

ISSN 2409-3777



ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта

імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

2 (62)
2023

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р гіст. навук прафесар Д. С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р экан. навук прафесар Н. У. Макоўская (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я. Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. В. Марчанка (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
канд. гіст. навук А. І. Галавач (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар В. А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В. І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В. М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар М. М. Дабравольскі (Тула)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А. С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б. Д. Чабатарэўскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар У. І. Лебедзеў (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. М. Сідарэнка (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А. В. Цімошчанка (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар А. М. Дворнік (Гомель)
д-р біял. навук прафесар Н. П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А. Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С. У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М. В. Акуліч (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт Г. М. Ціханчук (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт А. А. Анціпенка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А. В. Марачкаў (Магілёў)
д-р мед. навук Н. І. Сімчанка (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П. С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар А. Г. Палячонак (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар Г. М. Раганаў (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс "Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова" ўключаны ў РИНЦ
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),
ліцэнзійны дагавор № 811-12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:
212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
vesnik_mdu@mail.ru

**MOGILEV STATE
A. KULESHOV UNIVERSITY
BULLETIN**

THEORETICAL-SCIENTIFIC JOURNAL

Founded in December 1998

Series B. NATURAL SCIENCES
(Mathematics, Physics, Biology)

Published twice per year

**2 (62)
2023**

Editorial Board:

Lavrinovich D. S., Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor,
Makovskaya N. V., Deputy Chief Editor, Doctor of Economic Sciences, Professor
Riyer Y. G., Deputy Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor
Marchenko I. V., Chairman of the Editorial Committee (Series B),
Ph.D., Associate Professor
Golovach E. I., Executive Secretary of the Editorial Board, Ph.D.

Mathematics, Physics:

Yerovenko V. A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Bernik V. I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Laptinsky V. N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of
the Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus
(Mogilev)
Dobrovolsky N. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Tula)
Sotsky A. B., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Galmak A. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Turtsevich A. S., Doctor of Technical Sciences (Minsk)
Chebotarevsky B. D., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Lebedev V. I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Sidorenko I. N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Timoschenko E. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)

Biology:

Dvornik A. M., Doctor of Biological Sciences, Professor (Gomel)
Maksimova N. P., Doctor of Biological Sciences, Professor (Minsk)
Naumov A. D., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Minsk)
Lazarevich S. V., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Gorky)
Akulich N. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Tihonchuk G. N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Antipenko A. A., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Marochkov A. V., Doctor of Medical Sciences, Professor (Mogilev)
Simchenko N. I., Doctor of Medical Sciences (Mogilev)
Lopuh P. S., Doctor of Geographical Sciences, Professor (Minsk)
Poliachenok O. G., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)
Roganov G. N., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)

Theoretical-scientific journal
“Mogilev State A. Kuleshov University Bulletin”
is included in the bibliographic database
“Russian Science Citation Index”,
License agreement № 811-12/2014

The editorial board address:
212022, Mogilev, Kosmonavtov Str., 1,
vesnik_mdu@mail.ru

З М Е С Т

ГАЛЬМАК А. М. О тождестве $\bar{x} = \bar{y}$ в полиадических группах специального вида	7
ЛОМОВЦЕВ Ф. Е. Формулы Римана первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости	16
СИДОРЕНКО И. Н. Об ослабленной проблеме Гильберта для систем Льенара типа $2a+2s$	32
РОМАНОВИЧ Л. А. О свойствах фундаментальной формы группоида Ли k -струй локальных диффеоморфизмов	41
СОТСКИЙ А. Б., ЧУДАКОВ Е. А. Нулевое отражение света от неоднородного слоя	45
СОТСКИЙ А. Б., ШИЛОВ А. В. Структурная окраска синтетических волокон с кластерным поперечным сечением	57
ТИМОЩЕНКО Е. В., ЮРЕВИЧ Ю. В. Светомодуляционный эффект в вынужденном излучении двухуровневой среды с квадратичным эффектом Штарка	71
ЦУРИКОВ А. Г., АВЕРИН В. С., ГРИЩЕНКО И. В., ЦУРИКОВА Н. В. Видовое разнообразие лишайников зоны планирования срочных защитных мероприятий территории воздействия Белорусской АЭС	79
КЛЕБАНОВА Н. А., СЕДАКОВА В. А., КЛЕБАНОВ А. В., ТАРАСОВА А. В. Ферментация пектинов различной степени этерифицированности под действием бифидобактерий	87
ОСИПЕНКО А. Н. Жирные кислоты и свободнорадикальные процессы	98
ГАПТАРЬ М. И. Восстановление когнитивных функций, физического здоровья и состояния у студентов, перенесших коронавирусную инфекцию COVID-19	104

C O N T E N T S

GALMAK A. M. On Identity $\bar{x} = \bar{y}$ in Polyadic Groups of Special Form	7
LOMOVTSEV F. E. The Riemann Formulas to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients in the First Quarter of the Plane.....	16
SIDORENKO I. N. On the Weakened Hilbert Problem for Lienard Systems of Type $2a+2s$	32
ROMANOVICH L. A. On the Properties of the Fundamental Form in the Lie Groupoid of k-jets of Local Diffeomorphisms	41
SOTSKY A. B., CHUDAKOV E. A. Zero Light Reflection from Inhomogeneous Layer	45
SOTSKY A. B., SHILOV A. V. Structural Coloring of Synthetic Fibers with Cluster Cross Section.....	57
TIMOSHCHENKO E. V., YUREVICH YU. V. Light Modulation Effect in Stimulated Emission of Two-Level Medium with Quadratic Stark Effect.....	71
TSURYKAU A. H., AVERIN V. S., HRYSHCANKA I. V., TSURIKOVA N. V. Lichen Diversity in the Zone of Planning Urgent Protective Measures in the Area Affected by the Belarusian NPP	79
KLEBANOVA N. A., SEDA KOVA V. A., KLEBANOV A. V., TARASOVA A. V. Fermentation of Pectins of Various Degrees of Esterification under the Action of Bifidobacteria.....	87
OSIPENKO A. N. Fatty Acids and Free-Radical Processes	98
HAPTAR M. I. Restoration of Cognitive Functions, Physical Health and Condition of Students after Coronavirus Infection Covid-19.....	104

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

О ТОЖДЕСТВЕ $\bar{x} = \bar{y}$ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук, профессор

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

В статье изучаются полиадические группы специального вида. В частности, доказана теорема, утверждающая, что для любой неединичной группы A и любой нетождественной подстановки σ , порядок которой делит $l-1$, в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

Ключевые слова: группа, полиадическая группа специального вида, l -арная группа, подстановка, косой элемент, тождество.

Введение

Частным случаем полиадической группы специального вида $\langle A^k, \eta_{\sigma, \sigma, k} \rangle$, определение которой будет приведено позже, является l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ с l -арной операцией $[]_{l, \sigma, k}$, которая определяется [1] на декартовой степени A^k группы A с помощью подстановки $\sigma \in S_k$ следующим образом:

$$[(a_{11}, \dots, a_{1k}) \dots (a_{l1}, \dots, a_{lk})]_{l, \sigma, k} = (y_1, \dots, y_k),$$

где

$$a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{l\sigma^{l-1}(j)}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (1)$$

Операция в группе A относится к операциям вида $[]_{l, \sigma, k}$, так как совпадает с операцией $[]_{2, \varepsilon, 1}$, где ε – тождественная подстановка.

Частными случаями l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ являются две полиадические операции Э. Поста [2], одну из которых он определил на декартовой степени S_n^k симметрической группы, вторую – на декартовой степени $GL_n^k(C)$ полной линейной группы над полем комплексных чисел, при этом в качестве подстановки σ использовался цикл $(1\ 2 \dots k)$, а арность l была равна $k+1$.

В [1, теорема 3.6.2] было доказано, что если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа. В частности, отсюда следуют результаты Э. Поста [2]: $\langle S_n^k, []_{k+1, (12\dots k), k} \rangle$ и $\langle GL_n^k(C), []_{k+1, (12\dots k), k} \rangle$ – $(k+1)$ -арные группы.

В [3] В. Дёрнте определил для любого элемента a l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ косой элемент \bar{a} как решение уравнения

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_l x) = a$$

и доказал, что

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} \underbrace{a \dots a}_{l-i}) = a$$

для любого $i = 1, 2, \dots, l$.

Для нахождения косых элементов в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ можно применять следующий результат.

Предложение 1 [1, предложение 3.6.3]. Пусть A – группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ l -арной группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ элемент

$$\bar{\mathbf{a}} = (a_{\sigma^{l-2}(1)}^{-1} \dots a_{\sigma(1)}^{-1}, \dots, a_{\sigma^{l-2}(k)}^{-1} \dots a_{\sigma(k)}^{-1})$$

является косым для \mathbf{a} .

Для групп полным бинарным аналогом уравнения, определяющего косой элемент, является уравнение $ax = a$. Поэтому в группе все элементы имеют один и тот же косой элемент, совпадающий с единицей группы: $\bar{a} = 1$ для любого $a \in A$. Это означает, что в группах выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

В полиадических группах арности $l > 2$ тождество $\bar{x} = \bar{y}$ может не выполняться. Следующий критерий выполнимости в полиадических группах тождества $\bar{x} = \bar{y}$ принадлежит Н.А. Щучкину [4, Предложение 15]: в l -арной группе тождество $\bar{x} = \bar{y}$ выполняется тогда и только тогда, когда она является производной от группы, в которой порядок каждого элемента делит $l - 2$. Этот результат формально включает в себя и отмеченный выше бинарный случай, так как группу можно рассматривать как группу, производную от самой себя. Поэтому при $l = 2$ порядок любого элемента группы делит $l - 2 = 0$.

Э. Пост доказал [2], что l -арная группа является производной от группы тогда и только тогда, когда она обладает единицей. В [1, теорема 3.6.2, Предложение 3.7.3] установлено, что если A – неединичная группа, нетождественная подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ нет единицы. Отсюда, учитывая критерии Поста и Щучкина, следует, что в указанной l -арной группе не выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

В данной статье приводится прямое доказательство этого факта без использования перечисленных выше результатов.

1. Случай тождественной подстановки

Так как тождественная подстановка ε удовлетворяет условию $\varepsilon^l = \varepsilon$ для любого l , то $\langle A^k, []_{l, \varepsilon, k} \rangle$ – l -арная группа, l -арная операция которой определяется согласно (1), следующим образом

$$[(a_{11}, \dots, a_{1k}) \dots (a_{l1}, \dots, a_{lk})]_{l, \varepsilon, k} = (a_{11} \dots a_{l1}, \dots, a_{1k} \dots a_{lk}).$$

Следующий пример показывает, что в случае тождественности подстановки σ тождество $\bar{x} = \bar{y}$ может как выполняться, так и не выполняться в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Пример 1.1. Пусть $A = \{1, a, a^2, a^3\}$ – циклическая группа четвертого порядка. Определим на A^2 тернарную операцию $[]_{3, \varepsilon, 2}$ и 6-арную операцию $[]_{6, \varepsilon, 2}$:

$$[(a_1, a_2)(b_1, b_2)(c_1, c_2)]_{3, \varepsilon, 2} = (a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2),$$

$$[(a_1, a_2)(b_1, b_2)(c_1, c_2)(d_1, d_2)(g_1, g_2)(h_1, h_2)]_{6, \varepsilon, 2} = (a_1 b_1 c_1 d_1 g_1 h_1, a_2 b_2 c_2 d_2 g_2 h_2).$$

Ясно, что в $\langle A^2, []_{3, \varepsilon, 2} \rangle$ верно равенство $\overline{(1, 1)} = (1, 1)$.

Так как

$$[(a, a^3)(a, a^3)(a^3, a)]_{3, \varepsilon, 2} = (a^5, a^7) = (a, a^3),$$

то

$$\overline{(a, a^3)} = (a^3, a) \neq (1, 1) = \overline{(1, 1)}.$$

Следовательно в тернарной группе $\langle A^2, []_{3, \varepsilon, 2} \rangle$ тождество $\bar{x} = \bar{y}$ не выполняется.

Так как

$$[(a, b)(a, b)(a, b)(a, b)(1, 1)]_{6, \varepsilon, 2} = (a^5, b^5) = (a, b),$$

то в $\langle A^2, []_{6, \varepsilon, 2} \rangle$ верно равенство

$$\overline{(a, b)} = (1, 1).$$

для любого $(a, b) \in A^2$. Следовательно в 6-арной группе $\langle A^2, []_{6, \varepsilon, 2} \rangle$ тождество $\bar{x} = \bar{y}$ выполняется.

Замечание 1.1. Утверждения, содержащиеся в примере 1.1 можно получить, используя критерии Поста и Щучкина.

Ясно, что элемент $(1, 1)$ является единицей и в $\langle A^2, []_{3, \varepsilon, 2} \rangle$, и в $\langle A^2, []_{6, \varepsilon, 2} \rangle$.

Так как порядок элемента a группы A , равный 4, не делит $3 - 2 = 1$, то по указанному выше критерию Щучкина в тернарной группе $\langle A^2, []_{3, \varepsilon, 2} \rangle$ не выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

Так как элементы a, a^2, a^3 имеют в группе A порядки, равные соответственно 4, 2 и 4, которые делят $6 - 2 = 4$, то по указанным выше критериям Поста и Щучкина в 6-арной группе $\langle A^2, []_{6, \varepsilon, 2} \rangle$ выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

Критерий выполнимости тождества $\bar{x} = \bar{y}$ в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \varepsilon, k} \rangle$ дает следующее предложение.

Предложение 1.1. Если A – группа, ε – тождественная подстановка, то тождество $\bar{x} = \bar{y}$ выполняется в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \varepsilon, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда порядок каждого элемента группы A делит $l - 2$.

Доказательство. Так как для любого $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ верно

$$\begin{aligned} \underbrace{[\mathbf{a} \dots \mathbf{a}]_{l-1}}_{l-1} (a_1^{2-l}, \dots, a_k^{2-l})]_{l, \varepsilon, k} &= [\underbrace{(a_1, \dots, a_k) \dots (a_1, \dots, a_k)}_{l-1} (a_1^{2-l}, \dots, a_k^{2-l})]_{l, \varepsilon, k} = \\ &= (a_1^{l-1} a_1^{2-l}, \dots, a_k^{l-1} a_k^{2-l}) = (a_1, \dots, a_k) = \mathbf{a}, \end{aligned}$$

то

$$\bar{\mathbf{a}} = \overline{(a_1, \dots, a_k)} = (a_1^{2-l}, \dots, a_k^{2-l}). \quad (1.1)$$

В частности, для единицы 1 группы A верно

$$\underbrace{\overline{(1, \dots, 1)}}_k = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k.$$

Необходимость. Если в $\langle A^k, []_{l, \varepsilon, k} \rangle$ выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$, то

$$\overline{(a_1, \dots, a_k)} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k,$$

откуда и из (1.1) следует

$$(a_1^{2-l}, \dots, a_k^{2-l}) = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k.$$

Так как каждая из компонент элемента \mathbf{a} пробегает всю группу A , то $a^{2-l} = 1$ для любого $a \in A$, что равносильно $a^{l-2} = 1$.

Достаточность. Так как $a_1^{l-2} = 1, \dots, a_k^{l-2} = 1$ для любых $a_1, \dots, a_k \in A$, то

$$(a_1^{2-l}, \dots, a_k^{2-l}) = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k,$$

откуда и из (1.1) следует

$$\overline{(a_1, \dots, a_k)} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k.$$

Следовательно, в $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ выполняется тождество $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}$. Предложение доказано.

Замечание 1.2. Так как $\underbrace{(1, \dots, 1)}_k$ – единица в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \varepsilon, k} \rangle$, то

предложение 1.1 можно рассматривать как следствие указанных выше критериев Поста и Щучкина.

2. Случай нетождественной подстановки

Пример 2.1. Пусть A – неединичная группа, $(1\ 2\ 4)$ – цикл из \mathbf{S}_4 . Так как $(1\ 2\ 4)^4 = (1\ 2\ 4)$, то $\langle A^4, []_{4, (124), 4} \rangle$ – 4-арная группа с 4-арной операцией

$$\begin{aligned} & [(a_1, a_2, a_3, a_4)(b_1, b_2, b_3, b_4)(c_1, c_2, c_3, c_4)(d_1, d_2, d_3, d_4)]_{4, (124), 4} = \\ & = (a_1 b_2 c_4 d_1, a_2 b_4 c_1 d_2, a_3 b_3 c_3 d_3, a_4 b_1 c_2 d_4). \end{aligned}$$

Для неединичного элемента a положим

$$\mathbf{a}(1) = (a, 1, 1, 1), \mathbf{a}(2) = (1, a, 1, 1), \mathbf{a}(3) = (1, 1, a, 1), \mathbf{a}(4) = (1, 1, 1, a).$$

Так как

$$\begin{aligned} & [(a, 1, 1, 1)(a, 1, 1, 1)(a, 1, 1, 1)(1, a^{-1}, 1, a^{-1})]_{4, (124), 4} = (a, 1, 1, 1), \\ & [(1, a, 1, 1)(1, a, 1, 1)(1, a, 1, 1)(a^{-1}, 1, 1, a^{-1})]_{4, (124), 4} = (1, a, 1, 1), \\ & [(1, 1, a, 1)(1, 1, a, 1)(1, 1, a, 1)(1, 1, a^{-2}, 1)]_{4, (124), 4} = (1, 1, a, 1), \\ & [(1, 1, 1, a)(1, 1, 1, a)(1, 1, 1, a)(a^{-1}, a^{-1}, 1, 1)]_{4, (124), 4} = (1, 1, 1, a), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{a}(1)} &= \overline{(a, 1, 1, 1)} = (1, a^{-1}, 1, a^{-1}), \\ \overline{\mathbf{a}(2)} &= \overline{(1, a, 1, 1)} = (a^{-1}, 1, 1, a^{-1}), \\ \overline{\mathbf{a}(3)} &= \overline{(1, 1, a, 1)} = (1, 1, a^{-2}, 1), \\ \overline{\mathbf{a}(4)} &= \overline{(1, 1, 1, a)} = (a^{-1}, a^{-1}, 1, 1). \end{aligned}$$

Полученные равенства показывают, что в 4-арной группе $\langle A^4, []_{4, (124), 4} \rangle$ не выполняется тождество $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}$.

Замечание 2.1. Косые элементы в примере 2.1 можно найти, используя определение косого элемента, а можно применить предложение 1. Например, по этому предложению косой элемент для элемента

$$\mathbf{a}(1) = (a_1 = a, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{a}(1)} &= (a_{\sigma^2(1)}^{-1} a_{\sigma(1)}^{-1}, a_{\sigma^2(2)}^{-1} a_{\sigma(2)}^{-1}, a_{\sigma^2(3)}^{-1} a_{\sigma(3)}^{-1}, a_{\sigma^2(4)}^{-1} a_{\sigma(4)}^{-1}) = \\ &= (a_4^{-1} a_2^{-1}, a_1^{-1} a_4^{-1}, a_3^{-1} a_3^{-1}, a_2^{-1} a_1^{-1}) = (1, a^{-1}, 1, a^{-1}). \end{aligned}$$

Следующая теорема показывает, для любой неединичной группы и любой нетождественной подстановки, порядок которой делит $l-1$, существует l -арная группа, в которой не выполняется тождество $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

Теорема 2.1. Пусть A – неединичная группа, нетождественная подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

Доказательство. По теореме 3.6.2 из [1] $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Так как σ – нетождественная подстановка, то она разлагается в произведение независимых циклов. Пусть τ – один из таких циклов длины $r > 1$, p – один из переставляемых этим циклом символов, то есть

$$\tau = (p \tau(p) \dots \tau^{r-1}(p)).$$

Так как порядок подстановки σ равен наименьшему общему кратному длин независимых циклов из указанного разложения и по условию делит $l-1$, то порядок r цикла τ делит $l-1$, то есть $l = tr + 1$ для некоторого натурального t .

Пусть 1 – единица группы A , a произвольный элемент из A и положим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(p) &= (a_1 = 1, \dots, a_{p-1} = 1, a_p = a, a_{p+1} = 1, \dots, a_k = 1), \\ \overline{\mathbf{a}(p)} &= (b_1, \dots, b_k), \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$[\underbrace{\mathbf{a}(p) \dots \mathbf{a}(p)}_{l-1} \overline{\mathbf{a}(p)}]_{l, \sigma, k} = (u_1, \dots, u_k). \tag{2.2}$$

Тогда согласно (1),

$$u_j = a_j a_{\sigma(j)} a_{\sigma^2(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_{\sigma^{l-1}(j)}$$

для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. А так как σ^{l-1} – тождественная подстановка, то последнее равенство принимает вид

$$u_j = a_j a_{\sigma(j)} a_{\sigma^2(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_j, \tag{2.3}$$

откуда, с учётом равенства $l = tr + 1$, следует

$$u_j = a_j a_{\tau(j)} \dots a_{\tau^{r-1}(j)} a_{\tau^r(j)} a_{\tau^{r+1}(j)} \dots a_{\tau^{2r-1}(j)} \dots a_{\tau^{(t-1)r}(j)} a_{\tau^{(t-1)r+1}(j)} \dots a_{\tau^{tr-1}(j)} b_j.$$

Из последнего равенства, учитывая порядок цикла τ , получаем

$$u_j = \underbrace{a_j a_{\tau(j)} \dots a_{\tau^{r-1}(j)} \dots a_j a_{\tau(j)} \dots a_{\tau^{r-1}(j)}}_t b_j. \tag{2.4}$$

В случае $j = p$ равенство (2.4) принимает вид

$$u_p = \underbrace{a_p a_{\tau(p)} \dots a_{\tau^{r-1}(p)} \dots a_p a_{\tau(p)} \dots a_{\tau^{r-1}(p)}}_t b_p.$$

Так как символы $\tau(p), \dots, \tau^{r-1}(p)$ отличны от p , то $a_{\tau(p)} = \dots = a_{\tau^{r-1}(p)} = 1$, что с учётом условия $a_p = a$ позволяет переписать последнее равенство в виде $u_p = a^t b_p$.

А так как $\overline{\mathbf{a}(p)}$ – косой элемент для $\mathbf{a}(p)$, то

$$[\underbrace{\mathbf{a}(p) \dots \mathbf{a}(p)}_{l-1} \overline{\mathbf{a}(p)}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{a}(p). \tag{2.5}$$

Тогда из (2.2) и (2.5) следует $u_p = a_p = a$, откуда и из равенства $u_p = a^t b_p$ получаем $a = a^t b_p$. Следовательно,

$$b_p = a^{1-t}. \quad (2.6)$$

В случае $j \in \{\tau(p), \dots, \tau^{r-1}(p)\}$, верно неравенство $j \neq p$. Поэтому в (2.4) $a_j = 1$, а из символов $\tau(j), \dots, \tau^{r-1}(j)$ только один совпадает с p , а остальные совпадают с единицей группы A . Это означает, что среди элементов $a_j, a_{\tau(j)}, \dots, a_{\tau^{r-1}(j)}$, только один элемент равен a , а остальные совпадают с единицей группы A . При этом равенство (2.4) принимает вид $u_j = a^t b_j$. А так как $\overline{\mathbf{a}(p)}$ – косою элемент для $\mathbf{a}(p)$, то из (2.2) и (2.5) следует $u_j = a_j = 1$, откуда и из равенства $u_j = a^t b_j$ получаем $1 = a^t b_j$. Следовательно,

$$b_j = a^{-t}, j \in \{\tau(p), \dots, \tau^{r-1}(p)\}. \quad (2.7)$$

В случае $j \notin \{p, \tau(p), \dots, \tau^{r-1}(p)\}$ символы $j, \sigma(j), \dots, \sigma^{l-2}(j)$ отличны от p . Соответственно в правой части равенства (2.3) сомножители $a_j, a_{\sigma(j)}, a_{\sigma^2(j)}, \dots, a_{\sigma^{l-2}(j)}$ совпадают с единицей группы A , а само это равенство принимает вид $u_j = b_j$. А так как $\overline{\mathbf{a}(p)}$ – косою элемент для $\mathbf{a}(p)$, то из (2.2) и (2.5) следует $u_j = a_j = 1$, откуда и из равенства $u_j = b_j$ получаем

$$b_j = 1, j \notin \{p, \tau(p), \dots, \tau^{r-1}(p)\}. \quad (2.8)$$

Таким образом, доказано, что компоненты косою элемента (2.1) определяются равенствами (2.6) – (2.8).

Пусть теперь q – символ, переставляемый циклом τ , отличный от p ,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(q) &= (a_1 = 1, \dots, a_{q-1} = 1, a_q = a, a_{q+1} = 1, \dots, a_k = 1), \\ \overline{\mathbf{a}(q)} &= (c_1, \dots, c_k). \end{aligned} \quad (2.9)$$

По доказанному выше, компоненты в правой части (2.9) определяются следующими формулами

$$c_q = a^{1-t}, \quad (2.10)$$

$$c_j = a^{-t}, j \in \{\tau(q), \dots, \tau^{r-1}(q)\}, \quad (2.11)$$

$$c_j = 1, j \notin \{q, \tau(q), \dots, \tau^{r-1}(q)\}. \quad (2.12)$$

Согласно (2.6) $b_p = a^{1-t}$, а так как $p \in \{\tau(q), \dots, \tau^{r-1}(q)\}$, то согласно (2.11), $c_p = a^{-t}$. Если элемент a отличен от единицы группы A , то $a^{1-t} \neq a^{-t}$. Следовательно, $b_p \neq c_p$. Аналогично, $b_q \neq c_q$. Таким образом, косою элементы $\overline{\mathbf{a}(p)}$ и $\overline{\mathbf{a}(q)}$ имеют разные p -ые компоненты и разные q -ые компоненты, то есть $\overline{\mathbf{a}(p)} \neq \overline{\mathbf{a}(q)}$. Это означает, что в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$. Теорема доказана.

Замечание 2.2. Доказывая теорему 2.1, можно было бы вначале, воспользовавшись предложением 1, записать компоненты косою элемента $\overline{\mathbf{a}(p)} = (b_1, \dots, b_k)$ в виде

$$b_j = a_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1}, j = 1, 2, \dots, k.$$

А затем, как и в доказательстве теоремы 2.1 рассмотреть три случая. При этом вычисления стали бы более громоздкими, так как в них присутствовали бы обратные элементы.

Замечание 2.3. Для нахождения косых элементов $\overline{\mathbf{a}(1)}$, $\overline{\mathbf{a}(2)}$ и $\overline{\mathbf{a}(4)}$ в примере 2.1 можно воспользоваться формулами (2.6) – (2.8) или (2.10) – (2.12), считая в них $t = 1$.

В приведённых ниже следствиях все циклы имеют неединичную длину.

Считая в теореме 2.1 подстановку σ циклом, порядок которого делит $l - 1$, получим

Следствие 2.1. Пусть A – неединичная группа, порядок цикла σ из \mathbf{S}_k делит $l - 1$. Тогда в l -арной группе $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

Считая в следствии 2.1 σ – циклом длины k , получим

Следствие 2.2. Пусть A – неединичная группа, σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k . Тогда в $(k + 1)$ -арной группе $\langle A^k, [\]_{k+1, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

Полагая в следствии 2.2 $\sigma = (1\ 2 \dots k)$, получим

Следствие 2.3. Если A – неединичная группа, то в l -арной группе $\langle A^k, [\]_{k+1, (1\ 2 \dots k), k} \rangle$ не выполняется тождество $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

Полагая в следствии 2.3 $k = 2$, получим

Следствие 2.4. Если A – неединичная группа, то в тернарной группе $\langle A^2, [\]_{3, (1\ 2), 2} \rangle$ не выполняется тождество $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

3. Обобщения

Обобщим теорему 2.1, рассматривая вместо l -арной группы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ ее обобщение – полиадическую группу $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа,

$$\mathbf{x}_i = (a_{i1}, \dots, a_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l,$$

то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ может быть определена следующим образом [5]:

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

где для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

В [5, теорема 4.1] было доказано, что если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является l -арной группой.

Для формулировки обобщающего результата понадобится ещё одна теорема.

Теорема 3.1 [6, теорема 4.7]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная группа, для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка $\sigma^{s(n-1)}$ является тождественной, а для некоторого $i = 1, \dots, s - 1$ подстановка $\sigma^{i(n-1)}$ не является тождественной. Тогда в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет n -полуединиц, в частности единиц.

Теорема 3.1, критерии Поста и Щучкина позволяют сформулировать следующий результат, обобщающий теорему 2.1.

Теорема 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная группа, для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка $\sigma^{s(n-1)}$ является тождественной, а для некоторого $i = 1, \dots, s - 1$ подстановка $\sigma^{i(n-1)}$ не является тождественной. Тогда в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

Полагая в теореме 3.2 $i = 1$, получим

Следствие 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка $\sigma^{s(n-1)}$ является тождественной, а подстановка σ^{n-1} не является тождественной. Тогда в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

Полагая в теореме 3.2 $n = 2, i = 1$ или в следствии 3.1 $n = 2$, получим теорему 2.1, так как при $n = 2$ операция $[\]_{l, \sigma, k}$ арности $l = s + 1$ совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$.

Полагая в следствии 3.1 $n = 3$, получим

Следствие 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная тернарная группа, для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{2s} является тождественной, а подстановка σ^2 не является тождественной. Тогда в $(2s + 1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

Сформулируем ещё четыре следствия.

Следствие 3.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, σ – подстановка из \mathbf{S}_k порядка $l - 1 = s(n - 1)$, где $s \geq 2$. Тогда в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

Следствие 3.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, σ – цикл из \mathbf{S}_k длины $l - 1 = s(n - 1)$, где $s \geq 2$. Тогда в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

Следствие 3.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная тернарная группа, σ – подстановка из \mathbf{S}_k порядка $2s$, где $s \geq 2$. Тогда в $(2s + 1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

Следствие 3.6. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная тернарная группа, σ – цикл из \mathbf{S}_k длины $2s$, где $s \geq 2$. Тогда в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

Полагая в следствии 3.4 $k = s(n - 1), \sigma = (1\ 2 \dots s(n - 1))$, получим

Следствие 3.7. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, $s \geq 2$. Тогда в $(s(n - 1) + 1)$ -арной группе $\langle A^{s(n-1)}, \eta_{s, (1\ 2 \dots s(n-1)), s(n-1)} \rangle$ не выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

Полагая в следствии 3.5 $k = 2s, \sigma = (1\ 2 \dots 2s)$ или в следствии 3.7 $n = 3$, получим

Следствие 3.8. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная тернарная группа, $s \geq 2$. Тогда в $(2s + 1)$ -арной группе $\langle A^{2s}, \eta_{s, (1\ 2 \dots 2s), 2s} \rangle$ не выполняется тождество $\bar{x} = \bar{y}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. Многочестные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
2. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P.208 – 350.
3. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
4. Щучкин, Н. А. Введение в теорию n -групп / Н. А. Щучкин. – Волгоград : ООО Принт, 2019. – 236 с.

5. Гальмак, А. М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.

6. Гальмак, А. М. О единицах и их обобщениях в полиадических группоидах специального вида. II / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1. – С. 85–88.

Поступила в редакцию 30.05.2023 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A. M. ON IDENTITY $\bar{x} = \bar{y}$ IN POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM

The article deals with the study of polyadic groups of special form. In particular there has been proved a theorem stating that for any non one-element group A and any nonidentity substitution σ , the order of which divides $l-1$, in the l -ary group $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$, the identity $\bar{x} = \bar{y}$ is not satisfied.

Keywords: group, polyadic group of special form, l -ary group, substitution, skew element, identity.

УДК 517.956.32

ФОРМУЛЫ РИМАНА ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЩЕГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ

Ф. Е. Ломовцев

доктор физико-математических наук
Белорусский государственный университет

Известным методом Римана и новым методом компенсации граничного режима правой частью телеграфного уравнения получены формулы Римана единственного и устойчивого классического решения первой смешанной задачи для линейного неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. Установлены достаточные условия корректности этой смешанной задачи для классических решений.

Ключевые слова: первая смешанная задача, телеграфное уравнение, достаточное требование гладкости, достаточное условие согласования.

Введение

Ранее в статье [1] были получены явные формулы классического решения, часть критерия корректности и доказана теорема существования единственного и устойчивого классического решения первой смешанной задачи для общего неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. В настоящей работе впервые выведены явные обобщенные формулы типа Римана классического решения и получены достаточные условия корректности по Адамару этой первой смешанной задачи в первой четверти плоскости (теорема 1). Необходимость установленных требований гладкости и условий согласования во множестве классических решений будет обоснована в продолжении настоящей статьи.

Основная часть

В первой четверти \dot{G}_∞ решить и вывести критерий корректности задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x,t) \equiv u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) + b(x,t)u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) + \\ + q(x,t)u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \end{aligned} \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = \mu(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

где коэффициенты уравнения a, b, c, q – вещественные функции и исходные данные задачи f, φ, ψ, μ – заданные функции своих переменных x и t . Количество нижних индексов функций мы обозначаем порядки их соответствующих частных производных.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, \mathbb{R}^2 – плоскость и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Определение 1. Классическим решением смешанной задачи (1)–(3) называется непрерывная ограниченная функция с непрерывными и ограниченными первыми и вторыми частными производными на $G_\infty = [0, +\infty[\times]0, +\infty[$, т.е. $u \in C^2(G_\infty)$, удовлетворяющая уравнению (1) на \dot{G}_∞ в обычном смысле, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле значений пределов $u(\dot{x}, \dot{t})$ и ее производной $u_i(\dot{x}, \dot{t})$ по i во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, которые стремятся к соответствующим граничным точкам (x, t) .

Требуется найти в явном виде классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$ первой смешанной задачи (1)–(3) на \dot{G}_∞ и установить критерий корректности на данные f , φ , ψ и μ для ее однозначной везде разрешимости.

Из постановки смешанной задачи и определения 1 классических решений вытекают следующие необходимые условия гладкости данных

$$f \in C(G_\infty), \varphi \in C^2[0, +\infty[, \psi \in C^1[0, +\infty[, \mu \in C^2[0, +\infty[. \quad (4)$$

Ниже в теореме 1 мы возьмем дополнительные к $f \in C(G_\infty)$ достаточные требования гладкости (10) из [2].

Полагая $t=0$ в граничном режиме (3), первой и второй производных по t от граничного режима (3) с помощью начальных условий (2) при $x=0$ и уравнения (1) при $x=t=0$ выводим необходимые условия согласования

$$\varphi(0) = \mu(0), \psi(0) = \mu'(0),$$

$$S \equiv f(0,0) + a^2(0,0)\varphi''(0) - b(0,0)\psi(0) - c(0,0)\varphi'(0) - q(0,0)\varphi(0) = \mu''(0). \quad (5)$$

Уравнение (1) на G_∞ имеет характеристические уравнения

$$dx = (-1)^i a(x,t)dt, \quad i=1, 2, \quad (6)$$

которым в плоскости \mathbb{R}^2 переменных x и t соответствуют два различных семейства неявных характеристик $g_i(x,t) = C_i$, $C_i \in \mathbb{R}$, $i=1, 2$, [1, 3]. Если коэффициент $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, то переменная t на характеристике $g_1(x,t) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, строго убывает, а на характеристике $g_2(x,t) = C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$, строго возрастает вместе с ростом x в правой плоскости Oxt . Поэтому у неявных функций $y_i = g_i(x,t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$, существуют явные строго монотонные обратные функции $x = h_i\{y_i, t\}$, $t \geq 0$, и $t = h^{(i)}[x, y_i]$, $x \geq 0$, $i=1, 2$, для которых на G_∞ верны следующие тождества обращения из [1]:

$$g_i(h_i\{y_i, t\}, t) = y_i, t \geq 0, \quad h_i\{g_i(x, t), t\} = x, x \geq 0, i=1, 2, \quad (7)$$

$$g_i(x, h^{(i)}[x, y_i]) = y_i, x \geq 0, \quad h^{(i)}[x, g_i(x, t)] = t, t \geq 0, i=1, 2, \quad (8)$$

$$h_i\{y_i, h^{(i)}[x, y_i]\} = x, x \geq 0, \quad h^{(i)}[h_i\{y_i, t\}, y_i] = t, t \geq 0, i=1, 2. \quad (9)$$

Если коэффициент $a \in C^2(G_\infty)$, то функции g_i , h_i , $h^{(i)}$ дважды непрерывно дифференцируемы по x, t, y_i , $i=1, 2$, на G_∞ ввиду статьи [1].

Замечание 1. В случае постоянного коэффициента $a(x,t) = a = \text{const} > 0$ ими служат функции: $g_1(x,t) = x + at$, $g_2(x,t) = x - at$, $h_1\{y_1, t\} = y_1 - at$, $h_2\{y_2, t\} = y_2 + at$, $h^{(1)}[x, y_1] = (x - y_2)/a$ из диссертации [4].

Определение 2. Характеристика $g_2(x,t) = g_2(0,0)$, в которой коэффициент $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, называется *критической* для уравнения (1) в первой четверти плоскости G_∞ .

Характеристика $x = at$ делит четверть плоскости G_∞ на множества

$$G_- = \{(x,t) \in G_\infty : g_2(x,t) > g_2(0,0)\}, \quad G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : g_2(x,t) \leq g_2(0,0)\}.$$

Если в уравнении (1) продолжить функцию $a(x,t)$ четным образом на $x < 0$, то характеристики $g_i(x,t) = C_i$, $i = 1, 2$, будут заданы на верхней полуплоскости G плоскости Oxt .

Обобщенные формулы Римана классического решения содержат

Теорема 1 [5]. Пусть коэффициенты $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$, $a \in C^2(G_\infty)$, $b, c, q \in C^1(G_\infty)$. Первая смешанная задача (1)–(3) в \dot{G}_∞ имеет единственное и устойчивое по φ, ψ, f, μ классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$ тогда, когда верны требования гладкости и условия согласования (4), (5),

$$H_i(x,t) \equiv \int_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t), \tau\}|, \tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t), \tau\}}{\partial g_i} d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Классическим решением первой смешанной задачи (1)–(3) в \dot{G}_∞ является

$$\begin{aligned} u_-(x,t) &= \frac{(auv)(h_2\{g_2(x,t), 0\}, 0) + (auv)(h_1\{g_1(x,t), 0\}, 0)}{2a(x,t)} + \\ &+ \frac{1}{2a(x,t)} \int_{h_2\{g_2(x,t), 0\}}^{h_1\{g_1(x,t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)] ds + \\ &+ \frac{1}{2a(x,t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x,t), \tau\}} f(s, \tau)v(s, \tau; x, t) ds, \quad (x,t) \in G_-, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_+(x,t) &= \frac{(auv)(h_1\{g_1(x,t), 0\}, 0) - (auv)(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\}, 0)}{2a(x,t)} + \\ &+ \frac{1}{2a(x,t)} \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x,t)]\}, 0\}}^{h_1\{g_1(x,t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)] ds + \\ &+ \frac{1}{2a(x,t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t), \tau\}}^{h_1\{g_1(x,t), \tau\}} \check{f}(|s|, \tau)v(|s|, \tau; |x|, t) ds + \mu(t) - \\ &- \frac{1}{2a(0,t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0,t), \tau\}}^{h_1\{g_1(0,t), \tau\}} \check{f}(|s|, \tau)v(|s|, \tau; 0, t) ds, \quad (x,t) \in G_+, \end{aligned} \quad (12)$$

где функции $\check{f}(x,t) = f(x,t) - f_\mu(x,t) + f^{(0)}(x,t)$, $f_\mu(x,t) = \mathcal{L}\mu(t)$, $f^{(0)}(x,t)$ из решения системы (36) интегрального уравнения Вольтерра второго рода и линейного алгебраического уравнения, а функции Римана $v(s, \tau) = v(s, \tau; x, t)$ – классические решения задач Гурса (19), (22) в G_- и (29), (30) в G_+ .

Доказательство. Достаточность. Сначала выведем формулы (11) и (12) формального решения задачи (1)–(3) на G_- и G_+ . Затем установим его дважды непрерывную дифференцируемость, единственность и устойчивость.

1) **Множество G_- .** Уравнение (1) для любых функций $u \in C^2(G_-)$ умножаем на любые функции $v \in C^2(G_-)$ и, используя очевидные равенства

$$\begin{aligned} u_t v &= (u_t v)_t - u_t v_t = (u_t v)_t - (u v_t)_t + u v_{tt}, \\ a^2 u_{xx} v &= (u_x a^2 v)_x - u_x (a^2 v)_x = (u_x a^2 v)_x - (u (a^2 v)_x)_x + u (a^2 v)_{xx}, \\ b u_t v &= (u b v)_t - u (b v)_t, \quad c u_x v = (u c v)_x - u (c v)_x, \end{aligned}$$

приходим к тождеству

$$(\mathcal{L}u)v - u(\mathcal{M}v) = \partial H(u, v) / \partial t + \partial K(u, v) / \partial x \quad \forall u, v \in C^2(G_-), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}v &= v_{tt}(x, t) - (a^2(x, t)v(x, t))_{xx} - (b(x, t)v(x, t))_t - (c(x, t)v(x, t))_x + q(x, t)v(x, t), \\ H(u, v) &= u_t v - u v_t + b u v = (u v)_t - u[2v_t - b v], \end{aligned} \quad (14)$$

$$K(u, v) = -u_x a^2 v + u (a^2 v)_x + c u v = -(a^2 u v)_x + u[2(a^2 v)_x + c v]. \quad (15)$$

В силу левой ориентации плоскости $O\tau s$ на рис. 1 по формуле Грина двойной интеграл от тождества (13) по ΔMPQ в G_- с вершинами $M(x, t) \in G_-$ и основания $P(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0)$, $Q(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0)$ равен

$$\begin{aligned} \int_{\Delta MPQ} [(\mathcal{L}u)v - u(\mathcal{M}v)] ds d\tau &= \int_{\Delta MPQ} \left[\frac{\partial H(u, v)}{\partial \tau} + \frac{\partial K(u, v)}{\partial s} \right] ds d\tau = \\ &= \int_{l^+} [K(u, v) d\tau - H(u, v) ds], \end{aligned} \quad (16)$$

где $l^+ = QM \cup MP \cup PQ$ – контур ΔMPQ с положительным обходом.

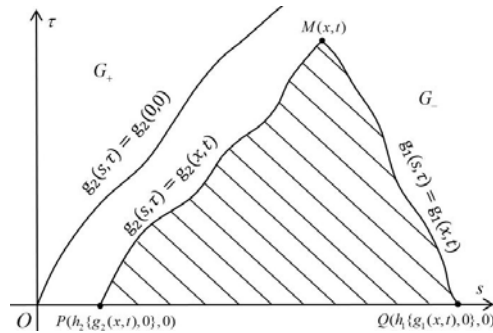


Рисунок 1. Криволинейный характеристический треугольник ΔMPQ в G_-

В криволинейном интеграле (16) с помощью выражений (14), (15), уравнения характеристики из (6) при $i=1$ и очевидных равенств:

$$(uv)_\tau a = (auv)_\tau - a_\tau uv, \quad (a^2 uv)_s (1/a) = (auv)_s - a^2 uv (1/a)_s = (auv)_s + a_s uv$$

вычисляем интеграл вдоль кривой QM уравнения $g_1(s, \tau) = g_1(x, t)$:

$$\begin{aligned}
\int_Q^M [K(u, v) d\tau - H(u, v) ds] &= \int_Q^M [(uv)_\tau ad\tau + (a^2uv)_s (1/a) ds] + \\
&+ \int_Q^M (u[2v_\tau - bv] ds + u[2(a^2v)_s + cv] d\tau) = \int_Q^M d(auv) + \\
&+ \int_Q^M (u[2v_\tau + (a_s - b)v] ds + u[2(a^2v)_s + (c - a_\tau)v] d\tau) = \\
&= (auv)(M) - (auv)(Q) - \int_0^t u \{4av_\tau - [ab - 4a_\tau + c]v\} d\tau. \quad (17)
\end{aligned}$$

Здесь на характеристике QM при $i=1$ мы воспользовались характеристическим дифференциальным уравнением из (6) и для всех функций $w \in C^1(G_\infty)$ новым представлением из

$$w_s(s, \tau) = (-1)^i w_\tau(s, \tau) / a(s, \tau), \quad i=1, 2.$$

Поскольку на каждой из кривых QM и MP переменные $s = s_i(\tau)$, $\tau = \tau_i(s)$ взаимно зависимы, т.е. соответственно при $i=1$ и $i=2$ переменные $s = h_i\{g_i(x, t), \tau\}$, $\tau = h^{(i)}[s, g_i(x, t)]$ согласно формулам обращения (7)–(9), то эти представления вытекают из формул первых производных:

$$\begin{aligned}
w_s(s, \tau(s)) &= w_s(s, \tau)|_{\tau=\tau(s)} + w_\tau(s, \tau)|_{\tau=\tau(s)} \tau'(s) = \\
&= w_s(s, \tau)|_{\tau=\tau(s)} + (-1)^i w_\tau(s, \tau)|_{\tau=\tau(s)} / a(s, \tau), \\
w_\tau(s(\tau), \tau) &= w_\tau(s, \tau)|_{s=s(\tau)} + w_s(s, \tau)|_{s=s(\tau)} s'(\tau) = \\
&= w_\tau(s, \tau)|_{s=s(\tau)} + (-1)^i w_s(s, \tau)|_{s=s(\tau)} a(s, \tau),
\end{aligned}$$

так как $\tau'(s) = (-1)^i / a(s, \tau)$, $s'(\tau) = (-1)^i a(s, \tau)$, $i=1, 2$, также ввиду формул (6). В последнем равенстве (17) для сведения криволинейного интеграла второго типа вдоль QM к обыкновенному определенному интегралу мы применили параметрическое представление кривой QM : $s = s_1(\tau_1) = h_1\{g_1(x, t), \tau_1\}$, $\tau_1 = \tau$, $0 \leq \tau \leq t$.

Используя характеристическое уравнение из (6) при $i=2$, в (16) аналогично берем интеграл вдоль MP с уравнением $g_2(s, \tau) = g_2(x, t)$:

$$\begin{aligned}
\int_M^P [K(u, v) d\tau - H(u, v) ds] &= - \int_M^P [(uv)_\tau ad\tau + (a^2uv)_s (1/a) ds] + \\
&+ \int_M^P (u[2v_\tau - bv] ds + u[2(a^2v)_s + cv] d\tau) = - \int_M^P d(auv) + \\
&+ \int_M^P (u[2v_\tau - (a_s + b)v] ds + u[2(a^2v)_s + (c + a_\tau)v] d\tau) = \\
&= (auv)(M) - (auv)(P) - \int_0^t u \{4av_\tau - [ab - 4a_\tau - c]v\} d\tau. \quad (18)
\end{aligned}$$

Здесь при $i = 2$ мы применили характеристическое дифференциальное уравнение из (6) и указанное выше представление $w_3(s, \tau) = w_2(s, \tau) / a(s, \tau)$. В последнем равенстве из (18) для сведения криволинейного интеграла второго типа вдоль характеристики MP к обыкновенному определенному интегралу мы также воспользовались параметрическим представлением кривой MP : $s = s_2(\tau_2) = h_2\{g_2(x, t), \tau_2\}$, $\tau_2 = \tau$, $0 \leq \tau \leq t$.

Пусть функция $v(s, \tau) = v(s, \tau; x, t)$ с параметрами (x, t) является классическим решением однородного формально сопряженного уравнения

$$\mathcal{M}v(s, \tau) = 0, \quad (s, \tau) \in \Delta MPQ, \quad (19)$$

соответственно с условиями на характеристиках QM и MP :

$$\begin{aligned} 4a(s, \tau)v_\tau(s, \tau) - [a(s, \tau)b(s, \tau) - 4a_\tau(s, \tau) + c(s, \tau)]v(s, \tau) &= 0, \\ 4a(s, \tau)v_\tau(s, \tau) - [a(s, \tau)b(s, \tau) - 4a_\tau(s, \tau) - c(s, \tau)]v(s, \tau) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

из определенных интегралов в (17) и (18) и условием согласования

$$v(M) = 1. \quad (21)$$

Условия (20), (21) равносильны двум согласованным условиям Гурса

$$\begin{aligned} v(s, \tau) &= \exp \left\{ \int_t^\tau k_1(h_1\{g_1(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_1(s, \tau) = g_1(x, t), \\ v(s, \tau) &= \exp \left\{ \int_t^\tau k_2(h_2\{g_2(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_2(s, \tau) = g_2(x, t), \quad \tau \in [0, t], \end{aligned} \quad (22)$$

где функции $k_1(s, \tau) = \{a(s, \tau)b(s, \tau) - 4a_\tau(s, \tau) + c(s, \tau)\} / 4a(s, \tau)$ на кривой QM и $k_2(s, \tau) = \{a(s, \tau)b(s, \tau) - 4a_\tau(s, \tau) - c(s, \tau)\} / 4a(s, \tau)$ на кривой MP . Общеизвестно, что задача Гурса (19), (22) с коэффициентами $a \in C^2(G_-)$, $b, c, q \in C^1(G_-)$ всегда имеет единственное классическое решение $v \in C^2(G_- \cap \Delta MPQ)$, которое общепринято называть функцией Римана для задачи Коши (1), (2) на G_- . В общем случае функция Римана однозначно находится методом последовательных приближений [6, с. 129–135].

В формуле (16) полагаем $\mathcal{L}u(s, \tau) = f(s, \tau)$, $\mathcal{M}v(s, \tau) = 0$ на ΔMPQ , и в силу соотношений (19)–(22) согласно (17) и (18) получаем формулу решения

$$\begin{aligned} u_-(x, t) &= \frac{(auv)(P) + (auv)(Q)}{2a(x, t)} + \frac{1}{2a(x, t)} \int_P^Q [H(u, v)ds - K(u, v)d\tau] + \\ &+ \frac{1}{2a(x, t)} \int_{\Delta MPQ} f(s, \tau)v(s, \tau; x, t)dsd\tau, \quad (x, t) \in G_-. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь в интеграле по отрезку PQ , где $a \in C^2(G_-)$, $b, c \in C^1(G_-)$ и $d\tau = 0$, подынтегральные функции H и K однозначно определяются начальными условиями (2) (см. рис. 1). Если еще двойной интеграл по ΔMPQ записать в виде повторных интегралов, то в (23) сумма этих двух интегралов будет равна

$$\frac{1}{2a(x, t)} \int_{h_2\{g_2(x, t), 0\}}^{h_1\{g_1(x, t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)]ds +$$

$$+\frac{1}{2a(x,t)}\int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} f(s,\tau)v(s,\tau;x,t)ds, (x,t) \in G_-. \quad (24)$$

Первое слагаемое из (23) содержит значения $u(h_2\{g_2(x,t),0\},0) = \varphi(h_2\{g_2(x,t),0\})$ и $u(h_1\{g_1(x,t),0\},0) = \varphi(h_1\{g_1(x,t),0\})$. Формула (23) с интегралами (24) вместо двух последних интегралов становится формулой (11), которая обобщает формулу Римана из [6, с. 139] со скорости $a=1$ на скорость $a(x,t)$ волны на полупрямой $x \geq 0$ носителя данных φ и ψ .

Теперь убедимся в дважды непрерывной дифференцируемости функции (11) на G_- . Если коэффициенты $a \in C^2(G_-)$, $b \in C^1(G_-)$, то требований $\varphi \in C^2[0,+\infty[$, $\psi \in C^1[0,+\infty[$ из (4) достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости первых двух слагаемых с интегралом по отрезку PQ в (11) на G_- , так как существует единственная функция Римана $v \in C^2(G_- \cap \Delta MPQ)$ [6, с. 129–135]. Для $f \in C(G_\infty)$ достаточность гладкости (10) для дважды непрерывной дифференцируемости на G_- последнего интеграла в (11) следует, например, из достаточности требований (10) на f для классического решения задачи Коши (1), (2) на G_- в теореме 2 из [1].

2) **Множество G_+** . Пусть $\hat{a}, \hat{b}, \hat{q}, \hat{f}$ – четные продолжения и \tilde{c} – нечетное продолжение по x коэффициентов a, b, c, q и правой части f уравнения (1) на все $x < 0$. В $G = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ ищем решение \tilde{u} задачи Коши

$$\hat{\mathcal{L}}\tilde{u} \equiv \tilde{u}_{tt} - \hat{a}^2(x,t)\tilde{u}_{xx} + \hat{b}(x,t)\tilde{u}_t + \tilde{c}(x,t)\tilde{u}_x(x,t) + \hat{q}(x,t)\tilde{u} = \hat{f}(x,t), (x,t) \in G, \quad (25)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \varphi(x), \tilde{u}_t|_{t=0} = \psi(x), x \in \mathbb{R}, \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[, \quad (26)$$

где $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ – нечетные продолжения соответственно функций $\varphi \in C^2[0,+\infty[$, $\psi \in C^1[0,+\infty[$ на $x < 0$, $\hat{f}(x,t) = \hat{f}(x,t) - \hat{f}_\mu(x,t) + \hat{f}^{(0)}(x,t)$, $\hat{\mathcal{L}}\mu(t) = \hat{f}_\mu(x,t)$ и правило выбора четной по x функции $\hat{f}^{(0)}(x,t)$ будет указано ниже. Если правая часть $f \in C(G_\infty)$, то, очевидно, $\hat{f} \in C(G)$. В формуле решения u_+ из (12) первой смешанной задачи (1)–(3) этих продолжений не будет.

Если из обеих частей уравнения (25) вычтем слагаемое $\tilde{c}(x,t)\tilde{u}_x(x,t)$, то придем к уравнению вида (25) с коэффициентом $\tilde{c}(x,t) \equiv 0$ и новой правой частью $\hat{f}(x,t) = \hat{f}(x,t) - \tilde{c}(x,t)\tilde{u}_x(x,t) \in C(G_\infty)$, в котором вычитаемое $c(x,t)u_x(x,t) \in C^1(G_\infty)$ непрерывно дифференцируемо, и поэтому оно удовлетворяет интегральным требованиям гладкости (10) на G_∞ . Благодаря линейности этой задачи Коши ее решение представимо в виде суммы $\tilde{u}(x,t) = \tilde{u}_0(x,t) + \hat{u}_1(x,t)$ решения \tilde{u}_0 задачи Коши (25), (26) при $\hat{f} = 0$, $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$ и решения \hat{u}_1 задачи Коши (25)–(26) при $\hat{f} \neq 0$, $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$. Первая задача Коши на G_∞ с граничным режимом (3) при $\mu = 0$ становится первой смешанной задачей (1)–(3) на G_∞ . С одной стороны, по теореме 2

статьи [1] существует единственное классическое решение $\tilde{u}_0 \in C^2(G_\infty)$ этой первой смешанной задачи (1)–(3) на G_∞ . Первая задача Коши на G_∞ равносильна этой первой смешанной задаче на G_∞ , так как решение первой задачи Коши по формуле (4) из [7], т.е. по формуле (11) из теоремы 1, но с крышками над a , b , v , равно $\tilde{u}_0(0,t)=0, t \geq 0$ [6, с. 68–69]. Ниже, перед леммой 1, показано, что характеристические треугольники ΔMPQ с вершинами $M(0,t), t \geq 0$, на оси Ot являются "криволинейными" равнобедренными. Следовательно, вершины P и Q основания PQ треугольника ΔMPQ симметричны относительно оси Ot , начальные данные $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ нечетны по x , функции \hat{a} , \hat{b} , \hat{v} четны по s , и поэтому первые два слагаемые в (11) обращаются в ноль. Третье слагаемое в формуле (11) вида двойного повторного интеграла по ΔMPQ при $f = \hat{f} = 0$ тоже равно нулю.

Из условий (5) при $\tilde{c} \equiv 0, \hat{f} = 0, \mu = 0$ для \tilde{u}_0 на G_∞ выводим условия

$$\varphi(0) = 0, \varphi''(0) = 0, \psi(0) = 0. \tag{27}$$

Известно, что начальные данные $\varphi \in C^2[0, +\infty[$, $\psi \in C^1[0, +\infty[$ с условиями (27) всегда допускают на $x < 0$ гладкие нечетные продолжения $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$, $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$. Это следует из леммы 1 в [3]. Действительно, из нечетности по x продолжений $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ имеем их непрерывность при $x = 0$, так как $\varphi(0) = 0, \psi(0) = 0$ в (27). Производные $\tilde{\varphi}'(x)$, $\tilde{\psi}'(x)$ от этих нечетных данных четны и, следовательно, непрерывны при $x = 0$. Непрерывность второй производной $\tilde{\varphi}''(x)$ при $x = 0$ обеспечивает ее нечетность по x и значение $\varphi''(0) = 0$ из (27). Поэтому, с другой стороны, первая задача Коши для уравнения (25) с $\tilde{c} \equiv 0$ и $\hat{f} \equiv 0$ при начальных данных $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R})$, $\tilde{\psi} \in C^1(\mathbb{R})$ в (26) на G имеет единственное решение $\tilde{u}_0 \in C^1(G)$ [7]. Действительно, нечетная по x функция $\tilde{u}_0(x,t)$ непрерывна на G , так как $\tilde{u}_0(0,t) = 0$, и четная по x ее производная $(\tilde{u}_0)_x(x,t)$ непрерывна на G . Для сокращения доказательства теоремы 1 можно было положить $\tilde{c} \equiv 0$ в уравнении (25).

Задача Коши при $\hat{f} \neq 0, \tilde{\varphi} \equiv 0, \tilde{\psi} \equiv 0$ на G имеет одно классическое решение вида двойного интеграла $\hat{u}_1(x,t) = \hat{F}(x,t) \in C^2(G_\infty)$ из [7] при $f = \hat{f}$:

$$\hat{F}(x,t) = \frac{1}{2\hat{a}(x,t)} \int_{\Delta MPQ} \hat{f}(s,\tau) \hat{v}(s,\tau) ds d\tau = \frac{1}{2\hat{a}(x,t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \hat{f}(s,\tau) \hat{v}(s,\tau) ds,$$

удовлетворяющий однородным начальным данным $\tilde{\varphi} = 0, \tilde{\psi} = 0$, потому что этот двойной интеграл и его первая производная по t при $t = 0$ равны $\hat{F}(x,0) = 0, \hat{F}_t(x,0) = 0$. Четность по x этого интеграла \hat{F} подтверждается четностью по x коэффициента \hat{a} , четностью по s его подинтегральной функции и равнобедренностью "криволинейных" треугольников ΔMPQ с вершинами $M(0,t), t \geq 0$, на оси Ot . Ниже в лемме 1 будет показана четность по s функции Римана $\hat{v} = \hat{v}(s,\tau)$ на G . Таким образом, четное по x решение $\hat{u}_1(x,t) = \hat{F}(x,t)$

всегда непрерывно по x на G , т.е. $\hat{u}_1 \in C(G_\infty)$. Более того, согласно теореме 2 из [1] при $\varphi = \psi = 0$, $\mu(t) = \hat{F}(0, t) \in C^2[0, +\infty[$ решение \hat{F} дважды непрерывно дифференцируемо в первой четверти $\hat{u}_1(x, t) = \hat{F}(x, t) \in C^2(G_\infty)$, а в силу его четности по x и во второй четверти плоскости. Здесь применение теоремы 2 на G_∞ из [1] основано на справедливости не только первых двух, но и третьего условия согласования из (5) при $\varphi = \psi = 0$, $f = \tilde{f} \neq 0$, $c \neq 0$ и $\mu \neq 0$, а также интегральных требований гладкости (10) на f . От переноса слагаемого \tilde{u}_x из левой части в правую часть уравнения (25) оно фактически не меняется. В дальнейшем мы увидим, что на гладкость правой части f уравнения (1) слагаемые $-f_\mu$, $f^{(0)}$ правой части \tilde{f} уравнения (25) фактически не влияют, так как при решении задачи (1)–(3) нашим новым методом компенсации они сокращаются.

В итоге мы нашли суммарное решение $\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}_0(x, t) + \hat{u}_1(x, t) \in C(G)$, $C^2(G_\infty)$ вспомогательной задачи Коши (25), (26) на G . Отсюда и из четности по x продолжений коэффициентов \hat{a} , \hat{b} , \hat{q} и правой части \hat{f} на все $x < 0$ следует, что во второй четверти плоскости это решение $\tilde{u} \in C^2(G \setminus G_\infty)$.

Интегрируя аналог тождества (13) для любых $\tilde{u}, \hat{v} \in C^2(G_\infty)$, $C^2(G \setminus G_\infty)$, $C(G)$ по ΔMPQ с вершиной $M(x, t) \in G_+$ в верхней полуплоскости $Os\tau$, мы имеем аналог формулы (23) решения задачи Коши (25), (26):

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) = & \frac{(\hat{a}\tilde{u}\hat{v})(P) + (\hat{a}\tilde{u}\hat{v})(Q)}{2\hat{a}(x, t)} + \frac{1}{2\hat{a}(x, t)} \int_P^Q [H(\tilde{u}, \hat{v})ds - K(\tilde{u}, \hat{v})d\tau] + \\ & + \frac{1}{2\hat{a}(x, t)} \int_{\Delta MPQ} \hat{f}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau; x, t)dsd\tau, \quad (x, t) \in G = \mathbb{R} \times]0, +\infty[. \end{aligned} \quad (28)$$

Аналогично множеству G_- в криволинейном интеграле по PQ из (28) подынтегральные функции H и K однозначно определяются начальными данными $\tilde{\varphi} \in C^2(G)$, $\tilde{\psi} \in C^2(G)$ и функцией Римана \hat{v} (см. рис. 2).

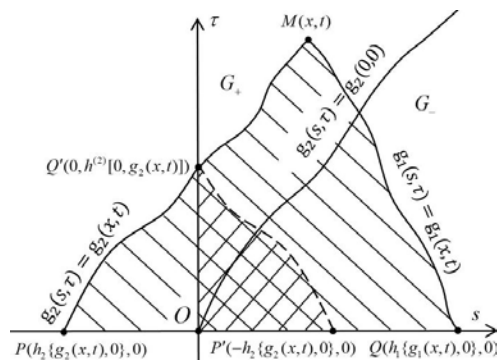


Рисунок 2. Криволинейные характеристический и критический треугольники ΔMPQ и $\Delta Q'PP'$ в G .

Эта функция Римана на G_∞ является решением задачи Гурса:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\hat{v}(s, \tau) \equiv \hat{v}_{\tau\tau}(s, \tau) - (\hat{a}^2(s, \tau)\hat{v}(s, \tau))_{ss} - (\hat{b}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau))_\tau - \\ - (\tilde{c}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau))_s + \hat{q}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau) = 0, \quad (s, \tau) \in \Delta MPQ, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\hat{v}(s, \tau) = \exp \left\{ \int_t^\tau \tilde{k}_1(h_1\{g_1(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_1(s, \tau) = g_1(x, t),$$

$$\hat{v}(s, \tau) = \exp \left\{ \int_t^\tau \tilde{k}_2(h_2\{g_2(x, t), \rho\}, \rho) d\rho \right\}, \quad g_2(s, \tau) = g_2(x, t), \quad \tau \in [0, t], \quad (30)$$

аналогичной задаче Гурса (19), (22) и с функциями $\tilde{k}_1(s, \tau)$ на кривой QM и $\tilde{k}_2(s, \tau)$ на кривой MP , соответственно равными функциям $k_1(s, \tau)$ и $k_2(s, \tau)$, в которых коэффициенты a, b, q заменены на их четные продолжения $\hat{a}, \hat{b}, \hat{q}$, а коэффициент c – на нечетное продолжение \tilde{c} по x с $x \geq 0$ на $x < 0$. Формально сопряженный дифференциальный оператор \mathcal{M} равен оператору M с коэффициентами $\hat{a}, \hat{b}, \tilde{c}, \hat{q}$ вместо коэффициентов a, b, c, q . Задача Гурса (29), (30) имеет одно решение $\hat{v}(s, \tau) = \hat{v}(s, \tau; x, t)$, непрерывное на G и дважды непрерывно дифференцируемое на G_∞ [6, с. 129–135].

Ввиду (6) в каждой фиксированной точке $M(x, t)$ тангенсы углов наклона касательных прямых к характеристикам двух семейств $g_i(x, t) = C_i, i = 1, 2$, отличаются лишь противоположными знаками $dx/dt = (-1)^i a(x, t), i = 1, 2$, в силу четности продолжения \hat{a} по x . Следовательно, для любых вершин $M(0, t), t > 0$, на оси $O\tau$, треугольники ΔMPQ и, в частности, треугольники $\Delta Q'PP'$ являются криволинейными "равнобедренными". Поэтому на рис. 2 характеристики $g_2(s, \tau) = C_2$ и $g_1(s, \tau) = C_1$ при $s < 0$ соответственно симметричны характеристикам $g_1(s, \tau) = C_1$ и $g_2(s, \tau) = C_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, при $s > 0$ относительно оси $O\tau$.

Покажем четность по s функции Римана $\hat{v} = \hat{v}(s, \tau)$ в G .

Лемма 1. В предположениях теоремы 1 для любой вершины $M(x, t) \in G_+$ характеристического треугольника ΔMPQ решение $\hat{v}(s, \tau) = \hat{v}(s, \tau; x, t)$ задачи Гурса (29), (30) на ΔMPQ является четной по s функцией.

Доказательство. Главные дифференциальные части телеграфного уравнения (25) и его формально сопряженного уравнения (29) одинаковые. Поэтому им соответствуют одни уравнения характеристик (6) и, значит, одинаковые семейства характеристик $g_i(x, t) = C_i, C_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$, в G .

Для любой точки $M(x, t) \in G_+$ строим характеристический треугольник $\Delta MP'P$ с симметричной относительно оси $O\tau$ вершиной $M(-x, t) \in G$, вершинами основания $P'(-h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0), P(h_2\{g_2(-x, t), 0\}, 0)$ и криволинейными сторонами $g_1(s, \tau) = g_1(-x, t), g_2(s, \tau) = g_2(-x, t)$ (см. рис. 2). Докажем симметрич-

ность криволинейного треугольника $\Delta MP'P$ треугольнику ΔMPQ относительно оси $O\tau$ математически. Визуально это очевидно из рис. 2. Симметричность этих треугольников относительно $O\tau$ не вызывает сомнений только для прямых характеристик, а вершина P' очевидно симметрична вершине P и для кривых характеристик.

Во-первых, из указанной выше "равнобедренности" криволинейных треугольников с вершинами на оси $O\tau$, $\tau > 0$, следует взаимозаменяемость уравнений сторон-характеристик таких треугольников семейства $g_2(s, \tau) = C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$, на характеристики семейства $-g_1(-s, \tau) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, и уравнений сторон-характеристик семейства $g_1(s, \tau) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, на характеристики семейства $-g_2(-s, \tau) = C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$, в верхней полуплоскости G . Характеристику MP уравнения $g_2(s, \tau) = g_2(x, t)$ ищем в виде $-g_1(-s, \tau) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Подставляем сюда координаты точки $M(x, t)$ и находим значение постоянной $-g_1(-s, \tau) = C_1 = -g_1(-x, t)$. Отсюда для характеристик MP , MP' соответственно имеем два уравнения $g_1(-s, \tau) = g_1(-x, t)$, $g_1(s, \tau) = g_1(-x, t)$, из которых вытекает равенство $g_1(-s, \tau) = g_1(s, \tau)$, $s \geq 0$, т.е. четность по s функции g_1 . Иначе говоря, характеристика MP' симметрична характеристике MP относительно оси $O\tau$ в G (см. рис. 2). Согласно уравнениям характеристик MQ и MP существуют их продолжения до пересечения с осью $O\tau$. Если характеристику MQ уравнения $g_1(s, \tau) = g_1(x, t)$ искать в виде $-g_2(-s, \tau) = C_2$, то подставляя сюда координаты точки $M(x, t)$, имеем значение постоянной $-g_2(-s, \tau) = C_2 = -g_2(-x, t)$. Поэтому для характеристик MQ и MP имеем два уравнения $g_2(-s, \tau) = g_2(-x, t)$, $g_2(s, \tau) = g_2(-x, t)$ соответственно. Из них следует равенство $g_2(-s, \tau) = g_2(s, \tau)$, $s \geq 0$, т.е. четность по s функции g_2 . Итак, мы обосновали четность по s характеристик уравнения (29) на G :

$$g_1(-s, \tau) = g_1(s, \tau), \quad g_2(-s, \tau) = g_2(s, \tau), \quad s, \tau \geq 0. \quad (31)$$

Во-вторых, в (30) нечетность \tilde{c} по s меняет знак слагаемого в $\tilde{c}(s, \tau)$ из \tilde{k}_1 на выражение $-\tilde{c}(s, \tau)$ из \tilde{k}_2 и наоборот. Взаимная четность по s одной из функций \tilde{k}_1 , \tilde{k}_2 , указанных после (22) (см. уравнения (22) и (30)), по отношению к другой из них, вытекает из четности \hat{a} , \hat{b} , \hat{q} , нечетности \tilde{c} по s в (30) и четности по s характеристик (31) на G :

$$\tilde{k}_1(-s, \tau) = \tilde{k}_2(s, \tau), \quad \tilde{k}_2(-s, \tau) = \tilde{k}_1(s, \tau), \quad (s, \tau) \in \Delta MPQ. \quad (32)$$

Из симметрии характеристик MP , MP' и MQ , MP относительно оси $O\tau$ соответственно ввиду (31) и (32) имеем четность по s данных Гурса (30).

В-третьих, известен факт: производная от нечетной (четной) функции является (четной) нечетной функцией. Если функция \hat{v} четна по s , то в уравнении (29) дифференциальный оператор \mathcal{M} четен по s на верхней полуплоскости G

относительно оси $O\tau$, так как его коэффициенты \hat{a} , \hat{b} , \hat{q} четны, коэффициент \tilde{c} нечетен по s на G и

$$\begin{aligned} (\tilde{c}(-s, \tau)\hat{v}(-s, \tau))_s &= \tilde{c}_s(-s, \tau)\hat{v}(-s, \tau) + \tilde{c}(-s, \tau)\hat{v}_s(-s, \tau) = \\ &= \tilde{c}_s(s, \tau)\hat{v}(-s, \tau) - \tilde{c}(s, \tau)\hat{v}_s(-s, \tau) = \tilde{c}_s(s, \tau)\hat{v}(s, \tau) + \tilde{c}(s, \tau)\hat{v}_s(s, \tau) = \\ &= (\tilde{c}(s, \tau)\hat{v}(s, \tau))_s, \quad s > 0, \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Четность по s уравнения (29) и данных Гурса (30) влечет четность по s единственного решения задачи Гурса (29), (30). Отсутствие четности решения задачи Гурса (29), (30) во внутренних точках из ΔMPQ и на основании PQ противоречит четности по s уравнения (29), а на боковых сторонах MP и MQ – установленной четности по s данных Гурса (30). Лемма 1 доказана.

На рисунке 2 в критическом треугольнике $\Delta Q'PP'$ уравнениями пунктирной линии $Q'P'$, симметричной куску характеристики $Q'P$ относительно оси $O\tau$, очевидно, служат уравнения $g_1(s, \tau) = g_1(-x, t)$ и $s = h_1\{g_1(-x, t), \tau\}$. Существуют другие равносильные уравнения кривой $Q'P'$ в терминах g_1 и h_1 . В плоскости Ost неявное уравнение $g_1(s, \tau) = g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)])$, конечно, описывает кривую $Q'P'$, проходящую через точку Q' (см. рис. 2). Таким образом, по определению обратной функции кривая $Q'P'$ также задается явным уравнением

$$s = h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), \tau\}, \quad 0 \leq \tau \leq h^{(2)}[0, g_2(x, t)]. \quad (33)$$

Отсюда мы находим другой вид тех же координат точек $P'(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0)$ и $P(-h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0)$.

Выше показано, что функция (28) является решением $\tilde{u} \in C(G), C^2(G_\infty)$, $C^2(G \setminus G_\infty)$ задачи Коши (25), (26), а функция Римана $\hat{v} \in C(G), C^2(G_\infty)$ – четным по s решением задачи Гурса (29), (30) на G [6, с. 129–135]. Из ее четности по s следует $\hat{v} \in C^2(G \setminus G_\infty)$. Из решения (28) задачи Коши на G выведем решение смешанной задачи (1)–(3) на G_∞ .

В формуле (28) за счет нечетности начального данного $\tilde{\varphi}$ и четности произведения $\hat{a}\hat{v}$ по s значение произведения $\hat{a}\tilde{u}\hat{v}$ в точке P равно минусу его значения в симметричной точке P' относительно оси $O\tau$. Поэтому согласно (33) первое слагаемое из (28) совпадает с первым слагаемым формулы (12), в котором берутся значения функции $\tilde{u}(h_1\{g_1(x, t), 0\}, 0) = \varphi(h_1\{g_1(x, t), 0\})$ и $\tilde{u}(h_2\{g_2(x, t), 0\}, 0) = -\varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\})$, т.е. в первом слагаемом из (12) подразумевается значение функции $\tilde{u}(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\}, 0) = \varphi(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(x, t)]), 0\})$.

В формуле (28) интеграл по основанию PQ треугольника равен сумме трех интегралов по отрезкам PO , OP' и $P'Q$, первые два из которых сокращаются из-за нечетности обоих начальных данных $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$, четности по s коэффициентов \hat{a}, \hat{b} и, согласно обоснованной выше лемме 1, четности по s функции Римана \hat{v} .

Таким образом, интеграл по PQ формулы (28) при $d\tau = 0$ равен интегралу по $P'Q$ от $H(\tilde{u}, \hat{v})$ и, следовательно, второе слагаемое из (28) становится вторым слагаемым из (12) благодаря координатам точки P' из (33). Сужением на G_∞ последнего слагаемого из (28) с двойным интегралом имеем следующее слагаемое, за указанными выше, решения (12), так как двойной интеграл по треугольнику ΔMPQ из (28) совпадает с двойным повторным интегралом от произведения правой части \tilde{f} уравнения (25) на функцию Римана v с модулем $|s|$ их первой переменной s . В нем вместо двойного интеграла по треугольнику $\Delta Q'PP'$ от произведения функций \tilde{f} и v фактически дважды берется двойной интеграл по треугольнику $\Delta Q'OP'$ из G_+ благодаря их четности по s .

Существование единственного классического решения \tilde{u} задачи (1)–(3) на G_∞ и G_+ взято из теоремы 2 статьи [1]. При коэффициентах $a \in C^2(G_\infty)$, $b, c, q \in C^1(G_\infty)$ гладкости (4), (10) на φ, ψ, f хватает для дважды непрерывной дифференцируемости решения (28) задачи Коши (25), (26) и первых трех слагаемых из (12) на G_+ при $x \geq 0$, так как функция Римана \hat{v} тоже дважды непрерывно дифференцируема на G_+ при $x \geq 0$ [6, с. 129–135]. В формуле (12) классического решения нашей задачи на G_+ нет значений продолжений $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{q}, \hat{f}$ для $x < 0$, потому что эти продолжения оказались формальными благодаря знаку модуля $|s|$ в функциях $\tilde{f}(|s|, \tau)$ и $v(|s|, \tau)$.

Из установленной выше гладкости решения $\tilde{u} \in C^2(G_\infty)$ вида (28) задачи Коши (25), (26) на G следует дважды непрерывная дифференцируемость по $t \geq 0$ следа справа $\tilde{u}(0, t) = \lim_{x \rightarrow +0} \tilde{u}(x, t)$ решения (28) на G_+ при $x \geq 0$. Поскольку решение (28) этой задачи Коши на G_∞ совпадает с суммой первых трех слагаемых из (12), то этот след равен

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0, t) = & \frac{(auv)(h_1\{g_1(0, t), 0\}, 0) - (auv)(h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(0, t)]\}, 0)}{2a(0, t)} + \\ & + \frac{1}{2a(0, t)} \int_{h_1\{g_1(0, h^{(2)}[0, g_2(0, t)]\}, 0}^{h_1\{g_1(0, t), 0\}} [\psi(s)v(s, 0) - \varphi(s)v_\tau(s, 0) + b(s, 0)\varphi(s)v(s, 0)] ds + \\ & + \frac{1}{2a(0, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0, \tau)\}}^{h_1\{g_1(0, \tau)\}} \tilde{f}(|s|, \tau)v(|s|, \tau; 0, t) ds, (x, t) \in G_+. \end{aligned}$$

Здесь два первых слагаемых обнуляются, так как в них $h^{(2)}[0, g_2(0, t)] = t$ согласно второй формуле обращения из (8) при $i = 2$. Запишем его суммой

$$\tilde{u}(0, t) = \Psi(t) + F^{(0)}(t), \quad (34)$$

где функции

$$\Psi(t) = \frac{1}{2a(0, t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0, \tau)\}}^{h_1\{g_1(0, \tau)\}} [\hat{f}(s, \tau) - \hat{f}_\mu(s, \tau)] \hat{v}(s, \tau; 0, t) ds,$$

$$F^{(0)}(t) = \frac{1}{2a(0,t)} \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(0,t,\tau)\}}^{h_1\{g_1(0,t,\tau)\}} \hat{f}^{(0)}(s,\tau) \hat{v}(s,\tau;0,t) ds.$$

В (12) за четную по x функцию $\hat{f}^{(0)}$ берем значение $\hat{\mathcal{L}}$ на следе:

$$\hat{\mathcal{L}}\tilde{u}(0,t) \equiv \tilde{u}_{xx}(0,t) + \hat{b}(x,t)\tilde{u}_t(0,t) + \hat{q}(x,t)\tilde{u}(0,t) = \hat{f}^{(0)}(x,t), (x,t) \in G. \quad (35)$$

Согласно представлению (34) функция $\tilde{f}^{(0)}$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{f}^{(0)}(x,t) - F_{xx}^{(0)}(t) - \hat{b}(x,t)F_t^{(0)}(t) - \hat{q}(x,t)F^{(0)}(t) = \hat{\mathcal{L}}\Psi(t), (x,t) \in G.$$

Здесь полагаем $F_{xx}^{(0)}(t) = \tilde{Y}(t)$, $F_t^{(0)}(t) = \int_0^t \tilde{Y}(\delta) d\delta$, $F^{(0)}(t) = \int_0^t (t-\delta)\tilde{Y}(\delta) d\delta$ и получаем систему интегрального уравнения Вольтерра второго рода и алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(t) &= \int_0^t [(\delta-t)\hat{q}(x,t) - \hat{b}(x,t)]\tilde{Y}(\delta) d\delta + \tilde{Z}(x,t), \\ \hat{f}^{(0)}(x,t) - \tilde{Z}(x,t) &= \hat{\mathcal{L}}\Psi(t), x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Непрерывность функции $\hat{f}^{(0)}$ на G вытекает из уравнения (35) и непрерывности его коэффициентов на G . Из теории интегральных уравнений известно, что для непрерывной $\tilde{Z} \in C(G)$ существует единственное непрерывное решение $\tilde{Y} \in C(G)$ уравнения Вольтерра второго рода системы (36). По значению \tilde{Y} единственным образом выводятся сначала классическое решение $F^{(0)}(t) \in C^2[0, +\infty[$ задачи Коши для уравнения $F_{xx}^{(0)}(t) = \tilde{Y}(t)$ с начальными условиями $F^{(0)}(0) = F_t^{(0)}(0) = 0$ и затем единственная функция $\hat{f}^{(0)} \in C(G)$. Наконец, выводим функцию \tilde{Z} из второго алгебраического уравнения системы (36) и имеем ее единственное решение $\{\tilde{Y}, \tilde{Z}\}$.

Итак, выше мы преобразовали все слагаемые из (28) в первые три слагаемые из (12). Вычитаем след формулы (28) при $x=0$ из формулы (28), прибавляем граничное данное $\mu \in C^2[0, +\infty[$ и получаем классическое решение исходной задачи (1)–(3) на G_+ вида

$$u_+(x,t) = \tilde{u}(x,t) - \tilde{u}(0,t) + \mu(t) \in C^2(G_+), \quad (37)$$

которое совпадает с решением (12) на G_+ из теоремы 1. Выражение (37), очевидно, удовлетворяет уравнению (1) и граничному режиму (3) на G_+ . Решения краевых задач могут иметь разные виды и формы записи.

Мы убедились в дважды непрерывной дифференцируемости функций (11) в G_- и (12) в G_+ . В теореме 1 из [1] непрерывность решений на G_- и G_+ и их частных производных до второго порядка включительно на характеристике $g_2(x,t) = g_2(0,0)$ подробно и строго обоснована в случае модельного телеграфного уравнения. В нашей первой смешанной задаче для общего телеграфного уравнения (1)–(3) достаточность условий согласования (5) для дважды непрерывной дифференцируемости функции u_- вида (11) в замыкании $\overline{G_-}$ множества G_- и функции u_+ вида (12) в G_+ на

характеристике $g_2(x,t) = g_2(0,0)$ можно вывести из достаточности условий согласования для модельного уравнения (1) в теореме 1 из [1]. Во-первых, первые два условия согласования из (5) и теоремы 1 из [1] совпадают. Во-вторых, для телеграфного уравнения (1) настоящей статьи, из левой и правой частей которого вычитаем слагаемые $a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) + a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t)$ в уравнении (1) из [1] и $b(x,t)u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) + q(x,t)u(x,t)$ в (1) настоящей статьи, записываем третье условие согласования из теоремы 1 статьи [1] для правой части

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x,t) = & f(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) - \\ & - b(x,t)u_t(x,t) - c(x,t)u_x(x,t) - q(x,t)u(x,t) \end{aligned}$$

и получаем третье условие согласования из (5) для изучаемой задачи (1)–(3):

$$\begin{aligned} \mu''(0) = \tilde{S} \equiv & \tilde{f}(0,0) + a^2(0,0)\varphi''(0) + a^{-1}(0,0)a_t(0,0)\psi(0) + a(0,0)a_x(0,0)\varphi'(0) = \\ = & f(0,0) + a^2(0,0)\varphi''(0) - b(0,0)\psi(0) - c(0,0)\varphi'(0) - q(0,0)\varphi(0) \equiv S. \end{aligned}$$

Единственность классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ задачи (1)–(3) следует из способа получения формул Римана (11), (22) также, как в [6, с. 139], а его устойчивость по φ, ψ, μ, f – из формул (11) на G_- и (12) на G_+ .

Заключение

Получены формулы Римана (11), (12) единственного и устойчивого классического решения $u \in C^2(G_\infty)$ и достаточные условия (4), (5), (40) корректности по Адамару первой смешанной задачи (1)–(3) для общего линейного неоднородного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости. Эти формулы Римана содержат неявные функции характеристик уравнения (1) и их обратные функции.

Работа поддержана БРФФИ РБ: проект № Ф22КИ-001 от 05.11.2021г.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Ломовцев, Ф. Е.** Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой / Ф. Е. Ломовцев // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2021. – № 1. – С. 18–38.
2. **Lomovtsev, F. E.** The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate $a(x,t)$ on the Half-Line / F. E. Lomovtsev // Труды 10-го международного научного семинара AMADE-2021". – БГУ – ИВЦ Минфина, 2022. – С. 43–53.
3. **Барановская, С. Н.** О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения: дис. ... кан-та физ.-мат. наук (01.01.02) / БГУ. – Минск. – 1991. – 59 с.
4. **Новиков, Е. Н.** Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : дис. ... кан-та физ.-мат. наук (01.01.02) / ИМ НАН Беларуси. – Минск. – 2017. – 258 с.
5. **Lomovtsev, F. E.** Riemann Formula of the Classical Solution to the First Mixed Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients on the Half-Line / F. E. Lomovtsev // Tez. dokl. Seventh Bogdanov Readings on ordinary differential equations dedicated to the 100th anniversary of the birth of Professor Yu.S. Bogdanov. – Minsk, June 1–4 2021. – Minsk, 2021. – P. 201–203.
6. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 2004. – 798 с.
7. **Lomovtsev, F. E.** Generalized Riemann Formula of the Classical Solution to the Cauchy Problem for the General Telegraph Equation with Variable Coefficients / F. E. Lomovtsev // Материалы Международ-

ной конференции: XXXIV Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXII», посвященной памяти А. Д. Баева. – Воронеж, 3–9 мая 2021 г. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. – С. 288–289.

Поступила в редакцию 25.01.2023 г.

Контакты: lomovcev@bsu.by (Ломовцев Федор Егорович)

Lomovtsev F. E. THE RIEMANN FORMULAS TO THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE GENERAL TELEGRAPH EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN THE FIRST QUARTER OF THE PLANE

Using the well-known Riemann method and the new compensation method for the boundary regime by the right-hand side of the telegraph equation, the Riemann formulas for the unique and stable classical solution to the first mixed problem for a linear inhomogeneous telegraph equation with variable coefficients in the first quarter of the plane are obtained. Sufficient correctness conditions of this mixed problem for classical solutions are established.

Keywords: first mixed problem, telegraph equation, sufficient smoothness requirement, sufficient matching condition.

УДК 517.925.42

ОБ ОСЛАБЛЕННОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА ТИПА $2A+2S$

И. Н. Сидоренко

кандидат физико-математических наук

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В настоящей работе исследуется семейство систем Льенара с четырьмя особыми точками типа $2A+2S$, т. е. систем, имеющих в конечной части плоскости 2 седла и 2 антиседла. Рассмотрены и улучшены методы построения конкретных систем Льенара с наперед заданным количеством предельных циклов, окружающих группу особых точек. Выдвинута гипотеза об условии отсутствия предельных циклов окружающих группу особых точек. Рассмотрены алгоритмы построения прогнозных бифуркационных кривых, с помощью которых фазовая плоскость разбита на области с постоянным количеством предельных циклов. Построены примеры конкретных систем, подтверждающих гипотезу.

Ключевые слова: ослабленная проблема Гильберта, система Льенара, предельный цикл «нормального размера», система прогноза.

1. Введение

Рассматривается система Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - \varepsilon f(x)y, \quad (1)$$

где $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^{2i}$, $g(x)$ – многочлен четвертой степени, $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Система (1) известными преобразованиями может быть представлена в виде

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x). \quad (2)$$

Будем рассматривать класс систем (1) с четырьмя простыми особыми точками в конечной части плоскости. В этом случае систему (1) можно привести к следующему каноническому виду:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x)(1-Lx)(1-Mx) - \varepsilon(a_0 + a_1x + a_2x^2)y, \quad (3)$$

где $L < 0$, $0 < M < 1$. Тогда система (3) в конечной части плоскости имеет конфигурацию особых точек $2A+2S$ – 2 антиседла и 2 седла, причем точка $O(0, 0)$ является седлом. Целью данной работы является построение систем (3) надо здесь их ввести с максимальным количеством предельных циклов «нормального размера», в том числе и окружающим группу особых точек. В данной работе применяются модификация прогнозного метода оценки числа предельных «нормального размера» [1, 2, 3], конструктивные методы возмущения систем с центром при помощи функций последования и функций Мельникова. Построено разбиение фазовой плоскости с заданной конфигурацией особых точек. Выдвинута гипотеза о максимальном числе предельных циклов, окружающих группу особых точек.

2. Методы исследования

Понятие предельного цикла «нормального размера» введено Л. Перко [4], т.е. это грубый предельный цикл, который легко обнаруживается численными методами без привлечения больших вычислительных мощностей. Основным методом получения таких предельных циклов – возмущение системы, имеющий центр или негрубый фокус.

2.1 Возмущение системы с центром при помощи функции Мельникова [5]

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_0(x, y) + \varepsilon P(x, y, a) = \tilde{P}(x, y, \varepsilon, a) \\ \frac{dy}{dt} = Q_0(x, y) + \varepsilon Q(x, y, a) = \tilde{Q}(x, y, \varepsilon, a) \end{cases}, \quad (4)$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, P_0, Q_0, P, Q – многочлены, a – вектор их коэффициентов. При $a = 0$ система (4) имеет центр $O(0,0)$, кривые которого трансверсально пересекают ось Ox на отрезке $[p, q]$, $p > 0$. Тогда на отрезке $[p, q]$ определена функция Мельникова [5]

$$\Phi(x, a) = \int_{\gamma(x)} M(x, y)(Pdy + Qdx) = \sum_{i=1}^m a_i \int_{\gamma(x)} M(x, y)(P_i dy + Q_i dx) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x),$$

где $M(x, y)$ – интегрирующий множитель невозмущенной системы, $\gamma(x)$ – овал центра, проходящий через точку $(x, 0)$. Здесь простым нулям функции Мельникова $\Phi(x, a)$ соответствуют овалы, порождающие предельные циклы возмущенной системы.

Пусть требуется найти $n_0 - 1$ предельных циклов системы (4), пересекающих отрезок $[p, q]$ оси Ox при условии, что задача имеет решение. Задаем случайным образом точки $x_i \in (p, q)$, $i = \overline{1, n_0}$ и решаем следующую задачу при возмущении центра

$$(-1)^i \sum_{j=1}^{m_0} a_j \varphi_j(x_i) > L, \quad i = \overline{1, n_0}, \quad L \rightarrow \max, \quad |a_j| \leq 1. \quad (5)$$

Если задача (5) имеет решение

$$a = a^*, \quad L = L^*,$$

то в системе (4) существует достаточно малое $\varepsilon > 0$, при котором она имеет $n_0 - 1$ предельных циклов, пересекающих отрезок $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n_0 - 1}$.

Так как функция Мельникова при $a = a^*$, $L = L^*$ имеет наибольшее отклонение от нуля в выбранных точках x_i , то предельные циклы будут существовать не при слишком малых значениях $\varepsilon > 0$, т.е. они будут «нормального размера». Конечно, успех зависит еще от точности приближенно найденных функций $\varphi_j(x)$. Для нахождения функций $\varphi_j(x)$ выберем на отрезке $[p, q]$ равномерную сетку узлов v_k , $k = \overline{1, N_0 + 1}$ и найдем $\varphi_j(v_k)$, приближенно интегрируя систему

$$\frac{dx}{dt} = P_0, \quad \frac{dy}{dt} = Q_0, \quad \frac{dM}{dt} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right), \quad \frac{d\Psi_j}{dt} = M(P_j Q_0 + Q_j P_0)$$

на $[0, T_k]$, $\Psi_j(0) = 0$, $x(0) = v_k$, $y(0) = 0$, T_k – период обхода овала $\gamma(v_k)$ в системе (4), который находится численно. При этом функции $\varphi_j(x)$ можно приближенно найти в виде многочлена или сплайн-функции по значениям $\varphi_j(v_k) = \psi_j(T_k)$, $j = \overline{1, m}$.

Если задача (5) не имеет решения, меняем набор точек x_i и повторяем вычисления. При достаточно большом числе экспериментов решение задачи (5) будет получено, если заранее известно, что оно существует. Очевидно, данный метод имеет много источников ошибок и поэтому может применяться только при небольших значениях n . Максимальное значение, при котором был осуществлен удачный эксперимент, показывает, что $n < 10$.

2.2 Метод построения систем с максимальным числом предельных циклов нормального размера с помощью возмущения кратного фокуса [1]

Пусть теперь при $a = a_0$ система (4) имеет негрубый фокус $O(0,0)$ кратности k . Тогда можно определить функцию последования

$$\Delta(x_0, a) = x(T, x_0, a, \varepsilon) - x_0,$$

где $x(t)$, $y(t)$ – решение системы (4), $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, T – период обхода дуги соответствующей траектории вокруг особой точки $O(0,0)$. Выберем на промежутке $[p, q]$, $p > 0$, точки x_i , $i = \overline{1, n_0}$, и рассмотрим разложение функции последования в ряд Тейлора в окрестности точки a_0 , учитывая, что $\Delta(x_i, a^0) \neq 0$, т.к. траектории в окрестности a_0 являются спиралями. Тогда

$$\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j + o(\Delta a),$$

где $tp(i, j) = \frac{\partial \Delta(x_i, a^0)}{\partial a_j}$.

Для нахождения $tp(i, j)$ в общем случае необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu_i P_0, \quad \frac{dy}{dt} = \mu_i Q_0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial a_j} \right) &= \mu_i \left(P_j + \frac{\partial P_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_j} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_j} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial a_j} \right) = \mu_i \left(Q_j + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_j} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_j} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right) &= P_0 + \mu_i \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mu} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial \mu} \right) = Q_0 + \mu_i \left(\frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mu} \right), \\ x(0) &= x_i, \quad y(0) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial a_j}(0) = \frac{\partial y}{\partial a_j}(0) = \frac{\partial x}{\partial \mu}(0) = \frac{\partial y}{\partial \mu}(0) = 0, \end{aligned}$$

где $P_0 = P(x, y, a_0, \varepsilon)$, $Q_0 = Q(x, y, a_0, \varepsilon)$,

$$P_j = \frac{\partial P(x, y, a^0)}{\partial a_j}, \quad Q_j = \frac{\partial Q(x, y, a^0)}{\partial a_j}, \quad \mu_i = \frac{T(x_i)}{2\pi},$$

$T(x_i)$ – период обхода дуги соответствующей траектории вокруг особой точки.

Тогда

$$tp(i, j) = \frac{\partial x}{\partial a_j} - \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial a_j} / \frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{t=T(x_i)}$$

Как известно [4], вопрос о числе предельных циклов у системы (4) эквивалентен вопросу о числе действительных нулей функции последования. Поэтому потребуем, чтобы в точке x_1 функция последования была отрицательна (положительна), если фокус устойчивый (неустойчивый), в точке x_2 положительна (отрицательна) и т.д. При этом значения Δa должны быть достаточно малыми, чтобы величина $o(\Delta a)$ в разложении в ряд Тейлора не влияла на знак функции последования. Все перечисленные условия соответствуют задаче линейного программирования

$$L \rightarrow \min, \pm (-1)^i \left(\Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j \right) \geq 0, i = \overline{1, k+1}, |\Delta a_j| \leq L. \quad (6)$$

В неравенствах (6) выбираем знак «плюс», если фокус неустойчивый, и знак «минус» – в противном случае. Если задача (6) имеет решение $\Delta a = \Delta a^*, L = L^*$, то проверяем неравенства

$$(-1)^i \Delta(x_i, \Delta a^*) > 0, i = \overline{1, k+1},$$

если они выполняются, то система (4) имеет, по крайней мере, k предельных циклов. Если же неравенства не выполняются и Δa^* велико, то это означает, что система далека от искомой. Если неравенства не выполняются и Δa^* сравнительно небольшое, то систему можно «улучшить», взяв вместо точки a_0 точку $a_0 + \Delta a^*$, сделав, таким образом, процесс «улучшения» итерационным. Здесь важно следить за тем, чтобы улучшение системы не привело к системе с центром. На каждом шаге итерации знак функции $\Delta(x, a_0 + \Delta a^*)$ должен проверяться на более мелкой сетке узлов.

2.3 Прогнозный метод оценки числа предельных циклов в системах Льенара [1]

С. Смейл в своей работе [5] поддержал гипотезу о том, что система Льенара (2) в случае $g(x) = x$, а $F(x)$ – полином степени $2k+1$ и $F(0) = 0$ может иметь не более k предельных циклов вокруг антиседла $O(0,0)$.

Гипотеза. В пространстве параметров системы (2) с $g(x)=x$ существует область Ω , в которой число предельных циклов системы (1) не превосходит количества t нулей нечетной части функции $F(x)$, т.е. положительных нулей функции

$$\varphi(x) = F(x) - F(-x), \quad (7)$$

а также внутри Ω существует подобласть, в которой это число равно t .

Система Льенара (2) примечательна тем, что все ее особые точки принадлежат оси Ox .

Определение. Пусть система Льенара (3) имеет антиседло $A(x_0,0)$. Обозначим, через ξ_1 (ξ_2) – абсциссу ближайшей слева (справа) к точке A особой точки,

если слева (справа) особых точек нет, то считаем $\zeta_1 = -\infty$ ($\zeta_2 = +\infty$). Системой прогноза вокруг особой точки $A(x_0, 0)$ для системы Льенара (2) будем называть систему

$$F(\eta) = F(\mu), G(\eta) = G(\mu), \quad (8)$$

где $F(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} f(x) dx$, $G(\mu) = \int_{x_0}^{\mu} g(x) dx$, $\zeta_1 < \eta < x_0$, $x_0 < \mu < \zeta_2$.

Таким образом, для прогноза числа предельных циклов индивидуальной системы Льенара будем использовать следующий алгоритм.

Алгоритм. (Прогноз числа предельных циклов)

Для прогноза числа предельных циклов системы Льенара (2) вокруг антиседла $A(x_0, 0)$ необходимо:

- 1) составить систему прогноза (8) для системы Льенара (2) и особой точки A ;
- 2) определить промежутки изменения переменных η , μ ;
- 3) определить число k – количество решений системы прогноза (8) на полученном промежутке изменения переменных η , μ .

С учетом справедливости гипотезы 1 в области Ω существует система, которая имеет k предельных циклов вокруг рассматриваемой особой точки.

Описанный алгоритм является конечным и алгебраическим.

Сформулированные определения и алгоритм остаются справедливыми и для оценки числа предельных циклов вокруг группы особых точек с суммарным индексом равным +1. В данном случае в качестве x_0 необходимо брать «центральную» точку (это может быть и седло), ζ_1 , ζ_2 – абсциссы ближайших левой и правой особых точек, не входящих в группу вокруг которой производится оценка, а $\zeta_1 < \eta < \zeta_1$, $\zeta_2 < \mu < \zeta_2$, где ζ_1 , ζ_2 – находятся из условия $G(\zeta_1) = G(\zeta_2) = \max \{G(x_i)\}$, $\zeta_1 < x_i < \zeta_2$, x_i – абсциссы всех особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов.

3. Результаты исследования

3.1 Об отсутствии предельных циклов, окружающих все особые точки

Так как система (3) имеет в конечной части плоскости только 4 особые точки и все они являются простыми, то справедлива

Теорема 1. Система (3) не имеет предельных циклов, рождающихся из бесконечности и окружающих все состояния равновесия.

Доказательство: Все особые точки систем Льенара вида (3) располагаются на оси Ox , при этом происходит чередование седел и антиседел, индекс Пуанкаре для антиседла равен «+1», для седла – «-1». Как известно, предельные циклы могут существовать только вокруг особых точек с суммарным индексом равным +1. Откуда и следует утверждение теоремы.

Из теоремы 1 следует, что при построении функции Дюлака-Черкаса для доказательства единственности или отсутствия предельных циклов, окружающих группу особых точек, достаточно исследовать область между «большой петлей» «внешнего» седла и «восьмеркой», полученной сепаратрисами «внутреннего» седла (рисунок 1).

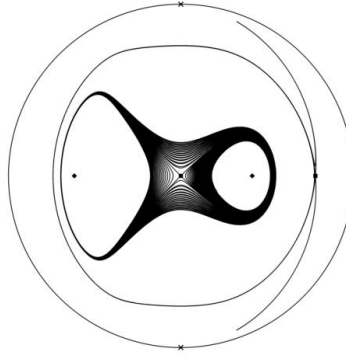


Рисунок 1. – Фазовый портрет системы (3)

Теорема 2. Если особые точки $S_1(0,0)$, $S_2(1/M,0)$ являются седлами системы (3), причем S_1 находится между двумя антиседлами, и

$$G(0) > G(1/M),$$

то система прогноза (8) не имеет решений, соответствующих предельным циклам, окружающим группу особых точек.

Доказательство: Так как точка S_1 является седлом, то для отыскания решений системы прогноза нам необходимо определить промежуток $\xi_1 < \eta < \zeta_1$, $\xi_2 < \mu < \zeta_2$, где ξ_1 , ξ_2 – абсциссы ближайших левой и правой особых точек, не входящих в группу, вокруг которой производится оценка, т.е. $\zeta_1 = -\infty$, а $\zeta_2 = 1/M$, а ζ_1 , ζ_2 – находятся из условия $G(\zeta_1) = G(\zeta_2) = \max\{G(x_i)\}$, $\zeta_1 < x_i < \zeta_2$, x_i – абсциссы всех особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов, то получаем систему

$$-\infty < \eta < G(0),$$

$$G(0) < \mu < G(1/M)$$

которая при выполнении условий теоремы не имеет решений. А, следовательно, соответствующая система прогноза также не будет иметь решений, соответствующих предельным циклам, окружающим группу особых точек.

3.2 Прогнозные бифуркационные кривые системы прогноза.

Для исследования количества предельных циклов системы (3) воспользуемся построением прогнозных бифуркационных кривых [1, 6]. В рассматриваемом случае можно ограничиться построением прогнозной кривой двукратных предельных циклов, прогнозными кривыми негрубых фокусов и прогнозными кривыми сепаратрисных циклов. Рассмотрим подробнее каждую из этих кривых.

Для нахождения *прогнозной кривой двукратных предельных циклов* $2LCP$, которая соответствует двукратным положительным нулям функции $\varphi(u)$, необходимо найти решения системы

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{1+L+M}{3}(x^2+xy+y^2) + \frac{1+L+M}{4}(x+y)(x^2+y^2) + \frac{LM}{5}(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4) = 0, \\ a_1 + \frac{a_2}{2}(x+y) + \frac{a_3}{3}(x^2+xy+y^2) = 0. \end{cases}$$

Прогнозные кривые негрубых фокусов WF_1 , WF_2 определяют условия негрубости фокусов: WF_1 – фокуса $E(1,0)$, WF_2 – фокуса $D(1/L, 0)$. Для того чтобы фокус $E(1,0)$ был негрубым необходимо, чтобы дивергенция векторного поля в точке E была равной нулю, что определяется следующим уравнением

$$\operatorname{div}(\Omega)|_{(1,0)} = f(1) = 0,$$

где Ω – векторное поле системы (3). Последнее уравнение в плоскости параметров (a_1, a_2) является уравнением прямой

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

при фиксированном значении параметра a_3 . Аналогичным образом определяется WF_2 :

$$a_1 - 2a_2 + 4a_3 = 0.$$

Прогнозные кривые сепаратрисных циклов $SC1p$, $SC2p$ и $SC3p$. Прогнозная кривая $SC1p$ определяет условие петли вокруг правого седла, $SC2p$ – условие петли вокруг левого седла, а $SC3p$ определяет условие петли, имеющей форму «неполной» восьмерки. Все эти кривые определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} F(x) = F(y), \\ G(0) = G(x) = G(y), \end{cases}$$

при фиксированных значениях параметров L , M и a_3 .

Построим указанные прогнозные кривые для системы (3) при значениях параметров $L = -1/2$, $M = 1/4$ и $a_3 = 1$ (рисунок 2)

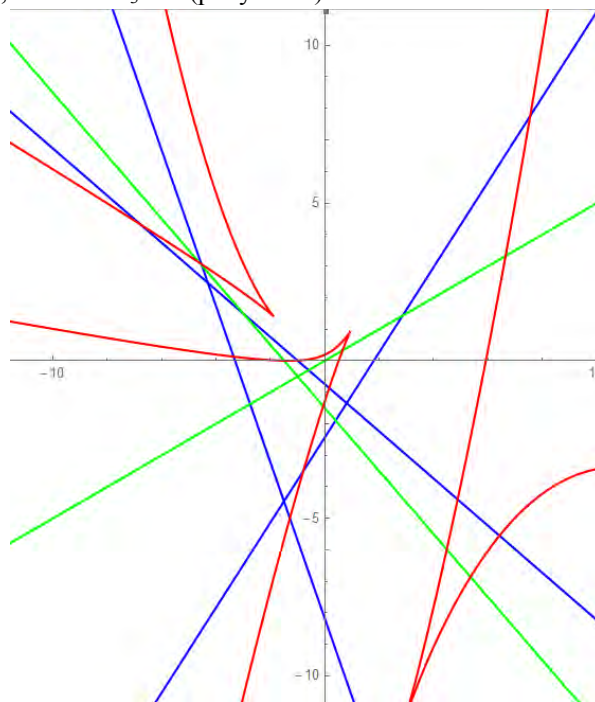


Рисунок 2. – Прогнозные бифуркционные кривые системы (3)

Рассмотрим систему (3) при значении $L = -1/2$, $M=1/4$ и $a_3 = 1$. Сформулируем теорему

Теорема. Для системы Лъенара (3)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x)(1-Lx)(1-Mx) - \varepsilon(a_0 + a_1x + a_2x^2)y,$$

с $L = -1/2$, $M=1/4$ и $a_3 = 1$, имеющей седла $D(-2,0)$, $E(1,0)$ и седла $S_1(0,0)$, $S_2(4,0)$ выполняются следующие утверждения:

1. Все решения соответствующей системы прогноза (8) для системы Лъенара (3) типа $((k_2, k_3), k_1)$ удовлетворяет неравенству $k_1 + k_2 + k_3 \leq 4$.
2. Система прогноза (8) для рассматриваемой системы Лъенара (3) может иметь решения следующих типов: $((1,0),0)$, $((0,1),0)$, $((0,0),1)$, $((1,0),1)$, $((0,1),1)$, $((1,1),1)$, $((0,2),0)$, $((2,0),0)$, $((0,0),2)$;
3. В каждой области пространства коэффициентов, в которой система прогноза имеет решение типа $((k_2, k_3), k_1)$, существует подмножество, в котором система Лъенара (3) при $\varepsilon = 0,01$ имеет такое же распределение $((k_2, k_3), k_1)$ предельных циклов;
4. Если $k_2 = 0$ ($k_3 = 0$), то система Лъенара (2) не имеет предельных циклов, окружающих особую точку $A(-2,0)$ ($E(1,0)$).

Доказательство:

1. Систему прогноза (8) для системы Лъенара (3) всегда можно сократить на $\eta - \mu \neq 0$. После сокращения получим, что первое уравнение системы является полиномом второй степени, а второе уравнение – полином четвертой степени. Следовательно, система (8) не может иметь более восьми решений, а в силу симметрии существенными являются только четыре. Этим и обуславливается невозможность существования решения типа $((k_2, k_3), k_1)$ с $k_1 + k_2 + k_3 > 4$.

2. Построим для рассматриваемой системы Лъенара (3) все прогнозные бифуркационные кривые, описанным выше способом. Тогда вся плоскость параметров (a_1, a_2) разбивается на подобласти (рисунок 2), каждая из которых соответствует определенному типу решений системы прогноза (8). Отсюда и следует второе утверждение теоремы.

3. Доказательство третьего утверждения теоремы основывается на выборе точки из каждой подобласти плоскости (a_1, a_2) , соответствующей данному типу решений системы прогноза (8), построению соответствующей системы (3) и проверкой существования предельных циклов численными методами.

4. Четвертое утверждение общеизвестно [5].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сидоренко, И. Н. Предельные циклы кубической системы Лъенара типа $2A + 1S$ / И. Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2022. – № 2. – С. 21–29.
2. Сидоренко, И. Н. Предельные циклы «нормального размера» некоторых полиномиальных систем Лъенара / И. Н. Сидоренко, Л. А. Черкас // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2007. – № 1(26). – С. 163–170.
3. Сидоренко, И. Н. Предельные циклы «нормального размера», окружающие группу особых точек систем Лъенара с симметрией / И. Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта

та імя А.А. Куляшова. Сер. В. Природазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2019. – № 2. – С. 21–29.

4. **Perko, L. M.** Limit cycles of quadratic systems in the plane / L. M. Perko // Rocky Mountain of Mathematics. – 1984. – Vol. 14. – P. 619–644.

5. **Smale, S.** Mathematical problems for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer. – 1998. – Vol. 20, no. 2. – P. 7–15.

6. Распределения предельных циклов квадратичных систем с фокусом и антиседлом на фазовой плоскости и двумя седлами и узлом в бесконечности / А. А. Гринь, А. В. Кузьмич, И. Н. Сидоренко // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Сер. 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2022. – Т. 12, № 1. – С. 6–15.

Поступила в редакцию 21.06.2023 г.

Контакты: sidorenko_in@msu.by (Сидоренко Иван Николаевич)

Sidorenko I. N. ON THE WEAKENED HILBERT PROBLEM FOR LIENARD SYSTEMS OF TYPE $2A+2S$

In this paper, we study a family of Lienard systems with five singular points of type $2A+2S$, i.e., systems having 2 saddles and 2 anti-saddle in the final part of the plane. Methods for constructing specific Lienard systems with a predetermined number of limit cycles surrounding a group of singular points are considered and improved. Algorithms for constructing predictive bifurcation curves are considered, with the help of which the phase plane is divided into regions with a constant number of limit cycles. Examples of specific systems confirming the hypothesis are constructed.

Keywords: the weakened Hilbert problem, the Lienard system, the “normal size” limit cycle, the prediction system.

УДК 514. 76

О СВОЙСТВАХ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМЫ ГРУППОИДА ЛИ k -СТРУЙ ЛОКАЛЬНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

Л. А. Романович

старший преподаватель

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В статье изучаются свойства фундаментальной формы группоиды Ли k -струй локальных диффеоморфизмов гладкого многообразия. Доказываются необходимые и достаточные условия инвариантности фундаментальной формы группоиды Ли k -струй локальных диффеоморфизмов относительно его автоморфизмов.

Ключевые слова: гладкое многообразие, группоид Ли, алгеброид Ли, фундаментальная форма.

Введение

При определении и исследовании G -структур высших порядков можно пользоваться либо главным расслоением [1], [2], либо группоидом Ли дифференциальных продолжений [3], [4]. Оба подхода имеют свои преимущества. Хотя главное расслоение и группоид Ли различаются лишь формально, использование группоидов Ли имеет свои преимущества. Появляется возможность использования таких фундаментальных понятий, как алгеброид Ли, экспоненциальное отображение.

Важную роль при исследовании псевдогрупп и G -структур играет фундаментальная форма. В данной работе изучаются свойства фундаментальной формы группоиды Ли k -струй локальных диффеоморфизмов гладкого многообразия. Работа является продолжением [5]. Подробный обзор литературы приводится в [6] и [7]. Целью данной статьи является доказательство необходимого и достаточного условия инвариантности фундаментальной формы группоиды Ли k -струй локальных диффеоморфизмов относительно его автоморфизмов.

Основная часть

Пусть B – гладкое многообразие $\Pi^k(B)$ – группоид Ли k -струй его локальных диффеоморфизмов. Зафиксируем точку $x \in B$. Пусть $\xi \in \Pi^k(B)_x$ – k -репер в точке $y \in B$. Напомним, что ξ может быть рассмотрен как изоморфизм алгебр Ли с усечением $J_x^{k-1}TB \rightarrow J_y^{k-1}TB$. Так как пространства J_y^kTB и $p \in T_{\xi} \Pi^k(B)_x$ изоморфны, то k -репер ξ может быть рассмотрен как изоморфизм $J_x^{k-1}TB \rightarrow T_{\xi} \Pi^{k-1}(B)_x$, который определяется следующим образом:

$$j_x^{k-1}X \rightarrow (\varphi_* X)_{\xi}^{(k-1)}. \quad (1)$$

Перейдем к фундаментальной форме θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$. Пусть $p \in T_{\xi}^{\alpha} \Pi^k(B)$ – α -вертикальный касательный вектор в точке ξ , где ξ – обратимая

k -струя диффеоморфизма φ с истоком в точке x и устьем в точке $y = \varphi(x)$. Тогда выбранный касательный вектор можно представить как лифт векторного поля X^k , который может быть получен правым умножением на k -струю ξ касательного вектора $X_y^{(k)} \in \text{АП}^k(B)$. Далее применим операцию правого умножения на ξ^{-1} , усечения π_{k-1}^k и переместим полученный вектор в точку $x \in \text{АП}^{k-1}(B)$. Таким образом, фундаментальная форма θ^k является α -вертикальной 1-формой на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ и определяется как композиция следующих отображений:

$$\theta^k = \xi^{-1} \circ \pi_{k-1}^k \circ \gamma^{-1}. \quad (2)$$

Теорема. Фундаментальная форма θ^k является инвариантной относительно автоморфизма $(\Psi, \psi)_k$ группоида Ли $\Pi^k(B)$ с усечением тогда и только тогда, когда $(\Psi, \psi)_k$ является k -струйным продолжением диффеоморфизма многообразия B .

Доказательство.

Для доказательства необходимого условия применим индукцию по k . Пусть $(\Psi, \psi)_1$ – автоморфизм группоида Ли $\Pi^1(B)$, сохраняющий инвариантную форму θ^1 . Возьмем вектор $X_\xi^{(1)} \in T_\xi^\alpha \Pi^1(B)$ такой, что $(\pi_0^1)_* \Psi_* X_\xi^{(1)} = \vec{0}$. Из того, что автоморфизм $(\Psi, \psi)_1$ сохраняет инвариантную форму θ^1 следует, что Ψ_* сохраняет правоинвариантные векторные поля. Поэтому Ψ локально является отображением расслоенных пространств и индуцирует такое отображение $\zeta: B \rightarrow B$, что

$$\zeta \circ \alpha = \alpha \circ \Psi, \quad \zeta \circ \beta = \beta \circ \Psi. \quad (3)$$

Пусть $\vec{x} \in J_x^0 TB$. Тогда, используя (3), получим

$$J_{\beta(\xi)}^1 \Psi \circ \xi \circ J_{\psi^{-1}(\alpha(\xi))}^1 \Psi^{-1} (\psi_* \vec{x}) = \psi_* \circ \pi_* (X_\xi^1) = \psi_* (\vec{x}).$$

Доказано, что автоморфизм $(\Psi, \psi)_1$ группоида Ли $\Pi^1(B)$ с усечением является 1-струйным продолжением диффеоморфизма многообразия B

$$\Psi = J_{\psi(\alpha(\xi))}^1 \zeta.$$

Предположим, что утверждение верно при $n = k - 1$, т. е. любой автоморфизм $(\Psi, \psi)_{k-1}$ группоида Ли $\Pi^{k-1}(B)$ с усечением является $k-1$ -струйным продолжением диффеоморфизма многообразия B . Пусть $(\Psi, \psi)_k$ – автоморфизм группоида Ли $\Pi^k(B)$, сохраняющий инвариантную форму θ^k . Возьмем вектор $X_\xi^{(k)} \in T_\xi^\alpha \Pi^k(B)$ такой, что $(\pi_{k-1}^k)_* \Psi_* X_\xi^{(k)} = \vec{0}$. Из того, что автоморфизм $(\Psi, \psi)_k$ сохраняет инвариантную форму θ^k следует, что Ψ локально является отображением расслоенных пространств и индуцирует такое отображение $\Psi^{(k-1)}: \Pi^{k-1}(B) \rightarrow \Pi^{k-1}(B)$, которое сохраняет форму θ^k . Из предположения индукции (4) следует (5)

$$J_{\beta(\xi)}^{k-1} \Psi \circ \zeta^{(k-1)} \circ J_{\psi^{-1}(\alpha(\xi))}^{k-1} \Psi^{-1} = \Psi^{(k-1)}, \quad (4)$$

$$\pi_{k-1}^k \circ \Psi = j_{\beta(\xi)}^{k-1} \psi \circ \xi^{(k-1)} \circ j_{\psi^{-1}(\alpha(\xi))}^{k-1} \psi^{-1} \circ \pi_{k-1}^k. \quad (5)$$

Покажем, что $\Psi = j_{\psi(\alpha(\xi))}^k \zeta$. Пусть $\mu \in J_x^{k-1}TB$. Выберем $X_\xi^{(k)} \in T_\xi^\alpha \Pi^k(B)_x$, такой, что $\pi_{k-1}^k \circ \gamma^{-1} X_\xi^k = \xi(\mu)$. По определению формы θ^k получим, что $\langle X_\xi^{(k)}, \theta_{\alpha(\xi)}^k \rangle = \mu$ и

$$j_{\alpha(\xi)}^k \psi \circ \mu = \langle \Psi_* X_\xi^{(k)}, \theta_{\alpha(\psi(\xi))}^k \rangle = \Psi^{-1}(\xi) \circ \pi_{k-1}^k \circ \gamma^{-1}(\Psi_* X_\xi^{(k)}).$$

Тогда, рассуждая как и в случае $k=1$, получим

$$\Psi(\xi)(j_{\alpha(\xi)}^k \psi \circ \mu) = j_{\beta(\xi)}^k \psi \circ \xi \circ j_{\psi^{-1}(\alpha(\xi))}^{k-1} \psi^{-1}(j_{\alpha(\xi)}^k \psi \circ \mu).$$

Необходимое условие теоремы доказано.

Достаточность. Пусть ξ – обратимая k -струя диффеоморфизма φ базы B в точке x , т.е. $\xi = j_x^k \varphi$ и $\eta = j_x^k \psi$ – элемент группы G_x^k – обратимая k -струя диффеоморфизма ψ с истоком и устьем в точке x . Пусть $X_\xi^{(k)} \in T_\xi^\alpha \Pi^k(B)$. Тогда $X_\xi^{(k)} = j_{\varphi(x)}^k X$, где X – некоторое векторное поле на B . Тогда, используя (2), получим

$$(j_{\psi(x)}^k (\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}))^{-1} \circ \pi_{k-1}^k \circ \gamma^{-1}(\Psi_* \circ X_\xi^{(k)}) = j_x^k \psi \circ j_{\varphi(x)}^k (\varphi)^{-1} \circ \pi_{k-1}^k \circ \gamma^{-1}(X_\xi^k).$$

Автоморфизм $(\Psi, \psi)_k$ оставляет инвариантной фундаментальную форму θ^k .

Теорема доказана.

Заключение

В данной статье, являющейся продолжением работы [5], доказаны необходимые и достаточные условия инвариантности фундаментальной формы группоида Ли k -струй локальных диффеоморфизмов относительно его автоморфизмов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Кобаяси, Ш.** Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Москва: Наука, 1981. – Т. 1. – 344 с.
2. **Кобаяси, Ш.** Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Москва: Наука, 1981. – Т. 2. – 416 с.
3. **Mackenzie, K.** Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry / K. Mackenzie. – Cambridge: Universitu Press, 1987. – 327 p.
4. **Белько, И. В.** Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии / И. В. Белько. – М.: Изд-во УРСС, 2004. – 208 с.
5. **Романович, Л. А.** Геометрические структуры на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ / Л. А. Романович // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – Сер. В. – Прыродазнаўчыя навукі. – 2008. – № 1(29). – С. 146–155.
6. **Романович, Л. А.** Инварианты связности в группоиде Ли $\Pi^k(B)$ / Л. А. Романович // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – Сер. В. – Прыродазнаўчыя навукі. – 2018. – № 1(51). – С. 35–42.
7. **Романович, Л. А.** Геометрические характеристики инвариантных связностей в группоиде Ли группоиде Ли $\Pi^k(B)$ / Л. А. Романович // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – Сер. В. – Прыродазнаўчыя навукі. – 2019. – № 1(53). – С. 28–34.

Поступила в редакцию 12.06.2023 г.

Контакты: romanovich@msu.by (Романович Людмила Александровна)

***Romanovich L. A.* ON THE PROPERTIES OF THE FUNDAMENTAL FORM
IN THE LIE GROUPOID OF K -JETS OF LOCAL DIFFEOMORPHISMS**

The article explores the properties of the fundamental form in the Lie groupoid of k -jets of local diffeomorphisms.

Keywords: differentiable manifold, Lie groupoid, Lie algebroid, fundamental form.

УДК 621.372.8:535

НУЛЕВОЕ ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА ОТ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ

А. Б. Сотский

доктор физико-математических наук

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Е. А. Чудаков

аспирант

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Разработана техника расчета спектров энергетических коэффициентов отражения плоских волн от слоистых структур, моделирующих призмное устройство связи и дисперсионных характеристик мод, направляемых такими структурами. Установлено, что неоднородный диссипативный слой, составленный из однородных слоев двуокиси кремния и палладия, нанесенных на основание призмы связи из двуокиси циркония, может направлять бездиссипативные моды Ценнека ТМ, либо ТЕ поляризации, возбуждаемые под углом Брюстера. Выполнен сравнительный анализ четырех сенсоров призмного типа для детектирования концентрации водорода в атмосфере с чувствительными элементами в виде наноразмерных пленок палладия. Показано, что наибольшей чувствительностью обладает сенсор, допускающий призмное возбуждение бездиссипативной моды Ценнека ТЕ поляризации.

Ключевые слова: поверхностные электромагнитные волны, мода Ценнека, схема Кречмана, призма связи, неоднородные слои, угол Брюстера.

Введение

Изучение диссипативных структур, способных возбудить моду Ценнека в возбуждающем световом пучке, представляет большой практический интерес для создания эффективных оптических сенсоров параметров сред. Ранние теоретические и экспериментальные исследования показали, что таким свойством обладают структуры бездиссипативная среда – диссипативная однородная пленка – диссипативная среда [1, 2]. В [2] было реализовано создание высокочувствительного сенсора состава жидкостей и растворов. Дальнейшие исследования и использование таких структур могут привести к созданию нового научного направления – бесконтактной волноводной спектроскопии.

Одно из перспективных направлений в разработке оптических сенсоров – это безопасные оптические сенсоры концентрации водорода в атмосфере, особенно в связи с переходом на безуглеродную энергетику. В качестве чувствительного материала обычно используют палладий, данный элемент способен адсорбировать молекулярный водород из окружающей среды, при этом его оптические характеристики изменяются в зависимости от концентрации водорода в окружающей среде [3]. Однако экспериментальные исследования оптических свойств пленок палладия показали, что при значительной толщине пленки (больше 20 нм) она может трескаться, набирая в себя водород, при этом сохраняя память о своей структуре после воздействия [3]. Оптимальным вариантом являются тонкие пленки палладия с толщиной около 8 нм, они демонстрируют достаточно удовлетворительные

механические свойства и миллисекундное время релаксации, что делает их более привлекательным материалом для оптических сенсоров [4, 5]. Принцип действия такого сенсора основан на интерференции мод в тейпере, создаваемом с помощью локального разогрева и растяжения волокна. Однако поиск оптимальной оптической схемы для сенсора все еще является актуальной проблемой. В частности, волоконно-оптические сенсоры водорода с тонкой пленкой палладия также имеют недостатки, такие как технологические сложности при изготовлении и неустойчивость отклика относительно шумов интенсивности источника света. В данной работе рассматривается развитие подхода, предложенного ранее в работах [1, 2], для случая неоднородного диссипативного слоя и его возможности для исследования моды Ценнека в более сложной структуре и применения его для создания эффективных оптических сенсоров.

Мода Ценнека неоднородного слоя

Поверхностные электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль плоской границы раздела двух полуограниченных сред (рис.1), в зависимости от свойств комплексной диэлектрической проницаемости сред, разделяются на плазмонные моды и моды Ценнека [1,2]. Все они имеют ТМ поляризацию и являются собственными, т.е. их электромагнитное поле убывает при удалении от границы раздела [1, 2].

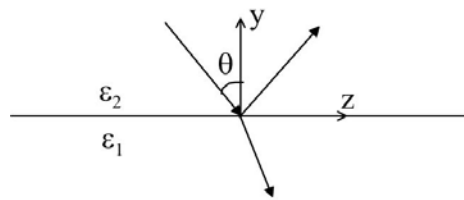


Рисунок 1. – Поверхностная волна границы раздела сред

Далее в работе рассматриваются электромагнитные поля с зависимостью от времени t и продольной координаты z вида

$$\exp(i\omega t - ik_0 \beta z). \quad (1)$$

Ось однородности – Ox . Электромагнитное поле ТМ волн описывается уравнениями [6]

$$-i\beta H_x = i\omega\epsilon\epsilon_0 E_y, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\epsilon\epsilon_0 E_z, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\beta E_y = -i\omega\mu H_x, \quad (4)$$

где $\epsilon(y)$ – относительная диэлектрическая проницаемость слоистой среды, которая предполагается комплексной, ϵ_0 – абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума, μ – абсолютная магнитная проницаемость вакуума (среды считаются не магнитными, что оправдано в оптическом диапазоне частот [7]).

Уравнения (2) – (4) сводятся к одному уравнению второго порядка

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} H_x + k_0^2 (\varepsilon - \beta^2) H_x = 0, \quad (5)$$

где $k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda$ – волновое число вакуума.

Решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям непрерывности H_x и E_z при $y = 0$ имеет вид

$$H_x = \begin{cases} c \exp(ik_{y1}k_0y) & (y < 0), \\ a \exp(ik_{y2}k_0y) + b \exp(-ik_{y2}k_0y) & (y > 0), \end{cases} \quad (6)$$

где $k_{y1,2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2} - \beta^2}$, $\beta = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \theta$, a, b, c – константы, которые имеют смысл амплитуд падающей из области $y > 0$, отраженной и прошедших волн, (рис. 1). Они связаны соотношениями

$$b = ar, \quad (7)$$

$$c = \frac{a}{1 + \frac{\varepsilon_2 k_{y1}}{\varepsilon_1 k_{y2}}}, \quad (8)$$

где

$$r = \left(1 - \frac{\varepsilon_2 k_{y1}}{\varepsilon_1 k_{y2}}\right) / \left(1 + \frac{\varepsilon_2 k_{y1}}{\varepsilon_1 k_{y2}}\right) - \quad (9)$$

амплитудный коэффициент отражения плоской волны. При отсутствии отраженной от границы раздела сред волны из (7) – (9) имеем $b = 0$, $r = 0$, $c = a$,

$$1 - \frac{\varepsilon_2 k_{y1}}{\varepsilon_1 k_{y2}} = 0. \quad (10)$$

Выражение (10) представляет собой дисперсионное уравнение, определяющее возможные значения постоянной распространения поверхностной электромагнитной волны β . Оно имеет решение

$$\beta = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}. \quad (11)$$

Если $\text{Re} \varepsilon_1 < 0$, $\text{Re} \varepsilon_2 > 0$ (в области $y < 0$ находится металл, а в области $y > 0$ – диэлектрик), то [1]

$$\text{Re}(\beta - \sqrt{\varepsilon_2}) > 0. \quad (12)$$

Условие (12) соответствует медленной плазмонной моде границы раздела металл – диэлектрик [1]. Такую моду в геометрии, представленной на рис.1, возбудить нельзя. Ее наблюдение предполагает использование призматических, либо решетчатых элементов связи [1].

Если $\text{Re} \varepsilon_1 > 0$, $\text{Re} \varepsilon_2 > 0$ (в областях $y < 0$ и $y > 0$ находятся различные диэлектрики), то

$$\text{Re}(\beta - \sqrt{\varepsilon_2}) < 0. \quad (13)$$

Условие (13) соответствует быстрой моде Ценнека, (ее фазовая и групповая скорости превосходят скорость света в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_2) она локализована в окрестности границы раздела сред за счет диссипации энергии в диэлектриках. Если $\text{Im}\epsilon_2 \rightarrow 0$, а $\text{Im}\epsilon_1$ имеет конечное значение, то возбуждение моды Ценнека является серьезной и актуальной проблемой, которая обсуждается в современных научных источниках [2]. Решение данной задачи в случае локализованного источника поля и $\epsilon_2 = 1$ позволило бы передавать электромагнитные импульсы со скоростью, превосходящей скорость света в вакууме, что привлекательно, например, для сверхбыстрой связи между Америкой и Европой с использованием поверхности Атлантического океана как границы раздела воздух – соленая вода. Но реализация передачи информации со скоростью, превосходящей скорость света в вакууме, по-видимому, технически не возможна, что ставит под сомнение возможность возбуждения моды Ценнека границы раздела диссипативных сред локализованными источниками электромагнитного поля. Вместе с тем при условиях

$$\text{Im}\epsilon_1 \rightarrow 0, \quad \text{Im}\epsilon_2 \rightarrow 0, \quad \text{Im}\beta \rightarrow 0 \quad (14)$$

возбуждение моды бездиссипативной (не затухающей) моды Ценнека экспериментально достижимо и известно как явление Брюстера [2, 8]. В этом случае условия (10) и (11) определяют угол Брюстера θ . Но наблюдение такой моды возможно только на плоской границе раздела прозрачных сред, причем только в пределах возбуждающего светового пучка, что исключает возможность ее использования для передачи информации.

Модель неоднородного слоя

Геометрия задачи о возбуждении неоднородного слоя, контактирующего с полуограниченными однородными средами, представлена на рис.2. Неоднородный слой, занимающий область $-d < y < 0$, рассматривается как последовательность n различных однородных слоев. Предполагается, что $\text{Im}\epsilon_{n+2} \rightarrow 0$. Структура возбуждается плоской волной, падающей на нее под углом θ .

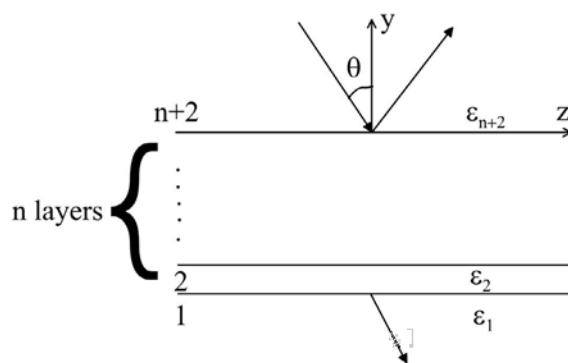


Рисунок 2. – Слоистая структура, возбуждаемая плоской волной.

Волны ТМ поляризации в слоистой структуре можно описать уравнениями (1) – (5). При учете условий непрерывности компонент электромагнитного поля

H_x , E_z на границах слоев коэффициент отражения плоской волны $r = b/a$ от структуры в представлении поля

$$H_x = \begin{cases} c \exp(ik_{y1}k_0y) & (y < -d), \\ a \exp(ik_{y2}k_0y) + b \exp(-ik_{y2}k_0y) & (y > 0), \end{cases} \quad (15)$$

аналогичном (6), описывается выражением

$$r = \frac{ik_{yn+2}H_{xn+2} - H'_{xn+2}\varepsilon_{n+2}}{ik_{yn+2}H_{xn+2} + H'_{xn+2}\varepsilon_{n+2}}. \quad (16)$$

Здесь H_{xn+2} , H'_{xn+2} рассчитываются по рекуррентным формулам [9]

$$H_{xj+1} = H_{xj} \cos(k_{yj}k_0\Delta y_j) + H'_{xj}\varepsilon_j \sin(k_{yj}k_0\Delta y_j) / k_{yj}, \quad (17)$$

$$H'_{xj+1} = -H_{xj}k_{yj} \sin(k_{yj}k_0\Delta y_j) / \varepsilon_j + H'_{xj} \cos(k_{yj}k_0\Delta y_j), \quad (18)$$

где $j = 2, 3, \dots, n+1$, $k_{yj} = \sqrt{\varepsilon_j - \beta^2}$, ε_j – диэлектрическая проницаемость j -го слоя, Δy_j – его толщина, при начальных условиях

$$H_{x2} = 1, \quad H'_{x2} = ik_{y1} / \varepsilon_1. \quad (19)$$

Дисперсионное уравнение для мод структуры ТМ поляризации имеет вид $r = 0$, или согласно (16)

$$ik_{yn+2}H_{xn+2} - H'_{xn+2}\varepsilon_{n+2} = 0. \quad (20)$$

Если $\text{Im}\varepsilon_{n+2} = 0$, то вещественный корень этого уравнения $\beta = \beta_B$ ($\text{Im}\beta_B = 0$) соответствует бездиссипативной моде Ценнека, возбуждаемой в структуре на рис. 2 плоской волной ТМ поляризации, падающей под углом Брюстера

$$\theta = \theta_B = \arcsin(\beta_B / \sqrt{\varepsilon_{n+2}}). \quad (21)$$

Для волн ТЕ поляризации формулы, аналогичные (15) – (19) имеют вид

$$E_x = \begin{cases} c \exp(ik_{y1}k_0y) & (y < -d), \\ a \exp(ik_{y2}k_0y) + b \exp(-ik_{y2}k_0y) & (y > 0), \end{cases} \quad (22)$$

$$r = \frac{ik_{yn+2}E_{xn+2} - E'_{xn+2}}{ik_{yn+2}E_{xn+2} + E'_{xn+2}}, \quad (23)$$

$$E_{xj+1} = E_{xj} \cos(k_{yj}k_0\Delta y_j) + E'_{xj} \sin(k_{yj}k_0\Delta y_j) / k_{yj}, \quad (24)$$

$$E'_{xj+1} = -E_{xj}k_{yj} \sin(k_{yj}k_0\Delta y_j) + E'_{xj} \cos(k_{yj}k_0\Delta y_j), \quad (25)$$

$$E_{x2} = 1, \quad E'_{x2} = ik_{y1}. \quad (26)$$

Согласно (23) дисперсионное уравнение относительно постоянных распространения ТЕ мод структуры имеет вид

$$ik_{yn+2}E_{xn+2} - E'_{xn+2} = 0, \quad (27)$$

а формула (21) остается без изменений.

Представляет интерес решение уравнений (20), (27) на комплексной плоскости и определение углов Брюстера для неоднородных слоев. Соответствующие расчеты могут быть выполнены методом контурного интегрирования [9] для конкретных структур. В следующем разделе этим методом выполнено исследование неоднородного слоя с $n = 2$, предназначенного для использования в качестве чувствительного элемента сенсора концентрации водорода в атмосфере.

Оптический сенсор водорода на плазмонных модах

Для преодоления отмеченных выше ограничений исследован сенсор призмного типа. В нем пленка палладия Pd с номером $j=2$ отделена от призмы связи из ZrO_2 ($j=4$) буферным слоем из SiO_2 ($j=3$) (см. рис.2). В данном случае $n=2$.

Дисперсионные характеристики названных материалов иллюстрирует Рис 3, они были использованы для описания мод структуры и спектра ее отражательной способности. Расчеты выполнены при их полиномиальной интерполяции в диапазоне длин волн $1.2\text{нм} \leq \lambda \leq 1.36\text{нм}$, исследованном в [5] с позиций определения спектральных характеристик палладия для тонких пленок:

$$\begin{aligned}
 n_3 &= 1.4508 - 0.013082(\lambda - \bar{\lambda}) + 0.0050256(\lambda - \bar{\lambda})^2 - \\
 &\quad - 0.010462(\lambda - \bar{\lambda})^3 + 0.037192(\lambda - \bar{\lambda})^4 - 0.051372(\lambda - \bar{\lambda})^5, \\
 k_3 &= 0, \quad \bar{\lambda} = 0.975\text{мкм}, \\
 n_4 &= 2.1274 - 0.050938(\lambda - \bar{\lambda}) + 0.077265(\lambda - \bar{\lambda})^2 - \\
 &\quad + 0.007181(\lambda - \bar{\lambda})^3 - 0.083141(\lambda - \bar{\lambda})^4 - 0.69386(\lambda - \bar{\lambda})^5 + 1.0842(\lambda - \bar{\lambda})^6, \\
 k_4 &= 0, \quad \bar{\lambda} = 0.934\text{мкм}, \\
 n_1 &= n_1^{(1)} + (n_1^{(2)} - n_1^{(1)})(\lambda - \bar{\lambda}) / 0.15\text{мкм}, \\
 k_1 &= k_1^{(1)} + (k_1^{(2)} - k_1^{(1)})(\lambda - \bar{\lambda}) / 0.15\text{мкм}, \\
 n_1^{(1)} &= 0.81205 - 0.0199616(C - \bar{C}) + 0.0029067(C - \bar{C})^2 \\
 n_1^{(2)} &= 1.90895 - 0.0316975(C - \bar{C}) + 0.00774111(C - \bar{C})^2, \\
 k_1^{(1)} &= 3.483812 - 0.00185(C - \bar{C}) + 0.0036249(C - \bar{C})^2 + \\
 &\quad + 0.00237701(C - \bar{C})^3 - 0.000963644(C - \bar{C})^4, \\
 k_1^{(2)} &= 1.287244 + 0.0030151888(C - \bar{C}),
 \end{aligned}$$

где $\bar{\lambda} = 1.2\text{мкм}$, C – процентная концентрация водорода в атмосфере, $\bar{C} = 2.8\%$. Коэффициенты полиномов определены методом наименьших квадратов по литературным данным [5, 12].

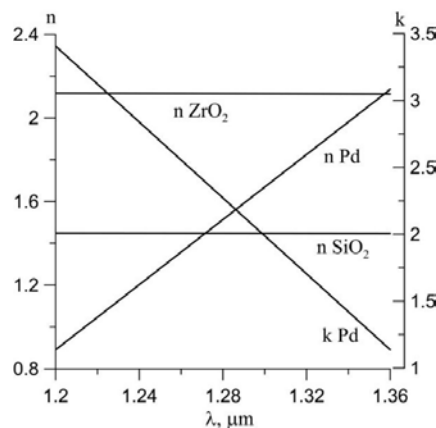


Рисунок 3. – Дисперсионные характеристики материалов, использованные при расчетах

Стандартной конфигурацией оптических сенсоров с металлическими пленками является схема Кречмана, в данной схеме металлическая пленка наносится непосредственно на основание высокопреломляющей призмы связи и возбуждается волнами ТМ поляризации [1]. В этом случае толщина буферного слоя SiO_2 $\Delta y_3 = 0$ (рис. 2). Рабочими в этих сенсорах являются плазмонные моды границы раздела сред $y = -\Delta y_2$.

Результаты расчета спектров энергетического коэффициента отражения $R = |r|^2$ ТМ волн от основания призмы связи в схеме Кречмана (т.е. от плоскости $y = 0$ на рис. 2) представлены на рис.4. Углы падения θ выбраны из условия достижения резонансного провала около центра ($\lambda = 1.28\text{nm}$) указанного выше спектрального интервала. Рис. 4а относится к пленке Pd толщиной $\Delta y_2 = 60\text{nm}$, характерной для схем Кречмана. В этом случае $\theta = 35.66^\circ$. Рис. 4б относится к упомянутой выше оптимальной толщине Pd $\Delta y_2 = 8\text{nm}$ и $\theta = 6^\circ$.

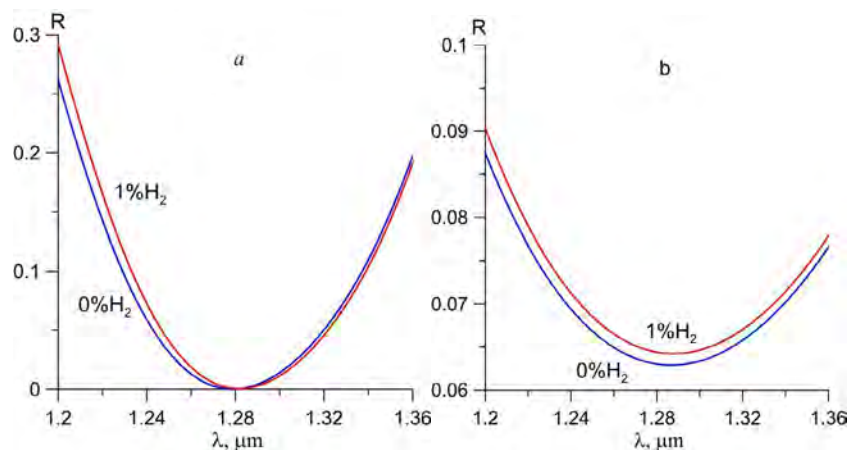


Рисунок 4. – Отражательные способности сенсоров водорода в атмосфере на плазмонных модах в схеме Кречмана при толщинах Pd пленок 60нм (а) и 8нм (б), нанесенных на основание призмы связи из ZrO_2 при концентрации водорода в атмосфере (область 1 на рис. 2) 0% и 1%

Поскольку плазмонная мода и мода Ценнека имеют качественно разные свойства, условие $R=0$ для плазмонных мод не достижимо. В частности, на рис.4а $R_{\min} \sim 10^{-4} \neq 0$. Согласно рис. 4, сенсорный эффект в рассмотренных конфигурациях выражен слабо. В частности, при оптимальной толщине Pd пленки 8нм этот эффект проявляется в равномерном увеличении отражательной способности призмы связи с ростом концентрации H_2 в атмосфере при незначительном сдвиге спектра отражения на шкале длин волн. Этот эффект аналогичен равномерному увеличению пропускания микроструктурного волокна с ростом C , наблюдавшемуся в [5]. В следующем разделе показано, что улучшение характеристик сенсоров возможно за счет использования неоднородного слоя, состоящего из двух однородных слоев Pd и SiO_2 , нанесенных на основание призмы связи из ZrO_2 . Оно достигается благодаря возбуждению в структуре сенсора бездиссипативных мод Ценнека [10].

Мода Ценнека неоднородного слоя в схеме сенсора водорода

В ходе исследований выполнен большой объем численных расчетов по установлению условий существования бездиссипативных мод Ценнека в структуре, приведенной на рис. 2. Основные усилия были направлены на отыскание подходящей толщины слоя 3 (пленка двуокиси кремния) при оптимальной толщине слоя 2 (пленки палладия) 8 нм. Оценки получены для волн как ТМ, так и ТЕ поляризации.

На рис. 5 приведена дисперсионная зависимость моды Ценнека ТМ поляризации $\beta(\lambda)$.

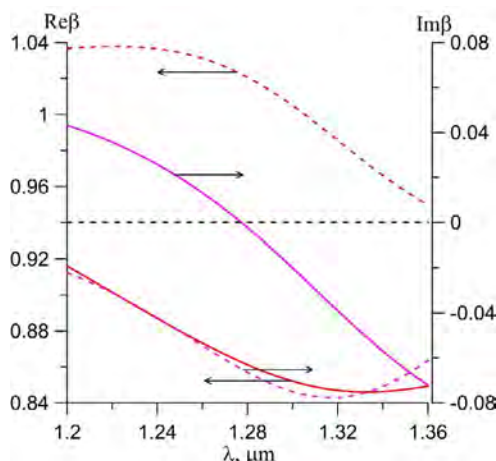


Рисунок 5. – Дисперсионные зависимости для моды Ценнека ТМ поляризации неоднородного слоя, составленного из слоев Pd и SiO₂ (сплошные кривые) и плазмонной моды границы раздела палладий – воздух. Горизонтальная штриховая прямая – нулевой уровень Imβ

Она найдена методом контурного интегрирования из дисперсионного уравнения (20) при $\Delta u_3 = 1.05$ мкм, $C = 0\%$. Здесь же для сравнения приведена дисперсионная зависимость для плазмонной моды границы раздела палладий – воздух (штриховые линии), рассчитанная по формуле (11).

Из рис. 5 видно, что зависимость $\text{Im}\beta(\lambda)$ для моды Ценнека непрерывно переходит из не физической ($\text{Im}\beta > 0$, усиление оптического сигнала) области в физическую ($\text{Im}\beta < 0$, затухание оптического сигнала). Этот переход имеет место при $\lambda = 1.2774$ мкм, $\text{Re}\beta = 0.86273$, $\theta = 24.05^\circ$ и наблюдается при пересечении кривой $\text{Im}\beta(\lambda)$ с горизонтальной штриховой кривой. В момент этого пересечения возможно призмное возбуждение бездиссипативной моды Ценнека, при котором возбуждающая волна от основания призмы связи не отражается, т. е. $R = 0$. Для сравнения, у плазмонной моды всегда $\text{Im}\beta < 0$, а при ее возбуждении $R > 0$.

Сенсорный эффект при возбуждении моды Ценнека иллюстрирует рис. 6.

В отличие от рис. 4б, этот эффект состоит в сдвиге минимума зависимости $R(\lambda)$, что и требуется для эффективной работы сенсора. Он аналогичен эффекту, имеющему место при возбуждении плазмонной моды на толстой пленке палладия (рис. 4а), но выражен несколько слабее.

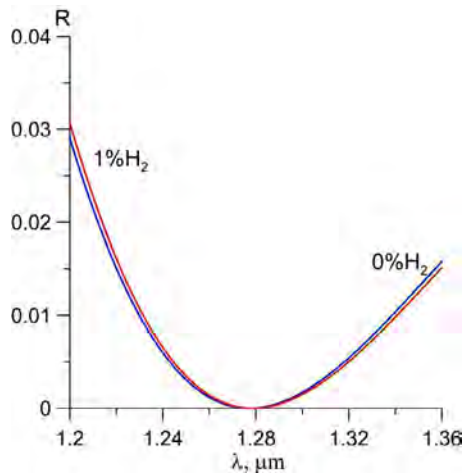


Рисунок 6. – Смещение спектра отражения от неоднородного слоя плоской волны ТМ поляризации при изменении концентрации водорода в атмосфере в условиях возбуждения моды Ценнека ($\theta = 24.05^\circ$)

Как и в случае однородного слоя [11, 12], мода Ценнека неоднородного слоя может иметь ТЕ поляризацию. Об этом свидетельствуют рис. 7 и 8, построенные после решения уравнения (27) и вычисления $R(\lambda) = |r(\lambda)|^2$ на основании (23) при $\Delta y_3 = 2 \text{ мкм}$, $C = 0\%$.

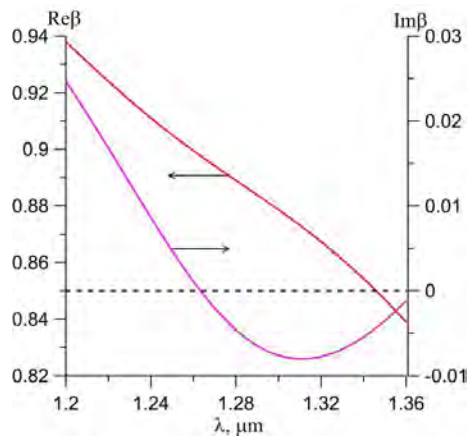


Рисунок 7. – Дисперсионная зависимость для моды Ценнека ТЕ поляризации неоднородного слоя, составленного из слоев Pd и SiO_2 (сплошные кривые). Горизонтальная штриховая прямая – нулевой уровень $\text{Im}\beta$.

Пересечение зависимостью $\text{Im}\beta(\lambda)$ нулевого уровня происходит при $\lambda = 1.2633 \text{ мкм}$, $\text{Re}\beta = 0.897658$, $\theta = 25.09^\circ$. Эти параметры соответствуют призмному возбуждению моды Ценнека ТЕ поляризации, при котором возбуждающая волна от основания призмы связи не отражается, т. е. $R = 0$. При выборе угла падения $\theta = 25.09^\circ$ имеет место сенсорный эффект, представленный на рис. 8.

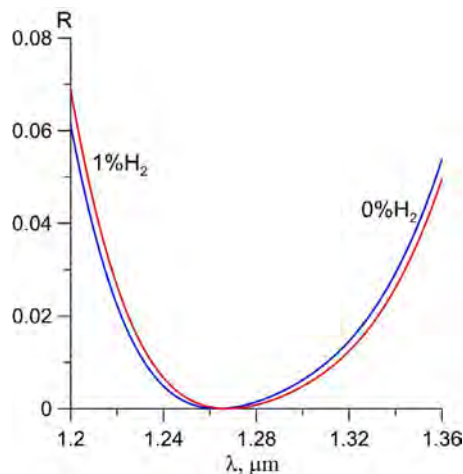


Рисунок 8. – Смещение спектра отражения от неоднородного слоя плоской волны ТЕ поляризации при изменении концентрации водорода в атмосфере в условиях возбуждения моды Ценнека ($\theta = 25.09^\circ$)

О чувствительности исследованных призмных сенсоров водорода позволяет судить таблица, где $\Delta\lambda$ – сдвиг резонансной длины волны, соответствующей минимуму зависимости $R(\lambda)$, при увеличении концентрации водорода C от 0 % до 1 % (см. рис. 4, 6, 8).

Таблица. Сравнение спектральной чувствительности исследованных сенсоров водорода призмного типа.

№ сенсора	Поляризация	Δu_2 , нм	Δu_3 , нм	θ , град	$\Delta\lambda$, нм
1	ТМ	60	0	35.66	2.9
2	ТМ	8	0	6	-1.0
3	ТМ	8	1050	24.05	1.5
4	ТЕ	8	2000	25.09	4.1

Согласно рис. 4, 6, 8 и таблице среди рассмотренных устройств наиболее чувствительным является сенсор водорода с возбуждением бездиссипативной моды Ценнека ТЕ поляризации.

Заключение

Разработана техника расчета спектров энергетических коэффициентов отражения плоских волн от слоистых структур, моделирующих призмное устройство связи, и дисперсионных характеристик мод, направляемых такими структурами. Установлено, что неоднородный диссипативный слой, составленный из однородных слоев двуокиси кремния и палладия, нанесенных на основание призмы связи из двуокиси циркония, может направлять бездиссипативные моды Ценнека ТМ, либо ТЕ поляризации, возбуждаемые под углами Брюстера (углами нулевого отражения плоских волн от структуры). Тем самым доказано существование углов Брюстера для неоднородных слоев на подложках. Этот результат обобщает недав-

но установленный в литературе факт о существовании углов Брюстера для более простых диссипативных структур однородная пленка-подложка. Выполнен сравнительный анализ четырех сенсоров призмного типа для детектирования концентрации водорода в атмосфере с чувствительными элементами в виде наноразмерных пленок палладия. Показано, что наибольшей чувствительностью обладает сенсор, допускающий призмное возбуждение бездиссипативной моды Ценнека TE поляризации.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «1.15 Фотоника и электроника для инноваций».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Piliaric, M.* Surface plasmon resonance (SPR) sensors: approaching their limits? / M. Piliaric, J. Homoda // Opt. Express. – 2009. – Vol. 17, № 19. – P. 16505–16517.
2. *Кукушкин, А. В.* Об условиях существования быстрой поверхностной волны / А. В. Кукушкин, А. А. Рухадзе, К. З. Рухадзе // УФН. – 2012. – Т. 182, № 11. – С. 1205–1215.
3. *Huang, P.* Note: Durability analysis of optical fiber hydrogen sensor based on Pd-Y alloy film / P. Huang, Y. Chen, G. Zhang, H. Song, Y. Liu // review of scientific instruments. – 2016. – Vol. 87, № 2. – P. 026104–026104-3.
4. *Minkovich, V. P.* Microstructured optical fiber coated with thin films for gas and chemical sensing / V. P. Minkovich, D. Monzón-Hernández, J. Villatoro, G. Badenes // Optics Express. – 2006. – Vol. 14, № 18. – P. 8413–8418.
5. *Minkovich, V. P.* Taper with palladium coating in photonic crystal fiber as a sensitive element of hydrogen sensor / V. P. Minkovich, A. B. Sotsky, A. V. Shilov, L. I. Sotskaya // Journal of Applied Spectroscopy – 2019 – Vol. 86, № 1. – P. 112–119. Doi: 0021-9037/19/8601-0112
6. *Маркузе, Д.* Оптические волноводы / Д. Маркузе. – М. : Мир, 1974. – 576 с.
7. *Ландау, Л. Д.* Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1982. – 621 с.
8. *Борн, М.* Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М. : Наука, 1970. – 855 с.
9. *Сотский, А. Б.* Теория оптических волноводных элементов / А. Б. Сотский. – Могилев : Мог. гос. ун-т, 2011. – 456 с.
10. *Чудаков, Е. А.* Нулевое отражение световых волн от призмы связи при возбуждении слоистой среды / Е. А. Чудаков, В. Г. Кручков, А. Б. Сотский // Проблемы взаимодействия излучения с веществом: материалы конференции посвященной 110-летию со дня рождения Ф.И. Федорова. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 25 июня 2021. – С. 375–377.
11. *Сотский, А. Б.* Углы Брюстера для диссипативной пленочной структуры / А. Б. Сотский, С. С. Михеев, М. М. Назаров // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 6. – С. 672–679.
12. *Сотский, А. Б.* Чувствительность отражательных терагерцовых сенсоров водных растворов / А. Б. Сотский [и др.] // ЖТФ. – 2021. – Т. 29, вып. 2. – С. 315–325.

Поступила в редакцию 21.06.2023 г.

Контакты: kenni_mark@bk.ru (Сотский Александр Борисович, Чудаков Евгений Александрович)

Sotsky A. B., Chudakov E. A. ZERO LIGHT REFLECTION FROM INHOMOGENEOUS LAYER

A technique has been developed for calculating the spectra of energy reflection coefficients of plane waves from layered structures simulating a prism coupling device and the dispersion characteristics of modes guided by such structures. It has been established that an inhomogeneous dissipative layer composed of homogeneous layers of silicon dioxide and palladium deposited on the base of a zirconium dioxide-coupling prism can guide dissipative Zenneck TM or TE

polarization modes excited at Brewster angles. A comparative analysis of four prism-type sensors for detecting the concentration of hydrogen in the atmosphere with sensitive elements in the form of nanoscale palladium films has been performed. It is shown that the sensor that allows prismatic excitation of the non-dissipative Zenneck mode of TE polarization has the highest sensitivity.

Keywords: surface electromagnetic waves, Zenneck mode, Kretschmann scheme, coupling prism, inhomogeneous layers, Brewster angle.

УДК 535.662:681.7.068

СТРУКТУРНАЯ ОКРАСКА СИНТЕТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН С КЛАСТЕРНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

А. Б. Сотский

доктор физико-математических наук, профессор
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. В. Шилов

старший преподаватель
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В настоящей работе исследована проблема получения выраженной структурной окраски синтетических фотонно-кристаллических волокон с кластерным поперечным сечением при их боковом освещении естественно поляризованным светом. Разработан метод расчета матриц рассеяния для таких волокон, в оболочке которых присутствует несколько десятков кластеров одинаковой структуры, которые заключены в непересекающиеся окружности и могут быть произвольно ориентированы относительно центра волокна. Найдены параметры гексагональной структуры образующих кластеров, позволяющие значительно увеличить контраст и монохроматичность структурного окрашивания волокна. Полученный результат объяснен с привлечением зонной теории бесконечных фотонных кристаллов.

Ключевые слова: фотонно-кристаллическое волокно, структурная окраска, зонная теория двумерных фотонных кристаллов, кластерное поперечное сечение.

Введение

На сегодняшний момент известно несколько способов создания структурной окраски материалов. В целом эти способы можно разделить на две группы – использование волокон с оболочкой в виде брэгговских многослойных зеркал [1] или создание различными способами на поверхности существующих текстильных нитей трехмерных фотонных кристаллов из коллоидных нано-частиц [2–6]. Как показывают авторы в [1], эффективность структурной окраски в волокнах с периодической структурой полимерных слоев низкая, и необходимо возбуждать моды внутри нитей изготовленных прототипов тканей с помощью мощных излучателей. Методы гравитационной седиментации и вертикального осаждения, необходимые для упорядочивания нанесенных частиц SiO_2/PEI , предложенные в [5], или метод распыления водных растворов частиц с гидрофобным ядром из полистирола и гидрофильной оболочкой из полиметилметакрилата [6] усложняют технологии получения структурной окраски второй группы и приводят к их значительной дороговизне. Кроме того, нанесение нано-покрытий требует использования различных химических реагентов, что уравнивает данные технологии по негативному воздействию на окружающую среду с традиционным химическим окрашиванием тканей. С другой стороны, проведенный анализ характерного размера рассеивающих частиц или неоднородностей поверхности в работах [1–7] показывает, что для интенсивного рассеивания некоторого достаточно узкого участка видимого

спектра (порядка 100–150 нм) он должен быть сравнимым или даже в несколько раз меньше длины волны света, испытывающего рассеяние. Поэтому для упрощения и снижения стоимости технологии изготовления структурно окрашенных нитей в литературе [8, 9] было предложено создавать нити из фотонно-кристаллического волокна (далее ФКВ) без использования сложных покрытий из наночастиц. В таком случае эффект окрашивания может происходить за счет поперечной дифракции падающего света на внутренней структуре волокна и селективного рассеяния достаточно узкого участка видимого спектра. Так, в работе [8] была промоделирована структурная окраска ФКВ с воздушными каналами циркулярного сечения в оболочке и показано, что дифракционное рассеяние света ФКВ с периодом гексагональной симметрии равным 2,5 мкм не имеет достаточной монохроматичности. В [10] сделаны первые шаги к устранению слабой эффективности окрашивания, однако общий диаметр спроектированных волокон не превышает 2,5 мкм. С другой стороны, для сохранения геометрии и пропорций в сечении волокна при производственной вытяжке, его диаметр должен быть не менее 20 мкм.

В настоящей работе показано, что описанные выше противоречия можно разрешить путем создания ФКВ с многочисленными близкорасположенными воздушными каналами с субволновым размером [7, 10]. Эти обстоятельства могут привести к резкому повышению монохроматичности и контрастности структурного окрашивания. Поэтому разработан метод расчета матриц рассеяния дифракционных полей на внешней границе ФКВ с кластерной структурой, который позволяет развить методику расчета, описанную в [8–10], и преодолеть аппаратное ограничение на выделение оперативной памяти для хранения элементов трехмерных массивов для расчета матриц рассеяния. На основе использования этого алгоритма найдены параметры фотонно-кристаллических волокон с кластерной компоновкой воздушных каналов и сформулированы условия получения их выраженной структурной окраски.

1. Количественная оценка структурной окраски волокна

Как известно [8, 10, 11], степень структурной окраски ФКВ определяется интенсивностью и монохроматичностью рассеянного света в дальней зоне при условии освещения ФКВ неполяризованным светом от удаленного точечного источника. Поэтому имеет смысл исследовать погонное дифференциальным поперечным сечением рассеяния вида

$$\sigma(\alpha) = 0.5[\sigma_p(\alpha) + \sigma_s(\alpha)], \quad (1)$$

где α – угол наблюдения, отсчитанный от нормали к волновому фронту падающего пучка; $\sigma_p(\alpha)$ и $\sigma_s(\alpha)$ – погонные дифференциальные поперечные сечения рассеяния плоских волн ТМ- и ТЕ-поляризации вида

$$\sigma_p(\alpha) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} (2\pi\rho |H_z|^2), \quad \sigma_s(\alpha) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} (2\pi\rho |E_z|^2), \quad (2)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от волокна до точки наблюдения.

Если падающее поле на внешней границе волокна представляется рядами Фурье с коэффициентами $A_\mu = \exp[i\mu(\psi - \pi)]$ (здесь ψ – угол ориентации волокна по отношению к волновому фронту, см. фрагмент а рисунка 1) и разложить в ряды Фурье также компоненты рассеянного поля H_z и E_z на внешней границе, используя известные асимптотики функций Ханкеля [13], выражение (2) приводится к виду

$$\sigma_{p,s}(\alpha) = \frac{4}{k_0 \sqrt{\varepsilon_a}} \left| \sum_{\nu=-n}^n \exp(i\nu\alpha) \sum_{\mu=-n}^n S_{\nu\mu}^{(p),(s)} \exp[i(\mu - \nu)(\psi - \pi)] \right|^2, \quad (3)$$

где под $S_{\nu\mu}^{(p)}$ и $S_{\nu\mu}^{(s)}$ понимаются глобальные матрицы рассеяния всего волокна, относящиеся к волнам ТМ- и ТЕ-поляризации, расчет которых подробно описан в [8, 10].

Кроме того, в текстильной промышленности представляет интерес оценка окраски ФКВ, находящегося на черном фоне [1]. Поэтому для интегральной оценки отражательной способности ФКВ удобно рассматривать интегральное погонное поперечное сечение рассеяния σ_i , усредненное в диапазоне углов $0.5\pi \leq \alpha \leq 1.5\pi$, вида

$$\sigma_i = \frac{1}{2\pi} \int_{0.5\pi}^{1.5\pi} \sigma(\alpha) d\alpha. \quad (4)$$

Так как в ткани ориентация волокон может быть случайной, то в такой ситуации окраску ФКВ можно охарактеризовать величинами дифференциального сечения $\bar{\sigma}(\alpha)$ и интегрального сечения $\bar{\sigma}_i$, усредненных по углу ориентации ψ :

$$\bar{\sigma}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\alpha) d\psi, \quad \bar{\sigma}_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_i d\psi = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_{0.5\pi}^{1.5\pi} \sigma(\alpha) d\alpha. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение величину K_σ , характеризующую контрастность наблюдаемой структурной окраски ФКВ и определяемую следующим соотношением

$$K_\sigma = \left[(\bar{\sigma}_i)_{\max} - (\bar{\sigma}_i)_{\min} \right] \cdot 100\% / (\bar{\sigma}_i)_{\max}, \quad (6)$$

где $(\bar{\sigma}_i)_{\max}$ и $(\bar{\sigma}_i)_{\min}$ – максимальное и минимальное значения интегрального сечения рассеяния, усредненного по углам α и ψ по формуле (5).

2. Расчет матриц рассеяния волокна с кластерным сечением

Во введении были обозначены проблемы, возникающие при расчете сечений рассеяния для ФКВ с многочисленными воздушными каналами произвольной формы в диэлектрической матрице по методике, описанной в [8]. Данное ограничение на выделение оперативной памяти можно преодолеть, если в сечении волокна выделить одинаковые области или кластеры, которые могут быть заключены в непересекающиеся окружности и содержать как один, так и несколько (несколько десятков) воздушных каналов, и иметь различную ориентацию друг относительно друга. Такая конфигурация волокна представлена на фрагменте б рисунка 1.

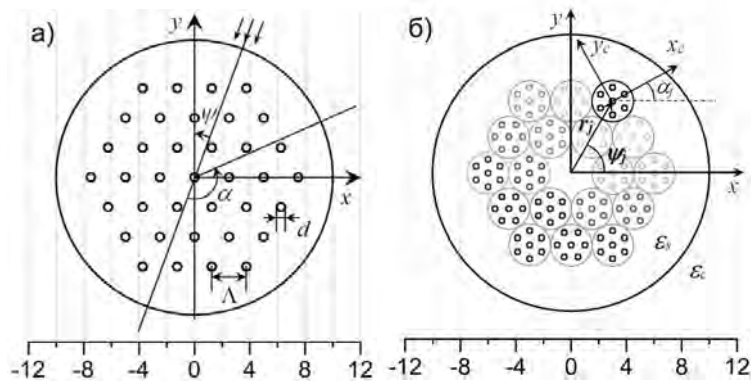


Рисунок 1 – Поперечные сечения ФКВ с одиночными круглыми воздушными каналами [8] а) и кластерной структурой в сечении ФКВ б) (ψ_j, r_j – координаты центра кластера, α_j – ориентация кластера относительно глобальной системы координат)

В таком случае поля, рассеянные каждым кластером, считаются один раз, а поворот учитывается при использовании функции Грина в системе интегральных уравнений [12]. Такой алгоритм расчета дифракционных или рассеянных полей на оболочке волокна в случае наличия кластерной структуры с воздушными каналами сложного сечения может быть сведен к отдельному расчету матриц рассеяния падающих волн ТЕ- и ТМ-поляризации и включает следующие этапы:

1. Расчет геометрии волокна, а именно расчет координат центров кластеров согласно выбранной симметрии (гексагональная, прямоугольная, круговая), расчет радиуса кластера и внешнего радиуса волокна в целом;

2. Расчет матриц рассеяния ТЕ- и ТМ-поляризации одного кластера. На данном шаге алгоритма можно дополнительно выделить следующие операции:

- определение вклада поля, рассеянного k -м воздушным каналом кластера в поле j -м воздушного канала по теореме сложения цилиндрических функций Графа [12]. Здесь и далее номера j и k пробегает значения от 1 до nh , где nh -число воздушных каналов в кластере;
- определение вкладов полей k -канала кластера в окружение воздушных каналов кластера или оболочку кластера и наоборот, вклад поля окружения канала в поле k -канала;
- расчет самодействия поля для оболочки кластера;
- получение алгебраической системы уравнений для рассеянного поля на внешней границе кластера с помощью теоремы Грина [11,12], которую можно записать в виде

$$D_v^2 = L_{vm} D_v^1, \quad (7)$$

где D_v^1 – амплитуды функции Бесселя J_v в рядах Фурье для падающего поля; D_v^2 – амплитуды функции Ханкеля $H_v^{(2)}$ в рядах Фурье для рассеянного поля; L_{vm} – матрица рассеяния кластера, записанная в локальной полярной системе координат кластера.

3. Определение вклада поля кластера j в поле кластера k по формулам:

$$D_{kv}^1 = \sum_{\mu=-nc}^{nc} U_{\mu\nu}^{jk} D_{j\mu}^1, \quad (8)$$

$$U_{\mu\nu}^{jk} = e^{iv(\alpha_k - \varphi_{jk})} \sum_{n=-nc}^{nc} H_{n-\nu}^{(2)}(k_s l_{jk}) \cdot e^{in(\varphi_{jk} - \alpha_j)} L_{n\mu}$$

где $nc = nm$ – есть порядок редукции по числу гармоник в рядах Фурье на круговой границе кластера с номером k ; ψ_j, r_j – координаты центра кластера, α_j – ориентация кластера относительно глобальной системы координат.

4. Определение вклада поля оболочки в поле кластера k по формуле

$$D_{kv}^1 = \sum_{m=-no}^{no} W_{vm}^{k2} D_m^1, \quad W_{vm}^{k2} = -\frac{iAk_0\pi\sqrt{\varepsilon_s}}{4} J_{m-\nu}(k_s A) e^{i(m-\nu)\psi_j + iv\alpha_j} \cdot$$

$$\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_a}} H_m(k_s A) (J_{m-1}(k_c A) - J_{m+1}(k_c A)) - J_m(k_c A) \cdot \right. \\ \left. \cdot (H_{m-1}(k_s A) - H_{m+1}(k_s A)) \right]. \quad (9)$$

5. Получение уравнения для кластера в виде:

$$D_{kv}^1 - \sum_{j \neq k} \sum_{\mu=-nc}^{nc} U_{\mu\nu}^{jk} D_{j\mu}^1 - \sum_{\mu=-no}^{no} W_{v\mu}^{k2} D_\mu^2 = \sum_{\mu} W_{v\mu}^{k2} D_\mu^1, \quad (10)$$

где коэффициенты $W_{v\mu}^{k2}$ определяются соотношениями:

$$W_{v\mu}^{k2} = -\frac{iAk_0\pi\sqrt{\varepsilon_s}}{4} J_{m-1}(k_s r_j) e^{i(m-\nu)\psi_j + iv\alpha_j} \times$$

$$\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_a}} H_\mu(k_s A) (H_{\mu-1}(k_c A) - H_{\mu+1}(k_c A)) - H_\mu(k_c A) \cdot \right. \\ \left. \cdot (H_{\mu-1}(k_s A) - H_{\mu+1}(k_s A)) \right]. \quad (11)$$

6. Получение алгебраической системы уравнений для всего волокна в виде

$$B_\nu = S_{v\mu} A_\mu, \quad (12)$$

где $S_{v\mu}$ – глобальная матрица рассеяния всего волокна; B_ν – амплитуды функций Ханкеля рассеянного поля на границе волокна $\rho = A$; A_μ – амплитуды функций Бесселя для падающего поля плоской волны, считаются известными.

По соотношениям (7)–(12) для алгоритма расчета матриц рассеяния дифракционных полей на границе волокна и погонных дифференциальных и интегральных сечений рассеяния по формулам (1)–(8) для волокон с кластерной структурой было создано приложение на языке программирования Fortran 90.

3. Выбор параметров синтетического волокна по максимумам интегральных и дифференциальных сечений рассеяния

Структура ФКВ с круглыми воздушными каналами полностью определяется двумя параметрами – периодом гексагональной структуры Λ и диаметром воздушных каналов d (см. рисунок 1, а). Поэтому для поиска параметров конфигураций ФКВ с выраженным окрашиванием использовались нормированный на длину

волны период Λ/λ и нормированный на период радиус воздушного канала r/Λ . Производился поиск таких комбинации Λ/λ и r/Λ , при которых значения дифференциального и интегрального сечений рассеяния $\bar{\sigma}(\alpha)$ и $\bar{\sigma}_i$ в диапазоне углов наблюдения $0.5\pi \leq \alpha \leq 1.5\pi$ имели бы максимальные значения. Используемый диапазон углов наблюдения соответствует рассеянию падающего света в обратную полуплоскость. В качестве материала оболочки выбран полиэтилентерефталат (PETF) с диэлектрической проницаемостью оболочки $\varepsilon_s = (1.576)^2$ [8,9], окружающая среда – воздух.

Для упрощения и ускорения поиска искомых параметров ФКВ рассматривался один кластер, состоящий из 19 воздушных каналов с гексагональной симметрией (два гексагональных кольца), находящийся в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_c = \varepsilon_s$ (см. рисунок 1, б). Данное условие аналогично рассмотрению сечений рассеяния отдельного кластера в системе волокна, состоящего из нескольких кластеров. Значения параметров Λ/λ и r/Λ изменялись в диапазонах $0.01 \leq \Lambda/\lambda \leq 2.0$ и $0 < r/\Lambda < 0.5$ с шагом 0.002. Двумерный график зависимости $\bar{\sigma}_i$ от параметров Λ/λ и r/Λ приведен на рисунке 2.

Как видно из рисунка 2, существует ряд локальных экстремумов $\bar{\sigma}_i$ в диапазонах произведенного поиска. Чтобы провести анализ полученных значений экстремумов, введем в рассмотрение величину K_{back} , вычисляемую по формуле

$$K_{back} = \bar{\sigma}_i / \bar{\sigma}_{2\pi} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\psi \left[\int_{0.5\pi}^{1.5\pi} \sigma(\alpha) d\alpha / \int_0^{2\pi} \sigma(\alpha) d\alpha \right], \quad (13)$$

где $\bar{\sigma}_i$ и $\bar{\sigma}_{2\pi}$ – имеют смысл интегральных сечений рассеяния, усредненных по углу ориентации и в диапазонах углов наблюдения $0.5\pi \leq \alpha \leq 1.5\pi$ и $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ соответственно.

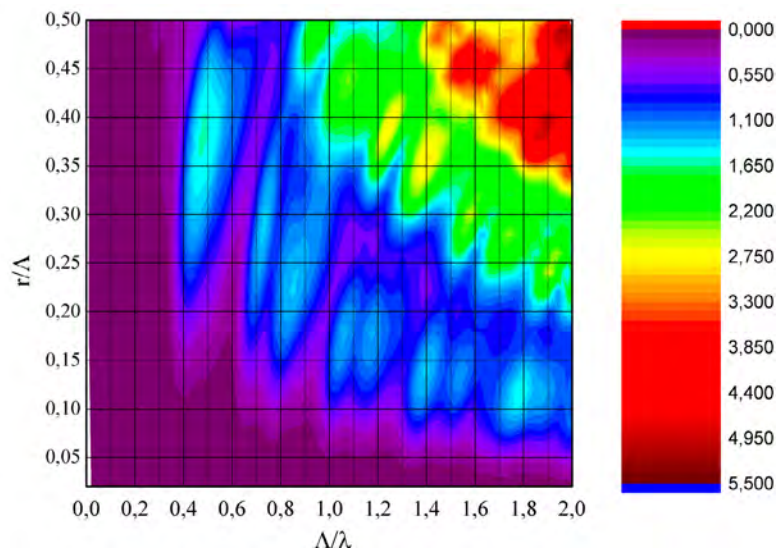


Рисунок 2 – Двумерный график зависимости $\bar{\sigma}_i$ от нормированных параметров Λ/λ и r/Λ для кластера, состоящего из двух гексагональных слоев каналов в диэлектрической матрице. Оцифровка шкалы градаций цветов, определяющей значения $\bar{\sigma}_i$, дана в мкм

Назовем введенную величину K_{back} коэффициентом обратного рассеяния, исходя из смысла выражения (13). Чтобы выбрать оптимальные значения максимумов $\bar{\sigma}_i$ для получения выраженной окраски ФКВ, обратимся к таблице 1, в которой приведены наиболее выраженные экстремумы зависимости рисунка 2.

Анализируя значение величины K_{back} , которая отвечает за степень обратного рассеяния, можно сделать вывод, что большинство локальных максимумов не превосходят значения $K_{back}=0,26$ за исключением значений 5 следующих строк таблицы 1 (отмечены*): 1,4,11,15,16,17. Среди указанных строк, максимумы с номерами 4, 16 не представляют практического интереса, ибо значение нормированного радиуса r/Λ у них равно 0.49 и почти соответствует предельному случаю $r/\Lambda=0.5$. ФКВ с таким радиусом невозможно изготовить технологически в виду малых перегородок между отверстиями волокна. Максимумы из строк 11 и 17 тоже почти подпадают под указанное ограничение, их можно считать сомнительными. Поэтому из таблицы 1 получаем два максимума в первой и пятнадцатой строках, которые рассмотрим далее. Это две пары нормированных параметров $\Lambda/\lambda=0.478$, $r/\Lambda=0.384$ и $\Lambda/\lambda=1.90$, $r/\Lambda=0.40$.

Таблица 1 – Значения параметров ФКВ, соответствующих локальным максимумам величины $\bar{\sigma}_i$ рисунка 2

№	Λ/λ	r/Λ	$\bar{\sigma}_i$, мкм	$\bar{\sigma}_{2\pi}$, мкм	K_{back}
1*	0.478	0.384	1.564406	5.452265	0.287
2	0.74	0.30	1.362261	8.612551	0.158
3	0.85	0.22	1.337790	7.701032	0.174
4*	0.95	0.49	2.166106	8.122809	0.267
5	1.07	0.18	1.239931	8.461780	0.147
6	1.076	0.438	2.317584	10.111237	0.229
7	1.18	0.18	1.236616	9.961110	0.124
8	1.25	0.39	2.826699	12.084941	0.234
9	1.41	0.14	1.348808	8.869843	0.152
10	1.41	0.36	2.907418	12.543515	0.232
11*	1.56	0.46	4.060874	15.005116	0.271
12	1.74	0.28	2.355045	18.229645	0.129
13	1.79	0.12	1.557754	10.507363	0.148
14	1.90	0.24	2.507331	17.056075	0.147
15*	1.90	0.40	5.043156	17.484391	0.288
16*	1.97	0.49	5.115738	19.693883	0.260
17*	2.00	0.46	5.488835	17.669358	0.311

Если выбрать в качестве цвета структурной окраски зеленый с длиной волны $\lambda=0.564$ мкм (данное значение соответствует максимуму чувствительности человеческого глаза в зеленом участке спектра [8]), то значения периода структуры и радиуса воздушных каналов двух оптимизированных случаев принимают значения $\Lambda=0.266$ мкм и $r=0.102$ мкм, $\Lambda=1.072$ мкм и $r=0.429$ мкм соответственно. Попе-

речные сечения оптимизированных ФКВ приведены на фрагментах *б, в* рисунка 3 соответственно. Сечение волокна на фрагменте *а*, состоит из 30 кластеров, центры которых подчиняются гексагональной симметрии с оптимальными размерами воздушных каналов. Сечение волокна, представленного на фрагменте *в* рисунка 3, имеет конфигурацию из [8] с оптимизированными параметрами. Рассчитанные по алгоритму, описанному в разделе 2, а также интерполированные полиномом 10-20 степени зависимости угловых и спектральных распределений дифференциальных и интегральных сечений рассеяния для предложенных новых конфигураций и для конфигурации волокна из [8] представлены на фрагментах *а-г* рисунка 4.

Как видно из фрагментов *б* и *г* рисунка 4, зависимости интегральных сечений рассеяния для волокон без воздушных каналов (номера кривых 2, 3 и 5) не имеют экстремумов и отличаются только усредненными значениями, соотношение которых пропорционально отношению диаметров волокон.

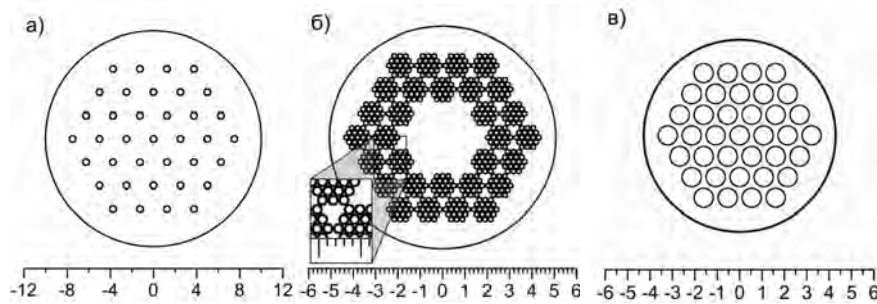


Рисунок 3 – Поперечные сечения ФКВ. а) – поперечное сечение ФКВ с одиночными круглыми воздушными каналами [8], б) – поперечное сечение ФКВ с кластерной структурой воздушных каналов в диэлектрической матрице. в) – поперечное сечение ФКВ со структурой, аналогичной работе [8], с оптимизированными размерами. Оцифровка шкал дана в микронах

По сравнению с ними остальные кривые имеют выраженные экстремумы, причем контрастность структурной окраски у волокна с кластерной структурой выше, чем у волокон со структурой в виде трех гексагональных колец, рассмотренной в [8]. Анализ фрагмента *г* рисунка 4 показывает, что набор параметров $\Lambda = 1.072$ мкм и $r = 0.429$ мкм не позволяет выделить в рассеянном спектре узкую полосу с приемлемой контрастностью, качество структурной окраски практически не улучшается по сравнению с [8].

Из фрагмента *в* рисунка 4 видно, что оптимизация параметров лишь незначительно увеличила обратное рассеяние при угле наблюдения $\alpha = \pi$. В противовес этому, волокно с многочисленными каналами в оболочке и параметрами $\Lambda = 0.266$ мкм и $r = 0.102$ мкм демонстрирует хороший результат. Так, контрастность $K_{\sigma,i}$, определяемая соотношением (12), имеет значение для кластерной конфигурации $K_{\sigma,1} = 60\%$, что в 3 раза больше, чем для случая ФКВ, рассмотренного в [8] ($K_{\sigma,0} = 19\%$) и в 2 раза больше оптимизированной конфигурации из [8] ($K_{\sigma,4} = 27\%$). Также из фрагмента *б* рисунка 4 следует, что значение максимума сечения рассеяния $\bar{\sigma}_i(\lambda)$ для кривой 1 в полтора раза больше, чем максимум кри-

вой 0, несмотря на то, что общий диаметр волокна, соответствующего кривой 1 меньше в два раза, чем представленный в [8]. Эти рассуждения позволяют сделать вывод об успешной оптимизации параметров ФКВ. Также успешность поиска оптимальных параметров синтетических волокон для получения выраженной структурной окраски можно подтвердить фактом резкого спада значения при удалении от центральной длины волны $\lambda_0=0.564$ мкм, на которой проводилась оптимизация.

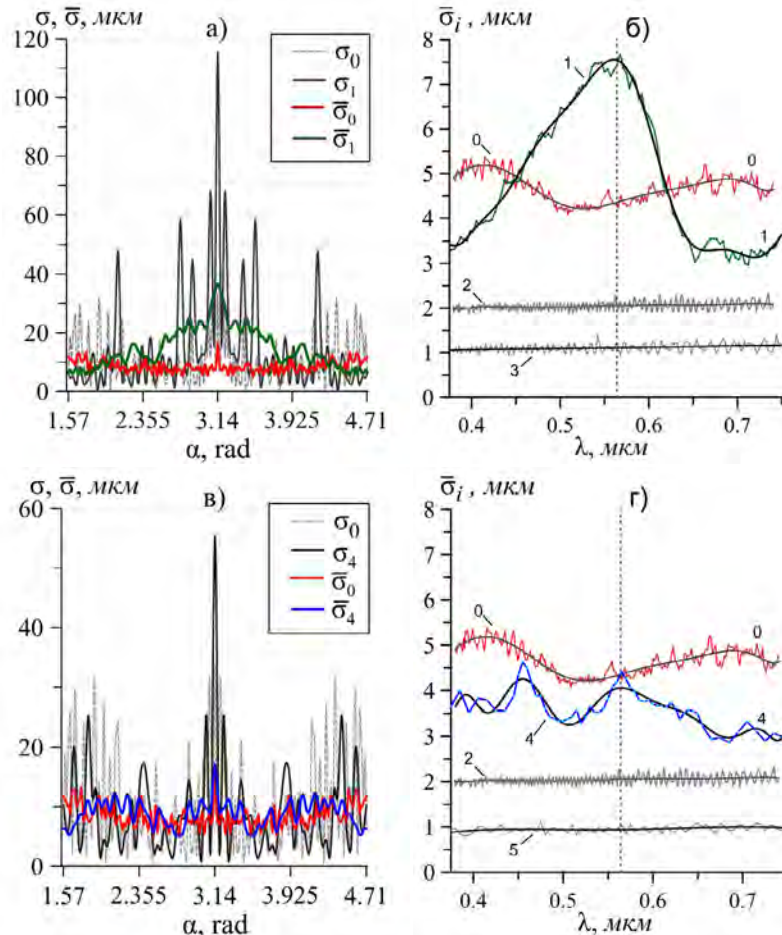


Рисунок 4 – Угловые зависимости дифференциальных $\bar{\sigma}(\alpha)$ а,в) и спектральные зависимости интегральных б,г) сечений рассеяния $\bar{\sigma}_i$ для двух типов ФКВ.

Номера кривых соответствуют: 0 – ФКВ, исследованному в [8]; 1 – ФКВ с кластерной структурой и оптимизированными параметрами, 4 – ФКВ со структурой, аналогичной работе [8], и оптимизированными параметрами, 2,3,5 – однородным волокнам с диаметрами 20 мкм, 10 мкм и 8.5 мкм соответственно

Чтобы качественно понять причины возникновения выраженной структурной окраски у ФКВ с кластерной компоновкой воздушных каналов с параметрами $\Lambda/\lambda=0.478$, $r/\Lambda=0.384$ обратимся к зонной теории фотонных кристаллов. Рассмотрим ключевые моменты построения системы дифференциальных уравнений, детально описанные в работе [10].

Для этого на основании теоремы Блоха решение системы дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитные поля внутри бесконечного фотонного кристалла, было представлено в виде [13, 14]

$$H_z = \Phi(x, y)e^{-i\gamma_x x - i\gamma_y y}, \quad (14)$$

где $\Phi(x, y)$ периодическая по координатам функция определялась как

$$\Phi(x, y) = \sum_n \sum_m \hat{\Phi}_{nm} e^{i\frac{\pi}{a_x}nx + i\frac{\pi}{a_y}my} = \sum_n \sum_m \hat{\Phi}_{nm} e^{ik_x x + ik_y y} \quad (15)$$

Входящие в выражение (15) величины a_x и a_y имеют смысл полупериодов решетки кристалла, а k_x и k_y волновые числа решетки в направлении оси Ox и Oy соответственно (см. рисунок 5). При гексагональной симметрии кристалла a_x и a_y могут быть выражены через период Λ как

$$a_x = \Lambda/2; \quad a_y = \sqrt{3}\Lambda/2. \quad (16)$$

Далее решение вида (14)-(15) подставлялось в уравнение для волн ТМ-поляризации и понижался порядок дифференциальных уравнений в частных производных до системы обыкновенных дифференциальных уравнений по схеме Галеркина [10, 12].

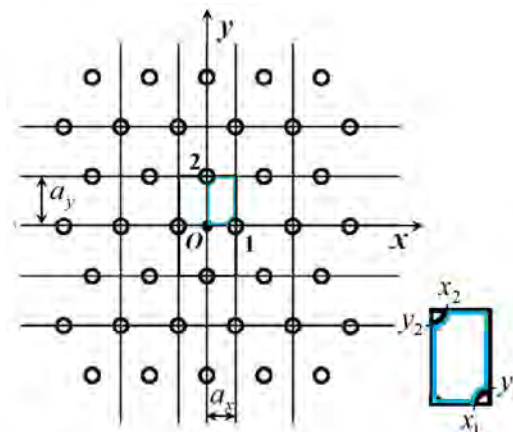


Рисунок 5 – Элементарная ячейка в периодической структуре гексагонального фотонного кристалла. Цифрами 1 и 2 отмечены воздушные каналы, рассматриваемые в (17)–(18). Точки x_1, y_1 и x_2, y_2 соответствуют местам пересечения контуров границ 1 и 2 воздушного канала

С учетом симметрии элементарной ячейки гексагональной структуры (см. рисунок 5) в результате всех упрощений (в том числе регуляризации интегралов) для ТМ-волн распространяющихся внутри кристалла была получена следующая система

$$a_x a_y \hat{\Phi}_{nm} (k_0^2 \varepsilon_0 - \xi_n^2 - \eta_m^2) + \sum_{\nu\mu} M_{nm\nu\mu} \hat{\Phi}_{\nu\mu} = 0, \quad (17)$$

где $M_{nm\nu\mu} = \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \left\{ \xi_\nu \int_0^{y_1} dy \cos\left(\frac{\pi}{a_y}(\mu - m)y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a_x}(\nu - n)x_1(y)\right) - \right.$

$$\begin{aligned}
& - \int_{y_2}^{a_y} dy \cos\left(\frac{\pi}{a_y}(\mu - m)y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a_x}(\nu - n)x_2(y)\right) \Bigg] + \\
& + \eta_\mu \left[\int_0^{x_2} dx \cos\left(\frac{\pi}{a_x}(\nu - n)x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a_y}(\mu - m)y_2(x)\right) - \right. \\
& - \int_{x_1}^{a_x} dx \cos\left(\frac{\pi}{a_x}(\nu - n)x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a_y}(\mu - m)y_1(x)\right) \Bigg] + \\
& + k_0^2 \Delta \varepsilon \left\{ \int_{x_1}^{a_x} dx \cos\left(\frac{\pi}{a_x}(\nu - n)x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a_y}(\mu - m)y_1(x)\right) \Bigg/ \left(\frac{\pi}{a_y}(\mu - m)\right) + \right. \\
& \left. + \int_{y_2}^{a_y} dy \cos\left(\frac{\pi}{a_y}(\mu - m)y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a_x}(\nu - n)x_2(y)\right) \Bigg/ \left(\frac{\pi}{a_x}(\nu - n)\right) \right\} \quad (18)
\end{aligned}$$

Входящие в (18) функции $y_1(x)$, $x_1(y)$ описывают контур воздушного канала 1, охватываемый частью элементарной ячейки, $y_2(x)$, $x_2(y)$ – контур канала 2 (см. рисунок 5). Пределы интегрирования x_1, y_1 и x_2, y_2 однозначно выражаются через радиус канала r и a_x, a_y , а ξ_n и η_m определяются следующим образом:

$$\xi_n = k_x - \gamma_x = n\pi/a_x - \gamma_x; \quad \eta_m = k_y - \gamma_y = m\pi/a_y - \gamma_y, \quad (19)$$

где значения γ_x и γ_y определяются неравенствами $\pi/a_x \geq \gamma_x \geq 0$, $\pi/a_y \geq \gamma_y \geq 0$. Величину γ_x , которая имеет смысл горизонтальной проекции волнового вектора падающей волны, можно связать с углом падения в виде

$$\gamma_x = \beta k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_s} \sin \theta. \quad (20)$$

Сформулированная система уравнений с матричными элементами в четырехмерном пространстве индексов m, n, ν, μ , каждый из которых изменяется в пределах $-nr, +nr$ (nr – редукция), решалась численно относительно ξ_n и η_m путем формирования определителя и поиска его нулевых значений. При этом фиксировались значения угла падения θ , или что соответствует однозначному заданию γ_x . При этом если находился ноль определителя при некотором значении γ_y из диапазона $\pi/a_y \geq \gamma_y \geq 0$ (диапазон изменения γ_y разбивался на некоторое фиксированное число точек), то это соответствовало *разрешенной зоне* или возможности распространения электромагнитных волн внутри кристалла. Если же при данном фиксированном значении γ_x не находилось ни одного нуля определителя, то это соответствовало *неполной запрещенной зоне*. Зона являлась *полностью запрещенной*, если для любых комбинаций значений γ_x и γ_y не было нулей определителя системы (17)–(18).

Следует отметить, что поиск *полностью запрещенных зон* для различных наборов значений Λ/λ и r/Λ двумерного фотонного кристалла с гексагональной симметрией и циркулярным сечением воздушных каналов в диапазонах $0.01 \leq \Lambda/\lambda \leq 2.0$ и $0 < r/\Lambda < 0.5$ не дал положительных результатов. Однако при определенных значениях γ_x находились *неполные запрещенные зоны*. Из сообра-

жений ускорения поиска таких неполных запрещенных зон были выбраны характерные значения углов падения θ на гексагональный кристалл равные $0, \pi/6, \pi/3$, которые могут приводить к резонансному отражению от исследуемой структуры. Зонные диаграммы для указанных углов падения приведены на рисунке 6.

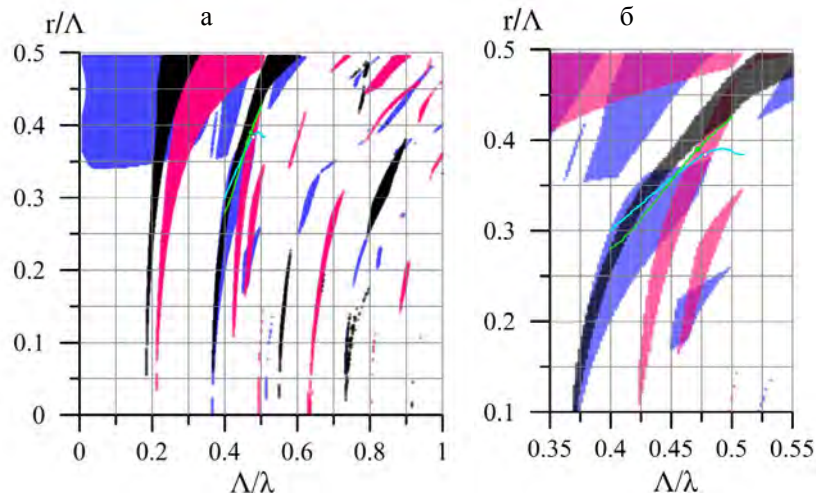


Рисунок 6 – Зонные диаграммы для фотонного кристалла с гексагональной симметрией. а) – соответствует диапазону $0.0 \leq \Lambda/\lambda \leq 1.0$, б) - $0.35 \leq \Lambda/\lambda \leq 0.65$.

Сиреневый цвет точек данных соответствует неполным запрещенным зонам при угле падения $\theta = \pi/3$, розовый – $\theta = \pi/6$, черный – $\theta = 0$

Как следует из фрагмента *а* рисунка 6, большинство неполных запрещенных зон для указанных углов падения не совпадает между собой. Однако можно отметить три области, где диаграммы частично перекрывают друг друга. Одна из таких областей находится в диапазонах $0.4 \leq \Lambda/\lambda \leq 0.5$ и $0.2 \leq r/\Lambda \leq 0.45$. Эта область соответствует первому уединенному экстремуму зависимости $\bar{\sigma}_i$ от Λ/λ и r/Λ , приведенной на рисунке 2. Для детального сравнения этого экстремума с зонной теорией на зонную диаграмму нанесены две кривые, которые получены путем поиска значений r/Λ , соответствующих максимумам интегрального сечения рассеяния $\bar{\sigma}_i$ при каждом фиксированном Λ/λ из диапазона $0.4 \leq \Lambda/\lambda \leq 0.5$. Голубая кривая относится к двум гексагональным кольцам каналов (19 дырок в матрице), зеленая кривая для случая трех колец воздушных каналов (37 дырок в оболочке ФКВ). Как видно из фрагмента *б* рисунка 6, с увеличенным масштабом кривая для трех гексагональных колец проходит рядом с границей неполной запрещенной зоны для угла падения $\theta = 0$, повторяя ее наклон и пересекая запрещенные области для значений $\theta = \pi/3$ и $\theta = \pi/6$. При этом кривая для 19 отверстий несколько отличается по наклону и значительно отклоняется от направления запрещенной зоны для угла падения $\theta = 0$ на краях диапазона $0.4 \leq \Lambda/\lambda \leq 0.5$. Это обстоятельство можно объяснить недостаточным количеством отверстий для реализации резонансной связи, так как при значениях $\Lambda/\lambda \approx 0.5$ между воздушными каналами остаются достаточно тонкие перегородки.

Заклучение

Разработан метод расчета матриц рассеяния для фотонно-кристаллических волокон с кластерной компоновкой воздушных каналов. На его основе определены критерии оптимизации параметров ФКВ для усиления их структурного окрашивания. Показано, что одним из условий является наблюдение максимумов дифференциального и интегрального сечений рассеяния в диапазоне углов наблюдения $0.5\pi \leq \alpha \leq 1.5\pi$. Вторым условием является соответствие параметров ФКВ неполной запрещенной зоне фотонного кристалла при отражении падающего излучения на длинах волн $\lambda \approx \lambda_0$, а при удалении от значения λ_0 – разрешенной зоне. Значение длины волны λ_0 определяется преобладающим цветом структурной окраски. Показано, что для обеспечения возможности изготовления ФКВ с субволновым размером воздушных каналов можно использовать ФКВ с кластерным поперечным сечением, где каждый кластер образован несколькими гексагональными кольцами воздушных каналов с оптимизированными для конкретной длины волны параметрами.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «1.15 Фотоника и электроника для инноваций».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Gauvrea, B.* Color-changing and color-tunable photonic bandgap fiber textiles / B. Gauvreau [et al.] // OPTICS EXPRESS. – 2008. – Vol. 16, № 20. – P. 15677–15693.
2. *Aguirre, C. I.* Colloidal Photonic Crystal Pigments with Low Angle Dependence / C. I. Aguirre, E. Reguera, A. Stein // ACS Applied Materials & Interfaces. – 2010. – Vol. 2, № 11. – P. 3257–3262.
3. *Pursiainen, O.* Nanoparticle-tuned structural color from polymer opals / O. Pursiainen [et al.] // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, № 15. – P. 9553–9561.
4. *Fan, H.* Natural photonic materials for textile coatings / H. Fan, N. Lin, X. Y. Liu // Active Coatings for Smart Textiles. – 2016. – P. 137–156.
5. *Shao, J.* Biomimetic nanocoatings for structural coloration of textiles / J. Shao, G. Liu, L. Zhou // Active Coatings for Smart Textiles. – 2016. – P. 269–299.
6. *Zeng, Q.* Rapid fabrication of robust, washable, self-healing superhydrophobic fabrics with non-iridescent structural color by facile spray coating / Q. Zeng [et al.] // RSC Advances. – 2017. – Vol. 7, № 14. – P. 8443–8452.
7. *Siddique, R. H.* Theoretical and experimental analysis of the structural pattern responsible for the iridescence of Morpho butterflies / R. H. Siddique [et al.] // Optic Express. – 2013. – Vol. 21, № 12. – P. 14351–14361.
8. *Сотский, А. Б.* Моделирование структурной окраски фотонно-кристаллического волокна / А. Б. Сотский, О. А. Бельская, Л. И. Сотская // Оптика и спектроскопия. – 2015. – Т. 118, № 5. – С. 847–854.
9. *Сотский, А. Б.* Дифракция светового пучка на микроструктурном волокне / А. Б. Сотский, О. А. Бельская, Л. И. Сотская // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 11–19.
10. *Шилов, А. В.* К достижению выраженной структурной окраски фотонно-кристаллического волокна / А. В. Шилов, А. Б. Сотский // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – Т. 4, № 49. – С. 51–56.
11. *Иванов, Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е. А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.
12. *Сотский, А. Б.* Теория оптических волноводных элементов: монография / А. Б. Сотский. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – 456 с.
13. *Bjarklev, A.* Fabrication of photonic crystal fibres / A. Bjarklev [et al.] // Photonic Crystal Fibres. – 2003. – P. 115–130.
14. *Joannopoulos, J. D.* Photonic Crystals: Molding the flow of light / J. D. Joannopoulos [et al.]. – Princeton, NJ : Princet. Univ. Press, 2008. – 304 p.

Поступила в редакцию 21.06.2023 г.

Контакты: sotsky@msu.by (Сотский Александр Борисович),

shilov@msu.by (Шилов Артур Владимирович)

***Sotsky A. B., Shilov A. V.* STRUCTURAL COLORING OF SYNTHETIC FIBERS WITH CLUSTER CROSS SECTION**

In the present work, the problem of obtaining pronounced structural coloration of synthetic photonic-crystal fibers with a cluster cross section under their side illumination with naturally polarized light is investigated. A method has been developed for calculating the scattering matrices for such fibers, in the cladding of which there are several tens of clusters of the same structure, which are enclosed in non-intersecting circles and can be arbitrarily oriented relative to the center of the fiber. The parameters of the hexagonal structure of the forming clusters are found making it possible to significantly increase the contrast and monochromaticity of the structural coloring of the fiber. The result obtained is explained using the band theory of infinite photonic crystals.

Keywords: photonic-crystal fiber, structural coloration, band theory of two-dimensional photonic crystals, cluster cross section.

УДК 535.33:621.374.825

СВЕТОМОДУЛЯЦИОННЫЙ ЭФФЕКТ В ВЫНУЖДЕННОМ ИЗЛУЧЕНИИ ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЫ С КВАДРАТИЧНЫМ ЭФФЕКТОМ ШТАРКА

Е. В. Тимощенко

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Ю. В. Юревич

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

В рамках предложенной балансной схемы расчета изучена динамика вынужденного излучения в активной среде с квадратичным эффектом Штарка, вызывающим нелинейное смещение уровней резонансного перехода. Определена роль обусловленной этим фактором неустойчивости в динамической схеме лазера, которая способна привести к самопроизвольному переходу излучения прибора в режим регулярных пульсаций интенсивности. При моделировании динамических процессов в излучении использованы параметры лазеров на полупроводниковых квантоворазмерных структурах.

Ключевые слова: динамика когерентного излучения, резонансная нелинейность, самоподдерживающиеся пульсации.

Введение

В последнее время в связи с развитием нанофотоники возникает особый интерес к таким объектам квантовой оптики, как низкоразмерные источники когерентного светового поля, которые способны работать в режиме излучения регулярных временных структур без применения внешних или модулирующих устройств. Излучаемые контрастные серии периодических световых пульсаций в продолжение действия постоянного уровня возбуждения могут формироваться за счет автоколебательных механизмов, порождаемых нелинейностью отклика усиливающего элемента. Управление характеристиками структур излучения осуществляется уровнем постоянной во времени накачки или параметрами компактного дисперсионного элемента в схеме обратной связи. Перспективными в этом отношении считаются полупроводниковые среды с квантоворазмерными эффектами [1]. Структурные элементы (квантовые точки) используемых в лазерной оптике полупроводниковых слоев с квантоворазмерными эффектами характеризуются большими дипольными моментами, связанными с экситонными переходами – их величина оценивается в несколько десятков Дебаев [2]. Субмикронные и нанометровые слои на основе подобных сред с выраженным резонансным откликом на поле когерентного излучения могут обладать сильной резонансной нелинейностью, в этих объектах возможно наблюдение когерентных оптических эффектов [2–4]. Баланс энергии источника возбуждения, коррелирующего и излучаемого поля в такой структуре может быть рассмотрен традиционно – в рамках двухуровневой схемы уровней образующих ее активных частиц – резонансных центров (РЦ), представляемых

элементарными диполями. Фактором, способным сыграть при условии относительно большой величины дипольных моментов особую роль в развитии автоколебательных процессов, выступает различие поляризуемостей РЦ в основном и возбужденном состояниях [5]. С существованием дефекта поляризуемости связана резонансная нелинейность рефракции усиливающего элемента, от него зависит смещение спектрального резонанса усиления за счет квадратичного эффекта Штарка [6, 7]. Целью исследования, положенного в основу настоящей работы было изучение роли обоих эффектов нелинейности в развитии неустойчивости процесса вынужденного излучения, приводящей к формированию управляемой автоколебательной структуры в высвечиваемом оптическом поле – так называемых самоподдерживающихся пульсаций излучения.

Основные уравнения

Динамическая модель лазера, в рамках которой ниже описывается энергообмен между напряженностью излучаемого светового поля $E(t)$ несущей частоты ω и средой основывалась на обычно используемой сосредоточенной нестационарной схеме (см., например, [8]). Среда, помещенная в резонаторе, представляет, однако, структуру из ряда страт, образованных дипольными РЦ, для ориентации которых в направлении действующего в структуре поля характерно конечное время релаксации. Время такой ориентации характеризуется величиной T_2 (временем поперечной релаксации, в полупроводниковых средах – внутризонной релаксации). Этим параметром определяется время спонтанного распада резонансной поляризованности и в случае однородного уширения – размер (полуширина) спектральной резонансной линии усиления на шкале частот. Выражение поляризованности в применении обобщенной двухуровневой схемы помимо прямой резонансной составляющей содержит квазирезонансный компонент [9]:

$$P(t) = |\mu_{12}|N\rho(t) + i2\pi\varepsilon_0\Delta\alpha N(n - n_0)E(t). \quad (1)$$

Присутствие в представлении (1) этого компонента в соответствии с [5] учтено различие поляризуемости с дефектом $\Delta\alpha$ на уровнях перехода. Квазирезонансным его именуют ввиду того, что различие поляризуемостей α_1 и α_2 в основном и возбужденном состояниях РЦ обусловлено поглощением излучения в переходах, соседних с резонансным. Фактор существования дефекта $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ дает возможность ввести в рассмотрение резонансную нелинейную рефракцию, определяемую вариацией разности населенностей уровней резонансного перехода n (инверсной заселенности). В представлении (1) входят вероятностные переменные комплексной поляризованности ρ и инверсии n , динамика которых определяется квантовомеханическими уравнениями матрицы плотности, $|\mu_{12}|$ – модуль матричного элемента дипольного момента, N – поверхностная плотность резонансных частиц, n_0 – начальное значение инверсной заселенности (в дальнейшем $n_0 = 1$).

Следуя подходу, развитому в [10, 11], схему расчета изберем в виде уравнения для среднего по длине резонатора поля напряженности E , решаемого совместно с системой квантовомеханических уравнений для резонансного отклика среды (уравнениями Блоха для электрического момента РЦ). Предлагаемая модификация исходной схемы, однако, учитывает представление (1) с включением аналогично [5] нелинейного штарковского компонента в отстройку частоты $\Delta\omega = \omega - \omega_{12}$ (ω_{12} – резонансная частота усиления):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{T}(P - \gamma E), \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{|\mu_{12}|}{\hbar} n E - \rho \left[\frac{1}{T_2} + i(\Delta\omega - \frac{\pi\Delta\alpha}{\hbar} \varepsilon_0 |E|^2) \right], \quad \frac{dn}{dt} = \frac{n_0 - n}{T_1} - \frac{|\mu_{12}|}{2\hbar} (\rho^* E + \rho E^*). \quad (2)$$

Здесь T и T_1 – время обхода светом резонатора и время продольной релаксации перехода (в полупроводниковых средах – межзонной релаксации), γ – уровень потерь на излучение генерации (в результате его выхода из резонатора), а также на поглощение и рассеяние в активном слое), T – время обхода светом резонатора. В результате адиабатического исключения переменной резонансной поляризованности ρ в схеме баланса мощности накачки и вынужденного излучения (2) можно сформулировать скоростные уравнения, записанные для переменных нормированной мощности излучения $U(\tau)$ и инверсии $y(\tau)$ (последнюю в нашей постановке задачи удобно рассматривать как резонансную вариацию инверсной заселенности, отнесенную к уровню потерь γ):

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{1}{\tau_r} \left(\frac{y+1}{1+\Delta^2} - 1 \right) U, \quad \frac{dy}{d\tau} = \kappa - y - \frac{y+1}{1+\Delta^2} U, \quad (3)$$

$$\Delta = \Delta\omega T_2 - \beta y + \beta \tau_{12} U, \quad U = \frac{|\mu_{12}|}{\hbar^2} T_1 T_2 |E|^2, \quad y = \frac{n}{\gamma} - 1, \quad \tau = \frac{t}{T_1}, \quad \beta = \frac{2\pi\varepsilon_0 \hbar}{\mu^2 T_2} \Delta\alpha.$$

В системе (3) переменную времени удобно нормировать по параметру T_1 . Определяющая нормированную мощность U величина $|E|^2$ отнесена к мощности насыщения инверсии, величина τ_r (время жизни фотона в резонаторе, также нормированное по параметру T_1) помимо потерь в резонаторе предусматривает учет значений коэффициента заполнения резонатора и параметра оптического ограничения; для учета накачки введен параметр $\kappa(n_0/\gamma - 1)$, характеризующий максимально достижимый при данном уровне возбуждения (уровне тока накачки) коэффициент усиления. Нормированная по ширине линии усиления отстройка частоты Δ при адиабатическом исключении переменной кроме линейного компонента $\Delta\omega T_2$ включает слагаемое, которая определяется дрейфом частоты из-за нелинейной рефракции с коэффициентом пропорциональности β (в сущности, являющимся параметром амплитудно-фазовой связи). Нелинейность отстройки прежде всего зависит от штарковской составляющей, пропорциональной мощности U с нормирующим параметром $\tau = T_2/2T_1$.

С учетом фактора $\Delta\alpha$ и оптического эффекта Штарка на основе (3) может быть оценено влияние смещения уровней резонансного перехода в интенсивном световом поле на устойчивость процесса вынужденного излучения. В полупроводниковых средах параметр амплитудно-фазовой связи тогда пропорционален известному фактору Хенри [12]. В условиях действительности этого фактора усиление в квантоворазмерной структуре приобретает динамичную фазово-модуляционную составляющую, будучи линейно зависимым от скорости изменения концентрации экситонов с коэффициентом, пропорциональным параметру β .

Устойчивость решений и режим автоколебаний

В скоростных уравнениях (3), таким образом, отражен ряд нелинейных эффектов, возможных при динамических сценариях развития вынужденного излучения в структурах из РЦ, представляющих, в том числе, квантовые точки в используемых в лазерной оптике полупроводниках.

Качественное изучение поведения решений для $U(\tau)$ вблизи равновесного состояния с ненулевой интенсивностью U_S прежде всего дает возможность оценить зону параметров системы (3), в которой это состояние устойчиво [8] – на временной шкале кривые, которыми описываются решения для обеих переменных, выходя из начальных точек, после ряда осцилляций затухают к равновесным значениям. Выражения для равновесных состояний U_S, y_S следуют из сингулярных пределов системы (3):

$$\kappa = y_S + U_S, \quad \beta\tau_{12}U_S = \Delta\omega T_2 + \beta y_S \pm \sqrt{y_S}. \quad (4)$$

Линеаризация системы (3) в окрестности точек равновесия (4) позволяет записать аналог балансной схемы (3) для относительно малых решений $\Delta U(\tau)$ и $\Delta y(\tau)$ в некоторой области фазовой плоскости (y, U) , включающей точки U_S, y_S . Линеаризованный аналог схемы представляется в виде системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \tau_r \frac{d\Delta U}{d\tau} &= -2\beta\tau_{12}U_S \frac{\sqrt{y_S}}{1+y_S} \Delta U + \frac{U_S}{1+y_S} (1-2\beta\sqrt{y_S}) \Delta y, \\ \frac{d\Delta y}{d\tau} &= \left(2\beta\tau_{12}U_S \frac{\sqrt{y_S}}{1+y_S} - 1 \right) \Delta U - \left[1 + \frac{U_S}{1+y_S} (1-2\beta\sqrt{y_S}) \right] \Delta y. \end{aligned} \quad (5)$$

На основе (5) формулируется характеристический полином относительно σ – комплексного коэффициента затухания в показателе экспоненциального решения $\exp(\sigma\tau)$ системы (5). Наиболее реальные осциллирующие решения, но, если осцилляции выражено релаксирующие, то есть затухают к равновесным значениям, система (3) описывает переход лазера к установившемуся, то есть стационарному, режиму излучения. Точка равновесия U_S, y_S на фазовой плоскости (y, U) системы (3) тогда представляет собой устойчивый фокус и является аттрактором фазовых кривых. Характеристический полином, выраженный квадратным уравнением, при этом должен обладать комплексно-сопряженными корнями $\sigma_{1,2} = (\chi \pm i\sqrt{-D})/2$. Выражения для вещественной части корней и дискриминанта характеристического уравнения записываются так:

$$\chi = -\frac{1}{2} \left(1 + A - \beta \frac{\tau_{12}}{\tau_r} B \right), \quad D = \left(1 + A - \beta \frac{\tau_{12}}{\tau_r} B \right)^2 - \frac{4}{\tau_r} (A - \beta\tau_{12}B), \quad (6)$$

где

$$A = \frac{\kappa - y_S}{1 + y_S} (1 - 2\beta\sqrt{y_S}), \quad B = 2 \frac{\kappa - y_S}{1 + y_S} \sqrt{y_S},$$

и совместно с соотношениями (4) могут быть положены в основу критерия характеристики поведения траекторий на фазовой плоскости (y, U) в окрестности равновесного состояния U_S, y_S . Устойчивость фокуса U_S, y_S возможна при условии $\chi < 0$. Представление в (6) величин χ и D функциями y_S удобно для последующего параметрического расчета зависимостей типа $\chi(\kappa)$. Переменная величина y_S при этом считается неотрицательным линейно нарастающим в определенном диапазоне параметром.

При определении условия автоколебаний, очевидно, следует выделить зоны параметров, где точки U_S, y_S нестабильны по типу неустойчивого фокуса. Уход траекторий, соответствующих осцилляторным решениям (3), из окрестности точки равновесия должен означать, что их аттрактором окажется предельный цикл. Это

обусловлено неизбежным периодически происходящим насыщением роста $y(\tau)$ при нарастании мощности вынужденного излучения $U(\tau)$ с последующим снижением (сбросом инверсии). Точка равновесия оказывается неустойчивым фокусом, если $\chi > 0$. Такого рода неустойчивость соответствует периодическому решению с частотой $\Omega = \sqrt{-D}/2$ у линеаризованных уравнений. Исходная же система (3) характеризуется осцилляторными решениями для $U(\tau)$ и $y(\tau)$, амплитуды которых стабилизируются – моделью, таким образом, описывается развитие сценария регулярных незатухающих пульсаций. Такой режим излучения, реализуемый при постоянном уровне накачки, практически интересен, поэтому, следуя условию неустойчивости фокуса, укажем границу его выполнимости, применив для этого первое из соотношений (6):

$$\kappa > y_s + (1 + y_s) \left[1 + \beta \left(2 - \frac{\tau_{12}}{\tau_r} \right) \sqrt{y_s} \right]^{-1}. \quad (7)$$

Его удобно иллюстрировать на шкале параметра возбуждения κ для разных значений отстройки частоты (рис. 1, а), положением точек пересечения кривых $\chi(\kappa)$ с горизонтальной осью тогда определяется так называемый второй порог генерации (уровень накачки κ , начиная с которого возможна самопроизвольная неустойчивость вынужденного излучения). Неустойчивость, однако, должна реализоваться в определенном диапазоне изменения κ , который увеличивается при большем значении фактора $\Delta\alpha$. Неустойчивость проявляет дисперсионную зависимость, развиваясь в определенном диапазоне линейной отстройки резонанса (рис. 1, б).

В оценке масштаба предсказываемых явлений (как при расчете пороговых характеристик, следуя (4), (6), так и при численном моделировании на основе уравнений (3), исходили примерно из тех параметров для квантоворазмерных лазеров, которые взяты из литературы для структуры квантовых точек в системе *InAs/(Al)GaAs* на подложках *GaAs*, излучающих, в зависимости от количества рядов квантовых точек и уровня оптических потерь, в диапазоне длин волн 1.25–1.29 мкм [1, 13, 14].

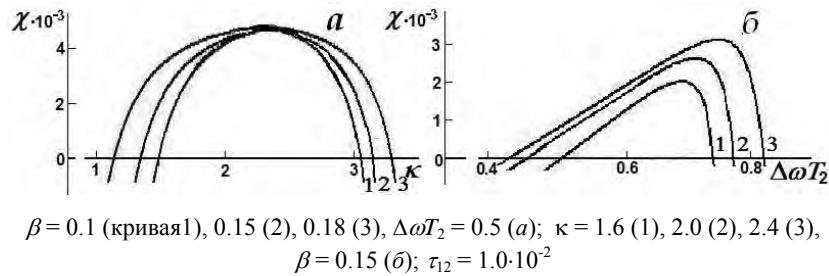


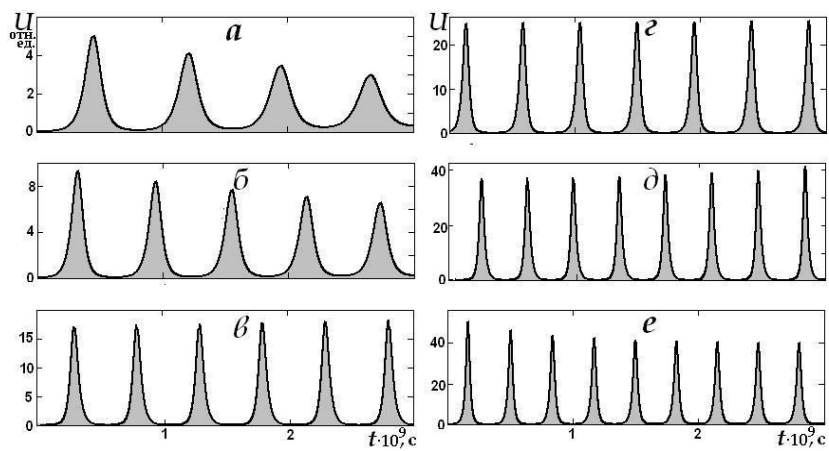
Рисунок 1. – Зависимости действительной части корней характеристического уравнения от уровня возбуждения (накачки) и линейной отстройки частоты от резонанса усиления

Моделирование релаксационной динамики излучения

Расчеты процессов излучения основывались на численном интегрировании кинетической системы (3) методом Рунге-Кутты. Начальные условия соответствовали выполнению амплитудного условия генерации – предполагалось, что $y(\tau = 0) = y_s$. При этом начальная величина $U(\tau = 0)$ на несколько порядков меньше равновесного значения, то есть на начальном этапе моделирования развития процесса вынужденного излучения

решалась задача усиления слабого сигнала. Ход кривых, выражающих решения (3) для нормированной мощности в этом диапазоне величин $U(\tau=0)$, не зависел от их выбора. Развертки динамической картины вынужденного излучения, полученные моделированием процесса, ниже приведены в наносекундном диапазоне времени.

На рисунке 2 иллюстрированы два основных варианта сценария хода решений: переходный (после затухающего ряда всплесков $U(t)$) к установившемуся режиму с непрерывной мощностью (рис. 2, *a, б, e*) и автоколебательный в виде периодической последовательности контрастных пикосекундных импульсов (рис. 2, *в, г, д*). Условия возникновения последнего соответствуют соотношению (7). Варианты рисунка 2 различаются значениями параметра возбуждения κ , которые соответствуют точкам на шкале κ для кривой 2 рисунка 2, *a*.



$$\kappa = 1.2 (a), 1.3 (б), 1.4 (в), 2.0 (г), 2.5 (д), 3.2 (e), \beta = 0.15, \Delta\omega T_2 = 0.5, \tau_{12} = 7.2 \cdot 10^{-3}$$

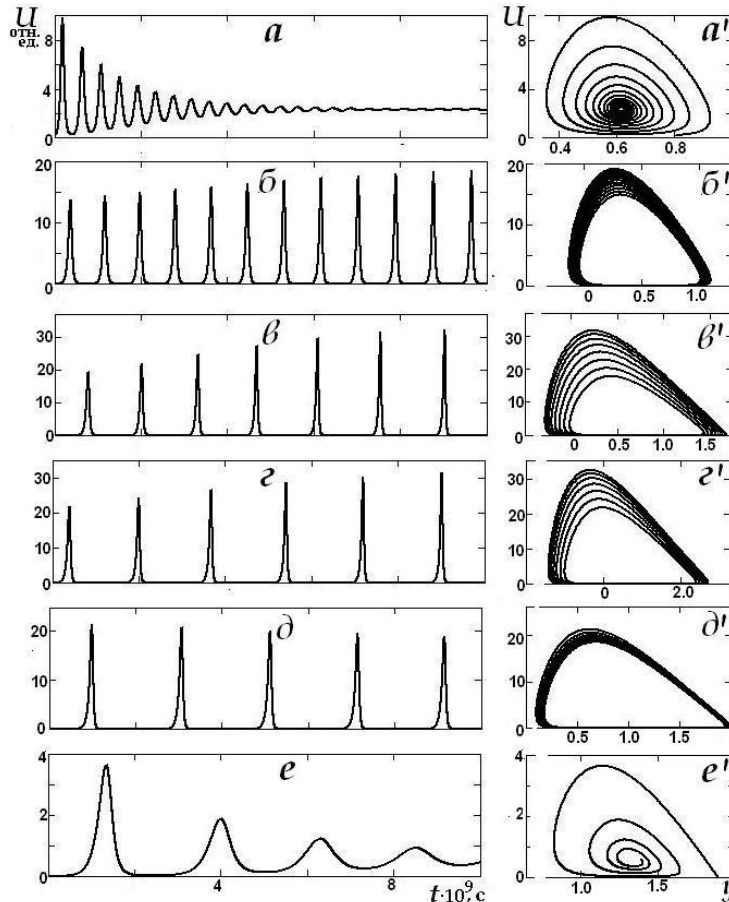
Рисунок 2. – Временная структура нормированной мощности вынужденного излучения

Частота следования, длительность и скважность импульсов в автоколебательных сериях, в целом, зависит от набора параметров, определяющих коэффициенты в системе (3). Следует отметить, однако, что величины периода следования и длительности импульсов для реальных (в том числе, и избранных для расчета) значений параметров генерирующих квантоворазмерных структур сосредоточены в субнаносекундном или пикосекундном диапазоне.

Представлялось интересным привести развертки картины излучения для нарастающего ряда значений линейной отстройки резонанса (рис. 3) с изображением соответствующих кривых на фазовой плоскости (y, U). Варианты рисунка 3 различаются значениями линейной отстройки резонанса $\Delta\omega T_2$, которые соответствуют точкам на шкале $\Delta\omega T_2$ для кривой 3 рисунка 2, *б*.

В свечении возможны переходные режимы с «выходом» на стационарную излучаемую мощность (рис. 3, *a, д, e*), фазовые кривые с разным темпом входят в окрестность особых точек. Режим самоподдерживающихся в течение действия непрерывной накачки пульсаций существует в определенном диапазоне отстройки резонанса (рис. 3, *б – г*), фазовые кривые в качестве аттрактора имеют предельный цикл (рис. 3, *б' – г'*). С нарастанием начальной отстройки может нарастать скважность и пиковая амплитуда пульсаций, снижаться их длительность. Это может быть

объяснено тем, что повышается уровень модуляции – при первоначально смещенном резонансе инверсия нарастает в большей степени (до выполнения пороговых условий генерации). Затем на фазе развития вынужденного излучения нелинейная перестройка возвращает отклик среды в состояние, ближе к резонансу – в результате высвечивается более мощный и короткий импульс. В некоторой области значений фазовых отстроек этот процесс характеризуется регулярностью – в вынужденном излучении поддерживаются незатухающие периодические автоколебания.



$\Delta\omega T_2 = 0.33 (a, a'), 0.6 (b, b'), 0.7 (c, c'), 0.75 (d, d'), 1.0 (e, e'), \kappa = 2.4,$
 $\beta = 0.15 (b); \tau_{12} = 1.0 \cdot 10^{-2}$

Рисунок 3. – Временная структура нормированной мощности вынужденного излучения (a – e), соответствующие фазовые кривые (a' – e')

Заключение

Предложенная в работе резонансная модель генерации, учитывающая эффекты фазовой перестройки материального отклика среды, представляемой ансамблем двухуровневых диполей, на поле излучения, из-за штарковского смещения резонанса усиления позволила, таким образом, описать процесс автоколебаний излучения, способный реализоваться в квантоворазмерных полупроводниковых структурах и обусловить режим самоподдерживающихся пульсаций свечения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Жуков, А. Е. Полупроводниковые лазеры на основе квантовых точек для систем оптической связи / А. Е. Жуков, А. Р. Ковш // Квантовая электроника. – 2008. – Т. 38, № 5. – С. 409–422.
2. Borri, P. Rabi oscillations in the excitonic ground-state transition of InGaAs quantum dots / P. Borri [et al.] // Phys. Rev. B. – 2002. – Vol. 66, № 8. – P. 081306–(1-4).
3. Rabi Oscillations of Excitons in Single Quantum Dots / T. H. Stievater [et. al.] // Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol. 87, No 13. – P. 133603–(1-4).
4. Interplay of Rabi Oscillations and Quantum Interference in Semiconductor Quantum Dots / H. Htoon [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 88, No 8. – P. 087401–(1-4)
5. Апанасевич, П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом / П. А. Апанасевич. – Мн. : Наука і тэхніка, 1977. – 496 с.
6. Таранухин, В. Д. Влияние оптического эффекта Штарка на усиление мощных импульсов излучения в резонансных средах / В. Д. Таранухин, М. Ю. Погосбекян // Квантовая электроника. – 1993. – Т. 20, № 8. – С. 823–827.
7. Optical Stark effect on excitons in GaAs quantum wells / A. von Lehmen [et al.] // Optics Letts. – 1998. – Vol. 11, No 10. – P. 609–615.
8. Ханин, Я. И. Лекции по квантовой радиофизике / Я. И. Ханин. – Н. Новгород : ИПФ РАН, 2005. – 224 с.
9. Тимощенко, Е. В. Расчет эффективности бистабильного тонкоплёночного отражателя / Е. В. Тимощенко, Ю. В. Юревич // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 3 (40). – С. 44–49.
10. Юревич, В. А. Динамика излучения в квантоворазмерных структурах при учете диполь - дипольного взаимодействия / В. А. Юревич, Е. В. Тимощенко, Ю. В. Юревич // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – №1 (10). – С. 64–68.
11. Тимощенко, Е. В. Резонансное отражение импульса метаповерхностью из квантовых точек в режиме когерентного взаимодействия / Е. В. Тимощенко // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2022. – Том 12, №1. – С. 67–75.
12. Henry, C. H. Theory of the linewidth of semiconductor lasers / C. H. Henry // IEEE J. Quant. Electron. – 1982. – Vol. 18, № 2. – P. 259–264.
13. Ушаков, Д. В. Эффективность генерации квантоворазмерных лазеров InGaAs/GaAs при неоднородном возбуждении квантовых ям / Д. В. Ушаков, А. А. Афоненко, В. Я. Алешкин // Квантовая электроника. – 2013. – Т.43, № 11. – С. 999–1002.
14. Квантово-каскадный лазер на 3.3 ТГц на основе активного модуля из трех квантовых ям GaAs/AlGaAs с рабочей температурой >120 К / Р. А. Хабибуллин, К. В. Маремьянин, Д. С. Пономарев, Р. Р. Галиев, А. А. Зайцев, А. И. Данилов, И. С. Васильевский, А. Н. Виниченко, А. Н. Ключков, А. А. Афоненко, Д. В. Ушаков, С. В. Морозов, В. И. Гавриленко // ФТП. – 2021. – Т. 55, вып. 11. – С. 989–994.

Поступила в редакцию 21.06.2023 г.

Контакты: timoshchenko@msu.by (Тимощенко Елена Валерьевна, Юревич Юрий Владимирович)

Timoshchenko E. V., Yurevich Yu. V. LIGHT MODULATION EFFECT IN STIMULATED EMISSION OF TWO-LEVEL MEDIUM WITH QUADRATIC STARK EFFECT

In the frame of the proposed balance calculation scheme, the dynamics of stimulated emission in an active medium with a quadratic Stark effect causing a nonlinear shift of the resonant transition levels is studied. The role of the instability caused by this factor in the dynamic scheme of the laser, which can lead to a spontaneous transition of the device radiation to the regime of regular intensity pulsations, is determined. For the modelling of radiation dynamic processes the parameters of lasers based on semiconductor quantum-size structures have been used.

Keywords: dynamics of coherent radiation, resonant nonlinearity, self-sustaining pulsations.

УДК 57.063.7:582.29:574.3:614.876:621.039(476.6-37Островец)

ВИДОВОЕ РАЗНООБРАЗИЕ ЛИШАЙНИКОВ ЗОНЫ ПЛАНИРОВАНИЯ СРОЧНЫХ ЗАЩИТНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ТЕРРИТОРИИ ВОЗДЕЙСТВИЯ БЕЛОРУССКОЙ АЭС

А. Г. Цуриков

доктор биологических наук, доцент,
профессор кафедры ботаники и физиологии растений
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

В. С. Аверин

доктор биологических наук, профессор, декан биологического факультета
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

И. В. Грищенко

магистрант кафедры химии
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

Н. В. Цурикова

старший преподаватель кафедры довузовской подготовки и профориентации
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

*Изучено видовое разнообразие лишенобиоты зоны планирования срочных защитных мероприятий территории воздействия Белорусской АЭС. Всего на изучаемой территории найдено 94 вида лишайников и лишенофильных грибов. Виды *Abrothallus bertianus*, *Corticifraga fuckelii*, *Lichenosonium aeruginosum* и *Ramalina europaea* впервые указываются для территории Беларуси. Макролишайники *Parmelia sulcata*, *Phaeophyscia nigricans*, *P. orbicularis*, *Physcia adscendens*, *P. dubia*, *P. stellaris*, *P. tenella*, *Polyscauliona polycarpa* и *Xanthoria parietina* наиболее часто встречаются на изучаемой территории и могут рассматриваться в качестве потенциальных кандидатов при выборе объектов для лишеномониторинга зоны планирования срочных защитных мероприятий территории воздействия Белорусской АЭС.*

Ключевые слова: новые виды, лишенофильные грибы, мониторинг, лишеноиндикация, экология, радиология

Введение

Влияние предприятий промышленности и энергетики на состояние окружающей среды обычно оценивают по сумме и составу выбросов загрязняющих веществ в атмосферу, водоемы, почву. Однако использование данных только химических и физико-химических методов анализа является не вполне эффективным. Для интегральной оценки техногенной нагрузки на окружающую среду используются методы биотестирования, основанные на регистрации ответных реакций живых организмов на одновременное или последовательное действие всех видов загрязнения. Ценными организмами для осуществления биомониторинга являются лишайники, обладающие способностью поглощать загрязняющие вещества из воздуха и осадков и в гораздо меньшей степени – из субстрата. Методы лишеномо-

иторинга показали свою перспективность при оценке загрязненности атмосферы Гомеля, Минска, Могилева, Светлогорска и позволили выполнить обширный статистический набор данных, осуществлять картирование территорий упомянутых городов по степени загрязненности атмосферного воздуха [1–3].

Радиоэкологическая обстановка на прилегающей к Белорусской АЭС территории по величинам содержания ^{137}Cs и ^{90}Sr в компонентах агроэкосистем не отличается от сопредельных районов, загрязненных только глобальными выпадениями в результате испытаний ядерного оружия [4]. Тем не менее, для получения полной и детальной информации об уровнях загрязнения экосистемы, а также прогнозирования обстановки в условиях интенсивного ведения сельского хозяйства на территории прилегающей к Белорусской АЭС нами было предложено дополнительно к действующей системе мониторинга создать стационарные площадки для осуществления долгосрочного экологического мониторинга состояния атмосферного воздуха в зоне планирования срочных защитных мероприятий территории воздействия Белорусской АЭС на основе метода лишеноиндикации [5]. Разрабатываемая система станет надежной основой для решения комплексной задачи эффективного управления территорией, прилегающей к Белорусской АЭС.

Первым этапом в организации лишеномониторнга зоны планирования срочных защитных мероприятий территории воздействия Белорусской АЭС явилось изучение видового разнообразия лишенобиоты. Составление списка лишайников исследуемой территории явилось целью настоящего исследования.

Методы исследований

Изучение видового разнообразия лишенобиоты, а также отбор образцов осуществляли 9 и 10 сентября 2021 года, также 29 и 30 октября 2022 года в зоне планирования срочных защитных мероприятий территории воздействия Белорусской АЭС. Исследования проводили в пределах 12 учетных площадок.

1. $54^{\circ}41'11.3''$ N, $26^{\circ}08'40.9''$ E, а.г. Герваты, 7,5 км Ю БелАЭС.
2. $54^{\circ}40'25.5''$ N, $26^{\circ}06'14.2''$ E, лесной массив 8,5 км Ю БелАЭС, 800 м СЗ д. Мацки.
3. $54^{\circ}43'16.3''$ N, $26^{\circ}06'31.4''$ E, лесной массив 3 км Ю БелАЭС, 500 м СЗ д. Попишки.
4. $54^{\circ}43'38.7''$ N, $26^{\circ}00'38.8''$ E, а.г. Ворняны, 5,5 км ЮЗ БелАЭС.
5. $54^{\circ}44'54.1''$ N, $25^{\circ}56'38.1''$ E, лесной массив 9 км З БелАЭС, 1 км ЮЗ д. Ворона.
6. $54^{\circ}46'43.4''$ N, $26^{\circ}02'34.1''$ E, пос. Го́за, 3 км СЗ БелАЭС.
7. $54^{\circ}45'12.0''$ N, $26^{\circ}02'34.1''$ E, лесной массив 2 км З БелАЭС.
8. $54^{\circ}47'23.9''$ N, $26^{\circ}05'48.5''$ E, лесной массив 2,5 км С БелАЭС.
9. $54^{\circ}49'17.9''$ N, $26^{\circ}06'32.3''$ E, лесной массив 6 км С БелАЭС, 500 м С д. Заборцы.
10. $54^{\circ}45'34.8''$ N, $26^{\circ}08'32.0''$ E, лесной массив 2,5 В БелАЭС, 1,5 км В д. Валайкуны.
11. $54^{\circ}44'39.9''$ N, $26^{\circ}09'55.5''$ E, пос. Швейляны, 4,1 км В БелАЭС.
12. $54^{\circ}45'11.7''$ N, $26^{\circ}13'06.3''$ E, лесной массив 7,5 км В БелАЭС, 150 м С д. Кирели.

Лишайники отбирали со всех доступных субстратов произрастания. Точки отбора образцов лишайников фиксировали в системе координат WGS 84 с исполь-

зованием навигатора Garmin GPSMap 62s. Морфологические и анатомические особенности образцов лишайников изучали с использованием микроскопов Nikon SMZ 745 и Nikon Eclipse 80i. Качественный состав вторичных метаболитов образцов лишайников изучали методом тонкослойной хроматографии в элюенте С [6, 7].

Основная часть

В результате проведенных исследований на изучаемой территории найдено 94 вида лишайников и лихенофильных грибов. Виды, новые для Республики Беларусь, отмечены двумя восклицательными знаками (!!), виды, новые для Гродненской области, отмечены одним восклицательным знаком (!), лихенофильные грибы отмечены решеткой (#).

1. !!#*Abrothallus bertianus* De Not. – на *Melanohalea exasperata*
2. #*Athelia arachnoidea* (Berk.) Jülich – на *Xanthoria parietina*
3. *Acarospora moenium* (Vain.) Räsänen – на бетоне
4. *Anaptychia ciliaris* Körb. – на *Acer platanoides*
5. *Bacidia rubella* (Hoffm.) A. Massal. – на *Acer platanoides*
6. *Buellia griseovirens* (Turner & Borrer ex Sm.) Almb. – на *Pinus sylvestris*
7. *Calogaya decipiens* (Arnold) Arup, Frödén & Søchting – на цементе
8. *Calogaya pusilla* (A. Massal.) Arup, Frödén & Søchting – на цементе
9. *Candelariella xanthostigma* (Ach.) Lettau – на *Acer platanoides*, *Tilia cordata*
10. *Candelariella* sp. – на цементе
11. *Catillaria nigroclavata* (Nyl.) Schuler – на *Tilia cordata*
12. *Cetraria aculeata* (Schreb.) Fr. – на почве
13. *Cetraria islandica* (L.) Ach. – на почве
14. *Cetraria sepincola* (Ehrh.) Ach. – на *Betula pendula*
15. *Chaenotheca brachypoda* (Ach.) Tibell – на *Acer platanoides*
16. *Chaenotheca phaeocephala* (Turner) Th. Fr. – на *Acer platanoides*
17. *Cladonia arbuscula* (Wallr.) Flot. ssp. *mitis* (Sandst.) Ruoss – на почве
18. *Cladonia chlorophaea* (Flörke ex Sommerf.) Spreng. – на почве
19. *Cladonia coniocraea* (Flörke) Spreng. – на *Betula pendula*, на резине
20. *Cladonia cornuta* (L.) Hoffm. – на почве
21. *Cladonia fimbriata* (L.) Fr. – на *Betula pendula*
22. *Cladonia furcata* (Huds.) Schrad. ssp. *furcata* – на почве; ssp. *subrangiformis* (L. Scriba ex Sandst.) Pišút – на почве
23. *Cladonia merochlorophaea* Asahina – на почве
24. *Cladonia rangiferina* (L.) F.H. Wigg. – на почве
25. *Cladonia rei* Schaer. – на почве
26. *Cladonia squamosa* (Scop.) Hoffm. – на почве
27. #*Clypeococcum hypocenomyces* D. Hawksw. – на *Hypocenomyce scalaris*
28. *Coenogonium pineti* (Ach.) Lücking & Lumbsch – на *Pinus sylvestris*
29. !!#*Corticifraga fuckelii* (Rehm) D. Hawksw. & R. Sant. – на *Peltigera rufescens*
30. #*Erythricium aurantiacum* (Lasch) D. Hawksw. & A. Henrici – на *Physcia* spp.
31. *Evernia mesomorpha* Nyl. – на *Betula pendula*
32. *Evernia prunastri* (L.) Ach. – на *Tilia cordata*
33. !#*Heterocephalacria physciacearum* (Diederich) Millanes & Wedin – на *Physcia tenella*
34. *Hypocenomyce scalaris* (Ach. ex Lilj.) M. Choisy – на *Betula pendula*

35. *Hypogymnia physodes* (L.) Nyl. – на *Betula pendula*
36. *Hypogymnia tubulosa* (Schaer.) Hav. – на *Betula pendula*
37. *#Illosporiosis christiansenii* (B.L. Brady & D. Hawksw.) D. Hawksw. – на *Physcia* spp.
38. *Lecania naegelii* (Hepp) Diederich & van den Boom – на *Tilia cordata*
39. *Lecanora carpinea* (L.) Vain. – на *Tilia cordata*
40. *Lecanora pulicaris* (Pers.) Ach. – на *Pinus sylvestris*
41. *Lecanora symmicta* (Ach.) Ach. – на *Betula pendula*
42. *Lecanora varia* (Hoffm.) Ach. – на *Betula pendula*
43. *Lecidella elaeochroma* (Ach.) M. Choisy – на *Tilia cordata*
44. *!Lecidella flavosorediata* (Vězda) Hertel & Leuckert – на *Tilia cordata*
45. *Lepra albescens* (Huds.) Hafellner – на *Acer platanoides*
46. *Lepraria incana* (L.) Ach. – на *Betula pendula*, *Pinus sylvestris*
47. *Lepraria jackii* Tønsberg – на *Betula pendula*
48. *#Licea parasitica* (Zukal) G.W. Martin – на *Phaeophyscia orbicularis*
49. *!!#Lichenonium aeruginosum* Diederich, M. Brand, Van den Boom & Lawrey – на *Cladonia fimbriata*
50. *Melanelixia subargentifera* (Nyl.) O. Blanco et al. – на *Acer platanoides*, *Tilia cordata*
51. *Melanelixia subaurifera* (Nyl.) O. Blanco et al. – на *Betula pendula*
52. *Melanohalea exasperata* (De Not.) O. Blanco et al. – на *Tilia cordata*
53. *Melanohalea exasperatula* (Nyl.) O. Blanco et al. – на *Tilia cordata*
54. *Melanohalea olivacea* (L.) O. Blanco et al. – на *Betula pendula*
55. *Melanohalea septentrionalis* (Lyngé) O. Blanco et al. – на *Betula pendula*
56. *Micarea* sp. – на *Pinus sylvestris*
57. *Myriolecis crenulata* (Ach.) Šliwa, Zhao Xin & Lumbsch – на цементі
58. *Myriolecis dispersa* (Pers.) Šliwa, Zhao Xin & Lumbsch – на бетоне
59. *Nephromopsis chlorophylla* (Willd.) Divakar, Crespo & Lumbsch – на *Betula pendula*
60. *Parmelia sulcata* Taylor – на *Tilia cordata*
61. *Parmelina tiliacea* (Hoffm.) Hale – на *Aesculus hippocastanum*
62. *Peltigera canina* (L.) Willd. – на ґрунті
63. *Peltigera rufescens* (Weiss) Humb. – на ґрунті
64. *Phaeophyscia nigricans* (Flörke) Moberg – на *Populus* spp.
65. *Phaeophyscia orbicularis* (Neck.) Moberg – на *Populus* spp.
66. *Phlyctis argena* (Spreng.) Flot. – на *Tilia cordata*
67. *Physcia adscendens* (Fr.) H. Olivier – на *Tilia cordata*
68. *Physcia aipolia* (Ehrh. ex Humb.) Fürnr. – на *Tilia cordata*
69. *Physcia caesia* (Hoffm.) Fürnr. – на черепиці
70. *Physcia dubia* (Hoffm.) Lettau – на *Tilia cordata*
71. *Physcia stellaris* (Ach.) Nyl. – на *Tilia cordata*
72. *Physcia tenella* (Scop.) DC. – на *Tilia cordata*
73. *Physcia tribacia* (Ach.) Nyl. – на цементі
74. *Physconia distorta* (With.) J.R. Laundon – на *Populus tremula*
75. *Physconia enteroxantha* (Nyl.) Poelt – на *Tilia cordata*
76. *Physconia grisea* (Lam.) Poelt – на *Populus* sp., *Tilia cordata*
77. *Physconia perisidiosa* (Erichsen) Moberg – на *Acer platanoides*

78. *Placynthiella dasaea* (Stirt.) Tønsberg – на древесине
 79. *Placynthiella icmalea* (Ach.) Coppins & P. James – на древесине
 80. *Pleurosticta acetabulum* (Neck.) Elix & Lumbsch – на *Acer platanoides*
 81. *Polycauliona polycarpa* (Hoffm.) Frödén, Arup & Söchting – на *Aesculus hippocastanum*
 82. *Protoparmeliopsis muralis* (Schreb.) M. Choisy – на цементе
 83. *Ramalina europaea* Gasparyan, Sipman & Lücking – на *Acer platanoides*
 84. *Ramalina farinacea* (L.) Ach. – на *Betula pendula*
 85. *Ramalina fastigiata* (Pers.) Ach. – на *Tilia cordata*
 86. *Ramalina fraxinea* (L.) Ach. – на *Tilia cordata*
 87. *Rusavskia elegans* (Link) S.Y. Kondr. & Kärnefelt – на цементе
 88. *Trichonectria rubefaciens* (Ellis & Everh.) Diederich & Schroers – на *Parmelia sulcata*
 89. *Usnea hirta* (L.) Weber ex F.H. Wigg. – на *Betula pendula*
 90. *Xanthoparmelia conspersa* (Ehrh. ex Ach.) Hale – на гранитном валуне
 91. *Xanthomendoza coppinsii* S.Y. Kondr. & Kärnefelt – на *Acer platanoides*
 92. *Xanthomendoza fulva* (Hoffm.) Söchting, Kärnefelt & S.Y. Kondr. – на *Acer platanoides*
 93. *Xanthoria parietina* (L.) Th. Fr. – на *Populus* spp.
 94. *Xanthoriicola physciae* (Kalchbr.) D. Hawksw. – на *Xanthoria parietina*

Виды *Abrothallus bertianus*, *Corticifraga fuckelii*, *Lichenocodium aeruginosum* и *Ramalina europaea* впервые указываются нами для территории Беларуси [6–8].

Abrothallus bertianus является гемикосмополитным видом, известным на территории Европы, Азии, Африки, Северной и Южной Америки [9]. Встречается произрастающим на талломах представителей родов *Melanelixia* и *Melanohalea*. Нами найден паразитирующим на талломе *Melanohalea exasperata*, произрастающей на ветке березы в молодом сосновом лесу в окрестностях д. Кирели (54°45'11.7" N, 26°13'06.3" E) в 7,5 км восточнее БелАЭС.

Corticifraga fuckelii, как и предыдущий вид, является широкораспространенным гемикосмополитным видом лихенофильных грибов, паразитирующим на различных представителях рода *Peltigera* и известным в Европе, Азии, Африке, Северной и Южной Америке и Австралии [9]. Нами найден на талломе *Peltigera rufescens*, произрастающей на почве на окраине лесного массива в окрестностях д. Мацки (54°40'25.5" N, 26°06'14.2" E) в 8,5 км южнее БелАЭС.

В отличие от двух предыдущих видов, *Lichenocodium aeruginosum* является достаточно редким видом лихенофильных грибов, приуроченным к представителям рода *Cladonia*. К настоящему времени вид известен произрастающим только в Люксембурге, Нидерландах, России (3 локалитета в Ленинградской, Рязанской областях и в Краснодарском Крае), Турции, Украине и Франции [10–15]. Нами найден на *Cladonia fimbriata*, произрастающей на почве на окраине лесного массива в окрестностях д. Мацки (54°40'25.5" N, 26°06'14.2" E) в 8,5 км южнее БелАЭС.

Ramalina europaea сравнительно недавно был описан как новый для науки [16]. К настоящему времени вид известен для территории Австрии, Армении, России, Финляндии и Швеции [16, 17], однако, по-видимому, вид является достаточно распространенным, и его ареал окажется гораздо шире после ревизии образцов лишайника *Ramalina pollinaria* других стран Европы. Нами найден на клене пла-

тановидном на территории д. Го́за (54°46'43.4" N, 26°02'34.1" E) в 3 км на северо-запад от БелАЭС.

Виды *Heterocephalacria physciacearum* и *Lecidella flavosorediata* впервые приводятся нами для Гродненской области.

Heterocephalacria physciacearum является достаточно распространенным лишенофильным грибом в Беларуси, паразитирующим на лишайниках рода *Physcia*, однако ввиду слабой изученности этих организмов на территории республики [7, 18] ранее приводился только для Брестской, Гомельской и Могилевской областей [19, 20].

Lecidella flavosorediata был недавно приведен для Беларуси [21] и к настоящему времени известен из Брестской, Витебской, Минской и Могилевской областей [8, 21–23].

Три вида лишайников – *Cetraria aculeata*, *Parmelina tiliacea* и *Pleurosticta acetabulum* – являются занесенными в последнее издание Красной Книги Республики Беларусь со статусом DD (требующие внимания) [24].

На территории исследования наиболее часто встречаются виды *Parmelia sulcata*, *Phaeophyscia nigricans*, *P. orbicularis*, *Physcia adscendens*, *P. dubia*, *P. stellaris*, *P. tenella*, *Polycauliona polycarpa*, *Xanthoria parietina*, что обусловлено обилием сельскохозяйственных угодий и населенных пунктов в непосредственной близости от АЭС. Данные виды являются типичными для урбанизированных территорий, колонизируя большинство доступных древесных субстратов [25]. Единично встречаются виды *Bacidia rubella*, *Chaenotheca brachypoda*, *C. phaeocephala*, *Parmelina tiliacea*, *Physconia grisea*, *P. perisidiosa*, *Pleurosticta acetabulum*, *Xanthomendoza coppinsii*, *X. fulva*, приуроченные к старовозрастному клену или некоторым другим форофитам, произрастающим в парке г.п. Ворняны.

Заключение

В пределах зоны планирования срочных защитных мероприятий территории воздействия Белорусской АЭС найдено 94 вида лишайников и лишенофильных грибов. Виды *Abrothallus bertianus*, *Corticifraga fuckelii*, *Lichenocodium aeruginosum* и *Ramalina europaea* впервые указываются нами для территории Беларуси, виды *Heterocephalacria physciacearum* и *Lecidella flavosorediata* впервые приводятся для территории Гродненской области. Три вида лишайников (*Cetraria aculeata*, *Parmelina tiliacea* и *Pleurosticta acetabulum*) являются занесенными в 4-е издание Красной Книги Республики Беларусь со статусом DD (требующие внимания). *Parmelia sulcata*, *Phaeophyscia nigricans*, *P. orbicularis*, *Physcia adscendens*, *P. dubia*, *P. stellaris*, *P. tenella*, *Polycauliona polycarpa*, *Xanthoria parietina* наиболее часто встречаются на изучаемой территории и могут рассматриваться в качестве потенциальных кандидатов при выборе объектов для лишеномониторинга зоны планирования срочных защитных мероприятий территории воздействия Белорусской АЭС.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бязров, Л. Г. Лишайники в экологическом мониторинге / Л. Г. Бязров. – М. : Научный мир, 2002. – 336 с.
2. Цуриков, А. Г. Лишайники юго-востока Беларуси (опыт лишеномониторинга) / А. Г. Цуриков. – Гомель : ГГУ имени Ф. Скорины, 2013. – 276 с.
3. Кравчук, Л. А. Лишеноиндикация загрязнения атмосферного воздуха городов Беларуси: автореф. дис. ... канд. геогр. наук: 25.00.36 / Л. А. Кравчук; Ин-т проблем использования природных ресурсов и экологии. – Мн., 2001. – 20 с.

4. Обоснование инвестирования в строительство атомной электростанции в Республике Беларусь. Книга 11. Оценка воздействия на окружающую среду. 1588-ПЗ-ОИ4. Часть 8. Отчет об ОВОС. Часть 8.2. Текущее состояние окружающей среды. Пояснительная записка (редакция 06.07.2010 г.). – Минск : Белнипиэнергопром, 2010. – 183 с.
5. **Цуриков, А. Г.** Выбор точечных реперных площадок в зоне планирования срочных защитных мероприятий территории воздействия Белорусской АЭС с целью лишеноиндикации / А. Г. Цуриков, В. С. Аверин // Радиобиология и экологическая безопасность – 2022: материалы междунар. науч. конф. (26–27 мая 2022 г., Гомель) / ГНУ «Институт радиобиологии НАНБ»; редкол.: И. А. Чешик (гл. ред.) [и др.]. – Мн. : ИВЦ Минфина, 2022. – С 168–170.
6. **Tsurykau, A. A** provisional checklist of the lichens of Belarus / A. Tsurykau // *Opuscula Philolichenum*. – 2018. – Vol. 17. – P. 374–479.
7. **Tsurykau, A.** New or otherwise interesting records of lichens and lichenicolous fungi from Belarus. III. With an updated checklist of lichenicolous fungi / A. Tsurykau // *Herzogia*. – 2017. Vol. 30, № 1. – P. 152–165.
8. Флора Беларуси. Лишайники : в 4 т. / под ред. В.И. Парфенова. – Мн. : Беларуская навука, 2019. – Т. 1. – 341 с.
9. **Brackel, W. von.** Kommentierter Katalog der flechtenbewohnenden Pilze Bayerns / W. von Brackel // *Bibliotheca Lichenologica*. – 2014. – Vol. 109. – P. 1–476.
10. The obligately lichenicolous genus *Lichenocodium* represents a novel lineage in the Dothideomycetes / J.D. Lawrey [et al.] // *Fungal Biology*. – 2011. – Vol. 115. – P. 176–187.
11. **Kocakaya, M.** New or additional cladoniicolous fungi from Turkey / M. Kocakaya, M.G. Halici, R.P. Bodas // *Turkish Journal of Botany*. – 2016. – Vol. 40. – P. 308–311.
12. **Darmostuk, V. V.** The genus *Lichenocodium* (Lichenocodiaceae, Ascomycota) in Ukraine / V. V. Darmostuk // *Ukrainian Botanical Journal*. – 2019. – Vol. 76, № 2. – P. 101–113.
13. **Zhurbenko, M. P.** Further contributions to the knowledge of lichenicolous fungi and lichenicolous lichens of the Northwest Caucasus, Russia / M. P. Zhurbenko, A. A. Kobzeva // *Opuscula Philolichenum*. – 2016. – Vol. 15. – P. 37–56.
14. New records of lichens and allied fungi from the Leningrad Region, Russia. VIII. / D.E. Himelbrant [et al.] // *Folia Cryptogamica Estonica*. – 2017. – Vol. 54. – P. 63–70.
15. New and otherwise noteworthy records of lichenized and lichenicolous fungi from central European Russia II. / E.E. Muchnik [et al.] // *Herzogia*. – 2022. – Vol. 35. – P. 494–509.
16. **Gasparyan, A.** *Ramalina europaea* and *R. labiosorediata*, two new species of the *R. pollinaria* group (Ascomycota: Ramalinaceae), and new typifications for *Lichen pollinarius* and *L. squarrosus* / A. Gasparyan, H. Sipman, R. Lücking // *The Lichenologist*. – 2017. – Vol. 49, № 4. – P. 301–319.
17. **Мучник, Е. Э.** Новые и редкие лишенологические находки в Теллермановском опытном лесничестве (Воронежская область) / Е. Э. Мучник // *Лесной вестник*. – 2019. – Т. 23. № 5. – С. 38–45.
18. **Голубков, В. В.** Аннотированный список лишенофильных грибов Беларуси / В. В. Голубков // *Ботаника: Исследования*. – 2011. – Вып. 40. – С. 295–307.
19. **Tsurykau, A.** New or otherwise interesting records of lichens and lichenicolous fungi from Belarus. II. / A. Tsurykau, A. Suija, V. Neuchert, M. Kukwa // *Herzogia*. – 2016. – Vol. 29, № 1. – P. 164–175.
20. **Голубков, В. В.** Список лишайнико-образующих и близких к ним сапротрофных и лишенофильных грибов национального парка «Беловежская пуща» / В. В. Голубков, А. Матвеюк, А. Г. Цуриков // *Сб. науч. тр. / Национальный парк «Беловежская пуща»*. – Брест, 2019. – Вып. 16: Беловежская пуща. Исследования. – С. 97–142.
21. Биологическое разнообразие Национального парка «Браславские озера»: грибы и лишайники / О. С. Гапиенко [и др.]. – Минск : Белорусский дом печати, 2014. – 200 с.
22. **Яцына, А. П.** Аннотированный список лишайников, лишенофильных и лишенолированных грибов национального парка «Беловежская пуща» (Беларусь) / А. П. Яцына // *Разнообразие растительного мира*. – 2019. – № 1. – С. 17–32.
23. Лишайники и близкородственные грибы усадебных парков Могилевской области (Беларусь) / А.П. Яцына [и др.] // *Бюллетень Брянского отделения РБО*. – 2018. – № 2. – С. 26–32.
24. Красная книга Республики Беларусь: Редкие и находящиеся под угрозой исчезновения виды дикорастущих растений. Растения / под ред. И. М. Качановского (предс.) [и др.]. – Мн. : БэлЭн, 2015. – 448 с.
25. **Цуриков, А. Г.** Лишайники юго-востока Беларуси / А. Г. Цуриков. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 276 с.

Поступила в печать 7.02.2023 г.

Контакты: tsurykau@gmail.com (Цуриков Андрей Геннадьевич, Аверин Виктор Сергеевич, Грищенко Илья Владимирович, Цурикова Наталья Владимировна)

***Tsurykau A. H., Averin V. S., Hryshcanka I. V., Tsurikova N. V.* LICHEN DIVERSITY IN THE ZONE OF PLANNING URGENT PROTECTIVE MEASURES IN THE AREA AFFECTED BY THE BELARUSIAN NPP**

*The diversity of lichen biota in the zone of planning urgent protective measures in the area affected by the Belarusian Nuclear Power Plant is studied. 94 species of lichens and lichenicolous fungi have been found in the study area. *Abrothallus bertianus*, *Corticifraga fuckelii*, *Lichenocodium aeruginosum* and *Ramalina europaea* are reported for the territory of Belarus for the first time. The macrolichens *Parmelia sulcata*, *Phaeophyscia nigricans*, *P. orbicularis*, *Physcia adscendens*, *P. dubia*, *P. stellaris*, *P. tenella*, *Polycauliona polycarpa* and *Xanthoria parietina* are the most common in the study area and can be considered as potential test-objects for lichen monitoring in the zone of planning urgent protective measures in the area affected by the Belarusian NPP.*

Keywords: new species, lichenicolous fungi, monitoring, lichen indication, ecology, radiology.

УДК 547: 579

ФЕРМЕНТАЦИЯ ПЕКТИНОВ РАЗЛИЧНОЙ СТЕПЕНИ ЭТЕРИФИЦИРОВАННОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ БИФИДОБАКТЕРИЙ

Н. А. Клебанова

кандидат химических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В. А. Седакова

кандидат технических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. В. Клебанов

кандидат химических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. В. Тарасова

выпускница факультета математики и естествознания

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

*В статье представлены экспериментальные данные по исследованию динамики распада пектинов различной степени этерифицированности под действием бифидобактерий *in vitro*. Методом кислотно-основного титрования установлено общее количество свободных карбоксильных групп в низко- и высокоэтерифицированных пектинах, а также скорость их образования в процессе ферментации под действием бифидобактерий. Методом капиллярной газожидкостной хроматографии определен качественный и количественный состав короткоцепочечных жирных кислот в продуктах ферментации.*

Ключевые слова: пектин, пищевые волокна, бифидобактерии, короткоцепочечные жирные кислоты, высокоэтерифицированный и низкоэтерифицированный пектин.

Введение

Известно, что пищевые волокна оказывают влияние как на процессы пищеварения, так и на микрофлору кишечника [1–3]. Пищевые волокна способствуют снижению содержания холестерина и триацилглицеридов в плазме, нормализации уровня постпрандиальной гликемии, а также уменьшают биодоступность пищи [4]. В некоторых исследованиях приводятся данные о радиопротекторном и онкопротекторном эффектах отдельных составляющих пищевых волокон, в частности пектина [5].

Попадая в желудочно-кишечный тракт, пектин образует гели. При разбухании масса пектина обезвоживает пищеварительный канал и, продвигаясь по кишечнику, захватывает токсичные вещества. Ряд авторов [6–8] отмечает, что нормальная и патогенная микрофлора не используют пектины в качестве питательных субстратов. В то время, как другие исследователи [9–11] считают, что пектин в значительной степени разрушается бактериями кишечника в его ободочном отделе, а также в рубце желудка жвачных животных пектинолитическими анаэробными микроорганизмами.

Одними из важных продуктов метаболизма пищевых волокон являются короткоцепочечные жирные кислоты (КЦЖК), которые предлагается использовать для интегральной оценки состояния кишечной микрофлоры [12].

Функции и роль КЦЖК разнообразны. Они участвуют в секреции слизи, регуляции ионного обмена в толстой кишке, блокируют адгезию и угнетают рост патогенной и условно-патогенной микрофлоры, принимают участие в липидном, углеводном и энергетическом обмене [13]. При распаде КЦЖК образуется большое количество энергии, поэтому они служат дополнительным автономным источником энергообеспечения кишечного эпителия. Это относится, прежде всего, к масляной кислоте (C_4) [14]. Так же масляная кислота участвует в регуляции пролиферации и дифференцировки эпителия толстой кишки, чем обеспечивается антиканцерогенная активность микрофлоры [15]. Пропионовая кислота (C_3) регулирует микроциркуляцию в слизистой оболочке и поддерживает в ней трофические процессы, участвует в глюконеогенезе и синтезе биогенных аминов, блокирует адгезию патогенов [16]. Уксусная кислота (C_2) участвует, главным образом, в липогенезе и регуляции местного иммунитета. Она же обеспечивает антимикробный эффект, регулирует уровень pH, моторную и секреторную активность кишечника. Снижение pH в просвете кишки создает оптимальные условия для роста и размножения нормальных симбионтов и угнетает рост условно-патогенных микроорганизмов [17]. Таким образом, продукция КЦЖК собственной микрофлоры является одним из важных механизмов саморегуляции ее роста и жизнедеятельности.

В научной литературе имеются публикации по исследованию процесса ферментации различных пищевых волокон, в том числе и пектиновых веществ [18]. Следует отметить, что одной из важных характеристик пектинов является степень этерификации (СЭ) – это отношение числа этерифицированных $-COOH$ групп на каждые 100 карбоксильных групп, выражаемое в процентном соотношении. По такому принципу различают высокоэтерифицированный пектин (СЭ более 50%) и низкоэтерифицированный пектин (СЭ менее 50%).

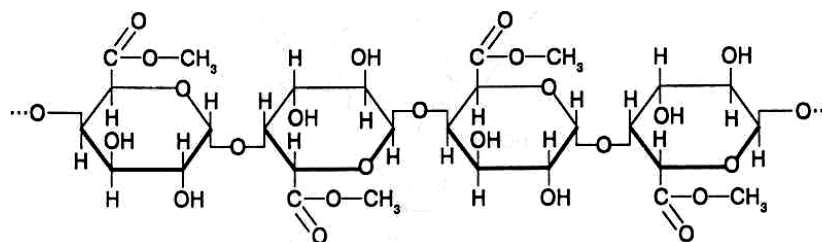


Рисунок 1 – Строение молекулы этерифицированного пектина

Целью настоящего исследования являлось изучение динамики образования короткоцепочечных жирных кислот при действии бифидобактерий на пищевые волокна различной степени этерифицированности *in vitro*.

Материалы и методы

Объектами исследования были промышленные образцы пектинов с разной степенью этерифицированности: низкоэтерифицированный пектин (LM-101

AS-CAB, страна производства Германия) и высокоэтерифицированный пектин (58-62%), (150 USA-SAG тип DZ, страна производства Германия), кондитерский, экстрагированный из цитрусовых выжимок. Пектины использовали в качестве потребляемых субстратов для бактерий.

В качестве микрофлоры использовали препарат бифидобактерий (*in vitro*), поскольку большая часть микрофлоры кишечника представлена преимущественно бифидобактериями и составляет до 90% от общей массы флоры. Используемый препарат «Бифидумбактерин сухой» представлял собой лиофилизированный порошок с жизнеспособными бактериями штамма *Bifidobacterium bifidum* 1 или 791 – не менее 10^7 КОЕ (в соответствии с инструкцией к препарату).

Анализируемые системы «пектин-бифидобактерии» готовили путем растворения 1 дозы препарата бифидобактерий к 100 мл приготовленного 1%-го раствора пектина, перемешивали, а затем все содержимое помещали в термостат при температуре 38°C. Отбор проб для анализа проводили в промежутке времени от 1,5 до 24 часов.

Методика приготовления систем «пектин – бактерии» была одинакова для пектинов с низкой и высокой степенью этерификации, принципиальных различий в скорости их растворения не наблюдалось. Растворы готовились за 12 часов до проведения экспериментов для получения равновесных однородных растворов и в дальнейшем использовались для сравнения динамики изменения количества функциональных групп пектиновых веществ, а также для сравнения качественного и количественного состава продуктов их ферментации – короткоцепочечных жирных кислот.

Исследование кинетики изменения количества функциональных (карбокисильных) групп полисахаридов проводилось методом кислотно-основного титрования с использованием индикатора Хинтона (ГОСТ 29186-91: Межгосударственный стандарт «Пектин. Технические условия»).

Содержание свободных карбокисильных групп K_c , %, в соответствии с методикой [19], рассчитывали по формуле

$$K_c = \frac{V_{NaOH}}{m_{пектина}} \cdot 0,0045 \cdot \frac{V_{колбы}}{V_{аликвоты}} \cdot 100\%, \quad (1)$$

где V_{NaOH} – объем 0,1 н раствора NaOH, израсходованный на титрование, мл; 1 мл 0,1 н раствора NaOH соответствует 0,0045 г COOH.

Для анализа полученных результатов рассчитывали изменение содержания карбокисильных групп полисахаридов ΔK_c в результате действия препаратов бактерий по формуле

$$\Delta K_c = K_{c \text{ бактерии-волокно}} - K_{c \text{ волокно}}, \quad (2)$$

где $K_{c \text{ бактерии-волокно}}$ – содержание карбокисильных групп в системе «бактерии – пищевое волокно», $K_{c \text{ волокно}}$ – содержание карбокисильных групп в волокне без воздействия бактерий.

Качественное и количественное определение КЦЖК осуществляли при помощи метода капиллярной газожидкостной хроматографии. Пробоподготовку биологического материала для хроматографического анализа осуществляли в соответствии с ранее отработанной методикой [20].

Исследуемые системы анализировали на газовом хроматографе Хроматэк Кристалл – 5000 с использованием кварцевой капиллярной колонки CR FFAP длиной – 50 м и внутренним диаметром 0,32 мм. В качестве подвижной фазы выступал азот, неподвижной фазы – пленка сополимера полиэтиленгликоля с 2-нитротерефталевой кислотой; толщина пленки 0,5 мкм (производитель «Хроматэк», Россия). Анализ проводили в изотермическом режиме, а регистрацию с помощью пламенно-ионизационного детектора. Полученные хроматограммы обрабатывали с использованием программного обеспечения «Хроматэк – Аналитик 3.0».

Хроматографический анализ проводили при следующих условиях: температура термостата 160 °С, температура испарителя и детектора – 230 °С. Расход газа-носителя составлял 90 см³/мин, водорода – 30 см³/мин, воздуха – 300 см³/мин. Ввод пробы осуществлялся с делением потока газа-носителя (коэффициент деления 1:50).

Качественный анализ осуществляли, сравнивая времена удерживания компонентов смеси со временами удерживания индивидуальных чистых веществ в стандартных растворах.

Количественный анализ проводили методом стандартной добавки по площади пика определенного компонента. В качестве стандартной добавки использовали раствор изомасляной кислоты. Расчет содержания КЦЖК проводили по формулам (3) и (4).

Для изомасляной кислоты, взятой в качестве стандарта по формуле (3)

$$C = \frac{m_{ст}}{V_{пр} * \left(\frac{S_{ст}}{S_{без ст}} - 1 \right)}, \text{ мг/см}^3, \quad (3)$$

где $m_{ст}$ – масса стандартной добавки, мг; $V_{пр}$ – объем пробы, взятой для анализа, см³; $S_{ст}$ – площадь пика, принятого за стандарт, на хроматограмме после добавления стандарта; $S_{без ст}$ – площадь пика, принятого за стандарт, на хроматограмме до добавления стандарта.

Для остальных кислот

$$C = \frac{m_{ст}}{V_{пр} * \left(\frac{S_{ст} * K_{ст}}{S_{к+ст} * K_{к}} - \frac{S_{без ст} * K_{ст}}{S_{к} * K_{к}} \right)}, \text{ мг/см}^3, \quad (4)$$

где $S_{ст}$ – площадь пика определяемого компонента на хроматограмме смеси, в которую был введен стандарт; $S_{без ст}$ – площадь пика определяемого компонента на хроматограмме исходной смеси; $K_{к}$ – абсолютный поправочный коэффициент для определяемого компонента; $K_{ст}$ – абсолютный поправочный коэффициент для стандарта.

Объем вводимой пробы без стандарта был равен 250 мкл, а объем добавленного стандарта изомасляной кислоты – 125 мкл.

На рисунке 2 представлена хроматограмма короткоцепочечных жирных кислот, образующихся при действии бифидобактерий на высокоэтерифицированный пектин в течение 3,5 часов.

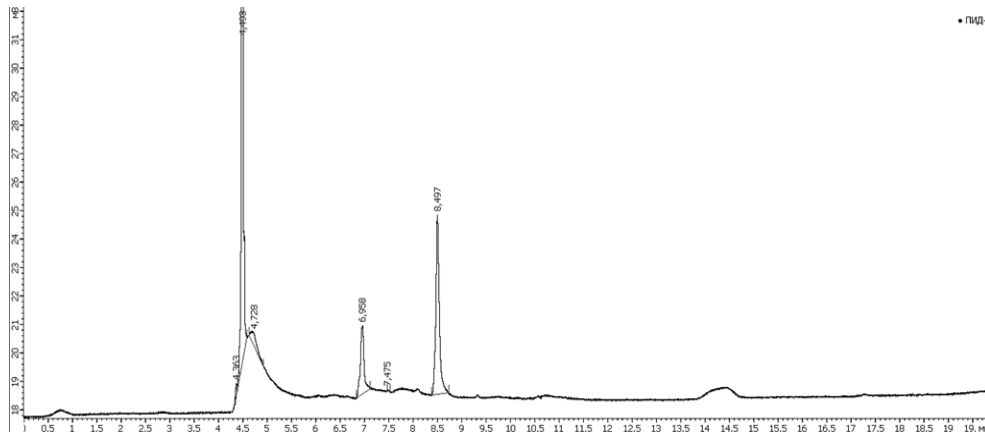


Рисунок 2 – Хроматограмма короткоцепочечных жирных кислот, образующихся при действии бифидобактерий на высокоэтерифицированный пектин в течение 3,5 часов

Первый крупный пик всегда обусловлен внутренним газом-носителем, который выходит из колонки первым. Следом за ним находятся два значимых пика. Первый – это уксусная кислота, время выхода равно 6,958 минут, второй – изомасляная кислота, время выхода 8,497 минут. Время от момента ввода анализируемой пробы до регистрации максимума пика называют временем удерживания (элюирования).

Размер пика изомасляной кислоты складывается не только из количества присутствующей в самом образце пектина кислоты, но и из добавленного в пробу стандарта. Поэтому при дальнейшем пересчете количественное содержание изомасляной кислоты в данной пробе может оказаться существенно ниже уксусной.

Результаты и обсуждение

В исследуемых образцах предварительно до воздействия бифидобактерий на пищевые волокна было определено содержание функциональных групп в исходных образцах пектинов с различной степенью этерифицированности по формуле (1).

Оказалось, что общее количество свободных карбоксильных групп (K_c) изначально больше у низкоэтерифицированного пектина и составило 7,1%, а у пектина с высокой степенью этерификации – 5,3%, что соответствует теоретическим представлениям и связано с участием функциональных групп в образовании сложноэфирной связи у высокоэтерифицированного пектина. Чем меньше степень этерификации, тем больше количество свободных карбоксильных групп.

Для сравнения динамики изменения количества функциональных групп пектиновых веществ при действии бифидобактерий использовали относительное изменение содержания карбоксильных групп полисахаридов (пектиновых веществ) ΔK_c^l , которое рассчитывали по формуле

$$\Delta K_c^l = \frac{K_{c \text{ бакт.}} - K_{c \text{ без бакт.}}}{K_{c \text{ без бакт.}}} \cdot 100\% .$$

Экспериментальные результаты изменения количества функциональных групп анализируемых пектиновых веществ при действии бифидобактерий в зависимости от времени ферментации представлены на рисунке 3.

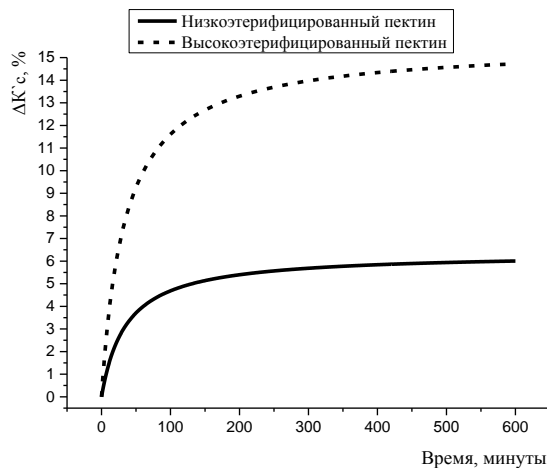


Рисунок 3 – Зависимость изменения содержания карбоксильных групп $\Delta K'_c$ от времени в системах: «бифидобактерии – высокоэтерифицированный пектин», «бифидобактерии – низкоэтерифицированный пектин»

Из представленных данных видно, что в результате действия бифидобактерий на образцы пектина с различной степенью этерификации количество свободных карбоксильных групп возрастало с течением времени, что связано с процессом ферментации пектинов бифидобактериями. Величина $\Delta K'_c$ достигала максимума через 6-10 часов действия бифидобактерий на образцы пектинов и дальше не изменялась со временем. Скорость возрастания карбоксильных групп наибольшая в начальный момент времени, затем уменьшается (графики выходят на плато), что согласуется с теоретическими представлениями о зависимости скорости реакции от концентрации субстрата.

Сравнивая зависимости количества карбоксильных групп от вида пектинового волокна, следует отметить, что наибольшее количество карбоксильных групп появляется в результате действия бактерий на высокоэтерифицированный пектин, на низкоэтерифицированный пектин – относительные значения $\Delta K'_c$ приблизительно в 2,5 раза меньше (5,6% – для низкоэтерифицированного пектина; 14,3% – для высокоэтерифицированного).

Полученные результаты можно объяснить как изначально низким содержанием свободных карбоксильных групп у высокоэтерифицированного пектина (K_c), так и протеканием дополнительного процесса гидролиза по сложноэфирной связи у пектина с высокой степенью этерификации по сравнению с низкоэтерифицированным пектином.

Методом газохроматографического анализа исследуемых образцов низко и высокоэтерифицированного пектина были обнаружены уксусная (C_2), пропионовая (C_3) и изомасляная (iC_4) кислоты. А в образце высокоэтерифицированного пектина были обнаружены еще масляная (C_4) и изовалерьяновая (iC_5) кислоты.

Результаты хроматографического определения количественного содержания КЦЖК, образующихся при действии бифидобактерий в зависимости от времени ферментации в образцах низко- и высокоэтерифицированного пектинов, представлены в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 1 – Содержание КЦЖК, образующихся в низкоэтерифицированном пектине при действии бифидобактерий в зависимости от времени ферментации

Время, мин	Уксусная, моль/л	Пропионовая, моль/л	Изомасляная, моль/л
90	0,00217	0,0000295	0,00000824
150	0,00204	0,0000352	0,0000139
210	0,00178	0,0000444	0,0000158
360	0,00155	0,0000642	0,0000140
600	0,00178	0,0000318	0,0000110
1440	0,00185	0,0000318	0,0000129

Таблица 2 – Содержание КЦЖК, образующихся в высокоэтерифицированном пектине при действии бифидобактерий в зависимости от времени ферментации

Время, мин	Уксусная, моль/л	Пропионовая, моль/л	Изомасляная, моль/л	Масляная, моль/л	Изовалерьяно- вая, моль/л
90	0,00148	0,0000141	0,0000127	0,0000102	
150	0,00153	0,0000127	0,0000167	0,0000173	
210	0,00139	0,0000162	0,0000236	0,0000236	
360	0,00164	0,0000281	0,0000241		
600	0,00203	0,0000444	0,0000307		0,00000433
1440	0,00211	0,0000636	0,0000355		

Как видно из представленных данных, среди продуктов ферментации бифидобактериями во всех образцах пектинов уксусной кислоты образуется на 2-3 порядка больше, чем остальных кислот. При этом количественное содержание представленных КЦЖК коррелирует между образцами двух видов пектинов. Так, для низкоэтерифицированного пектина диапазон концентраций уксусной кислоты составляет $(1,55-2,17) \times 10^{-3}$ моль/л, а для высокоэтерифицированного пектина: $(1,39-2,11) \times 10^{-3}$ моль/л. Для пропионовой кислоты небольшие отличия наблюдаются в нижней границе концентраций: $(2,95-6,42) \times 10^{-5}$ моль/л – для низкоэтерифицированного пектина; $(1,41-6,36) \times 10^{-5}$ моль/л – для высокоэтерифицированного пектина. Для изомасляной кислоты наблюдаются чуть большие отличия в верхней границе концентраций, при этом порядок значений совпадает: $(0,82-1,58) \times 10^{-5}$ моль/л – для низкоэтерифицированного пектина; $(1,27-3,55) \times 10^{-5}$ моль/л – для высокоэтерифицированного пектина.

Для выявления различий в ферментации высоко- и низкоэтерифицированного пектина исследуемой флорой были построены диаграммы для кислот, обнаруженных в двух образцах пектинов.

Результаты определения количественного содержания уксусной кислоты, образующейся при ферментации двух видов пектинов, представлены на рисунке 4.

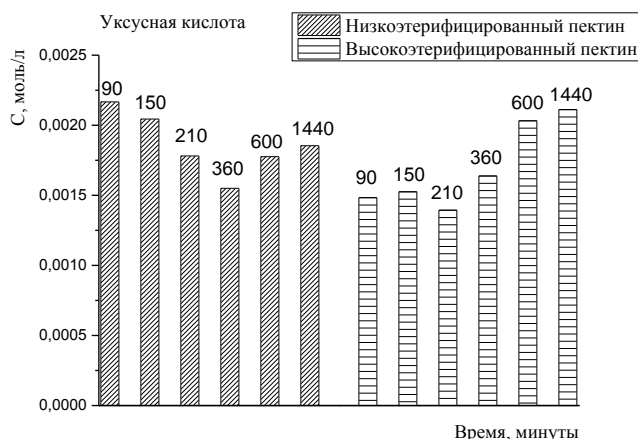


Рисунок 4 – Содержание уксусной кислоты, образующейся при действии бифидобактерий в зависимости от времени ферментации и от вида субстрата

Как видно из представленных данных, количество уксусной кислоты для двух образцов пектинов изменяется незначительно, в небольшом диапазоне концентраций. Наибольшее количество уксусной кислоты в продуктах ферментации низкоэтерифицированного пектина обнаружено через 1,5 часа (0,00217 моль/л). При этом для высокоэтерифицированного пектина ее содержание увеличивается к 10 часам ферментации (0,00203 моль/л) и незначительно подрастает к 24 часам (0,00211 моль/л). Возможно такие результаты связаны с большей доступностью для бифидобактерий в начальный период времени пектинов с низкой степенью этерификации, в отличие от высокоэтерифицированного пектина, где наблюдается более плавное увеличение содержания уксусной кислоты.

Результаты определения количественного содержания пропионовой кислоты, образующейся при действии бифидобактерий для исследуемых объектов в зависимости от времени ферментации представлены на рисунке 5.

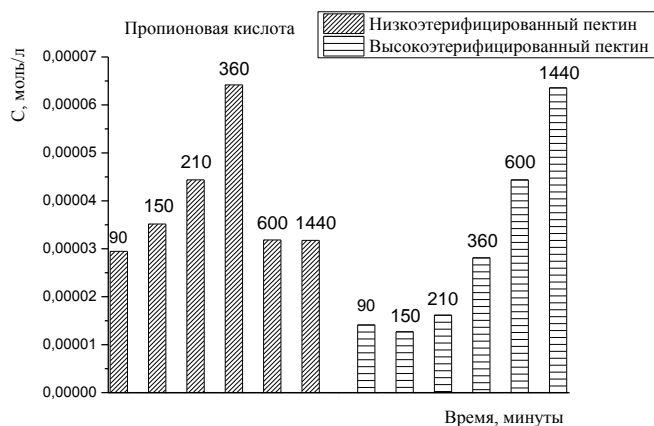


Рисунок 5 – Содержание пропионовой кислоты, образующейся при действии бифидобактерий в зависимости от времени ферментации и от вида субстрата

Как видно из рисунка 5, с ростом времени ферментации концентрация пропионовой кислоты заметно увеличивается для высокоэтерифицированного пектина (в 4,5 раза за сутки ферментации) и достигает максимума через 24 часа ферментации. При действии бифидобактерий на низкоэтерифицированный пектин значения концентрации пропионовой кислоты проходят через максимум, причем наибольшее количество кислоты обнаружено через 6 часов ферментации (0,0000642 моль/л).

Результаты определения количественного содержания изомазляной кислоты, образующейся при действии микроорганизмов в зависимости от времени ферментации и от вида субстрата представлены на рисунке 6.

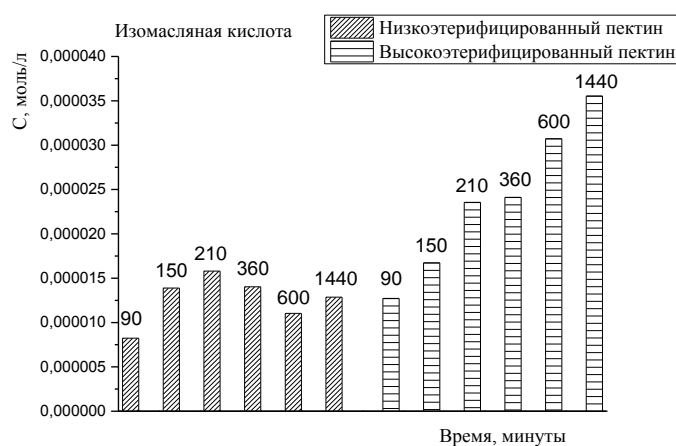


Рисунок 6 – Содержание изомазляной кислоты, образующейся при действии бифидобактерий в зависимости от времени ферментации и от вида субстрата

Для низкоэтерифицированного пектина с увеличением времени ферментации количество изомазляной кислоты сначала возрастает, максимальное ее значение достигается через 3,5 часа действия бифидобактерий (0,0000158 моль/л), а затем наблюдается уменьшение ее количества. Полученная зависимость коррелирует и с результатами по содержанию пропионовой кислоты в продуктах ферментации низкоэтерифицированного пектина (рисунок 5).

Аналогичная корреляция зависимости содержания изомазляной и пропионовой кислот от времени действия микроорганизмов прослеживается и для высокоэтерифицированного пектина – с увеличением времени ферментации количество изомазляной кислоты непрерывно увеличивается и достигает максимума через 24 часа действия бифидобактерий.

Сравнивая количественное содержание образуемых КЦЖК в образцах двух видов пектинов, следует отметить, что близкие максимальные значения концентраций кислот получены только для уксусной ($2,17 \times 10^{-3}$ моль/л – у низкоэтерифицированного пектина, $2,11 \times 10^{-3}$ моль/л – у высокоэтерифицированного пектина) и пропионовой кислот ($6,42 \times 10^{-5}$ моль/л – для низкоэтерифицированного пектина; $6,36 \times 10^{-5}$ моль/л – для высокоэтерифицированного пектина).

Содержание изомазляной кислоты (рисунок 6) преобладает в образцах высокоэтерифицированного пектина по максимальному значению более чем в два раза:

$3,55 \times 10^{-5}$ моль/л – у высокоэтерифицированного пектина, $1,58 \times 10^{-5}$ моль/л – у низкоэтерифицированного.

Кроме того, для высокоэтерифицированного пектина наблюдается более значительное увеличение концентрации изомаляной и пропионовой кислот со временем ферментации. Так, для изомаляной кислоты – от 1,5 до 24 часов ферментации концентрация растет в 2,8 раза, а для пропионовой кислоты за это же время – в 4,5 раза.

Следует отметить, что в системе «высокоэтерифицированный пектин – бифидобактерии» были обнаружены: масляная кислота $(1,02-2,36) \times 10^{-5}$ моль/л в начальный период ферментации и небольшие количества $4,33 \times 10^{-6}$ моль/л изовалериановой кислоты через 10 часов ферментации.

Проанализировав образующиеся при ферментации пектиновых веществ метаболиты – КЦЖК, было выявлено, что по количеству образующихся кислот в системе «низкоэтерифицированный пектин – бифидобактерии» их можно расположить в ряд: $C_2 > C_3 > iC_4$; в системе «высокоэтерифицированный пектин – бифидобактерии»: $C_2 > C_3 > iC_4 > C_4 > iC_5$.

В ходе эксперимента выявлено, что для системы «высокоэтерифицированный пектин – бифидобактерии» наблюдается увеличение содержания обнаруженных КЦЖК от времени ферментации, наиболее выраженное увеличение было характерно для пропионовой и изомаляной кислот.

Для системы «низкоэтерифицированный пектин – бифидобактерии» наибольшие количества уксусной и пропионовой кислот были обнаружены в начальный период ферментации и их количества превышали содержание этих кислот в системах «высокоэтерифицированный пектин – бифидобактерии», что возможно связано с большей доступностью для бифидобактерий в начальный период времени пектинов с низкой степенью этерификации.

Заклучение

В результате проведенных исследований установлена динамика изменения количества карбоксильных групп полисахаридов в пектинах различной степени этерифицированности под действием бифидобактерий *in vitro*. Количество карбоксильных групп с течением времени ферментации возрастает для всех субстратов, однако для высокоэтерифицированного пектина в большей степени.

Определен качественный и количественный состав короткоцепочечных жирных кислот в продуктах ферментации. Выявлено, что по количеству образующихся кислот в системе «низкоэтерифицированный пектин – бифидобактерии» их можно расположить в ряд – $C_2 > C_3 > iC_4$; в системе «высокоэтерифицированный пектин – бифидобактерии» – $C_2 > C_3 > iC_4 > C_4 > iC_5$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **O'Keefe, S. J. D.** Products of the colonic microbiota mediate the effects of diet on colon cancer risk / S. J. D O'Keefe et.al // Journal of Nutrition. – 2009. – Vol. 139. – P. 2044–2048.
2. **Попова, Т.** Нутрицевтики, пребиотики и пробиотики в энтеральном питании / Т. Попова [и др.] // Врач. – 2001. – № 3. – С. 13–16.
3. **Sivieri, K.** Probiotics and intestinal microbiota: implication in colon cancer prevention / K. Sivieri et.al. // Lactic acid bacteria – R And D for food, helth and livestock purposes. – 2013. – P. 217–242.
4. **Hensel, A.** Pectins and xyloglucans exhibit antimutagenic activities against nitroaromatic compounds / A. Hensel, K. Meir // Planta Med. – 1999. – Vol. 65. – P. 395–399.
5. **Чаяло, П. П.** Влияние пектина и пектинсодержащих продуктов на некоторые метаболические показатели крови и ткани печени крыс, подвергшихся внешнему γ -излучению / П. П. Чаяло, В. Я. Бреза, Г. С. Яцула // Радиобиология. – 1992. – № 2. – С. 211–217.

6. **Arakawa, S.** Enhancing effect of carageenan on the induction of rat colonic tumors by 1,2-dimethylhydrazin and its relation to β -glucuronidase activities in feces and other tissue/ S. Arakawa, M. Ito, M. Okumura et al. // *J. Nutr. Sci., Vitaminol (Tokio)*. – 1986. – Vol. 32. – № 5. – P. 481–485.
7. **Harris, P. J.** Dietary fibers may protect or enhance carcinogenesis / P. J. Harris, L.R. Ferguson // *Mutat. Res.* – 1999. – Vol. 443. – № 1-2. – P. 95–110.
8. **Jacobs, L. R.** relationship between colonic luminal pH, cell proliferation and colon carcinogenesis 1,2-dimethylhydrazin-treated rats fed high fiber diets / L. R. Jacobs, J. R. Lupton // *Cancer res.* – 1986. – Vol. 46. – № 4. – P. 1727–1734.
9. **Ардатская, М. Д.** Метаболические эффекты пищевых волокон / М. Д. Ардатская. Изд. Акад. школа им. А. М. Уголева «Современные проблемы физиологии и патологии пищеварения». – 2001. – С. 91–102.
10. **Нечаев, А. П.** Пищевые добавки / А. П. Нечаев, А. А. Кочеткова, А. Н. Зайцев. – М. : Колос, 2001. – С. 170–172.
11. **Sivieri, K.** Probiotics and intestinal microbiota: implication in colon cancer prevention / K. Sivieri et al. // *Lactic acid bacteria – R And D for food, health and livestock purposes.* – 2013. – P. 217–242.
12. **Ардатская, М. Д.** Клиническое значение короткоцепочечных жирных кислот при патологии желудочно-кишечного тракта / М. Д. Ардатская. – Автореф. дис. д.м.н. – Москва, 2003. – 46 с.
13. **Ерофеев, Н. П.** Клиническая физиология толстой кишки. Механизмы действия короткоцепочечных жирных кислот в норме и при патологии / Н. П. Ерофеев, В. Г. Радченко, П. В. Селиверстов. – СПб. : Форте Принт, 2012. – 56 с.
14. **Головенко, О. В.** Роль масляной кислоты и инулина в лечении органических и функциональных заболеваний кишечника: пособие для врачей / О. В. Головенко, И. Л. Халиф, А. О. Головенко; ФГБУ «ГНЦ Колопроктологии» Минздравсоцразвития России, Москва. – 2-е изд., доп. – М. : 4ТЕ АРТ, 2012. – 40 с.
15. **Головенко, О. В.** Лечение заболеваний кишечника масляной кислотой [Текст] / О. В. Головенко, И. Л. Халиф, А. О. Головенко // Поликлиника: Проф. мед. журнал для руководителей и врачей всех специальностей ЛПУ России. – 2012. – № 2/1. – С. 84–87.
16. **Парахонский, А. П.** Антимикробные эффекты пробиотиков / А. П. Парахонский // *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований.* – 2012. – № 8. – С. 116.
17. **Хавкин, А. И.** Нарушение микробиологии кишечника и энтеросорбция / А. И. Хавкин // *Вопросы современной педиатрии.* – 2009. – Т. 8. – № 2. – С. 94–98.
18. **Седакова, В. А.** Особенности ферментации пищевых волокон под действием бифидо- и лактобактерий (in vitro) / В. А. Седакова, А. В. Клебанов, Н. А. Клебанова, Е. В. Седаков // *Траектория науки. Электронный научный журнал.* – 2016. – № (7). – С. 3.1–3.13.
19. **Функциональные пищевые продукты. Введение в технологию / А. Ф. Доронин [и др.]** – М. : ДеЛи принт, 2009. – 286 с.
20. **Седакова, В. А.** Определение короткоцепочечных жирных кислот в крови человека / В. А. Седакова [и др.] // *Проблемы устойчивого развития регионов Республики Беларусь и сопредельных стран : сб. науч. статей III Междунар. научн. практ. конф., Могилев, 14 апреля 2014 г. / Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2014. – С. 444–448.*

Поступила в редакцию 19.06.2023 г.

Контакты: klebanova@msu.by (Клебанова Наталья Александровна), sedakova@msu.by (Седакова Валентина Антоновна), klebanov@msu.by (Клебанов Александр Владимирович)

***Klebanova N. A., Sedakova V. A., Klebanov A. V., Tarasova A. V.* FERMENTATION OF PECTINS OF VARIOUS DEGREES OF ESTERIFICATION UNDER THE ACTION OF BIFIDOBACTERIA**

The article presents experimental data on the study of the dynamics of the decomposition of pectins of various degrees of esterification under the influence of bifidobacteria in vitro. The method of acid-base titration has allowed to establish the total number of free carboxyl groups in low- and high-esterified pectins, as well as the rate of their formation during fermentation under the action of bifidobacteria. The qualitative and quantitative composition of short-chain fatty acids in fermentation products has been determined by capillary gas-liquid chromatography.

Keywords: pectin, dietary fiber, bifidobacteria, short-chain fatty acids, high-esterified and low-esterified pectin.

ЖИРНЫЕ КИСЛОТЫ И СВОБОДНОРАДИКАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

А. Н. Осипенко

старший преподаватель кафедры естествознания

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В обзоре представлен ряд данных, касающихся основных путей генерации активных форм кислорода, а также первостепенных причин их повышенного образования. Основное внимание в статье уделено негативным последствиям интенсификации процессов свободнорадикального окисления полиненасыщенных жирных кислот. Также рассматривается значение свободнорадикального окисления альдегидов жирных кислот (жирных альдегидов) в молекулах плазмалогенов (плазмалогенных фосфолипидов). Отмечается, что повышенный уровень свободнорадикального окисления жирных кислот может существенным образом повлиять на протекание таких важных патофизиологических процессов, как мембранодеструкция и клеточная гибель, воспаление, нарушение кровообращения.

Ключевые слова: свободные радикалы, активные формы кислорода, жирные кислоты, плазмалогены, клеточные мембраны.

Введение

В патогенезе многих заболеваний значительную роль играет свободнорадикальное окисление липидов, под которым обычно понимают окисление полиненасыщенных жирных кислот (ПНЖК) свободными радикалами и химически активными молекулярными соединениями, такими как перекись водорода (H_2O_2) и хлорноватистая кислота ($HOCl$) с образованием их перекисных, гидроперекисных, алкоксильных и других окисленных производных. Первостепенную роль в таком окислении играют активные формы кислорода (АФК), такие как супероксидный радикал, гидроксильный радикал, монооксид азота, синглетный кислород, перекись водорода и другие. Образуются АФК в процессе функционирования митохондриальных и микросомальных цепей переноса электронов и при окислении некоторых эндогенных субстратов [1–8]. В свободнорадикальном окислении важное участие принимают пероксисомы, образующие значительное количество перекиси водорода (H_2O_2) [4]. Высокая активность образования свободных радикалов в эритроцитах обусловлена большим содержанием кислорода в этих клетках. При этом процесс образования АФК в эритроцитах осуществляется в результате неферментативного окисления гемоглобина в метгемоглобин, связанного с переходом двухвалентного железа в трехвалентное [9]. Значительное количество свободных радикалов и активных молекулярных соединений образуется при участии лейкоцитов [3, 5].

Показано, что оксигенирование ПНЖК (включение кислорода в их состав) с участием АФК является первым этапом окислительной модификации большинства липидов. Образующиеся в результате оксигенирования ПНЖК соединения нестойки и быстро распадаются, особенно в присутствии металлов переходной валентности. При этом образуются химически более устойчивые, но достаточно цитотоксичные вторичные продукты свободно радикального окисления липидов

(свободные ненасыщенные альдегиды, малоновый диальдегид и другие). Тормозят пероксидацию ПНЖК антиоксиданты, такие как α -токоферол, β -каротин, а также ферменты утилизирующие перекиси липидов (глутатионпероксидаза), H_2O_2 (каталаза), анион-радикалы кислорода (супероксиддисмутаза) [3, 5].

Основными причинами повышенного образования АФК в организме является воспаление, гипоксия, реперфузия до этого ишемизированных тканей [1–3, 5, 8].

В настоящее время информация о влиянии свободнорадикального окисления ПНЖК на протекание основных патологических процессов носит фрагментарный характер. В этой связи целью данного обзора было обобщение и анализ доступных данных, касающихся данного вопроса.

Основная часть

Различные жирные кислоты имеют неодинаковую чувствительность к действию свободных радикалов. Показано, что чем больше двойных связей содержится в углеводородной цепи ПНЖК, тем интенсивнее протекает ее свободнорадикальное окисление [5, 7]. В связи с этим некоторые исследователи полагают, что рост чувствительности мембран к свободнорадикальному окислению (например, такой рост отмечается при старении [4, 5]) может быть вызван увеличением ненасыщенности их жирных кислот [5].

Процессы свободнорадикального окисления липидов негативно сказываются на функционировании мембранных энзимов, рецепторов и каналов (путем их фрагментации, денатурации, агрегации, образования межмолекулярных сшивок [3, 5–7]), приводя к нарушению функциональных свойств мембраны. Также они приводят к нарушению ионного гомеостаза клеток путем возникновения в мембране участков с повышенной проницаемостью для ионов, что связано с появлением фосфолипидов с жирнокислотными радикалами, подвергнувшимися свободнорадикальному окислению. Группы таких, более гидрофильных, окисленных фосфолипидов образуют в мембране так называемые перекисные кластеры, что приводит к возникновению относительно гидрофильных участков мембраны и увеличению мембранной проницаемости для ионов и воды [3, 5, 6]. Интересно отметить, что по одному из взглядов в основе повышения тонуса сосудов при гипертонической болезни лежит патология клеточных мембран гладкомышечных клеток, следствием которой является нарушение трансмембранного транспорта кальция [10].

Считается, что развитие окислительного стресса средней интенсивности стимулирует пролиферацию, в то время как высокие дозы АФК вызывают апоптоз или некроз (при концентрациях выше апоптогенных) [3]. Механизм развития некроза при этом заключается в том, что через поврежденные АФК зоны бислоя кальций активно поступает во внутриклеточную жидкость, что ведет к росту содержания ионизированного цитозольного кальция. Процессу внутриклеточного накопления кальция может способствовать недостаток АТФ, который ведет к снижению активности ферментов Са-АТФаз, выносящих ионы кальция из цитозоля. Следует отметить, что свободные радикалы оказывают негативное влияние на основные ферменты энергетического метаболизма (гликолиза и цикла трикарбоновых кислот). Перекиси липидов нарушают процессы образования АТФ, разобщая процессы окисления и фосфорилирования в митохондриях [6]. Энергодефицит в клетках существенным образом нарастает в условиях тканевой гипоксии. При этом повышенное проникновение кальция способствует усугублению энергодефицита

и дальнейшей активизации свободнорадикального окисления [1, 5], а также вызывает активацию кальций-зависимых фосфолипаз с ростом процессов мембранодеструкции. Рост активности кальций-зависимой фосфолипазы A_2 ведет к распаду диацилглицерофосфолипидов с образованием свободных жирных кислот и лизоглицерофосфолипидов. Одновременное увеличение свободных жирных кислот и кальция в клетках приводит к образованию обладающих детергентным эффектом солей жирных кислот. Мембраны при этом могут разрушаться, в результате чего клетки подвергаются некрозу [2, 5]. При этом повышенный уровень некротической гибели клеток приводит к увеличению медиаторов воспаления в кровотоке [1, 2, 8]. Кроме того, высвободившись из диацилглицерофосфолипидов свободная арахидоновая ($C_{20:4}$) ПНЖК, подвергаясь действию свободных радикалов при участии ряда ферментов, переходит в эйкозаноиды, влияющие на воспалительный процесс [1, 2, 5], агрегатное состояние крови, а также облегчающие проникновение кальция через мембрану. Такими ферментами являются циклооксигеназы, катализирующие свободнорадикальное окисление ПНЖК с образованием циклических эндоперекисей, а также липоксигеназы, ускоряющие реакции с образованием алифатических гидроперекисей. Циклические эндоперекиси являются промежуточными соединениями при синтезе простагландинов и тромбоксанов. Например, в эндотелии эндоперекиси арахидоновой ($C_{20:4}$) ПНЖК трансформируются в простагландин, который обладает антиагрегационным действием и вызывает дилатацию артерий. Тромбоксан A_2 , синтезируемый из этой же жирной кислоты тромбоцитарной циклооксигеназой, наоборот является соединением, суживающим сосуды и агрегирующим тромбоциты. Алифатические гидроперекиси ПНЖК и их производные, такие как лейкотриены и липоксины, участвуют во многих иммунных процессах, например, лейкотриен B_4 повышает активность воспалительного процесса и образования АФК [2, 3, 5, 8].

В условиях тяжелого остро го инфекционного процесса происходит значительное повышение активности фосфолипазы A_2 , циклооксигеназы 2 и активное образование эйкозаноидов из ПНЖК. При этом на начальных этапах происходит активный выброс арахидоновой ($C_{20:4}$) ПНЖК из клеточных мембран и бурное образование провоспалительных и прокоагулянтных эйкозаноидов. Таким образом, интенсивное свободнорадикальное окисление жирных кислот содействует высокой активности воспалительных реакций, их стихийному течению и формированию синдрома воспалительного ответа [8].

Перекиси липидов, образующиеся при окислении ПНЖК, также участвуют в патогенезе атеросклероза. Показан рост их содержания в крови при гиперхолестеринемии и атеросклерозе. В аорте при ее атеросклеротическом поражении их количество также возрастает. Считается, что перекиси липидов являются соединениями, стимулирующими развитие атеросклероза, и, в частности, они оказывают цитотоксический эффект и вызывают повреждение интимы [3, 5, 11]. В аортах с выраженным атеросклерозом наблюдается повышенное содержание арахидоновой ($C_{20:4}$) ПНЖК и тенденция к росту ряда других высоконенасыщенных жирных кислот. Учитывая, что данные ПНЖК содержат большое количество двойных связей в углеводородной цепи, благодаря чему принимают активное участие в процессах свободнорадикального окисления липидов, их повышение содержания в артериальных сосудах может способствовать протеканию там свободно радикальных процессов [12].

Активно вступают во взаимодействие со свободными радикалами жирные альдегиды (также используется определение – альдегиды жирных кислот), которые в енольной форме входят в состав плазмалогенных фосфолипидов (или иначе плазмалогенов). Остаток жирного альдегида в молекуле плазмалогена также рассматривают как остаток жирного спирта в форме винилового эфира. Благодаря наличию такого остатка в молекуле, плазмалогены более активно вступают в химическое взаимодействие с АФК, в сравнении с практически всеми другими липидами. Это делает плазмалогены активными участниками свободнорадикальных процессов и важными элементами окислительной модификации клеточных мембран [13, 14, 15]. Энергия, необходимая для разрыва соседствующей с простой эфирной связью двойной углерод-углеродной связи молекулы плазмалогена [15], существенно ниже энергии, необходимой для разрыва других двойных связей липидов, таких как двойные связи ПНЖК.

Высказано мнение, согласно которому жирные альдегиды плазмалогенов являются расходуемыми в процессах свободнорадикального окисления субстратом, наличие которого снижает активность окисления ПНЖК. При этом [13, 14, 16] продукты этого окисления не поддерживают цепные свободнорадикальные реакции, наблюдающиеся при перекисном окислении ПНЖК [14]. С другой стороны, плазмалогены сами могут быть причиной образования химически активных метаболитов (свободных жирных альдегидов, гидропероксидов, эпоксидов и полуацеталей) [14, 17, 18]. При этом вред от продуктов свободнорадикального окисления этих фосфолипидов еще не оценен [14]. Следует отметить, что начальные стадии синтеза ПФЛ проходят в пероксисомах, функциональная активность которых определяет содержание указанных соединений в тканях [13, 14, 16, 19]. При этом пероксисомы, кроме ферментов, приводящих к образованию АФК, содержат каталазу и глутатионпероксидазу, которые предупреждают окислительное повреждение клеточных структур. Есть мнение [4], что расстройство функции пероксисом может быть фактором развития возрастных патологий. Причиной этому является снижение содержания каталазы в пероксисомах с возрастом, что способствует окислительному повреждению клеток.

Существуют данные, что повышенное свободнорадикальное окисление плазмалогенов способствует развитию атеросклероза [18], а также [20] является одной из причин ряда хронических неврологических заболеваний, протекающих с поражением центральной нервной системы, таких как болезнь Альцгеймера.

Заключение

Значительная интенсификация свободнорадикального окисления ПНЖК ведет к изменению структурно-функциональных свойств мембран с нарушением трансмембранного транспорта ионов и внутриклеточного гомеостаза, содействует развитию в клетках энергодифицита и запуску процессов клеточной гибели. Кроме того, активное свободнорадикальное окисление ПНЖК усиливает протекание воспалительных процессов, способствует их стихийному течению и формированию синдрома воспалительного ответа, а также содействует формированию прокоагулянтного состояния крови. Свободнорадикальное окисление липидов является одним из факторов развития атеросклероза, а также может способствовать развитию гипертонической болезни. Недостаточно изученным, но важным в плане развития различных патологий, может являться свободнорадикальное окисление плазмалогенов, которые являются одними из наиболее легко окисляемых липидов в организме.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Власов, А. П.** Роль нарушений липидного гомеостаза в патогенезе перитонита / А. П. Власов, В. А. Трофимов, Р. З. Аширов. – Саранск : Изд-во Мордов. ун-та, 2000. – 208 с.
2. **Зайчик, А. Ш.** Основы общей патологии. Часть 1. Основы общей патофизиологии / А. Ш. Зайчик, Л. П. Чурилов. – СПб. : ЭЛБИ, 1999. – 624 с.
3. **Зенков, Н. К.** Окислительный стресс: Биохимический и патофизиологический аспекты / Н. К. Зенков, В. З. Ланкин, Е. Б. Меньщикова. – М. : МАИК «Наука/Интерпериодика», 2001. – 343 с.
4. Окислительный стресс при старении / Н. К. Зенков [и др.] // Успехи геронтологии. – 2020. – № 1. – С. 10–22.
5. Свободнорадикальное окисление и старение / В. Х. Хавинсон [и др.]. – СПб. : Наука, 2003. – 327 с.
6. Свободнорадикальное окисление липидов и белков – универсальный процесс жизнедеятельности организма / М. А. Луцкий [и др.] // Успехи современного естествознания. – 2014. – № 12-1. – С. 24–28.
7. **Узбеков, М. Г.** Перекисное окисление липидов и антиоксидантные системы при психических заболеваниях. Сообщение I / М. Г. Узбеков // Социальная и клиническая психиатрия. – 2014. – № 4. – С. 97–103.
8. **Das, U. N.** Role of lipids in sepsis / U.N. Das // Critical Care Shock. – 2004. – Vol. 7, № 2. – P. 87–92.
9. **Rifkind, J. M.** The pathophysiology of extracellular hemoglobin associated with enhanced oxidative reactions [Electronic resource] / J. M. Rifkind, J. G. Mohanty, E. Nagababu // Frontiers in physiology – 2015. – Vol. 5. – Mode of access: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4294139/pdf/fphys-05-00500.pdf>. – Date of access: 23.06.2023.
10. **Постнов, Ю. В.** Первичная гипертензия как патология клеточных мембран / Ю. В. Постнов, С. Н. Орлов. – М. : Медицина, 1987. – 190 с.
11. **Климов, А. Н.** Липиды, липопротеиды и атеросклероз / А. Н. Климов, Н. Г. Никульчева. – СПб. : Питер Пресс, 1995. – 304 с.
12. **Осипенко, А. Н.** Плазмалогенные фосфолипиды в интактных и пораженных атеросклерозом артериях / А. Н. Осипенко // Веснік Магілеўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаучыя навукі (магэматыка, фізіка, біялогія). – 2020. – № 2 (56). – С. 70–78.
13. **Khan, M.** Plasmalogen deficiency in cerebral adrenoleukodystrophy and its modulation by lovastatin / M. Khan, J. Singh, I. Singh // J. Neurochem. – 2008. – Vol. 106, № 4. – P. 1766–1779.
14. **Braverman, N. E.** Functions of plasmalogen lipids in health and disease / N. E. Braverman, A. V. Moser // Biochim. Biophys. Acta. – 2012. – Vol. 1822, № 9. – P. 1442–1452.
15. Plasmalogens as endogenous antioxidants: somatic cell mutants reveal the importance of the vinyl ether / R. A. Zoeller [et al.]. // Biochem. J. – 1999 – Vol. 338, № Pt 3. – P. 769–776.
16. Homeostasis of phospholipids - The level of phosphatidylethanolamine tightly adapts to changes in ethanolamine plasmalogens / F. Dorninger [et al.] // Biochim. Biophys. Acta. – 2015. – Vol. 1851, № 2. – P. 117–128.
17. Dramatic increase of alpha-hydroxyaldehydes derived from plasmalogens in the aged human brain / M. Weisser [et al.] // Chem. Phys. Lipids. – 1997. – Vol. 90, № 1-2. – P. 135–142.
18. Identification of α -chloro fatty aldehydes and unsaturated lysophosphatidylcholine molecular species in human atherosclerotic lesions / A. K. Thukkani [et al.] // Circulation. – 2003. – Vol. 108, № 25. – P. 3128–3133.
19. **Зиновик, А. В.** Нарушение биогенеза пероксисом (клиника, диагностика, лечение) / А. В. Зиновик, Н. Б. Гусина. – М. : «ГУ РНПЦ «Мать и дитя», 2011. – 30 с.
20. **Bozelli Jr, J. C.** Plasmalogens and chronic inflammatory diseases [Electronic resource] / J. C. Bozelli Jr, S. Azher, R. M. Epanand // Frontiers in physiology – 2021. – Vol. 12. – Mode of access: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8566352/pdf/fphys-12-730829.pdf>. – Date of access: 23.06.2023.

Поступила в редакцию 19.05.2023 г.

Контакты: alosisipenko@yandex.ru (Осипенко Александр Николаевич)

Osipenko A. N. FATTY ACIDS AND FREE-RADICAL PROCESSES

The article presents some data concerning the main ways of generating active oxygen forms, as well as the primary causes of their increased formation. The article focuses on the negative consequences of the intensification of free-radical oxidation of polyunsaturated fatty acids. The

importance of free-radical oxidation of fatty aldehydes (vinyl alcohols) in plasmalogen molecules is also considered. It is noted that an increased level of free-radical oxidation of fatty acids may significantly influence the course of such important pathophysiological processes as membrane destruction and cell death, inflammation, and circulatory disorders.

Keywords: free radicals, active oxygen forms, fatty acids, plasmalogens, cell membranes.

УДК 612.8

ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОГНИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ, ФИЗИЧЕСКОГО ЗДОРОВЬЯ И СОСТОЯНИЯ У СТУДЕНТОВ, ПЕРЕНЕСШИХ КОРОНАВИРУСНУЮ ИНФЕКЦИЮ COVID-19

М. И. Гаптарь

соискатель

Институт физиологии Национальной академии наук Республики Беларусь

В статье дана этиологическая характеристика коронавирусной инфекции COVID-19, раскрыта симптоматика и патогенез данной инфекции, описано экспериментальное исследование, направленное на изучение воздействия аудиовизуальной стимуляции и дозированных физических упражнений на восстановление когнитивных функций, физического здоровья и состояния у студентов, перенесших коронавирусную инфекцию COVID-19, сделаны соответствующие выводы.

Ключевые слова: аудиовизуальная стимуляция, дозированные физические упражнения, когнитивные функции, коронавирусная инфекция COVID-19, студенты, физическое здоровье и состояние.

Введение

Коронавирусы представляют собой семейство вирусов, включающее множество различных видов. Данные вирусы могут поражать как человека, так и животных. Наиболее опасными из них являются SARS-COV (возбудитель атипичной пневмонии, распространившейся в 2002 году, смертность от которой составляла около 10 процентов), MERS (возбудитель ближневосточного респираторного синдрома в 2012 году, смертность около 30 процентов), SARS-COV-2 (возбудитель коронавирусной инфекции COVID-19, смертность около 1 – 1,5 процента) [1; 2].

Вирус SARS-COV-2 является РНК-содержащим и имеющим белковую оболочку, на поверхности которой имеются коронообразные шипы (s-белок). Передача данного вируса в основном происходит либо воздушно-капельным, либо фекально-оральным путем. Репродуктивное число у вируса SARS-COV-2 – от 2,5 человек, скорость распространения вируса – от 2,5 – 3 дней [3; 4].

Цель работы: изучить эффективность применения метода аудиовизуальной стимуляции и дозированных физических упражнений для восстановления когнитивных функций, физического здоровья и состояния студентов, перенесших коронавирусную инфекцию COVID-19.

Объект исследования: студенты женского пола учреждения образования «Белорусский государственный медицинский университет», перенесшие коронавирусную инфекцию COVID-19.

Предмет исследования: уровень физического здоровья, состояния и когнитивных функций у студентов до и после перенесенной коронавирусной инфекции COVID-19.

Основная часть

Влияние вируса SARS-COV-2 может иметь разную выраженность на организм человека.

Особенно важным в вирусе SARS-COV-2 является выраженное влияние на клетки эпителия легких. При попадании вируса в легкие в результате инфициру-

ются альвеолоциты II типа, основной задачей которых является выработка сурфактанта, необходимого для предотвращения коллапса легких. На поверхности данных альвеолоцитов имеется ангиотензинпревращающий фермент, который связывается с s-белком вируса SARS-COV-2. В результате РНК-вируса проникает в рибосомы, где происходит синтез белков. Далее с помощью протеиназы данные белки приобретают вид структурных компонентов вируса-возбудителя. Также с помощью РНК-зависимой РНК-полимеразы синтезируется вторая такая же цепочка РНК, которая воссоединяется со структурными компонентами вируса и образуется новый вирус. Таким образом вирус размножается в клетках. Возникает воспалительная реакция и интерстициальный отек [1; 5; 6].

Коронавирусная инфекция COVID-19 всегда провоцирует сосудистые нарушения, в том числе со стороны регуляторной составляющей, изменение текучести крови, увеличение ее вязкости. В альвеолы поступают макрофаги, которые выделяют интерлейкин I, интерлейкин II, интерлейкин VI, фактор некроза опухоли альфа. Выработка этих веществ способствует дилатации сосудов и увеличению сосудистой проницаемости. Жидкость из сосудов выходит как в интерстиций, так и в саму альвеолу.

Также в альвеолы поступают нейтрофилы, вырабатывающие протеазы и активные кислородные радикалы, которые кроме поражающего воздействия на вирус, также отрицательно воздействуют на альвеолоциты I и II типа. Клетки погибают, происходит консолидация альвеол, снижается газообмен. Дополнительно развивается гипоксия. При снижении напряжения кислорода в крови активируются хеморецепторы, стимулирующие симпатическую нервную систему, что приводит к увеличению частоты сердечных сокращений и частоты дыхательных движений.

Интерлейкин I, интерлейкин VI, фактор некроза опухоли альфа действуют на рецепторы в гипоталамусе. В результате происходит повышение температуры тела. Ухудшается состояние нервной системы. Присутствует также неврологическая симптоматика (недомогание, усталость, головные боли, депрессии, невозможность сосредоточиться, сконцентрироваться, нарушение когнитивных функций, бессонница, головокружение, панические атаки, шум в ушах, продолжающиеся потери обоняния и вкуса, а также появление извращенных, фантомных запахов). При заболевании коронавирусной инфекцией COVID-19 наблюдаются случаи нарушения памяти, внимания, ориентировки в пространстве, ощущения ментальности (когда человек должен быстро принять решение, при этом не может этого сделать). Может возникать церебрально-астенический синдром, вызывающий состояние апатии, вялости. Неврологические симптомы коронавирусной инфекции присутствуют практически у трети переболевших [2; 6; 7; 8].

Основными симптомами как у госпитализированных, так и амбулаторных пациентов со стороны сердечно-сосудистой системы являются боли в груди, учащенное сердцебиение, сохраняющаяся тахикардия, декомпенсация основных сердечно-сосудистых заболеваний, аномальное потоотделение. Со стороны дыхательной системы может долгое время проявляться одышка, заложенность в грудной клетке, непрекращающийся кашель. В ряде случаев поражается также желудочно-кишечный тракт: диарея, вздутие живота, боли, похожие как при панкреатите. Со стороны органа зрения могут наблюдаться синдром сухого глаза, сыпь, зуд и жжение в глазах. При увеличении степени сосудистой проницаемости жидкость может начать выходить все больше из сосудов, в результате снижается артериальное давление. Вызывается септический шок, который может привести к летальному исходу [9; 10; 11; 12; 13; 14; 15].

Дизайн исследования. Первоначально (сентябрь 2020 года – июнь 2021 года) в исследовании приняли участие 245 студентов, у которых была произведена оценка физического здоровья и состояния, а также отдельных когнитивных функций (восприятия, внимания, памяти, мышления). Данные показатели использовались как первичные для дальнейшего сравнения.

Студенты, которые переболели коронавирусной инфекцией COVID-19 и которые приняли участие в первом этапе исследования, с учетом необходимости обеспечения равности групп по функциональной и когнитивной подготовленности были разделены на группу контроля (ГК) и группу исследования (ГИ) в количестве 46 студентов (в ГК: с основной медицинской группой здоровья – 14 студентов, с подготовительной – 32 студента, в ГИ: с основной медицинской группой здоровья – 12 студентов, с подготовительной – 34 студента).

Далее (сентябрь 2021 года – январь 2022 года) для студентов ГИ после их выздоровления и приступа к учебным занятиям в течение двух недель проведен курс индивидуальных восстановительных мероприятий с помощью аппарата аудиовизуальной стимуляции «AVS-TM», состоящий из 10 сеансов. Одновременно студентами самостоятельно выполнялись дозированные по интенсивности и длительности физические упражнения согласно методике Г. Борга [16] (таблица 1).

Таблица 1 – Методика дозированных физических нагрузок согласно субъективно ощущаемой нагрузке

День	1 – 4	5 – 8	9 – 12	13 – 17
Интенсивность	6 – 8 баллов	9 – 11 баллов	12 – 14 баллов	12 – 14 баллов
Вид физических упражнений	медленная ходьба (60-70 шагов в мин), растяжка, упражнения на равновесие (повороты, развороты, приседания на одной ноге), нагрузка не должна приводить к нарушению дыхания или каким-нибудь неприятным ощущениям	ходьба в среднем темпе (80-90 шагов в мин), упражнения на равновесие	легкий бег (120-130 шагов в мин), езда на велосипеде в медленном темпе, быстрая ходьба (100-110 шагов в мин) с 2-3 минутным интервалом отдыха	бег с переменной скоростью (от 100-110 до 140-150 шагов в мин), езда на велосипеде в переменном темпе, силовые тренировки (выполнение упражнений с собственным весом), упражнения на координационные способности
Продолжительность занятия	с 10-15 минут до 30 минут	с 30 минут до 45-60 минут	с 15 минут до 30 минут	с 30 минут до 45-60 минут
Субъективные и объективные показатели	во время выполнения физической нагрузки человек должен быть способен без каких-либо усилий поддерживать разговор			ЧСС 130 – 150 уд. / мин
	ЧСС 70 – 90 уд. / мин	ЧСС 100 – 115 уд. / мин	ЧСС 115 – 130 уд. / мин	
Восстановление	через час после того, как человек завершил выполнение физических упражнений, он должен полностью восстановиться. На следующий день не должно быть никакой усталости			два дня тренировки, один день отдых, легкая усталость может присутствовать

Согласно данной методике физическая нагрузка классифицируется от 6 до 20 баллов (1–5 баллов – это преимущественно отсутствие какой-либо нагрузки,

6–11 баллов – легкая нагрузка, 12–14 баллов – умеренная нагрузка, 15–19 баллов – тяжелая нагрузка, 20 баллов – максимально тяжелая нагрузка).

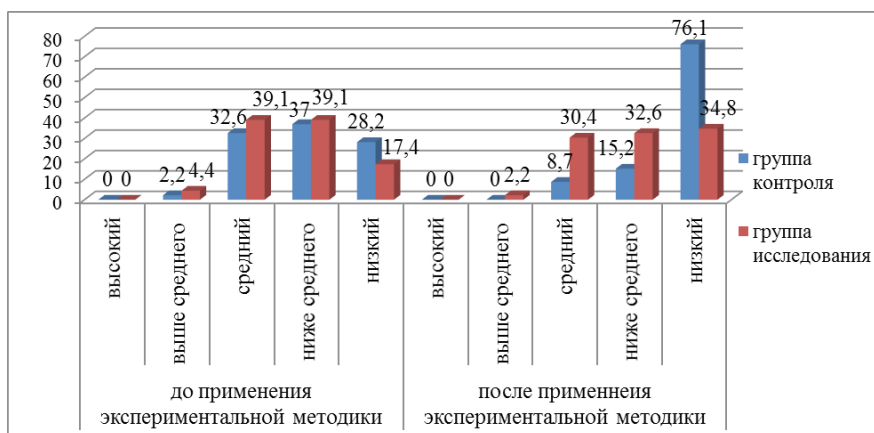
При переходе от одного уровня к другому необходимо строго соблюдать следующее правило: выполнение физических упражнений не должно приводить к нарушению дыхания или вызывать неприятные ощущения. На первых трех этапах во время выполнения физических упражнений человек должен без каких-либо усилий поддерживать разговор. Через час после того, как человек завершил выполнение физических упражнений, он должен полностью восстановиться.

Первоначально выполняемая физическая нагрузка должна быть в пределах 6–8 баллов. Время выполнения упражнения должно занимать не более 15 мин. Далее с учетом субъективных ощущений время выполнения физических упражнений может увеличиваться на 5 – 10 минут ежедневно.

Интенсивность физических нагрузок на третьем этапе возрастает до 12–14 баллов. В конце третьего этапа необходимо выдерживать тренировку в течение 30 минут. Физическая нагрузка на четвертом этапе сохраняется на том же уровне, при этом увеличивается продолжительность выполнения физических упражнений и выполняется бег с переменной скоростью, силовые упражнения, различные упражнения на координационные способности. На данном этапе предпочтительным является следующий режим: два дня тренировок, один день отдыха [17, с. 21–25]. В целях обеспечения должного контроля за выполнением студентами ГИ дозированных физических упражнений данные об их объеме и продолжительности фиксировались персональными устройствами с установленными мобильными приложениями.

Далее (октябрь 2021 года – февраль 2022 года) в ГИ и ГК осуществлялась повторная оценка физического здоровья и состояния, а также отдельных когнитивных функций.

Результаты исследования. По итогам расчета уровня физического здоровья по методике Л.Г. Апанасенко установлено, что в ГК и ГИ до применения экспериментальной методики среди студентов преобладающими являлись средний и ниже среднего уровни физического здоровья: по 39,1 % в ГИ и 32,6 и 37 % соответственно в ГК. Ни у одного студента ГК и ГИ не установлен высокий уровень физического здоровья, выше среднего уровень физического здоровья зафиксирован только у одного студента ГК (2,2 %) и двух студентов ГИ (4,4 %). Низкий уровень зафиксирован у 28,2 % студентов ГК и 17,4 % – студентов ГИ (рисунок).



Соотношение уровней физического здоровья студентов ГК и ГИ
(по методу Г. Л. Апанасенко), в процентах

После применения экспериментальной методики среди студентов ГИ уровень физического здоровья распределился приблизительно равномерно между низким (34,8 %), ниже среднего (32,6 %) и средним (30,4 %), уровень выше среднего – зафиксирован только у одного студента (2,2 %). Высокий уровень не фиксировался. В ГК значительно преобладающим зафиксирован низкий уровень физического здоровья – 76,1 %. У 15,2 % студентов выявлен уровень ниже среднего, только у 8,7 % – средний. Ни у одного студента ГК после применения экспериментальной методики не фиксировался уровень физического здоровья выше среднего и высокий уровень.

Общие суммы баллов по методике Л. Г. Апанасенко (в ГК – 6,01 балла, в ГИ – 6,14 балла: уровень физического здоровья – ниже среднего (близкий к среднему (7 баллов)) были примерно одинаковыми и не имели достоверных различий ($p > 0,05$).

После применения экспериментальной методики зафиксировано достоверное снижение результатов по методике Л. Г. Апанасенко как в обеих выборках, так и между выборками ($p < 0,01$). Так, общая сумма баллов в ГК снизилась до 1,74 балла, в ГИ – до 4,82 балла (таблица 2).

Достоверно различались следующие показатели между двумя исследуемыми выборками: индекс Апанасенко, время восстановления ЧСС после 20 приседаний за 30 с ($p < 0,01$).

Также достоверно снизились результаты в ГК по силовому индексу в ГИ – по индексу Кетле; в ГК и ГИ по жизненному индексу, времени восстановления ЧСС после 20 приседаний за 30 с и индексу Апанасенко ($p < 0,01$).

Одновременно у студентов определялся уровень физического состояния с помощью метода, предложенного Е. А. Пироговой.

До применения экспериментальной методики у девушек ГК и ГИ преобладающим определен высокий уровень физического состояния: 93,5 % в ГК и 87 % в ГИ. Такое большое количество студентов, имеющих высокий уровень физического состояния по методике Е. А. Пироговой, объясняется, по нашему мнению, тем фактом, что выполнение физической нагрузки при определении данного показателя не требуется. Выше среднего уровень физического состояния зафиксирован у 6,5 % студентов ГК и 13 % студентов ГИ, средний уровень физического состояния в ГК и ГИ до применения экспериментальной методики не фиксировался.

После применения экспериментальной методики преобладающим уровнем физического состояния в ГИ остался высокий уровень – 89,1 %, в тоже время в ГК – уровень выше среднего (52,2 %), а высокий уровень зафиксирован только у 37 % студентов. Также в ГК после применения экспериментальной методики зафиксировано 10,8 % студентов со средним уровнем физического состояния.

Первоначально среднегрупповой индекс по методике Е. А. Пироговой в ГК равнялся $0,68 \pm 0,05$, в ГИ – $0,67 \pm 0,07$, между которыми достоверных различий не обнаружено ($p > 0,05$). При повторном измерении в ГК данный среднегрупповой индекс зафиксирован на уровне $0,55 \pm 0,07$, в ГИ – $0,64 \pm 0,05$. Зафиксировано статистически достоверное различие между данными выборками ($p < 0,01$).

Снижение уровня физического состояния в ГК после перенесенного заболевания COVID-19 составило 23,6 %, при этом в ГИ снижение зафиксировано на уровне 4,7 %.

Достоверность различий зафиксирована также между результатами ГИ и КГ, полученными при оценке двух из четырех исследуемых когнитивных функций. Первоначальный уровень кратковременной памяти в ГК составлял 7,33 знака, в ГИ – 7,30 знака ($p > 0,05$). При повторном измерении объем кратковременной памяти в ГК составил 6,91 знака, в ГИ – 7,15 знака, что достоверно выше, чем в ГК ($p < 0,05$). Продуктивность и устойчивость внимания до применения экспериментальной методики равнялась 2,29 балла в ГК и 2,31 балла – в ГИ ($p > 0,05$). После применения экспериментальной методики данный показатель в ГК достоверно снизился и составил 2,17 балла, в ГИ снижение было не столь значительным – до 2,26 балла ($p < 0,05$).

Достоверных различий в уровнях восприятия и мышления между исследуемыми выборками после применения экспериментальной методики не установлено. Объем восприятия в обеих выборках даже незначительно вырос ($p > 0,05$). Уровень объема мышления у студентов ГК и ГИ при первоначальной и повторной оценке был приблизительно одинаков: 8,93 и 9,02 балла соответственно до ($p > 0,05$) и 8,78 и 8,87 балла после применения экспериментальной методики соответственно ($p > 0,05$).

Заключение. Установлено достоверное различие в выборках между отдельными исследуемыми показателями после применения экспериментальной методики:

– при оценке уровня физического здоровья по методике Л.Г. Апанасенко: снижение результатов в обеих выборках по жизненному индексу, времени восстановления ЧСС после 20 приседаний за 30 с, по индексу Апанасенко и в общей сумме баллов; снижение результатов в ГК по силовому индексу, в ГИ – по индексу Кетле; различие между двумя исследуемыми выборками по индексу Апанасенко, времени восстановления ЧСС после 20 приседаний за 30 сек и общей сумме баллов;

– между ГИ и ГК в уровне физического состояния, рассчитанного по методике Е.А. Пироговой, а также между первоначальными и повторными показателями в обеих выборках;

– различие между результатами ГИ и КГ, полученными при оценке двух из четырех исследуемых когнитивных функций: уровня развития кратковременной памяти, продуктивности и устойчивости внимания.

Достоверное различие в выборках между исследуемыми показателями после использования экспериментальной методики свидетельствует о ее эффективности и возможности использования для восстановления физического здоровья, состояния и отдельных когнитивных функций (памяти и внимания) у студентов, перенесших COVID-19.

Также необходимо отметить, что коронавирусная инфекция негативно повлияла на уровень физического здоровья и состояния, а также, что данное заболевание оказывает большое влияние на функциональное состояние сердечно-сосудистой и дыхательной систем, о чем свидетельствует достоверное снижение соответствующих показателей в обеих выборках. При этом применение предложенной экспериментальной методики способствовало достоверно более эффективному восстановлению исследуемых показателей в ГИ, чем в ГК.

В настоящее время важным является дальнейшая разработка различных методов и методик восстановления лиц, перенесших данное заболевание.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Сизова, Е. Н.* Экология SARS-CoV-2 (обзор литературы) : монография / Е. Н. Сизова. – Киров : Кировский ГМУ, 2020. – 51 с.
2. *Тер-Багдасарян, Л. В.* Некоторые клинические аспекты новой коронавирусной инфекции (COVID-19) (по материалам Челябинского областного инфекционного центра) / Л. В. Тер-Багдасарян, Л. И. Ратникова // Известия высших учебных заведений. Уральский регион. – 2021. – № 4. – С. 155 – 158.
3. Новая коронавирусная инфекция COVID-19 в практике врача-невролога : учеб. пособ. / М. А. Кутлубаев, Л. Р. Ахмадеева, К. З. Бахтиярова [и др.]. – Уфа : БГМУ, 2020. – 72 с.
4. *Чиркин, А. А.* Биология коронавирусной инфекции / А. А. Чиркин, Т. А. Толкачева / Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2020. – № 1. – С. 41 – 46.
5. *Никифоров, В. В.* Новая коронавирусная инфекция (COVID-19): клинико-эпидемиологические аспекты / В. В. Никифоров, Т. Г. Суранова, Т. Я. Чернобровкина и [др.] // Архивь внутренней медицины. – 2020. – Т. 10. – № 2. – С. 87 – 93.
6. *Санникова, Н. Р.* Клинические особенности коронавирусной инфекции COVID-19 / Н. Р. Санникова, А. Д. Тетерина, А. Д. Железнова // Медицинское образование сегодня. – 2020. – № 3. – С. 181 – 190.
7. *Гуляев, П. В.* Выявление постковидного синдрома у пациентов, перенесших новую коронавирусную инфекцию / П. В. Гуляев, С. В. Реснянская, И. В. Островская // Современные проблемы здравоохранения и медицинской статистики. – 2022. – № S2. – С. 107 – 128.
8. *Наптар, М.* Effects of coronavirus infection COVID-19 on cognitive functions / М. Naphtar // Magyar Tuodományos Journal. – 2021. – № 56. – Р. 3 – 6.
9. *Барыльник, С. Н.* Изучение влияния пандемии COVID-19 на когнитивные функции / С. Н. Барыльник // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – 2022. – № 5-1. – С. 99 – 101.
10. *Волков, А. В.* Когнитивные нарушения у больных COVID-19, получавших терапию респираторной поддержки (обзор литературы) / А. В. Волков, М. А. Кинкулькина, Н. Н. Иванец [и др.] // Бюллетень Национального научно-исследовательского института общественного здоровья имени Н. А. Семашко. – 2021. – № 4. – С. 138 – 147.
11. *Гаптарь, М. И.* Влияние коронавирусной инфекции COVID-19 на когнитивные функции и физическую работоспособность студентов / М. И. Гаптарь, С. В. Губкин // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2021. – № 3. – С. 337 – 344.
12. *Нестеровский, Ю. Е.* Головная боль и другие неврологические симптомы в структуре клинической картины новой коронавирусной инфекции (COVID-19) / Ю. Е. Нестеровский, Н. Н. Заваденко, А. А. Холин // Нервные болезни. – 2020. – № 2. – С. 60–68.
13. *Никифоров, В. В.* Новая коронавирусная инфекция (COVID-19): клинико-эпидемиологические аспекты / В. В. Никифоров, Т. Г. Суранова, Т. Я. Чернобровкина и [др.] // Архивь внутренней медицины. – 2020. – Т. 10. – № 2. – С. 87–93.
14. Пандемия COVID-19: вызовы, последствия, противодействие : монография / под редакцией А. В. Торкунова [и др.]. – М. : Аспект Пресс, 2021. – 248 с.
15. *Lazarus, T.* Cognitive neuroscience of neuroinfectious diseases / T. Lazarus, K. Reardon, G. T. Lazarus // Lurian Journal. – 2021. – Т. 2. – № 3. – С. 13 – 16.
16. Шкала субъективной оценки физической нагрузки (шкала Борга) // physrehab.ru. – Режим доступа: https://physrehab.ru/glossary/borg_gpe_scale. – Дата доступа: 15.04.2021.
17. *Гаптарь, М. И.* Восстановление физической работоспособности средствами физической культуры и спорта после перенесенной коронавирусной инфекции COVID-19 / М. И. Гаптарь // Современные проблемы формирования здорового образа жизни студенческой молодежи : материалы IV Междун. науч.-практ. интернет-конф., 7 – 8 октября 2021 г., Минск, Беларусь / БГУ, фак. социокультурных коммуникаций, каф. экологии человека ; [редкол.: И. В. Пантюк (отв. ред.) и др.]. – Минск : БГУ, 2021. – С. 21 – 25.

Поступила в редакцию: 07.06.2023 г.

Контакты: vitalgaptar@tut.by (Гаптарь Марина Игоревна)

Натар М. І. RESTORATION OF COGNITIVE FUNCTIONS, PHYSICAL HEALTH AND CONDITION OF STUDENTS AFTER CORONAVIRUS INFECTION COVID-19

The etiological characteristics of the coronavirus infection COVID-19 are given in the article, the symptoms and pathogenesis of this infection are revealed, an experimental research aimed at studying the impact of audiovisual stimulation and dosed physical exercises on the restoration of cognitive functions, physical health and condition in students who have had the coronavirus infection COVID-19 is described, the corresponding conclusions are drawn.

Keywords: audiovisual stimulation, dosed physical exercises, cognitive functions, coronavirus infection COVID-19, students, physical health and condition.

ДЛЯ ЗАЎВАГ

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў
на англійскую мову
Я. В. Рубанавы

Тэхнічны рэдактар *А. Р. Роскач*
Камп'ютарны набор і вёрстка *С. А. Кірыльчык*
Карэктар *І. Г. Каржова*

Падпісана да друку .2023 г.
Фармат 70x108¹/₁₆. Гарнітура Times New Roman.
Ум.-друк. арк. 10,0. Ул.-выд. арк. 11,5. Тыраж 50 экз. Заказ № .
Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А. А. Куляшова”, 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Дзяржаўнае прадпрыемства
«Выдавецтва “Беларускі Дом друку”».
Пр. Незалежнасці, 79/1, 220013, г. Мінск.
ЛП № 02330/106 ад 30.04.2004.