

ISSN 2409-3777



# ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага  
ўніверсітэта

імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

*Выдаецца са снежня 1998 года*

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ  
(матэматыка, фізіка, біялогія)

*Выходзіць два разы ў год*

**2 (60)**  
**2022**

**Галоўная рэдакцыйная калегія:**

д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)  
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (нам. галоўнага рэдактара)  
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.В. Марчанка (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)  
канд. гіст. навук А. У. Коласаў (адказны сакратар)

**Матэматыка, фізіка:**

д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)  
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар М.М. Дабравольскі (Тула)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.М. Гальмак (Магілёў)  
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.В. Івашкевіч (Магілёў)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.М. Сідарэнка (Магілёў)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А.В. Цімошчанка (Магілёў)

**Біялогія:**

д-р біял. навук прафесар А.М. Дворнік (Гомель)  
д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)  
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)  
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)  
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)  
канд. біял. навук дацэнт Г.М. Ціханчук (Магілёў)  
канд. біял. навук дацэнт А.А. Анціпенка (Магілёў)  
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)  
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)  
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)  
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонок (Магілёў)  
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс "Веснік Магілёўскага дзяржаўнага  
ўніверсітэта імя А.А. Куляшова" ўключаны ў РІНЦ  
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),  
ліцэнзійны дагавор № 811-12/2014*

**АДРАС РЭДАКЦЫІ:**

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,  
пакой 503, т. +375 44 716 34 97, vesnik\_mdu@mail.ru

**MOGILEV STATE  
A. KULESHOV UNIVERSITY  
BULLETIN**

THEORETICAL-SCIENTIFIC JOURNAL

*Founded in December 1998*

Series B. NATURAL SCIENCES  
(Mathematics, Physics, Biology)

*Published twice per year*

**2 (60)  
2022**

#### **Editorial Board:**

Lavrinovich D.S., Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor,  
Vishnevsky M.I., Deputy Chief Editor, Doctor of Philosophical Sciences, Professor  
Riyer Y.G., Deputy Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor  
Chebotarevsky B.D., Chairman of the Editorial Committee (Series B), Ph.D., Associate  
Professor  
Kolosov A.V., Executive Secretary of the Editorial Board, Ph.D.

#### **Mathematics, Physics:**

Lebedev V.I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)  
Yerovenko V.A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)  
Bernik V.I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)  
Laptinsky V.N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of  
the Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus  
(Mogilev)  
Dobrovolsky N.M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Tula)  
Sotsky A.B., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)  
Galmak A.M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)  
Turtsevich A.S., Doctor of Technical Sciences (Minsk)  
Timoschenko E.V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)  
Ivashkevich I.V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)

#### **Biology:**

Dvornik A.M., Doctor of Biological Sciences, Professor (Gomel)  
Maksimova N.P., Doctor of Biological Sciences, Professor (Minsk)  
Naumov A.D., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Minsk)  
Lazarevich S.V., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Gorky)  
Akulich N.V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)  
Tihonchuk G.N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)  
Marochkov A.V., Doctor of Medical Sciences, Professor (Mogilev)  
Simchenko N.I., Doctor of Medical Sciences (Mogilev)  
Lopuh P.S., Doctor of Geographical Sciences, Professor (Minsk)  
Poliachenok O.G., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)  
Roganov G.N., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)

*Theoretical-scientific journal*  
*“Mogilev State A. Kuleshov University Bulletin”*  
*is included in the bibliographic database*  
*“Russian Science Citation Index”,*  
*License agreement № 811-12/2014*

The editorial board address:  
212022, Mogilev, Kosmonavtov Str., 1,  
room 503, tel. +375 44 716 34 97, vesnik\_mdu@mail.ru

## З М Е С Т

<b>ЛОМОВЦЕВ Ф. Е.</b> В криволинейной первой четверти плоскости решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения при нестационарной и нехарактеристической первой косоj производной.....	7
<b>ГАЛЬМАК А. М.</b> О порождающих множествах полиадической группы $\langle A^k, [ \ ]_{\sigma, k} \rangle$ . I.....	23
<b>ПАНТЕЛЕЕВА Ж. И.</b> Количество алгебраических чисел с малой производной минимального многочлена .....	33
<b>МОЖЕЙ Н. П.</b> Трехмерные однородные пространства с совершенной алгеброй голономии .....	39
<b>НОСКОВА М. С.</b> Аналитические решения уравнения переноса излучения в бинарной марковской смеси в малоугловом приближении.....	46
<b>ЛЕНИВКО С. М.</b> Введение в культуру in vitro боковых почек роз различных садовых групп .....	58
<b>СЕДАКОВА В. А., ПЫЛЬКОВА В. И., ОРЛОВ Р. В.</b> Экстракция летучих органических соединений из мяты перечной .....	66
<b>ПОВОРОВА О. В., ЧЕГЕРОВА Т. И., ЧЕГЕРОВ В. Г.</b> Интегральная оценка иммунной системы детей при повторных инфекциях дыхательных путей.....	73

## C O N T E N T S

<b>LOMOVTSEV F. E.</b> In the Curvilinear First Quarter of the Plane Resolution of the Mixed Problem for One-Dimensional Wave Equation for Non-Stationary and Non-Characteristic First Oblique Derivative. ....	7
<b>GAL'MAK A. M.</b> On Sets of Generators of Polyadic Group $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ . I.....	23
<b>PANTELEEVA ZH. I.</b> On the Quantity of Algebraic Numbers with a Small Derivative of the Minimal Polynomial.....	33
<b>MOZHEYN. P.</b> Three-Dimensional Homogeneous Spaces with Perfect Holonomy Algebra. ....	39
<b>NOSKOVA M. S.</b> Analytical Solutions of the Radiation Transfer Equation in a Binary Markov Mixture in a Small-Angle Approximation.....	53
<b>LENIVKO S. M.</b> Introduction to In Vitro Culture of Lateral Buds of Roses Various Garden Groups.....	65
<b>SEDAKOVA V. A., PYLKOVA V. I., ORLOV R. V.</b> Extraction of Volatile Organic Compounds from Peppermint. ....	73
<b>POVOROVA O. V., CHEGEROVA T. I., CHEGEROV V. G.</b> Integral Assessment of the Immune System of Children with Repeated Respiratory Tract Infections.....	80

# МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 517.956.32

## В КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПЕРВОЙ ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ И НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

**Ф. Е. Ломовцев**

доктор физико-математических наук  
Белорусский государственный университет

*Полностью изучена корректность (по Адамару) линейной смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с постоянными коэффициентами при нестационарном граничном режиме с нехарактеристической первой косой производной в криволинейной первой четверти плоскости. Вычислены в явном виде единственные и устойчивые классические (дважды непрерывно дифференцируемые) локальные решения этой смешанной задачи. Вычисленные решения зависят от меняющегося, но фиксированного временного параметра локализации. Установлен критерий ее корректности (необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования на правую часть уравнения, начальные и граничные данные).*

Ключевые слова: криволинейные оси координат, смешанная задача, нестационарный граничный режим, нехарактеристическая косая производная, локальное классическое решение, параметр локализации, критерий корректности.

### Введение

Модификацией метода характеристик из [1] найдены в явном виде единственные и устойчивые классические локальные решения линейной смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с постоянными коэффициентами при нестационарном граничном режиме с нехарактеристической первой косой производной в криволинейной первой четверти плоскости. Эти решения содержат изменяющиеся, но фиксированные значения временного параметра локализации в пределах интегрирования. Найден критерий корректности (по Адамару: существование, единственность и устойчивость решений) классических локальных решений этой смешанной задачи. Нехарактеристичность первой косой производной в граничном режиме означает, что в каждый момент времени она направлена не вдоль критической характеристики уравнения, а нестационарность – зависимость коэффициентов граничного режима от времени. Найденный критерий корректности состоит из необходимых и достаточных требований гладкости и двух условий согласования на входные данные смешанной задачи (правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное). Они обеспечивают однозначную и устойчивую везде разрешимость смешанной задачи. В этой работе получены полные, завершённые и окончательные результаты исследования нехарактеристической смешанной задачи для дважды непрерывно дифференцируемых решений в криволинейной первой

четверти плоскости. Полученные результаты обобщают результаты предыдущих работ автора [2; 3] для этой нехарактеристической смешанной задачи.

В первом следствии настоящей статьи показано, что явные классические локальные решения и критерий корректности данной задачи в криволинейной первой четверти плоскости совпадают с уже известными из статьи [4] для случая прямолинейных осей координат первой четверти плоскости. Критерий корректности изученной смешанной задачи и его вывод, но с характеристической первой косою производной в граничном режиме более сложные даже в случае прямолинейной первой четверти плоскости [5].

Найдено аналитическое представление решения первой смешанной задачи для волнового уравнения в нецилиндрической области с помощью характеристического параллелограмма, но нет критерия корректности на все данные в [6–9]. Мы используем полученные нами результаты для поиска явных решений и критериев корректности других смешанных задач.

### Основная часть

В криволинейной четверти плоскости  $\dot{G}_\infty = \{\sigma(t), +\infty[x]\kappa(x), +\infty[: x > 0, t > 0]\}$  явно решается нехарактеристическая смешанная задача:

$$u_{tt}(x, t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x, t) - a_1 a_2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{t=\kappa(x)} = \varphi(x), \quad u_t(x, t)|_{t=\kappa(x)} = \psi(x), \quad x > \sigma(t), \quad (2)$$

$$[\alpha(t)u_t(x, t) + \beta(t)u_x(x, t) + \gamma(t)u(x, t)]|_{x=\sigma(t)} = \mu(t), \quad t > \kappa(x), \quad (3)$$

где коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – заданные функции переменной  $t$ , исходные данные  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\mu$  – заданные функции своих переменных  $x$  и  $t$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  – вещественные постоянные. Частные производные соответствующих порядков от искомой функции  $u$  обозначаем нижними индексами по указанным переменным. В граничном режиме (3) первая косою производная предполагается нехарактеристической, т.е.  $a_1 \alpha(t) \neq \beta(t)$ ,  $t \geq 0$ .

Символом  $C^k(\Omega)$  обозначаем множество  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве  $\Omega \subset R^2$ ,  $R = ]-\infty, +\infty[$ ,  $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ .

Заменами переменных  $x$  и  $t$  всегда можно добиться того, чтобы оси координат обращались в ноль:  $\kappa(0) = \sigma(0) = 0$ , т.е. носители начальных условий (2) и граничного режима (3) пересекались только в начале координат. Поэтому в дальнейшем нами используются следующие функции

$$\chi_i(x) = x + (-1)^i a_i \kappa(x), \quad \sigma_i(t) = a_i t + (-1)^i \sigma(t), \quad i = 1, 2,$$

в которых  $\chi_i(0) = \sigma_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Если оси координат достаточно гладки  $t = \kappa(x)$ ,  $x = \sigma(t) \in C^2[0, +\infty[$  и их первые производные такие, что

$$-1/a_2 < \kappa'(x) < 1/a_1, \quad x \geq 0; \quad -a_2 < \sigma'(t) < a_1, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

то существуют дважды непрерывно дифференцируемые их обратные функции  $x = \chi_i^{-1}(y)$ ,  $t = \sigma_i^{-1}(z)$ ,  $i = 1, 2$ . Итак, четверть плоскости  $\dot{G}_\infty$  может содержать точки с отрицательными значениями координат  $x$  или  $t$ .

**Определение 1.** Классическими решениями смешанной задачи (1)–(3) на  $\dot{\tilde{G}}_\infty$  называются функции  $u \in C^2(\tilde{G}_\infty)$ ,  $\tilde{G}_\infty = [\sigma(t), +\infty[ \times [\kappa(x), +\infty[$ , удовлетворяющие уравнению (1) в обычном смысле на  $\dot{\tilde{G}}_\infty$ , а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле пределов соответствующих дифференциальных выражений от ее значений  $u(\dot{x}, \dot{t})$  во внутренних точках  $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{\tilde{G}}_\infty$  для всех указанных в них граничных точек множества  $\tilde{G}_\infty$ .

Требуется найти в явном виде локальные классические решения, а также необходимые и достаточные условия на исходные данные  $f, \varphi, \psi, \mu$  для однозначной и устойчивой везде разрешимости нехарактеристической смешанной задачи (1)–(3) в криволинейной первой четверти плоскости  $\dot{\tilde{G}}_\infty$ .

Перед непосредственным решением и исследованием корректности по Адамару поставленной смешанной задачи введем некоторые обозначения. Уравнение (1) в  $\dot{\tilde{G}}_\infty$  очевидно имеет два различных семейства характеристик:  $x - a_1 t = C_1$ ,  $x + a_2 t = C_2$ ,  $\forall C_1, C_2 \in R = ]-\infty, +\infty[$ .

**Определение 2.** Характеристика  $x = a_1 t$ , где  $a_1 > 0$ , называется критической характеристикой уравнения (1) для первой четверти плоскости  $\tilde{G}_\infty$ .

Когда криволинейные оси координат удовлетворяют неравенствам

$$\kappa(x) < x / a_1, \quad x > 0, \quad \sigma(t) < a_1 t, \quad t > 0, \quad (5)$$

то она делит первую четверть плоскости  $\tilde{G}_\infty$  на два непустых множества

$$\tilde{G}_- = \{(x, t) \in \tilde{G}_\infty : \kappa(x) \leq t < x / a_1, x \geq 0\}, \quad \tilde{G}_+ = \{(x, t) \in \tilde{G}_\infty : \sigma(t) \leq x < a_1 t, t \geq 0\}.$$

Оценки на производные от осей координат (4) и ниже прямолинейность осей (10) в бесконечно малой окрестности  $O(0, 0)$  в лемме 1 и теореме 1 нужны для того, чтобы в плоскости  $Ost$  для всех точек  $M(x, t) \in \tilde{G}_\infty$  характеристики  $s - a_1 t = x - a_1 t$  и  $s + a_2 t = x + a_2 t$  пересекали криволинейные оси координат  $s = \sigma(t)$  и  $t = \kappa(s)$  лишь в одной точке.

Из самой постановки смешанной задачи (1)–(3) и определения 1 классических решений вытекают очевидные необходимые требования гладкости:

$$f \in C(\tilde{G}_\infty), \quad \varphi \in C^2[0, +\infty[, \quad \psi \in C^1[0, +\infty[, \quad \mu \in C^1[0, +\infty[. \quad (6)$$

Полагая  $t = 0$  в граничном режиме (3) и первой производной по  $t$  от этого режима и вычисляя значения слагаемых их левых частей с помощью начальных условий (2) при  $x = 0$  и уравнения (1) при  $t = 0, x = 0$ , получаем для классических решений этой задачи необходимые условия согласования граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1):

$$\alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \quad (7)$$

$$\alpha'(0)\psi(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) + \alpha(0)[f(0, 0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1 a_2 \varphi''(0)] + \\ + [\alpha(0)\sigma'(0) + \beta(0)]\psi'(0) + \beta(0)\varphi''(0) + \gamma(0)[\sigma'(0)\varphi'(0) + \psi(0)] = \mu'(0), \quad (8)$$

корректно определенные для исходных данных  $\varphi, \psi, \mu, f$  гладкости (6).

**Замечание 1.** В случае нецилиндрических областей задания волновых уравнений отсутствуют общие критерии их корректности (по Адамару: существования, единственности и устойчивости) на все входные данные. Имеются теоремы существования, единственности и некоторое аналитическое представление классического решения с достаточными условиями гладкости на входные данные только первой смешанной задачи для некоторых волновых уравнений в нецилиндрических областях [7–9].

В последующих лемме 1 и теореме 1 мы будем использовать локальные классические решения уравнения (1) на  $\tilde{G}_\infty$ :

$$F^{(0)}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{t_0}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(|s|, \tau) ds d\tau, \quad (x, t) \in \tilde{G}_\infty, \quad (9)$$

в которых нижний предел интегрирования содержит параметр  $t_0$  локализации:  $t_0 \in [\max_{0 \leq s \leq x^*} \kappa(s), t[$  для точек  $M(x, t) \in G_+$  и  $t_0 \in [\max_{x_1 \leq s \leq x_2} \kappa(s), t[$  для точек  $M(x, t) \in G_-$ , где  $x^* = \max\{-x_0, x_2\}$ ,  $x_0 = \chi_0^{-1}(a_1 t - x) \leq 0$ ,  $x_1 = \chi_1^{-1}(x - a_1 t) \geq 0$ ,  $x_2 = \chi_2^{-1}(x + a_2 t) \geq 0$ .

**Лемма 1.** Пусть оси координат  $\kappa(x), \sigma(t) \in C^2[0, +\infty[$  удовлетворяют неравенствам (4), (5) и в некоторой окрестности начала координат

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \kappa(x) = 0, x \in [0, \varepsilon_0], \quad \sigma(t) = 0, t \in [0, \varepsilon_0]. \quad (10)$$

Функции (9) являются классическими решениями уравнения (1) в  $\tilde{G}_\infty$  тогда и только тогда, когда его правая часть  $f \in C(\tilde{G}_\infty)$  и

$$H_i^{(0)}(x, t) \equiv \int_{t_0}^t f(|x + (-1)^i a_i(t - \tau)|, \tau) d\tau \in C^1(\tilde{G}_\infty), \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

**Доказательство. Достаточность.** Для непрерывной правой части  $f \in C(\tilde{G}_\infty)$  функции (9) имеют непрерывные первые частные производные:

$$F_t^{(0)}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{t_0}^t [a_2 f(x + a_2(t - \tau), \tau) + a_1 f(|x - a_1(t - \tau)|, \tau)] d\tau \in C(\tilde{G}_\infty),$$

$$F_x^{(0)}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{t_0}^t [f(x + a_2(t - \tau), \tau) - f(|x - a_1(t - \tau)|, \tau)] d\tau \in C(\tilde{G}_\infty). \quad (12)$$

Более того, для непрерывной  $f \in C(\tilde{G}_\infty)$ , удовлетворяющей интегральной гладкости (11), они имеют непрерывные вторые частные производные:

$$F_{tt}^{(0)}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{t_0}^t [a_2 f(x + a_2(t - \tau), \tau) + a_1 f(|x - a_1(t - \tau)|, \tau)] d\tau \right),$$

$$F_{tx}^{(0)}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{t_0}^t [a_2 f(x + a_2(t - \tau), \tau) + a_1 f(|x - a_1(t - \tau)|, \tau)] d\tau \right),$$

$$F_{xx}^{(0)}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{t_0}^t [f(x + a_2(t - \tau), \tau) - f(|x - a_1(t - \tau)|, \tau)] d\tau \right).$$

Поэтому для доказательства того, что функции (9) поточечно удовлетворяют уравнению (1) на  $\tilde{G}_\infty$  достаточно показать, что функции (9) удовлетворяют его каноническому виду (см. уравнение (14) ниже).

Уравнение (1) на  $\tilde{G}_\infty$  линейной невырожденной заменой

$$\xi = x + a_2 t, \quad \eta = x - a_1 t \tag{13}$$

с якобианом  $J(x, t) = \xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x = -(a_1 + a_2) \neq 0$  приводится к уравнению канонического вида

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi, \eta) / [(a_1 + a_2)J(x, t)], \quad (\xi, \eta) \in G_\infty, \tag{14}$$

с правой частью  $\tilde{f}(\xi, \eta) = f((a_1 \xi + a_2 \eta) / (a_1 + a_2), (\xi - \eta) / (a_1 + a_2))$  относительно функции  $\tilde{u}(\xi, \eta) = u((a_1 \xi + a_2 \eta) / (a_1 + a_2), (\xi - \eta) / (a_1 + a_2))$  на образе  $G_\infty = \{(\xi, \eta) : \xi > \chi_2((a_1 \xi + a_2 \eta) / (a_1 + a_2)), \eta > -\sigma_1((\xi - \eta) / (a_1 + a_2)), -(a_1 / a_2)\xi < \eta < \xi\}$  криволинейной четверти  $\tilde{G}_\infty$  при отображении (13).

1. Пусть у точки  $(x, t) \in \tilde{G}_+$  переменная  $x > 0$ . Применим геометрическое представление функций (9) через двойной интеграл по характеристическому треугольнику  $\Delta MPQ$

$$F^{(0)}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{t_0}^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} f(|s|, \tau) ds d\tau = \frac{1}{a_1 + a_2} \iint_{\Delta MPQ} f(|x|, t) dx dt \tag{15}$$

с вершинами  $M(x, t)$ ,  $P(x - a_1(t - t_0), t_0)$ ,  $Q(x + a_2(t - t_0), t_0)$  в плоскости  $Ost$  для  $x > 0$  (рис. 1, а).

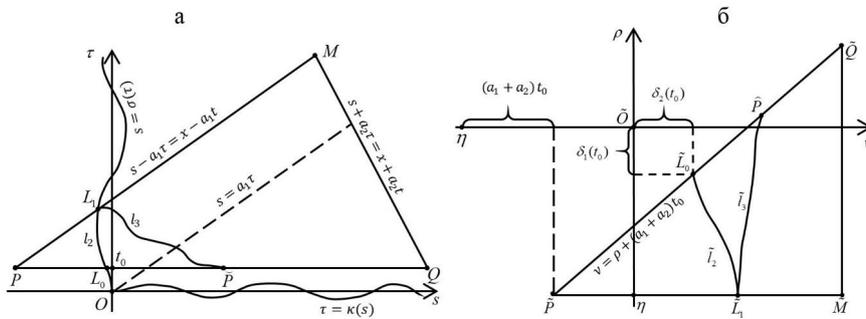


Рис. 1. Область интегрирования при  $x > 0$ : а – в решении  $F^{(0)}$  на  $G_+$ ; б – в решении  $F^{(0)}$  на  $G_+$

В двойном интеграле (15) переходим к переменным (13) и имеем функции с двойным интегралом по треугольнику  $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$

$$\tilde{F}^{(0)}(\xi, \eta) = \frac{1}{a_1 + a_2} \iint_{\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}} \tilde{f}(\xi, \eta) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{16}$$

с вершинами  $\tilde{M}(\xi, \eta)$ ,  $\tilde{P}(\eta + (a_1 + a_2)t_0, \eta)$ ,  $\tilde{Q}(\xi, \xi - (a_1 + a_2)t_0)$  в плоскости  $\tilde{O}v\rho$  (рис. 1, б). Здесь якобиан  $J(\xi, \eta) = x_\xi t_\eta - x_\eta t_\xi = 1/J(x, t) \neq 0$ . Ввиду взаимно обратной ориентации боковых сторон треугольников  $\Delta MPQ$  и  $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$  двойной интеграл (16) становится двойным повторным интегралом

$$\tilde{F}^{(0)}(\xi, \eta) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{\xi - (a_1 + a_2)t_0}^{\eta} \int_{\rho + (a_1 + a_2)t_0}^{\xi} \tilde{f}(v, \rho) J(v, \rho) dv d\rho. \quad (17)$$

Берем смешанную производную по  $\eta$  и  $\xi$  от (17) и получаем

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}^{(0)}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\tilde{f}(\xi, \eta)}{(a_1 + a_2)J(x, t)}, \quad (\xi, \eta) \in \tilde{G}_+, \quad (18)$$

т.е. функции  $\tilde{F}^{(0)}$  удовлетворяют каноническому виду (14) уравнения (1).

Возможные значения параметра  $t_0$  для каждой фиксированной точки  $M(x, t) \in G_+$  с  $x > 0$  указаны выше интервалами перед леммой 1. Чтобы найти минимально возможные значения  $t_0$ , сначала проводим характеристику  $s + a_2\tau = x + a_2t$  через точку  $M$  до пересечения с осью  $\tau = \kappa(s)$  (рис. 1, а). Отсюда находим, что  $\chi_2(s) = s + a_2\kappa(s) = x + a_2t$  и  $s = \chi_2^{-1}(x + a_2t) \equiv x_2 \geq 0$ . За счет модуля  $f(|s|, \tau)$  в решениях (9) функция  $f(s, \tau)$  продолжается четно по  $s$  с  $s \geq \sigma(\tau)$  на все  $s < \sigma(\tau)$ , т.е. она становится функцией  $\tilde{f}(s, \tau)$ , заданной на всей криволинейной верхней полуплоскости  $\tilde{G}_\infty = \{(s, \tau) : \tau \geq \kappa(|s|), s \geq 0\}$ . Затем проводим характеристику  $s - a_1\tau = x - a_1t$  через точку  $M$  до пересечения с осью  $\tau = \kappa(-s)$ . Это означает то, что  $[-s + a_1\kappa(-s)] = x - a_1t$ , т.е.  $\chi_0(-s) = [-s + a_1\kappa(-s)] = a_1t - x$  и тем самым  $-s = \chi_0^{-1}(a_1t - x) \equiv x_0 \leq 0$ . Здесь новая функция  $\chi_0(x) \equiv x + a_1\kappa(x)$  имеет обратную функцию  $x = \chi_0^{-1}(w)$  ввиду неравенства  $\kappa'(x) < 1/a_1$  из оценок (4). Поэтому для всех точек  $M(x, t) \in G_+$  с  $x > 0$  интервал временного параметра локализации  $t_0$  равен  $[\max_{0 \leq s \leq x^*} \kappa(s), t]$ , где  $x^* = \max\{-x_0, x_2\}$ . Значения  $t_0$  очевидно должны быть строго меньше  $t$ .

2. Пусть у точки  $M(x, t) \in G_+$  переменная  $x \leq 0$  (рис. 2, а).

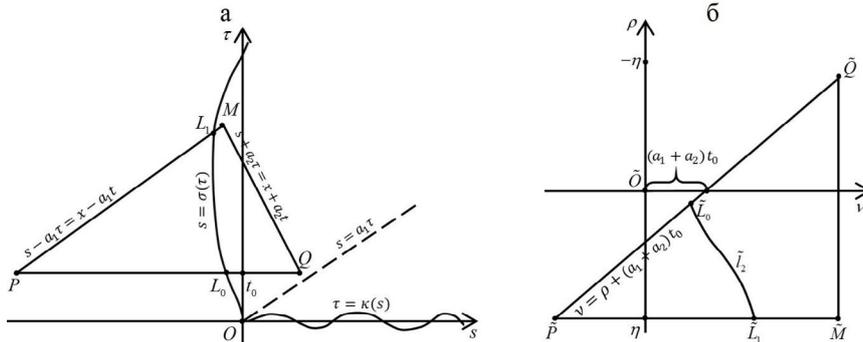


Рис. 2. Область интегрирования при  $x \leq 0$ : а – в решении  $F^{(0)}$  на  $G_+$ ;

б – в решении  $F^{(0)}$  на  $G_+$

Функции (9) аналогично равенствам (15) выражаются через двойной интеграл по треугольнику  $\Delta MPQ$

$$F^{(0)}(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{t_0}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(|s|, \tau) ds d\tau = \frac{1}{a_1 + a_2} \iint_{\Delta MPQ} f(|x|, t) dx dt \quad (19)$$

с вершинами  $M(x, t), P(x - a_1(t - t_0), t_0), Q(x + a_2(t - t_0), t_0)$  в плоскости  $Ost$ . После замены переменных (13) функции (19) приобретают вид двойного интеграла (16) и двойного повторного интеграла (17), от которого смешанная производная по  $\eta$  и  $\xi$  тоже равна выражению (18). Таким образом, уравнение (1) выполняется для функций  $F^{(0)}$  вида (9) при всех  $M(x, t) \in G_+$ .

Интервал изменения значений временного параметра  $t_0$  в каждой фиксированной точке  $M(x, t) \in G_+$  для  $x \leq 0$  такой же, как выше для  $x > 0$ .

3. Пусть точка  $M(x, t) \in G_-$  (рис. 3, а).

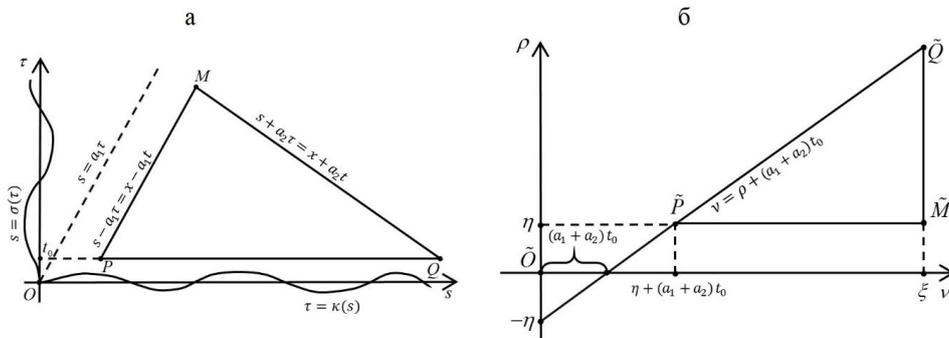


Рис. 3. Области интегрирования решений: а – в  $F^{(0)}$  на  $G_-$ ; б – в  $F^{(0)}$  на  $G_-$

В этом случае, также как и выше, доказывается справедливость уравнения (1) на  $G_-$  подстановкой (9) в (14) с помощью рис. 3, б.

Для всех точек  $M(x, t) \in G_-$  характеристики  $s + a_2\tau = x + a_2t$  и  $s - a_1\tau = x - a_1t$ , проходящие через точку  $M$ , пересекаются с осью  $\tau = \kappa(s)$  соответственно при  $s = \chi_2^{-1}(x + a_2t) \equiv x_2 \geq 0$  и  $s = \chi_1^{-1}(x - a_1t) \equiv x_1 \geq 0$  (рис. 3, а). Таким образом, параметр локализации  $t_0 \in [\max_{x_1 \leq s \leq x_2} \kappa(s), t]$ , так как значения  $x_1 \leq x_2$  для всех точек

$M(x, t) \in G_-$  и должны быть меньше  $t$ .

**Необходимость.** Если функции (9) являются классическими решениями уравнения (1) в  $\tilde{G}_\infty$ , то согласно определению 1 они дважды непрерывно дифференцируемы, т.е.  $F^{(0)} \in C^2(\tilde{G}_\infty)$ , и удовлетворяют уравнению (1) на  $\dot{\tilde{G}}_\infty$ , из которого следует непрерывность  $f \in C(\tilde{G}_\infty)$ . Интегральные требования гладкости (11) на  $\tilde{G}_\infty$  необходимы для правой части  $f \in C(\tilde{G}_\infty)$ , потому что они равны производным от дважды непрерывно дифференцируемой функции  $F^{(0)} \in C^2(\tilde{G}_\infty)$  вдоль характе-

ристик  $x + (-1)^i a_i t = C_i$ ,  $C_i \in R$ ,  $i = 1, 2$ , уравнения (1) в силу первых частных производных (12):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F^{(0)}(x, t)}{\partial t} + (-1)^i a_{3-i} \frac{\partial F^{(0)}(x, t)}{\partial x} = \\ & = \int_{t_0}^t f\left(\left|x + (-1)^i a_i (t - \tau)\right|, \tau\right) d\tau \in C^1(\tilde{G}_\infty), i = 1, 2. \end{aligned} \quad (20)$$

Лемма 1 доказана.

В теореме 1 используется специальная функция граничного режима (3):

$$P^{(0)}(t) = \mu(t) - \Gamma(t) \left( \Phi^{(0)}(x + a_2 t) + F^{(0)}(x, t) \right),$$

(см. ниже начало формулы (22)) со вспомогательной функцией

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(z) = & \varphi\left(\chi_2^{-1}(z)\right) - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{\chi_2^{-1}(z)} \left\{ a_2 \varphi'(v) - \chi_2'(v) \psi(v) - a_2 \left( F^{(0)}(v, \kappa(v)) \right)' + \right. \\ & \left. + \chi_2'(v) \left( F^{(0)}(v, t) \right)' \Big|_{t=\kappa(v)} \right\} \chi_1'(v) dv - F^{(0)}\left(\chi_2^{-1}(z), \kappa\left(\chi_2^{-1}(z)\right)\right). \end{aligned}$$

Модификацией известного метода характеристик из [1] доказывается

**Теорема 1.** Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma \in C^1[0, +\infty[$ , криволинейные оси координат  $\kappa(x), \sigma(t) \in C^2[0, +\infty[$  удовлетворяют требованиям (4), (5), (10). Чтобы смешанная задача (1)–(3) с нехарактеристической первой косой производной в граничном режиме (3), т.е.  $a_1 \alpha(t) \neq \beta(t)$ ,  $t \geq 0$ , для каждой точки  $(x, t) \in \tilde{G}_\infty$  имела единственные и устойчивые по  $\varphi, \psi, \mu, f$  классические решения  $u \in C^2(\tilde{G}_\infty)$ , необходимо и достаточно требований гладкости и условий согласования (6)–(8) и (11).

Классическими решениями смешанной задачи (1)–(3) являются функции:

$$\begin{aligned} u_-(x, t) = & \varphi\left(\chi_2^{-1}(x + a_2 t)\right) - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{\chi_1^{-1}(x - a_1 t)}^{\chi_2^{-1}(x + a_2 t)} \left\{ a_2 \varphi'(v) - \chi_2'(v) \psi(v) - \right. \\ & \left. - a_2 \left( F^{(0)}(v, \kappa(v)) \right)' + \chi_2'(v) \left( F^{(0)}(v, t) \right)' \Big|_{t=\kappa(v)} \right\} \chi_1'(v) dv - \\ & - F^{(0)}\left(\chi_2^{-1}(x + a_2 t), \kappa\left(\chi_2^{-1}(x + a_2 t)\right)\right) + F^{(0)}(x, t), \quad (x, t) \in \tilde{G}_-, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} u_+(x, t) = & \int_0^{\sigma_1^{-1}(a_1 t - x)} e^{\int_{\sigma_1^{-1}(a_1 t - x)}^v \frac{\gamma(\rho) \sigma_1'(\rho)}{a_1 \alpha(\rho) - \beta(\rho)} d\rho} \frac{\mu(v) - P^{(0)}(v)}{a_1 \alpha(v) - \beta(v)} \sigma_1'(v) dv + \\ & + \varphi\left(\chi_2^{-1}(x + a_2 t)\right) - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{\chi_2^{-1}(x + a_2 t)} \left\{ a_2 \varphi'(v) - \chi_2'(v) \psi(v) - \right. \\ & \left. - a_2 \left( F^{(0)}(v, \kappa(v)) \right)' + \chi_2'(v) \left( F^{(0)}(v, t) \right)' \Big|_{t=\kappa(v)} \right\} \chi_1'(v) dv - \\ & - F^{(0)}\left(\chi_2^{-1}(x + a_2 t), \kappa\left(\chi_2^{-1}(x + a_2 t)\right)\right) + F^{(0)}(x, t), \quad (x, t) \in \tilde{G}_+. \end{aligned} \quad (22)$$

**Доказательство.** Общий интеграл классических решений неоднородного уравнения (1) в криволинейной первой четверти плоскости  $\tilde{G}_\infty$  представляет собой множество дважды непрерывно дифференцируемых функций

$$u(x, t) = \tilde{g}(x - a_1 t) + \tilde{h}(x + a_2 t) + F^{(0)}(x, t), \quad (x, t) \in \tilde{G}_\infty, \quad (23)$$

где  $F^{(0)}$  – дважды непрерывно дифференцируемые решения, равные функциям (9) из нашей леммы 1, а  $\tilde{g} = \tilde{g}(y)$  и  $\tilde{h} = \tilde{h}(z)$  – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции переменных  $y, z \in R$  вида

$$\tilde{g}(y) = g(y) - g(0), \quad \tilde{h}(z) = h(z) + g(0). \quad (24)$$

Здесь функции  $g$  и  $h$  дважды непрерывно дифференцируемы одновременно и соответственно с функциями  $\tilde{g}$  и  $\tilde{h}$ . Функции (24) построены «методом погружения в решения с фиксированными значениями» из [10].

**Достаточность** в  $\tilde{G}_-$ . На множестве  $\tilde{G}_-$  мы ищем решения поставленной смешанной задачи как решения задачи Коши (1), (2). Подставляем общий интеграл (23) в начальные условия (2) и приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x - a_1 \kappa(x)) + \tilde{h}(x + a_2 \kappa(x)) + F^{(0)}(x, \kappa(x)) &= \varphi(x), \\ -a_1 \tilde{g}'(x - a_1 \kappa(x)) + a_2 \tilde{h}'(x + a_2 \kappa(x)) + (F^{(0)}(x, t))_t \Big|_{t=\kappa(x)} &= \psi(x), \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Дифференцируем по  $x$  первое уравнение, умножаем на производную  $\kappa'(x)$  второе уравнение, вычитаем полученные результаты и имеем

$$\begin{aligned} \tilde{g}'(x - a_1 \kappa(x)) + \tilde{h}'(x + a_2 \kappa(x)) + (F^{(0)}(x, \kappa(x)))_x - \kappa'(x) (F^{(0)}(x, t))_t \Big|_{t=\kappa(x)} &= \\ = \varphi'(x) - \kappa'(x) \psi(x), \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Умножаем это уравнение на  $a_2$ , из результата вычитаем второе уравнение системы (25) и получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) \tilde{g}'(x - a_1 \kappa(x)) + a_2 (F^{(0)}(x, \kappa(x)))_x - \chi_2'(x) (F^{(0)}(x, t))_t \Big|_{t=\kappa(x)} &= \\ = a_2 \varphi'(x) - \chi_2'(x) \psi(x), \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

которое интегрируем по  $y = x - a_1 \kappa(x)$  от 0, так как  $y = x - a_1 \kappa(x) \supset [0, +\infty[$ , и до  $y$ . В итоге, находим первую функцию решения системы (25):

$$\begin{aligned} \tilde{g}(y) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^y \{ a_2 \varphi'(\chi_1^{-1}(s)) - \chi_2'(\chi_1^{-1}(s)) \psi(\chi_1^{-1}(s)) - \\ - a_2 (F^{(0)}(x, \kappa(x)))_x \Big|_{x=\chi_1^{-1}(s)} + \chi_2'(\chi_1^{-1}(s)) (F^{(0)}(x, t))_t \Big|_{t=\kappa(x)} \Big|_{x=\chi_1^{-1}(s)} \} ds + C \end{aligned}$$

при постоянной интегрирования  $C = \tilde{g}(0) = 0$  из (24). После замены переменной интегрирования  $s = \chi_1(v)$  она становится функцией

$$\begin{aligned} \tilde{g}(y) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{\chi_1^{-1}(y)} \{ a_2 \varphi'(v) - \chi_2'(v) \psi(v) - \\ - a_2 (F^{(0)}(v, \kappa(v)))_v + \chi_2'(v) (F^{(0)}(v, t))_t \Big|_{t=\kappa(v)} \} \chi_1'(v) dv. \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда из первого уравнения системы (25) в силу (26) выражаем

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x+a_2\kappa(x)) &= \varphi(x) - F^{(0)}(x, \kappa(x)) - \tilde{g}(x - a_1\kappa(x)) = \\ &= \varphi(x) - F^{(0)}(x, \kappa(x)) - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^x \{a_2\varphi'(v) - \chi_2'(v)\psi(v) + \\ &\quad - a_2(F^{(0)}(v, \kappa(v)))'_v + \chi_2'(v)(F^{(0)}(v, t))'_t|_{t=\kappa(v)}\} \chi_1'(v) dv. \end{aligned}$$

Отсюда после замены переменной  $z = \chi_2(x)$  она становится функцией

$$\begin{aligned} \tilde{h}(z) &= \varphi(\chi_2^{-1}(z)) - F^{(0)}(\chi_2^{-1}(z), \kappa(\chi_2^{-1}(z))) - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{\chi_2^{-1}(z)} \{a_2\varphi'(v) - \chi_2'(v)\psi(v) - \\ &\quad - a_2(F^{(0)}(v, \kappa(v)))'_v + \chi_2'(v)(F^{(0)}(v, t))'_t|_{t=\kappa(v)}\} \chi_1'(v) dv. \end{aligned} \quad (27)$$

В общий интеграл (23) подставляем функции  $\tilde{g}$  из (26) при  $y = x - a_1t$  и  $\tilde{h}$  из (27) при  $z = x + a_2t$  и выводим формальное решение  $u_-(x, t)$  вида (21) смешанной задачи (1)–(3) для  $(x, t) \in \tilde{G}_-$ .

Анализ слагаемых выражения (21) указывает на дважды непрерывную дифференцируемость функции  $u_-(x, t)$  для исходных данных  $\varphi, \psi, f$  с гладкостью (6), (11) на  $\tilde{G}_-$ . В частности, дважды непрерывная дифференцируемость слагаемых выражения (21), содержащих функции  $F^{(0)}$  вида (9) на  $\tilde{G}_-$ , следует из гладкости правой части  $f$  в (6), (11) на  $\tilde{G}_-$ .

**Необходимость** в  $\tilde{G}_-$ . Необходимость гладкости (6) на  $\varphi, \psi, f$  показана нами выше перед формулировкой леммы 1. Необходимость интегральных требований гладкости (11) на  $\tilde{G}_-$  для правой части  $f$  установлена выше в лемме 1 с помощью соотношений (20).

**Достаточность** в  $\tilde{G}_+$ . Решения смешанной задачи (1)–(3) на  $\tilde{G}_+$  нами ищутся, как решения задачи Пикара для уравнения (1) на  $\tilde{G}_+$  с предельным равенством  $u_+(x, t) = u_-(x, t)$  на характеристике  $x = a_1t$  и граничным режимом (3). Подставляем общий интеграл (23) на  $\tilde{G}_+$  равносильного вида

$$u(x, t) = \tilde{g}(a_1t - x) + \tilde{h}(x + a_2t) + F^{(0)}(x, t) \quad (28)$$

в это равенство  $u_+(x, t) = u_-(x, t)$ , полагаем  $x = a_1t$  и имеем равенство

$$\begin{aligned} \tilde{h}((a_1 + a_2)t) &= \varphi(\chi_2^{-1}((a_1 + a_2)t)) - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{\chi_2^{-1}((a_1 + a_2)t)} \{a_2\varphi'(v) - \chi_2'(v)\psi(v) - \\ &\quad - a_2(F^{(0)}(v, \kappa(v)))'_v + \chi_2'(v)(F^{(0)}(v, t))'_t|_{t=\kappa(v)}\} \chi_1'(v) dv - \\ &\quad - F^{(0)}(\chi_2^{-1}((a_1 + a_2)t), \kappa(\chi_2^{-1}((a_1 + a_2)t))), \end{aligned}$$

так как  $\tilde{g}(0) = 0$  ввиду (24). Из этого равенства при  $z = (a_1 + a_2)t \geq 0$  для всех  $t \geq \kappa(x)$ ,  $x \geq 0$  находим функцию

$$\begin{aligned} \tilde{h}(z) = & \varphi(\chi_2^{-1}(z)) - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{\chi_2^{-1}(z)} \{a_2 \varphi'(v) - \chi_2'(v) \psi(v) - a_2 (F^{(0)}(v, \kappa(v)))'_v + \\ & + \chi_2'(v) (F^{(0)}(v, t))'_t \Big|_{t=\kappa(v)}\} \chi_1'(v) dv - F^{(0)}(\chi_2^{-1}(z), \kappa(\chi_2^{-1}(z))). \end{aligned} \quad (29)$$

Теперь подставляем общий интеграл (28) на  $\tilde{G}_+$  в граничный режим (3)

$$\Gamma(t) \tilde{g}(a_1 t - x) + \Gamma(t) [\tilde{h}(x + a_2 t) + F^{(0)}(x, t)] = \mu(t), \quad t \geq \kappa(x).$$

Отсюда находим, что

$$\Gamma(t) \tilde{g}(a_1 t - x) \equiv (a_1 \alpha(t) - \beta(t)) \tilde{g}'(a_1 t - \sigma(t)) + \gamma(t) \tilde{g}(a_1 t - \sigma(t)) = \mu(t) - P^{(0)}(t),$$

где специальная функция  $P^{(0)}(t) = \Gamma(t) [\tilde{h}(x + a_2 t) + F^{(0)}(x, t)]$  является значением граничного оператора  $\Gamma(t)$  из (3) с первой косой производной от суммы вспомогательной функции  $\Phi^{(0)}(z) = \tilde{h}(z)$ , равной выражению (29), и локальных частных решений  $F^{(0)}$  вида (9) при  $x = \sigma(t)$ ,  $t \geq 0$ . Последнее вышенайденное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка делим на  $a_1 \alpha(t) - \beta(t) \neq 0$ , умножаем на интегрирующий множитель

$$\eta(y) = \exp \left\{ \int_0^y \frac{\gamma(\sigma_1^{-1}(\rho)) d\rho}{a_1 \alpha(\sigma_1^{-1}(\rho)) - \beta(\sigma_1^{-1}(\rho))} \right\},$$

интегрируем результат умножения по  $y = a_1 t - \sigma(t) = \sigma_1(t)$  от 0, так как значения функции  $\sigma_1(t) \in [0, +\infty[$  для всех  $t \geq 0$ , до  $y$  и имеем функцию

$$\tilde{g}(y) = \int_0^{\sigma_1^{-1}(y)} \exp \left\{ \int_{\sigma_1^{-1}(y)}^v \frac{\gamma(\rho) \sigma_1'(\rho) d\rho}{a_1 \alpha(\rho) - \beta(\rho)} \right\} \frac{\mu(v) - P^{(0)}(v)}{a_1 \alpha(v) - \beta(v)} \sigma_1'(v) dv. \quad (30)$$

Наконец, в общий интеграл (28) подставляем функции  $\tilde{g}$  из (30) при  $y = a_1 t - x$  и  $\tilde{h}$  из (29) при  $z = x + a_2 t$  и получаем формальное решение  $u_+(x, t)$  вида (22) смешанной задачи (1)–(3) для  $(x, t) \in \tilde{G}_+$ .

Гладкости  $\varphi \in C^2[0, +\infty[$ ,  $\psi \in C^1[0, +\infty[$ ,  $\mu \in C^1[0, +\infty[$  из (6) очевидно достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости на  $\tilde{G}_+$  первых слагаемых функции  $u_+(x, t)$  вида (22) и, в том числе, слагаемых из специальной функции  $P^{(0)}(t)$ , которые содержат входные данные  $\varphi, \psi, \mu$ . Для всех оставшихся слагаемых из (22), в которых явно присутствует  $F^{(0)}$  с функцией  $f$ , их дважды непрерывная дифференцируемость на  $\tilde{G}_+$  обеспечивается гладкостью  $f \in C(\tilde{G}_\infty)$  из (6) и гладкостью интегралов (11) на  $\tilde{G}_\infty$ .

**Необходимость** гладкости в  $\tilde{G}_+$  обосновывается также, как выше на  $\tilde{G}_-$ .

Вне зависимости от различных возможных значений параметра локализации  $t_0$  различные локальные классические решения (21) на  $\tilde{G}_-$  и (22) на  $\tilde{G}_+$  единственны. Докажем их единственность от противного. Пусть  $u_1$  и  $u_2$  – ее различные классические решения. Тогда в силу линейности самой исходной смешанной зада-

чи их разность  $\tilde{u} = u_1 - u_2$  является классическим решением однородной смешанной задачи (1)–(3) при нулевых входных данных  $f = 0$ ,  $\varphi = \psi = 0$ ,  $\mu = 0$  и соответствующих значениях параметра  $t_0$ . Из однозначных формул (21) и (22), полученных нами из множества (23) всех классических решений уравнения (1) на  $\tilde{G}_\infty$ , этим нулевым данным и любым значениям  $t_0$  соответствует только нулевое решение  $\tilde{u} = 0$ , т.е.  $u_1 = u_2$  на  $\tilde{G}_\infty$ . Единственность классических решений доказана.

Устойчивость классических решений смешанной задачи (1)–(3) на  $\tilde{G}_\infty$  вытекает из доказанных выше их существования и единственности благодаря теореме Банаха о замкнутом графике или теореме Банаха об открытом отображении. Кроме того, их устойчивость по входным данным  $\varphi, \psi, \mu, f$ , т.е. их непрерывная зависимость от этих данных непосредственно выводится из формул (21) и (22) так же, как в случае линейных осей [10, 11].

Необходимость условий согласования (7), (8) показана нами перед формулировкой леммы 1. Более того, их достаточность тоже устанавливается так же, как в случае линейных осей в статье [4]. Этот факт подтверждается ниже следствием 1, в котором формулы (21), (22) классических решений и критерий корректности (6)–(8), (11) смешанной задачи (1)–(3) из теоремы 1 совпадают с известными результатами в случае прямолинейных осей координат  $\kappa(x) = 0$ ,  $\sigma(t) = 0$  и  $t_0 = 0$  из [4]. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь нехарактеристическую смешанную задачу (1)–(3) в прямолинейной первой четверти плоскости  $\tilde{G}_\infty = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . В следующем следствии 1 применена специальная функция граничного режима (3)

$$P(t) = \left\{ (\alpha(t)\partial_t + \beta(t)\partial_x + \gamma(t))(\Phi(x,t) + F(x,t)) \right\} \Big|_{x=0},$$

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left( a_1\varphi(x + a_2t) + a_2\varphi(0) + \int_0^{x+a_2t} \psi(s)ds \right),$$

$$F(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(|s|, \tau) ds d\tau, \quad (x,t) \in G_\infty = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[.$$

**Следствие 1** [4]. Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma \in C^1[0, +\infty[$ ,  $a_1\alpha(t) \neq \beta(t)$ ,  $t \geq 0$ , прямолинейные оси координат  $\kappa(x) \equiv 0$ ,  $\sigma(t) \equiv 0$  и  $t_0 = 0$ . Единственным и устойчивым по  $\varphi, \psi, \mu, f$  классическим глобальным решением  $u \in C^2(G_\infty)$  смешанной задачи (1)–(3) является

$$u_-(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left( a_1\varphi(x + a_2t) + a_2\varphi(x - a_1t) + \int_{x-a_1t}^{x+a_2t} \psi(s)ds \right) + F(x,t), \quad (x,t) \in G_- = \{(x,t) \in G_\infty : a_1t < x, t > 0\}, \quad (31)$$

$$u_+(x,t) = a_1 \int_0^{t-x/a_1} \exp \left\{ a_1 \int_{t-x/a_1}^v \frac{\gamma(\rho)}{a_1\alpha(\rho) - \beta(\rho)} d\rho \right\} \frac{\mu(v) - P^{(0)}(v)}{a_1\alpha(v) - \beta(v)} dv + \Phi(x,t) + F(x,t), \quad (x,t) \in G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : a_1t > x, x > 0\}, \quad (32)$$

тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости (6), (11) и условия согласования:

$$Y_1 \equiv \alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \quad (33)$$

$$Y_2 \equiv \alpha'(0)\psi(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) + \alpha(0)[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1 a_2 \varphi''(0)] + \beta(0)\psi'(0) + \beta(0)\varphi''(0) + \gamma(0)\psi(0) = \mu'(0). \quad (34)$$

**Доказательство.** Если оси  $\kappa(x) \equiv 0$ ,  $\sigma(t) \equiv 0$ , то функции  $\chi_0(x) = x$ ,  $\chi_0'(x) = 1$ ,  $\chi_0^{-1} = I$ ,  $\chi_i(x) = x$ ,  $\sigma_i(t) = a_i t$ ,  $\chi_i'(x) = 1$ ,  $\sigma_i'(t) = a_i$ ,  $\chi_i^{-1} = I$ ,  $\sigma_i^{-1} = a_i^{-1} I$ ,  $i = 1, 2$ . Поэтому в формуле (21) первые слагаемые равны

$$\begin{aligned} & \varphi\left(\chi_2^{-1}(x + a_2 t)\right) - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{\chi_1^{-1}(x - a_1 t)}^{\chi_2^{-1}(x + a_2 t)} a_2 \varphi'(v) \chi_1'(v) dv = \varphi(x + a_2 t) - \\ & - \frac{a_2}{a_1 + a_2} \varphi(x + a_2 t) + \frac{a_2}{a_1 + a_2} \varphi(x - a_1 t) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \varphi(x + a_2 t) + \frac{a_2}{a_1 + a_2} \varphi(x - a_1 t), \\ & \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{\chi_1^{-1}(x - a_1 t)}^{\chi_2^{-1}(x + a_2 t)} \chi_2'(v) \psi(v) \chi_1'(v) dv = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{x - a_1 t}^{x + a_2 t} \psi(v) dv. \end{aligned} \quad (35)$$

В остальных слагаемых из (21) при  $\kappa(x) \equiv 0$  и  $t_0 = 0$  верны тождества:

$$\begin{aligned} & \left(F^{(0)}(v, \kappa(v))\right)'_v = \frac{1}{a_1 + a_2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \int_0^{\kappa(v)} \int_{v - a_1(\kappa(v) - \tau)}^{v + a_2(\kappa(v) - \tau)} f(s, \tau) ds d\tau \right) = \\ & = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{\kappa(v)} [f(v + a_2(\kappa(v) - \tau), \tau) \chi_2'(v) - f(v - a_1(\kappa(v) - \tau), \tau) \chi_1'(v)] d\tau \equiv 0, \\ & \left(F^{(0)}(v, t)\right)'_t \Big|_{t=\kappa(x)} = \\ & = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{\kappa(v)} [a_2 f(v + a_2(\kappa(v) - \tau), \tau) + a_1 f(v - a_1(\kappa(v) - \tau), \tau)] d\tau \equiv 0, \\ & F^{(0)}\left(\chi_2^{-1}(x + a_2 t), \kappa\left(\chi_2^{-1}(x + a_2 t)\right)\right) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{\kappa(v)} \int_{v + a_2 t - a_2 \tau}^{v + a_2 t + a_1 \tau} f(s, \tau) ds d\tau \equiv 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Из тождеств (35) и (36) следует совпадение решений (21) и (31) на  $G_-$ .

Равенство первых слагаемых с экспонентами в решениях (22) и (32) не вызывает сомнений. Тогда из этих же тождеств (35) и (36) вытекает, что в предположениях следствия 1 решения (22) и (32) совпадают на  $G_+$ .

В следствии 1 критерий корректности смешанной задачи (1)–(3) вытекает из критерия ее корректности в теореме 1. В частности, достаточность условий согласования (33) и (34) для дважды непрерывной дифференцируемости решений (31) и (32) в пределе на критической характеристике  $x = a_1 t$  проверяется непосредственным вычислением. Из вывода классического решения (22) на  $\tilde{G}_+$  в доказательстве теоремы 1 следует равенство их предельных значений на  $x = a_1 t$ , т.е.  $u_+|_{x=a_1 t} = u_-|_{x=a_1 t}$ . Ввиду условий (33) и (34) разности предельных значений частных производных первого и второго порядков решений (31) и (32) на  $x = a_1 t$  соответственно равны [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+}{\partial t} \Big|_{x=a_1 t} - \frac{\partial u_-}{\partial t} \Big|_{x=a_1 t} &= \frac{a_1(\mu(0) - Y_1)}{a_1\alpha(0) - \beta(0)} = 0, \\ \frac{\partial u_+}{\partial x} \Big|_{x=a_1 t} - \frac{\partial u_-}{\partial x} \Big|_{x=a_1 t} &= \frac{Y_1 - \mu(0)}{a_1\alpha(0) - \beta(0)} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_+}{\partial t^2} \Big|_{x=a_1 t} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial t^2} \Big|_{x=a_1 t} &= \frac{(a_1^2(\gamma(0) + \alpha'(0)) - a_1\beta'(0))(\mu(0) - Y_1)}{(a_1\alpha(0) - \beta(0))^2} - \\ &\quad - \frac{a_1(Y_2 - \mu'(0))}{a_1\alpha(0) - \beta(0)} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_+}{\partial x \partial t} \Big|_{x=a_1 t} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial x \partial t} \Big|_{x=a_1 t} &= \frac{(a_1(\gamma(0) + \alpha'(0)) - \beta'(0))(\mu(0) - Y_1)}{(a_1\alpha(0) - \beta(0))^2} + \\ &\quad + \frac{Y_2 - \mu'(0)}{a_1\alpha(0) - \beta(0)} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_+}{\partial x^2} \Big|_{x=a_1 t} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial x^2} \Big|_{x=a_1 t} &= \frac{(a_1\alpha'(0) + \beta'(0))(Y_1 - \mu(0))}{a_1(a_1\alpha(0) - \beta(0))^2} + \\ &\quad + \frac{Y_2 - \mu'(0)}{a_1(a_1\alpha(0) - \beta(0))} = 0. \end{aligned}$$

Аналогичные равенства верны и в теореме 1. Следствие 1 доказано.

**Следствие 2.** Если правая часть  $f$  зависит только от  $x$  или  $t$  и непрерывна  $f \in C[0, +\infty[$  по  $t$  или  $x$ , то утверждения теоремы 1 и следствия 1 верны без интегральных требований гладкости (11) на  $f$ .

Когда функция  $f$  зависит только от  $x$  или  $t$ , тогда для непрерывной  $f \in C[0, +\infty[$  интегральная гладкость (11) автоматически выполняется [11].

**Следствие 3.** Если правая часть  $f$  зависит от  $x$  и  $t$ , то в теореме 1 и следствии 1 для  $f \in C(\tilde{G}_\infty)$  принадлежность интегралов  $H_i^{(0)}(x, t) \in C^1(\tilde{G}_\infty)$ ,  $i=1, 2$ , в требованиях гладкости (11) эквивалентна принадлежности интегралов  $H_i^{(0)}(x, t) \in C^{(1,0)}(\tilde{G}_\infty)$  или  $H_i^{(0)}(x, t) \in C^{(0,1)}(\tilde{G}_\infty)$ ,  $i=1, 2$ .

Здесь  $C^{(1,0)}(\tilde{G}_\infty)$  и  $C^{(0,1)}(\tilde{G}_\infty)$  – соответственно множества непрерывно дифференцируемых по  $x$  и  $t$  и непрерывных по  $t$  и  $x$  функций на  $\tilde{G}_\infty$ . Доказательство следствия 3 аналогично его доказательству в [11].

**Замечание 2.** Классические решения более общего вида, чем локальные решения (9), неоднородных уравнения (1) и более общих уравнений вычислены методом корректировки в [12, 13] для криволинейной и в [14] для прямолинейной первой четверти плоскости. На нашем рис. 1, а кривая  $l_3 = \tilde{P}L_1$  симметрична отрезку  $PL_1$  относительно кривой  $l_2 = L_0L_1$  координатной оси  $s = \sigma(\tau)$ . На рис. 1, б кривые  $\tilde{l}_2 = \tilde{L}_0\tilde{L}_1$  и  $\tilde{l}_3 = \tilde{P}\tilde{L}_1$  – образы соответственно кривых  $l_2 = L_0L_1$  и  $l_3 = \tilde{P}L_1$  с рис. 1, а при замене типа (13). На рис. 2, б кривая  $\tilde{L}_0\tilde{L}_1$  – образ кривой  $L_0L_1$  с

рис. 2, а при замене типа (13). Эти кривые нужны для вычисления новых классических решений неоднородных волновых уравнений с постоянными коэффициентами в [12–14].

**Замечание 3.** Смешанная задача для более общего одномерного волнового уравнения, чем уравнение (1), но при нестационарных граничных режимах с нехарактеристическими вторыми производными в прямолинейной полуполосе плоскости полностью решена и изучена в статье [15].

### Заключение

В данной работе выведены явные формулы (21), (22) единственных и устойчивых классических локальных решений  $u \in C^2(\tilde{G}_\infty)$  смешанной задачи (1)–(3) в криволинейной первой четверти плоскости  $\tilde{G}_\infty$  при зависящих от времени коэффициентах граничного режима с нехарактеристической первой косою производной. Для однозначной и устойчивой везде разрешимости этой нехарактеристической смешанной задачи найдены необходимые и достаточные требования гладкости (6), (11) и два условия согласования (7), (8) на правую часть  $f$  уравнения (1), начальные данные  $\varphi, \psi$  из (2) и граничное данное  $\mu$  режима (3). Доказано совпадение локальных решений и критерия корректности данной смешанной задачи в криволинейной четверти с известными в случае прямолинейной четверти. Эти результаты будут использованы для поиска явного классического решения и критерия корректности аналогичной задачи в нецилиндрической области.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва : Наука, 2004. – 798 с.
2. **Ломовцев, Ф. Е.** В криволинейной четверти плоскости смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний струны при нехарактеристической и нестационарной первой косою производной на конце / Ф. Е. Ломовцев // XXXIV Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXX», посвященной памяти А. Д. Баева: материалы Междунар. конф. (3–9 мая 2019 г.). / ВГУ, МГУ имени М. В. Ломоносова, Математический институт имени В. А. Стеклова РАН – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. – С. 190–192.
3. **Ломовцев, Ф. Е.** Решение и корректность по Адамару смешанной задачи в криволинейной четверти плоскости для волнового уравнения при не характеристической и нестационарной первой косою производной в граничном режиме / Ф. Е. Ломовцев // Еругинские чтения – 2019 : материалы XIX Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Могилев, 14–17 мая 2019 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, БРУ ; ред. А. К. Деменчук [и др.]. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 2019. – Ч. 2. – С. 25–27.
4. **Ломовцев, Ф. Е.** Начально-краевая задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны общего вида с первыми нехарактеристическими косыми производными в нестационарных граничных условиях / Ф. Е. Ломовцев, Ю. Ф. Новик // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2016. – № 1. – С. 129–135.
5. **Ломовцев, Ф. Е.** Смешанная задача для одномерного волнового уравнения при характеристической первой косою производной в нестационарном граничном режиме для гладких решений / Ф. Е. Ломовцев, Е. В. Устилко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. № 2 (56). Серыя В. Прыродазнаучыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2020. – С. 21–36.
6. **Драгиева, Н. А.** Применение метода Галёркина к решению волнового уравнения в области с подвижными границами / Н. А. Драгиева // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1975. – Т. 15, № 4. – С. 946–956.
7. **Корзюк, В. И.** Первая смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка с однородными условиями в случае нецилиндрической области / В. И. Корзюк // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 847–856.

8. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 1. – С. 77–88.

9. Корзюк, В. И. Классическое решение в криволинейной полуполосе первой смешанной задачи для волнового уравнения / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Дифференц. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 99–109.

10. Ломовцев, Ф. Е. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных / Ф. Е. Ломовцев, В. В. Лысенко // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 3 (104). – С. 5–17.

11. Новиков, Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02. / Е. Н. Новиков; Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2017. – 25 с.

12. Ломовцев, Ф. Е. О методе корректировки пробных решений одномерного волнового уравнения в криволинейной четверти плоскости / Ф. Е. Ломовцев // XXXII Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXI»: Материалы Междунар. конф. : (3–9 мая 2020 г.). / ВГУ, МГУ им. М.В. Ломоносова, Математический институт имени В. А. Стеклова РАН – Воронеж : АНО «Наука-Юнипресс», 2020. – С. 126–129.

13. Ломовцев, Ф. Е. В криволинейной первой четверти плоскости метод корректировки пробных решений для минимальной гладкости правой части волнового уравнения с постоянными коэффициентами / Ф. Е. Ломовцев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2021. – № 3 (104). – С. 5–22.

14. Ломовцев, Ф. Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.

15. Ломовцев, Ф. Е. Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения в полуполосе плоскости при нестационарных нехарактеристических вторых производных / Ф. Е. Ломовцев, В. В. Лысенко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. № 2 (58). Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2021. – С. 28–54.

Поступила в редакцию 20.01.2022 г.

Контакты: lomovcev@bsu.by (Ломовцев Фёдор Егорович)

#### **Lomovtsev F. E. IN THE CURVILINEAR FIRST QUARTER OF THE PLANE RESOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION FOR NON-STATIONARY AND NON-CHARACTERISTIC FIRST OBLIQUE DERIVATIVE**

*The correctness (according to Hadamard) of a linear mixed problem for a one-dimensional wave equation with constant coefficients in a non-stationary boundary mode with a non-characteristic first oblique derivative in the curvilinear first quarter of the plane is fully studied. The unique and stable classical (twice continuously differentiable) local solutions of this mixed problem are calculated in an explicit form. The calculated solutions depend on a varying but fixed time localization parameter. A correctness criterion is established (necessary and sufficient smoothness requirements and matching conditions for the right-hand side of the equation, initial and boundary data).*

**Keywords:** curvilinear coordinate axes, mixed problem, non-stationary boundary mode, non-characteristic oblique derivative, local classical solution, localization parameter, correctness criterion.

УДК 512.548

## О ПОРОЖДАЮЩИХ МНОЖЕСТВАХ ПОЛИАДИЧЕСКОЙ ГРУППЫ $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ . I

**А. М. Гальмак**

доктор физико-математических наук, профессор

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

*В статье продолжается изучение установленной ранее связи между порождающими множествами группы  $A$  и порождающими множествами полиадической группы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  с  $l$ -арной операцией  $[ ]_{l, \sigma, k}$ , которая определяется на  $k$ -й декартовой степени произвольной группы  $A$  для любого целого  $l \geq 2$  и любой подстановки  $\sigma$  из множества  $S_k$  всех подстановок множества  $\{1, 2, \dots, k\}$ .*

**Ключевые слова:** группа, полиадическая группа,  $l$ -арная группа, порождающее множество.

### 1. Введение

Полиадическая операция  $[ ]_{l, \sigma, k}$  арности  $l$ , где  $k \geq 2$ ,  $l \geq 2$ ,  $\sigma \in S_k$ , определяется на  $k$ -й декартовой степени  $A^k$  полугруппы  $A$  следующим образом [1]: если

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l,$$

то

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, 2, \dots, k.$$

Частными случаями полиадической операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  являются две полиадические операции Э. Поста [2], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, а вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Изучению полиадической операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  посвящена книга [1]. Заметим, что в [3]  $l$ -арная операция  $[ ]_{l, \sigma, k}$  определена на  $k$ -й декартовой степени  $A^k$  произвольного группоида  $A$ .

Если подстановка  $\sigma^{l-1}$  тождественная, то полугруппе  $A$  соответствует  $l$ -арная полугруппа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ . Аналогично, группе  $A$  соответствует  $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ .

**Теорема 1.1.** [1]. *Если  $A$  – группа, подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  –  $l$ -арная группа.*

Следующая теорема показывает, что нетождественность подстановки  $\sigma$  гарантирует отсутствие единиц в  $l$ -арном группоиде  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ .

**Теорема 1.2.** [1]. *Если полугруппа  $A$  содержит более одного элемента,  $\sigma$  – нетождественная подстановка из  $S_k$ , то в  $l$ -арном группоиде  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  нет единиц.*

В данной статье продолжается начатое автором в [4] изучение связи между порождающими множествами группы  $A$  и порождающими множествами  $l$ -арной группы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ .

## 2. Предварительные сведения

Для любого элемента  $a$   $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  решение уравнения  $[\underbrace{xa \dots a}_{l-1}] = a$  обозначают символом  $\bar{a}$  и называют косым элементом для  $a$ .

Для любого подмножества  $M$   $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  полагают

$$\bar{M} = \{\bar{a} \mid a \in M\}.$$

Согласно соответствующему определению для произвольных универсальных алгебр,  $l$ -арная подгруппа  $\langle B, [ ] \rangle$   $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  называется *порождающей* множеством  $M \subseteq A$ , если она совпадает с пересечением всех  $l$ -арных подгрупп  $\langle C, [ ] \rangle$  из  $\langle A, [ ] \rangle$  таких, что  $M \subseteq C$ . Множество  $M$  в этом случае называют *порождающим* для  $\langle B, [ ] \rangle$ .

Порождающее множество неединичной группы может содержать ее единицу, которую можно удалить, так как она совпадает как с нулевой степенью любого элемента  $a$  из порождающего множества, так и с произведением  $aa^{-1}$ . Поэтому далее в статье всегда порождающее множество  $M$  группы  $A$  не содержит ее единицу.

Следующие две теоремы являются многоместными аналогами соответствующих критериев порождаемости группы.

**Теорема 2.1.** [5].  *$l$ -Арная подгруппа  $\langle B, [ ] \rangle$   $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  порождается множеством  $M \subseteq A$  тогда и только тогда, когда каждый элемент  $b$  из  $B$  либо совпадает с некоторым элементом из  $M$ , либо может быть представлен в виде*

$$b = [m_1 \dots m_{r(l-1)+1}], \quad r = 1, 2, \dots,$$

где в правой части все элементы под знаком  $l$ -арной операции являются степенями элементов из  $M$ .

**Теорема 2.2.** [6].  *$l$ -Арная подгруппа  $\langle B, [ ] \rangle$   $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  порождается множеством  $M \subseteq A$  тогда и только тогда, когда каждый элемент  $b$  из  $B$  либо совпадает с некоторым элементом из  $M$ , либо может быть представлен в виде*

$$b = [m_1 \dots m_{r(l-1)+1}], \quad m_i \in M \cup \bar{M}, \quad r = 1, 2, \dots$$

**Замечание 2.1.** Если в порождающем множестве  $M$   $l$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  имеется элемент  $c$ , который с помощью  $l$ -арной операции  $[ ]$  и унарной операции  $\bar{\phantom{x}}$  взятия косого элемента выражается через другие элементы множества  $M$ , то есть

$$c = [m_1 \dots m_{r(l-1)+1}], \quad m_i \in M \cup \bar{M}, \quad m_i \neq c$$

для некоторого  $r = 1, 2, \dots$ , то этот элемент можно удалить из порождающего множества. В этом случае  $l$ -арная группа  $\langle A, [ ] \rangle$  порождается множеством  $M \setminus \{c\}$ .

Для подмножества  $M$  полугруппы  $A$  с единицей  $1$ , натурального  $k \geq 1$  и любого  $j = 1, 2, \dots, k$  полагаем [7, 8]

$$U_j(M) = \{(1, \dots, 1, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \mid a \in M\}, \quad U(M) = \bigcup_{j=1}^k U_j(M).$$

Для сокращения записей будем использовать обозначение  $\mathbf{e} = (\underbrace{1, \dots, 1}_k)$ , где 1 – единица полугруппы  $A$ .

**Замечание 2.2.** Ясно что если  $1 \in M$ , то  $\mathbf{e} \in U_j(M)$  для любого  $j = 1, 2, \dots, k$ , откуда  $\mathbf{e} \in U(M)$ . Если же  $1 \notin M$ , то  $\mathbf{e} \notin U(M)$ .

При получении основного результата следующего раздела будет использована следующая теорема.

**Теорема 2.3** [4, теорема 2.1]. Пусть группа  $A$  порождается множеством  $M$ , подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ . Тогда  $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  порождается множеством  $U(M) \cup U(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}$ .

**Замечание 2.3.** Фактически в теореме 2.3 доказано, что в ее условиях любой элемент  $\mathbf{a}$   $l$ -арной группы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  либо совпадает с некоторым элементом множества

$$U(M) \cup U(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\},$$

либо может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{l(l-1)+1}]_{l, \sigma, k}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

где все элементы под знаком  $l$ -арной операции принадлежат этому же множеству. Это следует из равенства (2.6) в доказательстве теоремы 2.1 из [4].

**Лемма 2.1.** [4, утверждения 1) и 3) леммы 2.1]. Пусть  $A$  – полугруппа с единицей 1, подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ . Тогда:

1) если  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k) \in A^k$ , то

$$[\underbrace{\mathbf{b} \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{c}}_{l-2}]_{l, \sigma, k} = (b_1 c_1, \dots, b_k c_k);$$

2) если

$$\mathbf{c}_s = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, c_s, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, \quad s = 1, 2, \dots, r$$

для фиксированного  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , то

$$[\underbrace{\mathbf{c}_1 \mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{c}_2}_{l-2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{c}_3}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{c}_r}_{l-2}]_{l, \sigma, k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, c_1 c_2 \dots c_r, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}).$$

Для формулировки следующей леммы зафиксируем специальные обозначения.

Пусть  $n_1, \dots, n_m$  – различные элементы множества  $\{1, 2, \dots, k\}$ , где  $1 \leq m \leq k$ . Для любых элементов  $b_{n_1}, \dots, b_{n_m} \in A$  определим элемент

$$\mathbf{b}_{n_1, \dots, n_m} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k,$$

в котором  $a_{n_1} = b_{n_1}, \dots, a_{n_m} = b_{n_m}$ , а все компоненты с индексами, отличными от  $n_1, \dots, n_m$ , равны единице полугруппы  $A$ , то есть

$$a_s = \begin{cases} 1, & \text{если } s \notin \{n_1, \dots, n_m\}, \\ b_s, & \text{если } s \in \{n_1, \dots, n_m\}. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\mathbf{b}_{n_1} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1-1}, b_{n_1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-n_1}), \dots, \mathbf{b}_{n_m} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_m-1}, b_{n_m}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-n_m}) \in A^k,$$

так как согласно приведенным выше обозначениям,

$$\mathbf{b}_j = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, b_j, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j})$$

для любого  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Так как в определении элемента  $\mathbf{b}_{n_1, \dots, n_m}$  множество  $\{n_1, \dots, n_m\}$  не считается упорядоченным, то

$$\mathbf{b}_{n_1, \dots, n_m} = \mathbf{b}_{n_{\alpha(1)}, \dots, n_{\alpha(m)}}$$

для любой подстановки  $\alpha$  множества  $\{1, 2, \dots, m\}$ .

Если бы в определении элемента  $\mathbf{b}_{n_1, \dots, n_m}$  указанное множество было упорядочено ( $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ ), то для любой нетождественной подстановки  $\alpha$  из  $\mathbf{S}_m$  элемент  $\mathbf{b}_{n_{\alpha(1)}, \dots, n_{\alpha(m)}}$  был бы не определен.

**Замечание 2.4.** Так как в определении элемента  $\mathbf{b}_{n_1, \dots, n_m}$  некоторые из элементов  $b_{n_1}, \dots, b_{n_m} \in A$  могут быть равными единице полугруппы  $A$ , то в этом случае соответствующие компоненты  $a_{n_1} = b_{n_1}, \dots, a_{n_m} = b_{n_m}$  также равны единице полугруппы  $A$ .

**Лемма 2.2.** Пусть  $A$  – полугруппа с единицей 1, подстановка  $\sigma$  из  $\mathbf{S}_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ ,

$$n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s \in \{1, 2, \dots, k\},$$

$$\{n_1, \dots, n_r\} \cap \{m_1, \dots, m_s\} = \emptyset.$$

Тогда

$$[\mathbf{b}_{n_1, \dots, n_r} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{b}_{m_1, \dots, m_s}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{b}_{n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s}.$$

**Доказательство.** Полагая

$$\mathbf{b}_{n_1, \dots, n_r} = (u_1, \dots, u_k),$$

$$\mathbf{b}_{m_1, \dots, m_s} = (v_1, \dots, v_k),$$

$$[\mathbf{b}_{n_1, \dots, n_r} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{b}_{m_1, \dots, m_s}]_{l, \sigma, k} = (w_1, \dots, w_k)$$

и учитывая определение операции  $[\ ]_{l, \sigma, k}$ , а также тождественность подстановки  $\sigma^{l-1}$ , получим

$$w_j = u_j \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} v_j = u_j v_j.$$

Если  $j \in \{n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s\}$ , то из условия леммы следует, что либо

$$j \in \{n_1, \dots, n_r\}, j \notin \{m_1, \dots, m_s\},$$

либо

$$j \in \{m_1, \dots, m_s\}, j \notin \{n_1, \dots, n_r\}.$$

В первом случае  $j = n_\alpha$  для некоторого  $\alpha \in \{1, \dots, r\}$ , соответственно,

$$u_j = b_{n_\alpha}, v_j = 1, w_j = u_j v_j = b_{n_\alpha}.$$

Во втором случае  $j = m_\beta$  для некоторого  $\beta \in \{1, \dots, s\}$ , соответственно,

$$u_j = 1, v_j = b_{m_\beta}, w_j = u_j v_j = b_{m_\beta}.$$

Если  $j \notin \{n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s\}$ , то из условия леммы следует

$$j \notin \{n_1, \dots, n_r\}, j \notin \{m_1, \dots, m_s\},$$

В этом случае

$$u_j = 1, v_j = 1, w_j = u_j v_j = 1.$$

Таким образом,

$$w_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j \notin \{n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s\}, \\ b_j, & \text{если } j \in \{n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s\}. \end{cases}$$

Следовательно, верно доказываемое равенство. Лемма доказана.

**Лемма 2.3.** Пусть  $A$  – полугруппа с единицей 1, подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $m \geq 2$ . Тогда:

1) справедливо равенство

$$\mathbf{b}_{n_1, \dots, n_m} = [\mathbf{b}_{n_1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{b}_{n_2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{b}_{n_m}]_{l, \sigma, k};$$

2) если

$$v_{n_1} = u_{n_1 1} u_{n_1 2} \dots u_{n_1 r_{n_1}}, \dots, v_{n_m} = u_{n_m 1} u_{n_m 2} \dots u_{n_m r_{n_m}},$$

где  $u_{n_1 1}, \dots, u_{n_1 r_{n_1}}, \dots, u_{n_m 1}, \dots, u_{n_m r_{n_m}} \in A$ , то

$$\mathbf{v}_{n_1, \dots, n_m} = [\mathbf{u}_{n_1 1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_1 2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_1 r_{n_1}} \underbrace{e \dots e}_{l-2}$$

$$\mathbf{u}_{n_2 1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_2 2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_2 r_{n_2}} \underbrace{e \dots e}_{l-2}$$

.....

$$\underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_m 1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_m 2} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{u}_{n_m r_{n_m}}]_{l, \sigma, k}.$$

**Доказательство.** Прежде всего, заметим, что согласно определению элемента  $\mathbf{b}_{n_1, \dots, n_m}$ , все  $n_1, \dots, n_m$  являются различными элементами множества  $\{1, 2, \dots, k\}$ .

1) Применим индукцию по  $m$ . Согласно утверждению 1) леммы 2.1 и определению элементов  $\mathbf{b}_{n_1}$  и  $\mathbf{b}_{n_2}$ , имеем

$$[\mathbf{b}_{n_1} \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{b}_{n_2}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{b}_{n_1, n_2}.$$

Предположим, что

$$\mathbf{b}_{n_1, \dots, n_{m-1}} = [\mathbf{b}_{n_1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{b}_{n_2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{b}_{n_{m-1}}]_{l, \sigma, k}.$$

Тогда, применяя лемму 2.2, получим

$$\begin{aligned} & [\mathbf{b}_{n_1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{b}_{n_2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{b}_{n_{m-1}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{b}_{n_m}]_{l, \sigma, k} = \\ & = [[\mathbf{b}_{n_1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{b}_{n_2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{b}_{n_{m-1}}]_{l, \sigma, k} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{b}_{n_m}]_{l, \sigma, k} = \\ & = [\mathbf{b}_{n_1, \dots, n_{m-1}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{b}_{n_m}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{b}_{n_1, \dots, n_m}. \end{aligned}$$

Следовательно, верно равенство из 1).

2) Согласно 1),

$$\mathbf{v}_{n_1, \dots, n_m} = [\mathbf{v}_{n_1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{v}_{n_2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{v}_{n_m}]_{l, \sigma, k}, \quad (2.1),$$

где

$$\mathbf{v}_{n_1} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1-1}, v_{n_1} = u_{n_1 1} u_{n_1 2} \dots u_{n_1 r_{n_1}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-n_1}),$$

.....

$$\mathbf{v}_{n_m} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_m-1}, v_{n_m} = u_{n_m 1} u_{n_m 2} \dots u_{n_m r_{n_m}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-n_m}).$$

А в силу утверждения 2) леммы 2.1,

$$\mathbf{v}_{n_1} = [\mathbf{u}_{n_1 1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{n_1 2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{n_1 r_{n_1}}]_{l, \sigma, k}.$$

.....

$$\mathbf{v}_{n_m} = [\mathbf{u}_{n_m 1} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{n_m 2} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{u}_{n_m r_{n_m}}]_{l, \sigma, k}, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{u}_{n_1 1} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1-1}, u_{n_1 1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-n_1}), \dots, \mathbf{u}_{n_1 r_{n_1}} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1-1}, u_{n_1 r_{n_1}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-n_1}) \in A^k,$$

.....

$$\mathbf{u}_{n_m 1} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_m-1}, u_{n_m 1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-n_m}), \dots, \mathbf{u}_{n_m r_{n_m}} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n_m-1}, u_{n_m r_{n_m}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-n_m}) \in A^k.$$

Подставляя правые части равенств (2.2) в (2.1), получаем требуемое равенство. Лемма доказана.

Если в лемме 2.3 положить  $n_1 = 1, \dots, n_m = m$ , то

$$\mathbf{b}_{n_1} = \mathbf{b}_1 = (b_1, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}), \mathbf{b}_{n_2} = \mathbf{b}_2 = (1, b_2, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}), \dots, \mathbf{b}_{n_m} = \mathbf{b}_m = (\underbrace{1, \dots, 1}_{m-1}, b_m, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-m}),$$

$$\mathbf{v}_{n_1, \dots, n_m} = \mathbf{v}_{1, \dots, m} = (v_1 = u_{11} u_{12} \dots u_{1 r_1}, v_2 = u_{21} u_{22} \dots u_{2 r_2}, \dots, v_m = u_{m1} u_{m2} \dots u_{m r_m}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-m}),$$



Считая в лемме 3.1  $\sigma$  циклом длины  $k$ , получим

**Следствие 3.1.** Пусть  $A$  – полугруппа с единицей  $1$ ,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ ,  $k \leq l$ . Тогда для любых  $a \in A$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , существует такое  $r \in \{1, 2, \dots, k\}$ , что

$$[\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-r} \underbrace{(1, \dots, 1)}_{i-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+r-1}]_{l, \sigma, k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}).$$

**Теорема 3.1** [8, теорема 4.1]. Пусть полугруппа  $A$  с единицей  $1$  порождается множеством  $M$ , подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  разлагается в произведение  $q$  независимых циклов, включая циклы длины один, и удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ ;  $X_1, \dots, X_q$  –  $\sigma$ -орбиты, соответствующие указанным циклам. Тогда для любых  $i_1 \in X_1, \dots, i_q \in X_q$   $l$ -арная полугруппа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  порождается множеством

$$U_{i_1}(M) \cup \dots \cup U_{i_q}(M) \cup \{\mathbf{e}\}.$$

В [8] формулировка теоремы 4.1 содержит условие  $l \geq \max\{m_1, \dots, m_q\}$ , которое является избыточным, так как из равенства  $\sigma^l = \sigma$  следует, что порядок подстановки  $\sigma$ , равный  $\text{НОК}\{m_1, \dots, m_q\}$ , делит  $l - 1$ .

Покажем, что для полиадических групп имеет место результат, аналогичный теореме 3.1.

**Теорема 3.2.** Пусть группа  $A$  порождается множеством  $M$ , подстановка  $\sigma$  из  $S_k$  разлагается в произведение  $q$  независимых циклов, включая циклы длины один, и удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ ;  $X_1, \dots, X_q$  –  $\sigma$ -орбиты, соответствующие указанным циклам. Тогда для любых  $i_1 \in X_1, \dots, i_q \in X_q$   $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  порождается множеством

$$U_{i_1}(M) \cup U_{i_1}(M^{-1}) \cup \dots \cup U_{i_q}(M) \cup U_{i_q}(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}. \quad (3.1)$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{a}$  – произвольный элемент множества  $A^k$ . По теореме 2.3, с учетом замечания 2.3, он либо совпадает с некоторым элементом множества

$$U(M) \cup U(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\} = \bigcup_{j=1}^k U_j(M) \cup \bigcup_{j=1}^k U_j(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}, \quad (3.2)$$

либо может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{l(l-1)+1}]_{l, \sigma, k}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

где все элементы под знаком  $l$ -арной операции принадлежат этому же множеству (3.2).

Пусть теперь  $\mathbf{u}$  – произвольный элемент множества (3.2) отличный от  $\mathbf{e}$ , то есть

$$\mathbf{u} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}), \quad a \in M \cup M^{-1}, \quad a \neq 1 \quad (3.4)$$

для некоторого  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Ясно, что при этом  $j \in X_\alpha$  для некоторого  $\alpha \in \{1, \dots, q\}$ .

Тогда по лемме 3.1 для любого  $i_\alpha \in X_\alpha$  существует такое  $r \in \{1, \dots, m_\alpha\}$ , где  $m_\alpha$  – длина соответствующего цикла, что

$$[\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{m_\alpha-r} (\underbrace{1, \dots, 1}_{i_\alpha-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i_\alpha}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-m_\alpha+r-1}]_{l, \sigma, k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}), \quad (3.5)$$

где

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_{i_\alpha-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i_\alpha}) \in U_{i_\alpha}(M) \cup U_{i_\alpha}(M^{-1}).$$

Из (3.4) и (3.5) следует

$$\mathbf{u} = [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{m_\alpha-r} (\underbrace{1, \dots, 1}_{i_\alpha-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i_\alpha}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-m_\alpha+r-1}]_{l, \sigma, k}. \quad (3.6)$$

Таким образом, всякий элемент  $\mathbf{u}$  множества (3.2) отличный от  $\mathbf{e}$ , может быть представлен в виде (3.6) для некоторого  $\alpha \in \{1, \dots, q\}$ .

Заменяя в правой части равенства (3.3) каждый элемент под знаком  $l$ -арной операции, отличный от  $\mathbf{e}$ , его представлением вида (3.6), получим

$$\mathbf{a} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_{s(l-1)+1}]_{l, \sigma, k}, \quad (3.7)$$

где

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s(l-1)+1} \in U_{i_1}(M) \cup U_{i_1}(M^{-1}) \cup \dots \cup U_{i_q}(M) \cup U_{i_q}(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}.$$

Следовательно, по теореме 2.1 или по теореме 2.2  $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  порождается множеством (3.1). Теорема доказана.

**Замечание 3.1.** Фактически в теореме 3.2 доказано, что в ее условиях любой элемент  $\mathbf{a}$   $l$ -арной группы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  может быть представлен в виде (3.7), где все  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s(l-1)+1}$  принадлежат множеству (3.1).

**Замечание 3.2.** Если в доказательстве теоремы 3.2  $j$  принадлежит одноэлементной орбите  $X_\alpha$ , то есть  $X_\alpha = \{j\}$ , то  $i_\alpha = j$ ,  $r = m_\alpha = 1$ . Поэтому в этом случае с одной стороны,  $\mathbf{u} \in U_{i_\alpha}(M) \cup U_{i_\alpha}(M^{-1})$ , а с другой стороны, согласно (3.6), элемент  $\mathbf{u}$  может быть представлен в виде

$$[(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1}]_{l, \sigma, k}.$$

Считая в теореме 3.2  $\sigma$  циклом длины  $k$ , получим

**Следствие 3.2.** Пусть группа  $A$  порождается множеством  $M$ ,  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ ,  $k$  делит  $l-1$ . Тогда  $l$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  порождается множеством  $U_j(M) \cup U_j(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}$  для любого  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Полагая в следствии 3.2  $\sigma = (12 \dots k)$ ,  $l = k + 1$ , получим

**Следствие 3.3.** Пусть группа  $A$  порождается множеством  $M$ . Тогда  $(k + 1)$ -арная группа  $\langle A^k, [ ]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$  порождается множеством  $U_j(M) \cup U_j(M^{-1}) \cup \{\mathbf{e}\}$  для любого  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . В частности она порождается любым из множеств

$$\{(a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}), (a^{-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \mid a \in M\} \cup \{\mathbf{e}\},$$

$$\{(\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, a), (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, a^{-1}) \mid a \in M\} \cup \{e\}.$$

Полагая в следствии 3.3  $k = 2$ , получим

**Следствие 3.4.** Пусть группа  $A$  порождается множеством  $M$ . Тогда тернарная группа  $\langle A^2, [ ]_{3, (12), 2} \rangle$  порождается любым из множеств

$$\{(a, 1), (a^{-1}, 1) \mid a \in M\} \cup \{(1, 1)\},$$

$$\{(1, a), (1, a^{-1}) \mid a \in M\} \cup \{(1, 1)\}.$$

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. Многместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
2. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Гальмак, А. М. Многместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
4. Гальмак, А. М. О порождающих множествах  $l$ -арной группы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 2. – С. 69–76.
5. Русаков, С. А. Алгебраические  $n$ -арные системы / С. А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
6. Гальмак, А. М. Конгруэнции полиадических групп / А. М. Гальмак. – Минск : Беларуская навука, 1999. – 182 с.
7. Гальмак, А. М. О порождающих множествах  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 1. – С. 44–49.
8. Гальмак, А. М. Порождающие множества  $l$ -арной полугруппы  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2021. – № 1(57). – С. 35–52.

Поступила в редакцию 07.04.2022 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

### Gal'mak A. M. ON SETS OF GENERATORS OF POLYADIC GROUP

$\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle. I$

The article goes on with the studies on the described earlier relationship between sets of generators in group  $A$  and sets of generators in polyadic group  $\langle A^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  with  $l$ -ary operation  $[ ]_{l, \sigma, k}$ , that is defined on Cartesian power  $A^k$  of group  $A$  for arbitrary integer  $l \geq 2$  and arbitrary substitution  $\sigma$  from the set  $S_k$  of all substitutions of the set  $\{1, 2, \dots, k\}$ .

**Keywords:** group, polyadic group,  $l$ -ary group, set of generators.

УДК 511.42

## КОЛИЧЕСТВО АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ С МАЛОЙ ПРОИЗВОДНОЙ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА

**Ж. И. Пантелеева**

аспирант, отдел теории чисел

Институт математики Национальной академии наук Беларуси (г. Минск).

*Важное значение при классификации действительных чисел имеют алгебраические числа  $\alpha$  степени  $\deg \alpha = n$ , высоты  $H(\alpha) < Q$ , в которых при  $\nu > 0$  верно неравенство  $|P'(\alpha)| < H^{-\nu}$ . Множество многочленов с такими корнями обозначим  $Q \in \mathbb{N}$ . В работе получена асимптотическая по  $Q$ ,  $Q \in \mathbb{N}$  оценка снизу для количества  $\mathcal{P}_n(Q, \nu)$ , для которых  $H(\alpha) < Q$ . Оказывается при некоторой величине  $c(n)$  справедлива оценка  $\#\mathcal{P}_n(Q, \nu) > c(n)Q^{n+2\nu}$ ,  $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$ . Эта оценка улучшает результат работы В. Шмидта [1],*

где он доказал существование Т-чисел в классификации Малера.

**Ключевые слова:** диофантовы приближения, алгебраические числа, степень и высота алгебраического числа.

### Введение

В математике часто используется тот факт, что множество рациональных чисел всюду плотно на действительной прямой. Например, при доказательстве неинтегрируемости функции Дирихле:  $f(x)=1$ , если  $x$  – рациональное число и  $f(x)=0$  при иррациональном  $x$ . Исследования распределения алгебраических чисел – интересная задача. Она важна при классификации действительных и комплексных чисел Малера и Коксмы [2; 3].

Эта задача возникает при оценке количества целочисленных многочленов с заданным порядком модулей их дискриминантов [4; 5], а также при применении таких оценок в метрической теории диофантовых приближений [6; 7; 8]. При доказательстве существования Т-чисел в классификации Малера [9] был использован факт существования в любом непустом интервале  $I$  действительных алгебраических чисел  $\alpha$  – корней неприводимого многочлена  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$  фиксированной степени  $\deg P = n$  и большой высоты  $H(\alpha) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$  с относительно малой производной  $|P'(\alpha)|$ . Однако в работах Шмидта [3; 5] высота  $H(P)$  должна значительно превосходить величину  $|I|^{-1}$  для интервалов  $I$  малой длины  $|I|$ .

В данной работе мы снижаем требования на величину  $H(\alpha)$ . В работе используются идеи недавней работы В. И. Берника и Ф. Гетце [10]. Далее  $c_1 = c_1(n)$ ,  $c_2, \dots$  – величины, зависящие от  $n$  и не зависящие от  $H$  и  $Q$ ,  $\mu B$  – мера Лебега измеримого множества  $B \subset \mathbb{R}$ . В неравенствах для чисел  $A > 0$  и  $B > 0$  будет использован символ Виноградова  $A \ll B$ , означающий, что существует константа  $d_1 > 0$ , не зависящая от  $A$  и  $B$ , что  $A < d_1 B$ .

Для натурального  $Q > 1$  и интервала  $I \subset \mathbb{R}$ , длины  $|I| = Q^{-\gamma}$ ,  $0 < \nu < 1/2$ ,  $\gamma > 0$  обозначим

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P \leq n, H(P) \leq Q\},$$

где  $H(P)$  – высота многочлена  $P(x)$ . Пусть  $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(Q, \delta_0 \nu, \gamma)$  – множество  $x \in I$ , для которых система неравенств

$$|P(x)| < c_1 Q^{-n+\nu}, \quad |P'(x)| < \delta_0 Q^{1-\nu}, \quad 0 \leq \nu < \frac{1}{2}. \quad (1)$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах из  $\mathcal{P}_n(Q)$ . При  $\delta_0 = 1$  и  $c_1 > c_0(n, I)$ , используя принцип ящиков Дирихле, можно получить, что  $\mathcal{L}_n = \mathbb{R}$ .

### Основная часть

В работе доказаны две теоремы.

**Теорема 1.** При достаточно малой величине  $\delta_0 = \delta_0(n)$  и  $c_1 > c_0(n)$  имеем

$$\mu \mathcal{L}_n < 1/4 |I|.$$

**Теорема 2.** В классе  $\mathcal{P}_n(Q)$  существует не менее  $c_2 Q^{n+1-2\nu}$  полиномов с действительными корнями  $\alpha$ , удовлетворяющими неравенству

$$|P'(\alpha)| < c_3 Q^{1-\nu}.$$

Теорема 2 легко следует из теоремы 1, что будет доказано чуть ниже.

Докажем некоторые вспомогательные утверждения. Обозначим через  $S(\alpha_i)$  множество  $x \in \mathbb{R}$ , для которых  $\alpha_i$  – ближайший к  $x$  корень  $P(x)$ . Корни  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  полинома  $P(x)$  упорядочим следующим образом

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|.$$

**Лемма 1.** Пусть  $\alpha_1$  – ближайший к  $x$  корень полинома  $P(x)$ . Тогда

$$|x - \alpha_1| \leq n |P(x)| |P'(x)|^{-1} \quad (2)$$

$$|x - \alpha_1| \leq 2^{n-1} |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1} \quad (3)$$

$$|x - \alpha_1| \leq 2^n \min_{2 \leq j \leq n} \left| \frac{P(x)}{P'(\alpha_1)} (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\alpha_1 - \alpha_j) \right|^{1/j} \quad (4)$$

Лемма 1 доказана в [3; 8; 9].

**Лемма 2.** Для любых  $x \in I \subset [0; 1]$  и  $Q > 1$  в классе  $\mathcal{P}_n(Q)$  существует многочлен  $P(x)$ , удовлетворяющий системе неравенств

$$|P(x)| < 2nQ^{-n+\nu}, \quad |P'(x)| < 2n^2Q^{1-\nu}. \quad (5)$$

Лемма 2 легко доказывается с помощью принципа ящиков Дирихле [3; 11].

**Лемма 3.** При условии

$$2n^2 Q^{-\frac{n-2}{2}} < |P'(x)| < \delta_0 Q^{1-\nu}, \quad Q > Q_0, \quad (6)$$

верно неравенство

$$\frac{1}{2} |P'(x)| < |P'(\alpha_1)| < 2 |P'(x)|. \quad (7)$$

Доказательство. По формуле Лагранжа для  $P'(x)$  имеем

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + P''(\xi_1)(x - \alpha_1) \quad \xi_1 \in [x; \alpha_1]. \quad (8)$$

Здесь и далее будем считать  $I \subset [0; 1]$ , что позволит явно оценивать значение многочлена и его производных.

По лемме 1 из оценок (2) – (4) следует

$$|x - \alpha_1| \leq n |P(x)| |P'(x)|^{-1} < 2n^2 Q^{-n+\nu} \cdot 2n^{\frac{3}{2}} Q^{\frac{n-2}{2}} < c_4 Q^{-\frac{n}{2}},$$

$$|P''(\xi_1)| |x - \alpha_1| < n^4 Q^{1-\frac{n}{2}}.$$

Теперь если не выполняются неравенства (7), то

$$|P'(x) - P'(\alpha_1)| \geq 0,5 |P'(x)| \geq 0,5 n^4 Q^{\frac{n-2}{2}}$$

и равенство (8) невозможно. Поэтому оба неравенства (6) верны.

**Лемма 4.** [12] Пусть неравенство  $|P(x)| < H^{-\nu}$  верно для всех  $x \in B_1 \subset I$  и  $\mu B_1 \geq 0,5 \mu I$ . Тогда для всех  $x \in I$  справедливо неравенство  $|P(x)| < c_5 H^{-\nu}$ .

**Лемма 5.** [13] Пусть на интервале  $J$  длины  $|J| < Q^{-\eta}$ ,  $\eta > 0$ , два целочисленных полинома  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$  без общих корней степени  $n \geq 2$  и высоты  $\max_{x \in J} (H(P_1), H(P_2)) \leq Q$  удовлетворяют неравенству

$$\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau}, \quad \tau > 0.$$

Тогда при любых  $\delta > 0$  и  $Q > Q_0(\delta)$  верно неравенство

$$\tau + 1 + 2 \max(\tau + 1 - \eta, 0) \leq 2n + \delta.$$

Как показал В. Г. Спринджук [2; 3], теорему 1 достаточно доказать при дополнительном условии  $|a_n| = H(P)$ .

**Лемма 6.** [2] Пусть  $n = \deg P(x)$  и  $P(x) = t_1(x) \cdot \dots \cdot t_k(x)$ . Тогда существуют  $c_6$  и  $c_7$ , для которых  $c_6 \prod_{j=1}^k H(t_j) < H(P) < c_7 \prod_{j=1}^k H(t_j)$ .

Далее по лемме 3 вместо системы неравенств (1) будем рассматривать систему неравенств

$$|P(x)| < Q^{-n+\nu}, \quad |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0 Q^{1-\nu} \quad (9)$$

и теорему 1 будем доказывать для системы неравенств (9).

Возьмем  $\varepsilon_1 > 0$ . Положим

$$|\alpha_1 - \alpha_j| = H^{-\rho_j}$$

и определим целые числа  $l_j$  из неравенств

$$\frac{l_j - 1}{T} \leq \rho_j < \frac{l_j}{T}, \quad T = \left[ \frac{1}{\varepsilon_1} \right] + 1,$$

и определим

$$p_k = T^{-1} \sum_{j=k+1}^n l_j, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

При выполнении системы неравенств

$$|P(x)| < Q^{-n+v}, \quad 1 \leq |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0 Q^{1-v}, \quad 0 \leq v \leq 2 \quad (10)$$

верно неравенство  $\mu\mathcal{L}_n < 1/8|I|$ . Это утверждение доказано в [3]. Поэтому далее считаем  $v \geq p_1$ .

Покажем теперь, как из теоремы 1 получается теорема 2. Из леммы 1 следует, что система неравенств

$$|P(x)| < Q^{-n+v}, \quad |P'(\alpha_1)| > \delta_0 Q^{1-v} \quad (11)$$

выполняется для всех  $x$  из некоторого множества  $B_2 = I \setminus \mathcal{L}_n$  и  $\mu\mathcal{L}_n \geq \frac{3}{4}\mu I$ . Возьмем

$x_1 \in B_2$ , тогда по лемме 1 из неравенства (11) для полинома  $P_1(x)$  следует

$$|x_1 - \alpha_1| < \delta_0^{-1} 2^{n-1} Q^{-n+2v}, \quad (12)$$

где  $\alpha_1$  – ближайший к  $x$  корень  $P(x)$ . Интервал  $I_1$ , определяемый неравенством (12), имеет длину  $2\delta_0^{-1} 2^{n-1} Q^{-n+2v}$ . Исключим его из  $B_2$ , т.е. рассмотрим множество  $B_3 = B_2 \setminus I_1$ , и возьмем точку  $x_2 \in B_3$ . Опять воспользуемся неравенством (11) для полинома  $P_2(x)$  леммой 1 и найдем корень  $\alpha_1(P_2)$  полинома  $P_2(x)$  из неравенства  $|x - \alpha_1(P_2)| < \delta_0^{-1} 2^{n-1} Q^{-n+2v}$ . Данную процедуру можно повторять до тех пор пока интервалами вида  $I_j$  длины  $2\delta_0^{-1} 2^{n-1} Q^{-n+2v}$  не исчерпаем все множество  $B_2$ . Ясно, что при этом можно сделать не менее  $\frac{3}{4}\mu I / |J| = \frac{3}{8}\delta_0^{-1} 2^{-n-1} Q^{n+2v} > \delta_0^{-1} 2^{-n-3} Q^{n+1-2v}$  шагов. На каждом из них будем получать новое алгебраическое число. Таким образом теорема 2 доказана с  $c_8 = \delta_0^{-1} 2^{-n-3}$ .

Доказательство теоремы 1. Важной составляющей частью доказательства метрических теорем является получение оценок сверху для количества полиномов из  $\mathcal{P}_n(Q)$  с заданной величиной  $p_1$ . Применив лучшую на настоящий момент оценку из [5], нетрудно получить, что теорема 1 верна при  $0 \leq v < \frac{1}{2}$  и  $p_1 \leq \frac{3}{2}$ . Поэтому далее считаем, что  $p_1 > \frac{3}{2}$ . Зафиксируем величины  $l_2 T^{-1}$ ,  $p_1$ ,  $v$  и положим

$$m = l_2 T^{-1} + p_1 + v - 1, \quad m = [m] + \{m\}.$$

Пусть на интервале  $J$ , длины  $|J| = Q^{-l_2 T^{-1} - v - \{m\}}$  находятся корни не более  $K = c_9 Q^{n+1-l_2 T^{-1} - p_1 - v}$  полиномов из  $\mathcal{P}_n(Q)$ . Тогда умножим это количество на оценку  $|x - \alpha_1|$  из леммы 1.

Пусть полиномов больше  $K$ . Разложим каждый из многочленов  $P(x)$  в точке  $\alpha_1(P)$  на интервале  $J$  в ряд Тейлора

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2}P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2 + \dots \quad (13)$$

Из равенства  $P(\alpha_1) = 0$  и неравенств

$$\begin{aligned} |P'(\alpha_1)||x - \alpha_1| &\ll Q^{1-p_1-l_2 T^{-1}-v-\{m\}} \ll Q^{1-p_1-l_2 T^{-1}-v-\{m\}+n\epsilon_1}, \\ |P''(\alpha_1)|(x - \alpha_1)^2 &\ll Q^{1-p_2-2(l_2 T^{-1}-v-\{m\})} \ll Q^{1-p_1-l_2 T^{-1}-v-\{m\}+n\epsilon_1}, \end{aligned} \quad (14)$$

получаем

$$|P(x)| \ll Q^{1-p_1-l_2T^{-1}-v-\{m\}+n\epsilon_1}, \quad (15)$$

так как остальные члены разложения будут меньше модуля третьего члена. Воспользуемся принципом ящиков Дирихле [3; 5]. Тогда более чем  $Q^{\epsilon_2}$  полиномов  $P(x)$  удовлетворяют (15), а коэффициенты  $a_n, \dots, a_{[m]+1}$  у них совпадают.

Образуем  $c_{10}Q^{\epsilon_2}$  многочленов  $R_j(x)$

$$R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x),$$

для которых выполняются неравенства

$$|R_j(x)| \ll Q^{1-p_1-l_2T^{-1}-v-\{m\}+n\epsilon_1}, \quad \deg R_j(x) = [m]. \quad (16)$$

Если среди многочленов  $R_j(x)$  имеется хотя бы два без общих корней, то по леммам 4, 5 получим противоречие. Если же все многочлены  $R_j(x)$  имеют общие корни, то они приводимы. Будем записывать их в виде

$$R_j(x) = t_{1j}(x)t_{2j}(x).$$

Обозначим  $\deg t_{1j}(x) = n_1$ ,  $H(t_{1j}(x)) = Q^\lambda$ . Тогда по лемме 6 верны неравенства

$$\deg t_{2j}(x) = [m] - n_1, \quad H(t_{2j}(x)) < c_{11}Q^{1-\lambda}.$$

Введем величины аппроксимации нуля многочленами  $t_{1j}(x)$ ,  $t_{2j}(x)$  как в [10], и аналогично [4; 11] получим противоречие.

Если  $l_2T^{-1} + p_1 > n$ , то оценивать величины  $|x - \alpha_j|$  будем по лемме 1, используя неравенство (4) при  $j = 2$ . Подробно это доказано в работах Спринджук [3] и Фолькмана [13]. Снова получим противоречие. Теорема 1 доказана.

### Заключение

Полученные в статье результаты могут оказаться полезными при классификации векторов с действительными координатами, каждая из которых с заданным порядком приближается алгебраическими числами, сопряженными алгебраическими числами фиксированной степени и ограниченной высоты. Для получения таких теорем понадобятся новые метрические теоремы, которые мы предполагаем получить в последующих публикациях.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Schmidt, W. M.* T-numbers do exist // Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1968/1969). – 1970. – Vol. IV. – P. 3–26.
2. *Спринджук, В. Г.* Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 379–436.
3. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 181 с.
4. *Бересневич, В. В.* О распределении значений результатов целочисленных полиномов / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гетце // Доклады НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 5. – С. 21–23.
5. *Берник, В. И.* О числе целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне многочлена / В. И. Берник, Д. В. Васильев, А. С. Кудин // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2014. – Т. 22, № 2. – С. 3–8.
6. *Бересневич, В. В.* О приближении p-адических чисел p-адическими алгебраическими числами / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Э. И. Ковалевская // J. Теория чисел 111. – 2005. – Вып. 1. – С. 33–56.
7. *Берник, В. И.* Диофантовы приближения в  $\mathbb{Q}_p$  и хаусдорфова размерность / В. И. Берник, И. Л. Морозкая // Весці Акад. навук БССР. Сер. Фіз.-мат. навук. – 1986. – Вып. 3. – С. 3–9.

8. **Beresnevich, V. V.** On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999. – Vol. 90, no. 2. – P. 97–112.
9. **Mahler, K.** Über das Maß der Menge aller  $S$ -Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106. – P. 131–139.
10. **Берник, В. И.** Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гетце // Изв. РАН. Сер. мат. – 2014. – Т. 79, № 1. – С. 21–42.
11. **Bernik, V. I.** Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson. – Cambridge Tracts in Mathematics. – 1999. – 172 p.
12. **Берник, В. И.** Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – Т. 44, № 1. – С. 24–45.
13. **Volkman, B.** Zur metrischen Theorie der  $S$ -Zahlen, II / B. Volkman // J. reine und angew. Math. – 1963. – Vol. 213, no. 1–2. – P. 58–65.

Поступила в редакцию 11.05.2022 г.

Контакты: janna-85@list.ru (Пантелеева Жанна Ивановна)

***Panteleeva Zh. I. ON THE QUANTITY OF ALGEBRAIC NUMBERS WITH A SMALL DERIVATIVE OF THE MINIMAL POLYNOMIAL***

*Of great importance in the classification of real numbers are algebraic numbers  $\alpha$  of degree  $\deg \alpha = n$ , height  $H(\alpha) < Q$ , where the inequality  $|P'(\alpha)| < H^{1-\nu}$  is true at  $\nu > 0$ . The set of polynomials with such roots is denoted as  $\mathcal{P}_n(Q, \nu)$ . In this paper, the author obtains an asymptotic lower bound for the cardinality of  $\mathcal{P}_n(Q, \nu)$  as  $Q \in \mathbb{N}$  tends to infinity. It turns out that for a certain value  $c(n)$ , the estimate  $\#\mathcal{P}_n(Q, \nu) > c(n)Q^{n+1-2\nu}$ ,  $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$ , holds. This estimate improves the result by V. Schmidt [1], related to the proof of the existence of  $T$ -numbers in Mahler's classification.*

**Key words:** Diophantine approximations, algebraic numbers, the degree and height of an algebraic number.

УДК 514.76

## ТРЕХМЕРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С СОВЕРШЕННОЙ АЛГЕБРОЙ ГОЛОНОМИИ

**Н. П. Можей**

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

*В работе изучаются трехмерные однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность с только нулевым кручением. Определены основные понятия: однородное пространство, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, алгебра голономии, совершенная алгебра голономии. Для трехмерных однородных пространств определено, при каких условиях алгебра голономии нетривиальной аффинной связности с нулевым кручением является совершенной. Также найдены и выписаны в явном виде сами аффинные связности, тензоры кривизны и алгебры голономии, приведено явное локальное описание соответствующих трехмерных однородных пространств. Особенностью методов, представленных в работе, является использование чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.*

**Ключевые слова:** аффинная связность, однородное пространство, тензор кривизны, алгебра голономии, тензор кручения.

### Введение

Еще Феликс Клейн [1] утверждал, что наиболее полезным способом изучения геометрических структур является изучение симметрий, т.е. групп преобразований, сохраняющих особенности структуры. Основополагающим в подходе Клейна является понятие однородного пространства. После работ Э. Картана (например, [2]) фундаментом и основной составляющей дифференциальной геометрии является понятие многообразия, а также теория групп и алгебр Ли. Важный подкласс среди всех многообразий формируют изотропно-точные однородные пространства. В частности, этот подкласс содержит все однородные пространства, допускающие инвариантную аффинную связность.

Связность на многообразии определяет (через параллельный перенос) понятие голономии, которая может быть описана через группу Ли – группу голономии. В качестве примеров можно привести голономию связности Леви–Чевита в римановой геометрии (называемую «римановой голономией»), голономию связностей в векторных расслоениях, голономию связностей Картана и др. Первое упоминание о голономии (в классической механике) датируется 1895 годом и принадлежит Г. Герцу, в математических работах понятие голономии возникло в 1923 году у Э. Картана применительно к римановым многообразиям, каждой специальной группе голономии отвечает та или иная геометрия.

Одной из важных проблем геометрии является задача об установлении связей между кривизной и структурой многообразия. Исследования структуры кривизны многообразий с совершенной группой голономии

(т.е. вся алгебра голономии порождается только операторами кривизны) проводились, например, в работе [3] и других работах этого автора. Алгебры голономии нетривиальных аффинных связностей на трехмерных однородных пространствах исследовались в [4], в данной работе изучается, при каких условиях группа голономии является совершенной, рассматривается случай инвариантных аффинных связностей без кручения.

### Основная часть

Пусть  $M$  – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа Ли  $\bar{G}$ ,  $(M, \bar{G})$  – *однородное пространство*,  $G = \bar{G}_x$  – стабилизатор произвольной точки  $x \in M$ . Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для  $G$  должно быть точным, если  $\bar{G}$  эффективна на  $\bar{G}/G$  [5]. Пусть  $\bar{\mathfrak{g}}$  – алгебра Ли группы Ли  $\bar{G}$ , а  $\mathfrak{g}$  – подалгебра, соответствующая подгруппе  $G$ . Пара  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление  $\mathfrak{g}$ . Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к  $\mathfrak{g}$  в  $\bar{\mathfrak{g}}$ , и факторпространство  $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ .

*Аффинной связностью* на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  называется такое отображение  $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ , что его ограничение на  $\mathfrak{g}$  есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является  $\mathfrak{g}$ -инвариантным. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве находятся во взаимно однозначном соответствии (например, [6]) с аффинными связностями на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ . *Тензоры кручения*  $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$  и *кривизны*  $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$  для всех  $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$  имеют вид:  $T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m$ ,  $R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ . Будем говорить, что  $\Lambda$  имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если  $T = 0$ . Тензор Риччи имеет вид  $\text{Ric} \in \text{Inv}T_2(\mathfrak{m})$ :  $\text{Ric}(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$ . Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. Переформулируем теорему Вана [7] об алгебре группы голономии инвариантной связности: *алгебра* Ли  $\mathfrak{h}^*$  группы *голономии* инвариантной связности  $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  на паре  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  – это подалгебра алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  вида  $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$ ,  $V$  – подпространство, порожденное  $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ . Положим  $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$  равной подалгебре  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , порожденной  $\{\Lambda(x); x \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ . Основное свойство  $\mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}}$  таково: пусть  $\mathfrak{h}^*$  – алгебра Ли группы голономии, тогда  $\mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{a}_{\bar{\mathfrak{g}}} \subset \mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$ , где  $\mathbb{N}(\mathfrak{h}^*)$  – нормализатор  $\mathfrak{h}^*$  в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ . Многообразие обладает *совершенной группой голономии*, если алгебра голономии порождается лишь операторами кривизны. В противном случае будем называть группу голономии *несовершенной*.

Будем описывать пару  $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$  при помощи таблицы умножения алгебры  $\bar{\mathfrak{g}}$ , через  $\{e_1, \dots, e_n\}$  обозначим базис  $\bar{\mathfrak{g}}$  ( $n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$ ). Будем полагать, что подалгебра  $\mathfrak{g}$  порождается векторами  $e_1, \dots, e_{n-3}$ , а  $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$  – базис  $\mathfrak{m}$ . Для нумерации подалгебр используем запись  $d, n$ , а для нумерации пар – запись  $d, n, m$ , соответствующие приведенным в [4], где  $d$  – размерность подалгебры,  $n$  – номер

подалгебры в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , а  $m$  – номер пары. Связность называется *тривиальной*, если  $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$ , в противном случае связность *нетривиальная*. Будем описывать связность через образы базисных векторов  $\Lambda(u_1)$ ,  $\Lambda(u_2)$ ,  $\Lambda(u_3)$ , тензор кривизны  $R$  – через  $R(u_1, u_2)$ ,  $R(u_1, u_3)$ ,  $R(u_2, u_3)$ , а тензор кручения  $T$  – через  $T(u_1, u_2)$ ,  $T(u_1, u_3)$ ,  $T(u_2, u_3)$ . Предполагается, что параметры обозначены греческими буквами и принадлежат  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 1.** *Трехмерные однородные пространства, допускающие нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением и ненулевой совершенной алгеброй голономии, локально имеют следующий вид:*

1.2.1, $\lambda=1/4, \mu=1/2$	$e_1$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$u_1$	$(1/4)u_2$	$(1/2)u_3$
$u_1$	$-u_1$	0	0	0
$u_2$	$-(1/4)u_2$	0	0	0
$u_3$	$-(1/2)u_3$	0	0	0

2.9.1, $\lambda=1/2, \mu=1/4$	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$(3/4)e_2$	$u_1$	$(1/2)u_2$	$(1/4)u_3$
$e_2$	$-(3/4)e_2$	0	0	0	$u_1$
$u_1$	$-u_1$	0	0	0	0
$u_2$	$-(1/2)u_2$	0	0	0	0
$u_3$	$-(1/4)u_3$	$-u_1$	0	0	0

2.9.3, $\mu=1/4$	$e_1$	$e_2$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$(3/4)e_2$	$u_1$	$(1/2)u_2$	$(1/4)u_3$
$e_2$	$-(3/4)e_2$	0	0	0	$u_1$
$u_1$	$-u_1$	0	0	0	0
$u_2$	$-(1/2)u_2$	0	0	0	$e_2$
$u_3$	$-(1/4)u_3$	$-u_1$	0	$-e_2$	0

3.13.2, $\mu=1/4 \vee \mu=1/2$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$(1-3\mu)e_2$	$(1-\mu)e_3$	$u_1$	$(1-2\mu)u_2$	$\mu u_3$
$e_2$	$(3\mu-1)e_2$	0	0	0	0	$u_2$
$e_3$	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	$u_1$
$u_1$	$-u_1$	0	0	0	0	0
$u_2$	$(2\mu-1)u_2$	0	0	0	0	$e_3$
$u_3$	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-e_3$	0

3.20.4, $\lambda=1/4$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$(3/4)e_2$	$(1/2)e_3$	$u_1$	$(1/4)u_2$	$(1/2)u_3$
$e_2$	$-(3/4)e_2$	0	0	0	$u_1$	0
$e_3$	$-(1/2)e_3$	0	0	0	0	$u_1$
$u_1$	$-u_1$	0	0	0	0	0
$u_2$	$-(1/4)u_2$	$-u_1$	0	0	0	$e_2$
$u_3$	$-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_2$	0

3.20.26, $\lambda=1/4$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	0	$(3/4)e_2$	$(1/2)e_3$	$u_1$	$(1/4)u_2$	$(1/2)u_3$
$e_2$	$-(3/4)e_2$	0	0	0	$u_1$	0
$e_3$	$-(1/2)e_3$	0	0	0	$e_2$	$u_1$
$u_1$	$-u_1$	0	0	0	0	0
$u_2$	$-(1/4)u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	0
$u_3$	$-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0	0	0

**Замечание.** Трехмерных однородных пространств, таких, что  $\bar{\mathfrak{g}}$  не является разрешимой, допускающих нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением и (ненулевой) совершенной алгеброй голономии, не существует.

Действительно, заметим, что если кривизна нулевая, то алгебра голономии также нулевая, т.е. будем рассматривать случай ненулевой кривизны. Случай алгебр голономии тривиальных связностей изучался в работах [8, 9], поэтому рассматриваем только нетривиальные связности. Для каждой подалгебры в  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$  найдены изотропно-точные пары, инвариантные аффинные связности на них и определены пары, допускающие нетривиальную аффинную связность с ненулевой совершенной алгеброй голономии (причем только с нулевым кручением).

Рассмотрим, например, локально однородное пространство 3.13.2 при  $\mu \neq 0$ , тогда

$$\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; r_{1,3} = 0 \text{ при } \mu \neq 1/2, r_{2,3} = 0$$

при  $\mu \neq 1/4$ .

Тензор кривизны  $R(u_1, u_2) = R(u_1, u_3) = 0$ ,

$$R(u_2, u_3) = [\Lambda(u_2), \Lambda(u_3)] - \Lambda([u_2, u_3]) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения – нулевой, как и тензор Риччи.

Алгебра голономии  $\mathfrak{h}^*$  совершенна (совпадает с алгеброй, порожденной множеством  $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$ ),  $\mathfrak{h}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $p_1 \in \mathbb{R}$ .

Для остальных трехмерных однородных пространств, допускающих нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением (кривизна которой не только нулевая), рассуждения аналогичны.

Получаем, что аффинные связности имеют вид, указанный в таблице 1.

Таблица 1. – Аффинные связности

Пара ( $\bar{g}, g$ )	Аффинная связность
3.13.2, $\mu = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.2, $\mu = 1/2$ 3.20.4, $\lambda = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.26, $\lambda = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.1, $\lambda = 1/2, \mu = 1/4$ 2.9.3, $\mu = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.1, $\lambda = 1/4, \mu = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Тензоры кривизны найденных связностей имеют вид, приведенный в таблице 2.

Таблица 2. – Тензоры кривизны

Пара	Тензор кривизны
3.13.2, $\mu = 1/4, 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.4, $\lambda = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.26, $\lambda = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -r_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.1, $\lambda = 1/2, \mu = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,2}r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.3, $\mu = 1/4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,2}r_{2,3}-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.1, $\lambda = 1/4, \mu = 1/2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -r_{1,3}q_{3,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Прямыми вычислениями получаем, что во всех указанных случаях тензоры Риччи нулевые. При этом тензоры кручения  $T$  также нулевые.

Таким образом, верна следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $(\bar{g}, g)$  – трехмерное однородное пространство, допускающее нетривиальную аффинную связность с только нулевым кручением и ненулевой совершенной алгеброй голономии. Совершенные алгебры голономии инвариантных связностей на указанных пространствах имеют вид, приведенный в таблице 3.

Таблица 3. – Совершенные алгебры голономии

Пара	Алгебра голономии ( $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ )
3.20.4, $\lambda=1/4$ ; 3.20.26, $\lambda=1/4$ при $r_{1,3} \neq 0$ ; 1.2.1, $\lambda=1/4, \mu=1/2$ при $r_{1,3}q_{3,2} \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.13.2, $\mu=1/4, 1/2$ ; 2.9.1, $\lambda=1/2, \mu=1/4$ при $q_{1,2}r_{2,3} \neq 0$ ; 2.9.3, $\mu=1/4$ при $q_{1,2}r_{2,3} \neq 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

В случаях 3.20.26,  $\lambda=1/4$  при  $r_{1,3} = 0$ , 2.9.1,  $\lambda=1/2, \mu=1/4$  при  $q_{1,2}r_{2,3} = 0$ , 2.9.3,  $\mu=1/4$  при  $q_{1,2}r_{2,3} = 1$ , 1.2.1,  $\lambda=1/4, \mu=1/2$  при  $r_{1,3}q_{3,2} = 0$  алгебра голономии нулевая.

### Заключение

Для трехмерных однородных пространств, допускающих нетривиальную аффинную связность без кручения, определено, при каких условиях алгебра голономии является совершенной, приведено явное локальное описание соответствующих трехмерных однородных пространств, отдельно выделены случаи неразрешимой и разрешимой группы преобразований. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию однородных пространств и связностей на них. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Klein, F. A comparative review of recent researches in geometry / F. Klein // Bull. Amer. Math. Soc. – 1893. – V.2, № 10. – P. 215–249.
2. Cartan, E. La geometrie des espaces de Riemann / E. Cartan // Memorial des Sciences Math. – 1923. – V. 9. – 457 p.
3. Кайгородов, В. Р. Римановы пространства. Структура кривизны пространств типа А / В. Р. Кайгородов // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 117–127.
4. Можей, Н. П. Алгебры голономии нетривиальных связностей без кручения на трехмерных однородных пространствах / Н. П. Можей // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Серия 2. Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2021. – Т. 11, № 1. – С. 13–22.
5. Kobayashi, S. Foundations of Differential Geometry / S. Kobayashi, K. Nomizu. – New York–London, 1969. – Vol. 2. – 488 p.

6. *Nomizu, K.* Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, no. 1. – P. 33–65.
7. *Wang, H. C.* On invariant connections over a principal fibre bundle / H. C. Wang // Nagoya Math. J. – 1958. – No 3. – P. 1–19.
8. *Можей, Н. П.* Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с неразрешимыми группами преобразований / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2018. – № 6 (111). – С. 81–88.
9. *Можей, Н. П.* Ненулевые алгебры голономии тривиальных связностей на однородных пространствах с разрешимыми группами преобразований / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2019. – № 3 (114). – С. 170–177.

Поступила в редакцию 17.02.2022 г.

Контакты: mozheynatalya@mail.ru (Можей Наталья Павловна)

### ***Mozhey N. P.* THREE-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS SPACES WITH PERFECT HOLONOMY ALGEBRA**

*The author studies three-dimensional homogeneous spaces, admitting the invariant affine connections with only zero torsion. The basic notions, such as homogeneous space, isotropically-faithful pair, affine connection, torsion tensor, a curvature tensor, holonomy algebra, perfect holonomy algebra, are defined. For three-dimensional homogeneous spaces, it is determined under what conditions the holonomy algebra of nontrivial affine connection with zero torsion is perfect. The affine connections, curvature tensors, and holonomy algebras are also found and written out explicitly, and the local classification of the corresponding three-dimensional homogeneous spaces is given. The peculiarity of techniques presented in the work is the use of purely algebraic approach to the description of manifolds and structures on them, as well as a combination of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras, and the theory of homogeneous spaces.*

**Keywords:** affine connection, homogeneous space, curvature tensor, holonomy algebra, torsion tensor.

УДК 535.361:535.317.1

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В БИНАРНОЙ МАРКОВСКОЙ СМЕСИ В МАЛОУГЛОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

**М. С. Носкова**

кандидат физико-математических наук

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

*На основе малоуглового приближения рассматривается решение стохастического уравнения переноса излучения в бинарной марковской смеси с малоугловым рассеянием. Данное решение позволяет получать аналитические выражения для моментов пространственного распределения освещенности, что дает возможность рассчитывать средний коэффициент пропускания бинарной марковской смеси, и среднее значение эффективного радиуса узкого пучка излучения. Результаты расчетов показывают, что пространственное распределение освещенности в бинарной марковской смеси и в эквивалентной однородной смеси существенно различаются.*

**Ключевые слова:** стохастический перенос излучения, бинарная марковская смесь, малоугловое приближение.

### Введение

Теория переноса излучения широко применяется для решения научных и прикладных задач в области астрофизики, переноса нейтронов, гидрооптики, оптики атмосферы, в медицине и биологии.

В классической теории переноса, как правило, изменения оптических параметров среды вдоль трассы прохождения излучения описываются детерминированными функциями [1; 2]. Однако многие рассеивающие среды (атмосфера, океан, биоткани и т.д.), имеют сложную стохастическую структуру. Характерный размер неоднородностей в подобных средах сравним со средней длиной свободного пробега фотонов, что заметно сказывается на их оптических свойствах [3; 4]. Так, например, стохастичность интенсивности солнечной радиации, прошедшей разорванную облачность, оказывает определяющее влияние на тепловой режим атмосферы и подстилающей поверхности [5; 6], неоднородности в защите атомных реакторов приводят к увеличению уровня радиации [7], неравномерное распределение интенсивности при облучении биотканей может сказаться на результатах лечения [2].

Поэтому параллельно с развитием детерминированной теории переноса большое внимание уделяется построению теории стохастического переноса излучения, в рамках которой рассеивающие параметры среды рассматриваются как трехмерные случайные поля с заданной статистикой [5–10]. Основная цель подобных исследований — установить связь между статистическими характеристиками параметров среды и статистическими характеристиками полей излучения.

### 1. Постановка задачи

В основе теории лежит уравнение переноса излучения, которое является математической формулировкой закона сохранения энергии излучения при его взаимодействии с элементарным объемом вещества.

Стационарное уравнение переноса излучения в среде имеет вид [1]:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \varepsilon(\mathbf{r})I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') f(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}', \mathbf{r}) d\boldsymbol{\Omega}' + B(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}), \quad (1)$$

где  $I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  – интенсивность излучения в точке  $\mathbf{r}$  в направлении, определяемом единичным вектором  $\boldsymbol{\Omega}$ ,

$\nabla = \mathbf{i} \partial/\partial x + \mathbf{j} \partial/\partial y + \mathbf{k} \partial/\partial z$  – оператор градиента,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – единичные векторы декартовой системы координат,  $\sigma(\mathbf{r})$  – показатель рассеяния,  $\varepsilon(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r}) + \sigma(\mathbf{r})$  – показатель экстинкции,  $k(\mathbf{r})$  – показатель поглощения.

$f(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}', \mathbf{r})$  – индикатриса рассеяния, функция, описывающая вероятность изменения направления движения фотона из  $\boldsymbol{\Omega}$  в  $\boldsymbol{\Omega}'$  при однократном рассеянии,

$B(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$  — функция источников.

Аналитические решения уравнения переноса были получены для случаев, когда оптические параметры среды являются постоянными, либо их изменения вдоль трассы прохождения излучения описываются детерминированными функциями [1–2].

В теории стохастического переноса излучения рассеивающие параметры среды рассматриваются как трехмерные случайные поля с заданной статистикой [6–12]. Строгие аналитические решения стохастического уравнения переноса с произвольной статистикой существуют лишь для некоторых частных случаев – одномерной и плоской геометрий при отсутствии рассеяния [6; 7; 9–11].

Наиболее универсальными для решения стохастических задач являются численные методы. В этой области значительные успехи достигнуты, например, при описании распространения солнечного излучения в кучевой облачности методом Монте-Карло [12; 13]. Однако для выявления основных закономерностей стохастического переноса необходимо проводить вычисления для большого числа реализаций статистики, что требует значительных затрат компьютерного времени.

В связи с этим актуальной является разработка простых приближенных методов описания стохастического переноса. Большой интерес представляют методы, базирующиеся на аналитическом усреднении и зависящие от небольшого количества входных параметров.

В ряде работ [1; 2] для описания стохастического переноса используется теория малых возмущений. В основе этой теории лежит предположение о малости флуктуаций оптических параметров среды  $\langle \varepsilon \rangle l_\varepsilon \ll 1$ , где  $\langle \varepsilon \rangle$  – среднее значение показателя экстинкции,  $l_\varepsilon$  – радиус корреляции пространственных флуктуаций случайной величины  $\varepsilon(\mathbf{r})$ .

Однако для многих природных сред характерен широкий разброс параметров стохастичности. Для атмосферы можно привести следующие примеры [8]:

$$\langle \varepsilon \rangle l_\varepsilon \approx 10^{-2} - 10^{-1} - \text{безоблачное небо},$$

$$\langle \varepsilon \rangle l_\varepsilon \approx 10^{-1} - 10^1 - \text{туман (сплошная облачность)},$$

$$\langle \varepsilon \rangle l_\varepsilon \approx 10^1 - 10^2 - \text{кучевая облачность}.$$

Крупномасштабная стохастичность ( $\langle \varepsilon \rangle l_\varepsilon > 1$ ) требует применения более высоких порядков теории возмущений, что приводит к нарастанию громоздкости вычислений.

## 2. Модель бинарной марковской смеси

Одна из наиболее удобных моделей стохастической среды с произвольным масштабом флуктуаций – бинарная марковская смесь (далее БМС) – среда, состоящая из двух несмешивающихся веществ (компонент), случайным образом распределенных в пространстве, каждая из которых имеет свои оптические характеристики:  $f_i(\mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}')$  – индикатрису рассеяния,  $\sigma_i$ ,  $k_i$ ,  $\varepsilon_i = \sigma_i + k_i$  – соответственно коэффициенты рассеяния, поглощения и экстинкции  $i$ -й компоненты [7–11]. Индексы  $i=1$  и  $i=2$  указывают, что при попадании точки  $\mathbf{r}$  в первую компоненту стохастические величины  $\varepsilon(\mathbf{r})$ ,  $\sigma(\mathbf{r})$ ,  $f(\mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}', \mathbf{r})$  и  $B(\mathbf{r})$  в уравнении (1) принимают значения  $\varepsilon_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $f_1(\mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}')$ ,  $B_1$ , а при переходе во вторую компоненту –  $\varepsilon_2$ ,  $\sigma_2$ ,  $f_2(\mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}')$  и  $B_2$ .

Чередование компонент 1 и 2 вдоль произвольной прямой, проходящей сквозь слой БМС, представляет собой Марковский дискретный случайный процесс. Линейные размеры областей пространства, занимаемых компонентами, – случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону. В этом случае уравнение переноса (1) превращается в систему двух связанных интегродифференциальных уравнений:

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla p_1 I_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \varepsilon_1 p_1 I_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \frac{\sigma_1}{4\pi} \int_{4\pi} p_1 I_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') f_1(\mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + p_1 B_1 - \frac{p_1 I_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})}{l_1} + \frac{p_2 I_2(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})}{l_2}, \quad (2)$$

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla p_2 I_2(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \varepsilon_2 p_2 I_2(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \frac{\sigma_2}{4\pi} \int_{4\pi} p_2 I_2(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') f_2(\mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + p_2 B_2 - \frac{p_2 I_2(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})}{l_2} + \frac{p_1 I_1(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})}{l_1},$$

где  $I_i(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$  – условное значение интенсивности в компоненте  $i$ ,

$l_i$  – средние размеры областей пространства, занимаемых компонентами,

$p_i = \frac{l_i}{(l_1 + l_2)}$  – вероятность нахождения компоненты  $i$  в произвольной точке.

Типичный пример БМС – разорванная облачность [8]: пересекающий ее фотон (рис. 1) проходит сквозь чередующиеся участки облаков ( $i=1$ ) и межоблачное пространство ( $i=2$ ). Внутренняя структура обеих компонент считается однородной. Стохастичность задачи проявляется только в статистике распределения облачного поля, т. е. в вероятности присутствия в точке  $\mathbf{r}$  облака или ясного неба.

При облучении биотканей, компонентами БМС можно считать:

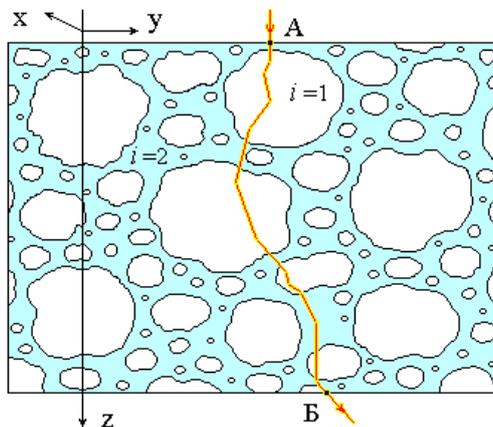
- мелкие кровеносные сосуды ( $i=1$ ) и окружающую их ткань ( $i=2$ ),
- легочную ткань (рис. 2), состоящую из большого количества альвеол ( $i=1$ ), имеющих фрактальную структуру и заполненных воздухом ( $i=2$ ).

Еще одной общеизвестной и практически значимой областью применения стохастической теории переноса является ядерная физика [2; 7].

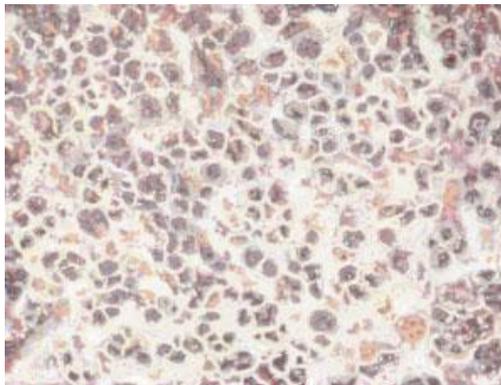
Как двухкомпонентные стохастические смеси здесь рассматриваются:

- защита ядерных реакторов, состоящая из бетонных конструкций ( $i=1$ ) с гравием ( $i=2$ ),
- ядерные реакторы с кипящей водой, в которых возникает турбулентная смесь жидкости ( $i=1$ ) и пара ( $i=2$ ),

- неоднородности, возникающие в результате плазменных неустойчивостей при облучении лазером дейтериево-тритиевых таблеток в ядерных реакторах с инерционным удержанием плазмы.



**Рис. 1** – Схематическое изображение пространственного распределения компонент разорванной облачности, и траектории пролетающего сквозь нее фотона.



**Рис. 2** – Легочная ткань, состоящая из альвеол, заполненных воздухом

Главное преимущество марковской модели состоит в том, что, используя небольшое число параметров, она позволяет создавать удобные для практического применения алгоритмы расчета усредненных характеристик излучения. Результаты, полученные для сред с марковской статистикой стохастичности, могут быть использованы и для сред с другой статистикой, после введения поправочных коэффициентов [7]. Кроме того, подобный подход может быть распространен и на стохастические смеси, состоящие из большего числа компонентов [11].

Исследования стохастического переноса длинноволнового солнечного излучения в кучевой облачности проводились в [5; 12–14] под руководством

Г.А. Титова. В этих работах атмосфера Земли рассматривалась как бинарная смесь, состоящая из двух компонент – облаков и чистого воздуха. Геометрия облачности моделировалась как случайное поле, заданное пуассоновскими точечными потоками, процесс распространения излучения рассматривался как дискретный случайный марковский процесс с двумя состояниями. Расчеты проводились методом Монте-Карло и показали определяющее влияние стохастичности разорванной облачности на перенос излучения.

Значительный вклад в развитие стохастической теории переноса внесла группа американских ученых C.D. Lavermore, D. Vanderhaegen, G.C. Pomraning, F. Malvaquy и т.д. Они использовали аналогичный подход для расчетов прохождения радиации сквозь неоднородности в защите атомных реакторов. Наиболее полно их результаты отражены в [7; 15–19]. В качестве стохастических сред рассматривались бетонные конструкции с гравием и реакторы с кипящей водой.

В рамках сотрудничества Г.С. Помранинга (G.C. Pomraning) с группой Г.А. Титова в [18; 19] изучался стохастический перенос излучения в разорванной облачности, представляемой бинарной марковской смесью. Главным преимуществом подобной модели была признана возможность вычисления усредненных параметров переноса без детального описания геометрии облачности. Дальнейшее развитие стохастической модели облачности на основе марковских процессов представлено в работах [20–22], где на ее основе вычисляются средние значения пропущенной, поглощенной и отраженной коротковолновой радиации.

Еще один приближенный подход к описанию переноса излучения в  $m$ -компонентных смесях как с марковской, так и с произвольной статистикой был предложен в работах [8–11] на основе принципа причинности.

### 3. Малоугловое приближение

В работах [23–28] система (2) решается в рамках малоуглового приближения и метода преобразования Фурье.

Малоугловое приближение описывает рассеяние в среде с индикатрисой рассеяния сильно вытянутой вперед, в направлении распространения излучения, что соответствует рассеянию на частицах, много больших длины волны [1–5]. При этом малоугловое рассеяние с высокой степенью точности соответствует принципу причинности, который лежит в основе марковских процессов.

Актуальность и практическая значимость малоуглового приближения обусловлена тем, что многие природные среды содержат рассеивающие частицы, эффективные размеры которых намного больше, чем длина волны излучения в оптическом диапазоне. В разорванной облачности, например, как сами облака, так и межоблачные промежутки заполнены частицами с сильно вытянутыми индикатрисами рассеяния. Все слои морской воды также характеризуются сильно анизотропным рассеянием. Поэтому малоугловое приближение широко применяется в задачах дистанционного зондирования, наблюдения объектов и восстановления изображений.

Сочетание модели БМС и метода преобразования Фурье в рамках малоуглового приближения позволяет получить интегральные характеристики

излучения в аналитическом виде. Таким образом, появляется возможность для анализа закономерностей переноса излучения в стохастических средах. Использование метода анализа Фурье позволяет также рассчитывать оптическую передаточную функцию (ОПФ) БМС – одну из важнейших характеристик переноса изображения.

Дальнейший анализ, не уменьшая степени общности полученных результатов, можно проводить без учета функций внутренних источников, считая

$$B_1 = B_2 = 0.$$

С помощью стандартных приближений малоугловой теории [1-3]

$$\Omega_z \approx 1, \quad f_i(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}') \approx f_i(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}'), \quad \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}'(\cdot) \approx \int_{-\infty+\infty}^{+\infty+\infty} d\Omega'_x d\Omega'_y(\cdot),$$

где  $\Omega_x, \Omega_y$  и  $\Omega_z$  – проекции вектора  $\mathbf{\Omega}$  на оси  $x, y$  и  $z$ ,

$$\text{а индексы } i, j \quad i = 1; 2, \quad j = \begin{cases} 2, & \text{если } i = 1, \\ 1, & \text{если } i = 2. \end{cases}$$

система (2) трансформируется в систему:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} p_i I_i(z, \mathbf{\rho}, \mathbf{\Omega}_\perp) + \mathbf{\Omega}_\perp \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{\rho}} p_i I_i(z, \mathbf{\rho}, \mathbf{\Omega}_\perp) + \varepsilon_i p_i I_i(z, \mathbf{\rho}, \mathbf{\Omega}_\perp) = \\ & = \frac{\sigma_i}{4\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} p_i I_i(z, \mathbf{\rho}, \mathbf{\Omega}'_\perp) f_i(\mathbf{\Omega}_\perp - \mathbf{\Omega}'_\perp) d\mathbf{\Omega}'_\perp - \frac{p_i I_i(z, \mathbf{\rho}, \mathbf{\Omega}_\perp)}{l_i} + \frac{p_j I_j(z, \mathbf{\rho}, \mathbf{\Omega}_\perp)}{l_j}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{\rho} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  – радиальный вектор,  $\mathbf{\Omega}_\perp = \Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j}$ .

Применив к (3) двумерное преобразование Фурье [1, с. 75-76] по пространственным и угловым частотам  $\mathbf{\omega}$  и  $\mathbf{q}$ , получаем систему уравнений

$$\frac{d}{dz} p_i F_i(z, \mathbf{\omega}, \mathbf{q}) - \left[ \sigma_i Q_i(\mathbf{q} + \mathbf{\omega}z) - \varepsilon_i - \frac{1}{l_i} \right] p_i F_i(z, \mathbf{\omega}, \mathbf{q}) - \frac{p_j F_j(z, \mathbf{\omega}, \mathbf{q})}{l_j} = 0, \quad (4)$$

где  $F_i(z, \mathbf{\omega}, \mathbf{q}) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} I_i(z, \mathbf{\rho}, \mathbf{\Omega}_\perp) \exp(-i\mathbf{\omega}\mathbf{\rho} - i\mathbf{q}\mathbf{\Omega}_\perp - \mathbf{\Omega}_\perp \mathbf{\omega}z) d\mathbf{\rho} d\mathbf{\Omega}_\perp$

– Фурье-трансформанты интенсивности;

$$Q_i(\mathbf{q} + \mathbf{\omega}z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(\mathbf{\Omega}) \exp(-i\mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{q} + \mathbf{\omega}z)) d\mathbf{\Omega}$$

– Фурье-трансформанты индикатрис,

$i$  – мнимая единица.

Система уравнений (4) намного проще интегродифференциальной системы (2) и является основой последующего анализа стохастического переноса в БМС.

#### 4. Пространственные моменты освещенности

Пусть узкий азимутально-симметричный пучок падает перпендикулярно плоской границе БМС. Считаем, что ось  $z$  декартовой системы координат совпадает с осью пучка, плоскость  $x y$  совпадает с границей БМС.

Пространственные моменты освещенности  $E(x, y, z)$  для однородной среды определяются следующим образом:

$$M_{nk}(z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int x^n y^k E(x, y, z) dx dy, \quad (5)$$

$E(x, y, z) = \int_{4\pi} \Omega_z I(x, y, z, \Omega) d\Omega$  – освещенность в точке  $(x, y, z)$  на плоскости  $z = const$ .

Для двухкомпонентной смеси усредненное по ансамблю реализаций значение пространственных моментов определяется как

$$\langle M_{nk}(z) \rangle = p_1 M_{nk}^{(1)}(z) + p_2 M_{nk}^{(2)}(z), \quad (6)$$

где  $M_{nk}^{(i)}(z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int x^n y^k E_i(x, y, z) dx dy$  – средние значения пространственных моментов освещенности  $E_i(x, y, z) = \int_{4\pi} \Omega_z I_i(x, y, z, \Omega) d\Omega$  при условии, что точка  $(0, 0, z)$  находится в компоненте  $i$ .

Наибольший интерес представляют моменты первых порядков. Момент нулевого порядка  $\langle M_{00} \rangle$  определяет среднее значение энергии, переносимой узким пучком единичной мощности в среде через плоскость  $z = const$ , или средний коэффициент пропускания БМС при освещении бесконечно широким пучком:

$$K_B(z) = \langle M_{00}(z) \rangle. \quad (7)$$

В рамках данного подхода получено [23] среднее значение пространственного момента нулевого порядка

$$K_B(z) = \langle M_{00}(z) \rangle = \frac{\gamma_2 - \langle k \rangle}{\gamma_2 - \gamma_1} \exp(-\gamma_1 z) - \frac{\gamma_1 - \langle k \rangle}{\gamma_2 - \gamma_1} \exp(-\gamma_2 z), \quad (8)$$

где  $\left. \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left( k_1 + \frac{1}{l_1} + k_2 + \frac{1}{l_2} \mp \sqrt{\left( k_2 + \frac{1}{l_2} - k_1 - \frac{1}{l_1} \right)^2 + \frac{4}{l_1 l_2}} \right)$ ,

$\langle k \rangle = k_1 p_1 + k_2 p_2$  – среднее значение показателя поглощения.

Квадратные корни из отношения пространственных моментов освещенности второго порядка к нулевому моменту определяют усредненное значение эффективного радиуса пучка в плоскости  $z = const$  [1; 2].

$$R_B(z) = \sqrt{\frac{\langle M_{20}(z) \rangle + \langle M_{02}(z) \rangle}{\langle M_{00}(z) \rangle}} \quad (9)$$

### 5. Численные расчеты

При расчетах использованы следующие безразмерные оптические параметры:

$\tau = \langle \varepsilon \rangle z$  – оптическая глубина;  $\Lambda_i = \sigma_i / \varepsilon_i$  – вероятность выживания фотона в единичном столкновении в  $i$ -й компоненте;  $\tilde{l}_i = \langle \varepsilon \rangle l_i$  – безразмерные средние хорды компонент;  $\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i / \langle \varepsilon \rangle$  – величины относительных флуктуаций показателей ослабления;  $\tilde{\sigma}_i = \tilde{\varepsilon}_i \Lambda_i \Phi_i$  и  $\tilde{k}_i = \tilde{\varepsilon}_i (1 - \Lambda_i \Phi_i)$  – безразмерные значения показателей рассеяния и поглощения, где  $\Phi_i = \left( (1 + \mu_i) \sqrt{1 + \mu_i^2} - (1 - \mu_i^2) \right) / 2 \mu_i \sqrt{1 + \mu_i^2}$  – доля излучения, рассеянного в переднюю полусферу,  $\mu_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\cos \beta) \cos \beta d(\cos \beta)$  – средний косинус индикатрисы рассеяния.

На рис. 3 показана зависимость коэффициента пропускания  $K_B(\tau)$  и эффективного радиуса пучка  $R_B(z)$  от оптической глубины  $\tau$  в БМС с параметрами разорванной облачности, в которой компонентой-1 является облако, компонентой-2 – межоблачная среда. Межоблачные промежутки заполнены теми же частицами, что и облака, но со значительно меньшей концентрацией.

Оптические параметры разорванной облачности:

облако:  $\tilde{\varepsilon}_1 = 1.95$ ,  $\Lambda_1 = 0.9$ ,  $\mu_1 = 0.95$ ;

межоблачная среда:  $\tilde{\varepsilon}_2 = 0.05$ ,  $\Lambda_2 = 0.9$ ,  $\mu_2 = 0.95$ .

На рис. 3 (а) – зависимость коэффициента пропускания  $K_B(\tau)$  разорванной облачности  $K_B(\tau)$  и его предельных значений от оптической глубины  $\tau$ .

Кривая 1 ----- представляет  $K_0(\tau)$  – значение полного коэффициента пропускания эквивалентной однородной смеси, т.е. предельное значение  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow 0$ .

Кривые 2, 3, 4 — представляют  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 16$  соответственно.

Кривая 5 --- представляет  $K_\infty(\tau)$  – предельное значение  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow \infty$ .

На рис. 3 (б) – зависимость радиуса  $R_B(\tau)$  узкого пучка излучения, проходящего в разорванной облачности, и его предельных значений от оптической глубины  $\tau$ .

Кривая 1 ----- представляет  $R_0(\tau)$  – значение радиуса узкого пучка в эквивалентной однородной смеси, т.е. предельное значение  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow 0$ .

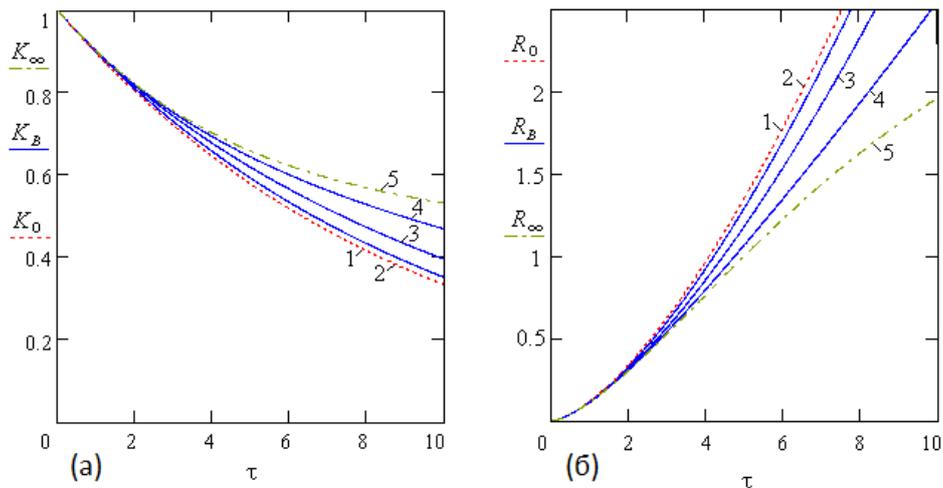
Кривые 2, 3, 4 — представляют  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 16$  соответственно.

Кривая 5 --- представляет  $R_\infty(\tau)$  – предельное значение  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow \infty$ .

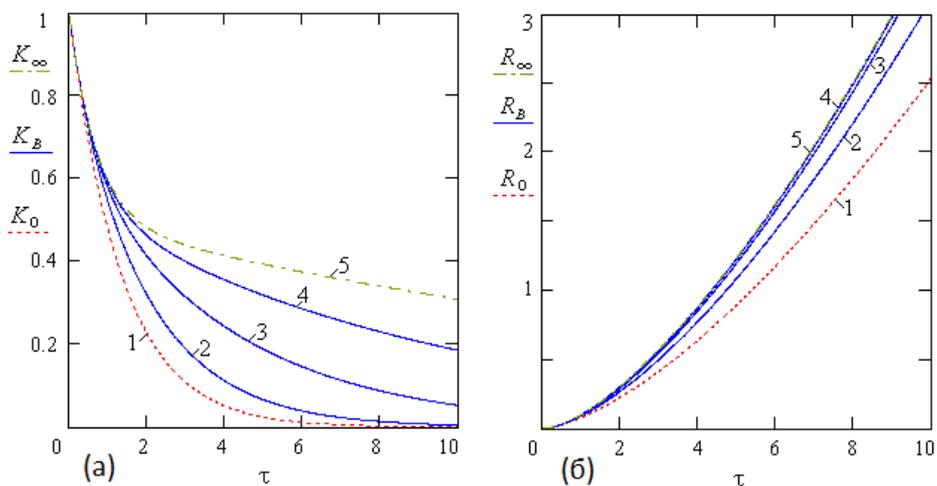
Обе компоненты данной БМС являются сильно рассеивающими и имеют небольшие коэффициенты поглощения. С увеличением оптической глубины  $\tau$ , количество поглощенного излучения растет медленно как в бинарной, так и в соответствующей однородной смеси. Соответственно, на оптических глубинах, приемлемых для малоуглового приближения ( $\tau \leq 10$ ),  $K_B$  отличается от  $K_0$  незначительно. Например, при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$  (кривая 3) и  $\tau = 10$  отношение  $K_B/K_0 = 1.15$ . При дальнейшем увеличении оптической глубины слоя отношение  $K_B/K_0$  естественно возрастает.

Физически это объясняется тем, что для фотона, пролетающего сквозь стохастическую среду, вероятность испытать столкновение с частицей и при этом поглотиться или рассеяться всегда ниже, чем в однородной смеси. Соответственно средние значения коэффициента пропускания стохастической среды больше, чем однородной.

Средние значения радиуса узкого пучка излучения в данной БМС заметно меньше, чем в эквивалентной однородной смеси. Это также связано с тем, что в БМС рассеянных фотонов намного меньше, чем в эквивалентной однородной смеси, и они реже испытывают столкновения с рассеивающими частицами.



**Рис. 3. (а)** – зависимость коэффициента пропускания  
**(б)** – зависимость эффективного радиуса пучка излучения в БМС с параметрами разорванной облачности



**Рис. 4. (а)** – зависимость коэффициента пропускания  
**(б)** – зависимость эффективного радиуса пучка излучения в БМС с параметрами дымовой облачности

На рис. 4 показана зависимость коэффициента пропускания  $K_B(\tau)$  и эффективного радиуса пучка от оптической глубины  $\tau$  в модельной БМС, в которой компонента-1 – оптически плотная и сильнопоглощающая, компонента-2 – разреженная и сильнорассеивающая. Подобными оптическими параметрами могут обладать облака дыма или вулканические облака [29].

Оптические параметры дымовой облачности:

облака:  $\tilde{\epsilon}_1 = 1.6$ ,  $\Lambda_1 = 0.1$ ,  $\mu_1 = 0.99$ ;

межоблачная среда:  $\tilde{\epsilon}_2 = 0.4$ ,  $\Lambda_2 = 0.9$ ,  $\mu_2 = 0.9$ .

На рис. 4 (а) – зависимость коэффициента пропускания  $K_B(\tau)$  дымовой облачности и его предельных значений.

Кривая 1  $\cdots$   $K_0(\tau)$  – значение полного коэффициента пропускания эквивалентной однородной смеси, – предельное значение  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow 0$ .

Кривые 2, 3, 4  $\text{—}$  представляют  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 16$  соответственно.

Кривая 5  $\text{---}$  представляет  $K_\infty(\tau)$  – предельное значение  $K_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow \infty$ .

На рис. 4 (б) показана зависимость радиуса  $R_B(\tau)$  узкого пучка излучения, и его предельных значений от оптической глубины  $\tau$ .

Кривая 1  $\cdots$  представляет  $R_0(\tau)$  – значение радиуса узкого пучка в эквивалентной однородной смеси, т.е. предельное значение  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow 0$ .

Кривые 2, 3, 4  $\text{—}$  представляют  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 1$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$ ,  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 16$  соответственно.

Кривая 5  $\text{---}$  представляет  $R_\infty(\tau)$  – предельное значение  $R_B(\tau)$  при  $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2 \rightarrow \infty$ .

На рис. 4 оптически плотная компонента-1 сильнопоглощающая, а разреженная компонента-2 – сильнорассеивающая. В результате коэффициент пропускания данной БМС во много раз превышает коэффициент пропускания эквивалентной однородной смеси: например, при  $\tau = 4$  и  $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$  получаем  $K_B/K_0 = 4.8$ .

При этом среднее значения радиуса узкого пучка излучения в данной БМС заметно больше, чем в эквивалентной однородной смеси. Это объясняется тем, что в компоненте-1, оптически плотной и сильнопоглощающей, рассеивается небольшое количество фотонов, да и те быстро поглощаются, не успев перейти в разреженную компоненту-2. Таким образом, подавляющее большинство рассеянных фотонов в данной БМС происходит из компоненты-2, разреженной и сильнорассеивающей.

### Заключение

Предложенный подход позволяет быстро рассчитывать пространственно-угловое распределение интенсивности в БМС и передаточные характеристики БМС, дает возможность исследовать их зависимость от оптических параметров БМС и размера средних хорд компонент.

Средние значения коэффициента пропускания БМС существенно отличаются от коэффициента пропускания эквивалентной однородной смеси и с увеличением  $\tau$  отличие возрастает. В зависимости от оптических параметров компонент, коэффициент пропускания БМС может превышать коэффициент пропускания эквивалентной однородной смеси в несколько раз.

Средний радиус узкого пучка излучения в зависимости от оптических параметров БМС может быть, как больше, так и меньше, чем в эквивалентной однородной смеси.

Таким образом, малоугловая модель БМС, являясь сравнительно простой и наглядной, позволяет учитывать ряд эффектов, вызванных стохастичностью среды, и может служить основой для разработки алгоритмов описания переноса излучения в средах с произвольным уровнем пространственных флуктуаций.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Зеге, Э. П.* Перенос изображения в рассеивающей среде / Э. П. Зеге, А. П. Иванов, И. Л. Кацев. – Минск : Наука и техника, 1985. – 327 с.
2. *Исимару, А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах: в 2 т. / А. Исимару. – М.: Мир, 1981. – Т. 1. – 280 с.
3. *Показеев, К. В.* Океанология. Оптика океана / К. В. Показеев, Т. О. Чаплина. – Москва : Юрайт. 2019. – 270 с.
4. *Малинка, А. В.* Учет влияния атмосферы при интерпретации данных спутниковых и наземных оптических измерений / А. В. Малинка, Э. П. Зеге, И. Л. Кацев, А. С. Прихач, Л. Истомина // ЖПС. – 2016. – Т. 83, № 5. – С. 698–707.
5. *Зуев, В. Е.* Оптика атмосферы и климат / В. Е. Зуев, Г. А. Титов. – Томск : изд-во “Спектр” ИОА, 1996. – 271 с.
6. *Валентюк, А. Н.* Оптическое изображение при дистанционном наблюдении / А. Н. Валентюк, К. Г. Предко. – Минск : Наука и техника, 1991. – 359 с.
7. *Pomraning, G. C.* Linear Kinetic Theory and Particle Transport in Stochastic Mixtures / G. C. Pomraning. – World Scientific Publishing, Singapore, 1991. – 235 p.
8. *Валентюк, А. Н.* Аналитические методы в теории распространения излучения в макронеоднородных стохастических рассеивающих средах / А. Н. Валентюк // Оптика атмосферы и океана. – 1993. – Т. 6, № 11. – С. 1397–1403.
9. *Valentyuk, A. N.* Stochastic radiative transfer and causality condition / A. N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1995. – Vol. 53, № 6. – P. 693–704.
10. *Valentyuk, A. N.* A functional description of stochastic radiative transfer / A. N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1996. – Vol. 56. – P. 447–464.
11. *Valentyuk, A. N.* Stochastic radiative transfer in M-component markovian mixtures / A. N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1998. – Vol 60, № 6. – P. 1069–1086.
12. *Каргин, Б. А.* Имитационное моделирование кучевой облачности для исследования процессов переноса солнечной радиации в атмосфере методом Монте-Карло / Б. А. Каргин, С. М. Пригарин // Оптика атмосферы и океана. – 1994. – Т. 7, № 9. – С. 1275–1287.
13. *Zuev, V. E.* Radiative transfer in cloud fields with random geometry / V. E. Zuev, G. A. Titov // – J. Atmos. Sci. – 1995. – V. 52 – P. 176–190.
14. *Титов, Г. А.* Радиационные эффекты неоднородных облаков / Г. А. Титов, Е. И. Касьянов // Оптика атмосферы и океана. – 1999. – Т. 12, № 10. – С. 911–921.
15. *Pomraning, G. C.* Transport theory in binary statistical mixtures / G. C. Pomraning, C. D. Lavermore, J. Wong // Lecture notes in pure and applied mathematics. – Nelson at al. Eds. Marsel Dekker. New York, 1989. – P. 1–35.
16. *Malvagy, F.* A comparison of models for particle transport in stochastic media / F. Malvagy, G. C. Pomraning // Nuc. Sci. Eng. – 1992. – V. 111. – P. 215–223.
17. *Malvagy, F.* Stochastic atmospheric radiative transfer / F. Malvagy, G. C. Pomraning // Atmos. Oceanic Opt. – 1993 – V. 6, № 9. – P. 610–622.
18. *Помранинг, Г. С.* Асимптотические уравнения переноса излучения в атмосфере с частичной облачностью / Г. С. Помранинг // Оптика атмосферы и океана. – 1996. – Т. 9, № 1. – С. 14–29.
19. *Помранинг, Г. С.* Взаимодействия облако-радиация: модель Титова и другие модели / Г. С. Помранинг // Оптика атмосферы и океана. – 1999. – Т. 12, № 3. – С. 215–221.

20. **Kassianov, E.** Stochastic radiative transfer in multilayer broken clouds. Part I: Markovian approach / E. Kassianov // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2003. – V. 77, № 4. – P. 373–393.
21. **Kassianov, E.** Stochastic radiative transfer in multilayer broken clouds. Part II: validation test / E. Kassianov [et al.] // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2003. – V. 77, № 4. – P. 373–393.
22. **Kassianov, E. I.** Stochastic radiative transfer in Markovian mixtures: Past, present, and future / E. I. Kassianov, D. Veron. // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2011. – V. 112, № 5. – P. 566–576.
23. **Noskova, M.** Stochastic laser-beam transfer through a binary Markovian mixture / M. Noskova, A. Valentyuk. // Appl. Opt. – 1997. – V. 36, № 30. – P. 325–331.
24. **Валентюк, А. Н.** Угловая структура лазерного излучения в бинарной марковской смеси / А. Н. Валентюк, М. С. Носкова // ЖПС. – 1999. – Т. 66, № 1. – С. 36–42.
25. **Носкова, М. С.** Оптическая передаточная функция бинарной марковской смеси / М. С. Носкова // ЖПС. – 2004. – Т. 71, № 2. – С. 198–203.
26. **Носкова, М. С.** Итерационное решение задачи определения оптической передаточной функции бинарной марковской смеси / М. С. Носкова // Оптический журнал. – 2004. – Т. 71, № 9. – С. 16–19.
27. **Noskova, M. S.** Small angle model of radiative transfer in a binary markovian mixture / M. S. Noskova // Twelfth Joint International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics / Atmospheric Physics, Tomsk, Russia, 27-30 June 2005. / Institute of Atmospheric Optics SB RAS ; ed. by G. G. Matvienko, G. A. Zherebtsov, Proc. of SPIE. Vol. 6160, 2006. – P. 616016-1 – 616016-7.
28. **Носкова, М. С.** Оценка методом Монте-Карло точности аналитического метода расчета коэффициента пропускания бинарной марковской смеси / М. С. Носкова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2007. – Т. 26, № 1. – С. 170–177.
29. **Филей, А. А.** Построение моделей оптических параметров вулканических облаков для задач дистанционного зондирования Земли из космоса / А. А. Филей // Оптика атмосферы и океана. – 2020. – Т. 33, № 02. – С. 127–134.

Поступила в редакцию 31.03.2022 г.

Контакты: noskova@msu.by (Носкова Марина Сергеевна)

### **Noskova M. S. ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE RADIATION TRANSFER EQUATION IN A BINARY MARKOV MIXTURE IN A SMALL-ANGLE APPROXIMATION**

*Based on the small-angle approximation, the solution of the stochastic radiative transfer equation in a binary Markov mixture with small-angle scattering is considered. This solution makes it possible to obtain analytical expressions for the moments of the spatial distribution of illuminance, which allows to calculate the average transmittance of a binary Markov mixture and the average value of the effective radius of a narrow radiation beam. The calculation results show that the spatial distribution of illuminance in a binary Markov mixture and in an equivalent homogeneous mixture differ significantly.*

**Keywords:** stochastic radiative transfer, binary Markov mixture, small-angle approximation.

УДК 581.143.6:582.734.4

## ВВЕДЕНИЕ В КУЛЬТУРУ IN VITRO БОКОВЫХ ПОЧЕК РОЗ РАЗЛИЧНЫХ САДОВЫХ ГРУПП

**С. М. Ленивко**

кандидат биологических наук, доцент

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

*В статье рассматривается инфицированность и регенерационная способность пазушных почек 26 сортов роз из 6 садовых групп на этапе введения в культуру in vitro. Показано, что контаминация первичных эксплантов сортовых роз защищенного грунта ниже по сравнению с розами открытого грунта. Установлено, что активации меристем и формирование побегов обусловлено генотипом сорта.*

**Ключевые слова:** сорта роз, пазушные почки, инфицированность, регенерационная способность.

### Введение

Роль цветочно-декоративных растений с каждым годом возрастает не только в озеленении, но и в увеличивающемся спросе на флористические услуги. Одной из основных культур, которой отдается предпочтение, является роза [1]. Современные садовые розы имеют сложное происхождение, поскольку их сортимент создавался в течение нескольких столетий, исходным материалом при этом служили различные виды и формы дикорастущих роз. В результате интродукционной и селекционной работы получены сорта, которые различаются по размерам самих растений и их цветков, форм роста, продолжительности и периодичности цветения, а также особенностью к вегетативному размножению и произрастанию в различных почвенно-климатических условиях. В настоящее время мировой ассортимент роз насчитывает более 30 тысяч сортов [2], при этом ежегодно пополняется новыми сортами, способными удовлетворить потребности садово-парковой архитектуры и промышленного цветоводства.

Возрастающий спрос потребителей на свежесрезанные розы, розы в горшках, посадочный материал роз повышает требования к производителям цветочной продукции. Ужесточение правил международной торговли и обмена только безвирусным посадочным материалом культурных растений по специальным сертификатам предполагает перевод декоративного садоводства и цветоводства на безвирусную основу. Поэтому разработка клонального микроразмножения гарантировано безвирусного исходного материала обеспечит значительный рост его качества, повысит экономическую рентабельность и интенсивность отрасли. Все перечисленное соответствует принципам «зеленой экономики» и направлено на обеспечение устойчивого развития экономики любой страны в современных условиях [3].

В настоящее время метод культивирования in vitro применяется преимущественно только для сохранения наиболее ценных сортов роз. Одним из сдерживающих факторов широкого внедрения данного метода в производство посадочного материала является необходимость его адаптации к сортовым особенностям вводимого в культуру in vitro материала.

**Цель исследования** – выявить особенности введения в стерильную культуру in vitro некоторых трудно размножаемых в обычных условиях сортов различных групп садовых роз.

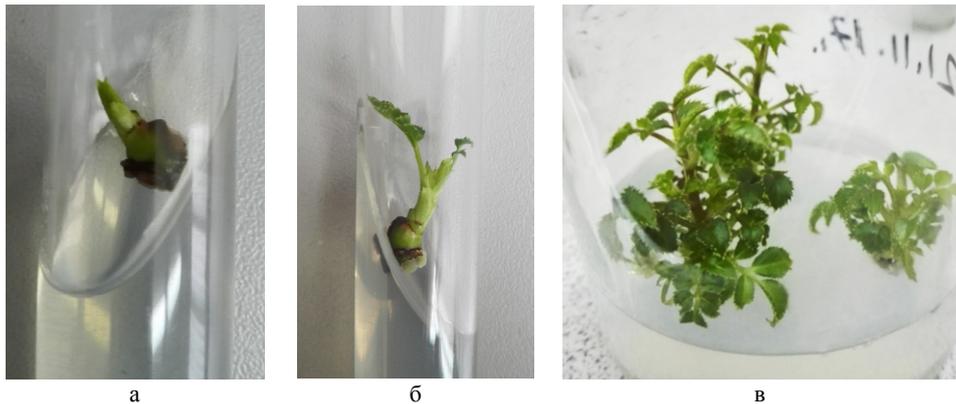
© Ленивко С. М., 2022

**Материалы и методы исследования.** Исходным материалом для получения эксплантов (пазушных почек) послужили побеги 16 сортов открытого грунта, относящихся к следующим группам садовых роз: чайно-гибридные, мускусные гибриды, флорибунды, шрабы, почвопокровные, английские и плетистые розы, а также 10 сортов роз защищенного грунта, относящиеся к чайно-гибридным, флорибундам и спрей-розам (или розам патио). Следует отметить, что согласно утвержденной Всемирной федерацией сообществ розоводов (World Federation of Rose Societies, WFRS) в 1976 г. классификации роз сорта, сходные по декоративным признакам и биологическим особенностям, объединяют в 34 садовые группы. Однако данная классификация очень условна, поскольку сорта, входящие в одну группу, могут сильно различаться по морфологическим признакам [4]. Наиболее сложной и многообразной, на наш взгляд, является группа «шрабы», в которую отнесены полуплетистые формы и мощные высокие пряморастущие кустарники [5] – востребованный материал для ландшафтного дизайна. Высокая декоративная ценность этих современных парковых роз позволяет их условно разделить на «шрабы» – прямостоячие объемные кустарники, «почвопокровные» – розы с длинными дугообразными побегами и «английские розы» – сорта английского селекционера Д. Остина.

Поверхностную стерилизацию изолированных пазушных почек от побегов сортовых роз производили с использованием метода ступенчатой стерилизации материала. Экспланты пассировали на агаризированную (6 г/л) питательную среду, приготовленную по прописи Т. Murashige и F. Skoog [6], содержащую половинчатый набор макро- и микросолей, дополненную гормоном 6-бензиламинопурином в концентрации 1,0 мг/л. Пазушные почки высаживали в отдельные пробирки (рисунок 1). Всего в проводимых исследованиях было посажено 996 эксплантов.

Инициацию побегообразования из пазушных почек и последующее их культивирование осуществляли в камере для роста растений KBW 400 при 16 часовом фотопериоде с интенсивностью освещения 3000 лк и постоянной температуре 19°C.

Все манипуляции с изолированными пазушными почками (введение в культуру) и регенерированными побегами (пересадка из пробирок в сосуды объемом 200 мл) проводили в асептических условиях ламинар-бокса LOGIC.



**Рисунок 1** – Первичные экспланты сортовых роз на этапе введения в культуру *in vitro*: а – изолированная пазушная почка (0-й пассаж) на примере сорта ‘Dinky’ группы мускусные гибриды; б – регенерация первичного побега из пазушной почки на примере сорта ‘Ebb Tide’ группы флорибунды; в – культивирование регенерированных побегов в сосудах (1-й пассаж) на примере сорта ‘Ebb Tide’

Статистическую обработку полученных результатов проводили согласно методам биологической статистики [7] с использованием программы Excel. Достоверность значимости различий между данными варианта опыта и контроля определяли по Т-критерию Стьюдента.

### Основная часть

Результаты исследований, отображающие количество посаженных почек и частоту инфицированных у сортов различных групп садовых роз на 20-е сутки эксперимента (0-й пассаж), представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Инфицированность пазушных почек сортов различных групп садовых роз при введении в культуру *in vitro*

Группа садовых роз	Сорт	Тип выращивания	Количество пассированных почек, шт.	Частота инфицированных почек, %
Чайно-гибридные	‘Prestige’	Защищенный грунт	20	0
	‘Red Naomi’		19	5,26±5,12
	‘Talea+’		24	4,17±4,08
	‘Akito’		21	0
	‘Cherry Brandy’		22	0
	‘Jumilia’		20	5,0±4,87
	‘Milagro’	19	0	
	‘Comtessa’	Открытый грунт	55	10,91±4,20
	‘Ashley’		15	20,0±10,33
‘About Face’	26		65,38±9,33	
Мускусные гибриды	‘Dinky’	Открытый грунт	88	9,09±3,06
	‘Plaisanterie’		67	8,96±3,49
Флорибунды	‘Dolomiti’	Защищенный грунт	19	0
	‘Sunset Boulevard’		20	10,0±6,71
	‘Ebb Tide’	Открытый грунт	5	20,0±17,89
	‘Republique de Montmartre’		40	2,50±2,47
Шрабы	‘Paisley Abbey’	Открытый грунт	127	8,66±2,50
	‘Bicentenaire de Guillot’		30	70,0±8,37
	‘Ivor’s Rose’		18	55,56±11,71
	‘Roter Korsar’		83	6,02±2,61
Почвопокровные	‘Stadt Rom’	Открытый грунт	62	9,68±3,76
	‘Rody’		30	70,0±15,28
Английские	‘Crown Princess Margaretha’	Открытый грунт	48	4,17±2,89
	‘Mary Rose’		66	19,70±4,90

Окончание таблицы 1

Группа садовых роз	Сорт	Тип выращивания	Количество пассированных почек, шт.	Частота инфицированных почек, %
Спрей	'Yellow Baby'	Защищенный грунт	18	5,56±5,40
Плетистые	'Rosarium Uetersen'	Открытый грунт	34	2,94±2,90

Анализ полученных данных показал, что процент инфицированности изолированных пазушных почек сортов роз чайно-гибридной группы находился в пределах 4,17–65,38%, при этом наиболее контаминированным оказался сорт открытого грунта 'About Face' (65,38%). В целом контаминация почек у сортов открытого грунта оказалась выше 10%. Что касается сортов защищенного грунта, то у трех сортов процент инфицированности находился на уровне 5%, а у четырех сортов чайно-гибридных роз пассированные на питательную среду почки в нулевом пассаже на этапе введения в культуру *in vitro* инфицированы не были.

В группе роз флорибунды инфицированность материала составила от 2,50 до 20,0%, при этом данный показатель был выше у сорта открытого грунта 'Ebb Tide'. У сортов 'Dolomiti' и 'Sunset Boulevard' защищенного грунта этот показатель составил 0% и 10,0 % соответственно.

У 11 сортов мускусных гибридов, шрабов, почвопокровных, английских и плетистых роз открытого грунта инфицированность первичных эксплантов варьировала от 2,94 до 70,0%. Наименьший процент (2,94%) инфицированности был отмечен у сорта открытого грунта 'Rosarium Uetersen' из группы плетистых роз. У шести сортов открытого грунта анализируемых групп садовых роз процент контаминации был ниже 10%. У сорта 'Mary Rose' английских роз отмечено повышение инфицированности до 19,7%. Наибольшая инфицированность наблюдалась у сорта 'Rody' из группы почвенно-покровные, у сортов 'Bicentenaire de Guillot' и 'Ivor's Rose' группы шрабы (70,0% и 55,56 % соответственно).

У сорта защищенного грунта 'Yellow Baby' группы розы спрей показатель инфицированности составил 5,56%,

Таким образом, полученные данные показали, что инфицированность пазушных почек в нулевом пассаже на этапе введения в культуру *in vitro* у 10 сортов роз защищенного грунта была невысокой (на уровне 5% у 4 сортов) либо отсутствовала (у 5 сортов), и лишь у одного сорта составила 10%. По-видимому, наблюдаемый низкий процент контаминации сортов защищенного грунта связан с контролем инфекции при их выращивании в теплицах.

Результаты исследования отзывчивости первичных эксплантов (пазушных почек) сортов различных групп садовых роз на условия культивирования в 0-м пассаже на 20-е сутки эксперимента представлены в таблице 2.

Анализ полученных данных позволил установить, что приживаемость пазушных почек 10 сортов чайно-гибридной группы находилась в пределах от 11,54 до 100%. Наименьший показатель частоты почек, регенерировавших побеги, характерен для сортов 'Ashley' и 'About Face' (13,33 и 11,54% соответственно). Сорта 'Cherry Brandy' и 'Comtessa' регенерировали побеги с частотой 27,27 и 25,24%

соответственно. Регенерацию побегов от 65,0% и выше продемонстрировали 6 сортов чайно-гибридной группы: 'Prestige', 'Red Naomi', 'Talea+', 'Akito', 'Jumilia' и 'Milagro'. Полученные данные показали, что 60% исследованных нами сортов чайно-гибридной группы имеют высокую регенерационную способность пазушных почек на начальном этапе введения в культуру *in vitro*.

Таблица 2 – Отзывчивость первичных эксплантов сортов роз различных групп садовых на условия культивирования *in vitro*

Группа садовых роз	Сорт	Количество пассированных почек, шт.	Частота почек, регенерировавших побеги, %	Число сформированных листочков, шт.
Чайно-гибридные	'Prestige'	20	65,0±10,66	5,0±1,29
	'Red Naomi'	19	84,21±8,37	6,07±3,12
	'Talea+'	24	95,83±4,08	9,13±1,78
	'Akito'	21	80,95±8,57	8,53±2,06
	'Cherry Brandy'	22	27,27±9,49	2,50±1,23
	'Jumilia'	20	85,0±7,98	6,12±2,24
	'Milagro'	19	100,0	4,95±1,85
	'Comtessa'	55	25,45±5,87	6,07±1,48
	'Ashley'	15	13,33±8,78	4,33±2,19
	'About Face'	26	11,54±6,27	9,75±4,62
Мускусные гибриды	'Dinky'	88	47,73±5,32	8,0±3,06
	'Plaisanterie'	67	41,79±6,03	13,33±1,78
Флори-бунды	'Dolomiti'	19	57,89±11,33	6,91±2,21
	'Sunset Boulevard'	20	35,0±10,67	2,43±1,36
	'Ebb Tide'	5	80,0±17,89	9,75±4,62
	'Republique de Montmartre'	40	55,0±7,87	8,86±1,58
Шрабы	'Paisley Abbey'	127	59,06±4,36	8,83±1,20
	'Bicentenaire de Guillot'	30	6,67±4,56	0
	'Ivor's Rose'	18	5,56±5,40	3,0±2,45
	'Roter Korsar'	83	12,05±3,57	5,26±0,99
Почво-покровные	'Stadt Rom'	62	59,68±6,23	6,46±1,65
	'Rody'	30	23,33±7,72	11,11±3,53
Английские	'Crown Princess Margaretha'	48	91,67±3,99	11,30±1,63
	'Mary Rose'	66	46,97±6,14	5,84±1,06
Спрей	'Yellow Baby'	18	44,44±11,71	2,75±1,16
Плетистые	'Rosarium Uetersen'	34	70,59±7,81	7,91±1,58

Регенерации побегов из меристем почек двух сортов роз 'Dinky' и 'Plaisanterie' группы мускусные гибриды оказалась достоверно неразличимой и составила 47,73 и 41,79% соответственно. Полученные данные свидетельствуют о достаточно хорошей способности сортов данной группы регенерировать побеги из пазушных почек.

Сорта роз садовой группы флорибунды по исследуемому показателю могут быть распределены следующим образом: со средней (сорт ‘Sunset Boulevard’ – 35,0%) и хорошей регенерационной способностью (сорта ‘Republique de Montmartre’ и ‘Dolomiti’ – 55,0 и 57,89% соответственно), а также с высокой частотой регенерации (сорт ‘Ebb Tide’ – 80,0%).

Анализ частоты почек, регенерировавших побеги, у 4 сортов роз группы шрабы показал, что только у сорта ‘Paisley Abbey’ регенерация была хорошей и находилась на уровне 59,06 %. У сортов ‘Bicentenaire de Guillot’, ‘Ivor’s Rose’ и ‘Roter Korsar’ данный показатель был низким и составил соответственно 6,67, 5,56 и 12,05%.

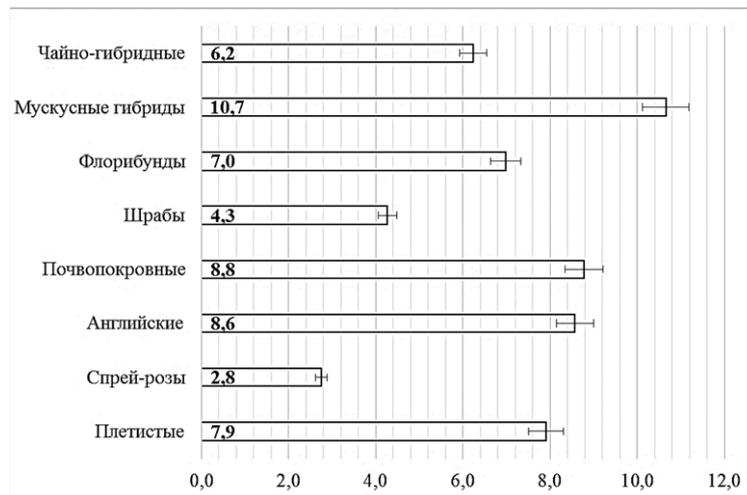
Сорта ‘Stadt Rom’ и ‘Rody’ группы почвопокровные розы регенерировали побеги из пазушных почек с частотой 59,68 и 23,33%, что свидетельствует о различной способности к регенерации и может быть охарактеризовано как сорт с высокой и сорт с пониженной регенерационной способностью соответственно.

Сорт ‘Crown Princess Margaretha’ английских роз продемонстрировал развитие побегов из пазушных почек на уровне 91,67% (высокая регенерация), а сорт ‘Mary Rose’ – на уровне 46,97% (хорошая регенерация).

Группы роза спрей и плетистые розы были представлены по одному сорту. У сорта ‘Yellow Baby’ из группы розы спрей эксплантированные почки регенерировали побеги со средней частотой, которая составила 44,44%. Сорт ‘Rosarium Uetersen’ из группы плетистых роз отличался высокой регенерационной способностью (70,59%).

Таким образом, проведенная оценка выхода жизнеспособных первичных побегов от числа пассированных пазушных почек у 26 сортов роз различных садовых групп не выявила влияния различий в условиях выращивания растений-доноров (открытый или защищенный грунт) на данный показатель. Отмечено, что наблюдаемая изменчивость в активации меристем и развитии побегов в условиях *in vitro* зависит от сортовых особенностей, а не от принадлежности к той или иной группе садовых роз.

Проведен анализ качественного состояния развития регенерированных первичных побегов в 0-м пассаже у каждого сорта роз по числу сформированных листочков на одном побеге (таблица 2), а также рассчитано среднее значение листочков на регенерированном побеге по каждой группе садовых роз (рисунок 2).



**Рисунок 2** – Среднее значение листочков на регенерированном побеге в различных группах садовых роз

В группе чайно-гибридных роз количество сформированных листочков варьировало от 2 до 10 штук в зависимости от сорта. Наименьшее количество сформированных листовых пластинок зафиксировано у сорта 'Cherry Brandy' ( $2,50 \pm 1,23$ ). Наибольшее количество листочков было на побегах сортов 'About Face' ( $9,75 \pm 4,62$ ), 'Talea+' ( $9,13 \pm 1,78$ ) и 'Akito' ( $8,53 \pm 2,06$ ). Следует отметить, что сорта и 'Talea+' и 'Akito' характеризовались высокой регенерационной способностью 95,83% и 80,95% соответственно, то у сорта 'About Face' частота почек, сформировавших побеги была минимальной (11,54%) в данной группе. Это указывает на отсутствие корреляции между данными показателями.

Группа мускусных гибридов отличалась достоверно высоким средним значением сформированных листочков на первом этапе введения в культуру *in vitro*. Причем у сорта 'Plaisanterie' с отзывчивостью почек к регенерации на уровне 41,79% данный показатель был максимальным среди всех включенных в эксперимент сортов роз и составил  $13,33 \pm 1,78$ .

В группе роз флорибунды зарегистрировано значительное варьирование исследуемого признака в зависимости от генотипа сорта. Так максимальное значение отмечено у сорта 'Ebb Tide' ( $9,75 \pm 4,62$ ), минимальное – у сорта 'Sunset Boulevard' ( $2,43 \pm 1,36$ ).

У сорта 'Bicentenaire de Guillot' из группы шрабы при низкой частоте регенерации побегов из почек (6,67%) листочки на 20-е сутки культивирования не сформировались. У сорта 'Ivor's Rose' на одном побеге развилось наименьшее число листочков ( $3,0 \pm 2,45$ ). У сорта 'Paisley Abbey' данный показатель оказался высоким ( $8,83 \pm 1,20$ ).

Сорта 'Rody' и 'Stadt Rom' группы почвопокровные розы существенно отличались по количеству сформированных листовых пластинок на одном побеге ( $11,11 \pm 3,53$  и  $6,46 \pm 1,65$  соответственно). Следует отметить, что по регенерационной способности первичных эксплантов данные сорта показали обратную зависимость.

Сорта 'Crown Princess Margaretha' и 'Mary Rose' английских роз показали схожую тенденцию по образованию листочков с почвопокровными розами с той лишь разницей, что отзывчивость к регенерации пассированных почек коррелировала с интенсивностью формирования листовых пластинок на регенерировавших побегах.

У сорта 'Yellow Baby' розы спрей при регенерации побегов на уровне 44,44% отмечен довольно низкий показатель развития листьев ( $2,75 \pm 1,16$ ).

Побеги сорта 'Rosarium Uetersen' плетистых роз отличались хорошим листообразованием ( $7,91 \pm 1,58$ ).

Таким образом, сравнительная характеристика различных садовых групп роз по интенсивности формирования листочков на регенерированных побегах показала, что наиболее облиственными оказались побеги группы мускусные гибриды. Достаточно активно процесс листообразования проходил у почвопокровных и английских роз. Другие исследованные нами группы садовых роз способности развития листьев образуют следующий ряд: плетистые > флорибунды > чайно-гибридные > шрабы > розы спрей.

### Заключение

Проведенная сравнительная оценка инфицированности и регенерационной способности у пазушных почек 26 сортов роз из 6 садовых групп на этапе введения в культуру *in vitro* позволила сделать следующие выводы.

1. Установлено, что в 0-м пассаже у роз садовых групп защищенного грунта контаминация пазушных почек была низкой и не превышала 10% в пределах сорта либо вообще отсутствовала. После примененной поверхностной стерилизации инфицированность первичных эксплантов выявлена у всех сортов роз открытого грунта. Так из 794 пассированных первичных эксплантов, донорами которых явились сорта роз открытого грунта, инфицированными оказались 59,45%, а из 202 вводимых в культуру *in vitro* вегетативных почек сортов защищенного грунта выбраковке из-за контаминации подлежали только 20,3%. Рекомендуемым аспектом улучшения при введении в стерильную культуру почек, которые изолированы у сортов роз, выращиваемых в открытом грунте, является оптимизация технологии их ступенчатой стерилизации по удалению микотических патогенов. Для предотвращения риска перекрестного инфицирования у таких эксплантов, из-за возможности развития скрытой инфекции, целесообразно продолжить их раздельное, а не в общем сосуде, культивирование в 1-м пассаже.

2. Определено, что способность пазушных почек к регенерации побегов в условиях *in vitro* преимущественно зависит от особенностей сорта, а не от принадлежности к той или иной группе садовых роз. Высокая ( $\geq 60\%$ ) регенерационная способность апикальных меристем, выявленная в 0-м пассаже, сохранялась у 44,4% в 1-м пассаже.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Ленивко, С. М.* О перспективности технологии микрклонального размножения для промышленного розоводства / С. М. Ленивко // Вучоныя запіскі : сб. навук. прац Брэсцкага ун-та. – 2018. – Вып. 14. – Ч. 2. – С. 82–88.
2. Modern Roses 12 : The Comprehensive list of roses in cultivation or of historical or botanical importance / Ed. : Marily A. Young, Phillip Schorr. – Shreveport LA: The American Rose Society, 2007. – 576 p.
3. Национальная стратегия устойчивого социально-экономического развития Республики Беларусь на период до 2030 года [Электронный ресурс] // Министерство экономики Республики Беларусь. – Режим доступа: <https://economy.gov.by/uploads/files/NSUR2030/Natsionalnaja-strategija-ustojchivogo-sotsialno-ekonomicheskogo-razvitiija-Respubliki-Belarus-na-period-do-2030-goda.pdf>. – Дата доступа: 15.01.2022.
4. *Исачкин, А. В.* Таксономический анализ 28 декоративных сортов *Rosa* в связи с оптимизацией садовой классификации и оценкой перспектив использования / А. В. Исачкин, В. А. Крючкова, С. В. Юрко // Наука и бизнес: пути развития. – 2013. – № 9 (27). – С. 160–164.
5. *Былов, В. Н.* Розы. Итоги интродукции / В. Н. Былов, Н. Л. Михайлов, Е. И. Сурина. – М. : Наука, 1988. – 431 с.
6. *Murashige, T.* A revised medium for rapid growth and bio assays with tobacco tissue cultures / T. Murashige, F. Skoog // *Physiol. Plantarum*. – 1962. – Vol. 15. – P. 473–497.
7. *Рокицкий, П. Ф.* Биологическая статистика / П. Ф. Рокицкий. – 3-е изд., испр. – Минск : Выш. шк., 1973. – 320 с.

Поступила в редакцию 04.05.2022 г.

Контакты: lenivko@brsu.brest.by (Ленивко Светлана Михайловна)

#### ***Lenivko S. M.* INTRODUCTION TO IN VITRO CULTURE OF LATERAL BUDS OF ROSES OF VARIOUS GARDEN GROUPS**

*The article discusses the infection and regenerative ability of lateral buds of 26 cultivars of roses from 6 garden groups at the stage of introduction to in vitro culture. It is shown that the contamination of primary explants of rose cultivars in protected ground is lower compared to roses in open ground. It has been established that the activation of meristems and the formation of shoots are determined by the cultivar genotype.*

**Keywords:** varieties of roses, lateral buds, infection, regenerative ability.

УДК 633.7:58

## ЭКСТРАКЦИЯ ЛЕТУЧИХ ОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ ИЗ МЯТЫ ПЕРЕЧНОЙ

**В. А. Седакова**

кандидат технических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

**В. И. Пылькова**

студент 4 курса

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

**Р. В. Орлов**

студент 3 курса

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

*В статье приведены экспериментальные данные по экстракции летучих органических соединений из сушеных листьев мяты перечной. Параметры экстракции, позволяющие получать максимальное количество экстрактивных веществ, определялись на основе ортогонального планирования эксперимента. Проведено газохроматографическое определение компонентного состава полученных экстрактов на полярной и неполярной кварцевых колонках, с помощью индексов удерживания идентифицированы экстрагированные летучие органические вещества.*

**Ключевые слова:** экстракция, мята перечная, газовая хроматография, индексы удерживания, растительные экстракты.

### Введение

Издавна люди используют природное сырье в пищевых и лечебных целях. Одними из первых жители Востока начали готовить лекарства из мяты перечной, вследствие чего эту тенденцию перенял весь мир. Высокий интерес к перечной мяте, по-видимому, связан с основным ее действующим компонентом – ментолом. Благодаря своим свойствам его применяют в различных отраслях промышленности, таких как пищевая, фармакологическая, косметическая.

В листьях мяты содержится не менее 2 % эфирного масла, состоящего из ментола и его эфиров, главным образом изовалериановой и уксусной кислот. Кроме того, в листьях содержатся органические кислоты, дубильные вещества, флавоноиды, каротин, бетаин, гесперидин, микроэлементы (медь, марганец, стронций и др.) и другие химические соединения. Главным компонентом эфирного масла мяты перечной является ментол. Ментол – органическое вещество, важный вторичный метаболит растений семейства яснотковые, получают синтетически или выделяют из мятного эфирного масла [1]. Ментол ценится своими полезными для организма свойствами, такими как слабое обезболивающее, антибактериальное, болеутоляющее, успокоительное, спазмолитическое и т.д. Высокие концентрации ментола токсичны для организма при внутреннем употреблении, могут вызвать аллергию [2].

В эфирном масле мяты содержание ментола варьируется от 50 до 92 % и зависит как от вида мяты (наибольшее количество ментола обнаруживается у мяты

перечной), так и места выращивания, климатических особенностей, сроков уборки и стадии вегетации, длительности и условий хранения сырья [3]. Поэтому важной задачей при переработке растительного сырья является определение качественного и количественного состава на всех этапах процесса. Для получения эфирного масла ментола из мяты используют экстракцию – извлечения вещества из раствора или сухой смеси с помощью подходящего растворителя (экстрагента). Для извлечения из смеси применяются растворители, не смешивающиеся с этой смесью.

Целью настоящей работы было исследование процесса экстракции водно-спиртовыми растворами при различных режимных параметрах измельченных листьев мяты перечной с использованием экстрактора Сокслета.

**Материалы и методы.** Объектами исследования были измельченные листья мяты перечной, различной формы, проходящие сквозь сито (5600). Цвет листьев от светло-зеленого до темно-зеленого или коричневатого-зеленого, экстракты мяты перечной [4].

Для проведения эксперимента использовали ортогональный план исследования 3-х факторов на 3-х уровнях [5; 6; 7], построенный на основе 2-х стандартный (упорядоченных) и одного латинского квадрата  $3 \times 3$  (таблица 1).

Таблица 1 – Ортогональный план исследования 3-х факторов на 3-х уровнях

№	Продолжительность эксперимента (циклы)	Концентрация экстрагента (этилового спирта в %)	Масса экстрагируемого сырья, г
1	3	55	1,5
2	3	75	2
3	3	96	2,5
4	2	55	2
5	2	75	2,5
6	2	96	1,5
7	1	55	2,5
8	1	75	1,5
9	1	96	2

В качестве исходных параметров были выбраны количество циклов экстракции от 1 до 3, концентрация спиртового раствора от 55 до 96 % и масса экстрагируемого сырья от 1,5 до 2,5 г. В качестве выходных параметров для оценки экстракции – показатель преломления экстрагента до и после экстракции и массу экстрагированных веществ.

Идентификацию экстрагируемых компонентов проводили с помощью метода газовой хроматографии на хроматографе Хроматэк Кристалл-5000 с пламенно-ионизационным детектором с использованием 2-х кварцевых капиллярных колонок:

неполярная – длиной 100 м, внутренним диаметром 0,25 мм, с неподвижной фазой – пленка 100 % диметилполисилоксан; толщина пленки – 0,5 мкм (производитель «Текноктома», Испания). Хроматографирование проводили в изотермическом режиме при следующих параметрах:

температура термостата – 160 °С;

температура испарителя и детектора – 230 °С;

расход газа-носителя составлял, см<sup>3</sup>/мин: 30, водорода – 20, воздуха – 200.

Ввод пробы осуществлялся с делением потока газа-носителя (коэффициент деления 1 : 30).

Объем вводимой пробы составлял 1 мкл;

полярная длиной – 50 м и внутренним диаметром 0,32 мм, неподвижная фаза – пленка сополимера полиэтиленгликоля с 2-нитротерефталевой кислотой (CR FFAP); толщина пленки 0,5 мкм. Производитель «Хроматэк», Россия. Хроматографирование проводили в изотермическом режиме при следующих параметрах:

температура термостата – 110 °С;

температура испарителя и детектора – 230 °С;

расход газа-носителя составлял, см<sup>3</sup>/мин: 30, водорода – 20, воздуха – 200.

Ввод пробы осуществлялся с делением потока газа-носителя (коэффициент деления 1 : 30).

Объем вводимой пробы составлял 1 мкл;

Обработка результата проводилась с использованием программного обеспечения «Хроматэк – Аналитик 3.0». Базы данных с результатами исследования формировались с использованием MS Excel и проводились расчеты индексов удерживания [8; 9; 10; 11].

Результаты и их обсуждение.

Экспериментальные данные, полученные в соответствии с планом эксперимента, представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Экспериментальные данные экстракции мяты перечной

№	Показатель преломления света (n)		Масса экстрагируемого сырья, г		Масса экстрагируемых веществ
	До экстракции	После экстракции	До экстракции	После экстракции	
1	1,3629	1,3631	1,5	1,32	0,18
2	1,3648	1,3669	2	1,55	0,45
3	1,3650	1,3664	2,5	2,35	0,15
4	1,3629	1,3631	2	1,56	0,44
5	1,3648	1,3667	2,5	2,04	0,46
6	1,3650	1,3665	1,5	1,42	0,08
7	1,3629	1,3635	2,5	1,88	0,62
8	1,3648	1,3668	1,5	1,25	0,25
9	1,3650	1,3656	2	1,68	0,32

Для обработки экспериментальных данных находили логарифм от средних значений коэффициента преломления (n): наибольшие одинаковые значения количество циклов экстракции задано в 1,2 и 3 опытах. По полученным экспериментальным n для этих опытов вычисляли средний логарифм коэффициента преломления и потенцировали результат, такие же действия проводим для количества циклов экстракции в 4,5,6 и 7,8,9 опытах. Аналогичные расчеты проводили для концентрации спирта и массы экстрагируемого сырья. Обработанные экспериментальные данные представлены в таблицах 3 и 4.

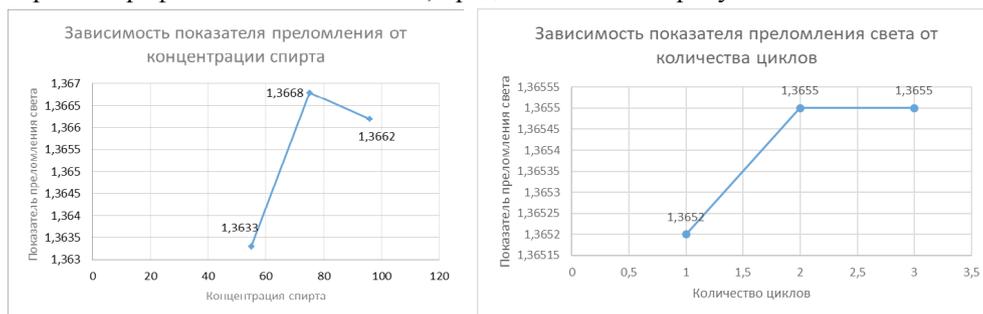
Таблица 3 – Среднее значение N в зависимости от количества циклов экстракции, концентрации спирта и массы экстрагируемого сырья

Количество циклов экстракции	n <sub>среднее</sub>	Концентрация спирта	n <sub>среднее</sub>	Масса экстрагируемого сырья	n <sub>среднее</sub>
1	1,3652	55	1,3633	1,5	1,3655
2	1,3655	75	1,3668	2	1,3652
3	1,3655	96	1,3662	2,5	1,3655

Таблица 4 – Среднее значение  $m_{\text{экстр.в-ва}}$  в зависимости от количества циклов экстракции, концентрации спирта и массы экстрагируемого сырья

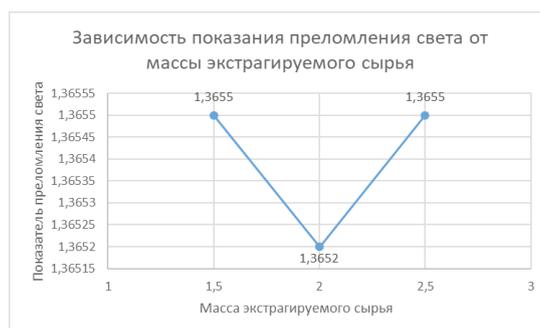
Количество циклов экстракции	$m_{\text{экстр.в-ва}}$	Концентрация спирта	$m_{\text{экстр.в-ва}}$	Масса экстрагируемого сырья	$m_{\text{экстр.в-ва}}$
1	0,369	55	0,366	1,5	0,154
2	0,251	75	0,372	2	0,398
3	0,231	96	0,157	2,5	0,349

Для определения математической зависимости по обработанным данным построены графические зависимости, представленные на рисунках 1 и 2.



а

б



в

Рисунок 1 – Зависимость показателя преломления экстракта от входных параметров: а – от количества циклов экстракции, б – от концентрации спирта, в – от массы экстрагируемого сырья

Из данных, представленных на рисунке 1, видно, что показатель преломления света зависит от выбранных режимных параметров. При увеличении количества циклов экстракции с 1 до 2 показатель преломления увеличивается с 1,3652 до 1,3655, и далее не изменяется. Максимальный показатель преломления (1,3668) наблюдается при концентрации спирта равной 75%. При массе экстрагируемого сырья, равного 1,5 и 2,5 грамма, показатель преломления одинаковый и принимает максимальное значение 1,3655.

Исходя из представленных данных, можно сделать вывод, что для достижения максимального показателя преломления, что по-видимому соответствует максимальному извлечению экстрактивных веществ, оптимальными условиями будут: спирт с концентрацией 75%, количество циклов экстракции равное 2 или 3, масса экстрагируемого сырья – 1,5 или 2,5 грамма.

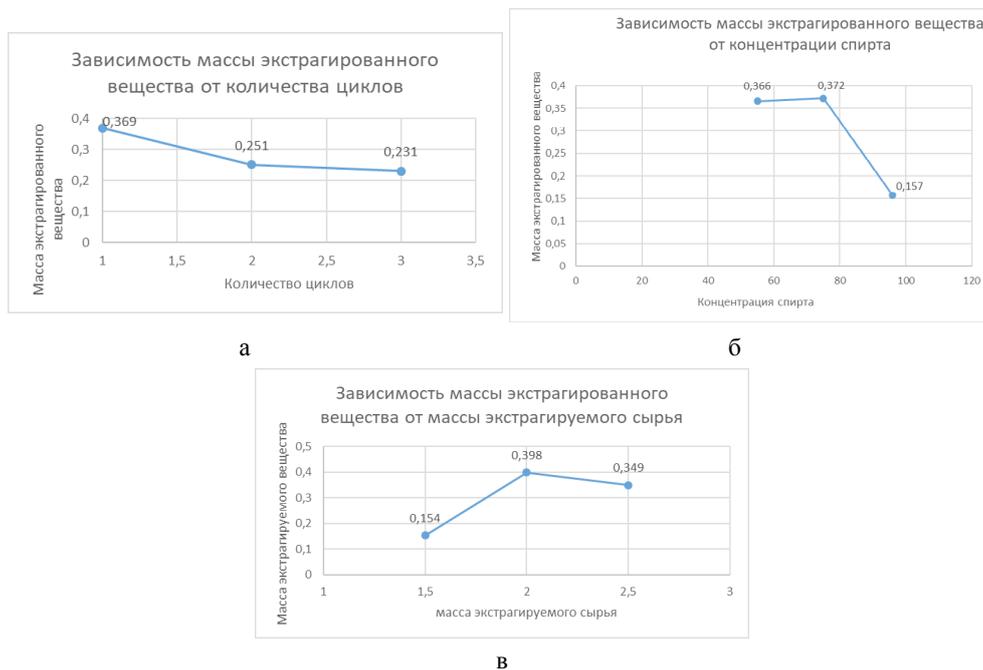


Рисунок 2 – Зависимость массы экстрагированного вещества от входных параметров: а – от количества циклов экстракции, б – от концентрации спирта, в – от массы экстрагируемого сырья

Из данных, представленных на рисунке 2, видно, что масса экстрагируемых веществ изменяется в зависимости от выбранных входных параметров. С увеличением количества циклов экстракции масса экстрагированного вещества снижается с 0,369 г до 0,231 г. С увеличением концентрации спирта с 55 до 75 % масса экстрактивных веществ немного возрастает с 0,366 г до 0,372 г, достигая максимума при 75 %, а затем снижается до 0,157. С увеличением массы экстрагируемого сырья с 1,5 г до 2 г масса экстрагируемых веществ увеличивается до 0,398 г, а затем уменьшается до 0,349 г.

Максимальная масса экстрагируемого вещества наблюдается при следующих режимных параметрах: количество циклов экстракции – 1, концентрации спирта – 75 %, масса экстрагируемого сырья – 2 грамма. Следовательно, эти данные нужно применять для того, чтобы получить максимальный показатель массы экстрагируемого вещества.

Экспериментальные данные по компонентному составу полученных экстрактов приведены в таблицах 5 и 6.

Таблица 5 – Хроматографические данные, полученные на полярной колонке

№ пика	Среднее время удерживания	Индексы, посчитанные графическим методом	Индексы, посчитанные расчётным методом	Предполагаемое название исследуемого компонента
1	4,463	733	733	Изопропилпропионат
2	4,681	846	846	Цис-гексен-3-ол-1
3	4,832	897	896	Амилацетат
4	8,244	1237	1236	П-мент-6-ен-2-ол
5	18,641	1463	1463	σ-декалактон
6	19,282	1471	1471	Амилоктаноат

Как видно из представленных данных, в экстрактах были обнаружены и идентифицированы 6 компонентов, из которых 4 компонента относятся к сложным эфирам изопропилпропионат, амилацетат, амилоктаноат,  $\sigma$ -декалактон; 2 компонента к спиртам – цис-гексен-3-ол-1, п-мент-6-ен-2-ол.

Таблица 6 – Хроматографические данные, полученные на неполярной колонке

№ пика	Среднее время удерживания	Индексы, посчитанные графическим методом	Индексы, посчитанные расчетным методом	Предполагаемое название исследуемого компонента
1	32,542	997	997	Бутилформиат
2	32,744	1053	1052	3-метилбутанол
3	41,382	1163	1162	Амилацетат
4	42,209	1173	1172	Метиламилкетон
5	42,812	1180	1180	Изоамилпропионат
6	44,309	1198	1197	Пропилвалерат
7	54,854	1289	1290	Изоамилизовалерат

Из данных, представленных в таблице 6, видно, что в экстрактах на неполярной колонке идентифицировано семь веществ, из которых 5 являются сложными эфирами: бутилформиат, амилацетат, изоамилпропионат, пропилвалерат, изоамилвалерат, 1 спирт – 3-метилбутанол и 1 кетон – метиламилкетон.

Анализируя компонентный состав полученных экстрактов, можно сказать, что в основном при данных условиях экстрагирования водно-спиртовыми растворами в экстракт преимущественно переходят сложные эфиры и в меньшей степени спирты.

### Заключение

В результате проведенных исследований экстракции мяты перечной на основании ортогонального планирования эксперимента установлены оптимальные режимные параметры экстракции с целью максимального извлечения экстрактивных веществ:

- количество циклов экстракции равно 2;
- концентрации спирта равной 75%;
- массе экстрагируемого сырья равной 2,5 грамма.

Хроматографический анализ компонентного состава полученных экстрактов позволил идентифицировать 12 летучих органических соединений 8 сложных эфиров, 3 спирта и 1 кетон.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Старый лекарь //Эфирное масло мяты перечной, свойства и применение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.old-lekar.com](http://www.old-lekar.com). – Дата доступа: 24.11.2021.
2. Словари, химическая энциклопедия // Ментол [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [www.tmu-dict.ru](http://www.tmu-dict.ru). – Дата доступа: 20.11.2021 и 25.11.2021.
3. *Шайдулина, Г. М.* Хромато-масс-спектрометрический анализ при производстве ароматообразующих композиций с использованием эфирных масел мяты / Г. М. Шайдулина // Пищевая промышленность. – 2005. – № 5. – С.16–19.
4. *Тюкавкина, Н. А.* Руководство к лабораторным занятиям по биоорганической химии : пособие для вузов / Н. Н. Артемьева, В. Л. Белобородов, С. Э. Зурабян [и др.] ; под ред. Н. А. Тюкавкиной. – 4-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2008. – 318 с.
5. *Грачев, Ю. П.* Математические методы планирования экспериментов / Ю. П. Грачев. – М. : Пищевая промышленность, 1979. – 200 с.

6. **Налимов, В. В.** Теория эксперимента / В. В. Налимов. – М : Наука, 1971. – 208 с.
7. **Шенк, Х.** Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк. – М. : Мир, 1972. – 151 с.
8. **Царев, Н. И.** Практическая газовая хроматография : учебно-методическое пособие для студентов химического факультета по спецкурсу «Газохроматографические методы анализа» / Н. И. Царев, В. И. Царев, И. Б. Катраков. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2000. – 156 с.
9. **Винарский, В. А.** Хроматография [Электронный ресурс] : курс лекций в двух частях : Часть 1. Газовая хроматография. – Электрон. текст. дан. (4,1 Мб). – Мн. : Научно-методический центр «Электронная книга БГУ», 2003. – Режим доступа: <http://anubis.bs.u.by/publications/elresources/Chemistry/vinarski.pdf>.
10. Система индексов удерживания Ковача – наиболее удобный способ выражения данных по удерживанию в газовой хроматографии (сокращенный перевод статьи Этте Л. С.) // Успехи химии. – 1966. – Т. XXXV. – Вып. 10. – С. 1883–1895.
11. **Седакова, В. А.** Возможность определения компонентов растительных экстрактов с помощью индексов удерживания / В. А. Седакова, А. В. Клебанов, В. Б. Луковская, Е. В. Седаков, В. Д. Рафеенко // Вестник МГУ имени А.А. Кулешова. Серия В. Естественные науки. – 2022. – №1(59). – С. 71–80.

Поступила в редакцию 18.05.2022 г.

Контакты: [sedakova@msu.by](mailto:sedakova@msu.by) (Седакова Валентина Антоновна), [vpylkova@mail.ru](mailto:vpylkova@mail.ru) (Пылькова Виталина Игоревна), [romanorlovchem@gmail.com](mailto:romanorlovchem@gmail.com) (Орлов Роман Валерьевич)

#### ***Sedakova V. A., Pylkova V. I., Orlov R. V.* EXTRACTION OF VOLATILE ORGANIC COMPOUNDS FROM PEPPERMINT**

*The article presents experimental data on the extraction of volatile organic compounds from dried peppermint leaves. The extraction parameters that allow obtaining the maximum amount of extractive substances have been determined applying the orthogonal design of the experiment. The gas chromatographic determination of the component composition of the obtained extracts has been carried out on polar and non-polar quartz columns, and the extracted volatile organic substances have been identified using retention indices.*

**Keywords:** extraction, peppermint, gas chromatography, retention indices, plant extracts.

УДК 616-097

## ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ИММУННОЙ СИСТЕМЫ ДЕТЕЙ ПРИ ПОВТОРНЫХ ИНФЕКЦИЯХ ДЫХАТЕЛЬНЫХ ПУТЕЙ

**О. В. Поворова**

старший преподаватель

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

**Т. И. Чегерова**

кандидат технических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

**В. Г. Чегеров**

магистрант

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

*В предлагаемом методе комплексной оценки иммунного статуса рассчитываются интегральные показатели частных критериев, характеризующие состояние клеточного и гуморального иммунитета, а также глобальный критерий, характеризующий в целом состояние иммунитета. Изучение иммунного статуса проводилось у детей с повторными респираторными заболеваниями более шести раз в год ( $n = 683$ ), здоровых на момент обследования. С увеличением возраста детей снижается частота отклонений от диапазона референсных значений глобального критерия «иммунный статус», частного критерия «субпопуляции лимфоцитов»; увеличивается частота отклонений от нормы показателей частного критерия «сывороточные иммуноглобулины». Среди частных критериев, характеризующих иммунитет, самый высокий средний процент отклонений от нормы определен по показателям клеточного иммунитета.*

**Ключевые слова:** повторные респираторные заболевания детей 1–16 лет, содержание сывороточных иммуноглобулинов, содержание субпопуляций лимфоцитов.

### Введение

Р. В. Петровым (1984 г.) была предложена первая методология оценки иммунной системы, на основании которой все методы иммунодиагностики разделены на уровни 1-го и 2-го порядка. На первом этапе выявляются значимые изменения в иммунной системе с помощью ориентировочных тестов первого уровня: определение общего количества лейкоцитов и лимфоцитов в периферической крови; определение Т-лимфоцитов методом Е-РОК и В-лимфоцитов методами ЭМ-РОК, ЕАС-РОК в периферической крови; определение фагоцитарной активности лейкоцитов; определение концентрации сывороточных IgG, IgM, IgA; определение циркулирующих иммунных комплексов; определение гемолитической активности комплемента. На втором этапе устанавливаются механизмы изменений иммунной системы с помощью аналитических тестов второго уровня, определяющих функциональную активность показателей клеточного иммунитета: определение поверхностных маркеров, анализ пролиферативного ответа мононуклеарных клеток. Исследование иммунного статуса по отдельным параметрам не позволяет оценить иммунную систему как единое целое, так как состояние иммунитета – это интегральное многофакторное понятие. При традиционной оценке иммунного статуса измеряется большое число параметров, большинство из которых не имеет

© Поворова О. В., Чегерова Т. И., Чегеров В. Г., 2022

самостоятельного интерпретационного и диагностического значения в силу наличия между ними многомерных взаимосвязей.

Исследования с комплексной характеристикой иммунного статуса детского населения не многочисленны [1; 2; 3], основной причиной чему является сложность интерпретации данных клинических анализов из-за различий нормирования показателей по возрастному показателю, единицам измерения, особенностям лабораторного определения, а также биологических, географических, экологических особенностей объектов исследования [4; 5; 6; 7]. Все это диктует необходимость разработки методов оценки общего состояния иммунной системы. Для оценки общего иммунологического статуса рекомендуется отбирать наиболее простые [8], но вместе с тем и наиболее достоверные показатели, которые позволяли бы судить одновременно о суммарной эффективности работы всех систем иммунитета в целом. Ю. И. Зимин для оценки общего состояния иммунной системы рекомендуют использовать определение числа Т- и В-лимфоцитов в крови, уровень иммуноглобулинов IgA, IgM и IgG в крови [9]. Более глубокие исследования механизмов работы иммунной системы человека возможны с помощью выявления фенотипов лимфоцитов, количества Т-хелперов, Т-супрессоров, киллерных клеток, реактивности на антиген, содержание компонентов комплемента, секреторных IgA, IgE, IgD и т.д. Сдвиги в соотношении отдельных составляющих иммунных реакций могут свидетельствовать о формировании иммунологической недостаточности и, как следствие, формировании вторичных иммунодефицитов.

Для оценки состояния иммунитета в целом рекомендуют системный математический анализ. А. А. Останин, Е. Л. Гельфгат и др. [10; 11] предлагают сжимать многочисленные малоинформативные «рутинные» лабораторные показатели иммунного статуса до новых, интегрированных параметров, выраженных в величинах главных компонент. Интегрированные показатели одновременно могут учитывать величину, характер взаимосвязей всех компонент иммунитета, ранжировать новые системные признаки по степени их значимости в зависимости от доли описываемых ими процессов, поэтому являются более информативными в плане оценки состояния иммунной системы и могут быть использованы в исследовательских, диагностических целях [12]. В предлагаемом нами методе комплексной оценки иммунного статуса рассчитываются интегральные показатели частных критериев, характеризующие состояние клеточного и гуморального иммунитета, а также глобальный критерий, характеризующий в целом состояние иммунитета.

**Цель исследования** – комплексная оценка иммунного статуса детей при повторных острых инфекциях верхних и нижних дыхательных путей.

#### **Материалы и методы исследований**

Объект исследования – здоровые дети на момент изучения иммунного статуса ( $n = 683$ ) с повторными респираторными заболеваниями более шести раз в год, проходившие обследование в УЗ «Могилевский областной лечебно-диагностический центр» (УЗ «МОЛДЦ»), УЗ «Минская областная детская клиническая больница» (УЗ «МОДКБ»). Оценка иммунного статуса проводилась в трех группах: группа 1 (ГР1,  $n = 40$ ) – дети, страдающие аллергическими заболеваниями (бронхиальная астма, аллергический ринит); группа 2 (ГР2,  $n = 93$ ) – дети, имеющие пневмонии помимо острых инфекций дыхательных путей в анамнезе в год исследования; группа 3 (ГР3,  $n = 550$ ) – дети с острыми респираторными заболеваниями.

Предмет исследования – содержание девяти показателей иммунного статуса (содержание лейкоцитов, лимфоцитов, IgA, IgM, IgG, CD3+, CD3+CD4+, CD3+CD8+, CD3-CD19+ лимфоцитов) в периферической крови, которые могут быть определены более простыми иммунологическими реакциями первого уровня, не требующими высокотратных расходных материалов и оборудования. Методы исследований показателей иммунитета: метод проточной цитометрии («Beckman Coulter's Navios»), иммуноферментный анализ («Hitachi 912» УЗ «МОДКБ»; «Tecan» УЗ «МОЛДЦ»). Каждый из показателей имеет определенные границы референсных значений (PЗ) для здоровых детей возраста 1–16 лет, поэтому с учетом возрастных и лабораторных особенностей нормирования показателей иммунитета в данных учреждениях здравоохранения [13, 14] рассчитаны функции желательности по отношению к PЗ. Функция желательности (принадлежности) математического аппарата теории нечетких множеств позволяет переводить абсолютные значения показателей в относительные, учитывающие возрастные особенности отклонений от нормы, особенности лабораторного исследования и др., поэтому могут быть унифицированы и использованы для результатов любых исследований при анализе иммунного статуса.

Функция желательности принимает значения от нуля (гарантированная патология – недопустимое значение) до единицы (норма). Для расчета функции желательности каждого показателя иммунитета учитываются четыре опорные точки: верхний и нижний уровень его PЗ, минимальные и максимальные его значения в определенной возрастной группировке детей [13]. Все изучаемые показатели были разделены на три группы с учетом последовательности проведения лабораторного анализа (общий анализ крови, иммунологические тесты 1-го и 2-го уровней). В первой группе (g1) анализировалось содержание лейкоцитов, лимфоцитов; во второй группе (g2) – содержание сывороточных общих иммуноглобулинов; в третьей группе (g3) – содержание субпопуляций лимфоцитов (Таблица 1).

В соответствии с группировкой исходных данных (Таблица 1) была построена двухуровневая иерархическая структура [15] с агрегированием на каждом выделенном уровне по выбранной формуле свертки. Для свертки существуют различные способы, которые выбираются в зависимости от цели и задач исследования, такие как критерий максимального пессимизма, мультипликативная, аддитивная свертки. Вид свертки определяется как поставленной задачей, так и ее чувствительностью к изменению исходных данных [12]. Для индивидуальной диагностики наиболее подходящей является мультипликативная свертка:

$$G = \mu_1^{\alpha_1} * \mu_2^{\alpha_2} * \dots * \mu_n^{\alpha_n},$$

где  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  – функции желательности исследуемых характеристик;  $n$  – общее число показателей исследуемой системы;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – коэффициенты относительной важности отдельных показателей качества исследуемой системы для оценки ее качества в целом. Значения коэффициентов относительной важности  $\alpha_i$  были приняты равными 1 (единице) в связи с объективностью значимости всех изучаемых показателей в формировании иммунного гомеостаза.

### Результаты исследований

Для построения функции желательности каждого изучаемого показателя необходимы минимальные и максимальные его значения в определенной возрастной выборке. Разными лабораториями используются различные возрастные группи-

ровки. В клиничко-диагностической лаборатории УЗ «МОДКБ» показатели гуморального иммунитета нормируются без возрастных разбивок, показатели клеточного иммунитета – в двух группах [14]. В отделе клинической иммунологии УЗ «МОЛДЦ» используется семь возрастных групп для нормирования содержания IgA; шесть – для IgG, IgM; две – для показателей клеточного иммунитета [13]. На примере содержания IgA у детей ГРЗ, определяемых в УЗ «МОЛДЦ» ( $n = 512$ ). С такой возрастной разбивкой была выявлена несостоятельность идеи определения крайних точек функции желательности с большим числом возрастных групп (Рисунок 1, А). Как видно из Рисунка 1 А, границы РЗ (НН и ВН), более или менее плавные и возрастают по мере увеличения возраста. Минимальные и максимальные значения показателя IgA, полученные в результате исследования в каждой возрастной группе и представленные на графике имеют неоправданно изломанный характер. Это объясняется разными по количеству объемами групп в каждом возрасте (от 20 до 68 детей) и случайным характером полученных значений IgA. Для определения минимальных и максимальных значений, на основе которых рассчитывались опорные точки  $x_1$  и  $x_4$ , данные обследования были объединены по возрастным группам, рекомендованным ВОЗ, то есть на 4 диапазона: 1–3, 4–7, 8–12, 13–16 лет. При такой разбивке исследуемой выборки подгруппы получаются достаточно большими (около 100 в каждой), что позволяет избежать неравномерностей, вызванных ошибками репрезентативности в линиях минимальных и максимальных значений измеряемых показателей (Рисунок 1, Б).

Объединение мелких возрастных диапазонов в более крупные необходимо еще и для того, чтобы унифицировать использование результатов содержания изучаемых показателей, определяемых другими методами лабораторного анализа с другими диапазонами РЗ. В Таблице 2 приведены РЗ для всех изучаемых параметров иммунитета ( $x_2$  и  $x_3$ ), процент отклонения минимальных ( $x_1$ ) и максимальных ( $x_4$ ) значений от границ РЗ, минимальные и максимальные значения показателей на примере детей ГРЗ, проходивших обследование в УЗ «МОЛДЦ».

Процент отклонения показателя иммунитета от РЗ показывает разницу между нормой и его минимальным/максимальным значением в определенной выборке, влияет на длину отрезка между опорными точками  $x_1$  и  $x_2$ ,  $x_3$  и  $x_4$  при расчете функции желательности показателей иммунитета [13]. Значения величин возможного отклонения показателей иммунитета от нормы необходимы методологически для данного алгоритма оценки иммунного статуса, а также имеют практическую значимость не только для клинической медицины, но и для популяционной иммунологии. Как видно из значений процента отклонений Таблицы 2, существует широкая переходная зона между нормой и крайними значениями показателей у клинически здоровых детей на момент обследования. Так, например, представляет интерес тот факт, что дети 1–3 лет имеют 3–6% отклонения от нормы по содержанию общих IgG, а с увеличением возраста детей процент отклонения увеличивается в 6–16 раз. У детей 8–12, 13–16 лет по сравнению с 1–3, 4–7-летними в два раза снижается процент отклонения от верхней границы нормы содержания CD3+CD8+, CD3+лимфоцитов и в четыре раза снижается от нижней границы нормы процент отклонения содержания CD3-CD19+лимфоцитов. Закономерности изменений иммунного статуса требуют масштабных исследований, поэтому предложенный метод оценки состояния иммунной системы позволяет использовать не только количественную и качественную информацию, но и статистическую, полу-

ченную от экспертов по источникам специализированной литературы благодаря унифицированности различной информации в виде функций желательности.

Таким образом, с учетом объединения возрастных групп детей по рекомендациям ВОЗ на представленных примерах показана методика оценки отдельных показателей иммунитета, позволяющая количественно оценить их степень выраженности (желательности) по отношению к границам норм. Предложен подход к математической формализации значений различных показателей иммунитета через расчет их функции принадлежности, который позволяет рассчитать интегральный показатель оценки иммунного статуса.

Далее был проведен анализ рассчитанных частных критериев  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  и глобального интегрального показателя  $G$  иммунного статуса в группах детей с различными заболеваниями. По значениям интегральных показателей среди детей 1–16 лет между ГР1, ГР2, ГР3 выявлены статистически значимые различия:

- $G$  – глобальный критерий «иммунный статус»:  $H = 22,65$   $p = 0,0000$ ;
- $g_1$  – частный критерий «лейкоциты, лимфоциты»:  $H = 11,88$   $p = 0,0026$ ;
- $g_2$  – частный критерий «сывороточные иммуноглобулины»:  $H = 24,54$   $p = 0,0000$ ;
- $g_3$  – частный критерий «субпопуляции лимфоцитов»:  $H = 48,54$   $p = 0,0000$ .

Для полученных значений частных и интегрального показателя иммунного статуса в каждой изучаемой группе был рассчитан средний процент их отклонений от нормы в изучаемых группах детей (Рисунок 2).

Средний процент отклонения от нормы интегрального показателя «иммунный статус» выявлен у детей ГР3 ( $G = 0,179$  или 82,1%), что в 1,2 раза больше по сравнению с ГР2 ( $G = 0,317$  или 68,3%) и в 1,4 раза по сравнению с ГР1 ( $G = 0,409$  или 59,1%). Среди трех групп детей самый высокий средний процент отклонений от РЗ определен по показателям клеточного иммунитета, который выше в ГР3 ( $g_3 = 0,27$  или 73%) в 1,7 раз по сравнению с ГР2 ( $g_3 = 0,564$  или 43,6%) и в 2 раза по сравнению с ГР1 ( $g_3 = 0,658$  или 34,2%). В ГР3 выявлен самый низкий средний процент отклонений от нормы по гуморальному блоку иммунитета ( $g_2 = 0,878$  или 12,2%), при этом в ГР2 ( $g_2 = 0,754$  или 24,6%) и ГР1 ( $g_2 = 0,792$  или 20,8%) средний процент содержания сывороточных иммуноглобулинов за пределами диапазонов РЗ выше в 2 и 1,7 раза. В ГР1 определен самый низкий средний процент отклонений от нормы содержания лейкоцитов, лимфоцитов и субпопуляций лимфоцитов. В ГР2 определен самый высокий средний процент отклонений от нормы по показателям гуморального иммунитета.

Таким образом, среди детей 1–16 лет определены статистически значимые отличия по глобальному критерию «иммунный статус», по частным критериям «лейкоциты, лимфоциты», «сывороточные иммуноглобулины», «субпопуляции лимфоцитов». Доля детей с показателями вне РЗ в ГР3 по сравнению с ГР2 и ГР1: выше по глобальному критерию иммунитета в 1,2 и 1,4 раза; выше по частному критерию «субпопуляции лимфоцитов» в 1,7 и 2 раза; ниже по частному критерию «сывороточные иммуноглобулины» в 2 и 1,7 раз, соответственно. Средние значения глобального и частных критериев в группах детей с разными заболеваниями в выделенных возрастных диапазонах представлены в Таблицах 3–5.

У 59% детей 1–16 лет ГР1 выявлены отклонения интегрального показателя состояния иммунитета, при этом между четырьмя возрастными группами не определены статистически значимые отклонения ( $H = 2,38$   $p = 0,4968$ ). Среди детей 1–3

лет больше всего (82,6%) определено отклонений по интегральному показателю «иммунный статус», меньше всего – у детей 4–7 лет (45,7%). Не выявлено статистически значимых различий влияния фактора «возраст» на величины частных критериев  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  у детей ГР1. Таким образом, среди детей ГР1 отсутствуют значимые различия в отклонении иммунитета в зависимости от возраста.

У 68% детей ГР2 выявлены отклонения интегрального показателя состояния иммунитета, при этом между четырьмя возрастными группами не определены статистически значимые отклонения ( $H = 2,12$   $p = 0,5473$ ). Среди детей 13–16 лет определена самая низкая доля (57%) с отклонением интегрального показателя иммунного статуса.

В ГР2 определены статистически значимые отличия среди возрастных групп по частному критерию «субпопуляции лимфоцитов». Парное сравнение возрастных групп по показателю  $g_3$  выявило пятикратное превышение отклонений в возрастной группе 4–7 лет по сравнению с 13–16-летними детьми (52% и 11% детей, соответственно, имели значения частного критерия «субпопуляции лимфоцитов» вне диапазона РЗ). Таким образом, доля детей ГР2 с отклонениями от норм содержания субпопуляций лимфоцитов с возрастом уменьшается.

У 82% детей 1–16 лет ГР3 выявлены статистически значимые отклонения ( $p = 0,0001$ ) по глобальному критерию «иммунный статус» в зависимости от возрастного фактора. Самая высокая доля детей с отклонениями по комплексному показателю иммунитета выявлена среди детей 1–3 и 4–7 лет. Так, среди детей 1–3 лет (90%) выше доля отклонений по интегральному показателю иммунного статуса в 1,3 раза по сравнению с возрастными группами 8–12 и 13–16 лет (71 и 72%). Среди детей 4–6 лет (89%) по сравнению с 8–12 и 13–16-летними выше в 1,3 и 1,2 раза частота встречаемости интегрированного показателя иммунитета вне диапазона РЗ. Определены статистически значимые различия в четырех анализируемых возрастных группах по частным критериям  $g_2$  и  $g_3$ . С увеличением возраста детей выявлено значимое снижение частоты встречаемости показателей вне диапазона РЗ клеточного иммунитета ( $g_3$ ) и увеличение частоты показателей гуморального иммунитета ( $g_2$ ) за пределами РЗ. Так, по показателям клеточного иммунитета определено, что среди детей 1–3 лет (84%) в 1,9–2 раза выше доля детей с отклонениями по сравнению с 8–12 и 13–16-летними (44 % и 41%); среди детей 4–7 лет (83%) определена та же закономерность по сравнению с теми же возрастными группами по содержанию субпопуляций лимфоцитов. По интегральному показателю, характеризующему состояние гуморального иммунитета, определено, что среди детей 1–3 лет (7%) ниже доля детей со значениями вне РЗ в 1,7 раз, 2,1 и 2,4 по сравнению с 4–7-летними, 8–12 и 13–16-летними детьми (12%, 15% и 17% соответственно). Таким образом, среди детей ГР3 доля детей с интегральным показателем иммунитета вне РЗ снижается с возрастом, при этом с возрастом ребенка выявлено снижение по показателям клеточного иммунитета, а по показателям гуморального иммунитета – увеличение доли детей со значением вне РЗ. В Таблице 6 представлены статистически значимые отличия по частным и глобальным показателям иммунитета в зависимости от возраста ребенка и анализируемых групп заболеваний.

Между ГР1, ГР2, ГР3 выявлены статистически значимые различия по глобальному критерию «иммунный статус» только у детей 1–3 и 4–7 лет, среди которых 85% и 84% детей, соответственно, имеют интегральный показатель иммунитета вне диапазона РЗ. Значимые различия по трем частным критериям  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  выявлены у

детей 4–7 лет; двум  $g_2$ ,  $g_3$  – у детей 1–3 лет, одному  $g_3$  – у детей 13–16 лет. У детей 8–12 лет не выявлены статистически значимые отличия по изучаемым критериям.

Доля детей с интегральным показателем состояния клеточного иммунитета  $g_3$  вне диапазона РЗ у детей 1–3 (74%) и 4–7 (76%) лет выше в 1,4 раза по сравнению с 8–12 (53%) и 13–16 (53%) летними детьми. На Рисунке 3 А наглядно представлены особенности частного критерия  $g_3$  у детей трех изучаемых групп в зависимости от возраста.

Значения частного критерия  $g_3$  ниже в ГРЗ:

- у детей 1–3 лет в 3,8 раз по сравнению с ГР1 и в 3,6 раза по сравнению с ГР2 ( $p = 0,0139$  и  $p = 0,0002$ ),

- у детей 4–7 лет в 4,5 раз по сравнению с ГР1 и в 2,9 раз по сравнению с ГР2 ( $p = 0,0006$  и  $p = 0,0259$ ),

- у детей 13–16 лет в 2,2 раза по сравнению с ГР2 ( $p = 0,0028$ ).

По частному критерию  $g_2$  выявлено единственное статистически значимое превышение в 1,3 раза ( $p = 0,0014$ ) у детей 1–3 лет в ГР3 по сравнению с ГР2.

### Заклучение

1. Предложен метод оценки иммунного статуса с использованием элементов теории нечетких множеств, а именно функции желательности. Функция желательности позволяет выразить в единой безразмерной шкале различные лабораторные показатели, а затем агрегировать их без потери существенной информации в интегральный, так называемый, глобальный критерий иммунного статуса. Расчет глобального критерия «иммунный статус» является удобным, быстрым и эффективным инструментом для оценки состояния иммунной системы у детей с повторными респираторными инфекциями как в случае индивидуальной диагностики, так и в популяционном исследовании.

2. Среди ГРЗ средний процент отклонения интегрального показателя «иммунный статус» от РЗ составляет 82,1%, что выше в 1,2 раза и в 1,4 раза по сравнению с ГР2 и ГР1 ( $p < 0,0001$ ). Среди частных критериев, характеризующих иммунитет, наибольший средний процент отклонений от нормы определен по показателям клеточного иммунитета. В ГР1 определен самый низкий средний процент отклонений от РЗ по содержанию лейкоцитов, лимфоцитов ( $p = 0,0026$ ) и субпопуляций лимфоцитов ( $p < 0,0001$ ). В ГР2 самый высокий средний процент отклонений от РЗ по показателям гуморального иммунитета ( $p < 0,0001$ ). По частным критериям, характеризующим клеточный и гуморальный иммунитет, средний процент отклонений от РЗ в ГР3 по сравнению с ГР2 и ГР1: выше по «субпопуляциям лимфоцитов» в 1,7 и 2 раза ( $p < 0,0001$ ); ниже по «сывороточным иммуноглобулинам» в 2 и 1,7 раз ( $p < 0,0001$ ), соответственно.

3. По частному критерию «сывороточные иммуноглобулины» выявлено единственное статистически значимое превышение в 1,3 раза ( $p = 0,0014$ ) у детей 1–3 лет в ГР3 по сравнению с ГР2. Значения частного критерия «субпопуляции лимфоцитов» ниже в ГР3:

- у детей 1–3 лет в 3,8 раз по сравнению с ГР1 и в 3,6 раза по сравнению с ГР2 ( $p = 0,0139$  и  $p = 0,0002$ ),

- у детей 4–7 лет в 4,5 раз по сравнению с ГР1 и в 2,9 раз по сравнению с ГР2 ( $p = 0,0006$  и  $p = 0,0259$ ),

- у детей 13–16 лет в 2,2 раза по сравнению с ГР2 ( $p = 0,0028$ ).

4. С увеличением возраста детей
- снижается частота отклонений глобального критерия «иммунный статус» (в 1,2–1,3 раза у детей 1–3 и 4–7 лет по сравнению с 8–12 и 13–16-летними ГРЗ,  $p < 0,0001$ ),
  - снижается частота отклонений от нормы показателей частного критерия «субпопуляции лимфоцитов» (в пять раз у 4–7-летних по сравнению с 13–16-летними ГР2,  $p = 0,0453$ ; в 1,9–2 раза у детей 1–3 и 4–7 лет по сравнению с 8–12 и 13–16 лет ГР3,  $p < 0,0001$ ),
  - увеличивается частота отклонений от нормы показателей частного критерия «сывороточные иммуноглобулины» (у 1–3-летних детей ГР3 ниже в 1,7 раз по сравнению с 4–7-летними,  $p = 0,0129$ ; в 2,1 раза – с 8–12-летними,  $p = 0,0005$ ; 2,4 раза – с 13–16-летними,  $p = 0,0075$ ).

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Feleszko, W.* Immunity-targeted approaches to the management of chronic and recurrent upper respiratory tract disorders in children / W. Feleszko, R. Marengo, A. S. Vieira // Clin Otolaryngol. – 2019. – Vol. 44, № 4. – P. 502–510. <https://doi.org/10.1111/coa.13335>
2. *Мамаджанова, Г. С.* Некоторые клинико-иммунологические аспекты у часто болеющих детей с гипотрофией / Г. С. Мамаджанова, З. К. Умарова, М. Д. Едгорова [и др.] // Вестник Авиценны. – 2017. – Т. 19, № 2. – С. 219–225.
3. *Клюева, С. Н.* Комплексный анализ корреляционных взаимосвязей между показателями гуморального и клеточного иммунитета у лиц, вакцинированных против чумы / С. Н. Клюева, С. А. Бугоркова, А. Ю. Гончарова и др. // Инфекция и иммунитет. – 2019. – Т. 9, № 1. – С. 135–146.
4. *Gonzalez-Quintela, A.* Serum levels of immunoglobulins (IgG, IgA, IgM) in a general adult population and their relationship with alcohol consumption, smoking and common metabolic abnormalities / A. Gonzalez-Quintela, R. Alende, F. Gude, et al. // Clin Exp Immunol. – 2008. – Vol. 151, №1. – P. 42–50. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2249.2007.03545.x>
5. *Quezada, A.* Specific antibody deficiency with normal immunoglobulin concentration in children with recurrent respiratory infections / A. Quezada, X. Norambuena, J. Inostroza, et. al. // Allergol Immunopathol (Madr). – 2014. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aller.2014.07.009>.
6. *Куляс, В. М.* Региональные особенности донозологических изменений секреторного иммунитета у детей урбанизированных территорий / В. М. Куляс, Д. Р. Садеков, А. В. Мельник, В. А. Мельник // Вестник гигиены и эпидемиологии. – 2018. – Т. 22, № 1. – С. 29–32.
7. *Требухов, А. В.* Особенности иммунного статуса у часто и длительно болеющих детей – жителей Алтайского края / А. В. Требухов, В. Ю. Жижелева, М. В. Мальцева, Н. А. Найдовская // Journal of Siberian Medical Science. – 2019. – № 4. – С. 30–40.
8. *Филиппова, О. Е.* Соотношение лимфоидных субпопуляций в иммунном ответе / О. Е. Филиппова // Вестник уральской медицинской академической науки. – 2014. – № 2. – С. 102–104.
9. *Зимин, Ю. И.* Иммунитет и стресс / Ю. И. Зимин. – М. : ВИНТИ, 1988. – 79 с.
10. *Останин, А. А.* Оценка состояния иммунитета и баланса цитокинов методами системного математического анализа (на примере больных с гнойно-хирургической патологией) / А. А. Останин, Е. Л. Гельфгат, О. Ю. Леплина [и др.] // Медицинская иммунология. – 2000. – Т. 2, № 3. – С. 279–290.
11. *Гельфгат, Е. Л.* Оптимизация оценки иммунного статуса человека на основе применения метода главных компонент / Е. Л. Гельфгат, А. А. Останин, Е. Р. Черных [и др.] // Медицинская иммунология. – 2002. – Т. 4, № 1. – С. 65–74.
12. *Чегерова, Т. И.* Особенности использования нечеткой логики в многокритериальной оценке качества / Т. И. Чегерова // Проблемы устойчивого развития регионов Республики Беларусь и сопредельных стран : сб. материалов IX Междунар. науч.-практ. интернет-конф., 1 июня – 30 сент. 2020 г., г. Могилев / под ред. Н. В. Маковской. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2021. – С. 58–64.
13. *Поворова, О. В.* Возрастные особенности иммунного статуса детей с частыми респираторными заболеваниями / О. В. Поворова, В. А. Ливинская, Т. И. Чегерова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. – 2021. – № 1. – С. 103–114.
14. *Поворова, О. В.* Комплексная оценка состояния иммунного статуса детей с частыми респираторными инфекциями / О. В. Поворова, Н. Д. Титова, В. А. Ливинская // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. – 2021. – Т. 58, № 2. – С. 112–120.

15. Дилигинский, Н. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н. В. Дилигинский, Л. Г. Дымова, П. В. Севастьянов // Монография под. общ. ред. Н. В. Дилигинского. – М. : Машиностроения-1, 2004. – 336 с.

Таблица 1 – Алгоритм оценки иммунной системы

1. G - Глобальный критерий «иммунный статус»							
2. Частные критерии							
g1 «лейкоциты, лимфоциты»		g2 «сывороточные иммуноглобулины»			g3 «субпопуляции лимфоцитов»		
3. Функции желательности							
лейкоциты	лимфоциты	IgG	IgA	IgM	CD3+	CD3+ CD4+	CD3+ CD8+ CD3- CD19+

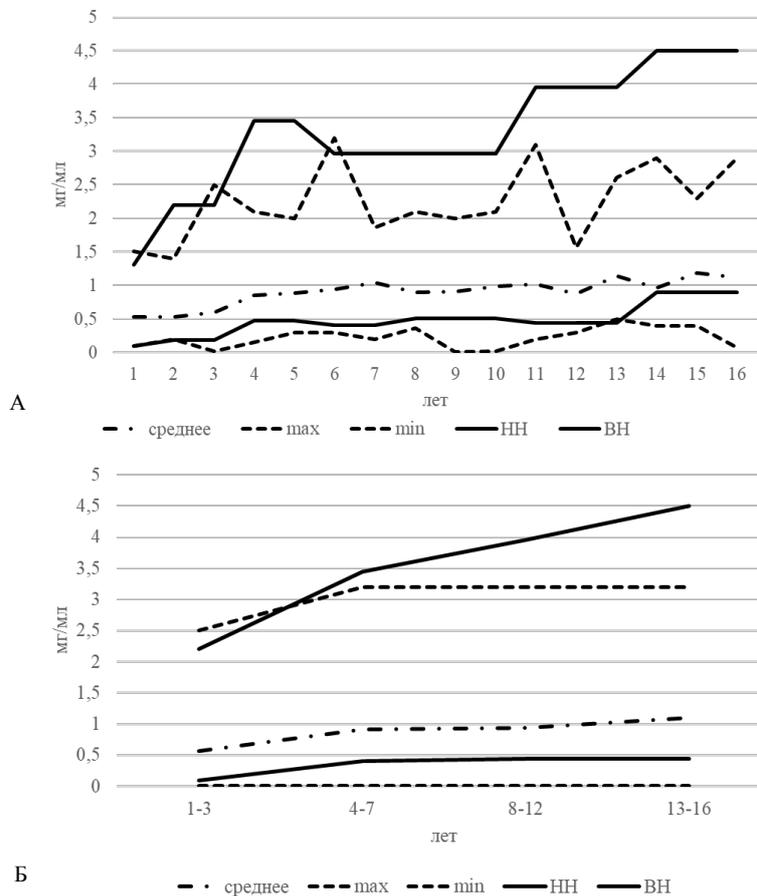


Рисунок 1 – Определение опорных точек функции желательности  $x_1$  и  $x_4$  (min – минимальные и max – максимальные значения в определенной возрастной группе),  $x_2$  и  $x_3$  (диапазоны PЗ: НН – нижняя норма и ВН – верхняя норма) IgA по каждой возрастной группе 1–16 лет (А), по четырем возрастным группам 1–3, 4–7, 8–12, 13–16 лет (Б)

Таблица 2 – Опорные точки для расчета функций желательности показателей иммунитета детей ГРЗ (УЗ «МОЛДЦ»)

Показатель			Возрастной диапазон, лет							
			1–3		4–7		8–12		13–16	
			значение	% отклонения	значение	% отклонения	значение	% отклонения	значение	% отклонения
IgG мг/мл	НН	x <sub>2</sub>	3		5		6		7	
	ВН	x <sub>3</sub>	13		13		14		18	
	min	x <sub>1</sub>	2,8	6,0	3,1	38	3,50	41,7	4	42,9
	max	x <sub>4</sub>	13,4	3,1	19	46,2	20,55	46,8	22,1	22,8
IgA, мг/мл	НН	x <sub>2</sub>	0,1		0,4		0,44		0,44	
	ВН	x <sub>3</sub>	2,2		3,5		3,95		4,5	
	min	x <sub>1</sub>	0,01	90	0,01	97,6	0,01	97,7	0,01	97,7
	max	x <sub>4</sub>	2,50	13,6	3,2	0	3,2	0	3,2	0
IgM, мг/мл	НН	x <sub>2</sub>	0,3		0,4		0,4		0,4	
	ВН	x <sub>3</sub>	1,8		1,8		1,6		2,8	
	min	x <sub>1</sub>	0,01	96,7	0,01	97,5	0,01	97,5	0,01	97,5
	max	x <sub>4</sub>	2,6	44,4	2,8	55,6	3,2	100	3,2	14,3
лимфоциты, %	НН	x <sub>2</sub>	34		34		18		18	
	ВН	x <sub>3</sub>	48		48		40		40	
	min	x <sub>1</sub>	17	50	17	50	13,0	27,8	13	27,8
	max	x <sub>4</sub>	82	70,8	78,5	63,5	75,0	87,5	65	62,5
лейкоциты, x10 <sup>9</sup> /л	НН	x <sub>2</sub>	5		5		4		4	
	ВН	x <sub>3</sub>	12		12		9		9	
	min	x <sub>1</sub>	3,1	38	2,6	48	2,6	35	2,6	35
	max	x <sub>4</sub>	14,2	18,3	14,2	18,3	14,2	57,8	9,6	6,7
CD3+, %	НН	x <sub>2</sub>	62		62		60		60	
	ВН	x <sub>3</sub>	69		69		80		80	
	min	x <sub>1</sub>	46	25,8	46	25,8	46,0	23,3	46	23,3
	max	x <sub>4</sub>	88	27,5	88	27,5	88,0	10	88	10
CD3+CD4+, %	НН	x <sub>2</sub>	30		30		33		33	
	ВН	x <sub>3</sub>	40		40		50		50	
	min	x <sub>1</sub>	21	30	26	13,3	27,0	18,2	28	15,2
	max	x <sub>4</sub>	79	97,5	79	97,5	79,0	58	79	58
CD3+CD8+, %	НН	x <sub>2</sub>	25		25		16		16	
	ВН	x <sub>3</sub>	32		32		39		39	
	min	x <sub>1</sub>	4,00	84	4,0	84	4,0	75	4	75
	max	x <sub>4</sub>	47	46,9	47,0	46,9	47,0	20,5	47	20,5
CD3- CD19+, %	НН	x <sub>2</sub>	21		21		5		5	
	ВН	x <sub>3</sub>	28		28		22		22	
	min	x <sub>1</sub>	4	80,9	4	80,95	4	20	4	20
	max	x <sub>4</sub>	21	0	21	0	21,0	0,0	21,0	0

Примечание: НН – нижнее и ВН – верхнее значение нормы (P3); min - минимальное и max – максимальное значение показателя в выборке

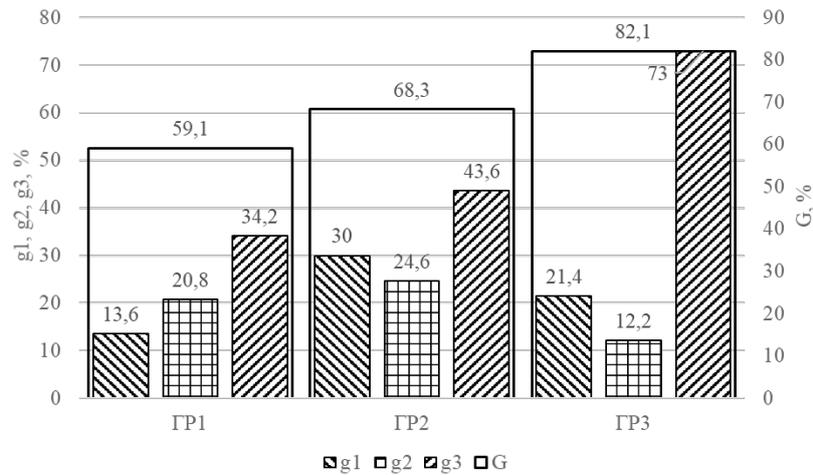


Рисунок 2 – Средний процент отклонения от нормы частных критериев и глобального критерия в группах детей с повторными респираторными заболеваниями

Таблица 3 – Значения частных критериев «лейкоциты, лимфоциты», «сывороточные иммуноглобулины», «субпопуляции лимфоцитов» и глобального критерия «иммунный статус» у детей ГР1

Возрастная группа	Критерий			
	g1	g2	g3	G
	среднее ± ошибка среднего			
1–16 лет	0,864±0,023	0,792±0,052	0,658±0,058	0,409±0,050
1–3 лет	0,788±0,084	0,711±0,173	0,612±0,163	0,274±0,075
4–7 лет	0,869±0,047	0,900±0,100	0,755±0,129	0,543±0,127
8–12 лет	0,860±0,043	0,727±0,100	0,641±0,104	0,343±0,082
13–16 лет	0,900±0,033	0,815±0,079	0,613±0,105	0,432±0,085

Таблица 4 – Значения частных критериев «лейкоциты, лимфоциты», «сывороточные иммуноглобулины», «субпопуляции лимфоцитов» и глобального критерия «иммунный статус» у детей ГР2

Возрастная группа	Критерий			
	g1	g2	g3	G
	среднее ± ошибка среднего			
1–16 лет	0,700±0,030	0,754±0,034	0,564±0,045	0,317±0,035
1–3 лет	0,688±0,055	0,738±0,060	0,574±0,074	0,314±0,059
4–7 лет	0,684±0,043	0,786±0,050	0,477±0,066*	0,305±0,054
8–12 лет	0,716±0,072	0,753±0,104	0,583±0,149	0,283±0,098
13–16 лет	0,800±0,108	0,674±0,101	0,889±0,111**	0,432±0,104
			$H = 7,87$	$p = 0,0489$
*и**			$Z = 2,67$	$p = 0,0453$

Примечание:  $H$  – значение критерия Краскела – Уоллиса,  $Z$  – значение критерия Манна-Уитни.

Таблица 5 – Значения частных критериев «лейкоциты, лимфоциты», «сывороточные иммуноглобулины», «субпопуляции лимфоцитов» и глобального критерия «иммунный статус» у детей ГРЗ

Возрастная группа	Критерий			
	g1	g2	g3	G
	среднее ± ошибка среднего			
1–16 лет	0,786±0,011	0,878±0,011	0,270±0,013	0,179±0,011
1–3 лет *	0,747±0,023	0,933±0,022	0,160±0,022	0,100±0,016
4–7 лет **	0,801±0,017	0,884±0,018	0,167±0,018	0,109±0,013
8–12 лет ***	0,796±0,020	0,846±0,025	0,436±0,030	0,293±0,026
13–16 лет ****	0,793±0,028	0,832±0,031	0,414±0,031	0,284±0,028
		H = 29,39 p = 0,0001	H = 137,16 p = 0,00001	H = 97,1 p = 0,00001
* и **		Z = 3,07 p = 0,0129		
* и ***		Z = 3,93 p = 0,0005	Z = 7,94 p = 0,0000	Z = 6,61 p = 0,0000
* и ****		Z = 3,23 p = 0,0075	Z = 7,65 p = 0,0000	Z = 6,71 p = 0,0000
** и ***			Z = 8,84 p = 0,0000	Z = 7,17 p = 0,0000
** и ****			Z = 8,3 p = 0,0000	Z = 7,12 p = 0,0000

Примечание: H – значение критерия Краскела – Уоллиса, Z – значение критерия Манна-Уитни.

Таблица 6 – Значения частных, глобальных критериев иммунитета и их статистически значимые отличия в зависимости от возрастных групп детей

Возрастная группа	Критерий			
	g1	g2	g3	G
	среднее ± ошибка среднего			
1–3 лет	0,736±0,021	0,887±0,022	0,258±0,027	0,149±0,018
		H = 32,95 p = 0,0001	H = 22,29 p = 0,00001	H = 11,13 p = 0,0038
		ГР2 и ГР3 Z = 3,49 p = 0,0014	ГР1 и ГР3 Z = 2,83 p = 0,0139	ГР2 и ГР3 Z = 2,68 p = 0,0219
			ГР2 и ГР3 Z = 4,0 p = 0,0002	
4–7 лет	0,785±0,016	0,869±0,017	0,238±0,021	0,156±0,016
	H = 9,57 p = 0,0083	H = 7,29 p = 0,0261	H = 19,21 p = 0,0001	H = 9,45 p = 0,0089
	ГР2 и ГР3 Z = 2,87 p = 0,0125		ГР1 и ГР3 Z = 3,71 p = 0,0006	ГР1 и ГР3 Z = 2,83 p = 0,0139
			ГР2 и ГР3 Z = 2,63 p = 0,0259	
8–12 лет	0,795±0,018	0,829±0,024	0,466±0,029	0,297±0,024
13–16 лет	0,804±0,025	0,818±0,028	0,473±0,032	0,311±0,026
			H = 13,07 p = 0,0015	
			ГР2 и ГР3 Z = 3,31 p = 0,0028	

Примечание: H – значение критерия Краскела – Уоллиса, Z – значение критерия Манна-Уитни.

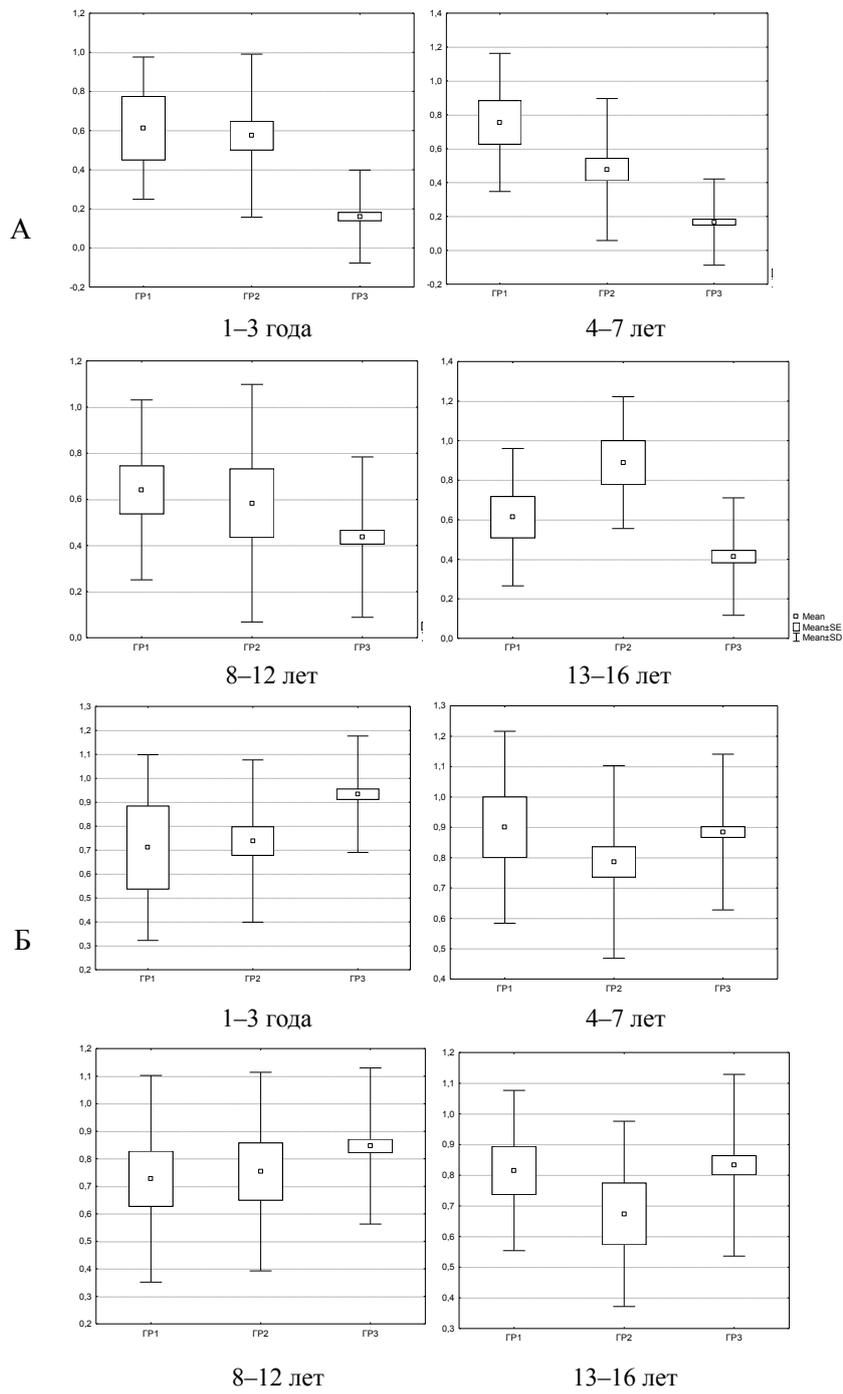


Рисунок 3 – Диаграммы частных критериев  $g_3$  – «субпопуляции лимфоцитов» (А),  $g_2$  – «сывороточные иммуноглобулины» (Б) в зависимости от возраста детей

Поступила в редакцию 20.05.2022 г.

Контакты: povorov@mail.ru (Поворова Оксана Викторовна),

chegerova@msu.by (Чегерова Татьяна Ивановна),

chegerov@rambler.ru (Чегеров Вадим Геннадьевич)

***Povorova O. V., Chegerova T. I., Chegerov V. G.* INTEGRAL ASSESSMENT OF THE IMMUNE SYSTEM OF CHILDREN WITH REPEATED RESPIRATORY TRACT INFECTIONS**

*In the proposed method of comprehensive assessment of the immune status, integral indicators of particular criteria characterizing the state of cellular and humoral immunity are calculated, as well as a global criterion characterizing the overall state of immunity. The study of the immune status has been carried out for children with recurrent respiratory diseases more than six times a year ( $n = 683$ ), healthy at the time of examination. With increasing age of children, the frequency of deviations from the range of reference values of the global criterion "immune status", the private criterion "lymphocyte subpopulation" decreases; the frequency of deviations from the norm of the indicators of the private criterion "serum immunoglobulins" increases. Among the particular criteria characterizing immunity, the highest average percentage of deviations from the norm is determined by indicators of cellular immunity.*

**Keywords:** repeated respiratory diseases of children aged 1–16 years, content of serum immunoglobulins, content of lymphocyte subpopulations.

ДЛЯ ЗАЎВАГ

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў  
на англійскую мову  
*Я. В. Рубанава*

Тэхнічныя рэдактары: *А. Р. Роскач, Л. І. Будкова*  
Камп'ютарны набор і вёрстка *С. А. Кірыльчык*  
Карэктар *І. Г. Каржова*

Падпісана да друку 08.2022 г.  
Фармат 70x108<sup>1</sup>/16. Папера афсетная. Гарнітура Times New Roman.  
Ум.-друк. арк. 8,2. Ул.-выд. арк. 9,5. Тыраж 100 экз. Заказ № .

Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт  
імя А.А. Куляшова”, 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.  
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,  
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства  
“Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля”  
ЛП № 02330/23 ад 30.12.2013 г.  
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў