

ISSN 2409-3777



ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта

імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

1 (61)
2023

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р гіст. навук прафесар Д. С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р экан. навук прафесар Н. У. Макоўская (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я. Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. В. Марчанка (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
канд. гіст. навук А. У. Коласаў (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар В. А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В. І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В. М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар М. М. Дабравольскі (Тула)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А. С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б. Д. Чабатарэўскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар У. І. Лебедзеў (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. М. Сідарэнка (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А. В. Цімошчанка (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар А. М. Дворнік (Гомель)
д-р біял. навук прафесар Н. П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А. Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С. У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М. В. Акуліч (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт Г. М. Ціханчук (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт А. А. Анціпенка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А. В. Марачкаў (Магілёў)
д-р мед. навук Н. І. Сімчанка (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П. С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар А. Г. Палячонак (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар Г. М. Раганаў (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс "Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова" ўключаны ў РИНЦ
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),
ліцэнзійны дагавор № 811-12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:
212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
vesnik_mdu@mail.ru

**MOGILEV STATE
A. KULESHOV UNIVERSITY
BULLETIN**

THEORETICAL-SCIENTIFIC JOURNAL

Founded in December 1998

Series B. NATURAL SCIENCES
(Mathematics, Physics, Biology)

Published twice per year

**1 (61)
2023**

Editorial Board:

Lavrinovich D. S., Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor,
Makovskaya N. V., Deputy Chief Editor, Doctor of Economic Sciences, Professor
Riyer Y. G., Deputy Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor
Marchenko I. V., Chairman of the Editorial Committee (Series B),
Ph.D., Associate Professor
Kolosov A. V., Executive Secretary of the Editorial Board, Ph.D.

Mathematics, Physics:

Yerovenko V. A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Bernik V. I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Laptinsky V. N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of
the Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus
(Mogilev)
Dobrovolsky N. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Tula)
Sotsky A. B., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Galmak A. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Turtsevich A. S., Doctor of Technical Sciences (Minsk)
Chebotarevsky B. D., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Lebedev V. I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Sidorenko I. N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Timoschenko E. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)

Biology:

Dvornik A. M., Doctor of Biological Sciences, Professor (Gomel)
Maksimova N. P., Doctor of Biological Sciences, Professor (Minsk)
Naumov A. D., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Minsk)
Lazarevich S. V., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Gorky)
Akulich N. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Tihonchuk G. N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Antipenko A. A., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Marochkov A. V., Doctor of Medical Sciences, Professor (Mogilev)
Simchenko N. I., Doctor of Medical Sciences (Mogilev)
Lopuh P. S., Doctor of Geographical Sciences, Professor (Minsk)
Poliachenok O. G., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)
Roganov G. N., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)

Theoretical-scientific journal
“Mogilev State A. Kuleshov University Bulletin”
is included in the bibliographic database
“Russian Science Citation Index”,
License agreement № 811-12/2014

The editorial board address:
212022, Mogilev, Kosmonavtov Str., 1,
vesnik_mdu@mail.ru

З М Е С Т

САКОВИЧ Н. В., ГЕРАСИМОВА Т. Ю., ТИХОНЧУК Г. Н., ТИМОЩЕНКО Е. В., МАРЧЕНКО И. В., АКИНШЕВА И. В. СЕДАКОВА В. А. Факультет математики и естествознания: прошлое и настоящее.....	7
ГАЛЬМАК А. М. О порождающих множествах полиадической группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$. II	19
МОЖЕЙ Н. П. Трехмерные однородные пространства с несовершенной алгеброй голономии.....	33
СОТСКИЙ А. Б., ЧУДАКОВ Е. А. Соотношения взаимности для слоистых сред.....	40
ОСТРИКОВ О. М. Выполнение условия равновесия твердого тела с криволинейной полосой сдвига в металлическом стекле в случае плоскодеформированного состояния при негомогенной пластической деформации	51
ПОНКРАТОВ Д. В., КАМИЛДЖАНОВА Г. К., СОТСКИЙ А. Б. Фурье-анализ мод прямоугольного диэлектрического волновода	57
КОЛМАКОВ П. Ю., ЖЕРНОСЕКОВ Д. Д. Возможные молекулярные механизмы регуляции консортивных связей в системе « <i>Picea Abies</i> – эктомикоризные грибы»	70
МОРОЗОВА И. М., МОРОЗОВ И. М., ТУРЧИНОВИЧ Е. Ф., МОСКАЛЕВА Е. Ф. Зимостойкость вересковых (<i>Ericaceae</i>) в ботаническом саду ВГУ имени П. М. Машерова.....	78
ПОВОРОВА О. В., ХУРСАН А. В., БИБИКОВА М. С. Влияние пищевого рациона, пребиотических веществ, пробиотических микроорганизмов на микробиоценоз <i>Oryctolagus Cuniculus</i>	85
КИРЕЙЦЕВ А. А., ПАНАСЮК Н. Б. Особенности показателей биохимического анализа крови толкателей ядра высокой квалификации	93
ОСИПЕНКО А. Н. Влияние различных фосфолипидов и их жирнокислотного состава на структурно-функциональные свойства клеточных мембран.....	97

C O N T E N T S

SAKOVICH N. V., GERASIMOVA T. Y., TIHONCHUK G. N., TIMOSCHENKO E. V., MARCHENKO I. V., AKINSHEVA I. V., SEDAKOVA V. A. The Faculty of Mathematics and Natural Sciences: the Past and Present	7
GALMAK A. M. On Sets of Generators of Polyadic Group $\langle A^k, []_{L, \Sigma, K} \rangle$. II	19
MOZHEYN. P. Three-Dimensional Homogeneous Spaces with Imperfect Holonomy Algebra.....	33
SOTSKYA A. B., CHUDAKOV E. A. Reciprocity Relations for Layered Media	40
OSTRIKOV O. M. Fulfillment of the Equilibrium Condition for a Solid Body with a Curvilinear Shear Band in Metallic Glass in the Case of a Plane Deformed State with Nonhomogeneous Plastic Deformation	51
PONKRATOV D. V., KAMILDZHANOVA G. K., SOTSKYA A. B. Fourier Analysis of the Modes of a Rectangular Dielectric Waveguide.....	57
KOLMAKOV P. YU., ZHERNOSEKOV D. D. Possible Molecular Mechanisms of Regulation of Consortive Relations in the System “ <i>Picea Abies</i> – Ectomycorrhizal Fungi”	70
MOROZOVA I. M., MOROZOV I. M., TURCHINOVICH E. F., MOSKALEVA N. V. Winter Hardiness of Heather (<i>Ericaceae</i>) in the Botanical Garden of VSU named after P. M. Masherov	78
POVARAVA A. V., KHURSAN A. V., BIBIKAVA M. S. The Effect of Dietary Intake, Prebiotic Substances, Probiotic Microorganisms on the Microbiocenosis of <i>Oryctolagus Cuniculus</i>	85
KIREYTSEVA A. A., PANASYUK N. B. Characteristics of Biochemical Blood Test Parameters of Proficient Shot Putters.....	93
OSIPENKO A. N. Effect of Various Phospholipids and Their Fatty Acid Composition on the Structural and Functional Properties of Cell Membranes	97

ДА 110-ГОДДЗЯ ЎНІВЕРСІТЭТА

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ: ПРОШЛОЕ И НАСТОЯЩЕЕ

Н. В. Сакович

кандидат физико-математических наук, доцент
декан факультета математики и естествознания
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Т. Ю. Герасимова

кандидат педагогических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Г. Н. Тихончук

кандидат биологических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Е. В. Тимощенко

кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой физики и компьютерных технологий
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

И. В. Марченко

кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой математики
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

И. В. Акиншева

кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой программного обеспечения информационных технологий
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В. А. Седакова

кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой естествознания
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Факультет математики и естествознания образован **01 июля 2015 г.** путем объединения физико-математического факультета и факультета естествознания. Деканом объединенного факультета математики и естествознания был назначен кандидат физико-математических наук, доцент Старовойтов Леонид Евгеньевич (декан факультета математики и естествознания с 2015 по 2019 г.). Факультеты,

© Сакович Н. В., Герасимова Т. Ю., Тихончук Г. Н., Тимощенко Е. В.,
Марченко И. В., Акиншева И. В., Седакова В. А., 2023

вошедшие в факультет математики и естествознания, имели большую и славную историю.

В послевоенное время в стране остро чувствовалась необходимость в технических кадрах, подготовку которых начинали школьные учителя физики и математики. 1 сентября 1947 года в Могилевском педагогическом институте имени И.Д. Папанина было открыто физико-математическое отделение. 1 октября 1949 г. был открыт **физико-математический факультет**.

Первоначально на факультете работала одна кафедра – «кафедра физики и математики», которой руководил Пугачев Кирилл Афанасьевич. С 1952 года на факультете началась подготовка учителей физики, а с 1986 г. – учителей информатики.

Если первый набор в 1949 году на специальность «Математика» с четырехлетним сроком обучения составлял 50 человек, то в семидесятые годы набор на первый курс достиг 200 студентов по двум сдвоенным специальностям «Математика и физика», «Физика и математика» с пятилетним сроком обучения.

С 1949 по 1954 г. физико-математический факультет возглавлял Николай Гаврилович Денисенко.

В 1953–1954 гг. обязанности декана физико-математического факультета исполнял Николай Станиславович Ратобильский.

С 1954 по 1957 г. декан физико-математического факультета – Николай Андреевич Гончарик.

С 1957 по 1972 г. факультет возглавлял Петр Петрович Машковский.

С 1972 по 1992 г. (20 лет) физико-математическим факультетом руководил кандидат физико-математических наук, доцент Егор Егорович Сенько.

С 1992 г. по август 2015 г. (23 года) физико-математический факультет возглавлял кандидат физико-математических наук, доцент Леонид Евгеньевич Старовойтов.

За 73 года на факультете подготовлено более 11000 учителей математики, физики и информатики, многие из которых стали заслуженными работниками образования, учеными, знаменитыми государственными и общественными деятелями.

Среди выпускников физико-математического факультета заслуженные учителя Республики Беларусь, ведущие ученые. Александр Михайлович Радьков – выпускник факультета, доктор педагогических наук, профессор, академик Белорусской Академии Образования и Международной Академии наук высшей школы, заслуженный деятель науки, прошел путь от ассистента кафедры алгебры и геометрии до заведующего этой кафедрой, потом первого проректора (1997–2001 гг.). В 2001 году А. М. Радьков становится ректором университета, а в августе 2003 года – Министром образования Республики Беларусь, в декабре 2010 г. – Первым заместителем главы администрации Президента Республики Беларусь.

В разные годы факультет закончили К.И. Верещагин и В.А. Мостовников – лауреаты Государственной премии СССР по физике, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией плазмы А.Г. Непокойчицкий (ИПО НАН РБ), доктора физико-математических наук В.Т. Борухов (Институт математики НАН РБ), В.В. Амелькин (БГУ), Ф.Ф. Комаров (ГГУ), А.Ф. Комаров (НИИПФП имени А.Н. Севченко БГУ), В.И. Борисов (БРУ), В.А. Юревич (БГУТ), кандидаты физико-математических наук П.И. Ламекин, И.И. Маковецкий (БРУ), Е.В. Кравец (директор социально-гуманитарного колледжа при МГУ имени А.А. Кулешова), заслуженные учителя РБ В.В. Барашков (заместитель директора областного лицея № 1), И.В. Якименко (директор гимназии № 3), П.В. Шилов (директор област-

ного лицея при МГУ имени А.А. Кулешова), И.Е. Голиков (директор лицея БРУ), В.М. Радьков (директор областного лицея г. Быхова) и многие другие.

Валерию Васильевичу Барашкову (выпускник 1972 г. МГПИ) – учителю физики Могилевского областного лицея № 1 – в 2016 году за плодотворную работу по подготовке учащейся молодежи присвоено звание «Народный учитель Беларуси». На данный момент времени – первый и единственный Народный учитель Республики Беларусь.

Гордостью факультета являются: мастер международного класса, чемпион РБ, абсолютный чемпион мира по скоростному телеграфированию Л. Борисенко, чемпион РБ среди студентов по стрельбе из лука, призер Республиканских соревнований, мастер спорта Е. Зайчикова, экс-чемпион РБ по боксу среди студентов В. Пономарев, кандидат в мастера спорта по художественной гимнастике С. Яковлева.

Факультет славится своими трудовыми традициями, постоянством кадрового состава. Многие лаборанты, преподаватели и сотрудники, отучившись на физико-математическом факультете, потом всю свою трудовую деятельность посвятили факультету, отработав на нем несколько десятков лет.

Более 80% профессорско-преподавательского состава факультета – его выпускники, в том числе декан факультета Наталья Владимировна Сакович, заместители декана Елена Николаевна Пархоменко, Татьяна Эдуардовна Кубека, заведующие кафедрами Ирина Васильевна Марченко, Елена Валерьевна Тимошенко, преподаватели факультета Людмила Александровна Романович, Виктор Михайлович Кротов, Татьяна Юрьевна Герасимова, Елена Николаевна Рогановская, Наталья Владимировна Кожуренко, Иван Николаевич Сидоренко, Марина Сергеевна Носкова, Оксана Вячеславовна Шконда и многие другие. Окончив физико-математический факультет, многие выпускники продолжили свою трудовую деятельность в своей альма-матер, работая в разных структурных подразделениях: отделе информационных технологий, учебно-методическом отделе, отделе по воспитательной работе с молодежью, издательском отделе, бухгалтерии университета.

Многие выпускники нашли свое призвание в других сферах деятельности. Фролов Юрий Николаевич (выпуск 1996 г.) работает первым заместителем председателя Комитета государственного контроля по Могилевской области; Шаройкин Александр Михайлович (выпуск 1996 г.) работает начальником управления Департамента финансовых расследований Комитета государственного контроля Республики Беларусь по Могилевской области; Капёнкин Александр Викторович (выпуск 1998 г.) до 2011 г. работал главным директором «Первого канала» Белтелерадиокомпания, с 2012 г. директор телеканала «БелМузТВ».

Среди выпускников физико-математического факультета есть работники банковской системы, судьи, работники правоохранительных органов, строители, священники и т.п. Этот список можно продолжить и далее. Но все это говорит о том, что выпускник физико-математического факультета обладает умениями аналитически осмысливать различные ситуации, принимать правильные решения и находит приложение своих трудовых способностей в самых разных сферах трудовой деятельности.

Для обеспечения школ кадрами биологов и химиков в 1990 г. был открыт **биологический факультет**. Факультет осуществлял подготовку студентов специальности «Биология. Химия» с пятилетним сроком обучения (набор составил 50 человек). В дальнейшем на факультете были открыты новые специальности: «Биология. География», «Биология», «Химия», «География».

Биологический факультет, а с 1997 года – **факультет естествознания** в разное время возглавляли:

с 1990 по 1993 г. – Вадим Иванович Попов;

с 1993 по 1995 г. – Виталий Николаевич Пищалов;

с 1995 по 2000 г. – Николай Петрович Бузук;

с 2000 по 2012 г. – Галина Николаевна Тихончук;

с 2012 по 2015 г. – Игорь Николаевич Шарухо.

Существенный вклад в становление факультета внесли Петр Алексеевич Лярский, а также методисты областного института усовершенствования учителей, учителя школ – воспитанники факультета. Они читали курсы лекций, давали консультации, помогали формировать коллекцию минералов и горных пород, библиотеку учебной, учебно-методической и познавательной литературы по предмету, картографических материалов, приборов и оборудования для проведения лабораторных и полевых занятий. По учебникам природоведения и учебным пособиям по географии П.А. Лярского училось не одно поколение школьников (3, 4, 5 классов), студентов и учителей.

Начиная с 1995 по 2020 г. осуществлена подготовка 1645 специалистов естественно-географического профиля на дневном отделении и 311 – на заочном. Выпускники факультета работают в различных областях народного хозяйства: образовании, медицине, на химических производствах, в экологических организациях, научно-исследовательских лабораториях НАНБ.

За годы своего существования факультет естествознания наработал современную материально-техническую базу, оснащенные аудитории, лаборатории, компьютерные классы, появились мультимедийные проекторы, интерактивные доски и др. Большая заслуга в этом принадлежит бессменному на протяжении 25 лет заведующему лабораториями Белянко Татьяне Викторовне, благодаря настойчивости и компетентности которой в настоящее время для учебного процесса созданы все условия.

В настоящее время факультет математики и естествознания представляет собой достаточно крупный учебный и научный центр. Учебный процесс обеспечивают высококвалифицированные преподаватели, имена которых известны далеко за пределами страны.

Работой факультета управляет деканат во главе с деканом – кандидатом физико-математических наук, доцентом Сакович Натальей Владимировной. Сегодня на факультете математики и естествознания обучаются более 500 студентов нашей страны и стран ближнего и дальнего зарубежья.

Учебный процесс обеспечивают высококвалифицированные преподаватели, имена которых известны далеко за пределами страны. Для учебной и научно-практической работы студентов создана необходимая современная научная информационная база: имеются специализированные лаборатории и кабинеты, экологический научно-образовательный центр, кабинет-музей геологии, компьютерные классы, в том числе новая современная IT-лаборатория имени А.А. Столяра.

На факультете большое внимание уделяется научно-исследовательской работе. Работа проводится в научных объединениях, кружках и лабораториях, а также индивидуально с научным руководителем. Лучшие выпускники смогут продолжить обучение в магистратуре и аспирантуре. Ученые факультета принимают активное участие в работе государственных программ фундаментальных и прикладных на-

учных исследований в области естественных наук (поверхность; фотоника; когерентность; конвергенция, электроника и фотоника, фотоника для инноваций), разработки программного обеспечения для промышленных предприятий. Результаты хозяйственных работ внедрены в производство НПО «Интеграл», ООО «Изовак», ООО «ЭссентОптикс», ОАО «Могилевлифтмаш». На факультете сформировались и работают научные школы.

Технологии непрерывного обучения математике. Школа формировалась на протяжении 50–80-х годов 20 столетия. Она может быть названа как «Математическое развитие на разных ступенях обучения: дошкольный период, начальная школа, средняя школа, высшая школа». Ее основателем был доктор педагогических наук, профессор, заслуженный работник высшей школы БССР Абрам Аронович Столяр. Следующим руководителем школы стал Александр Михайлович Радьков. Под его руководством было защищено 5 кандидатских диссертаций по проблемам методики обучения математике: Е.В. Кравец, Т.В. Столяровой, С.А. Гуцановичем, А.Б. Чеботаревским, Е.Л. Старовойтовой.

Представителями школы были опубликованы монографии, учебные и учебно-методические пособия, научно-методические статьи. Ученики школы принимали участие в Международных, республиканских и региональных конференциях по проблемам математического образования.

Разработана концепция развивающего обучения, которая нашла свое практическое применение в научно-методических комплексах по математике для начальной школы. Над созданием этих комплексов под руководством А.А. Столяра работали кандидаты педагогических наук доценты А.Т. Катасонова, Т.М. Чеботаревская.

Концепция геометрического образования в школе реализована в научно-методических комплексах доктором педагогических наук профессором Н.М. Рогановским и кандидатом педагогических наук доцентом Е.Н. Рогановской. Эти комплексы стали одним из результатов научных исследований по теории и методике разработки и применения школьного учебника математики.

Сотрудники лаборатории участвовали в разработке концепции математического образования Республики Беларусь, программ по математике для общеобразовательной школы, учебных комплексов для I–IV, V–IX, X–XI классов, в подготовке и проведении международных конференций.

Физика лазеров и оптических волноводных элементов основана и развивается с 2000 г., после перехода в МГУ имени А.А. Кулешова из Института прикладной оптики НАНБ докторов физико-математических наук В.И. Лебедева, В.А. Юревича, А.Б. Сотского; кандидата физико-математических наук С.С. Гусева. В состав школы входили кандидаты наук И.В. Ивашкевич, Л.Е. Старовойтов, Н.И. Стаськов, Е.В. Тимошенко, а также аспиранты, магистранты и студенты, интересующиеся физикой. Под руководством кандидата физико-математических наук Н.И. Стаськова в 2009 г. была защищена кандидатская диссертация И.В. Ивашкевич, а в 2011 г. под руководством доктора физико-математических наук В.А. Юревича – кандидатская диссертация Е.В. Тимошенко. Учеными были зарегистрированы несколько актов внедрения в производство НПО «Интеграл», ООО «Изовак», ООО «ЭссентОптикс», НТЦ «Белмикросистемы», а также 4 патента на изобретение полезных моделей.

Актуальные проблемы методики преподавания и методического обеспечения курсов общей и теоретической физики. В состав этой школы в течение

многих лет входили преподаватели: И.В. Ивашкевич, Л.Е. Старовойтов, Н.И. Стаськов, А.Б. Сотский, А.В. Волосевич, В.И. Веракса, М.С. Носкова, С.М. Чернов. На данный момент времени – А.Б. Сотский, М.С. Носкова, А.В. Шилов, С.С. Михеев. Одним из направлений по этой теме является создание учебно-методических комплексов (УМК) по дисциплинам общей и теоретической физики. Результатом работы этой школы явилось опубликование курсов лекций по общей и теоретической физике, статей в периодических изданиях, включенных ВАК в Перечень научных изданий РБ для опубликования результатов диссертационных исследований, учебно-методических разработок. Участие в работе международных научных конференций.

Научно-методическое обеспечение изучения физики в средних общеобразовательных школах и вузах. В состав школы в течение многих лет входили преподаватели Н.И. Авдеева, Т.Ю. Герасимова, Л.В. Жарина, С.В. Доросевич, В.М. Кротов, А.Г. Погуляева. В рамках работы по этому направлению были открыты по решению Министерства Образования Республики Беларусь инновационные площадки: Внедрение модели организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся (2009–2011 гг.); Внедрение модели активации познавательной деятельности учащихся с применением flash-анимации (2012–2015 гг.); Внедрение модели интеграции физики и математики в VII–IX классах посредством организации факультативов (2013–2016 гг.); Внедрение модели организации обучения как учебного исследования учащихся (предметы естественнонаучного цикла) (2014–2017 гг.).

Ежегодно результаты исследований внедряются в учебный процесс средних общеобразовательных учреждений и практику работы преподавателей кафедры. За последние годы для организации учебного процесса в университете для студентов было подготовлено 3 монографии (В.М. Кротов, А.Б. Сотский), 1 учебное пособие с грифом Министерства образования Республики Беларусь (Т.Ю. Герасимова, В.М. Кротов), 9 пособий с грифом УМО (Т.Ю. Герасимова, В.М. Кротов), статьи в периодических изданиях, включенных ВАК в Перечень научных изданий РБ для опубликования результатов диссертационных исследований, учебно-методические разработки. Участие в работе международных конференций.

Долгие годы на кафедре работает **экологический научно-образовательный центр**, созданный в 2007 году в рамках белорусско-шведского проекта «Введение в экологическую специальность для педагогов» (JER_25214_2004). ЭНОЦ — это научно-образовательное объединение кафедры естествознания, которое оказывает содействие учебно-методической и научно-исследовательской деятельности преподавателей кафедры и студентов факультета математики и естествознания, направленной на устойчивое развитие Могилевского региона. Деятельность ЭНОЦ способствует вовлечению студенческой молодежи в активное участие в научно-исследовательской, творческой, внедренческой работе.

В состав ЭНОЦ входят: студенческая научно-исследовательская лаборатория краеведения и картографии, в работе которой активно используются ГИС-технологии; студенческая научно-исследовательская лаборатория «Химия в интересах устойчивого развития»; студенческая научно-исследовательская лаборатория по устойчивому развитию и циркулярной экономике; студенческая научно-исследовательская лаборатория «Экология опылителей».

Преподаватели, активно работающие в ЭНОЦ, входят в состав Общественного координационного экологического совета при Могилевском областном ко-

митете природных ресурсов и охраны окружающей среды; Областной рабочей группы по устойчивому развитию; Областной рабочей группы по разработке Плана перехода к циркулярной экономике в Могилевской области на период 2021–2025 гг.; Республиканской топонимической комиссии при Национальной академии наук Беларуси; Могилевского общественного координационного совета по агроэкотуризму.

Центральная учебно-исследовательская лаборатория (ЦУИЛ) входит в структуру факультета математики и естествознания и предназначена для повышения качества и эффективности образовательного процесса, создания условий для проведения студенческих учебно-исследовательских работ, подготовки магистрантов и аспирантов, проведения научно-исследовательской работы. ЦУИЛ концентрирует разноплановое лабораторное оборудование, обеспечивает его эксплуатацию в образовательном процессе и научно-исследовательской работе факультета математики и естествознания. Заведующим центральной учебно-исследовательской лабораторией является Ковалева Екатерина Владиславовна.

На современном оборудовании на базе ЦУИЛ выполняются курсовые, дипломные работы, магистерские и кандидатские диссертации, проводятся исследования с учетом приоритетных научных направлений Республики Беларусь и публикации их результатов в научной печати. Основные методы, используемые в ЦУИЛ: ИК-спектроскопия, световая микроскопия, газовая хроматография, термический анализ, гель-электрофорез, электрофизиология, проточная цитометрия, спектральная эллипсометрия.

Кафедры факультета:

Кафедра физики и компьютерных технологий образована 1 июля 2021 года на устойчивом фундаменте кафедры общей физики. Возглавляет кафедру кандидат физико-математических наук, доцент Тимощенко Елена Валерьевна.

На кафедре работает 9 преподавателей: доктор физико-математических наук, профессор А.Б. Сотский, кандидат физико-математических наук, доцент Е.В. Тимощенко, кандидаты педагогических наук, профессора Т.Ю. Герасимова и В.М. Кротов, кандидат педагогических наук, доцент Е.В. Пархоменко, кандидат физико-математических наук М.С. Носкова, старшие преподаватели А.В. Шилов, С.С. Михеев, ассистент Е.В. Третьяк. Молодые ученые активно работают над написанием и защитой кандидатских диссертаций.

Основу образовательного процесса на кафедре составляет физический эксперимент, который проводится в виде 20 физпрактикумов по различным дисциплинам физического, методического, физико-технического профиля, каждый из которых представлен определенным комплексом лабораторных работ, включающим в том числе новые лабораторные установки и стенды, оснащенные программным обеспечением по управлению физическими процессами и обработке данных, для студентов разных курсов специальностей. Техническое обслуживание учебного оборудования подготовка физпрактикумов к учебному процессу организуется заведующей лабораторией и 3 лаборантами кафедры.

Создание кафедры физики и компьютерных технологий – это идея стратегического планирования развития факультета в целом: наука и технологии интенсивно развиваются, темп жизни, количество информации возрастают, интересы и запросы потенциальных работодателей меняются – компьютерные и информационные технологии теперь определяют будущее.

Основные фундаментальные научные исследования, которыми занимаются преподаватели кафедры, относятся к области оптоэлектроники, нанофотоники, оптоинформатики, субмикронных технологий – самых прогрессивных, приоритетных в Беларуси и наиболее востребованных в мире направлений научной, научно-технической и инновационной деятельности. Так, например, в рамках госпрограммы «Фотоника» и электроника для инноваций» на 2021–2025 гг. государство финансирует работу научного коллектива под руководством профессора, доктора физико-математических наук Сотского Александра Борисовича по развитию теории методов оптического контроля наноразмерных тонкопленочных структур и теории трансформации излучения в квазидвумерных слоях оптических сред. Коллектив сотрудничает со многими научными предприятиями и организациями, в том числе с зарубежными, проводит исследования многоструктурных оптических волокон для сенсоров совместно с учеными Института оптических исследований в Мексике, объясняет результаты экспериментов, строит математическую модель для интерпретации экспериментов, методами компьютерного моделирования прогнозирует результат с другими параметрами материалов.

Грант Президента Республики Беларусь предоставлен заведующей кафедрой, кандидату физико-математических наук, доценту Тимощенко Елене Валерьевне, сфера научных интересов которой связана с разработками в области субмикронных технологий. Это молодое направление научных исследований, которые позволяют выращивать полупроводниковые и диэлектрические наноразмерные структуры. Субмикронные пленки, чувствительные к оптическому излучению, находят применение в оптоэлектронике, фотонике и лазерной физике в качестве элементной базы микропроцессоров, элементов компьютерной памяти, оптических сенсоров.

Качественная подготовка специалистов на кафедре осуществляется на базе научно-методической школы, основоположниками которой являются профессора кафедры, кандидаты педагогических наук Герасимова Татьяна Юрьевна и Кротов Виктор Михайлович. Кафедра является выпускающей кафедрой для студентов по специальности I ступени высшего образования 1-02 05 02 «Физика и информатика» и студентов II ступени высшего образования (магистратура) по специальности 1-31 80 05 «Физика». Кроме того, кафедра готовит кадры высшей квалификации (аспирантура) по специальностям «Оптика» и «Теория и методика обучения и воспитания (в области физики)».

Для физиков Могилевского региона кафедрой проводятся Областной физический семинар и Могилевский оптический семинар. Регулярно сотрудниками кафедры организуется и проводится Международная научно-практическая конференция «Оптика неоднородных структур».

В планы кафедры на ближайшее будущее входит создание и открытие регионального планетария на базе университета для проведения занятий со студентами старших курсов по астрономии, а также открытых научно-популярных лекций по проблемам и загадкам Вселенной со школьниками.

Основной задачей кафедры является подготовка не только хороших педагогов, качественных и конкурентоспособных специалистов, которые владеют знаниями о современных разработках в области фотоники и оптоэлектроники, но и интеллектуально развитых личностей, обладающих в том числе хорошей физико-математической базой.

Кафедра программного обеспечения информационных технологий существует в структуре университета с 1 декабря 2019 года. История кафедры началась в 1986 году с момента начала набора на физико-математический факультет на специальность «Математика и информатика». Неоценимый вклад в развитие образования в области информационных технологий внесли Н.П. Морозов, Ю.М. Шкель, Р.П. Озаровская, А.Г. Шабашов.

С 28.01.2022 г. кафедру возглавляет кандидат технических наук, доцент Акиншева Ирина Владиславовна. На кафедре работает 9 штатных преподавателей на постоянной основе: доктор физико-математических наук, профессор А.Б. Сотский, кандидат технических наук, доцент И.В. Акиншева, кандидаты физико-математических наук И.Н. Сидоренко и Н.В. Кожуренко, старшие преподаватели О.В. Шконда, М.А. Денисенко, Т.Э. Кубека, ассистент М.В. Мироненко, преподаватель-стажер Е.В. Черненко, 2 внутренних штатных совместителя: кандидат физико-математических наук, доцент В.Л. Титов, кандидат технических наук, доцент Т.И. Чегерова. Большинство сотрудников кафедры – выпускники МГУ имени А.А. Кулешова.

Кафедра программного обеспечения информационных технологий в настоящее время ведет подготовку специалистов с присвоением квалификации «Инженер-программист», «Математик. Системный администратор» и является выпускающей по следующим специальностям: 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»; 1-31 03 04 «Информатика», 1-02 05 01 «Математика и информатика», 1-02 05 02 «Физика и информатика».

В 2023 году, согласно Общегосударственному классификатору специальностей и квалификаций ОКРБ 011-2022 вместо набора на специальность 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий» университет будет проводить набор на специальность 6-05-0612-01 «Программная инженерия».

Кафедра осуществляет разноплановую деятельность, направленную на развитие IT-направления в МГУ имени А.А. Кулешова. Осуществляется взаимодействие с ОАО «Могилевское агентство регионального развития», являющегося основоположником IT-кластера Могилевского региона. В рамках кластера развивается сотрудничество с организациями, промышленными предприятиями, IT-компаниями.

Под руководством заведующего кафедрой Акиншевой И.В. выполняются проекты для ОАО «Могилевлифтмаш», ведутся переговоры на диалоговых площадках, организуемых Ассоциацией промышленников Могилевской области. С декабря 2022 года открыт филиал кафедры на ООО «Софтмастер».

Другим направлением работы кафедры ПОИТ является взаимодействие со школами и средними специальными учебными заведениями. На ежегодной региональной конференции «Молодая наука» в секции «Информатика и информационные технологии» принимают учащиеся учреждения образования «Могилевский государственный социально-гуманитарный колледж».

Для учащихся кафедра ПОИТ на базе МГУ имени А.А. Кулешова проводит областной конкурс компьютерной графики, внутреннюю университетскую олимпиаду по программированию. Мероприятия носят как развивающий, так и профориентационный характер для талантливой и целенаправленной молодежи.

Заведующий кафедрой И.В. Акиншева и преподаватели кафедры Н.В. Кожуренко, И.Н. Сидоренко, О.В. Шконда являются членами жюри на различных этапах республиканских олимпиад по предметам «Информатика» и «Математика», а

также на областном конкурсе эссе «Дорога к открытиям», проводимом ежегодно в МГУ имени А.А. Кулешова.

Большое внимание на кафедре ПОИТ уделяется совершенствованию педагогической деятельности. Разрабатываются учебные планы и программы совместно с представителями организаций, имеющих в своей структуре отделы, связанные с информационными технологиями, IT-компаний. Разработка ЭУМК позволяет систематизировать знания, полученные студентами в ходе изучения специальных дисциплин. Учеба студентов в магистратуре по специальностям 1-08 80 02 «Теория и методика обучения и воспитания (информатика)», 7-06-0113-04 «Физико-математическое образование (информатика)», а также обучение в профильной аспирантуре в ведущих учреждениях высшего образования позволит увеличить в перспективе кадровый потенциал кафедры программного обеспечения информационных технологий.

С 1 января 2022 года, согласно приказу ректора университета Д.В. Дука, была образована **кафедра математики**. Возглавляет кафедру кандидат физико-математических наук Марченко Ирина Васильевна.

Профессорско-преподавательский состав кафедры: доктор физико-математических наук, профессор А.Б. Сотский, кандидат физико-математических наук И.В. Марченко, кандидаты физико-математических наук, доценты Н.В. Сакович и В.Э. Гарист, кандидат педагогических наук, доцент Е.Н. Рогановская, старшие преподаватели Л.А. Романович, Л.И. Рыдевская, И.И. Ситкевич, преподаватель Е.В. Засимович.

Кафедра обеспечивает преподавание 48 дисциплин на 8 специальностях. По всем преподаваемым дисциплинам ведется активная разработка учебно-методических материалов для проведения лекций, практических и лабораторных занятий.

Научные интересы преподавателей кафедры связаны как с фундаментальными исследованиями по направлениям «Аналитические, асимптотические и качественные методы дифференциальных систем», «Теория принятия оптимальных решений и структуры высших порядков», так и с прикладными – по направлениям «Совершенствование специальной и методической подготовки преподавателей математики и информатики», «Совершенствование процесса обучения математике учеников I–XI классов общеобразовательной средней школы».

На протяжении 15 лет на кафедре выполнялась научно-исследовательская работа под руководством доцента Сакович Натальи Владимировны:

«Получение полных аналогов теоремы Хинчина для гладких кривых и поверхностей в пространствах произвольной размерности» в соответствии с государственной программой фундаментальных исследований «Математические структуры» (2006–2010);

«Применение методов диофантовых приближений в разных метриках к диофантовым уравнениям, распределению алгебраических чисел, дискриминантов и результатов» (2011–2013); «Метрические теоремы теории диофантовых приближений и их применение в задачах распределения алгебраических чисел в поле комплексных и p -адических чисел» (2014–2015) задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция» (2011–2015);

«Совместные эффективные задачи метрической теории диофантовых приближений на полиномиальных кривых и их приложения» Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2020» (2016–2020).

Кафедра поддерживает связь со школами и другими учебными заведениями города Могилева и Могилевской области путем проведения занятий с одаренными учащимися. Преподаватели кафедры являются членами жюри областной олимпиады по математике, Турнира городов, Конкурса научно-исследовательских работ учащихся по математике, областного конкурса эссе «Дорога к открытиям». Активно ведется работа на базе филиала кафедры в «Могилевском государственном лицее № 1».

Кафедра естествознания была образована в 2015 году. Возглавляет кафедру кандидат технических наук Седакова Валентина Антоновна.

Преподавательский состав кафедры – специалисты, которые имеют большой опыт работы. Профессорско-преподавательский состав кафедры: доцент, кандидат технических наук В.А. Седакова; доценты, кандидаты химических наук: Н.А. Клебанова, А.В. Клебанов; доценты, кандидаты биологических наук: Г.Н. Тихончук, И.А. Жарина, Е.Ю. Иванцова; заведующий агробиостанцией «Любуж»; кандидат сельскохозяйственных наук – А.В. Ермоленко; доцент, кандидат педагогических наук – М.Р. Смоляров; старшие преподаватели: Г.А. Войт, М.Е. Захарова, О.В. Поворова, А.Н. Осипенко, Е.В. Ковалева, преподаватель-стажер – К.Н. Шкурко.

Кафедра обеспечивает преподавание 72 дисциплин. По всем преподаваемым дисциплинам ведется активная разработка учебно-методических материалов для проведения лекций, практических и лабораторных занятий.

В настоящее время на кафедре ведется подготовка специалистов первой ступени высшего образования по специальностям 1-80 02 01 «Медико-биологическое дело», 1-02 04 02 «Биология и география», 1-02 04 01 «Биология и химия».

В последние годы проведена большая работа по организации и открытию новой специальности «Медико-биологическое дело», выпускники которой получают квалификацию «Биолог-аналитик. Преподаватель биологии». С 14 февраля 2022 года организована работа филиала кафедры естествознания на базе учреждения образования «Могилевский государственный медицинский колледж».

При кафедре функционирует кабинет-музей геологии, который был открыт в 1998 г. В состав музейного фонда кабинета-музея геологии входят: геологические коллекции и отдельные геологические экспонаты – образцы минералов и горных пород, найденные на территории Республики Беларусь и за ее пределами; изделия из минерального сырья, демонстрирующие практические возможности использования минералов и горных пород; палеонтологические образцы, характеризующие отдельные эволюционные звенья жизни различных геологических эпох, предметы, имеющие отношение к геологической и палеонтологической области знаний.

Кабинет-музей геологии обеспечивает проведение учебной, научно-исследовательской и воспитательной работы на факультете, университете и региона в целом. В музее проводятся тематические и обзорные экскурсии для групп студентов других факультетов, гостей города и университета. Экскурсии проводит старший преподаватель кафедры естествознания Захарова Марина Евгеньевна, выпускница факультета естествознания 2000 года.

Основными направлениями научных исследований преподавателей кафедры естествознания являются исследование пространственно-временных аспектов хозяйственного освоения Поднепровья и сопредельных территорий для устойчивого развития; экологические аспекты устойчивости флоры и фауны Поднепровья и сопредельных территорий; исследование физико-химических характеристик ве-

ществ, материалов и объектов окружающей среды; повышение качества образования в УВО для устойчивого развития; состояние окружающей среды и организма человека при действии факторов различной природы, оценка рисков и способов снижения негативных последствий.

Большое внимание уделяется эколого-образовательной и просветительской работе среди учащихся школ, населения области: на территории агробиостанции «Любуж» проводятся познавательные экскурсии, методические семинары для учителей, работают курсы пчеловодства. Агробиологическая станция «Любуж» представляет собой полевою учебно-методическую и экспериментальную базу для решения учебных, методических, научных, учебно-производственных и воспитательных задач, решаемых кафедрой естествознания и университетом.

Заведующий кафедрой Седакова В.А. и преподаватели кафедры И.А. Жарина, А.В. Клебанов, Н.А. Клебанова, Г.А. Войт, А.В. Поворова являются членами жюри на различных этапах республиканских олимпиад по предметам «Биология» и «Химия», а также на региональной олимпиаде «Экологические игры», проводимой ежегодно в МГУ имени А.А. Кулешова.

На всех кафедрах факультета поддерживается дружественная и теплая атмосфера сотрудничества, а ее преподаватели уверены в том, что на факультете им удастся подготовить себе достойную смену. Факультет математики и естествознания, имеющий богатую историю, традиции, позволяет получить качественное образование и достойную профессию.

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

О ПОРОЖДАЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ ПОЛИАДИЧЕСКОЙ ГРУППЫ $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$. II

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук, профессор

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

В статье продолжается изучение установленной ранее связи между порождающими множествами группы A и порождающими множествами полиадической группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ с l -арной операцией $[]_{l, \sigma, k}$, которая определяется на k -й декартовой степени произвольной группы A для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ из множества S_k всех подстановок множества $\{1, 2, \dots, k\}$.

Ключевые слова: группа, полиадическая группа, l -арная группа, порождающее множество.

Введение

Данная статья, посвященная изучению порождающих множеств l -арной группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое, что отражено в названиях обеих статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на результаты из работы [1] даются без указания на эту работу. Например, ссылка на теорему 3.1 означает, что имеется в виду теорема 3.1 из раздела 3 в [1].

Всю необходимую информацию из теории полиадических групп можно найти в списке использованных источников [2–5].

Основная цель данной статьи – нахождение условий, позволяющих заменить в

теореме 3.1 порождающее множество $\bigcup_{\alpha=1}^q (U_{i_\alpha}(M) \cup U_{i_\alpha}(M^{-1})) \cup \{e\}$ порождающим

множеством $\bigcup_{\alpha=1}^q U_{i_\alpha}(M) \cup \{e\}$.

4 Леммы

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4.1. Пусть A – полугруппа с единицей 1, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, в ее разложении в произведение независимых циклов имеется цикл $(n_1 \dots n_m)$ длины m , $r = \frac{l-1}{m}$, $j \in \{n_1, \dots, n_m\}$,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), \mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, i = 2, \dots, l,$$

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l, \sigma, k} = (b_1, \dots, b_k).$$

Тогда:

© Гальмак А. М., 2023

1) $b_s = x_s$ для любого $s \notin \{n_1, \dots, n_m\}$;

2) $b_s = x_s a_{\alpha_s+1} a_{m+\alpha_s+1} a_{2m+\alpha_s+1} \dots a_{(r-1)m+\alpha_s+1}$ для любого $s \in \{n_1, \dots, n_m\}$, где $\alpha_s \in \{1, 2, \dots, m\}$ однозначно определяется из условия $\sigma^{\alpha_s}(s) = j$. В частности,

$$b_j = x_j a_{m+1} a_{2m+1} \dots a_{rm+1}.$$

Доказательство. Так как порядок подстановки σ делится на m , а также в силу условия $\sigma^l = \sigma$ делит $l-1$, то $l-1 = rm$ для некоторого $r \geq 1$. Следовательно, приведенная в условии леммы формула, выражающая r через l и m корректна.

Положив

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1} = 1, \dots, a_{i(j-1)} = 1, a_{ij} = a_i, a_{i(j+1)} = 1, \dots, a_{ik} = 1), i = 2, \dots, l$$

и, применив определение операции $[]_{l, \sigma, k}$, получим для любого $s = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} b_s &= x_s a_{2\sigma(s)} \dots a_{m\sigma^{m-1}(s)} a_{(m+1)\sigma^m(s)} \\ & a_{(m+2)\sigma^{m+1}(s)} \dots a_{(2m)\sigma^{2m-1}(s)} a_{(2m+1)\sigma^{2m}(s)} \\ & \dots \\ & a_{((r-1)m+2)\sigma^{(r-1)m+1}(s)} \dots a_{(rm)\sigma^{m-1}(s)} a_{(rm+1)\sigma^m(s)}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

1) Если $s \notin \{n_1, \dots, n_m\}$, то $\sigma^t(s) \notin \{n_1, \dots, n_m\}$ для любого $t \geq 1$, в частности $\sigma^l(s) \neq j$. Поэтому в правой части равенства (4.1) все элементы, отличные от x_s , совпадают с единицей полугруппы A . Следовательно, $b_s = x_s$.

2) Так как для любого $s \in \{n_1, \dots, n_m\}$ верно $\sigma^m(s) = s$, то (4.1) принимает для указанных s следующий вид

$$\begin{aligned} b_s &= x_s a_{2\sigma(s)} \dots a_{m\sigma^{m-1}(s)} a_{(m+1)s} \\ & a_{(m+2)\sigma(s)} \dots a_{(2m)\sigma^{m-1}(s)} a_{(2m+1)s} \\ & \dots \\ & a_{((r-1)m+2)\sigma(s)} \dots a_{(rm)\sigma^{m-1}(s)} a_{(rm+1)s}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Кроме того, для любого $s \in \{n_1, \dots, n_m\}$ найдется такое $\alpha_s \in \{1, 2, \dots, m\}$ такое, что $\sigma^{\alpha_s}(s) = j$. Поэтому в правой части равенства (4.2) все сомножители, отличные от элементов

$$\begin{aligned} x_s, a_{(\alpha_s+1)\sigma^{\alpha_s}(s)} &= a_{(\alpha_s+1)j} = a_{\alpha_s+1}, \\ a_{(m+\alpha_s+1)\sigma^{\alpha_s}(s)} &= a_{(m+\alpha_s+1)j} = a_{m+\alpha_s+1}, \\ a_{(2m+\alpha_s+1)\sigma^{\alpha_s}(s)} &= a_{(2m+\alpha_s+1)j} = a_{2m+\alpha_s+1} \\ & \dots \\ a_{((r-1)m+\alpha_s+1)\sigma^{\alpha_s}(s)} &= a_{((r-1)m+\alpha_s+1)j} = a_{(r-1)m+\alpha_s+1} \end{aligned}$$

равны 1. Следовательно,

$$b_s = x_s a_{\alpha_s+1} a_{m+\alpha_s+1} a_{2m+\alpha_s+1} \dots a_{(r-1)m+\alpha_s+1}.$$

Так как $\sigma^m(j) = j$, то $\alpha_j = m$. Поэтому при $s = j$ последнее равенство принимает вид

$$b_j = x_j a_{m+1} a_{2m+1} \dots a_{rm+1}.$$

Лемма доказана.

Проиллюстрируем лемму 4.1 примером.

Пример 4.1. Положим в лемме 4.1 $k = 5$, $\sigma = (1\ 4)(2\ 5\ 3) \in \mathbf{S}_5$, $l = 7$.

1) Рассмотрим цикл $(1\ 4)$. В этом случае $m = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 4$, $r = 3$, $j \in \{1, 4\}$.

Для $j = 1$ имеем

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

$$\mathbf{a}_2 = (a_{21} = a_2, a_{22} = 1, a_{23} = 1, a_{24} = 1, a_{25} = 1),$$

$$\mathbf{a}_3 = (a_{31} = a_3, a_{32} = 1, a_{33} = 1, a_{34} = 1, a_{35} = 1),$$

$$\mathbf{a}_4 = (a_{41} = a_4, a_{42} = 1, a_{43} = 1, a_{44} = 1, a_{45} = 1),$$

$$\mathbf{a}_5 = (a_{51} = a_5, a_{52} = 1, a_{53} = 1, a_{54} = 1, a_{55} = 1),$$

$$\mathbf{a}_6 = (a_{61} = a_6, a_{62} = 1, a_{63} = 1, a_{64} = 1, a_{65} = 1),$$

$$\mathbf{a}_7 = (a_{71} = a_7, a_{72} = 1, a_{73} = 1, a_{74} = 1, a_{75} = 1).$$

Применив определение l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, найдем

$$\begin{aligned} & [\mathbf{x}\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7]_{7, (14)(253), 5} = \\ & = (x_1 a_{2\sigma(1)} a_{3\sigma^2(1)} a_{4\sigma^3(1)} a_{5\sigma^4(1)} a_{6\sigma^5(1)} a_{7\sigma^6(1)}, \\ & \quad x_2 a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma^2(2)} a_{4\sigma^3(2)} a_{5\sigma^4(2)} a_{6\sigma^5(2)} a_{7\sigma^6(2)}, \\ & \quad x_3 a_{2\sigma(3)} a_{3\sigma^2(3)} a_{4\sigma^3(3)} a_{5\sigma^4(3)} a_{6\sigma^5(3)} a_{7\sigma^6(3)}, \\ & \quad x_4 a_{2\sigma(4)} a_{3\sigma^2(4)} a_{4\sigma^3(4)} a_{5\sigma^4(4)} a_{6\sigma^5(4)} a_{7\sigma^6(4)}, \\ & \quad x_5 a_{2\sigma(5)} a_{3\sigma^2(5)} a_{4\sigma^3(5)} a_{5\sigma^4(5)} a_{6\sigma^5(5)} a_{7\sigma^6(5)}) = \\ & = (x_1 a_{24} a_{31} a_{44} a_{51} a_{64} a_{71}, x_2 a_{25} a_{33} a_{42} a_{55} a_{63} a_{72}, x_3 a_{22} a_{35} a_{43} a_{52} a_{65} a_{73}, \\ & \quad x_4 a_{21} a_{34} a_{41} a_{54} a_{61} a_{74}, x_5 a_{23} a_{32} a_{45} a_{53} a_{62} a_{75}) = \\ & = (x_1 a_3 a_5 a_7, x_2, x_3, x_4 a_2 a_4 a_6, x_5), \end{aligned}$$

то есть

$$[\mathbf{x}\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7]_{7, (14)(253), 5} = (x_1 a_3 a_5 a_7, x_2, x_3, x_4 a_2 a_4 a_6, x_5).$$

Получим это же равенство с помощью леммы 4.1.

По этой лемме

$$[\mathbf{x}\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_4\mathbf{a}_5\mathbf{a}_6\mathbf{a}_7]_{7, (14)(253), 5} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5),$$

где $b_2 = x_2$, $b_3 = x_3$, $b_5 = x_5$,

$$b_1 = x_1 a_{\alpha_1+1} a_{m+\alpha_1+1} a_{2m+\alpha_1+1} \dots a_{(r-1)m+\alpha_1+1},$$

$$b_4 = x_4 a_{\alpha_4+1} a_{m+\alpha_4+1} a_{2m+\alpha_4+1} \dots a_{(r-1)m+\alpha_4+1}.$$

где $\sigma^2(1) = 1$, $\sigma(4) = 1$, то есть $\alpha_1 = 2$, $\alpha_4 = 1$. Поэтому, учитывая равенства $m = 2$, $r = 3$, получим

$$b_1 = x_1 a_3 a_5 a_7, b_4 = x_4 a_2 a_4 a_6.$$

Как видим и определение l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$ и лемма 4.1 приводят к одному и тому же равенству. Проведя аналогичные вычисления, можно убедиться в этом и для $j = 4$.

2) Рассмотрим цикл (2 5 3). В этом случае $m = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 5$, $n_3 = 3$, $r = 2$, $j \in \{2, 5, 3\}$.

Для $j = 3$ имеем

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

$$\mathbf{a}_2 = (a_{21} = 1, a_{22} = 1, a_{23} = a_2, a_{24} = 1, a_{25} = 1),$$

$$\mathbf{a}_3 = (a_{31} = 1, a_{32} = 1, a_{33} = a_3, a_{34} = 1, a_{35} = 1),$$

$$\mathbf{a}_4 = (a_{41} = 1, a_{42} = 1, a_{43} = a_4, a_{44} = 1, a_{45} = 1),$$

$$\mathbf{a}_5 = (a_{51} = 1, a_{52} = 1, a_{53} = a_5, a_{54} = 1, a_{55} = 1),$$

$$\mathbf{a}_6 = (a_{61} = 1, a_{62} = 1, a_{63} = a_6, a_{64} = 1, a_{65} = 1),$$

$$\mathbf{a}_7 = (a_{71} = 1, a_{72} = 1, a_{73} = a_7, a_{74} = 1, a_{75} = 1).$$

Как и в случае 1), применив определение l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, найдем

$$\begin{aligned} & [\mathbf{x} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5 \mathbf{a}_6 \mathbf{a}_7]_{7, (14)(253), 5} = \\ & = (x_1 a_{24} a_{31} a_{44} a_{51} a_{64} a_{71}, x_2 a_{25} a_{33} a_{42} a_{55} a_{63} a_{72}, x_3 a_{22} a_{35} a_{43} a_{52} a_{65} a_{73}, \\ & \quad x_4 a_{21} a_{34} a_{41} a_{54} a_{61} a_{74}, x_5 a_{23} a_{32} a_{45} a_{53} a_{62} a_{75}) = \\ & = (x_1, x_2 a_3 a_6, x_3 a_4 a_7, x_4, x_5 a_2 a_5), \end{aligned}$$

то есть

$$[\mathbf{x} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5 \mathbf{a}_6 \mathbf{a}_7]_{7, (14)(253), 5} = (x_1, x_2 a_3 a_6, x_3 a_4 a_7, x_4, x_5 a_2 a_5).$$

Получим это же равенство с помощью леммы 4.1.

По этой лемме

$$[\mathbf{x} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_5 \mathbf{a}_6 \mathbf{a}_7]_{7, (14)(253), 5} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5),$$

где $b_1 = x_1$, $b_4 = x_4$,

$$b_2 = x_2 a_{\alpha_2+1} a_{m+\alpha_2+1} a_{2m+\alpha_2+1} \cdots a_{(r-1)m+\alpha_2+1},$$

$$b_3 = x_3 a_{\alpha_3+1} a_{m+\alpha_3+1} a_{2m+\alpha_3+1} \cdots a_{(r-1)m+\alpha_3+1},$$

$$b_5 = x_5 a_{\alpha_5+1} a_{m+\alpha_5+1} a_{2m+\alpha_5+1} \cdots a_{(r-1)m+\alpha_5+1},$$

где $\sigma^2(2) = 3$, $\sigma^3(3) = 3$, $\sigma(5) = 3$, то есть $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_5 = 1$. Поэтому, учитывая равенства $m = 3$, $r = 2$, получим

$$b_2 = x_2 a_3 a_6, b_3 = x_3 a_4 a_7, b_5 = x_5 a_2 a_5.$$

Как видим и определение l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ и лемма 4.1 приводят к одному и тому же равенству. Проведя аналогичные вычисления, можно убедиться в этом для $j = 2$ и $j = 5$.

Полагая в лемме 4.1 $(n_1 \dots n_m) = (1 \ 2 \dots \ m)$, получим

Следствие 4.1. Пусть A – полугруппа с единицей 1, подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, в ее разложении в произведение независимых циклов имеется цикл $(1 \ 2 \dots \ m)$ длины m , $r = \frac{l-1}{m}, j \in \{1, \dots, m\}$,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), \mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, i = 2, \dots, l,$$

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l, \sigma, k} = (b_1, \dots, b_k).$$

Тогда:

1) $b_s = x_s$ для любого $s \in \{m+1, \dots, k\}$;

2) $b_s = x_s a_{\alpha_s+1} a_{m+\alpha_s+1} a_{2m+\alpha_s+1} \dots a_{(r-1)m+\alpha_s+1}$ для любого $s \in \{1, \dots, m\}$, где α_s однозначно определяется из условия $\sigma^{\alpha_s}(s) = j$.

Замечание 4.1. Укажем явный вид α_s в следствии 4.1. Так как для цикла $\sigma = (1 \ 2 \dots \ m)$ имеем

$$j = \sigma^{j-1}(1) = \sigma^{j-2}(2) = \dots = \sigma(j-1) = \sigma^m(j) = \sigma^{m-1}(j+1) = \dots = \sigma^{j+1}(m-1) = \sigma^j(m),$$

то из $\sigma^{\alpha_s}(s) = j$ следует

$$\alpha_1 = j-1, \alpha_2 = j-2, \dots, \alpha_{j-1} = 1, \alpha_j = m, \alpha_{j+1} = m-1, \dots, \alpha_{m-1} = j+1, \alpha_m = j.$$

Считая в лемме 4.1 подстановку σ циклом длины k , получим

Следствие 4.2 [6]. Пусть A – полугруппа с единицей 1, σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k , $l = rk + 1, r \geq 1, j \in \{1, \dots, k\}$,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), \mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, i = 2, \dots, l,$$

Тогда

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l, \sigma, k} = (b_1, \dots, b_k),$$

где

$$b_j = x_j a_{k+1} a_{2k+1} \dots a_{rk+1},$$

$$b_s = x_s a_{\alpha_s+1} a_{k+\alpha_s+1} a_{2k+\alpha_s+1} \dots a_{(r-1)k+\alpha_s+1}$$

для любого $s \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, k\}$, где α_s однозначно определяется из условия $\sigma^{\alpha_s}(s) = j$.

Замечание 4.2. В следствии 4.2 равенство для b_j следует из равенства для b_s в утверждении 2) леммы 4.1 при $m = k, s = j, \alpha_s = k$.

Полагая в следствии 4.1 $m = k$ или в следствии 4.2 $\sigma = (1 \ 2 \dots \ k)$, получим

Следствие 4.3. Пусть A – полугруппа с единицей 1, $l = rk + 1, r \geq 1, j \in \{1, \dots, k\}$,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), \mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, i = 2, \dots, l,$$

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_k]_{l, (12\dots k), k} = (b_1, \dots, b_k).$$

Тогда

$$b_s = x_s a_{\alpha_s+1} a_{k+\alpha_s+1} a_{2k+\alpha_s+1} \dots a_{(r-1)k+\alpha_s+1}$$

для любого $s \in \{1, \dots, k\}$, где α_s однозначно определяется из условия $\sigma^{\alpha_s}(s) = j$. В частности,

$$b_j = x_j a_{k+1} a_{2k+1} \dots a_{rk+1}.$$

Замечание 4.3. Укажем явный вид α_s в следствии 4.3:

$$\alpha_1 = j - 1, \alpha_2 = j - 2, \dots, \alpha_{j-1} = 1, \alpha_j = k, \alpha_{j+1} = k - 1, \dots, \alpha_{k-1} = j + 1, \alpha_k = j.$$

Полагая в следствии 4.2 $l = k + 1$ или, что то же самое, $r = 1$, получим

Следствие 4.4. Пусть A – полугруппа с единицей 1, σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k , $j \in \{1, 2, \dots, k\}$,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), \mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, i = 2, \dots, k + 1,$$

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_{k+1}]_{k+1, \sigma, k} = (b_1, \dots, b_k).$$

Тогда $b_s = x_s a_{\alpha_s+1}$ для любого $s \in \{1, \dots, k\}$, где α_s однозначно определяется из условия $\sigma^{\alpha_s}(s) = j$. В частности, $b_j = x_j a_{k+1}$.

Полагая в следствии 4.4 $\sigma = (1\ 2 \dots k)$ и учитывая замечание 4.2 для $m = k$, получим

Следствие 4.5. Пусть A – полугруппа с единицей 1, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), \mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, i = 2, \dots, k + 1,$$

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_{k+1}]_{k+1, (12\dots k), k} = (b_1, \dots, b_k).$$

Тогда

$$b_1 = x_1 a_j, b_2 = x_2 a_{j-1}, \dots, b_{j-1} = x_{j-1} a_2, b_j = x_j a_{k+1},$$

$$b_{j+1} = x_{j+1} a_k, \dots, b_{k-1} = x_{k-1} a_{j+2}, b_k = x_k a_{j+1}.$$

Замечание 4.4. Если в следствии 4.5 положить $j = 1$, то последовательность $b_1 \dots b_{j-1}$ – пустая. Поэтому

$$\mathbf{a}_i = (a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \in A^k, i = 2, \dots, k + 1,$$

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_{k+1}]_{k+1, (12\dots k), k} = (b_1, \dots, b_k),$$

где

$$b_1 = x_1 a_{k+1}, b_2 = x_2 a_k, \dots, b_{k-1} = x_{k-1} a_3, b_k = x_k a_2.$$

Если в следствии 4.5 положить $j = k$, то последовательность $b_{j+1} \dots b_k$ – пустая. Поэтому

$$\mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, a_i) \in A^k, i = 2, \dots, k + 1,$$

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_{k+1}]_{k+1, (12\dots k), k} = (b_1, \dots, b_k),$$

где

$$b_1 = x_1 a_k, b_2 = x_2 a_{k-1}, \dots, b_{k-1} = x_{k-1} a_2, b_k = x_k a_{k+1}.$$

Лемма 4.2. Пусть A – группа, $b \in A$, подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, в ее разложении в произведение независимых циклов имеется цикл $(n_1 \dots n_m)$ длины m , $r = \frac{l-1}{m}, j \in \{n_1, \dots, n_m\}$,

$$\mathbf{b} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k.$$

Тогда в l -арной группе $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$, где

$$x_s = \begin{cases} 1, & \text{если } s \notin \{n_1, \dots, n_m\}, \\ b^{1-r}, & \text{если } s = j, \\ b^{-r}, & \text{если } s \in \{n_1, \dots, n_m\}, s \neq j. \end{cases} \quad (4.3)$$

является косым для элемента \mathbf{b} .

Доказательство. Положим

$$[\mathbf{xa}_2 \dots \mathbf{a}_l]_{l, \sigma, k} = (b_1, \dots, b_k),$$

где

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), \mathbf{a}_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i = b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}), i = 2, \dots, l,$$

то есть

$$[(x_1, \dots, x_k) (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \dots (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j})]_{l, \sigma, k} = (b_1, \dots, b_k).$$

1) Если $s \notin \{n_1, \dots, n_m\}$, то по лемме 4.1 $b_s = x_s$. А так как согласно (4.3), $x_s = 1$, то $b_s = 1$.

2) Если $s = j$, то по лемме 4.1

$$b_j = x_j a_{m+1} a_{2m+1} \dots a_{rm+1}.$$

А так как в обозначениях леммы 4.1

$$a_{m+1} = a_{2m+1} = \dots = a_{rm+1} = b$$

и, кроме того, согласно (4.3), $x_j = b^{1-r}$, то

$$b_j = x_j a_{m+1} a_{2m+1} \dots a_{rm+1} = b^{1-r} b^r = b.$$

3) Если $s \in \{n_1, \dots, n_m\}, s \neq j$, то по лемме 4.1

$$b_s = x_s a_{m_s+1} a_{m+m_s+1} a_{2m+m_s+1} \dots a_{(r-1)m+m_s+1}.$$

А так как в обозначениях леммы 4.1

$$a_{m_s+1} = a_{m+m_s+1} = a_{2m+m_s+1} = \dots = a_{(r-1)m+m_s+1} = b$$

и, кроме того, согласно (4.3), $x_s = b^{-r}$, то

$$b_s = x_s a_{m_s+1} a_{m+m_s+1} a_{2m+m_s+1} \cdots a_{(r-1)m+m_s+1} = b^{-r} b^r = 1.$$

Таким образом,

$$[(x_1, \dots, x_k) \underbrace{(1, \dots, 1, b, 1, \dots, 1)}_{j-1} \underbrace{\dots}_{k-j} \underbrace{(1, \dots, 1, b, 1, \dots, 1)}_{j-1} \underbrace{\dots}_{k-j}]_{l, \sigma, k} = \underbrace{(1, \dots, 1, b, 1, \dots, 1)}_{j-1} \underbrace{\dots}_{k-j}.$$

Лемма доказана.

Считая в лемме 4.2 подстановку σ циклом длины k , получим

Следствие 4.6 [6]. Пусть A – группа, $b \in A$, σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k , $l = rk + 1$, $r \geq 1$. Тогда в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$ элемент

$$\underbrace{(b^{-r}, \dots, b^{-r})}_{j-1}, b^{1-r}, \underbrace{(b^{-r}, \dots, b^{-r})}_{k-j}$$

является косым для элемента $\underbrace{(1, \dots, 1)}_{j-1}, b, \underbrace{(1, \dots, 1)}_{k-j}$.

Полагая в следствии 4.6 $r = 1$, получим

Следствие 4.7. Пусть A – группа, $b \in A$, σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k . Тогда в $(k+1)$ -арной группе $\langle A^k, []_{k+1, \sigma, k} \rangle$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$ элемент

$$\underbrace{(b^{-1}, \dots, b^{-1})}_{j-1}, 1, \underbrace{(b^{-1}, \dots, b^{-1})}_{k-j}$$

является косым для элемента

$$\underbrace{(1, \dots, 1)}_{j-1}, b, \underbrace{(1, \dots, 1)}_{k-j}.$$

Следующая лемма является следствием утверждения 1) леммы 2.1 из [5], согласно которому, если A – группа, $b \in A$, подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k) \in A^k,$$

то

$$\underbrace{[\mathbf{x} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{y}]}_{l-2}]_{l, \sigma, k} = (x_1 y_1, \dots, x_k y_k).$$

Лемма 4.3. Пусть A – группа, $b \in A$, подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, в ее разложении в произведение независимых циклов имеется цикл

$(n_1 \dots n_m)$ длины m , $r = \frac{l-1}{m}$, $j \in \{n_1, \dots, n_m\}$. Если

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k) \in A^k,$$

где

$$x_s = \begin{cases} 1, & \text{если } s \notin \{n_1, \dots, n_m\}, \\ b^{1-r}, & \text{если } s = j, \\ b^{-r}, & \text{если } s \in \{n_1, \dots, n_m\}, s \neq j, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &= [\underbrace{\bar{u} e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_1} \dots \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_{\alpha-1}} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_{\alpha-1}^2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_{\alpha-1}^r} \\
 &\quad \underbrace{e \dots e \mathbf{u} \dots e \dots e \mathbf{u}}_{r-2} \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_{\alpha+1}} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_{\alpha+1}^2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_{\alpha+1}^r} \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_m} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_m^2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_m^r}]_{l, \sigma, k}; \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

2) существуют $t_{n_1}, \dots, t_{n_{\alpha-1}}, t_{n_{\alpha+1}}, \dots, t_{n_m} \in \{n_1, \dots, n_m\}$ такие, что

$$\begin{aligned}
 &(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b^{-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) = \\
 &= [\underbrace{\bar{u} e \dots e}_{m-t_{n_1}-1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u} \underbrace{e \dots e}_{l-m+t_{n_1}-1} \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\underbrace{e \dots e}_{m-t_{n_{\alpha-1}}-1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u} \underbrace{e \dots e}_{l-m+t_{n_{\alpha-1}}-1} \\
 &\quad \underbrace{e \dots e \mathbf{u} \dots e \dots e \mathbf{u}}_{r-2} \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\underbrace{e \dots e}_{m-t_{n_{\alpha+1}}-1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u} \underbrace{e \dots e}_{l-m+t_{n_{\alpha+1}}-1} \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\underbrace{e \dots e}_{m-t_{n_m}-1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u} \underbrace{e \dots e}_{l-m+t_{n_m}-1}]_{l, \sigma, k}. \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Доказательство. 1) Согласно утверждению 1) леммы 2.1, имеем

$$\begin{aligned}
 &[\underbrace{\mathbf{u}_{n_1}}_{l-2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_1} \dots \\
 &\dots \dots \dots \\
 &\underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_{\alpha-1}} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_{\alpha-1}^2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_{\alpha-1}^r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{u} \dots \mathbf{u}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{u} \dots \mathbf{u}}_{l-2} \\
 & \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{n_{\alpha+1}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{n_{\alpha+1}2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{n_{\alpha+1}r} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{n_m1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{n_m2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{n_mr}]_{l, \sigma, k} = \\
 & = \mathbf{v}_{n_1, \dots, n_m} = (v_1, v_2, \dots, v_k), \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

где

$$v_s = \begin{cases} 1, & \text{если } s \notin \{n_1, \dots, n_m\}, \\ b^{r-2}, & \text{если } s = j = n_\alpha, \\ b^r, & \text{если } s \in \{n_1, \dots, n_m\}, s \neq j. \end{cases} \tag{4.7}$$

По лемме 4.2

$$\bar{\mathbf{u}} = \overbrace{(1, \dots, 1, b, 1, \dots, 1)}^{\substack{j-1 \\ k-j}} = (x_1, \dots, x_k),$$

где

$$x_s = \begin{cases} 1, & \text{если } s \notin \{n_1, \dots, n_m\}, \\ b^{1-r}, & \text{если } s = j, \\ b^{-r}, & \text{если } s \in \{n_1, \dots, n_m\}, s \neq j. \end{cases} \tag{4.8}$$

Подставляя в левую часть равенства из формулировки леммы 4.3 вместо \mathbf{x} элемент $\bar{\mathbf{u}}$, компоненты которого определяются равенством (4.8), а вместо \mathbf{y} левую часть равенства (4.6) с компонентами (4.7), получим равенство (4.4).

2) Согласно лемме 3.1, для любого

$$s \in \{n_1, \dots, n_{\alpha-1}, n_{\alpha+1}, \dots, n_m\}$$

существуют $t_{n_1}, \dots, t_{n_{\alpha-1}}, t_{n_{\alpha+1}}, \dots, t_{n_m} \in \{n_1, \dots, n_m\}$ такие, что

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{u}_{n_11} = \mathbf{u}_{n_12} = \dots = \mathbf{u}_{n_1r} = \\
 & = [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{m-t_{n_1}} \underbrace{(1, \dots, 1, b, 1, \dots, 1)}_{\substack{j-1 \\ k-j}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-m+t_{n_1}-1}]_{l, \sigma, k}, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \mathbf{u}_{n_{\alpha-1}1} = \mathbf{u}_{n_{\alpha-1}2} = \dots = \mathbf{u}_{n_{\alpha-1}r} = \\
 & = [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{m-t_{n_{\alpha-1}}} \underbrace{(1, \dots, 1, b, 1, \dots, 1)}_{\substack{j-1 \\ k-j}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-m+t_{n_{\alpha-1}}-1}]_{l, \sigma, k}, \\
 & \mathbf{u}_{n_{\alpha+1}1} = \mathbf{u}_{n_{\alpha+1}2} = \dots = \mathbf{u}_{n_{\alpha+1}r} =
 \end{aligned}$$

$$= [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{m-t_{n_{\alpha+1}}} \underbrace{(1, \dots, 1)}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-m+t_{n_{\alpha+1}}-1}]_{l, \sigma, k},$$

.....

$$\mathbf{u}_{n_{m1}} = \mathbf{u}_{n_{m2}} = \dots = \mathbf{u}_{n_{mr}} =$$

$$= [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{m-t_{n_m}} \underbrace{(1, \dots, 1)}_{j-1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-m+t_{n_m}-1}]_{l, \sigma, k}.$$

С учетом записанных равенств, а также нейтральности в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ последовательности $\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1}$, равенство (4.4) принимает вид (4.5).

Лемма доказана.

Считая в лемме 4.4 подстановку σ циклом длины k , получим лемму 4.4 из [6].

5 Основной результат

Теорема 5.1. Пусть группа A порождается множеством M , подстановка σ из S_k разлагается в произведение q независимых циклов, включая циклы длины один, и удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$; X_1, \dots, X_q – σ -орбиты, соответствующие указанным циклам. Тогда для любых $i_1 \in X_1, \dots, i_q \in X_q$ l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством

$$\mathbf{U}_{i_1}(M) \cup \dots \cup \mathbf{U}_{i_q}(M) \cup \{\mathbf{e}\}. \quad (5.1)$$

Если группа A n -порожденная, то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ является $(qn + 1)$ -порожденной.

Доказательство. Пусть \mathbf{a} – произвольный элемент из A^k , отличный от \mathbf{e} . По теореме 3.2, с учетом замечания 3.1, он либо совпадает с некоторым элементом множества

$$\mathbf{U}_{i_1}(M) \cup \mathbf{U}_{i_1}(M^{-1}) \cup \dots \cup \mathbf{U}_{i_q}(M) \cup \mathbf{U}_{i_q}(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\},$$

либо может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_{r(l-1)+1}]_{l, \sigma, k} \quad (5.2)$$

для некоторого $r \geq 1$, где все элементы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r(l-1)+1}$ под знаком полиадической операции принадлежат этому же множеству.

Если

$$\mathbf{v}_s \notin \mathbf{U}_{i_1}(M) \cup \dots \cup \mathbf{U}_{i_q}(M) \cup \{\mathbf{e}\}$$

для некоторого $s = 1, \dots, r(l-1) + 1$, то $\mathbf{v}_s \in \mathbf{U}_{i_\alpha}(M^{-1})$ для некоторого $\alpha = 1, 2, \dots, q$, то есть

$$\mathbf{v}_s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i_\alpha-1}, b^{-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i_\alpha}) \quad (5.3)$$

для некоторого $b \in M$. Тогда согласно утверждению 2) леммы 4.4, верно равенство (4.5) для $j = i_\alpha$ и некоторых

$$t_{n_1}, \dots, t_{n_{\alpha-1}}, t_{n_{\alpha+1}}, \dots, t_{n_m} \in X_{i_\alpha} = \{n_1, \dots, n_m\},$$

где

$$\mathbf{u} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i_\alpha - 1}, b, \underbrace{1, \dots, 1}_{k - i_\alpha}) \in \mathbf{U}_{i_\alpha}(M).$$

Это означает, что

$$\mathbf{v}_s = [\bar{\mathbf{u}} \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_{\mu(l-1)+1}]_{l, \sigma, k} \quad (5.4)$$

для некоторого $\mu \geq 1$, где в правой части каждый из элементов $\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_{\mu(l-1)+1}$ совпадает либо с $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{i_\alpha}(M)$, либо с \mathbf{e} . Кроме того, $\bar{\mathbf{u}} \in \overline{\mathbf{U}_{i_\alpha}(M)}$.

Таким образом, элемент \mathbf{v}_s в правой части (5.2) можно заменить правой частью (5.4). Сделав подобную замену в правой части (5.2) для всех элементов вида (5.3), где $\alpha = 1, 2, \dots, q$, получим

$$\mathbf{a} = [\mathbf{w}_1 \dots \mathbf{w}_{\nu(l-1)+1}]_{l, \sigma, k}$$

для некоторого $\nu \geq 1$, где

$$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{\nu(l-1)+1} \in \bigcup_{j=i_1}^{i_q} \mathbf{U}_j(M) \cup \bigcup_{j=i_1}^{i_q} \overline{\mathbf{U}_j(M)} \cup \{\mathbf{e}\}.$$

Следовательно, по теореме 2.2 l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством (5.1).

Если множество M содержит n элементов, то множество (5.1) содержит $qn + 1$ элементов. Теорема доказана.

Замечание 5.1. Ясно, что если в теореме 5.1 порождающее множеством M группы A бесконечно, то его мощность совпадает с мощностью порождающего множества (5.1) l -арной группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Считая в теореме 5.1 подстановку σ циклом длины k , получим

Следствие 5.1. [6]. Пусть группа A порождается множеством M , σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k , $l = rk + 1$, $r \geq 1$. Тогда l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$. Если A – n -порожденная группа, то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ является $(n + 1)$ -порожденной.

Следующее следствие вытекает из следствия 5.1 при $l = k + 1$.

Следствие 5.2. Пусть группа A порождается множеством M , σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k . Тогда $(k + 1)$ -арная группа $\langle A^k, []_{k+1, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$. Если A – n -порожденная группа, то l -арная группа $\langle A^k, []_{k+1, \sigma, k} \rangle$ является $(n + 1)$ -порожденной.

Полагая в следствиях 5.1 и 5.2 $\sigma = (1\ 2 \dots k)$, получим еще два следствия.

Следствие 5.3. Пусть группа A порождается множеством M , k делит $l - 1$. Тогда l -арная группа $\langle A^k, []_{l, (1\ 2 \dots k), k} \rangle$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$. Если A – n -порожденная группа, то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, (1\ 2 \dots k), k} \rangle$ является $(n + 1)$ -порожденной.

Следствие 5.4. Пусть группа A порождается множеством M . Тогда $(k + 1)$ -арная группа $\langle A^k, []_{k+1, (1\ 2 \dots k), k} \rangle$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$. Если A – n -порожденная группа, то l -арная группа $\langle A^k, []_{k+1, (1\ 2 \dots k), k} \rangle$ является $(n + 1)$ -порожденной.

Полагая в следствии 5.4 $k = 2$, получим

Следствие 5.5. Если группа A порождается множеством M , то тернарная группа $\langle A^2, []_{3, (12), 2} \rangle$ порождается любым из двух множеств

$$U_1(M) \cup \{(1, 1)\}, U_2(M) \cup \{(1, 1)\}.$$

Если A – n -порожденная группа, то l -арная группа $\langle A^2, []_{3, (12), 2} \rangle$ является $(n + 1)$ -порожденной.

Если в теореме 5.1 в качестве группы A взять циклическую группу, то получим

Следствие 5.6. Пусть циклическая группа A порождается элементом a , подстановка σ из S_k разлагается в произведение q независимых циклов, включая циклы длины один, и удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$; X_1, \dots, X_q – σ -орбиты, соответствующие указанным циклам. Тогда для любых $i_1 \in X_1, \dots, i_q \in X_q$ l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается $(q + 1)$ -элементным множеством

$$\{(\underbrace{1, \dots, 1}_{i_1-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i_1}), \dots, (\underbrace{1, \dots, 1}_{i_q-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i_q}), (\underbrace{1, \dots, 1}_k)\},$$

то есть является $(q + 1)$ -порожденной.

Из следствия 5.6 извлекаются следствия для циклической группы A , аналогичные следствиям 5.1 – 5.5. Указанные следствия для циклической группы A перечислены в [6] и могут рассматриваться как следствия соответствующих следствий 5.1 – 5.5.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. О порождающих множествах полиадической группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2022. – № 2(60). – С. 23–32.
2. Русаков, С. А. Алгебраические n -арные системы / С. А. Русаков. – Мн.: Наука і тэхніка, 1992. – 245 с.
3. Гальмак, А. М. n -Арные группы. Часть 1 / А. М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
4. Гальмак, А. М. n -Арные группы. Часть 2 / А. М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
5. Щучкин, Н. А. Введение в теорию n -групп / Н. А. Щучкин. – Волгоград: Принт, 2019. – 236 с.
6. Гальмак, А. М. О порождающих множествах l -арной группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 2. – С. 69–76.

Поступила в редакцию 17.11.2022 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A. M. ON SETS OF GENERATORS OF POLYADIC GROUP $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$. II

The article continues the study of the previously described relationship between sets of generators in group A and sets of generators in the polyadic group $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ with the l -ary operation $[]_{l, \sigma, k}$, that is defined on the Cartesian power A^k of group A for arbitrary integer $l \geq 2$ and any arbitrary substitution σ from the set S_k of all substitutions of the set $\{1, 2, \dots, k\}$.

Keywords: group, polyadic group, l -ary group, set of generators.

УДК 514.76

ТРЕХМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С НЕСОВЕРШЕННОЙ АЛГЕБРОЙ ГОЛОНОМИИ

Н. П. Можей

кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники

Целью данной работы является описание несовершенных алгебр голономии аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах, а также самих однородных пространств, допускающих алгебры голономии указанного вида. Для трехмерных однородных пространств определено, при каких условиях алгебра голономии нетривиальной аффинной связности с нулевым кручением не является совершенной. Также найдены и выписаны в явном виде сами аффинные связности, тензоры кривизны и алгебры голономии, приведено явное локальное описание соответствующих трехмерных однородных пространств. Исследования основаны на применении свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят в основном локальный характер. Полученные в работе результаты могут быть применены в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, а также в других разделах математики и физики.

Ключевые слова: аффинная связность, однородное пространство, тензор кривизны, алгебра голономии, тензор кручения.

Введение

Трехмерными геометриями занимались еще Г. Риман, Ф. Клейн, Н. И. Лобачевский и др., последние годы интерес к этой тематике возобновился в связи с развитием других областей науки, например, общей теории относительности и трехмерной топологии. После работ Э. Картана (например, [1]) фундаментом и основной составляющей дифференциальной геометрии является понятие многообразия, а также теория групп и алгебр Ли. Важный подкласс среди всех многообразий формируют изотропно-точные однородные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность. Связность на многообразии определяет (через параллельный перенос) понятие голономии, которая может быть описана через группу Ли – группу голономии. Первое упоминание о голономии (в классической механике) датируется 1895 годом и принадлежит Г. Герцу, в математических работах понятие голономии возникло в 1923 году у Э. Картана применительно к римановым многообразиям, каждой специальной группе голономии отвечает та или иная геометрия. Анализ групп голономии и их приводимости для естественно редутивных однородных пространств и произвольных римановых однородных пространств проведен Б. Костантом, например, в [2]. Исследования структуры кривизны многообразий с совершенной группой голономии (т.е. вся алгебра голономии порождается только операторами кривизны) проводились, например, в работе [3] и других работах этого автора. Алгебры голономии нетривиальных аффинных связностей

на трехмерных однородных пространствах исследовались в [4], в данной работе изучается, при каких условиях группа голономии не является совершенной, рассматривается случай инвариантных аффинных связностей без кручения.

Основная часть

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа Ли \bar{G} , (M, \bar{G}) – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если \bar{G} эффективна на \bar{G}/G [5]. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли \bar{G} , а \mathfrak{g} – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление \mathfrak{g} . Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к \mathfrak{g} в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. *Аффинной связностью* на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на \mathfrak{g} есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является \mathfrak{g} -инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве находятся во взаимно однозначном соответствии (например, [6]) с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. *Тензоры кручения* $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ и *кривизны* $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид: $T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m$, $R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$. Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T = 0$. Тензор Риччи имеет вид $Ric \in \text{Inv}T_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$.

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Переформулируем теорему Вана [7] об алгебре группы голономии инвариантной связности: алгебра Ли \mathfrak{h}^* группы голономии инвариантной связности $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$, V – подпространство, порожденное $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Положим $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ равной подалгебре $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, порожденной $\{\Lambda(x); x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. Основное свойство $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$ таково: пусть \mathfrak{h}^* – алгебра Ли группы голономии, тогда $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}} \subset \mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$, где $\mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$ – нормализатор \mathfrak{h}^* в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$.

Многообразию обладает *совершенной группой голономии*, если алгебра голономии порождается лишь операторами кривизны. В противном случае будем называть группу голономии *несовершенной*.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, через $\{e_1, \dots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра \mathfrak{g} порождается векторами e_1, \dots, e_{n-3} , а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис \mathfrak{m} . Для нумерации подалгебр используем запись d, n , а для нумерации пар – запись d, n, m , соответствующие приведенным в [4], где d – размерность подалгебры, n – номер

подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары. Связность называется *тривиальной*, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$, в противном случае связность *нетривиальная*. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$. Предполагается, что параметры обозначены греческими буквами и принадлежат \mathbb{R} .

Теорема 1. *Трехмерные однородные пространства, допускающие нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением и несовершенной алгеброй голономии, локально имеют следующий вид:*

2.8.7, $\lambda=1/2$	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1/2)e_1$	e_1	0	u_1
e_2	$-(1/2)e_1$	0	0	u_2	$(1/2)u_3$
u_1	$-e_1$	0	0	0	u_3
u_2	0	$-u_2$	0	0	0
u_3	$-u_1$	$-(1/2)u_3$	$-u_3$	0	0

3.13.6, $\mu=1/2$	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-(1/2)e_2$	$(1/2)e_3$	u_1	0	$(1/2)u_3$
e_2	$(1/2)e_2$	0	0	e_3	$2e_2$	u_2
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	$-e_3$	0	0	$-u_1$	0
u_2	0	$-2e_2$	$-e_3$	u_1	0	$2u_3$
u_3	$-(1/2)u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-2u_3$	0

4.21.11, $\mu=1/2$	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-(1/2)e_3$	$(1/2)e_4$	u_1	0	$(1/2)u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_4	0	0	e_2+u_1	0
e_3	$(1/2)e_3$	$-e_4$	0	0	0	$-2e_3$	u_2
e_4	$-(1/2)e_4$	0	0	0	0	$-e_4$	e_2+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-e_2-u_1$	$2e_3$	e_4	0	0	$-2u_3$
u_3	$-(1/2)u_3$	0	$-u_2$	$-e_2-u_1$	0	$2u_3$	0

3.20.27	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(4/5)e_2$	$(3/5)e_3$	u_1	$(1/5)u_2$	$(2/5)u_3$
e_2	$-(4/5)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(3/5)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(1/5)u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	e_3
u_3	$-(2/5)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3$	0

Замечание. В случае 3.20.27 $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, а в остальных случаях нет.

Действительно, заметим, что если кривизна нулевая, то алгебра голономии также нулевая, т.е. будем рассматривать случай ненулевой кривизны. Случай алгебр голономии тривиальных связностей изучался в работах [8, 9], поэтому рассматриваем только нетривиальные связности. Для каждой подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ найдены изотропно-точные пары, инвариантные аффинные связности на них и определены пары, допускающие нетривиальную аффинную связность с несовершенной алгеброй голономии (причем только с нулевым кручением).

Рассмотрим, например, локально однородное пространство 3.13.6 при $\mu = 1/2$, тогда

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны $R(u_1, u_2) = R(u_1, u_3) = 0$,

$$R(u_2, u_3) = [\Lambda(u_2), \Lambda(u_3)] - \Lambda([u_2, u_3]) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения получился нулевым, как и тензор Риччи.

Алгебра голономии \mathfrak{h}^* – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$, V – подпространство, порожденное $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$, при $r_{1,3} \neq 0$ \mathfrak{h}^* не совпадает с алгеброй, порожденной множеством $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ (т. е. алгебра

голономии не является совершенной), $\mathfrak{h}^* = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$. При $r_{1,3} \neq 0$

алгебра голономии нулевая.

Для остальных трехмерных однородных пространств, допускающих нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением (кривизна которой не только нулевая), рассуждения аналогичны.

Получаем, что аффинные связности имеют вид, указанный в таблице 1.

Таблица 1. – Аффинные связности

Пара (\bar{g}, g)	Аффинная связность		
4.21.11, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda=1/2$	$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.27	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Тензоры кривизны найденных связностей имеют вид, приведенный в таблице 2.

Таблица 2. – Тензоры кривизны

Пара	Тензор кривизны		
4.21.11, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.6, $\mu=1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda=1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3r_{2,3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.27	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Прямыми вычислениями получаем, что во всех указанных случаях тензоры Риччи нулевые. При этом тензоры кручения T также нулевые.

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 2. Пусть (\bar{g}, g) – трехмерное однородное пространство, допускающее нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением и несовершенной алгеброй голономии. Несовершенные алгебры голономии инвариантных связностей на указанных пространствах имеют вид, приведенный в таблице 3.

Таблица 3. – Совершенные алгебры голономии

Пара	Алгебра голономии $(p_1, p_2 \in \mathbb{R})$
4.21.11, $\mu = 1/2$ и 3.13.6, $\mu = 1/2$ при $r_{1,3} \neq 0$, 3.20.27	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.8.7, $\lambda = 1/2$ при $r_{2,3} \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

В случаях 4.21.11, $\mu = 1/2$, 3.13.6, $\mu = 1/2$ при $r_{1,3} = 0$, а в случае 2.8.7, $\lambda = 1/2$ при $r_{2,3} = 0$ алгебра голономии нулевая.

Заключение

Для трехмерных однородных пространств, допускающих нетривиальную аффинную связность без кручения, определено, при каких условиях алгебра голономии не является совершенной, приведено явное локальное описание соответствующих трехмерных однородных пространств, отдельно выделены случаи неразрешимой и разрешимой группы преобразований. Исследования основаны на применении свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, в основном, локальный характер. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах. Алгоритмы, приведенные в работе, могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Cartan, E.* La geometrie des espaces de Riemann / E. Cartan // Memorial des Sciences Math. – 1923. – V. 9. – 457 p.
2. *Kostant, B.* On differential geometry and homogeneous spaces / B. Kostant // Proc. of the National Academy of Sciences of the United States of America. – 1956. – V. 42 (5). – P. 258–261.
3. *Кайгородов, В. Р.* Римановы пространства. Структура кривизны пространств типа А / В. Р. Кайгородов // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 117–127.
4. *Можей, Н. П.* Алгебры голономии нетривиальных связностей без кручения на трехмерных однородных пространствах / Н. П. Можей // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2021. – Т. 11, № 1. – С. 13–22.

5. **Kobayashi, S.** Foundations of Differential Geometry / S. Kobayashi, K. Nomizu. – New York–London, 1969. – Vol. 2. – 488 p
6. **Nomizu, K.** Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, no. 1. – P. 33–65.
7. **Wang, H. C.** On invariant connections over a principal fibre bundle / H. C. Wang // Nagoya Math. J. – 1958. – No 3. – P. 1–19.
8. **Можей, Н. П.** Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с неразрешимыми группами преобразований / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2018. – № 6 (111). – С. 81–88.
9. **Можей, Н. П.** Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с разрешимыми группами преобразований / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2019. – № 3 (114). – С. 170–177.

Поступила в редакцию 17.02.2022 г.

Контакты: mozheynatalya@mail.ru (Можей Наталья Павловна)

Mozhey N. P. THREE-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS SPACES WITH IMPERFECT HOLONOMY ALGEBRA

The purpose of the work is the description of imperfect holonomy algebras of affine connections on three-dimensional homogeneous spaces, as well as the homogeneous spaces that admit connections of the specified type. For three-dimensional homogeneous spaces, it is determined under what conditions the holonomy algebra of nontrivial affine connection with zero torsion is not perfect. The affine connections, curvature tensors, and holonomy algebras are also found and written out explicitly, and the local classification of the corresponding three-dimensional homogeneous spaces is given. The studies are based on the application of properties of Lie algebras, Lie groups, and homogeneous spaces and they mainly have local character. The results obtained in this study can be applied in works on differential geometry, differential equations, topology, as well as in other areas of mathematics and physics.

Keywords: affine connection, homogeneous space, curvature tensor, holonomy algebra, torsion tensor.

УДК 535.681.7.064

СОТНОШЕНИЯ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СРЕД

А. Б. Сотский

доктор физико-математических наук

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Е. А. Чудаков

аспирант

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В результате анализа волновых уравнений для волн s - и p - поляризации в слоистой среде с произвольным пространственным профилем комплексной диэлектрической проницаемости получены соотношения взаимности для коэффициентов отражения и прохождения плоских волн при освещении слоистой среды во встречных направлениях. Показано, что энергетические коэффициенты прохождения встречных волн совпадают всегда, а для энергетических коэффициентов отражения подобное совпадение имеет место только при отсутствии в среде поглощения. Соотношения взаимности проиллюстрированы на примерах расчета оптимизированных метало-диэлектрических и диэлектрических интерференционных покрытий на диэлектрической пластине, выполняющих функции невзаимного поглотителя солнечной энергии и взаимных антибликовых структур.

Ключевые слова: интерференционное покрытие, соотношения взаимности, антибликовое покрытие, поглотитель солнечной энергии.

Введение

Слоистые среды в виде интерференционных покрытий на различных поверхностях широко используются в оптических антибликовых, зеркальных и делительных системах, поглотителях солнечной энергии [1, 2]. Оптимальное проектирование таких сред требует априорного учета их электродинамических свойств. К таким свойствам относятся соотношения взаимности, связывающие между собой коэффициенты отражения, либо прохождения света через слоистые среды, освещаемые с противоположных сторон. В настоящей работе соотношения взаимности получены для ограниченной слоистой среды с произвольным пространственным распределением комплексной диэлектрической проницаемости, заключенной между двумя однородными прозрачными средами. Данные соотношения могут быть использованы для проектирования преобразователей света в электрический ток, антибликовых покрытий, односторонних отражателей и поглотителей энергии, а также для юстировки оптических схем. Представлены примеры расчета оптимизированного интерференционного поглотителя света в виде чередующихся слоев Al и SiO₂ на диэлектрической пластине из поликарбоната (PC пластине) и оптимизированных односторонних и двухсторонних интерференционных антибликовых покрытий в виде чередующихся слоев ZrO₂ и SiO₂ на PC пластине.

Соотношения взаимности

Рассмотрим слоистую среду с комплексной диэлектрической проницаемостью $\epsilon(y)$, занимающую область $-d < y < 0$ (рис. 1).

© Сотский А. Б., Чудаков Е. А., 2023

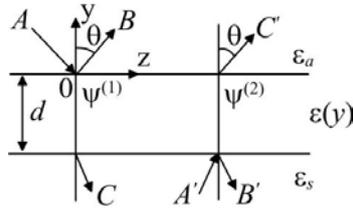


Рисунок 1 – Плоскостроистая среда и система координат

Слоистая среда контактирует с однородными прозрачными средами, имеющими вещественные диэлектрические проницаемости ϵ_a ($y > 0$) и ϵ_s ($y < 0$). Структура возбуждается плоской волной, падающей на нее из области $y > 0$ под углом θ , либо из области $y < -d$ (в последнем случае θ имеет смысл угла преломления). Зависимости полей от времени t и координаты z описываются фактором $\exp(ik_0ct - ik_0n_a z \sin \theta)$, где $k_0 = 2\pi / \lambda$ – волновое число вакуума, $n_a = \sqrt{\epsilon_a}$, c – скорость света. В слоистой среде возможно независимое распространение волн s - и p -поляризации [3], которые в дальнейшем различаются значением индекса α , который равен 0 для s -волн и 1 для p -волн.

Волны s -поляризации во всем пространстве подчиняются уравнению [3]

$$\frac{d^2}{dy^2} \psi + \kappa^2 \psi = 0, \quad (1)$$

где $\kappa^2 = k_0^2[\epsilon - \epsilon_a \sin^2 \theta]$, $\epsilon = \epsilon_a$ при $y > 0$, $\epsilon = \epsilon_s$ при $y < -d$, $\epsilon = \epsilon(y)$ при $0 > y > -d$, ψ – компонента электрического поля, ортогональная плоскости падения. Общее решение уравнения (1) в области $0 > y > -d$ допускает представление в матричной форме [4]

$$\begin{pmatrix} \psi(y) \\ \psi'(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}^{(\alpha)}(y) & L_{12}^{(\alpha)}(y) \\ L_{21}^{(\alpha)}(y) & L_{22}^{(\alpha)}(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(-d) \\ \psi'(-d) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\psi' = d\psi / dy$. Элементы матрицы $\mathbf{L}^{(\alpha)}$ равны

$$L_{11}^{(\alpha)}(y) = \psi_1(y), \quad L_{21}^{(\alpha)}(y) = \psi_1'(y), \quad L_{12}^{(\alpha)}(y) = \psi_2(y), \quad L_{22}^{(\alpha)}(y) = \psi_2'(y), \quad (3)$$

где $\alpha = 0$, $\psi_{1,2}' = d\psi_{1,2} / dy$, $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ – решения двух задач Коши

$$\frac{d\psi_1}{dy} = \psi_1', \quad \frac{d\psi_1'}{dy} = -\kappa^2 \psi_1, \quad \psi_1(-d) = 1, \quad \psi_1'(-d) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d\psi_2}{dy} = \psi_2', \quad \frac{d\psi_2'}{dy} = -\kappa^2 \psi_2, \quad \psi_2(-d) = 0, \quad \psi_2'(-d) = 1. \quad (5)$$

Функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ представляют собой два линейно независимых решения уравнения (1), определитель Вронского которых

$$\det[\mathbf{L}^{(\alpha)}(y)] = \psi_1(y)\psi_2'(y) - \psi_2(y)\psi_1'(y) \equiv 1. \quad (6)$$

Действительно, в соответствии с (3) – (5) $\det[\mathbf{L}^{(\alpha)}(-d)] = 1$, а

$$\frac{d \det[\mathbf{L}^{(\alpha)}(y)]}{dy} = \psi_1 \frac{d^2 \psi_2}{dy^2} - \psi_2 \frac{d^2 \psi_1}{dy^2} = -\kappa^2 (\psi_1 \psi_2 - \psi_2 \psi_1) = 0.$$

Обозначим решение уравнения (1), соответствующие возбуждению структуры плоскими волнами, падающими из областей $y > 0$ и $y < -d$, через $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ (рис. 1).

В однородных областях $y > 0$ и $y < -d$ решение $\psi^{(1)}$ имеет вид

$$\psi^{(1)} = A \exp(i\kappa_a y) + B \exp(-i\kappa_a y) \quad (y \geq 0), \quad (7)$$

$$\psi^{(1)} = C \exp[i\kappa_s(y+d)] \quad (y \leq -d), \quad (8)$$

где A , B , C – амплитуды падающей, отраженной и прошедшей плоских волн,

$$\kappa_a = k_0 n_a \cos \theta, \quad \kappa_s = k_0 \sqrt{\varepsilon_s - \varepsilon_a \sin^2 \theta}.$$

В соответствии с (1), ψ и $d\psi/dy$ являются непрерывными функциями y . Поэтому из (2), (7), (8) заключаем, что

$$A + B = [L_{11}^{(0)}(0) + i\kappa_s L_{12}^{(0)}(0)]C, \quad (9)$$

$$i\kappa_a(A - B) = [L_{21}^{(0)}(0) + i\kappa_s L_{22}^{(0)}(0)]C. \quad (10)$$

Согласно (9) и (10),

$$r_1^{(0)} = \frac{B}{A} = \frac{i\kappa_a [L_{11}^{(0)}(0) + i\kappa_s L_{12}^{(0)}(0)] - [L_{21}^{(0)}(0) + i\kappa_s L_{22}^{(0)}(0)]}{i\kappa_a [L_{11}^{(0)}(0) + i\kappa_s L_{12}^{(0)}(0)] + [L_{21}^{(0)}(0) + i\kappa_s L_{22}^{(0)}(0)]}, \quad (11)$$

$$t_1^{(0)} = \frac{C}{A} = \frac{2i\kappa_a}{i\kappa_a [L_{11}^{(0)}(0) + i\kappa_s L_{12}^{(0)}(0)] + [L_{21}^{(0)}(0) + i\kappa_s L_{22}^{(0)}(0)]}, \quad (12)$$

где $r_1^{(0)}$ – амплитудный коэффициент отражения волн s -поляризации типа $\psi^{(1)}$ от интерференционного покрытия, $t_1^{(0)}$ – амплитудный коэффициент прохождения этими волнами интерференционного покрытия.

Для решения $\psi^{(2)}$ имеем:

$$\psi^{(2)} = C' \exp(-i\kappa_a y) \quad (y \geq 0), \quad (13)$$

$$\psi^{(2)} = A' \exp[-i\kappa_s(y+d)] + B' \exp[i\kappa_s(y+d)] \quad (y \leq -d). \quad (14)$$

Из (2), (13), (14) следует, что

$$C' = L_{11}^{(0)}(0)(A' + B') + L_{21}^{(0)}(0)i\kappa_s(B' - A'), \quad (15)$$

$$-i\kappa_a C' = L_{21}^{(0)}(0)(A' + B') + L_{22}^{(0)}(0)i\kappa_s(B' - A'). \quad (16)$$

В соответствии с (15), (16)

$$r_2^{(0)} = \frac{B'}{A'} = \frac{i\kappa_s [L_{22}^{(0)}(0) + i\kappa_a L_{12}^{(0)}(0)] - [L_{21}^{(0)}(0) + i\kappa_a L_{11}^{(0)}(0)]}{i\kappa_s [L_{22}^{(0)}(0) + i\kappa_a L_{12}^{(0)}(0)] + [L_{21}^{(0)}(0) + i\kappa_a L_{11}^{(0)}(0)]}, \quad (17)$$

$$t_2^{(0)} = \frac{C'}{A'} = \frac{2i\kappa_s [L_{11}^{(0)}(0)L_{22}^{(0)}(0) - L_{12}^{(0)}(0)L_{21}^{(0)}(0)]}{i\kappa_s [L_{22}^{(0)}(0) + i\kappa_a L_{12}^{(0)}(0)] - [L_{21}^{(0)}(0) + i\kappa_a L_{11}^{(0)}(0)]} =$$

$$= \frac{2i\kappa_s}{i\kappa_a [L_{11}^{(0)}(0) + i\kappa_s L_{12}^{(0)}(0)] + [L_{21}^{(0)}(0) + i\kappa_s L_{22}^{(0)}(0)]}, \quad (18)$$

где $r_2^{(0)}$ – амплитудный коэффициент отражения волн s -поляризации типа $\psi^{(2)}$ от интерференционного покрытия, $t_2^{(0)}$ – амплитудный коэффициент прохождения этими волнами интерференционного покрытия. При получении (18) учтено тождество (6).

Согласно (11), (12) и (17), (18)

$$\frac{r_1^{(0)}}{r_2^{(0)}} = \frac{i[\kappa_a L_{11}^{(0)}(0) - \kappa_s L_{22}^{(0)}(0)] - [\kappa_a \kappa_s L_{12}^{(0)}(0) + L_{21}^{(0)}(0)]}{i[\kappa_s L_{22}^{(0)}(0) - \kappa_a L_{11}^{(0)}(0)] - [\kappa_a \kappa_s L_{12}^{(0)}(0) + L_{21}^{(0)}(0)]}, \quad (19)$$

$$\frac{t_1^{(0)}}{t_2^{(0)}} = \frac{\kappa_a}{\kappa_s}. \quad (20)$$

Из (3) – (5) следует, что если $\text{Im}[\varepsilon(y)] = 0$, т.е. если слоистая среда прозрачна, то матрица $\mathbf{L}^{(\alpha)}(y)$ вещественна. Тогда в соответствии с (19)

$$\frac{r_1^{(\alpha)*}}{r_2^{(\alpha)*}} = \frac{r_2^{(\alpha)}}{r_1^{(\alpha)}}, \quad (21)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. В результате

$$R_1^{(\alpha)} = R_2^{(\alpha)}, \quad (22)$$

где $R_1^{(\alpha)} = |r_1^{(\alpha)}|^2$, $R_2^{(\alpha)} = |r_2^{(\alpha)}|^2$ – энергетические коэффициенты отражения встречных волн $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ от слоистой среды. Однако при наличии в слоистой среде поглощения ($\text{Im}[\varepsilon(y)] \neq 0$) матрица $\mathbf{L}^{(\alpha)}(y)$ становится комплексной, что приводит к нарушению равенств (21) и (22).

Согласно (20), если слоистая среда с обеих сторон окружена одинаковыми средами ($\kappa_a = \kappa_s$), то $t_1^{(0)} = t_2^{(0)}$. Если же $\kappa_a \neq \kappa_s$, то $t_1^{(0)} \neq t_2^{(0)}$, тем не менее, энергетические коэффициенты прохождения встречных волн [5]

$$T_1^{(0)} = \frac{\kappa_s}{\kappa_a} |t_1^{(0)}|^2, \quad T_2^{(0)} = \frac{\kappa_a}{\kappa_s} |t_2^{(0)}|^2 \quad (23)$$

всегда совпадают, т.е.

$$T_1^{(\alpha)} = T_2^{(\alpha)}, \quad (24)$$

что при $\alpha = 0$ очевидно из (20), (23).

Заметим, что в соответствии с законом сохранения энергии

$$Q_{1,2}^{(\alpha)} = 1 - R_{1,2}^{(\alpha)} - T_{1,2}^{(\alpha)}, \quad (25)$$

где $Q_{1,2}^{(\alpha)}$ – относительные диссипативные потери световой энергии в слоистой среде. Для рассматриваемых s -волн ($\alpha = 0$) из (6), (11), (12), (17), (18), (23) следует, что $Q_{1,2}^{(\alpha)} > 0$ при $\text{Im}[\varepsilon(y)] < 0$ и $Q_{1,2}^{(\alpha)} = 0$ при $\text{Im}[\varepsilon(y)] = 0$.

Волны p -поляризации во всем пространстве подчиняются уравнению [3]

$$\varepsilon \frac{d}{dy} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dy} \psi + \kappa^2 \psi = 0, \quad (26)$$

где ψ – компонента магнитного поля, ортогональная плоскости падения. Для общего решения уравнения (26) по-прежнему справедливо представление (2), но теперь в нем $\psi' = \varepsilon^{-1} d\psi / dy$. Элементы матрицы $\mathbf{L}^{(\alpha)}$ имеют вид (3), где $\alpha = 1$, $\psi'_{1,2} = \varepsilon^{-1} d\psi_{1,2} / dy$, $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ – решения двух задач Коши

$$\frac{d\psi_1}{dy} = \varepsilon\psi'_1, \quad \frac{d\psi'_1}{dy} = -\varepsilon^{-1}\kappa^2\psi_1, \quad \psi_1(-d) = 1, \quad \psi'_1(-d) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{d\psi_2}{dy} = \varepsilon\psi'_2, \quad \frac{d\psi'_2}{dy} = -\varepsilon^{-1}\kappa^2\psi_2, \quad \psi_2(-d) = 0, \quad \psi'_2(-d) = 1. \quad (28)$$

Тождество (6) и представления полей в открытых средах (7), (8), (13), (14) сохраняют силу. Однако теперь непрерывными функциями y в (27), (28) являются ψ и $\varepsilon^{-1} d\psi / dy$. Это проявляется в заменах в выражениях (9)–(12), (15)–(18) $\kappa_a \rightarrow \kappa_a / \varepsilon_a$, $\kappa_s \rightarrow \kappa_s / \varepsilon_s$:

$$r_1^{(1)} = \frac{B}{A} = \frac{i\kappa_a \varepsilon_a^{-1} [L_{11}^{(1)}(0) + i\kappa_s \varepsilon_s^{-1} L_{12}^{(1)}(0)] - [L_{21}^{(1)}(0) + i\kappa_s \varepsilon_s^{-1} L_{22}^{(1)}(0)]}{i\kappa_a \varepsilon_a^{-1} [L_{11}^{(1)}(0) + i\kappa_s \varepsilon_s^{-1} L_{12}^{(1)}(0)] + [L_{21}^{(1)}(0) + i\kappa_s \varepsilon_s^{-1} L_{22}^{(1)}(0)]}, \quad (29)$$

$$t_1^{(1)} = \frac{C}{A} = \frac{2i\kappa_a \varepsilon_a^{-1}}{i\kappa_a \varepsilon_a^{-1} [L_{11}^{(1)}(0) + i\kappa_s \varepsilon_s^{-1} L_{12}^{(1)}(0)] + [L_{21}^{(1)}(0) + i\kappa_s \varepsilon_s^{-1} L_{22}^{(1)}(0)]}, \quad (30)$$

$$r_2^{(1)} = \frac{B'}{A'} = \frac{i\kappa_s \varepsilon_s^{-1} [L_{22}^{(1)}(0) + i\kappa_a \varepsilon_a^{-1} L_{12}^{(1)}(0)] - [L_{21}^{(1)}(0) + i\kappa_a \varepsilon_a^{-1} L_{11}^{(1)}(0)]}{i\kappa_s \varepsilon_s^{-1} [L_{22}^{(1)}(0) + i\kappa_a \varepsilon_a^{-1} L_{12}^{(1)}(0)] + [L_{21}^{(1)}(0) + i\kappa_a \varepsilon_a^{-1} L_{11}^{(1)}(0)]}, \quad (31)$$

$$t_2^{(1)} = \frac{C'}{A'} = \frac{2i\kappa_s \varepsilon_s^{-1}}{i\kappa_a \varepsilon_a^{-1} [L_{11}^{(1)}(0) + i\kappa_s \varepsilon_s^{-1} L_{12}^{(1)}(0)] + [L_{21}^{(1)}(0) + i\kappa_s \varepsilon_s^{-1} L_{22}^{(1)}(0)]}, \quad (32)$$

$$\frac{r_1^{(1)}}{r_2^{(1)}} = \frac{i[\kappa_a \varepsilon_a^{-1} L_{11}^{(1)}(0) - \kappa_s \varepsilon_s^{-1} L_{22}^{(1)}(0)] - [\kappa_a \varepsilon_a^{-1} \kappa_s \varepsilon_s^{-1} L_{12}^{(1)}(0) + L_{21}^{(1)}(0)]}{i[\kappa_s \varepsilon_s^{-1} L_{22}^{(1)}(0) - \kappa_a \varepsilon_a^{-1} L_{11}^{(1)}(0)] - [\kappa_a \varepsilon_a^{-1} \kappa_s \varepsilon_s^{-1} L_{12}^{(1)}(0) + L_{21}^{(1)}(0)]}. \quad (33)$$

Для случая прозрачной слоистой среды справедливы равенства (21), (22). При рассмотрении слоистой среды с произвольным поглощением опять выполняются равенство (24) и условие энергетического баланса (25), но теперь

$$T_1^{(1)} = \frac{\kappa_s \varepsilon_a}{\kappa_a \varepsilon_s} |t_1^{(1)}|^2, \quad T_2^{(1)} = \frac{\kappa_a \varepsilon_s}{\kappa_s \varepsilon_a} |t_2^{(1)}|^2, \quad (34)$$

$$\frac{t_1^{(1)}}{t_2^{(1)}} = \frac{\kappa_a \varepsilon_s}{\kappa_s \varepsilon_a}. \quad (35)$$

Соотношения взаимности (19)–(22), (24), (33)–(35) получены для линейно поляризованных монохроматических волн s - и p -поляризации в слоистой среде, заключенной между двумя в общем случае разными однородными средами. Вместе с тем практический интерес представляет ситуация, когда слоистая среда на своих внешних границах контактирует с одинаковыми однородными средами, а ее возбуждение осуществляется естественным светом, создаваемым удаленным источником малых размеров. Здесь наблюдаемыми являются средние энергетические коэффициенты отражения и прохождения света [1, 6]

$$\bar{R}_{1,2} = \frac{\int_0^\infty R_{1,2} \rho(\lambda) G(\lambda - \lambda_0) d\lambda}{\int_0^\infty \rho(\lambda) G(\lambda - \lambda_0) d\lambda}, \quad (36)$$

$$\bar{T}_{1,2} = \frac{\int_0^\infty T_{1,2} \rho(\lambda) G(\lambda - \lambda_0) d\lambda}{\int_0^\infty \rho(\lambda) G(\lambda - \lambda_0) d\lambda}, \quad (37)$$

где

$$R_{1,2} = 0.5(R_{1,2}^{(0)} + R_{1,2}^{(1)}), \quad (38)$$

$$T_{1,2} = 0.5(T_{1,2}^{(0)} + T_{1,2}^{(1)}), \quad (39)$$

$\rho(\lambda)$ – спектральная плотность источника света, $G(\lambda - \lambda_0)$ – аппаратная функция монохроматора, отличная от нуля в диапазоне $\lambda_0 - \Delta\lambda \leq \lambda \leq \lambda_0 + \Delta\lambda$.

В соответствии с (22), (24), (36)–(39) при любом угле θ для естественного света выполняются соотношения взаимности

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_2, \quad (40)$$

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_2. \quad (41)$$

Равенство (40) имеет место при $\text{Im}[\varepsilon(y)] = 0$, а (41) справедливо всегда.

Численные примеры

Рассмотрим плоскостойкую среду в виде двух интерференционных покрытий с толщинами d_1 и d_2 , составленных из последовательности однородных слоев, нанесенных на противоположные стороны плоскопараллельной диэлектрической пластины с диэлектрической проницаемостью ε_s и толщиной D . Структура окружена воздухом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_a = (1.0003)^2$ (рис. 2). Она освещается естественным светом, падающим из областей $y > 0$, либо $y < -d$ под углом θ (рис. 2).

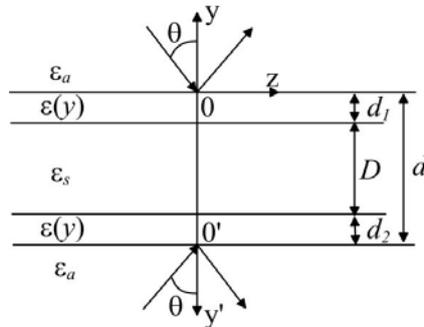


Рисунок 2 – Пластина с интерференционными покрытиями

В практически важном случае, когда D имеет миллиметровый порядок и выполняется неравенство $D \gg \lambda(2\Delta\lambda \text{Re} \kappa_s)^{-1}$, справедливы представления [6]

$$R_1^{(\alpha)} = |r_1^{(\alpha)}|^2 + |r_2^{(\alpha)} t_1^{(\alpha)} t_2^{(\alpha)}|^2 E (1 - |r_2^{(\alpha)} r_2'^{(\alpha)}|^2 E)^{-1}, \quad (42)$$

$$R_2^{(\alpha)} = |r_1'^{(\alpha)}|^2 + |r_2'^{(\alpha)} t_1'^{(\alpha)} t_2'^{(\alpha)}|^2 E (1 - |r_2^{(\alpha)} r_2'^{(\alpha)}|^2 E)^{-1}, \quad (43)$$

$$T_1^{(\alpha)} = |t_1^{(\alpha)} t_2^{(\alpha)}|^2 \sqrt{E} (1 - |r_2^{(\alpha)} r_2'^{(\alpha)}|^2 E)^{-1}, \quad (44)$$

$$T_2^{(\alpha)} = |t_1'^{(\alpha)} t_2'^{(\alpha)}|^2 \sqrt{E} (1 - |r_2^{(\alpha)} r_2'^{(\alpha)}|^2 E)^{-1}, \quad (45)$$

где $E = \exp[4D \text{Im} \kappa_s]$; $r_1^{(\alpha)}$, $t_1^{(\alpha)}$ рассчитываются по формулам (11), (12), (17), (18), $r_2^{(\alpha)}$, $t_2^{(\alpha)}$ – по формулам (29)–(32) после замены d на d_1 ; $r_1'^{(\alpha)}$, $t_1'^{(\alpha)}$ – по формулам (11), (12), (17), (18), $r_2'^{(\alpha)}$, $t_2'^{(\alpha)}$ – по формулам (29)–(32) после замены d на d_2 и использования инвертированной координатной оси $0'y'$ (рис. 2).

Приведенные далее результаты получены на основании (42)–(45) с использованием представления матриц $\mathbf{L}^{(\alpha)}(0)$ произведением передаточных матриц однородных слоев [5]:

$$\mathbf{L}^{(\alpha)}(0) = \mathbf{M}_j^{(\alpha)} \dots \mathbf{M}_1^{(\alpha)},$$

где

$$\mathbf{M}_j^{(a)} = \begin{pmatrix} \cos(\kappa_j \delta_j) & \varepsilon_j^a \kappa_j \sin(\kappa_j \delta_j) \\ -\kappa_j \varepsilon_j^{-a} \sin(\kappa_j \delta_j) & \cos(\kappa_j \delta_j) \end{pmatrix},$$

$\kappa_j = k_0 \sqrt{\varepsilon_j - \varepsilon_a \sin^2 \theta}$, j – номер слоя, ε_j и δ_j – его диэлектрическая проницаемость и толщина, n – число слоев в покрытии; нумерация слоев осуществляется от пластины.

Расчеты выполнены для видимого спектрального диапазона ($440 \text{ нм} \leq \lambda \leq 680 \text{ нм}$). В качестве материалов слоев покрытий рассмотрены Al, ZrO_2 , SiO_2 ; материал диэлектрической пластины – поликарбонат (PC), толщина пластины $D = 2 \text{ мм}$. Константы материалов выбирались в соответствии с литературными данными [7–10]. В частности, ZrO_2 , SiO_2 , PC считались прозрачными средами, т.е. мнимые части их диэлектрических проницаемостей принимались равными нулю.

На рис. 3 представлены дисперсионные характеристики материалов и спектральная плотность солнечного света. Приведенные кривые – полиномиальная интерполяция экспериментальных данных [7–11].

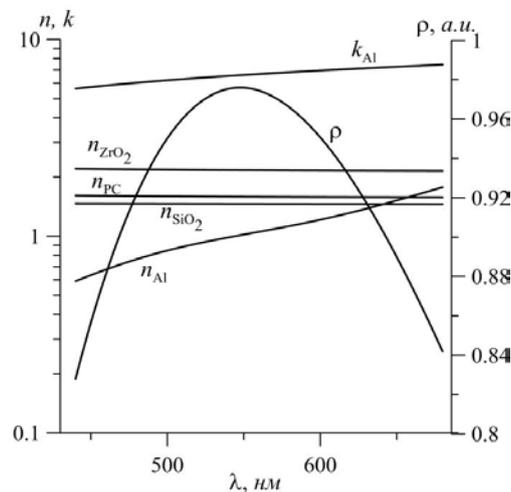


Рисунок 3 – Дисперсионные характеристики материалов и спектральная плотность солнечного света, использованные при расчетах

Таблица 1 и рис. 4 иллюстрируют решение задачи синтеза оптимизированного поглотителя солнечного света. Решение соответствует максимуму тепла Q_1 (относительных диссипативных потерь энергии), выделяемого в поглощающем одностороннем ($d_2 = 0$) интерференционном покрытии из чередующихся слоев Al ($j = 1$) и SiO_2 на PC пластине при $n = 12$. Оно получено в результате максимизации функции n переменных

$$Q_1(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = 1 - \bar{R}_1(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) - \bar{T}_1(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$$

градиентным методом [12] при $\theta = 0^\circ$ и для ступенчатой аппаратной функции: $G(\lambda - \lambda_0) \equiv 1$ в диапазоне $\lambda_0 - \Delta\lambda \leq \lambda \leq \lambda_0 + \Delta\lambda$, $G(\lambda - \lambda_0) \equiv 0$ вне данного диапазона, где $\lambda_0 = 560 \text{ нм}$, $\Delta\lambda = 120 \text{ нм}$.

Таблица 1 – Оптимальные толщины слоев (в нм) для поглощающего 12-слоеного метало-диэлектрического покрытия на РС пластине

δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}	δ_{11}	δ_{12}
21.0	89.7	6.3	107.7	8.1	105.6	4.7	104.7	4.3	115.8	3.0	66.8

В рамках полученного решения

$$\bar{R}_1 = 0.0024, \quad Q_1 = 0.9962, \quad \bar{R}_2 = 0.8104, \quad \bar{T}_1 = \bar{T}_2 = 0.0013. \quad (46)$$

Спектральные характеристики покрытия иллюстрирует рис.4.

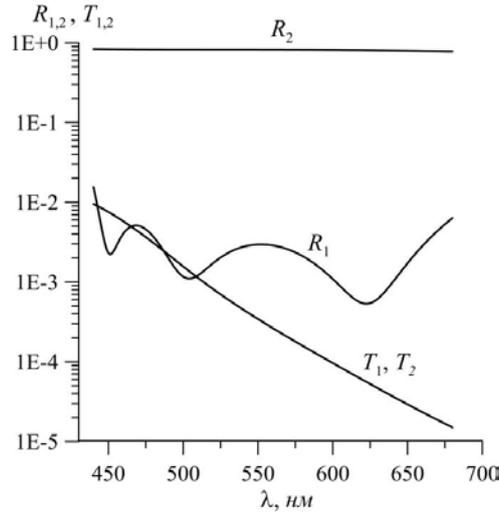


Рисунок 4 – Спектральные характеристики оптимизированного поглощающего метало-диэлектрического покрытия

Результаты (46) и рис.4 подтверждают сделанные выше выводы о том, что поглощающая слоистая среда является невзаимным оптическим элементом по отражению и взаимным элементом по пропусканию света.

В то же время прозрачная слоистая среда является взаимным оптическим элементом как по пропусканию, так и по отражению света. Эти свойства подтверждаются рассмотрением табл. 2 и рис. 5, относящихся к оптимизированным односторонним и двухсторонним антибликовым интерференционным покрытиям, составленным из четырех чередующихся слоев ZrO_2 ($j=1$) и SiO_2 на РС пластине.

Под односторонним понимается покрытие с $d_1 = \sum_{j=1}^n \delta_j$, $d_2 = 0$, под двухсторонним – зеркально-симметричное покрытие с $d_1 = d_2 = \sum_{j=1}^n \delta_j$.

Практический интерес представляет минимизация отражательной способности антибликовых покрытий во всем видимом спектральном диапазоне и в протяженном диапазоне углов падения естественного света $0 \leq \theta \leq \theta_m$ [1, 2]. На этом основании в качестве подлежащей минимизации целевой функции мы выбрали средние значения энергетических коэффициентов отражения

$$\bar{\Gamma}_{1,2} = \theta_m^{-1} (2\Delta\lambda)^{-1} \int_0^{\theta_m} d\theta \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} d\lambda R_{1,2}(\theta, \lambda).$$

При расчетах использованы $\theta_m = 60^\circ$ и указанные выше $\lambda_0, \Delta\lambda$.

Результаты минимизации функций $\bar{\Gamma}_{1,2}(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ представлены в табл. 2, где

$$\bar{\Theta}_{1,2} = \theta_m^{-1} (2\Delta\lambda)^{-1} \int_0^{\theta_m} d\theta \int_{\lambda_0 - \Delta\lambda}^{\lambda_0 + \Delta\lambda} d\lambda T_{1,2}(\theta, \lambda)$$

– усредненные энергетические коэффициенты прохождения света.

Таблица 2 – Решение задачи синтеза оптимизированных антибликовых диэлектрических покрытий на РС пластине

покрытие	$\bar{\Gamma}_{1,2}$	$\bar{\Theta}_{1,2}$	$\delta_{1,НМ}$	$\delta_{2,НМ}$	$\delta_{3,НМ}$	$\delta_{4,НМ}$
одностороннее	0.0713	0.929	17.7	17.6	107.7	94.9
двухстороннее	0.0200	0.980	20.8	15.5	100.3	95.9

Для сравнения, для РС пластины без покрытий ($d_1 = d_2 = 0$) $\bar{\Gamma}_{1,2} = 0.114$, $\bar{\Theta}_{1,2} = 0.886$. Таким образом, оптимизированные антибликовые покрытия на диэлектрической пластине существенно снижают ее отражательную способность. В случае одностороннего покрытия возможность такого снижения ограничена не скомпенсированным отражением света от обратной стороны пластины. Двухстороннее покрытие в силу соотношения взаимности (40) минимизирует отражение одновременно от обеих сторон пластины, что проявляется в более чем трехкратном снижении средней отражательной способности структуры (см. табл. 2). Более высокая эффективность двухстороннего покрытия очевидна также из рис.5. Таким образом, соотношения взаимности объясняют обнаруженные в ряде экспериментальных работ при исследовании конкретных структур [13–16] преимущества двухсторонних интерференционных покрытий.

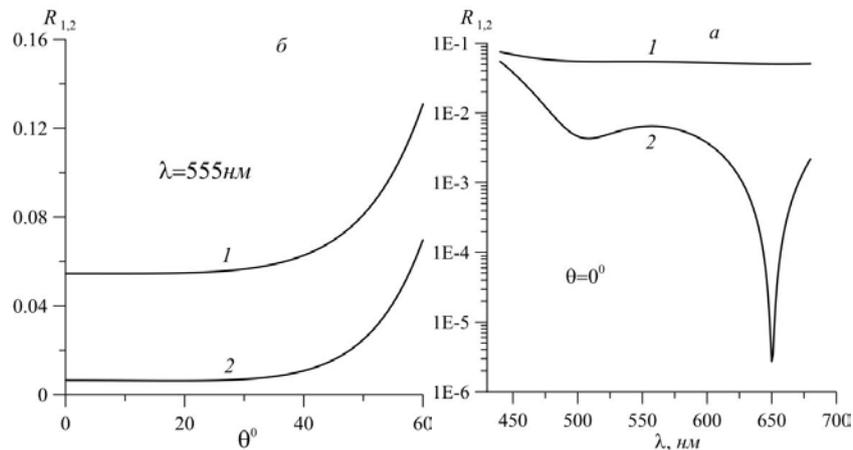


Рисунок 5 – Спектральные (а) и угловые (б) зависимости отражательных способностей оптимизированных одностороннего (кривые 1) и двухстороннего (кривые 2) антибликовых покрытий на РС пластине

Отметим, что табличные значения $\bar{\Gamma}_1 = \bar{\Gamma}_2$, $\bar{\Theta}_1 = \bar{\Theta}_2$. Имеет место и полное совпадение графиков для R_1 и R_2 на рис. 5.

Заклучение

В результате анализа волновых уравнений для волн s - и p -поляризации в слоистой среде с произвольным пространственным профилем комплексной диэлектрической проницаемости получены соотношения взаимности для коэффициентов отражения и прохождения плоских волн при освещении слоистой среды во встречных направлениях. Показано, что энергетические коэффициенты прохождения встречных волн совпадают всегда, а для энергетических коэффициентов отражения подобное совпадение имеет место только при отсутствии в среде поглощения. С позиций оптимального проектирования интерференционных покрытий на диэлектрической пластине выполнены расчеты невзаимного поглотителя солнечной энергии и взаимных антибликовых структур.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «1.15 Фотоника и электроника для инноваций».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Lemarquis, F.** Broadband antireflection coatings for visible and infrared ranges / F. Lemarquis, T. Begou, A. Moreau, J. Lumeau // CEAS Space Journal. – 2019. – Vol. 11, № 4. – P. 567–568.
2. **Garlisi, C.** Multilayer thin film structures for multifunctional glass: Self-cleaning, antireflective and energy-saving properties / C. Garlisi, E. Trepci, X. Li, R.A. Sakka, K.A. Ali, R. P. Nogueira, L. Zheng, E. Azar, G. Palmisano // Applied Energy. – 2020. – Vol. 264. – P.114697 (32 pp).
3. **Маркузе, Д.** Оптические волноводы / Д. Маркузе // Пер. с англ. – М.: Мир. – 1974. – 576 с.
4. **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке // Пер. с нем. – 4-е изд., испр. – М.: Гл. ред. физ-мат. лит. – 1971. – 576 с.
5. **Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф // Пер. с англ. – 2-е изд., испр. – М.: Гл. ред физ-мат. лит. – 1973. – 719 с.
6. **Сотский, А. Б.** Спектроскопия слоев на плоскопараллельных подложках / А. Б. Сотский, С. С. Михеев, Н. И. Стаськов, Л. И. Сотская // Оптика и спектроскопия. – 2020. – Т. 128, № 8. – С. 1133–1143.
7. **Rakic, A. D.** Algorithm for the determination of intrinsic optical constants of metal films: application to aluminum / A. D. Rakic // Applied Optics. – 1995. – Vol. 34, № 11. – P. 4755–4767.
8. **Wood, D. L.** Refractive index of cubic zirconia stabilized with yttria / D. L. Wood, K. Nassau // Applied Optics. – 1982. – Vol. 21, № 16. – P. 2978–2981.
9. **Tan, C. Z.** Determination of refractive index of silica glass for infrared wavelengths by IR spectroscopy / C. Z. Tan // Journal of Non-Crystalline Solids. – 1998. – Vol. 223, № 1–2. – P. 158–163.
10. **Zhang, X.** Complex Refractive Indices Measurements of Polymers in Infrared Bands / X. Zhang, J. Qiu, J. Zhao, X. Li, L. Liu // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. – 2020. – Vol. 252. – P. 107063 (8 pp).
11. **Liu, G.** Near-unity, full-spectrum, nanoscale solar absorbers and near-perfect blackbody emitters / G. Liu, X. Liu, J. Chen, Y. Li, L. Shi, G. Fu, Z. Liu // Solar Energy Materials and Solar Cells. – 2019. – Vol. 190. – P. 20–29.
12. **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн // Пер с англ. – 2-е изд., перераб. – М.: Гл. ред. физ-мат. лит. – 1973. – 832 с.
13. **Grenaderov, A. S.** Plasma-chemical deposition of anti-reflection and protective coating for infrared optics / A. S. Grenaderov, K. V. Oskomov, A. A. Solovyev, A. V. Selivanova, M. E. Konishchev // Russian Physics Journal. – 2020. – Vol. 62, № 11. – P. 2112–2120.
14. **Troitskii, B. B.** Optimal Optical Properties–Hardness Ratio of Antireflection Coating Produced from a Silica Sol with Hexadecyltrimethylammonium Bromide on Silicate Glass / B. B. Troitskii, A. A. Lokteva, M. A. Novikova, T. I. Lopatina, I. L. Fedyushkin // Russian Journal of Applied Chemistry. – 2020. – Vol. 93, № 2. – P. 232–237.
15. **Gu, J.** Fabrication and performances of double-sided HfO₂ anti-reflection films with ultra-high infrared transmittance / J. Gu, H. Weib, F. Renb, Q. Fanb, G. Xub, X. Chenb, S. Songa, S. Doub, J. Zhaoa, Y. Lib // Journal of Alloys and Compounds. – 2021. – Vol. 858. – P. 158337 (7 pp).
16. **Hülya, K. M.** Analysis of the Anti-Reflection Coated Eyeglass Used in Turkey / K. M. Hülya, E. Naci // International Journal of Eastern Anatolia Science Engineering and Design. – 2021. – Vol. 3, № 1. – P. 157–166.

Поступила в редакцию 25.11.2022 г.

Контакты: ab_sotsky@mail.ru (Сотский Александр Борисович),

kenni_mark@bk.ru (Чудаков Евгений Александрович).

Sotsky A. B., Chudakov E. A. RECIPROcity RELATIONS FOR LAYERED MEDIA

As a result of the analysis of wave equations for the waves of s- and p-polarization in a layered medium with an arbitrary spatial profile of the complex dielectric permittivity, reciprocity relations for the coefficients of reflection and passage of plane waves when the layered medium is illuminated in opposite directions are obtained. It is shown that the energy coefficients of the passage of oncoming waves always coincide, and for the energy coefficients of reflection, such a coincidence occurs only in the absence of absorption in the medium. The reciprocity relations are illustrated by examples of the calculation of optimized metal-dielectric and dielectric interference coatings on a dielectric plate that perform the functions of a non-reciprocal solar energy absorber and mutual anti-reflective structures.

Keywords: interference coating, reciprocity ratios, anti-glare coating, solar energy absorber.

УДК 539.375

ВЫПОЛНЕНИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОЛОСОЙ СДВИГА В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СТЕКЛЕ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ НЕГОМОГЕННОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

О. М. Остриков

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет транспорта

Введено понятие элементарного носителя поля упругих напряжений для полосы сдвига в материале, не имеющем в своей атомной структуре дальнего порядка. Предложено мощность данного источника напряжений задавать вектором смещения \vec{d} . Проведена проверка выполнения условия равновесия аморфного твердого тела с криволинейной полосой сдвига в случае плоскодеформированного состояния. Принималось непрерывное распределение в полосе сдвига элементарных носителей поля упругих напряжений. Установлено выполнение условия равновесия твердого тела, не имеющего в структуре дальнего порядка, в случае плоского деформированного состояния.

Ключевые слова: плоскодеформированное состояние, негомогенная пластическая деформация, поля напряжений, условие равновесия, металлическое стекло, аморфный материал.

Введение

Металлические стекла, не имеющие дальнего порядка в своей структуре, при их деформировании подвержены, как гомогенной, так и негомогенной пластической деформации [1, 2]. Как известно [1], гомогенная пластическая деформация равномерно распределена по всему объему деформируемого твердого тела, в то время как негомогенная пластическая деформация является локализованной в некоторых областях, и в металлических стеклах эти области, как правило, имеют вид тонких полос, названных полосами сдвига в аморфных материалах [1, 2]. Очевидно, что с точки зрения атомной структуры, полосы сдвига в аморфных материалах отличаются от полос сдвига в кристаллах [3, 4]. Это отличие необходимо учитывать при разработке математических моделей негомогенной пластической деформации металлических стекол.

Изучение закономерностей негомогенной пластической деформации металлических стекол является актуальным, так как она напрямую связана с зарождением и развитием трещин, а, следовательно, от нее зависят такие важные характеристики аморфного материала, как вязкость, пластичность и преждевременное хрупкое разрушение [1, 2]. Актуальным также представляется основанное на методах механики деформируемого твердого тела математическое моделирование напряженно-деформированного состояния металлических стекол, связанное с полосами сдвига – основными каналами негомогенной пластической деформации конденсированных систем, не имеющих дальнего порядка [1–7]. Это открывает возможность для ведения инженерных технологических расчетов для прогнозирования ресурса технических систем, использующих в своей основе металлические стекла.

Целью данной работы стало основанное на методах механики деформируемого твердого тела в рамках гипотезы сплошности среды выяснение наличия выполнения условия равновесия металлического стекла, содержащего полосу сдвига, в случае плоскодеформированного состояния.

Постановка задачи

Научная идея, состоящая в выяснении наличия выполнения условия равновесия твердого тела с криволинейной полосой сдвига в металлическом стекле в случае плоскодеформированного состояния при неомогенной пластической деформации, является оригинальной. Для реализации этой идеи необходимо введение понятия элементарного носителя поля упругих напряжений, обусловленного наличием в металлическом стекле полосы сдвига. Это связано с необходимостью учета в математических расчетах отсутствия в аморфном материале дальнего порядка.

В теории пластической деформации металлических стекол широко используется дислокационный подход [1–7]. При этом понятие дислокации, как линейного дефекта, для аморфных материалов трудно определяется из-за отсутствия в таких материалах дальнего порядка [8–14]. С другой стороны, дислокационная теория изначально разрабатывалась для сплошной среды [15], к модели которой больше подходит аморфный, чем кристаллический материал. Поэтому достижения теории дислокаций целесообразно применять и к новому классу материалов, к которым относятся металлические стекла, что и сделано, в частности, в ряде работ [1–8].

По аналогии с теорией дислокаций [16, 17] введем элементарное приращение δ вектора упругого смещения \vec{u} обусловленное линейным дефектом в сплошной среде, помещенным вовнутрь контура, радиус которого R примем не превышающим двух-трех межатомных расстояний a (т.е. $2a < R < 3a$), где в аморфном материале еще сохраняется, так называемый ближний порядок [7]. При этом также невелика математическая неопределенность, наблюдаемая в ядре дефекта. Тогда можно записать:

$$\oint du_i = \int \frac{du_i}{dl} dl = -o_i. \quad (1)$$

Здесь dl – элемент контура, охватывающего рассматриваемый дефект.

Так как решается плоская задача, то протяженность дефекта определяющей роли не играет. В этом плане необходимо лишь ограничение на то, чтобы в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой проведен контур радиусом R , дефект не создавал градиента напряжений. Тогда, согласно [16], такой дефект создает напряжения, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(пл)}(x, y) &= -\frac{\mu o}{2\pi(1-\nu)} \frac{y[3x^2 + y^2]}{[x^2 + y^2]}, \\ \sigma_{yy}^{(пл)}(x, y) &= \frac{\mu o}{2\pi(1-\nu)} \frac{y[x^2 - y^2]}{[x^2 + y^2]}, \\ \sigma_{xy}^{(пл)}(x, y) &= \frac{\mu o}{2\pi(1-\nu)} \frac{x[x^2 - y^2]}{[x^2 + y^2]}, \end{aligned} \quad (2)$$

где μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

Будем рассматривать данный дефект, как элементарный носитель поля упругих напряжений, полосы сдвига в аморфном материале [8]. Распределим дефекты такого типа вдоль полосы сдвига с линейной плотностью $\rho(\xi)$. В общем случае примем полосу сдвига криволинейной формы, описываемой функцией $f(\xi)$. Пусть полоса сдвига имеет форму плоской кривой линии. Тогда по аналогии с [18] можно записать

$$\sigma_{ij}(x, y) = \int_0^L \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \rho(\xi) \sigma_{ij}^{(0)}(x, y, \xi) d\xi, \quad (3)$$

где L – длина полосы сдвига; ξ – параметр интегрирования; функция $\sigma_{ij}^{(0)}(x, y, \xi)$ с учетом (2), для полосы сдвига, находящейся вдали от поверхности, описывается формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(0)}(x, y, \xi) &= -\frac{\mu\sigma}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-f(\xi)) [3(x-\xi)^2 + (y-f(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y-f(\xi))^2]^2}, \\ \sigma_{yy}^{(0)}(x, y, \xi) &= \frac{\mu\sigma}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-f(\xi)) [(x-\xi)^2 - (y-f(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y-f(\xi))^2]^2}, \\ \sigma_{xy}^{(0)}(x, y, \xi) &= \frac{\mu\sigma}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-\xi) [(x-\xi)^2 - (y-f(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y-f(\xi))^2]^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть полоса сдвига в аморфном материале является остаточной и сохраняет свои размеры и форму после снятия нагрузки. Тогда для плоского деформированного состояния аморфного твердого тела при отсутствии объемных сил справедливы условия [16, 19]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Проверка выполнения условия равновесия

Не трудно показать, что из (5), после подстановки (3), (4), получим

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \rho(\xi) \sigma_{xx}^{(0)}(x, y, \xi) d\xi + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^L \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \rho(\xi) \sigma_{xy}^{(0)}(x, y, \xi) d\xi = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^L \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \rho(\xi) \sigma_{xy}^{(0)}(x, y, \xi) d\xi + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^L \sqrt{1 + (f'(\xi))^2} \rho(\xi) \sigma_{yy}^{(0)}(x, y, \xi) d\xi = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Отсюда, согласно [20], получим

$$\begin{cases} \int_0^L \sqrt{1+(f'(\xi))^2} \rho(\xi) \frac{\partial \sigma_{xx}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial x} d\xi + \int_0^L \sqrt{1+(f'(\xi))^2} \rho(\xi) \frac{\partial \sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial y} d\xi = 0 \\ \int_0^L \sqrt{1+(f'(\xi))^2} \rho(\xi) \frac{\partial \sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial x} d\xi + \int_0^L \sqrt{1+(f'(\xi))^2} \rho(\xi) \frac{\partial \sigma_{yy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial y} d\xi = 0 \end{cases} \quad (7)$$

После преобразований (7) получим:

$$\begin{cases} \int_0^L \sqrt{1+(f'(\xi))^2} \rho(\xi) \left[\frac{\partial \sigma_{xx}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial y} \right] d\xi = 0 \\ \int_0^L \sqrt{1+(f'(\xi))^2} \rho(\xi) \left[\frac{\partial \sigma_{xy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(0)}(x,y,\xi)}{\partial y} \right] d\xi = 0 \end{cases}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(0)}}{\partial x} &= -\frac{\mu \sigma}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{3(x-\xi)(y-f(\xi))}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(x-\xi)(y-f(\xi))[3(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^3} \right], \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^{(0)}}{\partial x} &= \frac{\mu \sigma}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{3(x-\xi)^2-(y-f(\xi))^2}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4(x-\xi)^2[(x-\xi)^2-(y-f(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^3} \right], \\ \frac{\partial \sigma_{xy}^{(0)}}{\partial y} &= -\frac{\mu \sigma}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-\xi)(y-f(\xi))}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(x-\xi)(y-f(\xi))[(x-\xi)^2-(y-f(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^3} \right], \\ \frac{\partial \sigma_{yy}^{(0)}}{\partial y} &= \frac{\mu \sigma}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-\xi)^2-3(y-f(\xi))^2}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4(y-f(\xi))^2[(x-\xi)^2-(y-f(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2+(y-f(\xi))^2]^3} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда не трудно показать, что в (8) выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{xx}^{(0)}(x, y, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(0)}(x, y, \xi)}{\partial y} = \\ & = \frac{4\mu\sigma}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-\xi)(y-f(\xi))}{[(x-\xi)^2 + (y-f(\xi))^2]^2} - \frac{(x-\xi)(y-f(\xi))}{[(x-\xi)^2 + (y-f(\xi))^2]^2} \right] = 0, \\ & \frac{\partial \sigma_{xy}^{(0)}(x, y, \xi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(0)}(x, y, \xi)}{\partial y} = \\ & = \frac{2\mu\sigma}{\pi(1-\nu)} \left[\frac{(x-\xi)^2 - (y-f(\xi))^2}{[(x-\xi)^2 + (y-f(\xi))^2]^2} - \frac{(x-\xi)^2 - (y-f(\xi))^2}{[(x-\xi)^2 + (y-f(\xi))^2]^2} \right] = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Подстановка (16) в (8) дает два тождества типа $0 + 0 \equiv 0$, которые означают, что деформированное твердое тело, не имеющее в своей атомной структуре дальнего порядка, с остаточной полосой сдвига находится в равновесии в случае плоскодеформированного состояния. Это также указывает на правомерность введения понятия элементарного носителя мощностью $\vec{\sigma}$ упругих полей напряжений в случае негомогенной пластической деформации металлических стекол.

Заключение

Таким образом, показано выполнение условия равновесия деформированного аморфного твердого тела с остаточной полосой сдвига в случае плоскодеформированного состояния при негомогенной пластической деформации. Введено понятие элементарного носителя поля упругих напряжений при негомогенной пластической деформации металлических стекол. Предложено мощность данного источника обозначать вектором $\vec{\sigma}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Глезер, А. М.* Структура и механические свойства аморфных сплавов / А. М. Глезер, Б. В. Молотилов. – М.: Металлургия, 1992. – 208 с.
2. *Верещагин, М. Н.* Негомогенная пластическая деформация аморфных сплавов на основе железа / М. Н. Верещагин, В. Г. Шепелевич, О. М. Остриков. – Гомель: Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2004. – 134 с.
3. *Остриков, О. М.* Дислокационная гармоническая модель полосы сдвига в аморфном материале / О. М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2007, № 4. – С. 41–48.
4. *Верещагин, М. Н.* Дислокационная модель полисинтетических полос сдвига в аморфных материалах / М. Н. Верещагин, О. М. Остриков // Прикладная механика и техническая физика. – 2003. – Т. 44, №3. – С. 164–168.
5. *Верещагин, М. Н.* Моделирование напряженного состояния у полосы сдвига в аморфном материале / М. Н. Верещагин, О. М. Остриков, Д. Б. Зюков // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 3. – С. 113–115.
6. *Рюмцев, А. А.* Методика расчета полей напряжений в металлических стеклах у полос сдвига в форме изогнутых лучей / А. А. Рюмцев, О. М. Остриков // Вестник Могилевского государственного университета имени А. А. Кулешова. Серия В. – 2015, № 2(46). – С. 63–72.
7. *Алехин, В. П.* Структура и физические закономерности деформации аморфных сплавов / В. П. Алехин, В. А. Хоник. – М.: Металлургия, 1992. – 248 с.

8. **Остриков, О. М.** Модель дислокации в аморфном материале / О.М. Остриков // Современные проблемы машиноведения : Тез. докл. Международной конференции. – Гомель : ГГТУ им. П.О. Сухого, 2006. – С. 58–59.
9. **Лузгин, Д. В.** Свойства объемных металлических стекол / Д. В. Лузгин, В. И. Полькин // Металловедение и термическая обработка. – 2016. – № 6. – С. 71–85.
10. **Лузгин, Д. В.** Объемные металлические стекла: Получение, структура, структурные изменения при нагреве / Д. В. Лузгин, В. И. Полькин // Известия вузов. Цветная металлургия. – 2015. – № 6. – С. 43–52.
11. **Aljerf, M.** Shaping of metallic glasses by stress-annealing without thermal embrittlement / M. Aljerf, K. Georarakisa, A.R. Yavari // Acta Mater. – 2011. – Vol. 59. – P. 3817–3824.
12. **Louzguine-Luzgin, D. V.** Evidence of the existence of two deformation stages in bulk metallic glasses. / D. V. Louzguine-Luzgin, V. Yu. Zadorozhnyy, N. Chen, S. V. Ketov // J. Non-Cryst. Solids. – 2014. – Vol. 396–397. – P. 20–24.
13. **Zhang, Q. S.** Stable flowing of localized shear bands in soft bulk metallic glasses / Q. S. Zhang, W. Zhang, G. Q. Xie, D. V. Louzguine-Luzgin, A. Inoue // Acta Mater. – 2010. – Vol. 58. – P. 904–909.
14. Phase selection and nanocrystallization in Cu-free soft magnetic FeSiNbB amorphous alloy upon rapid annealing / L. Morsdorf, K. G. Pradeep, G. Herzer at all // Journal of Applied Physics. – 2016. – Vol. 119. – P. 124903-1.
15. **Работнов, Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1988. – 712 с.
16. **Хирт, Дж.** Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М. : Атомиздат, 1972. – 600 с.
17. **Косевич, А. М.** Дислокации в теории упругости / А. М. Косевич. – Киев : Наук. Думка, 1978. – 220 с.
18. **Остриков, О. М.** Методика прогнозирования распределения полей напряжений в реальных кристаллах с остаточными некогерентными двойниками. Монография / О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П.О. Сухого, 2019. – 278 с.
19. **Василевич, Ю. В.** Выполнение условия равновесия твердого тела с нетонким остаточным клиновидным двойником в случае плоскодеформированного состояния / Ю. В. Василевич, О. М. Остриков // Машиностроение. – Мн. : БНТУ, 2021. – Вып. 34. – С. 128–134.
20. **Корн, Г.** Справочник по математике. Для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука. – 1973. – 832 с.

Поступила в редакцию 27.04.2022 г.

Контакты: omostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Ostrikov O. M. FULFILLMENT OF THE EQUILIBRIUM CONDITION FOR A SOLID BODY WITH A CURVILINEAR SHEAR BAND IN METALLIC GLASS IN THE CASE OF A PLANE DEFORMED STATE WITH NONHOMOGENEOUS PLASTIC DEFORMATION

The concept of an elementary carrier of the elastic stress field for a shear band in a material that does not have a long-range order in its atomic structure is introduced. It is proposed to set the power of this voltage source by the displacement vector \vec{d} . The fulfilment of the equilibrium condition for an amorphous solid with a curvilinear shear band in the case of a plane-deformed state is verified. A continuous distribution in the shear band of elementary carriers of the elastic stress field was assumed. The fulfilment of the equilibrium condition for a solid body that does not have a long-range order in the structure in the case of a plane deformed state is established.

Keywords: plane strain state, inhomogeneous plastic deformation, stress fields, equilibrium condition, metallic glass, amorphous material.

УДК 535.2:621.372

ФУРЬЕ–АНАЛИЗ МОД ПРЯМОУГОЛЬНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Д. В. Понкратов

магистрант

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Г. К. Камилджанова

студентка

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. Б. Сотский

доктор физико-математических наук, профессор

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Сформулирован строгий метод расчета мод открытого диэлектрического волновода, основанный на представлении продольных компонент полей мод на границе волновода рядами Фурье по угловой координате. Амплитуды гармоник Фурье находятся из однородной алгебраической системы. Ее матричные элементы определяются на основании теоремы Грина и представляются интегралами от регулярных функций. Применимость метода ограничивается только требованием, чтобы контур границы волновода описывался однозначной функцией угловой координаты. Метод использован для расчета мод прямоугольных диэлектрических волноводов. Получены оценки его внутренней сходимости. Выполнено сопоставление найденных дисперсионных зависимостей мод с известными из литературы теоретическими и экспериментальными данными.

Ключевые слова: прямоугольный диэлектрический волновод, теорема Грина, ряды Фурье, сходимость вычислительной схемы.

Введение

Диэлектрические волноводы – это структуры, которые используются для ограничения и направления света в устройствах волоконной и интегральной оптики. Они изготавливаются методами, распыления, диффузии, ионной имплантации или эпитаксиального роста [1]. Проектирование волноводов основывается на анализе направляемых ими мод. Моду можно определить как пространственное распределение оптического поля, которое сохраняется в процессе ее распространения вдоль волновода. Мода – это собственная функция однородных уравнений Максвелла для волноводной структуры [2].

В настоящее время открытые диэлектрические волноводы широко используются в оптических системах связи и информации [3]. Моды диэлектрических волноводов могут быть строго рассчитаны только в простейших случаях плоских структур и структур с круговой симметрией [4–6]. Это стимулирует развитие численных методов решения волноводных задач.

Основной интерес представляют методы, позволяющие получить последовательно уточненное решение векторной волноводной задачи. В настоящее время существует три группы таких методов [5; 7–14].

К первой группе относятся вариационные методы [5; 8; 11]. Строго говоря, они применимы только к расчету направляемых мод волноводов, так как вариаци-

онный принцип требует квадратично интегрируемых модовых полей в плоскости, ортогональной оси волновода. Вариационные методы подразделяются на приближенные аналитические, имеющие замкнутую формулировку [5], и более точные численные методы [8; 11]. В численных методах для преодоления вышеуказанного ограничения используются идеально подобранные слои (ИПС), которые имитируют открытое пространство, полностью поглощая падающее на них излучение [7; 8]. Однако в случае трехмерных диэлектрических волноводов такой подход вносит неконтролируемые погрешности, так как только плоские ИПС могут полностью поглощать излучение. Тем не менее, вариант вариационного метода, известный как метод конечных элементов, широко используется для оценки характеристик мод диэлектрических волноводов [8; 11]. Этот метод сводится к решению методом редукции бесконечных однородных алгебраических систем относительно значений компонент электромагнитного поля в интерполяционных узлах, сетка которых покрывает поперечное сечение волновода. Поскольку метод содержит такие неопределенности, как погрешности редукции и использования ИПС, его границы применимости не всегда ясны.

Ко второй группе методов относятся конечно-разностные схемы [7; 10]. Они предполагают замену дифференциальных операторов в системе уравнений Максвелла конечными разностями. Граничные условия в схемах формулируются с использованием ИПС, моделирующих открытое пространство. Как и выше, волноводная задача сводится к решению бесконечной однородной алгебраической системы относительно значений компонент модового поля в интерполяционных узлах. В результате конечно-разностные схемы имеют качественно те же ограничения, что и метод конечных элементов.

Общей особенностью методов конечных элементов и конечных разностей является использование ограниченного в пространстве расчетного окна. Это затрудняет исследование мод открытых волноводов, находящихся в окрестности критических и в закритических условиях. Последние условия имеют место при наличии вытекания излучения из волноводного канала и характерны для микроструктурных оптических волокон.

Устранить указанное ограничение позволяют методы третьей группы. В нее входят метод контурных интегральных уравнений [12–15] и метод функций Грина [5]. К последнему методу можно отнести метод мультиполей [16; 17] и метод, использующий ряды Рэлея для компонент электромагнитного поля внутри и вне волноводного канала [18]. В данных подходах искомыми являются компоненты электромагнитного поля моды на границах раздела сред, либо в замкнутых областях пространства, а корректная асимптотика поля при удалении от волновода обеспечивается двумерной функцией Грина. Но при численном решении контурных интегральных уравнений возникают трудности, связанные с сингулярностью функции Грина [12 – 18]. Преодолеть их позволяет метод функций Грина [5]. Этот метод основан на решении системы уравнений связанных волн относительно амплитуд фурье-разложений компонент электромагнитного поля моды по угловой координате в области волновода. Но он эффективен лишь для открытых волноводов с циркулярной симметрией [5]. При нарушении такой симметрии названные разложения не являются абсолютно сходящимися. Это порождает асимптотический характер получаемого решения, что проявляется в неустойчивости результатов для модовых характеристик относительно порядка редукции рядов Фурье. Методы

третьей группы также сводятся к решению бесконечных алгебраических систем, решаемых методом редукции.

В настоящей работе рассматривается более эффективный аналог метода функций Грина. В нем продольные компоненты электромагнитного поля моды на периметре поперечного сечения волновода представляются полиномами Фурье порядка m по угловой переменной полярной системы координат. С применением теоремы Грина во внутренней и внешней областях волновода формулируется однородная система алгебраических уравнений относительно амплитуд гармоник Фурье. Расчет модовых характеристик волновода сводится к отысканию нулей определителя системы. Область применимости метода ограничивается только требованием, чтобы контур поперечного сечения волновода был однозначной функцией угловой координаты. Метод использован для анализа мод такой классической волноведущей структуры как прямоугольный диэлектрический волновод (ПДВ). ПДВ является простейшим открытым трехмерным волноводом, ограничивающим энергию направляемых им мод в обоих поперечных направлениях. Однако задача на собственные значения для однородных уравнений Максвелла, описывающих моды ПДВ, не имеет точного решения. По этой причине исследованию данного волновода посвящено значительное число экспериментальных и теоретических работ. Их основной смысл – тестирование эффективности вновь предлагаемых методов расчета трехмерных диэлектрических волноводов путем сравнения результатов различных подходов для модовых характеристик ПДВ. В работе исследована внутренняя сходимость развитого метода относительно m и выполнено сопоставление рассчитанных на его основе дисперсионных зависимостей для мод ПДВ с литературными теоретическими и экспериментальными данными.

Фурье-анализ мод

Поперечное сечение ПДВ представлено на рисунке 1. Внутренняя и внешняя области волновода имеют относительные диэлектрические проницаемости ϵ_w и ϵ_s , соответственно. Магнитная проницаемость этих областей совпадает с магнитной проницаемостью вакуума μ_0 . Мода с временным и z -фактором

$$\exp(i\omega t - ik_0\beta z) \quad (1)$$

распространяется вдоль оси волновода Oz . В (1) $k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda$ – волновое число вакуума, β – безразмерная постоянная распространения моды.

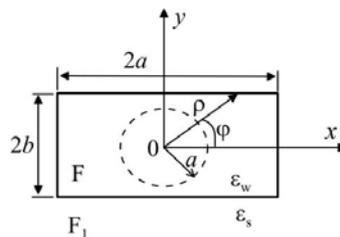


Рисунок 1 – Поперечное сечение ПДВ

Электромагнитное поле любой моды волновода подчиняется однородной системе уравнений Максвелла [6]

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon(x, y)\epsilon_0\mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad (3)$$

где $\varepsilon(x, y)$ есть кусочно-непрерывная функция x и y , равная ε_w , либо ε_s внутри, либо вне волновода, соответственно, ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума.

С учетом (1), векторная система (2), (3) эквивалентна двум уравнениям второго порядка относительно E_z и H_z :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2 \kappa_s^2 E_z = f_1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_0^2 \kappa_s^2 H_z = f_2, \quad (5)$$

где $\kappa_s^2 = \varepsilon_s - \beta^2$, этого

$$\begin{aligned} f_1 = & -\frac{\chi^2}{\varepsilon\varepsilon_0} \left\{ k_0\beta \left[\frac{\partial\chi^{-2}}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial\chi^{-2}}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial(\varepsilon\varepsilon_0\chi^{-2})}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon\varepsilon_0\chi^{-2})}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right\} - k_0^2(\varepsilon - \varepsilon_s)E_z, \\ f_2 = & -\frac{k_0\beta}{\omega\mu_0} \left[\frac{\partial\chi^{-2}}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial\chi^{-2}}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right] - \\ & - \frac{\partial\chi^{-2}}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial\chi^{-2}}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial y} - k_0^2(\varepsilon - \varepsilon_s)H_z, \end{aligned}$$

$\chi = \sqrt{\varepsilon(x, y) - \beta^2}$. Таким образом, волноводная задача сводится к решению однородной системы (4), (5) относительно продольных компонент электромагнитного поля моды. Последующий расчет остальных компонент этого поля моды может быть выполнен прямым дифференцированием функций $E_z(x, y)$ и $H_z(x, y)$.

Применим к (4), (5) теорему Грина [6], рассматривая поочередно однородные области F и F₁ (рис. 1).

В области F

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left[\left(G \frac{\partial(H_z, \bar{E}_z)}{\partial n'} - (H_z, \bar{E}_z) \frac{\partial G}{\partial n'} \right)_{r'=\rho(\varphi)-0} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi'} \right)^2 + \rho^2(\varphi')} \right] d\varphi' = \\ & = \begin{cases} 0 & \text{при } r > \rho(\varphi) \\ H_z(r, \varphi), \bar{E}_z(r, \varphi) & \text{при } r < \rho(\varphi), \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

где $\bar{E}_z = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} E_z$, $r = \rho(\varphi)$ – уравнение границы волновода в полярных координатах, $G = 0.25iH_0^{(2)}(\kappa_w k_0 R)$ – двумерная функция Грина, $H_0^{(2)}(\dots)$ – функция Ханкеля, $\kappa_w = \sqrt{\varepsilon_w - \beta^2}$,

$$R = \sqrt{(r \cos \varphi - r' \cos \varphi')^2 + (r \sin \varphi - r' \sin \varphi')^2},$$

через $\partial / \partial n'$ обозначена производная по направлению внешней нормали к контуру интегрирования. Вычисление этой производной от функции Грина эквивалентно действию на нее дифференциального оператора

$$\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi'}\right)^2 + \rho^2(\varphi')}} \left(\rho(\varphi') \frac{\partial}{\partial r'} - \frac{1}{\rho(\varphi')} \frac{d\rho}{d\varphi'} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \right). \quad (7)$$

В области F_1

$$\int_0^{2\pi} \left[G_1 \frac{\partial(H_z, \bar{E}_z)}{\partial n'} - (H_z, \bar{E}_z) \frac{\partial G_1}{\partial n'} \right]_{r'=\rho(\varphi')+0} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi'}\right)^2 + \rho^2(\varphi')} d\varphi' = \begin{cases} 0 & \text{при } r < \rho(\varphi) \\ -H_z(r, \varphi), -\bar{E}_z(r, \varphi) & \text{при } r > \rho(\varphi), \end{cases} \quad (8)$$

где $G_1 = 0.25iH_0^{(2)}(\kappa_s k_0 R)$, $\kappa_s = \sqrt{\epsilon_s - \beta^2}$, для рассматриваемых далее собственных мод волновода выбирается ветвь квадратного корня $\text{Re} \kappa_s > 0$.

Согласно теореме сложения цилиндрических функций [19],

$$H_0^{(2)}(\kappa_{w,s} k_0 R) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \exp[\nu(\varphi - \varphi')] \begin{cases} H_\nu^{(2)}(k_0 \kappa_{w,s} r') J_\nu(k_0 \kappa_{w,s} r) & \text{при } r < r' \\ H_\nu^{(2)}(k_0 \kappa_{w,s} r) J_\nu(k_0 \kappa_{w,s} r') & \text{при } r > r', \end{cases} \quad (9)$$

где $J_\nu(\dots)$ – функция Бесселя.

На периметре поперечного сечения волновода могут быть заданы полиномы Фурье

$$(\bar{E}_z, H_z)_{r'=\rho(\varphi')} = \sum_{\nu=-m}^m e_\nu, h_\nu \exp(i\nu\varphi'), \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial(\bar{E}_z, H_z)}{\partial n'} \right|_{r'=\rho(\varphi')-0} = \sum_{\nu=-m}^m e'_\nu, h'_\nu \exp(i\nu\varphi'), \quad (11)$$

где m – порядок полиномов, эквивалентный порядку редукции рядов Фурье, $e_\nu, h_\nu, e'_\nu, h'_\nu$ – неизвестные коэффициенты.

Подстановка (7), (9)–(11) в (8), где $r > \rho(\varphi)$ приводит при учете линейной независимости цилиндрических функций $\exp(i\nu\varphi) H_\nu^{(2)}(\kappa_s k_0 r)$ с разными ν к связи коэффициентов разложений (10) и (11):

$$(e'_\nu, h'_\nu) = \sum_{\mu=-m}^m Z_{\nu\mu} (e_\mu, h_\mu), \quad (12)$$

где

$$Z_{\nu\mu} = \sum_{\sigma=-m}^m M_{\nu\sigma}^{-1} N_{\sigma\mu}, \quad (13)$$

$$N_{\mu\nu} = \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} [J'_\mu(k_0\kappa_w\rho) + i\mu \frac{\rho'}{\rho} J_\mu(k_0\kappa_w\rho)] \exp[i(\nu - \mu)\varphi'] d\varphi', \quad (14)$$

$J'_\mu(z) = dJ_\mu(z) / dz$, $\rho'(\varphi') = d\rho(\varphi') / d\varphi'$, \mathbf{M}^{-1} – матрица, обратная матрице \mathbf{M} с элементами

$$M_{\mu\nu} = \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} J_\mu(k_0\kappa_w\rho) \exp[i(\nu - \mu)\varphi'] \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi', \quad (15)$$

Из условий непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного поля на периметре волновода следует, что

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial n'} \right)_{r'=p+0} = \frac{\kappa_w^2}{\kappa_s^2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial n'} \right)_{r'=p-0} + \frac{\beta}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} \left(1 - \frac{\kappa_w^2}{\kappa_s^2} \right) \left(\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \varphi'} \right)_{r'=p}, \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial n'} \right)_{r'=p+0} = \frac{\kappa_w^2 \varepsilon_s}{\kappa_s^2 \varepsilon_w} \left(\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial n'} \right)_{r'=p-0} - \frac{\beta}{\varepsilon_s \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} \left(1 - \frac{\kappa_w^2}{\kappa_s^2} \right) \left(\frac{\partial H_z}{\partial \varphi'} \right)_{r'=p}, \quad (17)$$

Подстановка (7), (10) – (12), (16), (17) в (8), где $r < a$, a – радиус некоторой окружности, целиком расположенной в области волновода (рис.1) приводит при учете линейной независимости цилиндрических функций $\exp(i\nu\varphi)J_\nu(\kappa_w k_0 r)$ относящихся к различным ν , к однородной алгебраической системе размерности $n \times n$ ($n = 4m + 2$) относительно коэффициентов разложений (10):

$$\sum_{\nu=-m}^m (HH_{\mu\nu} h_\nu + HE_{\mu\nu} e_\nu) = 0, \quad (17)$$

$$\sum_{\nu=-m}^m (EH_{\mu\nu} h_\nu + EE_{\mu\nu} e_\nu) = 0, \quad (18)$$

где

$$HH_{\mu\nu} = T1_{\mu\nu} - \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2} \sum_{\sigma=-m}^m T2_{\mu\sigma} Z_{\sigma\nu},$$

$$HE_{\mu\nu} = -i\nu\beta \left(1 - \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2} \right) T3_{\mu\nu},$$

$$EH_{\mu\nu} = \frac{i\nu\beta}{\varepsilon_s} \left(1 - \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2} \right) T3_{\mu\nu},$$

$$EE_{\mu\nu} = T1_{\mu\nu} - \frac{\kappa_s^2 \varepsilon_w}{\kappa_w^2 \varepsilon_s} \sum_{\sigma=-m}^m T2_{\mu\sigma} Z_{\sigma\nu},$$

$$T1_{\mu\nu} = \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} [k_0 \kappa_s \rho H_\mu^{(2)'}(k_0 \kappa_s \rho) + i\mu \frac{\rho'}{\rho} H_\mu^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho)] \exp[i(\nu - \mu)\varphi'] d\varphi', \quad (19)$$

$$T2_{\mu\nu} = \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} H_\mu^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho) \exp[i(\nu - \mu)\varphi'] \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi', \quad (20)$$

$$T\mathcal{Z}_{\mu\nu} = \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} H_{\mu}^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho) \exp[i(\nu - \mu)\varphi'] d\varphi', \quad (21)$$

$$H_{\mu}^{(2)'}(z) = dH_{\mu}^{(2)}(z) / dz.$$

Постоянная распространения моды определяется из дисперсионного уравнения

$$\det(\beta) = 0, \quad (22)$$

где $\det(\beta)$ – определитель матрицы системы (17), (18). После вычисления β продольные компоненты поля моды находятся из (6), (8) в результате решения алгебраической системы (17), (18), ранг матрицы которой равен $n - 1$. Вычисление остальных компонент поля моды осуществляется прямым дифференцированием продольных компонент [6].

Описанная расчетная схема является общей, поскольку получена без конкретизации контура поперечного сечения волновода. Ограничение для ее применения состоит только в требовании однозначного задания функции $\rho(\varphi)$. Эффективность схемы определяется тем, что матрицы (14), (15), (19)–(21) выражаются через интегралы от непрерывных функций, численный расчет которых не вызывает затруднений. Конкретизируем схему для ПДВ.

Модель ПДВ

Согласно рис. 1, для ПДВ с прямоугольным контуром поперечного сечения

$$\rho(\varphi) = \frac{a}{2 \cos \varphi}, \quad \rho'(\varphi) = \frac{a \sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} \quad \text{при } 0 < \varphi < \varphi_1, \quad (23)$$

$$\rho(\varphi) = \frac{a}{2 \sin \varphi}, \quad \rho'(\varphi) = -\frac{b \cos \varphi}{2 \sin^2 \varphi} \quad \text{при } \varphi_1 < \varphi < \pi - \varphi_1, \quad (24)$$

$$\rho(\varphi) = -\frac{a}{2 \cos \varphi}, \quad \rho'(\varphi) = -\frac{a \sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} \quad \text{при } \pi - \varphi_1 < \varphi < \pi + \varphi_1, \quad (25)$$

$$\rho(\varphi) = -\frac{b}{2 \sin \varphi}, \quad \rho'(\varphi) = \frac{b \cos \varphi}{2 \sin^2 \varphi} \quad \text{при } \pi + \varphi_1 < \varphi < 2\pi - \varphi_1, \quad (26)$$

$$\rho(\varphi) = \frac{a}{2 \cos \varphi}, \quad \rho'(\varphi) = \frac{a \sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} \quad \text{при } 2\pi - \varphi_1 < \varphi < 2\pi, \quad (27)$$

где $\varphi_1 = \arctg(1/\phi)$, $\phi = a/b$ – формат волновода. Однако, как известно [20], поперечные компоненты электромагнитного поля имеют сингулярности на диэлектрических ребрах. Это означает, что порядок сходимости рядов (10) в случае ПДВ есть $O(m^{-1})$, то есть абсолютная сходимость этих рядов исключена [19]. Для получения гарантированной трансцендентной сходимости рядов (10) необходимо сгладить ребра ПДВ. Это можно сделать, воспользовавшись моделью скругленного прямоугольника в виде суперэллипса [12]. Его уравнение в параметрической форме имеет вид [12]

$$x(s) = \phi b d(s) \cos s, \quad y(s) = b d(s) \sin s, \quad (28)$$

$$d(s) = (\cos^{2p} s + \sin^{2p} s)^{-\frac{1}{2p}}. \quad (29)$$

Для вычисления матричных элементов системы (17), (18) необходимо задать уравнение суперэллипса в полярных координатах ρ и φ . Учитывая, что $x(s) = \rho \cos \varphi$, $y(s) = \rho \sin \varphi$, из (36) находим

$$\sin s = \frac{\phi \sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \phi^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \cos s = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + \phi^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (30)$$

$$\rho(\varphi) = bd \sqrt{\sin^2 s + \phi^2 \cos^2 s}, \quad (31)$$

$$\rho'(\varphi) = \frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{[d'(\sin^2 s + \phi^2 \cos^2 s) + d(1 - \phi^2) \sin s \cos s] \phi b}{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sqrt{\sin^2 s + \phi^2 \cos^2 s}}, \quad (32)$$

$$d' = \frac{(\sin s \cos^{2p-1} s - \cos s \sin^{2p-1} s) d}{\sin^{2p} s + \cos^{2p} s}. \quad (33)$$

Предельными случаями суперэллипса (28) являются эллипс ($p=1$) и прямоугольник ($p \rightarrow \infty$). Геометрические характеристики суперэллипса иллюстрирует рисунок 2.

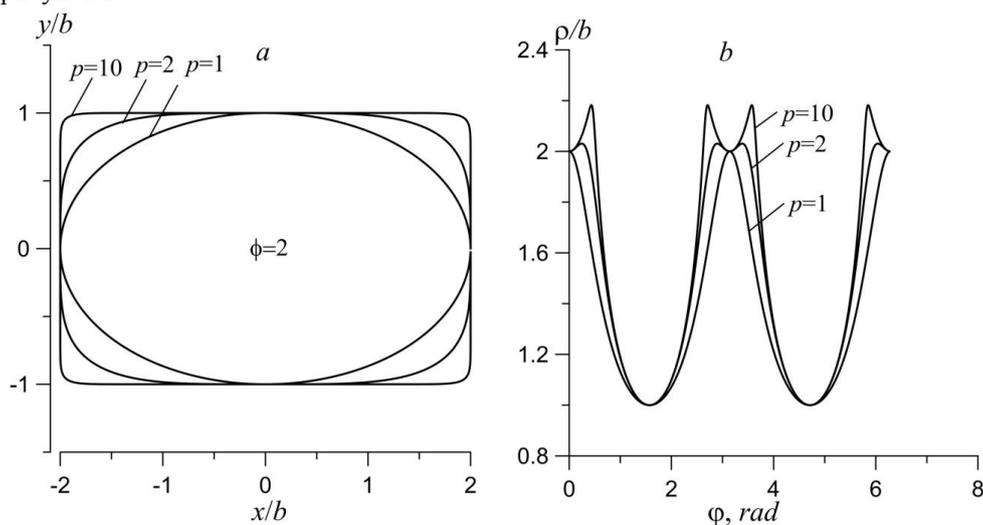


Рисунок 2 – Контур суперэллипса формата $\phi = 2$ (а) и зависимость (31) (б), относящиеся к различным значениям p

Согласно рисункам 1 и 2а, контуры суперэллипса и прямоугольника практически совпадают при $p=10$. Рост p сопровождается резким возрастанием модуля производной $d\rho/d\varphi$ в окрестности ребер прямоугольника (рис. 2б), что может негативно влиять на сходимость вычислительной схемы (см. следующий раздел).

Модовые характеристики ПДВ

В данном разделе разработанный метод применен к расчету конкретных ПДВ, исследованных ранее экспериментально [21] и теоретически [12] методом контурных интегральных уравнений.

В [21] приведены экспериментальные дисперсионные зависимости, полученные резонансным методом в мм диапазоне длин волн для ПДВ различных форматов, изготовленных из фторопласта, диэлектрическая проницаемость которого в диапазоне длин волн от 2 до 7мм практически постоянна ($\epsilon_w = 2.08$), окруженных воздухом ($\epsilon_s = 1$).

Рисунок 3 иллюстрирует внутреннюю сходимость метода функций Грина для фторопластового ПДВ формата $\phi = 2$ в рамках моделей (23) – (27) и (28) – (33). Приведенные на нем данные относятся к двум основным модам ортогональной поляризации $E_x^{(1)}$ и $E_y^{(1)}$ (координатные оси показаны на рисунке 1, обозначение мод указывает на главную компоненту их электрического поля и количество максимумов в поперечном распределении их интенсивностей [22]).

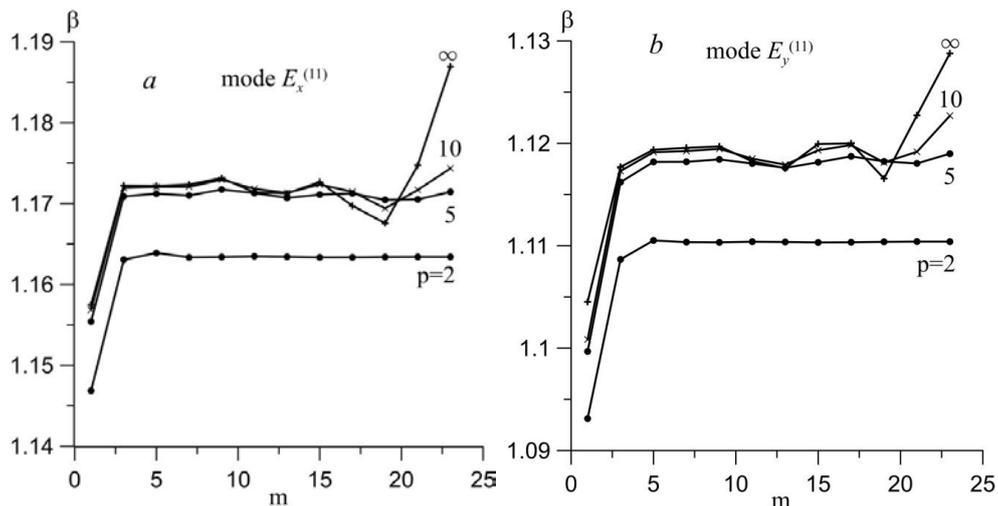


Рисунок 3 – Внутренняя сходимость метода функций Грина для фторопластового ПДВ формата $\phi = 2$ при использовании модели суперэллипса

Из рисунка 3 видно, что, как и следовало ожидать с учетом общих свойств сходимости рядов Фурье [19], при увеличении параметра p , сопровождаемым увеличением резкости углов ПДВ, сходимость результатов для постоянных распространения мод ухудшается, а при $p \rightarrow \infty$ ряды (10) приобретают асимптотический характер. Из рисунка 3 можно заключить, что оптимальным для ПДВ с несглаженными ребрами является порядок редукции $m=5$. Этот факт подтверждается рассмотрением рисунков 4, где сопоставлены дисперсионные кривые, рассчитанные развитым методом при $m=5$ и экспериментальные данные [21].

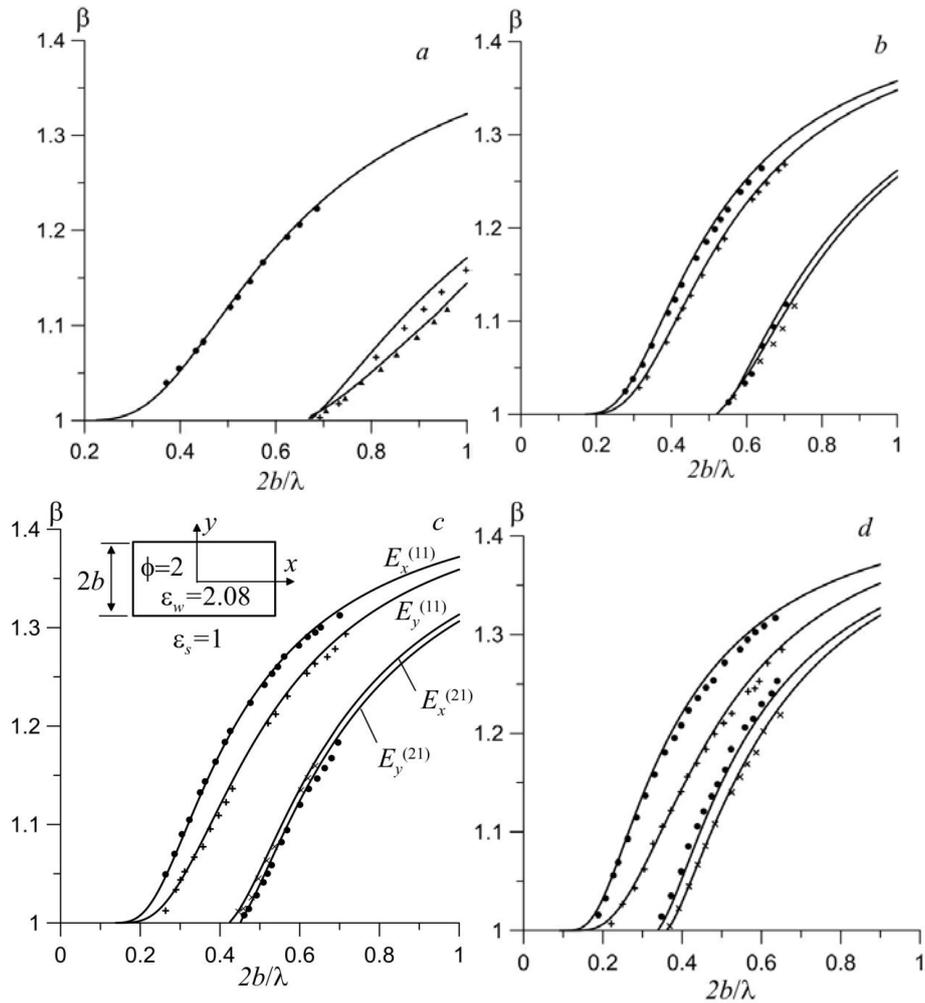


Рисунок 4 – Дисперсионные зависимости для трех мод низшего порядка фторопластового ПДВ формата $\phi=1$ (a) и для четырех мод низшего порядка фторопластового ПДВ формата $\phi=1.5$ (b), $\phi=2$ (c), $\phi=3$ (d) (сплошные кривые – развитый метод ($p=\infty$, $m=5$), дискретные точки – эксперимент [21]).

Согласно рисунку 4, развитый метод дает описание дисперсионных зависимостей основных и высших ортогонально поляризованных мод ПДВ различных форматов с точностью, приемлемой для инженерного проектирования узлов волноводных трактов.

Представляет также интерес сравнить результаты развитого метода с данными других методов расчета ПДВ. Среди таких методов наиболее адекватной физической ситуации представляется электродинамическая модель ПДВ, использованная в векторном методе контурных интегральных уравнений [12]. В [12] исследованы ПДВ с $\epsilon_w = 2.25$, $\epsilon_s = 2.1025$, при этом результаты сформулированы с использованием нормированных волноводных параметров

$$B = (\beta^2 - \epsilon_s) / (\epsilon_w - \epsilon_s), \quad V = 2b\sqrt{\epsilon_w - \epsilon_s} / \lambda.$$

Дисперсионные кривые для мод такого ПДВ приведены на рисунке 5.

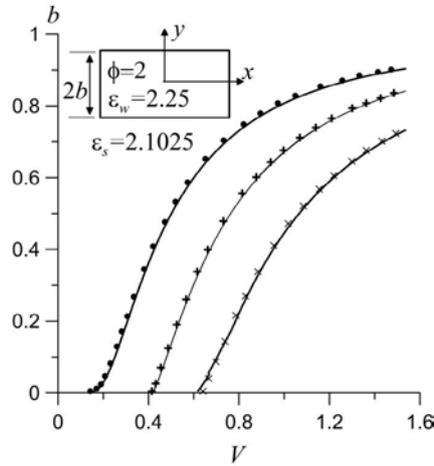


Рисунок 5 – Сопоставление дисперсионных зависимостей для трех мод низшего порядка ПДВ формата $\phi = 2$ (вставка). Сплошные кривые – разработанный метод ($p = \infty, m = 5$), дискретные точки – метод контурных интегральных уравнений [12]

Наблюдаемое на рисунке 5 практически полное совпадение результатов двух независимых подходов подтверждает корректность каждого из них.

Рисунок 6 иллюстрирует распределения полей мод на периметре суперэллипса с $p=2, \phi = 2$ (см. рис. 2a) и сходимость предлагаемого метода для ПДВ со сглаженными ребрами при расчете поля моды.

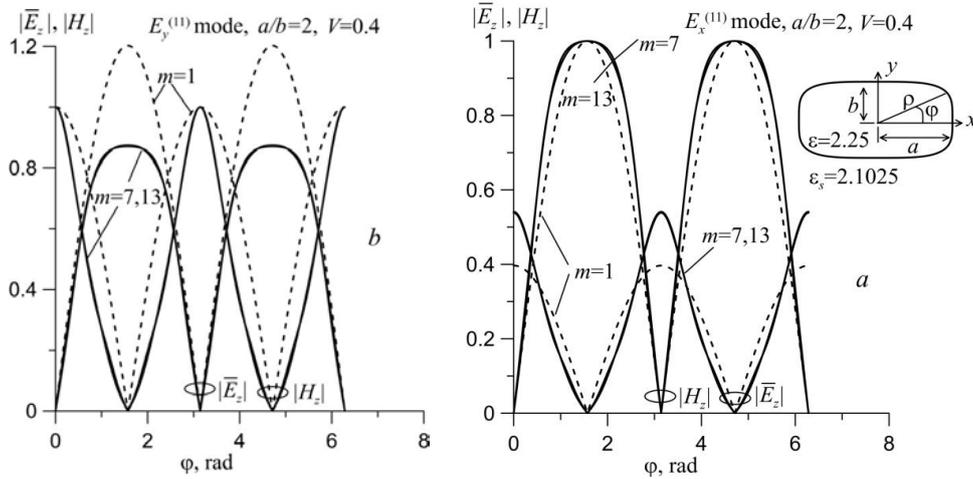


Рисунок 6 – Распределения модулей продольных компонент электромагнитного поля мод на периметре суперэллипса с $p=2, \phi = 2$ и сходимость развитого метода для ПДВ со сглаженными ребрами

Согласно рисункам 3 и 6, характер внутренней сходимости метода функций Грина подобен как для дисперсионных характеристик, так и для полей мод. Отметим также видимую из рисунка 6 противоположную четность продольных компонент поля E_x и E_y мод.

Заключение

В неупрощенной векторной форме сформулирован метод расчета модовых характеристик трехмерных диэлектрических волноводов, основанный на представлении продольных компонент электромагнитного поля моды на контуре поперечного сечения волновода полиномами Фурье. С использованием теоремы Грина во внутренней и внешней областях волновода получена однородная алгебраическая система для амплитуд гармоник Фурье. Ее матричные элементы определяются на основании теоремы Грина и представляются интегралами от регулярных функций. Применимость метода ограничивается только требованием, чтобы контур поперечного сечения волновода описывался однозначной функцией полярного угла. Метод использован для расчета мод прямоугольного диэлектрического волновода. Его эффективность подтверждена оценками внутренней сходимости результатов для постоянных распространения и полей мод, а также сопоставлением расчетных дисперсионных зависимостей для мод разного порядка с известными из литературы экспериментальными данными и данными независимого метода контурных интегральных уравнений.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований РБ «1.15 Фотоника и электроника для инноваций».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kogelnik, H.* Theory of dielectric waveguides / H. Kogelnik // Integrated optics. – Springer ; Berlin ; Heidelberg, 1975. – P. 13–81.
2. *Glytsis, E. N.* Introduction to Slab Dielectric Waveguides / E. N. Glytsis // School of Electrical and Computer Engineering. – National Technical University of Athens, 2020. – 102 p.
3. *Selvaraja, S. K.* Review on Optical Waveguides / S. K. Selvaraja, P. Sethi // IntechOpen, 2018. – P. 95–129.
4. *Yeh, C.* The Essence of Dielectric Waveguides / C. Yeh, F. I. Shimabukuro. – Springer, 2008. – 512 p.
5. *Сотский, А. Б.* Теория оптических волноводных элементов / А. Б. Сотский. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова. – 2011. – 475 с.
6. *Маркузе, Д.* Оптические волноводы / Д. Маркузе. – Москва : Мир, 1974. – 576 с.
7. *Huang, V. P.* Methods for Modeling Guided-Waves Optoelectronic Devices / V. P. Huang. – Cambridge ; Massachusetts, 1995. – 181 p.
8. *Kio, W.* Study of photonic crystals on thin film lithium niobate for sensing applications / W. Kio. – Universite de Franche-Comte, 2016. – 160 p.
9. *Zhu, J.* An Efficient Solver of Eigenmodes for a Class of Complex Optical Waveguides / J. Zhu, L. Li // Comput. Appl. Math., 2020. – Vol. 9, № 1. – P. 1–6.
10. *Zhu, Z.* Full-vectorial finite-difference analysis of microstructured optical fibers / Z. Zhu, T. G. Brown // Optics Express. – 2002. – Vol. 10, № 17. – P. 853–864.
11. *Egushi, M.* Accurate Finite-Element Analysis of Dual-Mode Highly Elliptical-Core Fibers / M. Eguchi, M. Koshiha // Journal of Lightwave Technology. – 1994. – Vol. 12, № 4. – P. 607–613.
12. *Boriskina, S. V.* Highly efficient full-vectorial integral equation solution for the bound, leaky, and complex modes of dielectric waveguides / S. V. Boriskina [et al.] // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. – 2002. – T. 8, №. 6. – C. 1225–1232.
13. *Lai, J.* Second kind integral equation formulation for the mode calculation of optical waveguides / J. Lai, S. Jiang. // Appl. Comput. Harmon. Anal. – 2018. – Vol. 44, № 3. – P. 645–664.
14. *Lu, W.* / Efficient Boundary Integral Equation Method for Photonic Crystal Fibers // J. Lightwave Technol. – 2012. – Vol. 30, № 11. – P. 1610–1616.
15. *Pone, E.* Boundary integral method for the challenging problems in bandgap guiding, plasmonics and sensing / E. Pone [et al.] // Opt. Express. – 2007. – Vol. 15, No. 16. – P. 10231–10236.
16. *White, T. P.* Multipole method for microstructured optical fibers. I. Formulation / T. P. White [et al.] // J. Opt. Soc. Am. B. – 2002. – Vol. 19, № 10. – P. 2331–2340.
17. *Kuhlmeiy, B. T.* Multipole method for microstructured optical fibers. II. Implementation and results / B. T. Kuhlmeiy [et al.] // J. Opt. Soc. Am. B. – 2002. – Vol. 19, № 10. – P. 2331–2340.

18. **Sotsky, A. B.** Rayleigh series for dielectric waveguides of complex cross-section / A. B. Sotsky, An Ying // Mogilev State A. Kuleshov University Bulletin. – 2022. – Vol. 59, № 1. – P. 42–55.
19. **Korn, G.** Mathematical Handbook / G. Korn, T. Korn – McGraw-Hill Book Company. – 1968. – 831 p.
20. **Mumpra, P.** Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. В Тянь-Ли ; пер. с англ. А. И. Плиса; под ред. Г. В. Воскресенского. – Москва : Мир, 1974. – 327 с.
21. **Столяров, Ю.Д.** Моделирование свойств оптических волноводов с использованием электромагнитных волн миллиметрового диапазона// дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.12.20 / Ю. Д. Столяров. – Минск, 1987. – 125 с.
22. **Marcuse, D.** Theory of dielectric optical waveguides / D. Marcuse. – Academic Press. – N.Y., 1974. – 257 p.

Поступила в редакцию 15.06.2022 г.

Контакты: d.v.ponkratov@yandex.by (Понкратов Дмитрий Васильевич, Камилджанова Гульбахар Камилджановна), ab_sotsky@mail.ru (Сотский Александр Борисович)

Ponkratov D. V., Kamildzhanova G. K., Sotsky A. B. FOURIER ANALYSIS OF THE MODES OF A RECTANGULAR DIELECTRIC WAVEGUIDE

A rigorous method for calculating modes of an open dielectric waveguide is formulated, based on the representation of the longitudinal components of the mode fields at the boundary of the waveguide by Fourier series on the angular coordinate. Fourier harmonic amplitudes are obtained from a homogeneous algebraic system. Its matrix elements are defined on the basis of Green's theorem and are represented by integrals from regular functions. The applicability of the method is limited only by the requirement that the waveguide boundary contour be described by a single-valued function of the angular coordinate. The method has been used to calculate modes of rectangular dielectric waveguides. Estimates of its internal convergence have been obtained. Comparison of the found dispersion dependences of modes with the theoretical and experimental data known from the literature is performed.

Keywords: rectangular dielectric waveguide, Green's theorem, Fourier series, computational scheme convergence.

ВОЗМОЖНЫЕ МОЛЕКУЛЯРНЫЕ МЕХАНИЗМЫ РЕГУЛЯЦИИ КОНСОРТИВНЫХ СВЯЗЕЙ В СИСТЕМЕ «*PICEA ABIES* – ЭКТОМИКОРИЗНЫЕ ГРИБЫ»

П. Ю. Колмаков

кандидат биологических наук, доцент

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

Д. Д. Жерносеков

доктор биологических наук, заведующий кафедрой зоологии и ботаники

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

*В данной работе рассматриваются облигатные эктомикоризные взаимоотношения между грибным и растительным компонентами на примере системы *Picea abies*-эктомикоризные грибы, что позволяет предложить ряд метаболитных механизмов регуляции отношений в этой системе: передача сигнала у хвойных растений посредством G-белков, возможное участие хелатных комплексов, а также влияние значений pH в молекулярных механизмах.*

Ключевые слова: сенсорные комплексы, трансмембранные рецепторы, сигнальные каскады, микориза, суберинизация.

Введение

Механизмы регуляции консортивных связей в природе недостаточно изучены. В ряде работ описываются звенья различных сигнальных систем, обеспечивающие ответную реакцию живых организмов на сигналы внешних воздействий [1; 2; 3]. Ключевые моменты клеточных программ могут быть общими у разных организмов [4].

Перспектива в изучении молекулярно-генетических аспектов, определяющих возникновение симбиозов основана на данных из ряда научных работ [5; 6; 7; 8].

До конца не решенными остаются следующие моменты: – в общем для эктомикориз сигнальные молекулы до конца не выявлены [2]; – основные регуляторные гены, контролирующие морфогенез в симбиозе неизвестны; – биохимическая активность, связанная с некоторыми симбиоз-регулируемыми генами пока не обнаружена; – способы подавления защитных реакций растительного компонента при формировании эктомикоризы в целом не изучены.

Особенности регуляции облигатного симбиотрофизма основаны на «динамическом равновесии» биотических систем консолидируемых организмов. Изучение консортивных связей на молекулярно-генетическом уровне поможет пролить свет в вечном споре: какой из участников живых организмов является главным, являются ли такие взаимоотношения вынужденными в природе и создаются ли консорции только по причине выживания самих видов в природе.

Наиболее актуальна сигнальная система, осуществляющая индукцию органо-генетической программы в растительной клетке. Известно в настоящий момент, что грибной алкалоид гипафорин снижает рост корневых волосков. Триптофан-бе-

таин-гипафорин индуцирует дифференциацию клеток растительного компонента в стадии симбиоза. Индолил уксусная кислота влияет на экспрессию генов в растительном компоненте при эктомикоризе. Были обнаружены некоторые гены, экспрессия которых повышалась либо понижалась непосредственно после контакта симбионтов [6; 9]. Нужно отметить, что при внедрении микобионта происходит изменение в экспрессии генов некоторых белков, ассоциированных с клеточной стенкой [10]. Многие грибные метаболиты вызывают защитный ответ растительного компонента.

Так при микоризообразовании у *Picea abies* индуцируются хитиназы и пероксидазы. Хитиназы – часть механизма, позволяющего микобионту проникать в растение, не будучи распознанным как патоген [11; 12]. Грибной компонент постоянно выделяет хитиноподобные элиситоры. Они индуцируют быстрый каскад защитных реакций в клетках ели обыкновенной, включая вывод ионов K^+ и Cl^- , ввод Ca^{2+} и H^+ , фосфорилирование 63kDa белка (pp63) и синтез H_2O_2 , начинающиеся через 5 мин. после добавления элиситора. Но хитиназы растительного компонента, выделяемые в апопластное пространство не наносят ущерба микобионту, а эффективно инактивируют хитиновые элиситоры, выделяемые клеточными стенками клеток грибного компонента, путем перевода их в мелкие неактивные единицы (мономеры N-ацетилглюкозамина), не являющиеся элиситорами и не связывающиеся с рецепторами. В этом случае предотвращается распознавание проникновения, не происходят защитные реакции и возможно установление симбиоза [6; 12].

В общем виде преодоление защитных реакций растения при формировании микоризного симбиоза можно представить следующим образом: маскировка или распад элиситоров (деградация хитиновых элиситоров микобионта растительными хитиназами); создание путем транспорта веществ к микобионту дефицита питательных веществ в инфицированной клетке (в отсутствие достаточной ассимиляции, гены количественной устойчивости не экспрессируются); собственно подавление защитных реакций хозяина (физиологическое подавление грибами неизвестно; у паразитов отмечено выделение гликопептидов – супрессивов) [11]. Образование симбиоза требует контролируемых во времени и пространстве генной активности и наличия белков, участвующих в процессах морфогенеза.

Материалы и методы исследования

В данной работе рассматриваются облигатные эктомикоризные взаимоотношения между грибным и растительным компонентами, что дает предпосылку для установления определенных моментов в схеме сигнальной системы. Немаловажно учитывать косвенные доказательства существования тех или иных взаимосвязей в схемах молекулярных взаимодействий.

В исследованиях нужно учитывать то, что нет специфичных для эктомикоризы генов: все гены одинаковы как для симбиотических, так и для не симбиотических отношений. Но наблюдаются заметные изменения генной экспрессии у обоих партнеров, что предполагает участие генов вегетативного развития в формировании симбиоза [13].

Возможна ситуация, когда меняется трофический статус симбиотических организмов при определенных условиях, что может повлечь за собой изменения в сигнальных системах ответа.

Цель. Предложить возможный механизм передачи сигнала от грибного компонента через систему сигнальных каскадов данной клетки в геном для активации ответных реакций растительного компонента.

Задача. Рассмотреть возможные молекулярно-генетические аспекты регуляции консортивных связей на модельной системе «*Picea abies* – эктомикоризные грибы».

Объектом исследований являются эктомикоризные консортивные связи между *Picea abies* и агарикоидными базидиомицетами из трофической группы «облигатные микоризообразователи». Имеются ввиду сбалансированные взаимоотношения между ассоциированными организмами.

Наиболее распространенное определение эндوفитизма – «бессимптомные» ассоциации растений с другими организмами. Наиболее изученной группой эндوفитов являются грибы. Эндофитная активность микоризообразующих грибов характеризуется: контактной зоной, синхронностью развития грибного и растительного организмов, недостаточностью транспорта веществ в направлении растения [2]. Эндофитная активность микоризообразующих грибов многогранна и влечет за собой прямые либо косвенные изменения в анатомии, морфологии, физиологии и биохимии. Никакие ассоциации, образующие биоконплексы, не проходят бессимптомно. Изменения могут быть разного уровня, в том числе в виде экспрессии ранее молчащих генов, и как следствие – значительные анатомические изменения у растительного и грибного компонентов.

Результаты исследований

Анатомические доказательства наличия молекулярной регуляции

На рисунке 1 показана постепенная суберинизация микоризного корневого окончания с течением времени при проникновении грибного компонента. Гидролазы растительного компонента приводят к разрыхлению суберина и его гидролизу (кутиназная реакция) до олигомеров: свободных оксигенированных жирных кислот и спиртов. Пелотоны и арбускулы на рисунке 2 в паренхиме первичной коры увеличивают площадь контакта элиситоров с клеточной мембраной.



Рисунок 1 – Постепенная суберинизация микоризного корневого окончания с течением времени.
№ образца 33-08-08-2016



Рисунок 2 – Пелотоны и арбускулы в паренхиме первичной коры микоризного корневого окончания.
№ образца 33-08-08-2016

Грибной компонент влияет на формирование проводящей системы и стимулирует деление клеток паренхимы первичной коры корневого окончания. Реакция на внедрение – изменение размеров стелы корня, формирование флоэмы максимально близко к мантии [14].

Возможная схема передачи сигнала у хвойных растений посредством G-белков

При рассмотрении микоризных взаимоотношений важным является молекулярный механизм, с помощью которого гриб оказывает воздействие на регуляцию синтеза определенных белков в растении. Основываясь на литературных данных, можно представить следующую последовательность событий.

Первый этап – поступление сигнала от грибного компонента. В ответ на поступивший сигнал происходит выделение растительным компонентом в окружающую среду хитиназы. Результатом действия хитиназы является появление олигомеров N-ацетилглюкозамина. С другой стороны, сигнал может запускаться благодаря действию грибной целлюлазы и появлению олигосахаридов. В свою очередь, было показано, что N-ацетилглюкозамин и олигосахариды могут выполнять элиситорную функцию и связываться со специфическим рецептором на поверхности растительной клетки [15]. Нековалентное взаимодействие внешнего участка рецептора с сигнальной молекулой, поступающей из среды, может приводить к изменению конформации рецепторного белка, которое передается на внутренний, цитоплазматический участок [1]. В свою очередь, сигнал с цитоплазматического участка будет передаваться на G-белок. Этот белок служит преобразователем сигнала и передает сигнальный конформационный импульс на стартовый фермент, специфичный для данной сигнальной системы [16; 17]. Одним из унифицированных звеньев сигнальных систем являются протеинкиназы, которые активируются продуктами стартовых сигнальных реакций или их производными [18]. Белки, фосфорилированные протеинкиназами, передают сигнал на белковые факторы регуляции транскрипции. Таким образом, благодаря протеинкиназам сигнал может передаваться в ядро, где будет регулироваться экспрессия определенных генов [19].

В пользу существования такой схемы у хвойных растений свидетельствуют следующие факты: – полный репертуар субъединиц G-белка у нескольких видов хвойных был идентифицирован *in silico*; – полноразмерные кодирующие области *P. abies* одной G α -, одной G β - и четырех G γ -субъединиц были клонированы и секвенированы [18]; – для хвойных растений показано выделение хитиназ во внешнюю среду, по мнению авторов работы [20], продуцируются хитиназы I, II и IV класса.

Следует отметить, что подобную схему для передачи сигнала используют и фитопатогенные грибы, например, *Cryphonectria parasitica*. Этот гриб является раневым паразитом, его споры инфицируют ветви и стволы через различные повреждения растительных тканей, после чего распространяясь по лубу, камбиальному слою и затем по внешним слоям заболони, гриб образует на поверхности повреждения в виде язв. Участки дерева выше точки инвазии погибают из-за блокирования обмена веществ между органами растения. У *Cryphonectria parasitica* клонированы два гена, кодирующие α -субъединицу G-белка gpg-1 и gpg-2. Продукт первого гена – белок GPG-1. При заражении гиповирусом уровень белка GPG-1 снижался, что вызывало редукцию мицелиального роста, снижение активности лакказы, а также нарушалась секреция целлюлазы. Авторы работы [21] полагают, что фосфорилированный белок G α активирует аденилатциклазу, в результате чего

образуется цАМФ, которая, в свою очередь, приводит к индукции экспрессии генов, необходимых для патогенеза.

В тоже время рядом авторов для растений предлагается видоизмененная схема передачи сигнала с участием G-белков. Эта модель предполагает, что *Ga* субъединица связана с ГТФ по умолчанию [22]. Считают, что G-белки растений, связанные с ГТФ, не являются по своей природе активными, а функциональная активация достигается за счет фосфорилирования, опосредованного протеинкиназами.

В классической модели ГТФ-связанные G-белки являются активными, однако, по мнению авторов гипотезы, конститутивно активный G-белок не является идеальным кандидатом на роль сигнальной молекулы. Согласно их модели, связывание ГТФ с субъединицей *Ga* приводит к изменению конформации гетеротримера таким образом, что взаимодействующие молекулярные поверхности двух функциональных модулей (*Ga* и *Gβγ*) подвергаются воздействию нижестоящих эффекторов. Вероятными кандидатами на осуществление этого фосфорилирования является ряд рецептороподобных киназ, которые, как было показано, физически или генетически взаимодействуют с субъединицами G-белка [23; 24; 25; 26]. Прекращение передачи сигналов в данной модели контролируется не гидролизом ГТФ до ГДФ, а дефосфорилированием, опосредованным протеинфосфатазами. Хотя в растениях фосфатазы не так распространены, как киназы, их уровень достаточно высокий. Следует отметить, что последовательности каталитических субъединиц фосфатазы, идентифицированы в протеоме арабидопсиса [27]. Первоначально считалось, что протеинфосфатазы не обладают специфичностью и просто уравнивают фосфорилирование в режиме «домашнего хозяйства», однако, в некоторых исследованиях было показано, что многие фосфатазы весьма специфичны [28]. Кроме того, в литературе имеются данные о прямом взаимодействии между *Gβγ*-субъединицей арабидопсиса и протеинфосфатазой PP2C52 [29]. Очевидно, для создания точной модели передачи сигнала в растениях понадобится ряд дополнительных исследований.

Возможная схема работы хелатных комплексов

Скорее всего, помимо механизма сигнальной системы, в консортивных связях существует и барьерная функция у эктомикоризы. В консортивных взаимоотношениях могут быть особенности с поступлением тяжелых металлов в клетку. Хотя известно, что специфических механизмов транспорта тяжелых металлов в клетку не выявлено [30]. Тяжелые металлы могут хелатироваться под воздействием низкомолекулярных веществ (сахаров, аминокислот и органических кислот). С другой стороны, грибным компонентом (возможно гломалин) связываются ионы тяжелых металлов в почве [31]. Этим можно объяснить высокое содержание ионов свинца в почвенных горизонтах с микоризными корневыми окончаниями.

Внеклеточные хелатированные комплексы тяжелых металлов в том числе и свинца осаждаются на поверхности микоризных корневых окончаний под действием метаболитов грибного и растительного компонентов. Кроме того, полисахариды клеточной стенки могут также образовывать внутренние хелатированные комплексы с тяжелыми металлами. Эти эффекты создают условия гипераккумулятора, вызывая разность потенциалов по разные стороны плазмалеммы. Эта величина, вероятно, более-менее одинаковая, учитывая стабильность концентрации содержания соединений свинца в почвенных горизонтах с наибольшей биомассой микоризных корневых окончаний. В итоге хелатированные свинцовые комплексы

могут обеспечивать стабильность работы сигнальных рецепторов и молекул переносчиков в активном транспорте через плазмалемму.

Возможное значение рН в молекулярных механизмах

Величина рН является управляющей переменной при связывании металла органическим веществом.

Результаты химических анализов корневых окончаний *Picea abies* представлены в таблице 1. Подвижность хелатных комплексов свинца возрастает с понижением рН почвенных горизонтов. В условиях низкого рН (<6) при концентрации свинца, равной 1 мкг/л, доминирующей формой является свободный ион Pb^{2+} , который в последующем легко образует хелатные комплексы. Осаждение свинца в почвах может происходить в тех случаях, когда его концентрация в растворе превышает 4 мг/л при рН 4 и приблизительно 0,2 мг/л при рН 8.

Адсорбция Pb^{2+} происходит по механизму ионного обмена при рН ниже 6 с образованием устойчивых внутрисферных хелатных комплексов. Так, при рН 3 концентрация свободного иона Pb^{2+} составляет около 70%.

Таблица 1 – Результаты химических анализов корневых окончаний *Picea abies*

Пробная площадь	Почвенный горизонт	Биомасса корневых окончаний, среднее значение, г на почвенную пробу	Результаты химических анализов		
			Органическое вещество, %	рН	Содержание свинца и его соединений, мг/кг
Фоновая зона, пробная площадь № 1	Ad	1,03	81,53	4,01	10,7807
	A ₁	0,75	5,12	7,09	11,8242
	A ₂ B	0,31	4,59	3,47	6,9349
Импактная зона, пробная площадь № 2	A ₁	1,04	33,73	3,50	12,2706
	A ₂ B	0,79	8,14	6,74	14,5419

Содержание свинца в почвенных горизонтах с высокой биомассой микоризных корневых окончаний варьирует в пределах 10–15 мг/кг. Из литературных источников известно, что концентрация свинца в земной коре и даже однотипных породах сильно варьирует [32].

При высоких рН свинец осаждается в почве в виде гидроксидов, фосфатов, карбонатов. При низких рН возможен переход его в более растворимую форму и участие в образовании хелатных комплексов [30].

Заключение

Регуляция консортивных связей в природе – это комплексный процесс, в основе которого лежат молекулярные механизмы анатомических, физиологических и биохимических изменений грибного и растительного компонентов. Эти изменения базируются на метаболической модели молекулярной регуляции, которая имеет общие подходы и черты, но отличаются в зависимости от типа консортивных взаимодействий в биокомплексах: эктомикоризные консортивные взаимодействия, от видов организмов, вступающих во взаимодействие. Это звено промежуточное для возникновения совершенно нового организма, у которого все консортивные взаимодействия дают новые свойства, обеспечивающие выживание в экстремальных условиях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Тарчевский, И. А.** Сигнальные системы клеток растений / И. А. Тарчевский. – М. : Наука. – 2002. – 294 с.
2. **Воронина, Е. Ю.** Микоризы в наземных экосистемах: экологические физиологические и молекулярно-генетические аспекты микоризных симбиозов / Е. Ю. Воронина // Микология сегодня / Ю. Т. Дьякова; под общ. ред. Ю. Т. Дьякова, Ю. В. Сергеевой. – Т. 1. – М. : Национальная академия микологии, 2007. – 376 с.
3. **Sebastiana, M.** Metabolomics and transcriptomics to decipher molecular mechanisms underlying ectomycorrhizal root colonization of an oak tree / M. Sebastiana, A. Gargallo-Garriga, J. Sardans, M. Pérez-Trujillo, F. Monteiro, A. Figueiredo, M. Maia, R. Nascimento, M. Sousa Silva, A. N. Ferreira, C. Cordeiro, A. P. Marques, L. Sousa, R. Malhó, J. Peñuelas // Scientific Reports. – 2021. – Vol. 11. – P. 1–16.
4. **Koide, R. T.** Regulation of the vesicular-arbuscular mycorrhizal symbiosis / R. T. Koide, R. P. Schreiner // Annual Review of Plant Physiology and Plant Molecular Biology. – 1992. – Vol. 43. – P. 557–581.
5. **Bècard, G.** Partner communication in the arbuscular mycorrhizal interaction / G. Bècard, S. Kosuta, M. Tamasloukht, N. Séjalon–Delmas, C. Roux // Canadian journal of botany. – 2004. – Vol. 82. – P. 1186–1197.
6. **Martin, F.** Developmental cross talking in the ectomycorrhizal symbiosis: signals and communication genes / F. Martin, S. Duplessis, F. Ditengou, H. Lagrange, C. Voiblet, F. Lapeyrie // New Phytologist. – 2001. – Vol. 151. – P. 145–154.
7. **Gianinazzi-Pearson, V.** Molecular dialogue in arbuscular mycorrhiza: exploring the symbiotic cell programmer / V. Gianinazzi-Pearson, L. Brechenmacher, S. Weidmann, L. Sanchez // Biology of plant-microbe interactions. – 2004. – Vol. 4. – P. 453–459.
8. **Kosuta, S.** Diffusible factors from arbuscular mycorrhizal fungi elicit early nodulin gene expression in *Medicago truncatula* / S. Kosuta, M. Chabaud, G. Lougnon, C. Gough, J. Denarie, D. G. Barker, G. Becard // Biology of plant-microbe interactions. – 2004. – Vol. 4. – P. 347–350.
9. **Gay, G.** Role of fungal auxin in the ectomycorrhizal symbiosis / G. Gay, M. S. Reddy, A. K. Pandey, D. Melayah, C. Raffier, V. Charvet-Candela, S. Hitchin, J. C. Debaud, R. Marmeisse // Biology of plant-microbe interactions. – 2004. – Vol. 4. – P. 398–401.
10. **Martin, F.** Cell wall proteins of the ectomycorrhizal Basidiomycetes *Pisolithus tinctorius*: identification, function and expression in symbiosis / F. Martin, P. Laurent, D. de Carvalho, C. Voiblet, R. Balestrini, P. Bonfante, D. Tagu // Fungal Genetics and Biology. – 1999. – Vol. 27. – P. 161–174.
11. **Hahn, M.** Signal and nutrient exchange at biotrophic plant-fungus interfaces / M. Hahn, K. Mendgen // Current opinion in plant biology. – 2001. – Vol. 4 (4). – P. 322–327.
12. **Harrison, M. A.** Helical interactions and membrane disposition of the 16-kDa proteolipid subunit of the vacuolar H (+)-ATPase analyzed by cysteine replacement mutagenesis / M. A. Harrison, J. Murray, B. Powell, Y. I. Kim, M. E. Finbow, J. B. Findlay // Biological chemistry. – 1999. – Vol. 274 (36). – P. 25461–25470.
13. **Voiblet, C.** Identification of symbiosis-regulated genes in *Eucalyptus globulus* – *Pisolithus tinctorius* ectomycorrhiza by differential hybridization of arrayed cDNAs / C. Voiblet, S. Duplessis, N. Encelot, F. Martin // Plant Journal. – 2001. – Vol. 25. – P. 181–191.
14. **Колмаков, П. Ю.** Формирование и развитие эндоассоциаций / П. Ю. Колмаков, Е. В. Антонова // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 4. – С. 45–52.
15. **Hebe, G.** Initial signaling processes induced by elicitors of ectomycorrhiza-forming fungi in spruce cells can also be triggered by G-protein-activating mastoparan and protein phosphatase-inhibiting cantharidin / G. Hebe, A. Hager, P. Salzer // Plantae. – 1999. – Vol. 207. – P. 418–425.
16. **Hackenberg, D.** G-alpha and regulator of G-protein signaling (RGS) protein pairs maintain functional compatibility and conserved interaction interfaces throughout evolution despite frequent loss of RGS proteins in plants / D. Hackenberg, M. R. McKain, S. G. Lee, S. Roy Choudhury, T. McCann, S. Schreier, A. Harkess, J. C. Pires, G. K. Wong, J. M. Jez, et al. // New Phytology. – 2016. – Vol. 216. – P. 562–575.
17. **Pandey, S.** Heterotrimeric G-protein regulatory circuits in plants: Conserved and novel mechanisms / S. Pandey // Plant Signal Behavior. – 2017. – Vol. 12 (6). – P. 1–3.
18. **Vries, S.** Heterotrimeric G-proteins in *Picea abies* and their regulation in response to Heterobasidion annosum s.l. infection. / S. de Vries, M. Nemesio-Gorrioz, P. B. Blair, et al. // BMC Plant Biology. – 2015. – Vol. 15. – 287 p.
19. **Bender, K. W.** Plant G-protein activation: connecting to plant receptor kinases / K. W. Bender, C. Zipfel // Cell Research. – 2018. – Vol. 28 (7). – P. 697–698.
20. **Islam, M. A.** Conifer chitinases / M. A. Islam, R. N. Sturrock, A. K. M. Erkamodoullah // The American Journal of plant science and biotechnology. – 2011. – Vol. 5 (1). – P. 22–36.

21. **Tudzynski, B.** Genetics of Phytopathology: Pathogenicity Factors and Signal Transduction in Plant-pathogenic Fungi / B. Tudzynski, P. Tudzynski // Progress in Botany. – 2002. – Vol. 63. – P. 163–188.
22. **Trusov, Y.** Plant G-Proteins Come of Age: Breaking the Bond with Animal Models / Y. Trusov, J. R. Botella. // Frontiers in chemistry. – 2016. – Vol. 4 (24). – P. 1–9.
23. **Choudhury, S. R.** Specific subunits of heterotrimeric G proteins play important roles during nodulation in soybean / S. R. Choudhury, S. Pandey // Plant physiology. – 2013. – Vol. 162 (1). – P. 522–533.
24. **Liu, J.** Reducing sphingolipid synthesis orchestrates global changes to extend yeast lifespan / J. Liu, X. Huang, B. R. Withers, E. Blalock, K. Liu, R. C. Dickson // Aging cell. – 2013. – Vol. 12 (15). – P. 833–874.
25. **Aranda-Sicilia, M. N.** Heterotrimeric G proteins interact with defense-related receptor-like kinases in Arabidopsis / M. N. Aranda-Sicilia, Y. Trusov, N. Maruta, D. Chakravorty, Y. Zhang, J. R. Botella // Plant Physiology. – 2015. – Vol. 188. – P. 44–48.
26. **Maruta, N.** Membrane-localized extra-large G proteins and G $\beta\gamma$ of the heterotrimeric G proteins from functional complexes engaged in plant immunity in Arabidopsis / N. Maruta, Y. Trusov, E. Brenya, U. Parekh, J. R. Botella // Plant Physiology. – 2015. – Vol. 167 (3). – P. 1004–1016.
27. **Kerk, D.** The complement of protein phosphatase catalytic subunits encoded in the genome of Arabidopsis / D. Kerk, J. Bulgrien, D. W. Smith, B. Barsam, S. Veretnik, M. Gribskov // Plant Physiology. – 2002. – Vol. 129 (2). – P. 908–933.
28. **Uhrig, R. G.** Arabidopsis PPP family of serine/threonine protein phosphatases: many targets but few engines / R. G. Uhrig, A. M. Labandera, G. B. Moorhead // Trends plant science. – 2013. – Vol. 18. – P. 505–513.
29. **Tsugama, D.** Arabidopsis heterotrimeric G protein β subunit, AGB $_1$, regulates brassinosteroid signaling independently of BZR $_1$ / D. Tsugama, L. Shenkui, T. Takano // Experimental Botany. – 2013. – Vol. 64 (11). – P. 3213–3223.
30. **Титов, А. Ф.** Тяжелые металлы и растения / А. Ф. Титов, Н. М. Казнина, В. В. Таланова. – Петрозаводск : Карельский научный центр РАН. – 2014. – 194 с.
31. **Gonzalez-Chavez, M. C.** The role of glomalin, a protein produced by arbuscular mycorrhizal fungi, in sequestering potentially toxic elements / M. C. Gonzalez-Chavez // Environmental Pollution. – 2004. – Vol. 130 (3). – P. 317–323.
32. **Рязанов, С. С.** Пространственно-статистический анализ содержания и подвижности тяжелых металлов в гумусовых горизонтах почв Республики Татарстан : автореф. дис. ... канд. биол. наук: 03.02.13 / С. С. Рязанов ; Башкирский государственный аграрный университет. – Казань, 2019. – 23 с.

Поступила в редакцию 15.12.2022 г.

Контакты: pavel_kolmakov@list.ru (Колмаков Павел Юрьевич, Жерносеков Дмитрий Данилович)

Kolmakov P. Yu., Zhernosekov D. D. POSSIBLE MOLECULAR MECHANISMS OF REGULATION OF CONSORTIVE RELATIONS IN THE SYSTEM “*PICEA ABIES* – ECTOMYCORRHIZAL FUNGI”

In the paper obligate ectomycorrhizal relationships between fungal and plant components have been considered using the system “Picea abies – ectomycorrhizal fungi”. A number of metabolic mechanisms for regulation of these relations in the system have been proposed: signal transmission in coniferous plants through G-proteins, possible involvement of chelate complexes, and the influence of pH values in molecular mechanisms.

Keywords: sensory complexes, transmembrane receptors, signal cascades, mycorrhiza, suberinization.

УДК [582.688.3:581.1]:378.4:502.75(476.5)

ЗИМОСТОЙКОСТЬ ВЕРЕСКОВЫХ (*ERICACEAE*) В БОТАНИЧЕСКОМ САДУ ВГУ ИМЕНИ П. М. МАШЕРОВА

И. М. Морозова

кандидат биологических наук, доцент

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

И. М. Морозов

старший преподаватель

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

Е. Ф. Турчинович

магистрант

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

Н. В. Москалева

магистрант

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

Рассмотрены некоторые результаты интродукции 43 видов и разновидностей, растений семейства Ericaceae в ботаническом саду Витебского государственного университета имени П.М. Машерова. Проанализированы зимостойкость представителей вересковых в коллекции, условия их произрастания, биологические и морфологические особенности, устойчивость в культуре и потенциальная возможность их семенного размножения.

Ключевые слова: семейство *Ericaceae*, интродукция, жизненная форма, Белорусское Поозерье, зимостойкость.

Введение

Представители семейства вересковых (*Ericaceae*) обладают высокими декоративными качествами. Наибольшая ценность многих из них (рододендрон, кальмия) заключается в крупных и ярких соцветиях, хорошо смотрится и листва вечнозеленых видов в течение всего года. Особенностью вересковых является медленный рост в первые годы жизни и специфическая требовательность к почвам.

Многие из представителей семейства вересковые используются как пищевые (*Vaccinium vitis-idaea*, *Vaccinium corymbosum*) и лекарственные растения (*Arctostaphylos uva-ursi*, *Calluna vulgaris*). Некоторые интродуцированы и выращиваются на плантациях как ценные ягодные растения (виды рода *Vaccinium*). Большинство представителей семейства вересковых являются кустарниками или кустарничками, иногда это многолетние травянистые растения. Благодаря своим декоративным качествам вересковые (*Rhododendron*, *Kalmia*, *Erica* и др.) практически по всему миру широко используются в ландшафтном дизайне [1].

Представители семейства вересковые особенно интересны для выращивания в Беларуси, поскольку некоторые из них произрастают в естественных условиях на территории республики, а также севернее на территории Российской Федерации. Климатические показатели Беларуси благоприятны для выращивания многих культур данного семейства, культивируемых в странах Европы и Северной Америки.

Одной из причин того, что вересковые до сих пор не получили широкого применения в озеленении на территории Беларуси, объясняется специфическими условиями, которые требуются для роста растений. Все без исключения представители этого семейства – типичные ацидофилы, т.е. способны произрастать исключительно на кислых почвах [2]. Кроме того, следует отметить, что культивирование представителей семейства вересковые не имело давних традиций в условиях республики.

Цель работы – проанализировать некоторые итоги интродукции представителей семейства вересковые в коллекции ботанического сада Витебского государственного университета имени П.М. Машерова (ВГУ имени П. М. Машерова) для расширения ассортимента растений в озеленении населенных пунктов Беларуси.

Материалы и методы исследования. Ботанический сад ВГУ имени П.М. Машерова является основным интродукционным центром на северо-востоке Беларуси. Отличия климатических показателей Витебской области от центральной и южной частей нашей страны иногда довольно существенны. Вследствие этого интродукционные исследования (в частности представителей семейства *Ericaceae*) в данном регионе представляют определенный интерес. Разница среднего показателя температуры самого холодного месяца в году составляет на юге и севере Беларуси составляет 2,3 °С. Длительность безморозного периода на юге (Брест) на 30 дней больше, чем на севере (Витебск). Такую же тенденцию имеют и остальные климатические показатели (таблица 1) [3].

В предоставленном исследовании рассматриваются представители семейства вересковые (*Ericaceae*), испытанные в открытом грунте за последние 20 лет в ботаническом саду ВГУ имени П.М. Машерова и в основном достигшие репродуктивного возраста. Большинство видов вересковых нашей коллекции имеет возраст старше 20 лет. Самыми старыми экземплярами являются *Rhododendron luteum* Sweet и *Rh. dauricum* L., которым более 50 лет [4].

Коллекция растений семейства *Ericaceae* в ботаническом саду ВГУ имени П.М. Машерова в настоящее время насчитывает 43 вида.

Таблица 1 – Климатические показатели северной, центральной и южной частей Беларуси

Климатический фактор	Витебск (55° 20' с. ш.; 30° 10' в. д.)	Минск (53° 54' с. ш.; 27° 34' в. д.)	Брест (52° 10' с. ш.; 23° 70' в. д.)
Суммарная солнечная радиация, ккал/см ² в год	85–87	88,7	80–100
Температура воздуха самого теплого месяца (июль), °С	17,0–17,8	17,5	19,7
Температура воздуха самого холодного месяца (январь), °С	–8,1	–7,3	–5,8
Годовая амплитуда температуры воздуха, °С	24,8	24,8	24,8
Суммы температур воздуха за период с температурой выше 10° С	2100	2210	2400
Длительность периода с температурой выше 10° С	140	145	160
Длительность безморозного периода в воздухе, дни	140	152	170

Окончание таблицы 1

Климатический фактор	Витебск (55° 20' с. ш.; 30° 10' в. д.)	Минск (53° 54' с. ш.; 27° 34' в. д.)	Брест (52° 10' с. ш.; 23° 70' в. д.)
Длительность безморозного периода на почве, дни	135	135	140
Количество осадков в год, мм	650–700	646	620
Количество дней с осадками, дни	183	193	171
Число дней со снежным покровом, дни	120	110	80

Фенологические наблюдения велись по пяти основным фенодатам морфогенеза: начало вегетации, начало цветения, окончание цветения, начало и конец роста побегов. Фенофазы видов оценивались по общепринятым методикам фенологических наблюдений [5]. Материалы наблюдений были подвергнуты статистической обработке по методике Г.Н. Зайцева [6]. Морфологические описания изучаемых объектов и их жизненных форм проводилось по методике С.Е. Коровина с соавторами [7]. Наблюдения за зимостойкостью и фенологическими ритмами развития опытных растений проводили по методике И.Д. Юркевича с соавторами [8]. Изучение особенностей плодоношения проводилось по методике С.Е. Коровина с соавторами [7].

Вопрос устойчивости в культуре определенного вида растений сводится к определению признаков, дающих возможность судить, будет ли устойчивым или неустойчивым объект исследования. Важнейшими критериями устойчивости растений в новых для них климатических условиях являются следующие биологические параметры:

- сохранение в установленных границах характера естественных ритмов развития;
- прохождение полного цикла развития побегов;
- способность к размножению;
- сохранение природной жизненной формы и естественных или близких к ним типов онтогенеза.

Основная часть

Большинство испытанных видов нашей коллекции вересковых (91%) интродуцированы живыми растениями, полученными из разных ботанических садов и из природных местообитаний. Часть образцов 26 видов получена 3–5-летними сеянцами либо черенками из ботанических садов Москвы, Киева и Минска. Десять видов изъяты из природных условий Республики Беларусь. Шесть видов вересковых пересажены из природных условий Заполярья (Полярный Урал, Хибин). Устремления к переносу растений живыми экземплярами из природных условий имели успех только с аборигенными видами. Ввести в культуру таким образом виды северных мест обитания *Arctous alpina* (L.) Nied., *Harrimanella hypnoides* (L.) Cov., *Loiseleuria procumbens* (L.) Desv. *Phyllococe coerulea* (L.) Vab., *Moneses uniflora* (L.) A. Gray и некоторых других не удалось. Для успешной интродукции вида необходимо иметь определенное количество экземпляров, поэтому 70 % видов нашей коллекции представлены либо тремя и более экземплярами.

По А. Л. Тахтаджяну, большинство видов нашей коллекции семейства *Ericaceae* относится к трем областям Голарктического царства [9]: Восточноазиатской, Атлантическо-Североамериканской и Циркумбореальной. Есть единичные представители Средиземноморской области (*Rhododendron caucasicum* Pall., *Rh. ponticum* L., *Rh. smirnovii* Trautv). Нами в составе семейства вересковых рассматриваются в ранге подсемейств *Vaccinioideae* и *Pyroloideae*, выделяемых некоторыми систематиками в отдельные семейства.

Наибольшее количество интродуцированных видов относятся к роду *Rhododendron* – 15, в роде *Vaccinium* – 6, остальные роды представлены 1 – 2 видами. Большинство видов коллекции (31) – вечнозеленые растения, 9 видов – листопадные, 3 вида – полулистопадные. Преобладающее количество видов в наших условиях кустарнички (21), 17 видов – кустарники, 4 – многолетние травянистые растения.

Регулярное цветение и плодоношение отмечены у 17 видов, 8 видов цветут лишь при благоприятных условиях перезимовки, 7 видов цветут, но не плодоносят. Три вида (*Erica tetralix* L., *Gaultheria procumbens* L., *Leucothoe fontanesiana* (Steud.) Sleum.) не цветут так как не достигли репродуктивного возраста, 8 видов погибли, не достигнув возраста цветения.

Зимостойкость видов, содержащихся в нашем ботаническом саду, в обычные зимы сравнительно значительная, даже без укрытия. Большинство видов (34) в обычные зимы не повреждается. После неблагоприятных зим 17 видов не имели повреждений (I балл по методике Главного ботанического сада Российской академии наук (ГБС РАН), 1973), а у 17 они были незначительны (II балла), у 9 видов подмерзают цветочные почки, у них затрудняется или чаще полностью неосуществимо семенное размножение (зимостойкость III – IV балла) [7].

Для некоторых видов ограничивающим интродукцию фактором являются теплые малоснежные зимы с частыми иногда продолжительными оттепелями, чередующимися с морозами. В такие зимы сильно страдают *Gaultheria procumbens* L., *Kalmia latifolia* L., *Phyllodoce caerulea* (L.) Bab., *Erica tetralix* L.

Неблагоприятным фактором для вечнозеленых видов вересковых является яркое солнце в феврале – апреле, в результате чего страдает листва от солнечных ожогов. Особенно подвержены этому в наших условиях *Andromeda glaucophylla* Link, *Erica herbacea* L., *Leucothoe fontanesiana* (Steud.) Sleum., *Pieris japonica* (Tunb.) G. Don., *Rhododendron smimowii* Trautv., *Rh. Caucasicum* Pall.

По методике, разработанной ГБС РАН, в основе которой лежат работы П. И. Лапина и С.В. Сидневой [7], выделены 3 группы видов (таблица 2):

I группа – вполне перспективные виды. К этой группе относятся 17 видов коллекции вересковых, зимостойких в климатических условиях северо-востока Беларуси. В зимний период эти виды не повреждаются морозами. Они проходят фазу цветения и плодоношения. Данным видам характерно сохранение присущей им в естественных условиях формы роста, их побеги вызревают полностью, цветут эти виды каждый год и лишь после особо холодных зим имеют повреждения верхушек побегов, при этом они хорошо и быстро восстанавливаются. Эти виды имеют полноценную семенную продуктивность, хорошо размножаются семенами.

Таблица 2 – Группы перспективности видов семейства *Ericaceae* коллекции ботанического сада ВГУ имени П.М. Машерова

I группа	II группа	III группа
<i>Andromeda glaucophylla</i> Link, <i>Andromeda polifolia</i> L., <i>Arctostaphylos uvaursi</i> (L.) Spreng., <i>Calluna vulgaris</i> (L.) Hull, <i>Chamaedaphne calyculata</i> (L.) Moench, <i>Erica herbacea</i> L., <i>Kalmia angustifolia</i> L., <i>Rhododendron dauricum</i> L., <i>Rh. japonicum</i> (A Gray) Saring., <i>Rh. luteum</i> (L.) Sweet., <i>Rh. sichotense</i> Pojark., <i>Rh. smimowii</i> Trautv., <i>Vaccinium corymbosum</i> L., <i>V. corymbosum</i> L. "Rancocus", <i>V. uliginosum</i> L., <i>V. vitis-idaea</i> L., <i>V. vitis-idaea</i> L. "Koral"	<i>Gaultheria procumbens</i> L., <i>Kalmia latifolia</i> L., <i>Leucothoe fontanesiana</i> (Steud.) Sleum., <i>Pieris japonica</i> (Tunb.) G. Don., <i>Rhododendron calendulaceum</i> (Michx.) Tor., <i>Rh. caucasicum</i> Pall., <i>Rh. fortunei</i> (T. Moore) Lindl., <i>Rh. japonica</i> (A Gray) Saring. var. Alba, <i>Rh. impeditum</i> Balf. et W.W. Smith, <i>Rh. obtusum</i> (Lindl.) Planch., <i>Rh. ponticum</i> L., <i>Rh. schlippenbahii</i> Maxim., <i>Rh. vaseyi</i> A. Gray. var. roseum, <i>Rh. Yedoense</i> Trautv., <i>Vaccinium microcarpum</i> Turcz. ex Rupr.	<i>Arctous alpina</i> (L.) Nied., <i>Empetrum nigrum</i> L., <i>Erica tetralix</i> L., <i>Harrimanella hypnoides</i> (L.) Cov., <i>Loiseleuria procumbens</i> (L.) Desv., <i>Phyllodoce caerulea</i> (L.) Bab., <i>Moneses uniflora</i> (L.) A. Gray, <i>Pyrola chlorantha</i> Sw., <i>Rhododendron pouckhanense</i> H. Lev.

II группа – менее перспективные виды, составляет так же 17 видов. В эту группу входят виды, у которых подмерзают однолетние побеги и цветочных почек в особо суровые зимы, следствием чего является нерегулярное цветение и плодоношение. Сюда отнесены в том числе недавно поступившие в коллекцию виды, еще не прошедшие период адаптации, но их высокая зимостойкость позволяет надеяться, что со временем они могут перейти в первую группу. Это – *Kalmia latifolia* L., *Leucothoe fontanesiana* (Steud.) Sleum., *Pieris japonica* (Tunb.) G. Don. и др.

III группа – неперспективные виды, их 9. Представители данной группы сильно подмерзают даже в обычные зимы. Все они (*Arctous alpina* (L.) Nied., *Loiseleuria procumbens* (L.) Desv., *Moneses uniflora* (L.) A. Gray, и др.) имеют значительный отпад или гибнут при первой же перезимовке в незащищенном грунте. Большинство этих видов не цветет совсем по причине вымерзания цветковых почек или цветет скудно и лишь после весьма благоприятного зимнего периода. В итоге у этих видов затрудняется или чаще полностью неосуществимо семенное размножение, поэтому большинство этих таксонов исчезло из коллекции ботанического сада.

Анализ коллекции по местам происхождения видов показал, что наибольшее их количество (16 видов) имеет циркумбореальное распространение, охватывающее бореальную зону Северной Америки, Европы и Азии (таблица 3). Эта же группа имеет большое количество зимостойких видов (14), что составило 87,5 % от всех вересковых, интродуцированных в сад. Затем по доле зимостойких видов в коллекции семейства вересковых следуют дальневосточные и кавказские виды (80 и 66,7 % соответственно).

Таблица 3 – Зимостойкость видов коллекции вересковых ботсада ВГУ имени П.М. Машерова в зависимости от их происхождения

Родина	Количество видов, шт.	Количество зимостойких видов, шт.	Доля зимостойких видов, %	I группа перспективности, шт. (%)	II группа перспективности, шт. (%)	III группа перспективности, шт. (%)
Северная Америка	9	5	55,6	4 (44,4)	5 (55,6)	
Кавказ	3	2	66,7	1 (33,3)	2 (66,7)	
Япония	6	2	40	1 (16,7)	4 (66,6)	1 (16,7)
Дальний Восток	5	4	80	2 (40)	3 (60)	
Европа	4	2	50	2 (50)	1 (25)	1 (25)
Циркумбореальное распространение	16	14	87,5	7 (43,8)	2 (12,4)	7 (43,8)

Среди групп перспективности на I группу приходится большее количество видов (7), имеющие на циркумбореальное распространение и на виды Северной Америки (4). Виды II группы перспективности с достаточно высокой зимостойкостью и перспективой перехода в I группу в большей степени представлены видами Северной Америки (5), Японии (4) и Дальнего Востока (3). Среди III группы (неперспективные виды) в основном представлены виды, происходящие из Северной Америки, Европы и Азии, но занимающие более южную часть области распространения либо высокогорья, имеющих узкую экологическую амплитуду (7 видов). Растения этой группы в новых условиях существования находятся в наиболее угнетенном состоянии из-за наименьшего соответствия этих условий их экологическим потребностям.

Заключение

Анализ представителей семейства вересковые в коллекции Ботанического сада ВГУ имени П.М. Машерова показал, что она достаточно интересна как в научном, так и для целей озеленения.

Многие изучаемые виды и разновидности семейства вересковые способны акклиматизироваться в условиях северо-востока Белорусского Поозерья, успешно зимовать и осуществлять полноценный цикл развития.

Выделены 3 группы видов по перспективности выращивания в условиях севера Беларуси. Более полно представлены виды области циркумбореального распространения – 16 видов. Среди зимостойких преобладают виды циркумбореального ареала, Северной Америки и Дальнего Востока, что обусловлено схожестью климатических условий.

Интродуцируемые изучаемые виды, разновидности и сорта представителей семейства вересковых сохраняют в культуре естественную жизненную форму, характер роста и формирования габитуса близкого к природному.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Курлович, Т. В. Вересковый сад в ландшафтном дизайне / Т. В. Курлович. – М. : Кладезь-Букс, 2011. – 144 с.
2. Ботяновский, И. Е. Рододендроны / И. Е. Ботяновский. – Мн. : Красико-Принт, 2007. – 63 с.
3. Шкляр, А. Х. Климатические ресурсы Белоруссии и их использование в сельском хозяйстве / А. Х. Шкляр. – Минск: Вышэйшая школа, 1973. – 432 с.

4. **Морозов, И. М.** Представители семейства *Ericaceae* в коллекции ботанического сада ВГУ имени П.М. Машерова / И. М. Морозов, Ю. И. Высоцкий, И. М. Морозова, Е. Ф. Турчинович // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73 Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11 марта 2021 г. / Витебский государственный университет; редкол. : Е. Я. Аршанский (гл. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2021. – С. 104–106.
5. Методика фенологических наблюдений в ботанических садах СССР. – М.: Издательство ГБС АН СССР, 1975. – 28 с.
6. **Зайцев, Г. Н.** Фенология древесных растений / Г. Н. Зайцев. – М. : Наука, 1981. – 120 с.
7. **Коровин, С. Е.** Переселение растений: Методические подходы к проведению работ / С. Е. Коровин, З. Е. Кузьмин, Н. В. Трулевич, А. Н. Швецов. – М. : Издательство МСХА, 2001. – 76 с.
8. **Юркевич, И. Д.** Фенологические исследования древесных и травянистых растений / И. Д. Юркевич, Д. С. Голод, Э. П. Ярошевич. – Мн. : Наука и техника, 1980. – 28 с.
9. **Тахтаджян, А. Л.** Флористические области земли / А.Л. Тахтаджян. – Л. : Наука, 1978. – 247 с.

Поступила в редакцию 23.11.2022 г.

Контакты: morozovainna889@gmail.com (Морозова Инна Михайловна, Морозов Иван Михайлович, Турчинович Екатерина Федоровна, Москалева Надежда Викторовна)

***Morozova I. M., Morozov I. M., Turchinovich E. F., Moskaleva N. V.* WINTER HARDINESS OF HEATHER (*ERICACEAE*) IN THE BOTANICAL GARDEN OF VSU NAMED AFTER P.M. MASHEROV**

Some results of the introduction of 43 species and varieties of plants of the Ericaceae family in the botanical garden of Vitebsk State University named after P.M. Masherov are provided. Winter hardiness of the representatives of the Heather family in the collection, their habitats, biological and morphological features, stability in culture and potential for their generative reproduction are analyzed.

Keywords: family Ericaceae, introduction, life form, Belarusian Poozerie, winter hardiness.

УДК 579.6

ВЛИЯНИЕ ПИЩЕВОГО РАЦИОНА, ПРЕБИОТИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВ, ПРОБИОТИЧЕСКИХ МИКРООРГАНИЗМОВ НА МИКРОБИОЦЕНОЗ *ORYCTOLAGUS CUNICULUS*

О. В. Поворова

старший преподаватель

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. В. Хурсан

студент 2 курса

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

М. С. Бибилова

студент 3 курса

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В связи с различием кормовой базы (наличия поливитаминных добавок, зеленых, грубых и концентрированных кормов) определены особенности в составе и количестве микробиоты толстого и тонкого отделов кишечника. С помощью метода диффузии в агар исследовалось влияние фармацевтических пробиотиков на аутохтонную микрофлору кишечника кроликов. Дотации яблок в ежедневный рацион питания кролика, добавление яблочного и цитрусовых пектинов в питательные среды при культивировании пробиотических микроорганизмов увеличивали их количественный и качественный состав.

Ключевые слова: микрофлора кишечника кролика, рацион питания, пребиотические вещества, пробиотические микроорганизмы.

Введение

В настоящее время в кролиководстве распространено профилактическое и терапевтическое использование микроорганизмов, представляющих собой активные живые культуры, предназначенные для восстановления и поддержания полезной микрофлоры желудочно-кишечного тракта (ЖКТ) животных. Негативное влияние патогенной микрофлоры, поступающей в организм с кормом и водой низкого санитарно-гигиенического качества, животные испытывают постоянно. Изменение микрофлоры ЖКТ чаще происходит в результате различных неблагоприятных воздействий: смены рационов, состава комбикорма, нарушения режимов кормления, использования недоброкачественных кормов [1; 2]. Известно, что для стимуляции роста полезной микрофлоры кишечника используются фармацевтические пробиотики и источники пребиотических веществ [3; 4; 5], поэтому *актуальностью настоящего исследования* является изучение изменения микробиоты кишечника кролика под влиянием пребиотических веществ. На изменения микробиоты животных влияют многочисленные факторы, поэтому в целях предупреждения дисбактериоза и повышения общей резистентности организма животных изучают биоразнообразие кишечного биоценоза [6; 7], механизмы воздействия пребиотических веществ и пробиотических микроорганизмов на микрофлору кишечника, что отражает новизну исследований.

© Поворова О. В., Хурсан А. В., Бибилова М. С., 2023

Цель исследования – определить влияние кормовой базы, фармацевтических пробиотических микроорганизмов и пребиотических веществ на микрофлору кишечника *Oryctolagus cuniculus*.

Материалы и методы исследований

Объект исследования – *Oryctolagus cuniculus* от самок из одного помета (порода Серебристый), покрытых одним самцом (порода Серый великан).

Предмет исследования – микробиоценоз кишечника *Oryctolagus cuniculus*; пробиотические микроорганизмы фармацевтических препаратов, пищевой рацион, пребиотик – свежие яблоки. В течении 4 месяцев изучалось влияние особенностей пищевого рациона на многообразие микрофлоры кишечника кроликов трех групп (по три кролика в каждой группе):

– Г1 – кормление: грубые корма (сено из разнотравья, ветки клена, березы и липы), зеленые корма (клевер, листья кормовой капусты, морковная ботва и корнеплоды), концентрированные корма (зерно кукурузы и овса; комбикорм для кроликов КК-92);

– Г2, Г3 – имели одинаковый рацион питания: грубый корм (сено тимофеевки) и концентрированный корм – смесь, состоящая из ячменного зерна и кроличьего комбикорма (КК-92);

– Г3 – ежедневная дотация к рациону по одному яблоку как источнику пребиотических веществ.

Большая часть исследований по многообразию микрофлоры кишечника проводится на фекалиях животных. Существуют различия [1] в микробиоценозах кишечника и цекатрофов (первичный кал, покрытый слизистой оболочкой), поэтому мы изучали культивируемую микробиоту из тонкого кишечника (5 см от желудка), толстого кишечника (2 см от анального отверстия) методом изучения общей бактериальной обсемененности участка 1 см² (отмывание тампона в 5 мл 0,1% раствора хлорида натрия) с высевом на МПА, дифференциально-диагностические среды. Для определения *Escherichia* делали посев на среду Эндо, Левина с последующим высевом на МПА; для определения *Lactobacillus* – на среду Бликфельда; *Enterococcus* – полимиксиновый агар. Культивировали при 34°C 2–3 суток для изучения многообразия, одни сутки для изучения антагонистических свойств пробиотических микроорганизмов. Стандартная фармацевтическая упаковка лиофилизированных микроорганизмов, исследуемых пробиотиков, содержит следующие микроорганизмы: – «Диалакт» – *Lactobacillus acidophilus*; «Бифидумбактерин» – *Bifidobacterium bifidum*; «Пропер-мил» – *Cryptococcus albidus*, *Candida tropicalis*, *Saccharomyces cerevisial*. Фармацевтические препараты изначально содержали разное количество бактериальных клеток на одну дозу согласно инструкции («Пропер-мил» 10⁶ КОЕ/0,01 г, «Диалакт» 10⁸ КОЕ/0,47 г, «Бифидумбактерин» – 10⁷ КОЕ/0,62 г), поэтому приводили к единой минимальной концентрации 10⁶ КОЕ («Диалакт» 0,0062 г, «Бифидумбактерин» 0,047 г, «Пропер-мил» 0,01 г), растворяя в 1 мл стерильной дистиллированной воды. Отдельно в каждый из полученных растворов с помощью стерильного пинцета погружался стерильный диск фильтровальной бумаги и затем переносился на колонию микроорганизмов биоптата кишечника. Методом диффузии в агар определялся характер взаимоотношений резидентной микрофлоры кишечника и пробиотических микроорганизмов *in vitro*.

Результаты исследований

В ходе исследования изучали состав микрофлоры тонкого и толстого отделов кишечника кроликов трех групп в зависимости от рациона питания и включения пребиотиков. В связи с различием кормовой базы (наличия поливитаминовых добавок, зеленых, грубых и концентрированных кормов) менялся и микробиоценоз объектов исследования трех групп. Обнаруженные микроорганизмы кишечника кроликов классифицировались нами в зависимости от наличия пробиотических свойств.

1. Микробиоценоз кишечника *Oryctolagus cuniculus*.

При культивировании микроорганизмов кишечника исследуемых объектов, имеющих разную кормовую базу, были определены 7 родов микроорганизмов: *Escherichia*, *Ruminococcus*, *Eubacterium*, *Bacillus*, *Lactobacillus*, *Enterococcus*, *Bacteroides*.

При анализе микрофлоры замечен схожий видовой состав микробиоты тонкого и толстого отделов. В толстом кишечнике определены 6 родов микроорганизмов: *Escherichia*, *Ruminococcus*, *Eubacterium*, *Bacillus*, *Lactobacillus*, *Bacteroides*), в тонком – 5 родов микроорганизмов (*Escherichia*, *Bacillus*, *Lactobacillus*, *Enterococcus*, *Bacteroides*). Различное содержание и биоразнообразие микроорганизмов тонкого и толстого отделов кишечника обусловлено разными условиями среды пригодными для обитания представителей микробиоценоза. Количественное содержание микроорганизмов в разных отделах кишечника неодинаково. Для сравнения использовались средние значения по толстому и тонкому отделам кишечника.

Количество микроорганизмов толстого кишечника значительно превышает численность микробиоты тонкого отдела. Преобладание *Bacteroides* в 1,4 раза, *Lactobacillus* – 1,3, *Escherichia* – 1,5 раза ($p < 0,01$). Однако отсутствует *Enterococcus*, который по справочным данным численно преобладает в тонком отделе. Содержание *Bacillus* в 1,2 раза меньше. На количественный и качественный показатель биоценоза слизистых отделов кишечника оказывают ряд факторов, например, содержание кислот, таких как масляная, уксусная, обладающих бактерицидными свойствами.

2. Влияние пищевого рациона и пребиотических веществ на микробиоценоз кишечника *Oryctolagus cuniculus*.

Нами исследовалось влияние пищевого рациона на смену экологических ниш биоценоза кишечника кролика. В результате различий в получаемых питательных веществах наблюдалось расхождение в составе и количестве микробиоты толстого и тонкого отделов кишечника каждого из объектов.

Полученные данные по растительным материалам можно рекомендовать к практическому использованию в животноводстве, при бактериологических исследованиях для повышения числа культивируемых микроорганизмов. Разные виды кормов содержат разные по количеству и качеству питательные вещества. Следовательно, для правильного кормления животных необходимо использовать не один вид корма, а делать смесь из нескольких видов кормов. Введение стимуляторов роста и размножения пробиотических микроорганизмов имеет практическое значение при добавлении яблок в рацион питания кроликов, яблочных пектатов в питательные среды для культивирования молочнокислых, пропионовокислых бактерий.

2.1 Влияние пищевого рациона на микрофлору тонкого отдела кишечника.

Максимальный рост пробиотических микроорганизмов определен при добавлении растительных пектинов в питательные среды при культивировании прока-

риот. Рост лактобактерий на средах, содержащих цитрусовые пектины, более эффективен в 1,7 раз по сравнению с контрольной средой, а на средах, содержащих яблочные пектины – в 1,8 раз. Культивирование бифидобактерий более эффективно также на средах с пектатами яблок и цитрусовых: в 1,7 раз выросло колоний больше по сравнению с контролем. На средах с добавлением глюкозы рост лактобактерий хуже в 1,4 раза, бифидобактерий – в 1,5 раз хуже по сравнению с контрольной средой. Таким образом, на питательных средах, содержащих яблочный и цитрусовый пектины, КОЕ пробиотических микроорганизмов выше в 1,7–1,8 раз, а на питательной среде с глюкозой – ниже в 1,4–1,5 раз по сравнению со средами, не содержащих факторов роста микроорганизмов.

Лактобактерии и бифидобактерии утилизируют яблочный и цитрусовый пектаты разными механизмами, при этом бифидобактерии образуют масляную кислоту, лактобактерии – пропионовую и изовалерьяновую. В системе «пробиотик – пребиотик» скорость утилизации факторов роста, добавляемых при культивировании в питательные среды, максимальна в начальный момент и снижается со временем. Обе бактериальные культуры в отношении добавочных веществ к среде имеют одинаковый характер поведения: в первые 1,5 ч используют моносахарид глюкозу, затем максимально утилизируют яблочный пектат.

В тонком кишечнике были определены роды микроорганизмов: Г1 – *Lactobacillus*, *Bacteroides*, *Bacillus*, *Escherichia*; Г2 – *Bacteroides*, *Bacillus*, *Escherichia*; Г3 – *Lactobacillus*, *Bacteroides*, *Enterococcus*, *Bacillus*. Больше количество микроорганизмов наблюдается у Г1, который получал более сбалансированное и полноценное питание. Наличие лактобактерий в тонком кишечнике не определено у Г2. Лактобактерии тонкого кишечника оказывают большое влияние на синтез иммуноглобулина, который формирует иммунитет, следовательно, полноценное и разнообразное питание повышает и укрепляет иммунную защиту организма. Г2 имеет практически тот же состав микрофлоры, что и Г1, но разное число микроорганизмов в количественном соотношении, *B. succinogenes* меньше на 20 единиц, *Bacillus* – больше на 80 единиц, *Escherichia* – меньше на 220 единиц, *Lactobacillus* отсутствует. Г3 содержит значительно большее количество *Bacteroides* – в 1,6 и 1,7 раз в сравнении с Г1 и Г2 ($p < 0,01$). *Enterococcus* определен только у Г3.

Объекты исследования Г3 имели один рацион с Г2, но наблюдается существенное отличие состава и количества микрофлоры в связи с дотациями яблок в Г3. Яблоко является источником пектиновых веществ, которые оказывают стимулирующее действие на перистальтику кишечника (эвакуация содержимого значительно ускоряется), а также на состав микрофлоры: угнетается жизнедеятельность патогенной и условно-патогенной микрофлоры, стимулируется рост полезной аутохтонной. *Escherichia* в Г3 не обнаружена. Пектиновые вещества, таким образом, могут рассматриваться как эффективное средство оздоровления кишечника.

2.2 Влияние пищевого рациона на микрофлору толстого отдела кишечника.

В отличие от тонкого отдела, в толстом отделе кишечника определено большее разнообразие микроорганизмов. В толстом кишечнике определены следующие роды микроорганизмов: Г1 – *Lactobacillus*, *Bacillus*, *Eubacterium*, *Ruminococcus*, *Escherichia*; Г2 – *Bacteroides*, *Lactobacillus*, *Ruminococcus*; Г3 – *Bacteroides*, *Lactobacillus*, *Ruminococcus*. Т.к. питание Г3 являлось более разнообразным и полноценным, включая большое количество клетчатки, поэтому у кроликов данной группы присутствуют в значительной степени целлюлозолитические бактерии (*Eubacterium*,

Ruminococcus), повышающие перевариваемость клетчатки. Целлюлозолитические бактерии очень чувствительны к понижению pH среды, поэтому их значительно меньше в толстом кишечнике Г3, т.к. яблочный пектин стимулирует рост лактобактерий (*Lactobacillus*), которые повышают кислотность среды. Помимо лактобактерий в биоптате толстой кишки кроликов Г3 обнаружено значительное количество *Bacteroides*.

По результатам наших исследований поверхностное покрытие питательной среды колониями лактобактерий из толстого и тонкого кишечника не имеет различий у кроликов Г2 (не имели яблок в качестве дотаций к рациону питания). Культивирование микроорганизмов скарификатов кишечника кроликов, питающихся яблоками, показал массовый рост (около 95% обсеменения питательной среды чашки Петри) лактобактерий из толстого кишечника и выше среднего показатель роста (60-70% поверхностного покрытия среды) данных микроорганизмов из биоптата тонкого кишечника. Таким образом, ежедневное употребление яблок (как пребиотических веществ) в рационе питания стимулирует рост и размножение микроорганизмов с пробиотическими свойствами.

Сходство по биоразнообразию микроорганизмов толстого кишечника Г2 и Г3 объясняется практически идентичным рационом питания. Кишечная палочка не определена в данном отделе кишечника у объектов Г2 и Г3.

Таким образом, полноценный рацион, содержащий все виды кормов, стимулирует рост целлюлозолитических микроорганизмов и лактобактерий. Пектиновые вещества оказывают стимулирующее действие на рост пробиотической микрофлоры, при этом подавляют жизнедеятельность условно-патогенной и патогенной микрофлоры, тем самым устраняя и препятствуя возникновению гнилостных процессов в кишечнике.

3. Влияние фармацевтических пробиотиков на микрофлору кишечника *Oryctolagus cuniculus*.

С помощью метода дисков изучалась чувствительность индигенных микроорганизмов кишечника к пробиотикам. Зона воздействия фармацевтических пробиотиков на резидентную микрофлору измерялась в мм.

Микрофлора кишечника включает определенные роды микроорганизмов, обладающих пробиотической активностью. Среди выделенных микроорганизмов пробиотической активностью обладают *Lactobacillus*, которые синтезируют широкий спектр веществ, ингибирующих рост других бактерий. К этим веществам относятся конечные продукты метаболизма, такие как органические кислоты (молочная и уксусная), перекись водорода, бактериоцины: лизоцим, низин, лактоцидин, ацидофилин. Бактериоцины – белки, которые продуцируются микроорганизмами и оказывают губительное действие на близкородственные микроорганизмы. Бактериоцины имеют меньший спектр активности, чем антибиотики, но действие их более выражено. Антимикробную активность лактобактерий объясняют способностью продуцирования перекиси водорода. Кроме того, антимикробная активность связана со стимуляцией иммунной системы: стимулируют фагоцитарную активность нейтрофилов, макрофагов, синтез иммуноглобулинов, интерферонов, ИЛ-1, ФНО-альфа. Резидентная микрофлора за счет создания зоны закисления (лактобактерии – pH до 4,0, бифидобактерии – pH до 5,0) конкурирует за сайты адгезии на энтероцитах с другими бактериями, тем самым создавая защитную биопленку на поверхности слизистой оболочки кишечника. Изучение ассоциаций

микроорганизмов слизистых кишечника при формировании микрoэкологического дисбаланса (состояние дисбактериоза), подбор микрофлоры и способов для коррекции микроценоза позволяет изменить состав микробных ассоциаций, повысить уровень сопротивляемости макроорганизма по отношению к воздействующим внешним факторам [8].

«Диалакт» и «Бифидумбактерин» оказывают бактериостимулирующее действие на микроорганизмы, обладающие пробиотическими свойствами, *Lactobacillus* (зона роста от 1 до 3 мм), бактерицидное действие в отношении *Enterococcus* (зона угнетения – 1–2 мм), бактериостатическое – *Escherichia*, *Bacillus* (1,5–3 мм). «Бифидумбактерин» стимулировал рост *Ruminococcus*, *Eubacterium*, *Bacteroides*, «Диалакт» оказывал бактериостатическое действие на данные микроорганизмы. Бактериостатическое действие заключается в задержке роста и размножения микроорганизмов, но не гибели, в то время как бактерицидное действие предполагает полное угнетение жизнедеятельности. «Пропер-мил» не оказал никакого воздействия на микроорганизмы кишечника.

Для сохранения и восстановления колонизационной резистентности эубактерий назначаются фармацевтические препараты, содержащие пробиотические микроорганизмы. Актуальным является увеличение эффективности употребляемых пробиотиков [9; 10]. Таким образом, анализ микрофлоры кишечника исследуемых кроликов показывает примерную однородность состава микроорганизмов, но разную их численность в зависимости от разнообразия питательных веществ в рационе питания. Наблюдается различное воздействие пробиотиков фармацевтических препаратов на микробиоценоз кишечника в связи с наличием или отсутствием пробиотических свойств микроорганизмов кишечной микрофлоры.

Добавление яблок в рацион питания кроликов в качестве источников пектиновых веществ, обладающих пребиотическими свойствами, оказывает благоприятное воздействие на кишечную микрофлору, подавляя развитие патогенной и условно-патогенной микрофлоры. Благоприятное влияние пектинов на кишечную микрофлору объясняется их коллоидными свойствами и высокой адсорбционной способностью, а также кислой реакцией и образованием при расщеплении в кишечнике ионов металлов, обладающих высокой каталитической активностью. Изучается вопрос о механизме действия пектинов. В качестве средств, нормализующих жизнедеятельность полезной кишечной микрофлоры, может рассматриваться и клетчатка, ранее относимая к балластным веществам. Особенно ценна в этом отношении клетчатка овощей (картофель, свекла, капуста и др.) и фруктов (яблоки, апельсины и др.). Клетчатка зерновых продуктов (хлеб, крупы и др.) в меньшей степени влияет на кишечную флору. При обогащении пищевого рациона свежими овощами и фруктами, богатыми органическими кислотами, пектиновыми веществами и активной клетчаткой, отмечается высокий нормализующий эффект на кишечную микрофлору.

Заключение

Таким образом, проанализировав полученные в ходе исследования результаты, можно сделать следующие выводы:

1. В микрофлоре толстого и тонкого кишечника кролика определено 7 родов микроорганизмов: *Escherichia*, *Ruminococcus*, *Eubacterium*, *Bacillus*, *Lactobacillus*, *Bacteroides*, *Enterococcus*. В количественном отношении в толстом отделе кишечни-

ка культивируемых прокариот больше, чем в тонком кишечнике. Биоразнообразие микроорганизмов толстого и тонкого отделов не имеют значительных различий.

2. В зависимости от качественного состава пищевого рациона менялся состав микрофлоры. Г1 имел более полноценный рацион, состоящих из всех видов кормов, имел 6 родов микроорганизмов в биооптате кишечника, Г2 и Г3 – по 5 родов. В биоценозе кишечника Г3, рацион питания которого был дополнен яблоками в качестве источника пребиотических веществ, наблюдается значимое увеличение лактобактерий, бактероидов, руминококков, энтерококков и не обнаружена кишечная палочка. Пребиотические вещества стимулируют рост пробиотических микроорганизмов и подавляют жизнедеятельность патогенной, условно-патогенной микрофлоры.

3. Фармацевтические препараты оказывали различное действие на микрофлору кишечника. «Диалакт» и «Бифидумбактерин» оказывают бактериостимулирующее действие на *Lactobacillus* (зона роста 1–3 мм), бактерицидное действие в отношении *Enterococcus* (зона угнетения – 1–2 мм), бактериостатическое – *Escherichia, Bacillus* (1,5–3 мм). «Бифидумбактерин» стимулировал рост *Ruminococcus, Eubacterium, Bacteroides*, «Диалакт» оказывал бактериостатическое действие на данные микроорганизмы. Комбинированный препарат «Пропер-мил» не оказывал воздействия на микрофлору кишечника.

По результатам исследования можно рекомендовать яблоко в качестве дотации к питанию для профилактики дисбактериоза и повышения численности полезной кишечной микрофлоры у животных, а также с возможностью применения и у человека. Исследованию влияния пробиотиков и пребиотиков на гомеостаз человека посвящено много работ. Подобные работы в животноводстве ведутся, однако их недостаточно. В первую очередь это имеет практическое промышленное значение с целью получения здорового племенного хозяйства. Актуально это и в исследовательском плане, учитывая физиологические особенности пищеварения кроликов и их форму восстановления резидентной микрофлоры. Для лечения дисбактериоза людям назначают прием фармацевтических пробиотиков, что имеет ряд недостатков и низкую эффективность. Внедряются методы культивирования личной аутохтонной микрофлоры индивидуально для каждого пациента. Однако эти работы находятся на начальных этапах внедрения, поэтому использование животных в качестве макетной системы позволит не только экстраполировать полученные данные на человека, а также иметь удобную площадку для работы с эволюционно закрепленной формой поддержания гомеостаза макроорганизма. Перспективным является подбор пребиотических продуктов питания, позволяющий культивировать индивидуальную резидентную микрофлору с последующим использованием в качестве пробиотиков.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Velasco-Galilea, M.* Rabbit microbiota changes throughout the intestinal tract / M. Velasco-Galilea, M. Piles, M. Viñas, et. al. // *Frontiers in Microbiology*. – 2018. – Vol. 9. – URL: <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fmicb.2018.02144>
2. *Cui, Y.* Age-related variations in intestinal microflora of free-range and caged hens / Y. Cui, Q. Wang, S. Liu et. al. // *Frontiers in Microbiology* – 2017. – Vol. 8. – URL: <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fmicb.2017.01310>
3. *Овчарова, А. Н.* Новые пробиотические препараты на основе *Lactobacillus reuteri* и перспективы использования их в животноводстве (обзор) / А. Н. Овчарова, Е. С. Петраков // *Проблемы биологии продуктивных животных*. – 2018. – № 2. – С. 5–18. DOI:10.25687/1996-6733.prodanimbiol.2018.2.5-18.

4. **Омельченко, Н. Н.** Микробиоценоз желудочно-кишечного тракта кроликов при использовании кормовой пробиотической добавки «Бацелл-М» / Н. Н. Омельченко, И. М. Калошкина, А. А. Лысенко // Ветеринария Кубани. – 2017. – № 1. – С. 17–19.
5. **Громова, А. В.** Биологический состав микрофлоры кишечника кроликов породы советская шиншилла в возрастном аспекте / А. В. Громова, Г. А. Ноздрин, А. А. Лемяк // Вестник НГАУ. – 2015. – Т. 36, № 3. – С. 54–59.
6. **Евсютина Ю. В.** Пробиотики в профилактике и лечении заболеваний желудочно-кишечного тракта / Ю. В. Евсютина // РМЖ. – 2018. – № 3. – С. 18–22.
7. **Рылова, Н. В.** Роль микробиоты кишечника в поддержании гомеостаза организма / Н. В. Рылова, А. В. Жолинский, А. С. Самойлов // Современные проблемы науки и образования. – 2019. – № 6. – URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=29490>
8. **Новиков, Д. К.** Иммунокоррекция, иммунопрофилактика, иммунореабилитация / Д. К. Новиков, П. Д. Новиков, Н. Д. Титова. – Витебск : ВГМУ, 2006. – 198 с.
9. **Овчарова, А. Н.** Влияние пробиотических лактобацилл на неспецифическую резистентность и физиологические показатели лабораторных животных / А. Н. Овчарова, О. В. Софронова, Л. Л. Полякова // Фармакокинетика и фармакодинамика. – 2019. – № 2. – С. 28–31. DOI:10.24411/2587-7836-2019-10043.
10. **Трухан, Д. И.** Нарушения кишечного микробиоценоза: расширение сферы применения пробиотиков / Д. И. Трухан // Медицинский совет. – 2022. – Т. 16, № 7. – С. 132–143. – Режим доступа: <https://doi.org/10.21518/2079-701X-2022-16-7-132-143>.

Поступила в редакцию 26.09.2022 г.

Контакты: rovogov@mail.ru (Поворова Оксана Викторовна)

a.v.hursan@gmail.com (Хурсан Анастасия Вячеславовна)

masha.bibikova.45@gmail.com (Бибикова Мария Сергеевна)

Povarava A. V., Khursan A. V., Bibikava M. S. THE EFFECT OF DIETARY INTAKE, PREBIOTIC SUBSTANCES, PROBIOTIC MICROORGANISMS ON THE MICROBIOCENOSIS OF *ORYCTOLAGUS CUNICULUS*

Due to the difference in the feed base (the presence of multivitamin supplements, green, coarse and concentrated feeds), the peculiarities in the composition and quantity of the microbiota of the large and small intestine have been determined. The effect of pharmaceutical probiotics on the autochthonous intestinal microflora of rabbits has been studied using the agar diffusion method. Subsidies of apples to the rabbit's daily diet, the addition of apple and citrus pectins to nutrient media during the cultivation of probiotic microorganisms have increased their quantitative and qualitative composition.

Keywords: rabbit intestinal microflora, diet, prebiotic substances, probiotic microorganisms.

УДК 577.:796.012

ОСОБЕННОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БИОХИМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КРОВИ ТОЛКАТЕЛЕЙ ЯДРА ВЫСОКОЙ КВАЛИФИКАЦИИ

А. А. Кирейцев

преподаватель-стажер

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Н. Б. Панасюк

доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Исследование было проведено с целью выявления возможных предикторов высокой результативности в толкании ядра. Обнаружено достоверное влияние (обратная корреляция) содержания глюкозы и аспаратаминотрансферазы (АСТ) в венозной крови на спортивный результат в толкании ядра. Выявление разнообразных предикторов повышает прогностические возможности спортивного отбора и в последующем помогает правильно организовать индивидуальную программу подготовки, что позволит спортсмену максимально реализовать потенциал с минимальным напряжением компенсаторных механизмов.

Ключевые слова: биохимические показатели крови, гликемический индекс, спорт.

Введение

Актуальность оптимизации затрат ресурсов во время тренировочного процесса всегда важна. Концентрация ресурсов на наиболее перспективных спортсменах позволяет максимально раскрыть их потенциал. Поиск прямых «указателей» перспективных спортсменов актуален уже на этапе отбора в спортивную секцию. Выявление предикторов осуществляется в разных направлениях, включая физиологические, антропометрические и молекулярно-генетические методы [1; 2; 3]. Наше исследование ставит перед собой цель найти такой «указатель» в анализах венозной крови спортсменов.

Основная часть

Исследование проведено на базе ГСУСУ «Могилевский областной центр олимпийского резерва по легкой атлетике и игровым видам спорта». Цель исследования – выявить возможные предикторы высоких достижений в толкании ядра на подготовительном этапе тренировочного процесса. В исследовании приняли участие здоровые спортсмены-легкоатлеты в возрасте 17–19 лет, 6 женщин, 5 мужчин. Контроль состояния здоровья атлетов осуществлялся посредством методов лабораторной диагностики – общий анализ крови, биохимический анализ крови и анализ крови на гормоны. Забор крови проводился на протяжении всего подготовительного периода, который длился 6 месяцев, с сентября по февраль. За весь период наблюдения забор крови осуществлялся один раз в месяц. Исследовались такие биохимические показатели крови, как уровень мочевины, креатинкиназы (КФК), аспаратаминотрансферазы (АСТ), аламинотрансферазы

© Кирейцев А. А., Панасюк Н. Б., 2023

(АЛТ), глюкозы и лактата, оценивалось содержание в венозной крови таких гормонов, как тестостерон и кортизол, отслеживался уровень гемоглобина и количество лейкоцитов (общий клинический анализ крови). В последующем осуществлялся поиск корреляций между указанными выше параметрами и результативностью выступлений спортсменов на спортивных турнирах различного уровня (регионального и международного) – расстояние полета ядра в метрах, таблица 1. Статистический анализ проводился с использованием программного пакета STATISTICA 13.0.

Таблица 1 – Результаты статистического анализа корреляции биохимических показателей крови и результативности выступления на соревнованиях по толканию ядра

Показатель	Коэффициент корреляции	Критерий значимости
Креатинкиназа (КФК)	-0,28507	p<0,05
Мочевина	-0,34814	
Глюкоза	-0,92796	
Тестостерон	0,758538	
Кортизол	-0,20837	
Аспаргатаминотрансфераза АСТ	-0,60727	

В результате статистического анализа была выявлена устойчивая обратная корреляция между уровнем гликемии и АСТ в крови спортсменов и их показателями на итоговых соревнованиях по толканию ядра. Спортсмены, чей уровень глюкозы и АСТ в венозной крови во время подготовительного периода был выше демонстрировали на соревнованиях более низкие результаты (рисунки 1, 2).

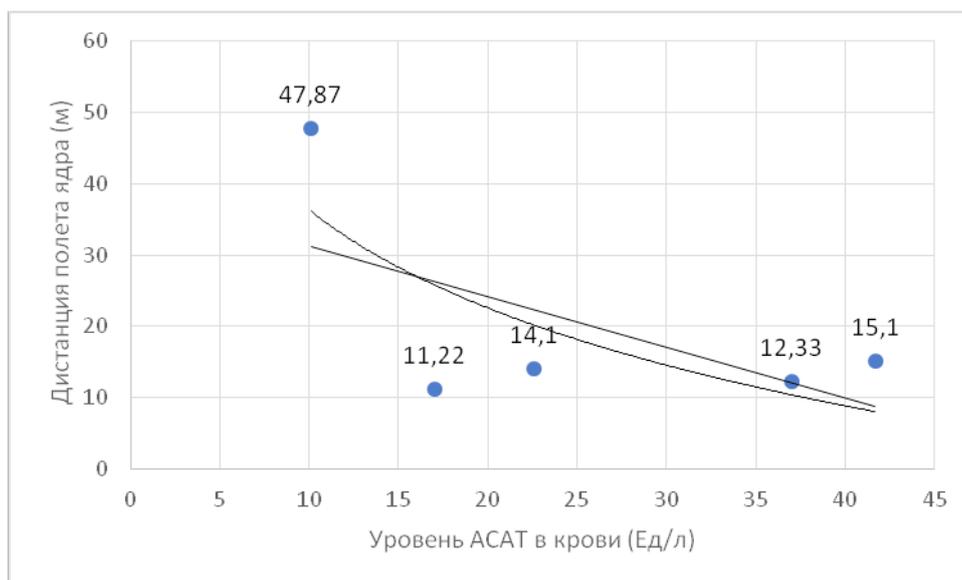


Рисунок 1 – Корреляция между содержанием АСАТ в венозной крови и результативностью выступлений на соревнованиях по толканию ядра

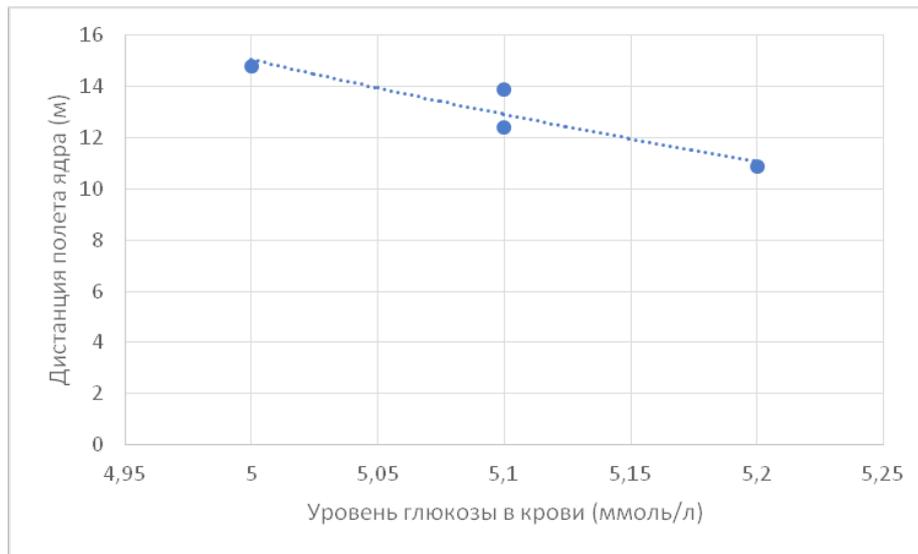


Рисунок 2 – Залежність спортивного результату від рівня глікемії

Обратная корреляция между уровнем АСТ и спортивным результатом вызывает множество вопросов. Поскольку повышенное содержание данного фермента в плазме крови обычно свидетельствует о массивном разрушении различных тканей, в том числе и волокон скелетных мышц, что является естественным процессом при интенсивных физических нагрузках [1; 4; 5].

Получив такой неординарный результат, мы тщательно проанализировали литературу по соответствующей тематике и обнаружили исследование, в котором изучалось влияние уровня глюкозы в крови на продуктивность физической работы при аэробных нагрузках [6; 7].

В ходе исследования оценивали влияние высокоуглеводной диеты western diet (WD) на ультраструктурные изменения в скелетных мышцах. Было обнаружено, что неспособность улучшить переносимость физических нагрузок при такой модели питания не зависит от количества висцерального жира и содержания инсулина, а обусловлена, прежде всего, вызванными гипергликемией, изменениями во внеклеточном матриксе (ECM – extracellular matrix) скелетных мышц и модификацией (нарушением) передачи сигнала в синапсах. В частности, наблюдается увеличение плотности внеклеточного матрикса, что усугубляет механический стресс (напряжение мышцы) при физических нагрузках. Эти фундаментальные изменения структуры мышечного волокна и характера передачи сигналов препятствуют ремоделированию скелетных мышц в сторону аэробного фенотипа, что могло бы способствовать улучшению переносимости физических нагрузок при гипергликемии [8; 9]. Клинические исследования также выявили обратную связь между повышенным уровнем глюкозы натощак и/или низкой толерантностью к глюкозе и максимальным потреблением кислорода (VO_2 peak) [10; 11]. Таким образом, гипергликемия за счет разных механизмов может негативно сказаться на росте тренированности (затормозить улучшение переносимости физических нагрузок).

Длительная гипергликемия способствует стойкому изменению метаболического профиля мышечных волокон, наблюдается трансформация быстрых гликолитических мышечных волокон в сторону «медленного» фенотипа, что нарушает

адаптацию мышцы к аэробным нагрузкам. Мы предполагаем, что эти физиологические и молекулярные сдвиги лежат в основе нарушения адаптации организма к физическим нагрузкам (фенотип низкой переносимости) у людей и животных с метаболическими нарушениями.

Заключение

Статистический анализ биохимических показателей крови спортсменов в подготовительный период позволил выявить наличие обратной корреляции между уровнем глюкозы и АСТ в венозной крови и результативностью на соревнованиях по толканию ядра. Современные исследования подтверждают полученные результаты и указывают на возможные механизмы, которые нарушают адаптацию мышц к аэробной нагрузке при нарушении метаболизма глюкозы.

Дальнейшие исследования будут направлены на выявление, подтверждение или опровержение механизмов развития этих нарушений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Михайлов, С. С. Спортивная биохимия / С. С. Михайлов. – М. : Советский спорт, 2004. – 220 с.
2. Никулин, Б. А. Биохимический контроль в спорте / Б. А. Никулин, И. И. Родионова. – М., 2011. – 232 с.
3. Селезнева, И. С. Биохимические изменения при занятиях физкультурой и спортом: учеб. пособие / И. С. Селезнева, М. Н. Иванцова // М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. – 162 с.
4. Constable, S. H. The specificity of endurance training on muscular power and muscle fibre size / S. H. Constable // Ergonomics. – 1980. – P. 667.
5. Schlager, O. Exercise training increases endothelial progenitor cells and decreases asymmetric dimethylarginine in peripheral arterial disease: a randomized controlled trial / O. Schlager // Atherosclerosis. – 2011. – P. 240–248.
6. Costill, D. L. Muscle fiber composition and enzyme activities of elite distance runners / D. L. Costill // Med. Sci. Sports Exerc. – 1976. – P. 100–105.
7. MacDonald, T. L. Hyperglycaemia is associated with impaired muscle signalling and aerobic adaptation to exercise / T. L. MacDonald et al. // Nature journal. – 2020. – <https://doi.org/10.1038/s42255-020-0240-7>.
8. Crane, J. D. Long-term aerobic exercise is associated with greater muscle strength throughout the life span / J. D. Crane // J. Gerontol. a Biol. Sci. Med. Sci. – 2013. – P. 631–635.
9. Perry, B. D. Muscle atrophy in patients with Type 2 diabetes mellitus: roles of inflammatory pathways, physical activity and exercise / B. D. Perry et al. // Exercise Immunol. Rev. – 2016. – P. 94.
10. Fujita, S. et al. Aerobic exercise overcomes the age-related insulin resistance of muscle protein metabolism by improving endothelial function and akt mammalian target of rapamycin signaling / S. Fujita et al. // Diabetes. – 2007. – P. 1615-1617.
11. Pandey, A. et al. Metabolic effects of exercise training among fitness-nonresponsive patients with type 2 diabetes: the HART-D study / A. Pandey et al. // Diabetes Care 38. – 2015. – P. 1494–1501.

Поступила в редакцию 13.09.2022 г.

Контакты: kirejtsev_aa (Кирейцев Антон Александрович), panasiuk@msu.by (Панасюк Наталья Брониславовна)

Kirejtsev A. A., Panasyuk N. B. CHARACTERISTICS OF BIOCHEMICAL BLOOD TEST PARAMETERS OF PROFICIENT SHOT PUTTERS

The study has been conducted to identify possible predictors of high shot put performance. It has been found that the presence of glucose and aspartate aminotransferase (AST) in venous blood strongly affects (reverse correlation) athletes' performance in the shot put. Various predictors being identified increase the predictive capabilities of selection in the sports and subsequently help to properly arrange an individual training program. This will allow athletes to maximize their potential with minimal stress compensatory mechanisms.

Keywords: biochemical parameters of blood, glycemic index, sport.

УДК 577.352.3+577.115+616-092

ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФОСФОЛИПИДОВ И ИХ ЖИРНОКИСЛОТНОГО СОСТАВА НА СТРУКТУРНО- ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КЛЕТОЧНЫХ МЕМБРАН

А. Н. Осипенко

старший преподаватель кафедры естествознания

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В обзоре представлены данные, касающиеся влияния различных фосфолипидов на структурно-функциональные и физико-химические свойства клеточных мембран. Обращается внимание на то, что крайне важную роль в этом влиянии имеет жирнокислотный состав характерный для того или иного фосфолипида. В статье приводятся данные, касающиеся жирнокислотного состава фосфолипидов, составляющих основу липидного бислоя клеточных мембран. Большое внимание уделено тому, какое влияние на свойства клеточных мембран оказывают плазмалогенные фосфолипиды.

Ключевые слова: клеточные мембраны, фосфолипиды, плазмалогены, жирные кислоты.

Введение

Основу клеточных мембран составляет двойной слой фосфолипидов (ФЛ) жирные кислоты (ацильные радикалы), которых образуют ее нерастворимую в воде середину, а полярные головные группы ФЛ обращены наружу и внутрь клетки, позволяя мембране взаимодействовать с жидкостью по обе стороны [1–3]. У поверхности мембраны ацильные радикалы ФЛ имеют низкую подвижность, ближе к центру амплитуда их колебаний повышается. Существенно она возрастает в области локализации двойных связей, которые создают изгибы в углеводородных цепях жирных кислот (ЖК). При этом в отличие от цепей насыщенных жирных кислот (НЖК) цепи ненасыщенных ЖК не могут лежать параллельно друг другу [1; 3–6]. В результате в водной среде ФЛ формируют не только двойные слои (ламеллярную фазу), но и мицеллярные (сферические или цилиндрические) структуры с направленными в сторону воды полярными группами. Цилиндрические мицеллы (водные каналы, окруженные полярными группами ФЛ) возникают и в бислое, образуя гексагональную фазу. Это вызывает дефекты в бислое, обеспечивает обмен между монослоями и позволяет крупным молекулам проникать через мембрану. Появление локальных участков такой фазы необходимо для разделения (например, при образовании везикул) и слиянии мембран. При слиянии мембран участки гексагональной фазы участвуют в образовании перешейка и поры между мембранами. Ряд ФЛ и таких полиненасыщенных жирных кислот (ПНЖК) как арахидоновой ($C_{20:4}$) и докозагексаеновой ($C_{22:6}$) жирных кислот, концентрируясь в одном из монослоев мембраны, содействуют образованию в ней гексагональной фазы, а также влияют на кривизну мембраны и образование ее изгибов [1; 6–8].

Мембраны клеток различных тканей имеют свой характерный состав ФЛ, ограниченно меняющийся под влиянием внешних условий [3; 5; 9]. Значительные изменения в фосфолипидном составе мембран могут сопровождаться расстройством клеточных функций [6].

В настоящее время информация о влиянии отдельных фосфолипидов и их жирнокислотного состава на структурно-функциональные свойства клеточных мембран носит фрагментарный характер. В этой связи целью данного обзора было обобщение и анализ доступных данных, касающихся раскрытия данного вопроса.

Основная часть

Для различных ФЛ характерен свой набор ЖК. Например, фосфатидилхолин (ФХ), в сравнении с другими глицерофосфолипидами млекопитающих, обычно содержит невысокие доли арахидоновой ($C_{20:4}$) и докозагексаеновой ($C_{22:6}$) кислот, а среди его ненасыщенных кислот преобладают ЖК с 18 атомами углерода [5; 9; 10–13]. Благодаря этому молекулы ФХ имеют цилиндрическую форму и идеально подходят для образования липидного бислоя. По этой причине ФХ обычно количественно преобладает в мембранах животных и составляет большинство ФЛ наружного монослоя. Фосфатидилхолин не вызывает искривления мембран и стабилизирует в них липиды, не склонные к образованию бислоев. Ненасыщенные ацилы ФХ придают мембранам текучесть и противодействуют образованию липидных рафтов – относительно стабильных и упорядоченных участков мембраны, необходимых для трансдукции сигналов через клеточную мембрану [1; 3; 4; 14; 15]. Следует отметить, что ФХ является основным ФЛ в плазме крови, он формирует поверхность липопротеинов и липидных капель в клетках [3; 9; 16].

В отличие от ФХ фосфатидилэтаноламин (ФЭ) располагается в основном на внутреннем монослое мембраны и, как правило, содержит более высокие доли арахидоновой ($C_{20:4}$) и докозагексаеновой ($C_{22:6}$) кислот [9; 12; 13]. В sn-1 положении ФЭ (у первого атома углерода остатка глицерина) содержится значительное количество ненасыщенных ЖК, в результате ПНЖК составляют около 60% его жирных кислот [5]. Отличия в составе ЖК одна из причин разных мембранных функций ФХ и ФЭ. Благодаря небольшому размеру головной группы, по отношению к поперечному сечению высоконенасыщенных ацильных радикалов, ФЭ имеет коническую форму молекул. В связи с этим обычно ФЭ образует не двойные слои, а небислойные структуры. Склонность к их образованию растет с увеличением длины и степени ненасыщенности его ЖК [3; 4; 17; 18]. Вызывая образование в мембране локальных участков гексагональной фазы, ФЭ оказывает дестабилизирующее действие на бислой, способствуя процессам разделения и слияния, влияет на связывание и функциональное состояние периферических белков мембран. Локализация и форма молекул ФЭ создает необходимую для образования везикул кривизну мембраны, содействует стабилизации интегральных белков в их функциональной конформации [3; 17–20]. Фосфатидилэтаноламин способствует образованию везикул с деградирующими клеточными компонентами [21]. Форма молекулы ФЭ способствует образованию водородных связей между ее аминокгруппой и аминокислотами белков. Это сказывается на положении на мембране богатых полярными аминокислотами белков [18; 22].

Основными ПНЖК фосфатидилсерина (ФС) являются кислоты с 20 и 22 атомами углерода [9; 13; 23]. Состав ЖК в ФС варьирует от ткани к ткани. В ФС эритроцитов и тромбоцитов человека превалирует содержание стеариновой ($C_{18:0}$) и арахидоновой ($C_{20:4}$) кислот [9, 24]. В плазме крови преобладают 1-стеароил-2-олеоил и 1-стеароил-2-арахиноил ФС [23]. Фосфатидилсеринсинтаза 2 мозга активно синтезирует ФС с докозагексаеновой ($C_{22:6}$) ПНЖК [25], в результате в мозге и

сетчатке большинство составляют 1-стеароил-2-докозагексаноил ФС [23; 26]. В sn-2 положении ФС (у второго атома углерода остатка глицерина) в головном мозге докозагексаеновой ($C_{22:6}$) ПНЖК может составлять 60% ацильных радикалов [27]. Высокое содержание этой кислоты в мозге и сетчатке необходимо для их нормального развития и функционирования [25; 27–30]. Накопление в мембранах нейронов ФС способствует их обогащению докозагексаеновой ($C_{22:6}$) ПНЖК [25; 27–28].

Практически весь ФС находится в цитозольном монослое [1, 3, 23]. Являясь анионным фосфолипидом, ФС участвует в неспецифических электростатических взаимодействиях и формирует отрицательный заряд цитозольной стороны мембраны. Благодаря этому с ней связываются положительно заряженные участки белковых молекул [3; 31], в частности спектрин цитоскелета [32]. ФС имеет высокое сродство к кальцию и магнию, которые оказывают неодинаковое влияние на конфигурацию его молекулы, структуру мембран, процессы агрегации и слияния мембран [33]. При апоптозе ФС переходит на внешний монослой, где распознается макрофагами, облегчая удаление апоптотических клеток [3]. Апоптоз часто сопровождается генерацией активных форм кислорода (АФК), окисляющих высоконасыщенные ЖК в ФС. Считается, что ФС с окисгенированными ПНЖК активнее распознается макрофагами [34; 35]. Также ФС перемещается на внешний монослой мембраны при активации тромбоцита и, связывая факторы свертывания, ускоряет реакции гемостаза [36].

Сфингомиелин (СМ) подобно ФХ преимущественно содержится в наружном монослое плазматических мембран. Однако СМ, за редким исключением, содержит только насыщенные и мононенасыщенные ЖК (включая ЖК с очень длинной цепью) и поэтому в сравнении с ФХ имеет более высокие и узкие цилиндрические молекулы, что способствует более плотной упаковке липидов в бислое [1; 37]. Доли отдельных ЖК варьируют в СМ разных тканей. Пальмитиновая ($C_{16:0}$) ЖК распространена в СМ периферических тканей млекопитающих, в то время как стеариновая ($C_{18:0}$) ЖК характерна для СМ нервной ткани и составляет около 60–70% жирных кислот СМ серого вещества головного мозга человека. Лигноцериновая ($C_{24:0}$) и нервоновая ($C_{24:1}$) ЖК составляют 60% кислот СМ белого вещества [1]. Показано, что СМ и холестерин характерны для одних и тех же мембран и совместно концентрируются в липидных рафтах. При этом присутствие холестерина, позволяет мембране менее резко изменять параметры микровязкости при перемене температуры, сохраняя необходимое физическое состояние [1; 3].

Для других ФЛ также присуща определенная избирательность в составе ЖК. Так в состав фосфатидилинозитола обычно входит стеариновая ($C_{18:0}$) НЖК и арахидоновая ($C_{20:4}$) ПНЖК. В кардиолипине преобладающей является линолевая ($C_{18:2}$) ПНЖК [3].

Существует мнение [1], что поскольку глицерофосфолипиды и ТГ синтезируются из фосфатидной кислоты и диглицеридов, то от состава ЖК последних во многом зависит образование конкретного вида ФЛ, а также ТГ. Отмечается [25; 27; 28; 30], что снижение содержания докозагексаеновой ($C_{22:6}$) ПНЖК в мозге связано с сокращением в нем уровня ФС, при этом добавка к культуре нейронов этой ЖК повышает содержание этого ФЛ. Неравномерное распределение арахидоновой ($C_{20:4}$) ПНЖК среди разных видов ФЛ указывает их неодинаковое участие в синтезе эйкозаноидов [3; 9].

Плазмалогенные фосфолипиды (ПФЛ) могут составлять около 20% от общего количества ФЛ в организме человека [38]. Первичная гидроксильная группа в

глицероле ПФЛ замещена не остатком жирной кислоты (ацильным радикалом), как у диацилглицерофосфолипидов (ДАФЛ), а остатком жирного альдегида (ЖА) в енольной форме (альдегидогенным алкенильным радикалом). Установлено, что ПФЛ обычно содержат арахидоновую ($C_{20:4}$) и докозагексаеновую ($C_{22:6}$) ПНЖК, а превалирующее количество этих фосфолипидов представлено плазмалогенной формой ФЭ [2; 39–42]. Также отмечается, что [41] в процессе синтеза плазмалогенной и диацильной форм ФЭ докозагексаеновая ($C_{22:6}$) ПНЖК преимущественно включается в состав первой.

Благодаря наличию остатка ЖА в ПФЛ их молекулы обладают рядом специфических свойств. Если ацильный радикал в sn-1 положении ДАФЛ содержит изгиб, увеличивающий площадь поперечного сечения молекулы, то в молекулах ПФЛ такой изгиб отсутствует. В результате проксимальные участки углеводородных цепей ПФЛ находятся ближе друг к другу. Это ведет к снижению площади поперечного сечения молекулы ПФЛ, увеличению упорядоченности липидов в мембране и росту ее микровязкости, а также может быть одной из причин, почему клетки с дефицитом ПФЛ имеют повышенную подвижность мембранных липидов [39]. Отсутствие карбонильного кислорода в положении sn-1 делает ПФЛ менее гидрофильными чем ДАФЛ, а их присутствие соответствующим образом сказывается на мембране. Присутствие ПФЛ содействует появлению гексагональной фазы в мембранах, процессам их разделения и слияния. Сообщается о важной роли плазмалогенного ФЭ в формировании высокой спонтанной кривизны мембран. Возникновение такой кривизны стимулирует появление изогнутых мембранных доменов (выступов мембраны) и формирование на их основе везикул [4; 39; 42]. Вероятно [41], что повышение содержания ПФЛ в эритроцитарной мембране может способствовать ее везикуляции. Кроме того, способность ПФЛ стимулировать образование везикул, по-видимому, может придавать этим фосфолипидам особую роль при формировании в нервных клетках синаптических пузырьков. Существуют данные [39], что дефицит ПФЛ в мозге при Альцгеймере отрицательно сказывается на синаптической функции.

Сравнение везикул, содержащих ДАФЛ и ПФЛ, с везикулами, содержащими только диацильные формы ФЛ, показывает, что ПФЛ оказывают положительное влияние на активность натрий-кальциевых насосов [43], что указывает на их важную функциональную роль в составе мембран. Следует также отметить [39], что липидные рафты в сравнении с другими участками мембран имеют повышенное содержание ПФЛ.

Заключение

Структурно-функциональные свойства клеточных мембран в значительной степени зависят от их фосфолипидного состава. Благодаря сбалансированному фосфолипидному составу достигается оптимальное состояние клеточных мембран, необходимое для нормального протекания различных мембранных процессов. При этом значительное влияние на свойства различных фосфолипидов оказывает их жирнокислотный состав, который для каждого отдельного фосфолипида имеет свои характерные особенности. Существенное специфическое влияние на свойства клеточных мембран оказывают плазмалогенные фосфолипиды, особенностью которых является замещение первичной гидроксильной группы глицерола остатком жирного альдегида в енольной форме.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Болдырев, А. А.** Биомембранология : учебное пособие / А. А. Болдырев, Е. И. Кяйвярайнен, В. А. Илюха. – Петрозаводск : Изд-во Кар НЦ РАН, 2006. – 226 с.
2. **Гидранович, В. И.** Биохимия : учебное пособие / В. И. Гидранович, А. В. Гидранович. – Минск : ТетраСистемс, 2010. – 528 с.
3. **Ипатова, О. М.** Фосфолипиды: механизм действия и применение в клинике / О. М. Ипатова. – М. : ГУ НИИ Биомедхим ; РАМН, 2005. – 318 с.
4. **Огурцов, А. Н.** Структура, функции и аналитические методы исследования биомембран : учебное пособие / А. Н. Огурцов, Н. Ю. Масалитина. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2010. – 240 с.
5. **Титов, В. Н.** Жирные кислоты. Физическая химия, биология и медицина / В. Н. Титов, Д. М. Лисицын. – М. ; Тверь : ООО «Издательство «Триада», 2006. – 672 с.
6. **Ibarguren, M.** The effect of natural and synthetic fatty acids on membrane structure, microdomain organization, cellular functions and human health / M. Ibarguren, D. J. López, P. V. Escribá // *Biochim. Biophys. Acta.* – 2014. – Vol. 1838, № 6. – P. 1518–1528.
7. **Burger, K. N.** Greasing membrane fusion and fission machineries / K. N. Burger // *Traffic.* – 2000. – Vol. 1, № 6. – P. 605–613.
8. **Creutz, C. E.** cis-Unsaturated fatty acids induce the fusion of chromaffin granules aggregated by synexin / C. E. Creutz // *J. Cell Biol.* – 1981. – Vol. 91, № 1. – P. 247–256.
9. Lipid and phospholipid fatty acid composition of plasma, red blood cells, and platelets and how they are affected by dietary lipids: a study of normal subjects from Italy, Finland, and the USA / R. M. Dougherty [et al.] // *Am. J. Clin. Nutr.* – 1987. – Vol. 45, №2. – P. 443–455.
10. **Marai, L.** Molecular species of lecithins from erythrocytes and plasma of man / L. Marai, A. Kuksis // *J. Lipid Res.* – 1969. – Vol. 10, №2. – P. 141–152.
11. Molecular species of lecithins of rat heart, kidney, and plasma / A. Kuksis [et al.] // *J. Lipid Res.* – 1969. – Vol. 10, № 1. – P. 25–32.
12. **Pekiner, B. D.** Fatty acid composition of red blood cell membrane phosphatidylethanolamine and phosphatidylcholine in rat, rabbit, human and dog / B. D. Pekiner // *J. Fac. Pharm.* – 2002. – Vol. 31, № 3. – P. 169–182.
13. **Yabuuchi, H.** Positional distribution of fatty acids in glycerophosphatides of bovine gray matter / H. Yabuuchi, J. S. O'Brien // *J. Lipid Res.* – 1968. – Vol. 9, №1. – P. 65–67.
14. **Simons, K.** Cholesterol, lipid rafts, and disease / K. Simons, R. Ehehalt // *J. Clin. Invest.* – 2002. – Vol. 110, № 5. – P. 597–603.
15. **Van Meer, G.** Sphingolipid transport: rafts and translocators / G. van Meer, Q. Lisman // *J. Biol. Chem.* – 2002. – Vol. 277, №29. – P. 25855–25858.
16. **Cole, L. K.** Phosphatidylcholine biosynthesis and lipoprotein metabolism / L.K. Cole, J.E. Vance, D.E. Vance // *Biochim. Biophys. Acta.* – 2012. – Vol. 1821, № 5. – P. 754–761.
17. Полиморфные превращения незвученных водных дисперсий фосфатидилэтанолamines с простой и сложной эфирной связью / В. В. Чупин [и др.] // *Биоорг. химия.* – 1981. – Т. 7, № 5. – С. 773–778.
18. **Gibellini, F.** The Kennedy pathway – De novo synthesis of phosphatidylethanolamine and phosphatidylcholine / F. Gibellini, T. K. Smith // *IUBMB Life.* – 2010. – Vol. 62, №6. – P. 414–428.
19. **Furt, F.** Importance of lipid metabolism for intracellular and mitochondrial membrane fusion/fission processes / F. Furt, P. Moreau // *Int. J. Biochem. Cell. Biol.* – 2009. – Vol. 41, № 10. – P. 1828–1836.
20. **Marsh, D.** Lateral pressure profile, spontaneous curvature frustration, and the incorporation and conformation of proteins in membranes / D. Marsh // *Biophys. J.* – 2007. – Vol. 93, № 11. – P. 3884–3899.
21. **Tanida, I.** LC3 and Autophagy / I. Tanida, T. Ueno, E. Kominami // *Methods Mol. Biol.* – 2008. – Vol. 445. – P. 77–88.
22. **Dowhan, W.** Lipid-dependent membrane protein topogenesis / W. Dowhan, M. Bogdanov // *Annu. Rev. Biochem.* – 2009. – Vol. 78. – P. 515–540.
23. **Chen, S.** Partial characterization of the molecular species of phosphatidylserine from human plasma by high-performance liquid chromatography and fast atom bombardment mass spectrometry / S. Chen // *J. Chromatogr. B Biomed. Appl.* – 1994. – Vol. 661, № 1. – P. 1–5.
24. **Dodge, J. T.** Composition of phospholipids and of phospholipid fatty acids and aldehydes in human red cells / J. T. Dodge, G. B. Phillips // *J. Lipid Res.* – 1967. – Vol. 8, № 6. – P. 667–675.
25. **Kim, H. Y.** Novel metabolism of docosahexaenoic acid in neural cells / H. Y. Kim // *J. Biol. Chem.* – 2007. – Vol. 282, № 26. – P. 18661–18665.
26. **Svennerholm, L.** Distribution and fatty acid composition of phosphoglycerides in normal human brain / L. Svennerholm // *J. Lipid Res.* – 1968. – Vol. 9, № 5. – P. 570–579.

27. Differential effects of n-3 fatty acid deficiency on phospholipid molecular species composition in the rat hippocampus / M. Murthy [et al.] // *J. Lipid Res.* – 2002. – Vol. 43, № 4. – P. 611–617.
28. **Kim, H. Y.** Effects of docosapentaenoic acid on neuronal apoptosis / H. Y. Kim, M. Akbar, A. Lau // *Lipids.* – 2003. – Vol. 38, № 4. – P. 453–457.
29. The role of docosahexaenoic acid in retinal function / B.G. Jeffrey [et al.] // *Lipids.* – 2001. – Vol. 36, № 9. – P. 859–871.
30. N-3 fatty acid deficiency decreases phosphatidylserine accumulation selectively in neuronal tissues / L. I. Hamilton [et al.] // *Lipids.* – 2000. – Vol. 35, № 8. – P. 863–869.
31. **Buckland, A. G.** Anionic phospholipids, interfacial binding and the regulation of cell functions / A. G. Buckland, D. C. Wilton // *Biochim. Biophys. Acta.* – 2000. – Vol. 1483, № 2. – P. 199–216.
32. Phosphatidylserine binding sites in erythroid spectrin: location and implications for membrane stability / X. An [et al.] // *Biochemistry.* – 2004. – Vol. 43, № 2. – P. 310–315.
33. **Martín-Molina, A.** Effect of calcium and magnesium on phosphatidylserine membranes: experiments and all-atomic simulations / A. Martín-Molina, C. Rodríguez-Beas, J. Faraudo // *Biophys. J.* – 2012. – Vol. 102, № 9. – P. 2095–2103.
34. **Greenberg, M.E.** Oxidized phosphatidylserine-CD36 interactions play an essential role in macrophage-dependent phagocytosis of apoptotic cells / M. E. Greenberg [et al.] // *J. Exp. Med.* – 2006. – Vol. 203, № 12. – P. 2613–2625.
35. **Kiefer, C. R.** Oxidation and erythrocyte senescence / C. R. Kiefer, L. M. Snyder // *Curr. Opin. Hematol.* – 2000. – Vol. 7, № 2. – P. 113–116.
36. **Solum, N. O.** Procoagulant expression in platelets and defects leading to clinical disorders / N. O. Solum // *Arterioscler. Thromb. Vasc. Biol.* – 1999. – Vol. 19, № 12. – P. 2841–2846.
37. **Van Meer, G.** Membrane lipids: where they are and how they behave / G. van Meer, D. R. Voelker, G. W. Feigenson // *Nat. Rev. Mol. Cell Biol.* – 2008. – Vol. 9, № 2. – P. 112–124.
38. **Назаров, П. Е.** Полиненасыщенные жирные кислоты как универсальные эндогенные биорегуляторы / П. Е. Назаров, Г. И. Мягкова, Н. В. Гроза // *Вестник МИТХТ.* – 2009. – Т. 4, № 5. – С. 3–19.
39. **Braverman, N. E.** Functions of plasmalogen lipids in health and disease / N. E. Braverman, A. B. Moser // *Biochim. Biophys. Acta.* – 2012. – Vol. 1822, № 9. – P. 1442–1452.
40. Homeostasis of phospholipids - The level of phosphatidylethanolamine tightly adapts to changes in ethanolamine plasmalogens / F. Dorninger [et al.] // *Biochim. Biophys. Acta.* – 2015. – Vol. 1851, № 2. – P. 117–128.
41. **Osipenko, A. N.** Change of plasmalogen content of red blood cells in myocardial hypoxia and acidosis / A. N. Osipenko // *Acta Cardiologica.* – 2018. – Vol. 73, № 1. – P. 61–68.
42. **Rog, T.** The biophysical properties of ethanolamine plasmalogens revealed by atomistic molecular dynamics simulations / T. Rog, A. Koivuniemi // *Biochim. Biophys. Acta.* – 2016. – Vol. 1858, № 1. – P. 97–103.
43. **Ford, D. A.** Plasmalogen and anionic phospholipid dependence of the cardiac sarcolemmal sodium-calcium exchanger / D. A. Ford, C. C. Hale // *FEBS Lett.* – 1996. – Vol. 394, № 1. – P. 99–102.

Поступила в редакцию 27.12.2022 г.

Контакты: alosipenko@yandex.ru (Осипенко Александр Николаевич)

Osipenko A. N. EFFECT OF VARIOUS PHOSPHOLIPIDS AND THEIR FATTY ACID COMPOSITION ON THE STRUCTURAL AND FUNCTIONAL PROPERTIES OF CELL MEMBRANES

The review represents the data concerning the influence of various phospholipids on the structural-functional and physical-chemical properties of cell membranes. It is noted that the fatty acid composition typical of a particular phospholipid has an essential role in this effect. The article provides data on the fatty acid composition of phospholipids, which form the base of the lipid bilayer of cell membranes. Considerable focus is given to the influence of plasmalogens on the properties of cell membranes.

Keywords: cell membranes, phospholipids, plasmalogens, fatty acids.

ДЛЯ ЗАЎВАГ

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў
на англійскую мову
Я. В. Рубанава

Тэхнічны рэдактар *А. Р. Роскач*
Камп'ютарны набор і вёрстка *С. А. Кірыльчык*
Карэктар *І. Г. Каржова*

Падпісана да друку 09.03.2023 г.
Фармац 70x108¹/₁₆. Гарнітура Times New Roman.
Ум.-друк. арк. 9,7. Ул.-выд. арк. 11,3. Тыраж 100 экз. Заказ № 1651.

Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А. А. Куляшова”, 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства
“Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля”
ЛП № 02330/23 ад 30.12.2013 г.
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў