментальной ботаники имени В. Ф. Купревича НАН Беларуси (MSK-L), Центрального ботанического сада НАН Беларуси (MSKH), Белорусского государственного университета (MSKU), Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины (GSU) и Ботанического института имени В. Л. Комарова РАН (LE). Всего было проанализировано 462 гербарных образца сборов 1924–2018 гг. Дублетные сборы, хранящиеся в разных гербариях, принимали за один гербарный образец.

Морфологию и анатомию образцов изучали с помощью микроскопов Nikon SMZ-745 и Nikon Eclipse 80i. Измерение аскоспор проводили у водных препаратов. Размеры аскоспор представлены по схеме (минимум–) (среднее – стандартное отклонение) (среднее + стандартное отклонение) (–максимум) и сопровождаются указанием количества проведенных измерений (n). Состав вторичных метаболитов изучали методом тонкослойной хроматографии в системе растворителей С [3].

#### Основная часть

Результаты наших исследований показали, что в Беларуси произрастают два вида лишайников рода *Usnea*, содержащих скваматовую и тамноловую кислоты – *Usnea florida* (L.) F.H. Wigg (9 образцов, или 1,9 % от количества исследованных) и *U. subfloridana* Stirt (97, или 21,0 %). Ниже приводим морфологическое описание выявленных видов, а также их химический состав, экологию и данные по распространению на территории Беларуси.

##### *Usnea florida* (L.) F.H. Wigg.

**Морфологические особенности.** Таллом до 10 см длиной, торчащий или повисающий, зеленоватого оттенка, ветвящийся как изотомически-, так и анизотомически-дихотомически. Основание обычно черное. Основные ветви с многочисленными и заметными папиллами (сосочками), постепенно сужаются к кончикам. Боковые ветви не сужены в месте прикрепления. Соралии и изидии отсутствуют. Апотеции многочисленные. Аскоспоры (8.0–)8.9–10.4(–11.0) × (5.0–)5.7–6.7(–8.0) мкм, n=156, эллипсоидной формы.

**Состав вторичных метаболитов.** В зависимости от сочетания вторичных метаболитов сердцевины в настоящее время выделяют два хемотипа *Usnea florida*. Для образцов I хемотипа характерно наличие тамноловой кислоты, для II хемотипа – скваматовой кислоты. В обоих хемотипах в качестве дополнительного вещества может присутствовать алекториаловая кислота [4]. На территории Беларуси встречается только I хемотип данного вида, содержащий только тамноловую кислоту (9 образцов).

Химически вид идентичен *Usnea subfloridana*, поскольку оба содержат скваматовую и тамноловую кислоты в качестве основных веществ. Молекулярные данные также не подтвердили различия между фертильным *U. florida* и стерильным *U. subfloridana* [5–10]. Отличаются два вида рядом морфологических и экологических признаков. Так для *U. florida* характерно отсутствие соралей, изидий и попе-

речных кольцевых трещин, часто встречаются апотеции. Для *U. subfloridana* характерно наличие округлых соралей и изидий, апотеции встречаются крайне редко. Кроме того, *U. florida* во всех странах является редким видом, приуроченным к влажным местообитаниям в старовозрастных малонарушенных лесах. *Usnea subfloridana* является широко распространенным, устойчивым к антропогенному воздействию видом лишайников, нетребовательным к условиям произрастания.

**Условия местообитания и субстратная приуроченность.** Образцы *Usnea florida* были собраны в сосняках (2 образца, или 22,2 %), в березняке, смешанном лесу и на окраине верхового болота – по 1 образцу (по 11,1 %). Для оставшихся 4 образцов (44,5 %) информация об условиях произрастания отсутствовала.

В качестве субстрата *Usnea florida* предпочитает кору березы повислой (*Betula pendula* Roth) – 5 образцов (55,6 %), граба обыкновенного (*Carpinus betulus* L.) – 2 (22,2 %), ивы белой (*Salix alba* L.) и ольхи черной (*Alnus glutinosa* (L.) Gaertn.) – по 1 (по 11,1 %).

**Распространение.** *Usnea florida* произрастает в Европе и Азии [11]. В Беларуси вид является крайне редким (рисунок 1) и включен в Красную книгу Республики Беларусь со II категорией национального природоохранного значения – исчезающие (EN) [12].

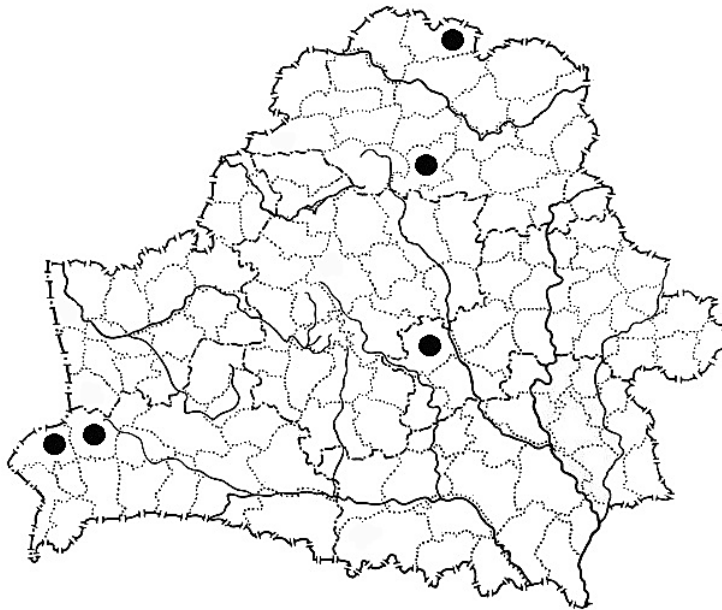


Рисунок 1 – Распространение *Usnea florida* на территории Беларуси

**Исследованные образцы. БРЕСТСКАЯ ОБЛАСТЬ, Каменецкий район,** НП «Беловежская пуца», окр. д. Каменюки, на грабе обыкновенном, Н. В. Горбач, 29.09.1954 (MSK-L, GSU); **Пружанский район,** НП «Беловежская пуца», Переровское л-во, кв. 588, окр. хут. Перерово, на окраине верхового болота, у дороги на иве, В. В. Голубков, 22.06.1983 (MSK-L, GSU); **ВИТЕБСКАЯ ОБЛАСТЬ, Лепельский район,** Березинский биосферный заповедник, по дороге из д. Крайцы в д. Броды, в смешанном лесу на березе, Н. В. Горбач 20.10.1961 (MSK-L, GSU); Березинский биосферный заповедник, урочище «Великая река», на березе, Н. В. Гор-

бач, 20.10.1960 (MSK-L, GSU); Березинский биосферный заповедник, урочище «Увязок», в коренном березняке на березе, Н. В. Горбач, июнь 1963 (MSKH-6567, GSU); **Россонский район**, 13 км СЗ д. Юховичи, окр. болота, в сосняке мшистом, на березе, В. В. Голубков, 01.09.1988 (MSK-L, GSU); окр. д. Юховичи, в сосняке елово-березово-сфагновом, переходное болото, на ольхе черной, В. В. Голубков, 30.09.1987 (MSK-L, GSU); **МОГИЛЁВСКАЯ ОБЛАСТЬ, Осиповичский район**, окр. д. Жорновка, на грабе обыкновенном, В. П. Савич, 28.07.1924 (MSK-L, GSU); Цельское л-во, кв. 23, окр. д. Цель, на березе, Н. В. Горбач, 31.05.1968 (MSK-L, GSU).

### *Usnea subfloridana* Stirt.

**Морфологические особенности.** Таллом до 15 см длиной, нитевидный, зеленоватого оттенка, в основном изотомически-дихотомически ветвящийся. Основание черное, с небольшим количеством кольцеобразных трещин. Основные ветви с гладкой поверхностью и многочисленными папиллами (сосочками). Боковые ветви не сужены в месте прикрепления. Фибриллы немногочисленные, более обильные у основания и редкие на концах ветвей. Соралии точечные, меньше половины диаметра ветви, округлой, реже неправильной формы. Изидиоморфы в соралиях обычно многочисленны, часто сформированы в виде звездчатых структур. Апотеции образуются крайне редко и обнаружены у 7 образцов (7,2 % от числа исследованных). Аскоспоры (8.0–)8.8–10.2(–11.0) × (4.5–)5.2–6.5(–8.0) мкм, n=99, эллипсоидной формы.

**Состав вторичных метаболитов.** В настоящее время выделяют три хемотипа данного вида. Для I хемотипа характерно наличие тамноловой кислоты, для II хемотипа – скваматовой кислоты, III хемотип характеризуется наличием скваматовой и тамноловой кислот одновременно. Иногда в качестве дополнительного вещества может присутствовать алекториаловая кислота [4]. На территории Беларуси встречаются I и II хемотипы (77 и 20 образцов, соответственно, или 79,4 % и 20,6 %).

**Условия местообитания и субстратная приуроченность.** На территории Беларуси *Usnea subfloridana* произрастает преимущественно в хвойных лесах, реже в лиственных лесах. В сосняках было собрано 35 образцов (36,1 % от числа исследованных), в ельниках – 20 (20,6 %), в дубраве – 11 (11,3 %), в открытом местообитании у дороги – 5 (5,2 %), в ольшанике – 4 (4,1 %), в березняке и осиннике – по 2 (по 2,1 %), в смешанном лесу и у болота – по 1 (по 1,0 %). Для оставшихся 16 образцов (16,5 %) информация об условиях произрастания отсутствовала.

Образцы *Usnea subfloridana* были собраны на березе повислой (*Betula pendula*) – 36 образцов (37,1 %), ели европейской (*Picea abies* (L.) H. Karst.) – 15 (15,5 %), сосне обыкновенной (*Pinus sylvestris* L.) и дубе черешчатом (*Quercus robur* L.) – по 13 (по 13,4 %), ольхе черной (*Alnus glutinosa*) – 8 (8,2 %), дубе скальном (*Quercus petraea* (Matt.) Liebl.) и древесине – по 2 (по 2,1 %), пихте белой (*Abies alba* Mill.), осине обыкновенной (*Populus tremula* L.) и рябине обыкновенной (*Sorbus aucuparia* L.) – по 1 (по 1,0 %). Для 5 образцов (5,2 %) информация о субстрате отсутствовала.

**Распространение.** *Usnea subfloridana* произрастает в Европе, Азии, Северной и Центральной Америке [4]. В Беларуси *Usnea subfloridana* является одним из наиболее распространенных представителей рода *Usnea* (рисунок 2).

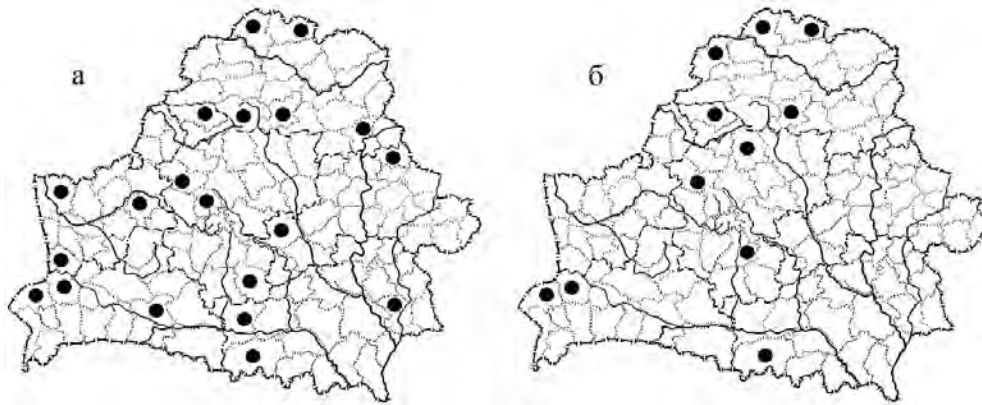


Рисунок 2 – Распространение *Usnea subfloridana* на территории Беларуси (а – хемотип I, б – хемотип II)

### Исследованные образцы.

**Хемотип I. БРЕСТСКАЯ ОБЛАСТЬ, Каменецкий район,** НП «Беловежская пушта», окр. д. Каменюки, 300 м В гостиницы № 2, на заборе, В. В. Голубков, июль 1983 (MSK-L, GSU); НП «Беловежская пушта», Королево-Мостовское л-во, кв. 83, на березе, В. В. Голубков, 11.07.1984 (MSK-L); то же л-во, кв. 729, в ельнике кисличном на дубе, П. Н. Белый, 17.10.2009 (MSKH-6034, GSU); то же л-во, кв. 740, выд. 38, в ельнике кисличном на дубе, П. Н. Белый, 17.10.2009 (MSKH-2022, GSU); то же л-во, кв. 777, на дубе скальном, В. В. Голубков, 18.07.1983 (MSK-L, GSU); то же л-во, кв. 780, в ельнике кисличном на ели, П. Н. Белый, 16.10.2009 (MSKH-5919, GSU); то же л-во, кв. 804, в сосняке разнотравном на березе, В. В. Голубков, 12.07.1983 (MSK-L, GSU); то же л-во, кв. 804, д. Каменюки, на березе, В. В. Голубков, 12.07.1983 (MSK-L, GSU); то же л-во, кв. 807, окр. д. Каменюки, в дубраве на дубе скальном, В. В. Голубков, 11.07.1983 (MSK-L, GSU); то же л-во, кв. 824, 2 км ЮЗ д. Каменюки, в черноольшанике крапивном на ольхе черной, В. В. Голубков, 16.06.1983 (MSKU, GSU); то же л-во, кв. 826, у дороги на дубе черешчатом, 11.07.1983 (MSK-L, GSU); НП «Беловежская пушта», Хвойникское л-во, кв. 408, 1,5 км С д. Хвойник, в ельнике черничном с примесью березы на березе, В. В. Голубков и А. Г. Цуриков, 08.08.2018 (GSU); то же л-во, кв. 457, 2 км З д. Хвойник, у дороги на березе, В. В. Голубков и А. Г. Цуриков, 09.08.2018 (GSU); то же л-во, кв. 459, 0,4 км СВ д. Хвойник, в черноольшанике березово-крапивном на ольхе, В. В. Голубков и А. Г. Цуриков, 08.08.2018 (GSU); **Пинский район,** Логишинское л-во, кв. 33, 7 км ЮЗ г.п. Логишин, в сосняке мшистом на сосне, 23.04.1989 (MSK-L, GSU); **Пружанский район,** НП «Беловежская пушта», Никорское л-во, кв. 562, 1,5 км ЮВ д. Бабинец, в дубраве грабово-кисличной на пихте белой, В.В. Голубков, 29.07.1983 (MSK-L, GSU); то же л-во, кв. 654, в сосняке дубравно-разнотравном на дубе, Шпаковский, 29.06.1999 (MSKU, GSU); НП «Беловежская пушта», Переровское л-во, кв. 589, на дубе, В.В. Голубков, 13.07.1984 (MSK-L, GSU); то же л-во, окр. хут. Перерово, в дубраво-кисличном лесу на дубе, В. В. Голубков, 13.06.1984 (MSK-L, GSU); то же л-во, кв. 590, в дубраве на дубе, В. В. Голубков, 26.07.1983 (MSK-L, GSU); то же л-во, кв. 590, в дубраве грабово-кисличной на дубе, В. В. Голубков, 27.07.1983 (MSK-L, GSU); то же л-во, кв. 591, окр. хут. Перерово, в дубраве кисличной, В. В. Голубков, 25.07.1984 (MSK-L, GSU); то же л-во,

кв. 712, 4 км от хутора Вискули Криницкого с/с, в осветленной дубраве (зубропитомник) на дубе, В. В. Голубков, 20.06.1983 (MSK-L, GSU); шоссе Пружаны, в сосняке вересковом на сосне, Е. Е. Блудов, 13.05.1977 (MSK-L, GSU); **ВИТЕБСКАЯ ОБЛАСТЬ, Верхнедвинский район**, 1 км 3 д. Сукали, переходная полоса сосново-сфагнового болота, в сосняке чернично-мшистом, 18.06.1986 (MSK-L, GSU); 3 км ЮВ д. Прошки, у шоссе в ельнике чернично-мшистом на ели, В. В. Голубков, 03.11.1986 (MSK-L, GSU); **Докшицкий район**, 1,5 км СЗ д. Замосточье, в ельнике кисличном на ели, П. Н. Белый, 15.06.2011 (MSKH-4066); **Лепельский район**, 2 км Ю д. Крайцы, кв. 407, в сосняке чернично-лишайниковом на березе, В. В. Голубков, 13.05.1982 (MSK-L, GSU); Березинский биосферный заповедник, Домжеричское л-во, кв. 315, в сосняке мшистом на березе, П. Н. Белый, 29.09.2007 (MSKH-6577); то же л-во, кв. 334В, выд. 9, в ельнике кисличном на ели, П. Н. Белый, 26.08.2006 (MSKH-6576, GSU); Березинский биосферный заповедник, Крайцевское л-во, кв. 541А, выд. 26, на березе, П. Н. Белый, 28.08.2006 (MSKH-6566); Березинский биосферный заповедник, окр. д. Крайцы, на сосне, Н. В. Горбач, 03.11.1968 (MSK-L, GSU); Березинский биосферный заповедник, Паликское л-во, кв. 650, выд. 11, в осиннике дубово-кисличном на ольхе черной, П. Н. Белый, 08.06.2008 (MSKH-6616, GSU); Березинский биосферный заповедник, урочище «Куть», в сосняке на березе, Н. В. Горбач, 16.05.1968 (MSK-L, GSU); 2,5 км ЮВ д. Барсуки, в ельнике черничном на ели, П. Н. Белый, 15.07.2010 (MSKH-5536, GSU); ЭЛОХ «Барсуки», кв. 56, выд. 31, в сосняке мшистом на сосне, П. Н. Белый, 14.07.2009 (MSKH-6595, GSU); ЭЛОХ «Барсуки», кв. 79, выд. 18, в ельнике мшистом на ели, П. Н. Белый, 13.07.2009 (MSKH-1892, GSU); **Оршанский район**, 3,5 км Ю д. Доброно, в ельнике кисличном на ели, П. Н. Белый, 15.06.2011 (MSKH-4068, GSU); окр. д. Соловьи, на березе, В. В. Голубков, 26.07.1993 (MSK-L, GSU); **Россонский район**, 3 км СЗ д. Юховичи, окр. переходного болота, в сосняке мшистом на ольхе черной, В. В. Голубков, 01.09.1978 (MSK-L, GSU); окр. д. Юховичи, у края верхового болота на березе, В. В. Голубков, 29.09.1987 (MSK-L, GSU); окр. д. Юховичи, в сосняке чернично-лишайниковом на березе, В. В. Голубков (MSK-L, GSU); заказник «Фомино», в сосняке елово-березово-черничном на березе, В. В. Голубков, 03.10.1984 (MSK-L, GSU); окр. оз. Моховое, окраина болота, в сосняке чернично-кисличном, на березе, В. В. Голубков, 14.10.1984 (MSK-L, GSU); **ГОМЕЛЬСКАЯ ОБЛАСТЬ, Гомельский район**, УНБ «Ченки», на сосне, А. Г. Цуриков, 16.06.2002 (GSU-859); **Житковичский район**, Переровское л-во, кв. 4, 4 км С д. Хлупинская Буда, в пойменной дубраве на сухой коре дуба, В. В. Голубков, 19.08.2010 (MSK-L, GSU); НП «Припятский», Озеранское л-во, окр. Царь-сосны, в дубраве грабовой, В. В. Голубков и А. А. Свирид, 22.08.2010 (MSK-L, GSU); то же л-во, кв. 50, в сосняке орляковом, на дубе, О. П. Шахрай, 04.07.1974 (GSU-854); то же л-во, кв. 59, в сосняке лишайниковом на сосне, Г. И. Швец, 08.07.1974 (GSU-853); то же л-во, кв. 60, в березняке злаковом, на березе, 18.07.1974 (GSU-852); НП «Припятский», Озерано-Млынокское л-во, кв. 106, в сосняке мшистом на дубе, В. П. Прокопенко, 15.03.1977 (GSU-855); НП «Припятский», Переровское л-во, кв. 66, в березняке разнотравном, на березе, 12.07.1973 (GSU-856); НП «Припятский», Ричевское л-во, кв. 136, 3 км СЗ д. Хочень, на березе, В. В. Голубков, 23.08.2010 (MSK-L, GSU); **Лельчицкий район**, Млынокское л-во, кв. 7, в сосняке лишайниковом на березе, 18.07.1974 (MSK-L, GSU); **ГРОДНЕНСКАЯ ОБЛАСТЬ, Гродненский район**, г. Гродно, правобережье р. Неман,

Гожское л-во, кв. 3, на сосне, О. А. Кулаковская, 30.04.2005 (MSK-L, GSU); окр. д. Рыбница, в сосновом лесу у дороги на березе, В. В. Голубков, 14.07.2006 (MSK-L, GSU); **Новогрудский район**, Новогрудский лесхоз, Вселюбское л-во, в ельнике на ольхе черной, Е. Е. Блудов, 20.05.1986 (MSK-L, GSU); п. Вселюб, в сосновом лесу на березе, А. М. Буслейко, июль 1970 (MSKU, GSU); там же, август 1970 (MSKU, GSU); **Свислочский район**, НП «Беловежская пуца», Бровское л-во, кв. 87, 0,5 км ЮЗ д. Бровск, в черноольшанике осоковом на ольхе черной, В. В. Голубков, 25.07.1984 (MSK-L, GSU); НП «Беловежская пуца», Свислочское л-во, кв. 120, в черноольшанике приручейно-травяном на ольхе черной, В. В. Голубков, 28.09.1984 (MSK-L, GSU); НП «Беловежская пуца», Язвинское л-во, кв. 71в, окр. д. Тиховоля, в сосняке елово-черничном на березе, В. В. Голубков, 26.09.1984 (MSK-L, GSU); **МИНСКАЯ ОБЛАСТЬ, Воложинский район**, в ельнике лишайниковом на сосне, А. П. Яцына, 09.09.1973 (MSKU, GSU); **Дзержинский район**, Негорельский с/с, 2 км СВ д. Скородное, в сосняке елово-мшистом на березе, М. А. Джус, 12.05.2004 (MSKU, GSU); **Любенский район**, 10 км ЮЗ д. Тиль, на обочине дороги, Г. Н. Антонов, 20.07.1976 (MSK-L, GSU); **Мядельский район**, ЛЗ «Голубые озера», окр. оз. Большой Болтик, в ельнике черничном у дороги на ели, В. В. Голубков, 12.05.1983 (MSK-L, GSU); ЛЗ «Голубые озера», окр. оз. Болтик, на березе, В. В. Голубков, 12.05.1982 (MSK-L, GSU); ЛЗ «Голубые озера», окр. оз. Ячменец, на ели, В. В. Голубков, 02.05.1981 (MSK-L, GSU); ЛЗ «Голубые озера», по направлению к д. Лынтупы, в сосняке березово-черничном, на березе, В. В. Голубков, 09.08.1978 (MSK-L, GSU); НП «Нарочанский», Константиновское л-во, кв. 81, выд. 20, 2,3 км ЮЗ д. Ольшево, 54°56'3.00»N, 26°20'3.81»E, в ельнике кисличном на ели, П. Н. Белый, 18.08.2011 (MSKH-6625, GSU); 6 км СВ д. Мельники, в сосняке чернично-мшистом на березе (MSKU, GSU); окр. д. Степеново, в сосняке черничном на сосне, В. В. Голубков, 11.07.1978 (MSKU, GSU); окр. оз. Нарочь, на рябине, Н. О. Цеттерман, 25.04.1946 (MSKU, GSU); окр. оз. Нарочь, д. Степеново, в сосняке мшистом на сосне, В. В. Голубков и Котов, 18.07.1979 (MSKU, GSU); окр. д. Ольшево, в ельнике черничном на ели, В. В. Голубков, 08.08.1977 (MSK-L, GSU); **МОГИЛЕВСКАЯ ОБЛАСТЬ, Горецкий район**, г. Горки, в сосново-березовой роще на сосне, 07.07.1929 (MSK-L, GSU); **Осиповичский район**, ЛЗ «Свислочно-Березинский», окр. д. Елизово, М. А. Иванова и Кодун, 19.07.2008 (GSU).

**Хемотип II. БРЕСТСКАЯ ОБЛАСТЬ, Каменецкий район**, НП «Беловежская пуца», Королево-Мостовское л-во, кв. 745, в дубраве на ели, В. В. Голубков, 17.07.1984 (MSK-L, GSU); **Пружанский район**, НП «Беловежская пуца», Переровское л-во, кв. 590, в дубраве чернично-кисличной на дубе, В. В. Голубков, 26.07.1983 (MSK-L, GSU); **ВИТЕБСКАЯ ОБЛАСТЬ, Браславский район**, окр. г. Браслав, на березе, Н. В. Горбач, май 1950 (MSK-L, GSU); **Верхнедвинский район**, 3 км ЮВ д. Прошки, дорога Игнаино-Прошки (10–11 км), в ельнике чернично-мшистом, у дороги на осине, В. В. Голубков, 16.06.1986 (MSK-L, GSU); **Лепельский район**, Березинский биосферный заповедник, Домжерицкое л-во, кв. 314, в сосняке мшистом на сосне, П. Н. Белый, 29.09.2006 (MSKH-6575, GSU); то же л-во, кв. 350, окр. д. Савский Бор, в сосняке мшистом на березе, П. Н. Белый, 02.09.2006 (MSKH-6613, GSU); Березинский биосферный заповедник, Паликское л-во, кв. 650, выд. 11, в осиннике дубово-кисличном на ели, П. Н. Белый, 23.06.2008 (MSKH-6603, GSU); Березинский биосферный заповедник, по дороге из д. Крайцы в д. Броды, в смешанном лесу на березе, Н. В. Горбач, 20.10.1962

(MSK-L, GSU); **Россонский район**, 2 км ЮЗ д. Межно, в сосняке елово-березово-мшистом на березе, В. В. Голубков, 02.09.1988 (MSK-L, GSU); окр. заказника «Большое моховое болото», 13 км СЗ д. Юховичи, у дороги на березе, В. В. Голубков, 01.09.1988 (MSK-L, GSU); там же, у края верхового болота, в сосняке мшистом на березе, В. В. Голубков, 03.10.1986 (MSK-L, GSU); окр. д. Юховичи, в ельнике сфагновом на ольхе черной, В. В. Голубков, 29.08.1987 (MSK-L, GSU); окр. д. Юховичи, в сосняке березово-черничном на гнилом пне березы, В. В. Голубков, 29.09.1987 (MSK-L, GSU); окр. оз. Моховое, окраина болота, в сосняке чернично-кисличном на березе пушистой, В. В. Голубков, 14.10.1984 (MSK-L, GSU); **ГОМЕЛЬСКАЯ ОБЛАСТЬ, Лельчицкий район**, НП «Припятский», Млынокское л-во, кв. 561, 2 км СЗ д. Симоничский Млынок, в ельнике черничном со сфагнумом на ели, В. В. Голубков, 16.08.1982 (MSK-L, GSU); **МИНСКАЯ ОБЛАСТЬ, Воложинский район**, окр. д. Яцково и пос. Первомайский, в сосняке березово-вересково-мшистом на березе, 09.09.1972 (MSKU, GSU); **Логойский район**, г.п. Плещеницы, в сосняке лишайниковом на березе, В. В. Голубков (MSKU-1259, GSU); **Мядельский район**, ЛЗ «Голубые озера», окр. оз. Большой Болтик, в ельнике черничном на ели, В. В. Голубков, 12.05.1983 (MSK-L, GSU); Константиновское л-во, кв. 51, в ельнике мшистом на березе, В. В. Голубков, 02.05.1974 (MSK-L, GSU); **Слуцкий район**, сев. окр. д. Хиноловка, на опушке леса у дороги, на дубе, 06.06.1987 (MSK-L, GSU).

### Заключение

В результате ревизии 462 гербарных образцов лишайников рода *Usnea* с использованием метода тонкослойной хроматографии было выявлено два вида лишайников рода *Usnea*, содержащих скваматовую и тамноловую кислоты – *Usnea florida* (9 образцов, или 1,9 % от количества исследованных) и *U. subfloridana* (97 образцов, или 21,0 % от количества исследованных). Для данных видов нами приведены морфологические описания, их химический состав, особенности экологии и данные по распространению на территории страны. Следует отметить, что в Беларуси *Usnea florida* является крайне редким видом и включен в Красную книгу Республики Беларусь, в то время как *Usnea subfloridana* является одним из наиболее распространенных представителей рода *Usnea*.

### Благодарности

Выражаем глубокую благодарность кандидату биологических наук Татьяне Гарьевне Шабашовой за предоставленную возможность работы с гербарными образцами рода *Usnea* в гербарии Института экспериментальной ботаники имени В. Ф. Купревича НАН Беларуси (MSK-L), а также Dr. Philippe Clerc (Ботанический сад и консерватория города Женева, Швейцария) за уточнение видовой принадлежности некоторых гербарных образцов.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Outline of Fungi and fungus-like taxa / N. N. Wijayawardene [et al.] // Mycosphere. – 2020. – Vol. 11, № 1. – P. 1060–1456.
2. Clerc, P. Species concepts in the genus *Usnea* (lichenized Ascomycetes) / P. Clerc // The Lichenologist. – 1998. – Vol. 30, № 4–5. – P. 321–340.
3. Orange, A. Microchemical methods for the identification of lichens / A. Orange, P. W. James, F. J. White. – London : British Lichen Society, 2001. – 101 p.



4. **Nimis, P. L., Martellos, S.** ITALIC – The Information System on Italian Lichens. Version 7.0. University of Trieste, Dept. of Biology. 2022 [Electronic resource]. – Mode of access: <https://italic.units.it/index.php>. Date of access: 23.04.2024.
5. Low genetic differentiation between apotheciate *Usnea florida* and sorediate *Usnea subfloridana* (Parmeliaceae, Ascomycota) based on microsatellite data / P. Degtjarenko [et al.] // Fungal Biol. – 2020. – Vol. 124. – P. 892–902.
6. **Articus, K.** Ribosomal DNA and b-tubulin data do not support the separation of the lichens *Usnea florida* and *U. subfloridana* as distinct species / K. Articus [et al.] // Mycological Research. – 2002. – Vol. 106. – P. 412–418.
7. **Kelly, L. J.** DNA barcoding of lichenized fungi demonstrates high identification success in a floristic context / L. J. Kelly [et al.] // New Phytologist. – 2011. – Vol. 191. – P. 288–300.
8. **Saag, L.** Phylogenetic relations of European shrubby taxa of genus *Usnea* / L. Saag [et al.] // Lichenologist – 2011. – Vol. 43. – P. 427–444.
9. **Mark, K.** Evaluation of traditionally circumscribed species in the lichen-forming genus *Usnea*, section *Usnea* (Parmeliaceae, Ascomycota) using a six-locus dataset / K. Mark [et al.] // Organisms Diversity & Evolution – 2016. – Vol. 16. – P. 497–524.
10. **Gerlach, A.** Taxonomy of the corticolous, shrubby, esorediate, neotropical species of *Usnea* Adans. (Parmeliaceae) with an emphasis on southern Brazil / A. Gerlach, P. Clerc & R. M. Borges Da Silveira // Lichenologist – 2017. – Vol. 49. – P. 199–238.
11. Определитель лишайников России. – Вып. 6. – Алекториевые, Пармелиевые, Стереокаулоновые / Н. С. Голубкова [и др.]; под общ. ред. Н. С. Голубковой. – СПб. : Наука, 1996. – 203 с.
12. Красная книга Республики Беларусь. Растения: редкие и находящиеся под угрозой исчезновения виды дикорастущих растений / гл. редкол.: И. М. Качановский (пред.), М. Е. Никифоров, В. И. Парфенов [и др.]. – 4-е изд. – Минск : Беларус. энцыкл. імя П. Броўкі, 2015. – 448 с.

Поступила в редакцию 16.05.2024 г.

Контакты: [irisha.bolsun@gmail.com](mailto:irisha.bolsun@gmail.com) (Болсун Ирина Михайловна), [tsurykau@gmail.com](mailto:tsurykau@gmail.com) (Цуриков Андрей Геннадьевич), [vgolubkov@tut.by](mailto:vgolubkov@tut.by) (Голубков Владимир Владимирович), [belyj@cbg.org.by](mailto:belyj@cbg.org.by) (Белый Павел Николаевич).

#### **Bolsun I. M., Tsurukau A. H., Golubkov V. V., Bely P. N. REVISION OF THE LICHEN GENUS USNEA IN BELARUS. II. USNEA FLORIDA AND USNEA SUBFLORIDANA**

*The revision of the available herbarium material of the lichen genus *Usnea* collected on the territory of Belarus in the period of 1924–2018 has been carried out. Using thin-layer chromatography, two species of *Usnea* containing squamatic and thamnolic acids have been identified, namely *Usnea florida* (9 specimens) and *U. subfloridana* (97 specimens). The article provides morphological descriptions of these species, their chemical composition, ecological features and data on their distribution on the territory of Belarus.*

**Keywords:** biodiversity, distribution, ecology, secondary metabolites, squamatic acid, thamnolic acid.

УДК 547.518 + 547.78 + 547.775 + 547.556.7

## АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ ОТ НЕКОТОРЫХ РАСЧЕТНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МОЛЕКУЛ БЕНЗОЦИКЛОПЕНТАХИНОЛИНОВ И БЕНЗАКРИДИНОВ

### В. С. Волобуев

кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры физико-химических методов и обеспечения качества  
Белорусский государственный технологический университет

### Е. А. Дикусар

кандидат химических наук,  
старший научный сотрудник лаборатории химии гетероциклических соединений  
Институт физико-органической химии Национальной академии наук Беларуси

### Е. А. Акишина

научный сотрудник лаборатории химии гетероциклических соединений  
Институт физико-органической химии Национальной академии наук Беларуси

### С. С. Шиканов

младший научный сотрудник лаборатории мембранных процессов  
Институт физико-органической химии Национальной академии наук Беларуси

*Статья посвящена анализу зависимости биологической активности замещенных бензоциклопентахинолинов и бензакридинов от расчетных физических параметров молекул: полной энергии системы, энергии высших занятых молекулярных орбиталей и низших вакантных молекулярных орбиталей, молекулярной массы, числа атомов. Методом квантово-химического моделирования путем проведения неэмпирических расчетов с уровнем теории HF/6-31G, была проведена полная оптимизация геометрических параметров и определена электронная структура 18 сложных эфиров 4,5-дихлортиазолкарбоновой кислоты с замещенными бензоциклопентахинолинами и бензоакридинами.*

**Ключевые слова:** гетероциклические соединения, бензоциклопентахинолины, бензакридины, конденсированные системы, сложные эфиры, квантово-химические расчеты, прогнозирование биологической активности.

### Введение

Количественные зависимости структура-активность (QSAR) десятилетиями применяются при разработке взаимосвязей между физико-химическими свойствами химических веществ и их биологической активностью для получения надежной модели прогнозирования активности новых химических соединений [1]. Такие модели, безусловно, позволяют уменьшить количество соединений, которые необходимо синтезировать, облегчая выбор наиболее многообещающих кандидатов. При выяснении химической реакционной способности, а именно способности молекулы образовывать стабильные комплексы и реагировать с биологическими молеку-

лами, часто используются такие квантово-химические характеристики, как энергия высшей занятой молекулярной орбитали  $E_{\text{ВЗМО}}$  и низшей вакантной молекулярной орбитали  $E_{\text{НВМО}}$ , индексы реакционной способности Фукуи, дипольный момент распределения электростатического потенциала. К настоящему времени положения квантовой физики и химии не только подтверждены и уточнены более ранние положения теории и модели квантовой механики [2, 3, 4], касающиеся строения вещества в конденсированном состоянии, но также преодолены сложности квантово-механического расчета многоатомных систем с большим количеством ядер, в том числе и для сложных органических молекул [5, 6]. Как результат этого, на данный момент достаточно хорошо развиты соответствующие приближенные методы различных компьютеризированных квантовых вычислений, дающие при корректном выборе необходимого базиса удовлетворительное согласие с экспериментом [7, 8].

Производные акридина широко исследуются в качестве потенциальных противораковых препаратов [9], противоопухолевое действие которых основано на связывании ДНК и ингибировании топоизомеразы [10].

Цель настоящей работы состояла в математической обработке результатов квантово-химического моделирования электронной структуры и некоторых физических параметров ряда производных бензоциклопентахинолинов и бензакридинов, обладающих потенциальной противоопухолевой активностью, с целью выявления корреляции между кинетикой и термодинамикой биологической активности от вычисленных параметров исследуемых соединений.

#### Методика

Использовалась квантово-химическая программа, находящаяся в открытом доступе (Common Public License), которая высылалась по запросу ее разработчиками А. А. Грановским (Химический факультет МГУ) Firefly версия 8.0.0 RC для научных организаций России и Беларуси бесплатно с условием некоммерческого использования.

Программа Microsoft Excel 2019 использовалась для работы с электронными таблицами экспериментальных данных, подтверждения или отсутствия корреляционных зависимостей путем расчета коэффициента корреляции и проверки его значимости путем использования критерия Студента. Встроенный пакет анализа данных позволяет проводить общий статистический анализ данных, проводить проверку гипотез, применять как корреляционный, так и регрессионный анализ данных. Данный программный продукт давно и широко используется и применяется в научной среде в анализе данных в виду его простоты, функциональности и достаточной точности.

На рисунках представлены корреляционные поля из корреляционного анализа (для усиления иллюстративного графического характера наличия или отсутствия связи между величинами). После этого на них были наложены так называемые линии тренда – на выбор, из встроенного метода аппроксимации данных Microsoft Excel с возможностью выбора степени полинома (уравнения) и отображения величины (коэффициента) достоверности уравнения регрессии.

#### Основная часть

При оценке реакционной активности молекул и практически реализуемого расчета энергии перехода в возбужденное состояние первоочередный интерес представляют собой двухуровневые системы [11, 12], характеризующиеся наличием определенных состояний с наименьшей энергетической разностью между ними и в связи с этим

наибольшими коэффициентами вероятности перехода молекулы в энергетически ближайшее возбужденное состояние. Данный подход аналитически подтверждается интенсивностями соответствующих электронных и УФ-спектров [13, 14].

В соответствии с положениями квантовой теории, полная энергия многочастичной системы есть гамильтониан этой системы частиц [4]. Это положение применимо и к многоатомным молекулам (в данной работе число атомов в молекулах варьируется от 50 до 66, таблица 1). Однако в случае многоатомных молекул, как показали в основополагающей статье E. Wigner и E. Witmer [15], связь между электронным термом молекулы и состоянием атомов неоднозначна по причине возможности существования молекул в различных электронных состояниях. Распределение электронных энергетических уровней атомов и молекул, а также их дисперсия напрямую зависит от количества частиц в системе [16, 17]. В связи с этим при увеличении количества атомов в молекуле происходит вырождение электронных уровней и, как правило, уменьшается ширина запрещенной зоны между электронными уровнями соединения.

В случае многоатомных органических молекул в реальных условиях химических реакций осуществление передачи энергии молекулам и картина зависимости энергии межуровневых переходов электронов от дисперсии уровней осложняется наличием стерических препятствий, диссипации энергии за счет вращательных и поступательных колебаний, как самой молекулы в целом, так и ее фрагментов, представленных атомами и группами атомов [18, 19].

В данной работе методом квантово-химического моделирования путем проведения неэмпирических расчетов с уровнем теории HF/6-31G [20], на основе приближения Хартри-Фока [21, 22, 23], была проведена полная оптимизация геометрических параметров и определена электронная структура 18 сложных эфиров 4,5-дихлортиазолкарбоновой кислоты с замещенными бензоциклопентахинолинами и бензакридинами (соединения **1-18**).

Ниже на рисунке 1 представлена структура исследуемых соединений с потенциальной противоопухолевой активностью, а также схема их синтеза.

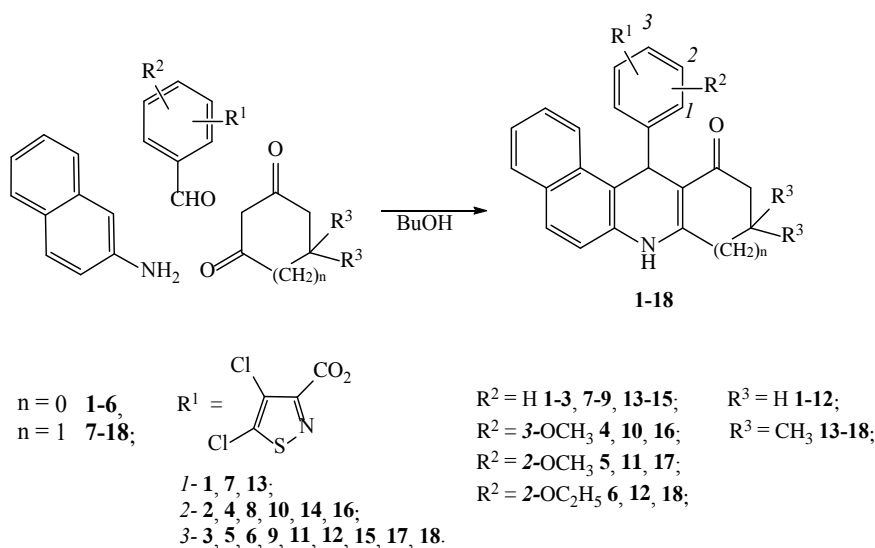


Рисунок 1 – Схема получения исследованных соединений **1-18**

Путем анализа разности энергий высшей занятой молекулярной орбитали ( $E_{\text{ВЗМО}}$ ) и энергии низшей вакантной молекулярной орбитали ( $E_{\text{НВМО}}$ ) по методу Фукуи [24] (формула 1), вычислены наиболее (соединение **12**) и наименее (соединение **9**) перспективные эфиры для проведения их биологического тестирования.

$$\Delta F = |E_{\text{ВЗМО}} - E_{\text{НВМО}}|. \quad (1)$$

Численные результаты проведенного квантово-химического моделирования, расчет  $\Delta F$  для указанных выше структур, а также вычисленные значения полной энергии системы ( $E_p$ , атомные единицы Хартри), энергии высших занятых молекулярных орбиталей ( $E_{\text{ВЗМО}}$ , eV) и низших вакантных молекулярных орбиталей ( $E_{\text{НВМО}}$ , eV), разности энергий ВЗМО и НВМО ( $\Delta F$ , eV), дипольные моменты ( $D$ , Db), молекулярная масса ( $M$ , дальтон), общее число атомов ( $N$ ) соединений **1-18**, представлены в таблице 1.

Проведенное нами квантово-химическое моделирование рассматриваемых молекул показало, что наиболее термодинамически устойчивыми (максимальная величина полной энергии системы со знаком «-»,  $E_p$ , выраженная в атомных единицах) являются *мета*-изомеры исследованных соединений (**2, 4, 8, 10, 14, 16**).

**Примечание.**  $M$  – молекулярная масса,  $N$  – общее число атомов, положение – эта графа указывает на расположение фармакофорного заместителя (фрагмента сложного эфира 4,5-дихлортиазолкарбоновой кислоты) относительно С–С ковалентной связи между бензоциклопентахинолинами **1-6** или бензакридинами **7-18** в ароматическом заместителе: *орто*- (1,2-замещение), *мета*- и *изованилин* (1,3-замещение), *пара*-, *ванилин* и *ваниль* (1,4-замещение); *изованилин*, *ванилин*, *ваниль* – рациональные названия линкерных фрагментов, использованных для конструирования соединений **4-6, 10-12, 16-18**.

Дипольные моменты исследованных соединений хорошо объясняются пространственным расположением сложноэфирных заместителей в ароматическом фрагменте и имеют максимальные значения у *пара*-изомеров (3, 5, 6, 9, 11, 12, 15, 17, 18), так как в этом случае длина диполя при возбуждении молекулы и переносе заряда будет максимальной в сравнении с однотипными соединениями рассматриваемого ряда.

Как видно из данных таблицы 1, значение  $|E_{\text{ВЗМО}}|$  выше у *пара*-изомеров (**3, 9, 15**, а также **17, 18**). Это может быть объяснено лучшей стабилизацией системы вследствие наличия большего количества резонансных структур, и как следствие, большей делокализацией электронной плотности и заряда. В соответствии с вышеизложенным, наблюдается та же закономерность в корреляции между значением  $|E_{\text{НВМО}}|$  и пространственным строением рассматриваемых соединений: *пара*-изомеры (**3, 9, 15**, а также **17, 18**) характеризуются наибольшими значениями  $|E_{\text{НВМО}}|$ . В результате этого *пара*-изомеры характеризуются наибольшими значениями разности  $\Delta F$  энергетических электронных уровней ВЗМО и НВМО.

Согласно данным таблицы 1, соединением, характеризующимся минимальным значением  $\Delta F$  в рассматриваемом ряду соединений, является 2-этокси-4-(11-оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидробензо[*a*]акридин-12-ил)фенил-4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**12**), что свидетельствует о возможных меньших энергетических затратах при возбуждении данной молекулы и, как следствие, существенно большей ее реакционной способности [25], перспективности использования в фармакокинетике и эффективности цитостатического действия данного вещества в лечении онкозаболеваний.

Таблица 1 – Физические параметры органических соединений **1-18**

№	$E_p$ , а.е.	$E_{взм}^o$ , eV	$E_{нвмо}^o$ , eV	$\Delta F$ , eV	$D, Db$	$M$	$N$	Положение
<i>Производные 1,3-циклопентандиона</i>								
<b>1</b>	-2643,2003100939	-8,3376342	2,21230308	11,3064198	8,26	507,39	50	орто-
<b>2</b>	-2643,2038354035	-7,6001999	1,60276324	9,20296312	7,49	507,39	50	мета-
<b>3</b>	-2643,1947145573	-8,5281154	2,21230308	10,74041852	9,34	507,39	50	пара-
<b>4</b>	-2757,0267471819	-7,6655077	1,7279366	9,39344432	8,08	537,41	54	изованилин
<b>5</b>	-2757,0226429053	-7,7716330	2,2177454	9,98937836	10,11	537,41	54	ванилин
<b>6</b>	-2796,0471795104	-8,4791346	2,25312048	10,73225504	9,29	551,44	57	ваниль
<i>Производные 1,3-циклогександиона</i>								
<b>7</b>	-2682,221687429	-7,4804689	1,89392736	9,374396244	8,72	521,41	53	орто-
<b>8</b>	-2682,224950824	-7,5729883	1,66262876	9,23561704	7,61	521,41	53	мета-
<b>9</b>	-2682,215464788	-7,6519019	3,7415950	11,39349692	8,88	521,41	53	пара-
<b>10</b>	-2796,047719876	-7,5321709	2,94429512	10,476466	8,23	551,44	57	изованилин
<b>11</b>	-2796,043337857	-7,6546231	2,8164006	10,47102368	9,77	551,44	57	ванилин
<b>12</b>	-2835,067861327	-7,6246903	1,55922468	9,183915	9,05	565,47	60	ваниль
<i>Производные 5,5-диметилциклогексан-1,3-диона</i>								
<b>13</b>	-2760,259062705	-7,4695842	1,90733316	9,37711736	8,76	549,49	59	орто-
<b>14</b>	-2760,261838107	-7,5566132	2,381015	9,93767632	6,71	549,49	59	мета-
<b>15</b>	-2760,253048831	-7,6437384	2,57965968	10,22339812	8,90	549,49	59	пара-
<b>16</b>	-2874,085192538	-7,5240074	1,83134068	9,35534748	8,18	575,90	63	изованилин
<b>17</b>	-2874,080878966	-7,6491808	2,9116412	10,56082196	9,85	575,90	63	ванилин
<b>18</b>	-2913,105405315	-8,3784516	2,31570716	10,6941588	9,18	593,53	66	ваниль

На рисунках 1–3 приведены корреляционные поля для значений, указанных в таблице 1 физических величин, характеризующих физические свойства соединений **1-18**. Линейный парный коэффициент детерминации для случаев б) и в) рисунка 1 был равен 0,64 (умеренная связь) и 0,99 (сильная связь) соответственно.

Линейный парный коэффициент детерминации для случаев б) и в) рисунка 2 был равен 0,9963 (сильная связь) и 0,9963 (сильная связь) соответственно. Линейный парный коэффициент детерминации для случаев б) и в) был равен 0,63 (умеренная связь) и 0,99 (сильная связь) соответственно.

При сравнении рисунков 1 и 2, видно, что снятие байеровского напряжения при переходе от производных 1,3-циклопентандиона к производным 1,3-циклогександиона приводит к отсутствию зависимости  $\Delta F$  от  $D$ , что может быть объяснено пространственным удалением электронных орбиталей соответствующих связей и ослаблением гиперконъюгации.

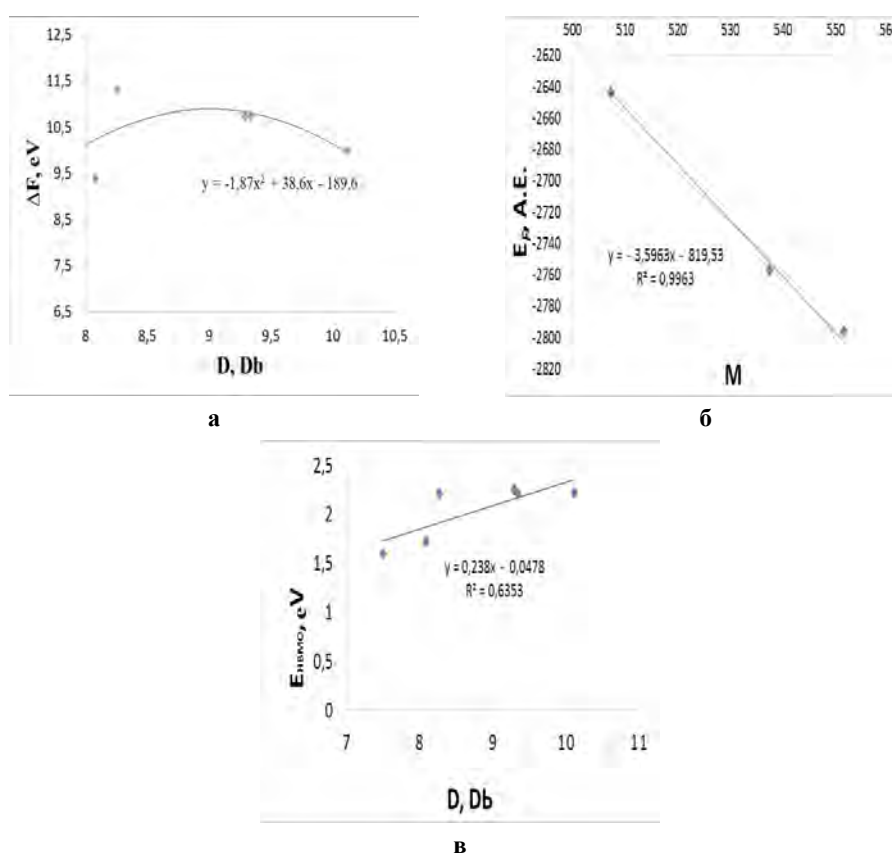


Рисунок 1 – Корреляционные зависимости для производных 1,3-циклопентандиона **1–6**:  
 а – интерполяция зависимости  $\Delta F$  от  $D$  полиномом второй степени;  
 б – линейная корреляция величин  $E_r$  и  $M$  (коэффициент детерминации 0,99 – сильная связь);  
 в – линейная корреляция  $E_{\text{нвмо}}$  и  $D$  (коэффициент детерминации 0,63)

Данные рисунка 3 позволяют сделать вывод, что введение двух метильных групп во фрагмент 1,3-циклогександиона обуславливает появление гиперконъюгации и вследствие этого наличие линейной корреляции зависимости  $\Delta F$  от  $D$ .

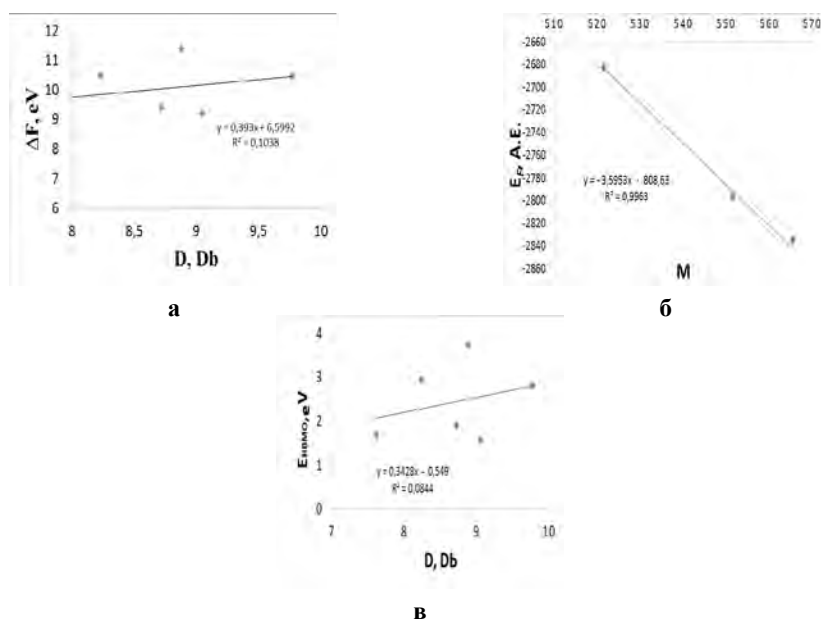


Рисунок 2 – Корреляционные зависимости для производных 1,3-циклогександиона **7-12**: а – отсутствие зависимости  $\Delta F$  от  $D$ ; б – линейная корреляция величин  $E_f$  и  $M$  (коэффициент детерминации 0,9963 – сильная связь); в – отсутствие линейной корреляции  $E_{\text{HBMO}}$  и  $D$  (коэффициент детерминации 0,0844 – отсутствие связи)

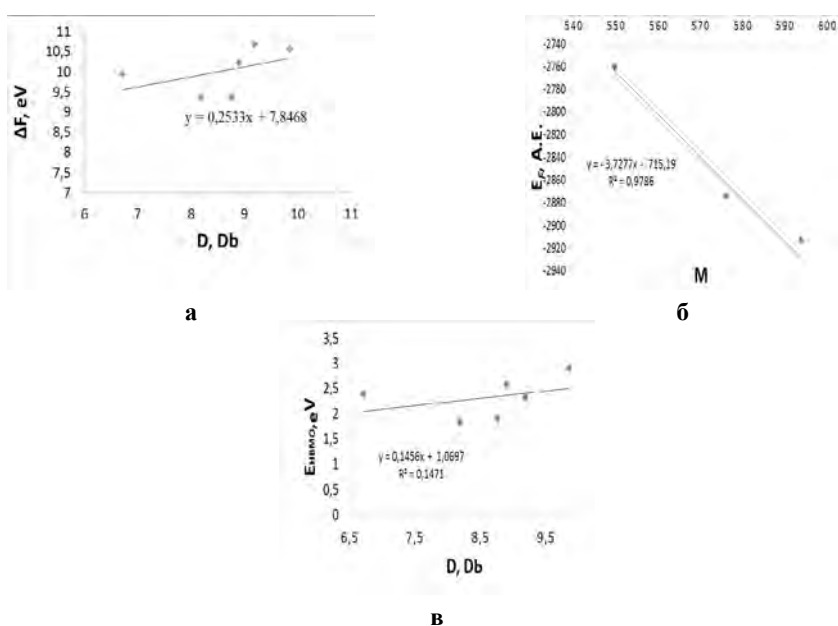


Рисунок 3 – Корреляционные зависимости для производных 5,5-диметилциклогексан-1,3-диона **13-18**: а – линейная корреляция между величинами  $\Delta F$  от  $D$ ; б – линейная корреляция величин  $E_f$  и  $M$  (коэффициент детерминации 0,9786 – сильная связь); в – отсутствие линейной корреляции  $E_{\text{HBMO}}$  и  $D$  (коэффициент детерминации 0,1471 – отсутствие связи)



### Заклучение

1. По результатам расчета при квантово-механическом моделировании по методу Хартри-Фока с уровнем теории HF/6-31G определена потенциально цитостатически активная структура (**12**) с минимальной энергетической разностью между уровнями ВЗМО и НВМО  $\Delta F$ , равной 9,183915 eV, в случае использования которой ожидается наилучшая фармакокинетическая активность в лечении онкозаболеваний.

2. Показано, что нет линейной связи между величинами  $\Delta F$  от  $D$ . Скорее всего, эта связь имеет нелинейный характер. Интерполяция зависимости  $\Delta F$  от  $D$  показала хорошее приближение полиномом второй степени (квадратным уравнением). Это может быть использовано для моделирования данной зависимости в необходимых диапазонах, где отчасти еще нет экспериментальных данных, но есть необходимость приближенно посчитать  $\Delta F$ .

3. Отсутствие линейной связи между величинами  $E_{\text{НВМО}}$  и  $D$  в случае соединений **7-18** объясняется наличием существенно большего количества частиц в соответствующих молекулах, увеличением числа энергетических состояний и в связи с этим более сложным распределением электронных термов данных соединений.

4. При увеличении числа атомов в одноподобных органических соединениях наблюдается закономерное линейное увеличение их полной энергии  $E_f$  с одновременным наличием некоторых отклонений в связи с влиянием пространственного строения соединений на распределение зарядов, энергию колебания и гиперконъюгацию: *пара*-изомеры имеют более высокое значение  $E_f$  и  $\Delta F$ , нежели *мета*- и *орто*-изомеры.

5. Введение объемных заместителей в фрагмент 1,3-циклогександиона обуславливает появление линейной корреляции зависимости  $\Delta F$  от  $D$  посредством гиперконъюгации, что позволяет в некотором интервале изменять физические свойства моделируемых веществ.

Химические названия исследованных соединений, приведенные по системе ИЮПАК [26].

2-(10-Оксо-8,9,10,11-тетрагидро-7*H*-бензо[*f*]циклопента[*b*]хинолин-11-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**1**).

3-(10-Оксо-8,9,10,11-тетрагидро-7*H*-бензо[*f*]циклопента[*b*]хинолин-11-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**2**).

4-(10-Оксо-8,9,10,11-тетрагидро-7*H*-бензо[*f*]циклопента[*b*]хинолин-11-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**3**).

2-Метокси-5-(10-оксо-8,9,10,11-тетрагидро-7*H*-бензо[*f*]циклопента[*b*]хинолин-11-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**4**).

2-Метокси-4-(10-оксо-8,9,10,11-тетрагидро-7*H*-бензо[*f*]циклопента[*b*]хинолин-11-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**5**).

2-Этокси-4-(10-оксо-8,9,10,11-тетрагидро-7*H*-бензо[*f*]циклопента[*b*]хинолин-11-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**6**).

2-(11-Оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидробензо[*a*]акридин-12-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**7**).

3-(11-Оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидробензо[*a*]акридин-12-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**8**).

4-(11-Оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидробензо[*a*]акридин-12-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**9**).

2-Метокси-5-(11-оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидробензо[*a*]акридин-12-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**10**).

2-Метокси-4-(11-оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидробензо[*a*]акридин-12-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**11**).

2-Этокси-4-(11-оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидробензо[*a*]акридин-12-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**12**).

2-(9,9-Диметил-11-оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидробензо[*a*]акридин-12-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**13**).

3-(9,9-Диметил-11-оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидробензо[*a*]акридин-12-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**14**).

4-(9,9-Диметил-11-оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидро-бензо[*a*]акридин-12-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**15**).

2-Метокси-5-(9,9-диметил-11-оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидро-бензо[*a*]акридин-12-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**16**).

2-Метокси-4-(9,9-диметил-11-оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидробензо[*a*]акридин-12-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**17**).

2-Этокси-4-(9,9-Диметил-11-оксо-7,8,9,10,11,12-гексагидробензо[*a*]акридин-12-ил)фенил 4,5-дихлоризотиазол-3-карбоксилат (**18**).

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, грант Х22-038.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Pathan, S.* Quantitative Structure Activity Relationship and Drug Design: A Review / S. Pathan, S. M. Ali, M. Shrivastava // International Journal of Research in BioSciences. – 2016. – Vol. 5. – P. 1–5.

2. *Мэлвин-Хьюз, Э. А.* Физическая химия : в 2 кн. Книга 1. / Э. А. Мэлвин-Хьюз ; пер. с англ. Н. Еремина, проф. О. М. Полторака, доц. Ю. В. Филиппова, под общ. ред. чл.-корр. АН СССР Я. И. Герасимова. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1962. – 519 с.

3. *Мессиа, А.* Квантовая механика : в 2 т. / А. Мессиа. – М. : Наука, 1979. – Т. 2. – 583 с.

4. *Ландау, Л. Д.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. – М. : Физматлит, 2016. – Т. 3. – 800 с.

5. *Melkikh, A. V.* Molecular recognition of the environment and mechanisms of the origin of species in quantum-like modeling of evolution / A. V. Melkikh, A. Khrennikov // Progress in Biophysics and Molecular Biology. – 2017. – Vol. 130, № 1. – P. 61–79.

6. *Yamanouchi, K.* Quantum Mechanics of Molecular Structures / K. Yamanouchi // Springer Berlin Heidelberg. – 2016. – 267 p.

7. *Мак-Вини, Р.* Квантовая механика молекул / Р. Мак-Вини, Б. Сатклиф – М. : Мир, 2017. – 381 с.

8. *Прескилл, Дж.* Квантовая информация и квантовые вычисления: в 2 т. / Дж. Прескилл. – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2008. – Т. 1. – 464 с.

9. Galdino-Pitta MR, Pitta MGR, Lima MCA, Galdino SL, Pitta IR: Niche for Acridine derivatives in anticancer therapy. Mini Rev Med Chem. – 2013. – Vol. 13, № 9. – P. 1256–1271.

10. Almeida SMV, Lafayette EA, Silva WL, Serafim VL, Menezes TM, Neves JL, Ruiz ALTG, Carvalho JE, Moura RO, Beltrão EIC, Carvalho Júnior LB, Lima MCA: New spiro-acridines: DNA interaction, anti-proliferative activity and inhibition of human DNA topoisomerases. Int J Biol Macromol. – 2016. – Vol. 92. – P. 467–475.

11. *Фудзинага, С.* Метод молекулярных орбит / С. Фудзинага. – М. : Мир, 2013. – 461 с.

12. *Фано, У.* Физика атомов и молекул / У. Фано, Л. Фано ; пер. с англ. под ред. Л. И. Пономарева. – М. : Наука, 1980. – 656 с.

13. *Новаковская, Ю. В.* Молекулярные системы. Теория строения и взаимодействия с излучением : в 3 ч. – Ч. 2: Квантовые состояния молекул / Ю. В. Новаковская. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 176 с.

14. *Калверт, Дж.* Фотохимия / Дж. Калверт, Дж. Питтс ; пер. с англ. канд. физ.-мат. наук Р. Н. Нурмухаметова, канд. хим. наук М. Г. Кузьмина, канд. хим. наук Б. М. Ужинова ; под ред. докт. физ.-мат. наук Р. Ф. Васильева. – М. : Изд-во Мир, 1968. – 672 с.

15. *Wigner, E.* Über die Struktur der zweiatomigen Molekelspektren nach der Quantenmechanik / E. Wigner, E. E. Witmer // Zeitschrift für Physik. – 1928. – Bd. 51. – S. 859–886.
16. **Вигнер, Е.** Теория групп и ее приложения к квантово-механической теории атомных спектров / Е. Вигнер – М. : Едиториал УРСС, 2018. – 452 с.
17. **Татевский, В. М.** Классическая теория строения молекул и квантовая механика / В. М. Татевский. – М. : Химия, 1973. – 520 с.
18. **Флайгер, У.** Строение и динамика молекул / У. Флайгер. – М. : Мир, 2012. – 465 с.
19. **Потапов, В. М.** Стереохимия / В. М. Потапов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Химия, 1988. – 464 с.
20. General Atomic and Molecular Electronic-Structure System / M. W. Schmidt [at al.] // J. Comput. Chem. – 1993. – Vol. 14, № 7. – P. 1347–1363.
21. Self-consistent molecular orbital methods. XXIII. A polarization-type basis set for second-row elements / M. M. Francl [at al.] // J. Chem. Phys. – 1982. – Vol. 77, № 7. – P. 3654–3665.
22. Ab Initio Molecular Orbital Theory / W. J. Hehre [at al.]. – N.Y. : Wiley, 1986. – 576 p.
23. **Hariharan, P. C.** The influence of polarization functions on molecular orbital hydrogenation energies / P. C. Hariharan, J. A. Pople // Theor. Chim. Acta. 1973. – Vol. 28, № 3. – P. 213–222.
24. **Putz, M. V., Putz A. M.** DFT chemical reactivity driven by biological activity: applications for the toxicological fate of chlorinated PAHs / M. V. Putz, A. M. Putz / Applications of Density Functional Theory to Biological and Bioinorganic Chemistry. – Ed. M. V. Putz, M. P. Mingos // Springer Link: Berlin, 2013. – P. 181–231.
25. **Майер, Г. В.** Квантовая химия, строение и фотонока молекул / Г. В. Майер, В. И. Данилова. – Томск : Изд-во Томск. Ун-та, 1984. – 196 с.
26. **Хлебников, А. Ф.** Современная номенклатура органических соединений / А. Ф. Хлебников, М. С. Новиков. – СПб. : Проффессионал, 2004. – 431 с.

Поступила в редакцию 17.06.2024 г.

Контакты: vlasname@mail.ru (Волобуев Влас Сергеевич), dikusar@ifoch.basnet.by (Дикусар Евгений Анатольевич), che.semenovaeva@mail.ru (Акишина Екатерина Александровна), iphoch2022@mail.ru (Шиканов Сергей Сергеевич).

**Volobuev V. S., Dikusar E. A., Akishina E. A., Shikanov S. S. ANALYSIS OF THE DEPENDENCE OF BIOLOGICAL ACTIVITY ON SOME CALCULATED PHYSICAL PARAMETERS OF BENZOCYCLOPENTAQUINOLINE AND BENZACRIDINE MOLECULES**

*The article is devoted to the analysis of the correlation dependence of the biological activity of substituted benzocyclopentaquinolines and benzacridines on the calculated physical parameters of the molecules: the total energy of the system, the energy of the highest occupied molecular orbitals and the lowest vacant molecular orbitals, molecular weight, number of atoms. Using the quantum chemical modeling method through ab initio calculations at the HF/6-31G level of theory, a complete optimization of geometric parameters has been carried out and the electronic structure of 18 esters of 4,5-dichlorothiazolecarboxylic acid with substituted benzocyclopentaquinolines and benzoacridines has been determined.*

**Keywords:** heterocyclic compounds, benzocyclopentaquinolines, benzacridines, condensed systems, esters, quantum chemical calculations, prediction of biological activity.

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў  
на англійскую мову  
*Я. В. Рубанава*

Тэхнічны рэдактар *А. Р. Роскач*  
Камп'ютарны набор і вёрстка *С. А. Кірыльчык*  
Карэктар *І. Г. Каржова*

Падпісана да друку .2024 г.  
Фармац 70x108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Гарнітура Times New Roman.  
Ум.-друк. арк. 7,4. Ул.-выд. арк. 8,5. Тыраж 40 экз. Заказ № 4394.  
Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт  
імя А. А. Куляшова”, 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.  
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,  
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.  
Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства  
“Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля”  
ЛП № 02330/23 ад 30.12.2013 г.  
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў