

ISSN 2409-3777



ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта

імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

1 (59)
2022

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.В. Марчанка (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
канд. гіст. навук А.У. Коласаў (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар М.М. Дабравольскі (Тула)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.В. Івашкевіч (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.М. Сідарэнка (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А.В. Цімошчанка (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар А.М. Дворнік (Гомель)
д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт Г.М. Ціханчук (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт А.А. Анціпенка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс "Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А.А. Куляшова" ўключаны ў РІНЦ
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),
ліцэнзійны дагавор № 811-12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 413, т. +375 44 716 34 97; vesnik_mdu@mail.ru

**MOGILEV STATE
A. KULESHOV UNIVERSITY
BULLETIN**

THEORETICAL-SCIENTIFIC JOURNAL

Founded in December 1998

Series B. NATURAL SCIENCES
(Mathematics, Physics, Biology)

Published twice per year

$\frac{1 (59)}{2022}$

Editorial Board:

Lavrinovich D.S., Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor,
Vishnevsky M.I., Deputy Chief Editor, Doctor of Philosophical Sciences, Professor
Riyer Y.G., Deputy Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor
Chebotarevsky B.D., Chairman of the Editorial Committee (Series B),
Ph.D., Associate Professor
Kolosov A.V., Executive Secretary of the Editorial Board

Mathematics, Physics:

Lebedev V.I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Yerovenko V.A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Bernik V.I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Laptinsky V.N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of
the Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus
(Mogilev)
Dobrovolsky N.M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Tula)
Sotsky A.B., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Galmak A.M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Turtsevich A.S., Doctor of Technical Sciences (Minsk)
Timoschenko E.V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Ivashkevich I.V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)

Biology:

Dvornik A.M., Doctor of Biological Sciences, Professor (Gomel)
Maksimova N.P., Doctor of Biological Sciences, Professor (Minsk)
Naumov A.D., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Minsk)
Lazarevich S.V., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Gorky)
Akulich N.V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Tihonchuk G.N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Marochkov A.V., Doctor of Medical Sciences, Professor (Mogilev)
Simchenko N.I., Doctor of Medical Sciences (Mogilev)
Lopuh P.S., Doctor of Geographical Sciences, Professor (Minsk)
Poliachenok O.G., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)
Roganov G.N., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)

Theoretical-scientific journal
“Mogilev State A. Kuleshov University Bulletin”
is included in the bibliographic database
“Russian Science Citation Index”
License agreement № 811-12/2014

The editorial board address:
212022, Mogilev, Kosmonavtov Str., 1,
room 413, tel. +375 44 716 34 97; vesnik_mdu@mail.ru

З М Е С Т

САКОВИЧ Н. В., ЗАСИМОВИЧ Е. В., КОРЛЮКОВА И. А. Зависимость величины размерности Хаусдорфа от величины производной полинома в корне полинома	7
БУДЬКО А. Е. О порядке следования команд в программах одноцикловых машин Тьюринга	14
ГАЛЬМАК А. М. Идемпотенты и делители нуля в полиадических группоидах специального вида.....	23
СИДОРЕНКО И. Н. Предельные циклы кубической системы Лъенара типа $2A+1S$	33
SOTSKYA A. B., AN YING. Rayleigh series for dielectric waveguides of complex cross-section.....	42
ИВАШКЕВИЧ И. В. Оптические характеристики пленок оксида никеля, полученных методом ВЧ магнетронного напыления	57
ХОХ А. Н., ЗВЯГИНЦЕВ В. Б. Изменчивость элементного состава хвои при воздействии антропогенной нагрузки (на примере города Минска).....	63
СЕДАКОВА В. А., КЛЕБАНОВ А. В., ЛУКОВСКАЯ В. Б., СЕДАКОВ Е. В., РАФЕЕНКО В. Д. Возможность определения компонентов растительных экстрактов с помощью индексов удерживания.....	71
ЛЕВАЯ М. А. Особенности репродуктивной способности сортов <i>tulipa greigii</i> regel и влияние на них препаратов гуминовой и меланоидиновой природы в условиях Беларуси	81
БОЙКО В. И., ТИХОНЧУК Г. Н., ШКУРАТОВА Н. В. Сравнительная характеристика структуры однолетнего стебля некоторых представителей семейства пасленовые (<i>solanaceae</i> juss.).....	89

C O N T E N T S

SAKOVICH N. V, ZASIMOVICH E. V, KORLYUKOVA I. A. ON THE RELATION BETWEEN THE HAUSDORFF DIMENSION AND THE DERIVATIVE OF A POLYNOMIAL AT ITS ROOT.....	7
BUDKO A.E. ON THE ORDER OF FOLLOWING COMMANDS IN PROGRAMMES OF ONE-CYCLE TURING MACHINES.....	14
GAL'MAK A. M. IDEMPOTENTS AND ZERO DIVIZORS IN <i>L</i> -ARY GROUPOIDS OF SPECIAL FORM	23
SIDORENKO I. N. LIMIT CYCLES OF THE CUBIC LIENARD SYSTEM TYPE 2A+1S	33
SOTSKYA A. B., AN YING. RAYLEIGH SERIES FOR DIELECTRIC WAVEGUIDES OF COMPLEX CROSS-SECTION	42
IVASHKEVICH I. V. OPTICAL CHARACTERISTICS OF NICKEL OXIDE FILMS OBTAINED BY HF MAGNETRON SPUTTERING.....	57
KHOKH A. N., ZVYAGINTSEV V. B. VARIABILITY OF PINE ELEMENTAL COMPOSITION UNDER THE ANTHROPOGENIC IMPACT (THE CASE OF MINSK)	63
SEDAKOVA V. A., KLEBANOV A. V., LUKOUSKAYA V. B., SEDA KOV E. V., RAFEYENKA V. D. THE ABILITY TO DETERMINE THE COMPONENTS OF PLANT EXTRACTS USING RETENTION INDICES.....	71
LEVAYA M. A. FEATURES OF REPRODUCTIVE ABILITY OF VARIETIES TULIPA GREIGII REGEL AND THE INFLUENCE OF HUMIC AND MELANOIDINE NATURE PREPARATIONS ON THEM IN THE CONDITIONS OF BELARUS	81
BOYKO V. I., TIKHONCHUK G. N., SHKURATOVA N. V. COMPARATIVE CHARACTERISTIC OF THE STRUCTURE OF THE ONE-YEAR STEM OF SOME REPRESENTATIVES OF THE PASLENOVA FAMILY (<i>SOLANACEAE</i> YUSS.).....	89

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 511.42

ЗАВИСИМОСТЬ ВЕЛИЧИНЫ РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА ОТ ВЕЛИЧИНЫ ПРОИЗВОДНОЙ ПОЛИНОМА В КОРНЕ ПОЛИНОМА

Н. В. Сакович

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Е. В. Засимович

аспирантка, отдел теории чисел

Институт математики НАН Беларуси.

И. А. Карлюкова

кандидат физико-математических наук, доцент

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Обозначим через $L_n(w)$ множество действительных чисел, для которых неравенство $|P(x)| < H^{-w}$, $w > n$ имеет бесконечное число решений в целочисленных многочленах степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P)$, которая равна модулю наибольшего коэффициента $P(x)$. Бейкер, Шмидт и Берник нашли значение $\dim L_n(w)$, где $\dim A$ – размерность Хаусдорфа множества $A \subset \mathbb{R}$. Добавим к неравенству для многочлена неравенство для его первой производной $|P'(x)| < H^{1-v}$, $v > 0$. Обозначим $B_n(v, w)$ – множество $x \in \mathbb{R}$, для которых эта система имеет бесконечное множество решений.

В статье В. Берсневича, В. Берника, Ф. Гётце поставлена задача о размерности Хаусдорфа множества $B_n(v, w)$. Из оценки снизу для $\dim B_n(v, w)$ следует, что действительные алгебраические числа α с условием $|P'(\alpha)| < H^{1-v}$ образуют регулярную систему вместе с функцией $N(\alpha) = H(\alpha)^{n+1}$. Понятие регулярной системы было введено в 1970 г. А. Бейкером и В. Шмидтом в [1]. Ее применение в данной работе основано на лемме 7.

В работе при $0 < v \leq \frac{1}{2}$ найдена оценка сверху для $\dim L_n(v, w)$.

Ключевые слова: диофантовы приближения, размерность Хаусдорфа, теорема Минковского о линейных формах, регулярность множества действительных алгебраических чисел.

Введение

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

полином с целыми коэффициентами, $\deg P = n$ – его степень, и $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ – его высота. Обозначим через $\Psi(x)$ функцию положительного аргумента x , и $L_n(\Psi)$ – множество x из интервала $I \subset \mathbb{R}$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1} \Psi(x) \quad (1)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Наиболее простые и естественные характеристики множества $L_n(\Psi)$ получаются с помощью теории меры Лебега μ и размерности Хаусдорфа \dim . Так Хинчин [2] доказал, что

$$\mu L_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu I, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases} \quad (2)$$

Берник [3] и Бересневич [4] доказали утверждение (2) для многочленов произвольной степени.

Задача [5] для многочленов произвольной степени была поставлена Малером [6]. Ее решением занимались такие крупные математики, как Кубилюс [7], Фолькман [8], Шмидт [9], Левек [10]. Решил проблему Малера белорусский математик Спринджук [11; 12].

Рассмотрим два множества $L_{10}(H^{-2})$ и $L_{10}(H^{-100})$. Согласно (2), эти множества имеют нулевую меру Лебега, хотя очевидно включение $L_{10}(H^{-100}) \subset L_{10}(H^{-2})$. Для того чтобы различать множества нулевой меры Лебега, было введено понятие размерности Хаусдорфа [13]. Определим это понятие для множеств $A \subset \mathbb{R}$.

Для двух действительных чисел $\delta > 0$ и $\rho \geq 0$ рассмотрим $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ – покрытие множества A объединением интервалов I_j , $\mu I_j \leq \delta$. Составим суммы

$$S_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu I_j \text{ и } S(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mu I_j)^{\rho}.$$

Пусть

$$T = \lim_{\delta \rightarrow 0} S_1, T(\rho) = \lim_{\delta \rightarrow 0} S(\rho),$$

и

$$V(\rho) = \inf T(\rho),$$

где \inf берется по всем δ – покрытиям множества A . Используя определение размерности, можно доказать, что существует $\rho_0 \geq 0$ такое, что при $\rho > \rho_0$ верно $V(\rho) = 0$, а при $\rho \leq \rho_0$ верно $V(\rho) = \infty$. При этом число ρ_0 называют размерностью Хаусдорфа множества A , что записывают так

$$\rho_0 = \dim A.$$

Основная часть

Обозначим через $B(w)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-w}, w > n$$

имеет бесконечное множество решений в $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. При $n = 1$ Ярник [14] и Безикович [2] доказали, что

$$\dim B = \frac{2}{w+1}.$$

В случае произвольного n в [1] Бейкер и Шмидт получили двухстороннее неравенство

$$\frac{n+1}{w+1} \leq \dim B(w) < 2 \frac{n+1}{w+1}. \quad (3)$$

В работе [4] число 2 в (3) было заменено на 1, что привело к равенству

$$\dim B(w) = \frac{n+1}{w+1}.$$

Результаты [1; 3] были усилены в работе [4]. Обозначим через $B(v, w)$ множество $x \in I$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < H^{-w+v}, 0 \leq v \leq \frac{n+1}{3}, \\ |P'(x)| < H^{1-v}, w > n - 2v, \end{cases} \quad (4)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда

$$\dim B(v, w) \geq \frac{n-v+1}{w+2v+1}. \quad (5)$$

В данной работе мы получим оценку сверху для множества $B(v, w)$ – множества, для которого система неравенств (4) при $w > n - 2v$

$$\begin{cases} |P(x)| < H^{-w}, \\ |P'(x)| < H^{1-v}, \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x)$.

Далее \ll – символ Виноградова: записываем $A \ll B$, если существует величина C , не зависящая от A и B такая, что $A < CB$. Если $A \ll B$ и $B \ll A$, то записываем $A \approx B$.

Теорема. При $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$\dim B(v, w) \leq \frac{n-2v+1}{w-v+1}.$$

Оценка снизу для $\dim B(v, w)$ может быть получена аналогично (5). Докажем оценку сверху.

Приведем ряд вспомогательных лемм.

Лемма 1. Пусть α_1 – ближайший корень полинома $P(t)$ к числу x . Тогда:

$$|x - \alpha_1| \ll \min(|P(x)P'(x)^{-1}|, |P(x)P'(\alpha_1)^{-1}|).$$

Лемма 1 доказана в работах [11; 15].

Лемма 2. Пусть α_1 – ближайший к x корень $P(t)$ и $|P(x)| < H^{-n}$, а $|P'(x)| > H^{-s}$. Тогда

$$|P'(\alpha_1)| \approx |P(x)|.$$

Доказательство. Запишем $P'(x)$ в точке α_1 по формуле Лагранжа

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + P'(\xi)(x - \alpha_1), \quad \xi \in (x, \alpha_1). \quad (6)$$

Из леммы 1 получаем $|x - \alpha_1| \ll H^{-n+s}$ и

$$|P''(\xi)(x - \alpha_1)| \ll H^{1-n+s}.$$

При $P'(\alpha_1) < \delta_1 H^{-s}$ и $P'(\alpha_1) > \Delta H^{-s}$, большом Δ и $0 \leq s \leq \frac{n-1}{2}$ равенство (6) противоречиво. Значит, $P'(\alpha_1)$ и $P'(x)$ имеют одинаковый порядок.

Лемма 3 [11; 16]. Произведение высот нескольких многочленов и высота произведения имеют одинаковый порядок. Это означает, что если

$$P(x) = \prod_{j=1}^k t_j(x),$$

то $H(P) \approx \prod_{j=1}^k t_j(x)$.

Лемма 4 [3]. Пусть два полинома $P(x)$ и $T(x)$ степени n не имеют общих корней, $H(P) \leq Q$, и для всех $x \in I$, $\mu I = Q^{-\eta}$, $\tau > 0$ удовлетворяют неравенству

$$\max_{x \in I} (|P(x)|, |T(x)|) < Q^{-\tau}, \quad \tau > 0.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau + 1 + 2 \max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta.$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n(Q) &= \{P(x) \in \mathbb{Z}[x]: \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}, \\ \mathcal{P}_n(Q, v) &= \{P(x) \in \mathcal{P}_n(Q): \exists \alpha_1, |P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}\} \end{aligned}$$

хотя бы для одного корня α_1 полинома $|P(x)|$.

Лемма 5 [1]. Пусть $f(x)$, $g(x)$ – положительные функции, определенные для $x > 0$, таких, что $f(x)$ убывает и $f(x) \leq \frac{1}{2x}$ для больших x , $g(x)$ и $\frac{x}{g(x)}$ оба возрастают и стремятся к 0 при $x \rightarrow 0$, и $xg\left(\frac{1}{2}f(x)\right) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда для любой регулярной системы (Γ, N) имеем $(\Gamma, N; f) \not\prec g$. Кроме того, для каждой регулярных систем (Γ_i, N_i) ($i = 1, 2, \dots$) имеем

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (\Gamma_i, N_i; f) \nrightarrow g.$$

В частности, функции $f(x) = x^{-\sigma}$, $g(x) = x^{\rho}$, где $0 < \rho < \sigma^{-1} < 1$ удовлетворяют условиям леммы 5. И можно сделать вывод, что множество действительных чисел ξ , для которых существует бесконечно много $\gamma \in \Gamma$, и

$$|\xi - \gamma| < (N(\gamma))^{-\sigma}$$

имеет размерность как минимум σ^{-1} ; это выполняется также и для $\sigma = 1$, поскольку тогда размерность, очевидно, будет как минимум σ'^{-1} для всех $\sigma' > 1$.

Лемма 6. При $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) \ll Q^{n+1-2v}.$$

Доказательство. Заметим, что неравенство

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) \ll Q^{n+1-v}$$

доказано Спринджуксом [11] и Р. Бейкером [17] при $0 \leq v < 1$ и в [18] при $v < 1,5$. Учитывая оценку снизу для $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$, полученную в [19], приходим к соотношению

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) = Q^{n+1-2v}, \quad 0 \leq v < \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Предположим противное, что

$$\mathcal{P}_n(Q, v) > c_1 Q^{n+1-2v}, \quad 0 \leq v < \frac{1}{2},$$

при некоторой достаточно большой величине $c_1(n)$. Возьмем отрезок длины $Q^{-\gamma}$, $\gamma \geq v$. Ясно, что существует такой отрезок I_1 , что

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) \cap \{\alpha_1 \in I_1: |P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}\} > c Q^{n+1-2v-\gamma}. \quad (9)$$

Разложим каждый многочлен $P(x)$ и его производную $P'(x)$ на отрезке I_1 в окрестности своего корня $\alpha_1 = \alpha_1(P)$.

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \sum_{j=2}^n (j!)^{-1} P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^j. \quad (10)$$

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + P''(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \sum_{j=2}^n (j!)^{-1} P^{(j+1)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^j. \quad (11)$$

Оценим $P(x)$ и $P'(x)$ в (10) и (11), пользуясь оценками

$$P(\alpha_1) = 0, \quad |P'(\alpha_1)| \ll Q^{1-v}, \quad |P^{(j)}(\alpha_1)| \ll Q, \quad |x - \alpha_1| \leq Q^{-\gamma}, \quad \gamma \geq v.$$

Получим

$$|P(x)| \ll Q^{1-v-\gamma}, \quad |P'(x)| \ll Q^{1-v}. \quad (12)$$

Запишем $cQ^{n+1-2v-\gamma}$ в виде

$$cQ^{n+1-2v-\gamma} = cQ^{n-1+2-2v-\gamma}$$

и воспользуемся принципом ящиков Дирихле при условии

$$2 - 2v - \gamma \geq 0.$$

В этом случае среди многочленов $P_j(x)$, $1 \leq j \leq cQ^{n+1-2v-\gamma}$, найдется не менее $c_2 Q^{2-2v-\gamma}$ многочленов, у которых совпадают коэффициенты $a_k(P_j)$, $2 \leq k \leq n$. Тогда для многочленов $R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x)$ первой степени из (12) имеем

$$R_j(x) = a_j x - b_j, \quad |R_j(x)| < 2c_3 Q^{1-v-\gamma}, \quad |R'_j(x)| < c_4 Q^{1-v}, \quad |a_j| < 2c_4 Q^{1-v}, \\ 1 \leq j < \frac{1}{2} c_4 Q^{2-2v-\gamma}.$$

Если среди многочленов $R_j(x)$ найдутся хотя бы два без общих корней, например, $\frac{b_1}{a_1} \neq \frac{b_2}{a_2} \in I$, то верна цепочка неравенств

$$0 \neq \left| \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} \right| = \frac{|b_1 a_2 - b_2 a_1|}{|a_1 a_2|} \geq \frac{1}{|a_1 a_2|}. \quad (13)$$

Но из неравенств $|a_j x + b_j| \ll Q^{1-v-\gamma}$ имеем $\left| x + \frac{b_j}{a_j} \right| \ll |a_j|^{-1} Q^{1-v-\gamma}$ и

$$\left| \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} \right| < (|a_1|^{-1} + |a_2|^{-1})Q^{1-v-\gamma}. \quad (14)$$

Теперь из (13) и (14) следует

$$1 \ll (|a_1| + |a_2|)Q^{1-v-\gamma} \ll c_5 Q^{2-2v-\gamma},$$

что при $\gamma = 1 - v$ и малой величине c_5 противоречиво. Лемма 6 доказана.

Пусть J – конечное объединение интервалов, и пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ определим $R_J(n, H)$ как множество $\xi \in J$, для которых существуют действительные алгебраические числа α , $\deg \alpha \leq n$, и высоты не более H с условием $|\xi - \alpha| < \Psi^{n+1}(H)$.

Лемма 7 [20]. $|R(n, H)| \rightarrow |J|$ при $H \rightarrow \infty$.

Лемма 8. Множество действительных алгебраических чисел α с функцией $N(\alpha) = \Psi(H)^{-n-1}$ образуют регулярную систему при $\Psi(H) = \ln^3 x x^{-1}$.

Доказательство. Из леммы 7 следует, что при достаточно большом H верно неравенство $|R_J(n, H)| \geq \frac{1}{2}|J|$. Теперь построим регулярную систему, которая и докажет лемму. Для этого обозначим через $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ максимальную систему элементов из Γ с условиями $H(\gamma_i) \leq H$ и $|\gamma_j - \gamma_k| \geq K^{-1}$ для $j \neq k$, где $K = \Psi(H)^{-n-1}$. Тогда для любого $\gamma \in \Gamma$ с условием $H(\gamma) \leq H$ существует γ_i , $1 \leq i \leq t$, такое, что $|\gamma - \gamma_i| \leq K^{-1}$. Следовательно, объединение интервалов $(\gamma - K^{-1}; \gamma + K^{-1})$, взятое по всем $\gamma \in \Gamma$, имеет меру не более $4tK^{-1}$. А поскольку $\frac{1}{2}|J| < |R_J(n, H)| < 4tK^{-1}$, то $t > \frac{1}{8}|J|K$.

Доказательство теоремы.

Из системы неравенств (4) и леммы 1 следует

$$|x - \alpha_1| \ll H^{-w-1+2v}. \quad (15)$$

Поделим промежуток $[1, Q]$ на непересекающиеся отрезки $I = [1, 2) \cup [2, 4) \cup (\cup_{k=3}^{k_0} [2^k, 2^{k+1}))$, где $k_0 = \log_2 Q + 1$. Рассмотрим промежуток $I_k = [2^k, 2^{k+1})$. Перепишем на этом промежутке систему (4) в виде

$$\begin{cases} |P(x)| < 2^{-k(w-v)}, \\ |P'(x)| < 2^{(k+1)(1-v)}. \end{cases} \quad (16)$$

Неравенство (15) примет вид

$$|x - \alpha_1| \ll 2^{-k(w+1-2v)}. \quad (17)$$

Построим ε -покрытие решений системы неравенств (16) с помощью интервалов (17). При $Q = 2^{k+1}$ воспользуемся леммой 5. Тогда сумма мер ε -покрытий не превосходит

$$2^{-k(n+1-2v)\rho+n+1-2v},$$

что при $\rho = \frac{n+1-2v}{w+1-2v}$, $\varepsilon > 0$ не превосходит $Q^{-\frac{\varepsilon}{2}}$. На всем промежутке $[1, Q]$ эта сумма не превосходит $Q^{-\frac{\varepsilon}{4}}$ при произвольном $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Заключение

К настоящему времени связь значений целочисленных многочленов и их производных недостаточно проанализирована. В частности, это привело к ограничению $v < \frac{1}{2}$, хотя для неприводимых многочленов неравенство $v < \frac{1}{2}$ можно усилить. Авторы надеются, что рассмотрение множества $B(v, w)$ для приводимых многочленов приведет к обобщению неравенства, а возможно и доказательству гипотезы из [21].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Baker, A.* Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. M. Schmidt // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1970. – Т. 3. – № 1. – С. 1–11.
2. *Besicovitch, A. S.* Sets of fractional dimensions (IV): on rational approximation to real numbers / A. S. Besicovitch // Journal of the London Mathematical Society. – 1934. – Т. 1. – № 2. – С. 126–131.
3. *Берник, В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1983. – Т. 42. – № 3. – С. 219–253.
4. *Beresnevich, V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arithmetica. – 1999. – Т. 90. – № 2. – С. 97–112.
5. *Khinchine, A.* Einige Satze uber Kettenbruche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khinchine // Math. Ann. – 1924. – Т. 92. – С. 115–125.
6. *Mahler, K.* Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106. – P. 131–139.
7. *Кубилюс, И. П.* О применении метода акад. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел / И. П. Кубилюс // ДАН СССР. – 1949. – Т. 67. – С. 783–786.
8. *Volkman, B.* Zur metrischen Theorie der S-Zahlen, II / B. Volkman // J. reine und angew. Math. – 1963. – Vol. 213. – no. 1–2. – P. 58–65.
9. *Шмидт, В.* Диофантовы приближения / В. Шмидт. – М. : Мир, 1983. – 228 с.
10. *LeVeque, W. J.* Note on S-numbers / W. J. LeVeque // Proc. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 4. – P. 189–190.
11. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника. – 1967. – 181 с.
12. *Спринджук, В. Г.* Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – Т. 29. – № 2. – С. 379–436.
13. *Hausdorff, F.* Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen / F. Hausdorff // Mathematische Annalen. – 1916. – Т. 77. – № 3. – С. 430–437.
14. *Jarník, V.* Diophantische approximationen und Hausdorffsches mass / V. Jarník // Life and work of Vojtěch Jarník. – 1999. – С. 113–126.
15. *Bernik, V. I.* Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson // Cambridge University Press. – 1999. – № 137. – 171 p.
16. *Берник, В.* О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53. – № 1. – С. 17–28.
17. *Baker, R. C.* On approximation with algebraic numbers of bounded degree / R. C. Baker // Mathematika. – 1976. – Т. 23. – № 1. – С. 18–31.
18. *Берник, В. И.* О числе целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне многочлена / В. И. Берник, Д. В. Васильев, А. С. Кудин // Труды Института математики. — 2014. – Т. 22. – № 2. – С. 3–8.
19. *Кудин, А. С.* Об оценке снизу количества целочисленных многочленов заданной степени с малой производной в корне / А. С. Кудин // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2016. – № 4. – С. 112–115.
20. *Берник, В. И.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа / В. И. Берник, Ю. В. Мельничук. – Минск : Наука и техника. – 1988. – 144 с.
21. *Бересневич, В. В.* Совместные приближения нуля целочисленным многочленом, его производной и малые значения дискриминантов / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гетце // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – Республиканское унитарное предприятие Издательский дом Белорусская наука. – 2010. – Т. 54. – № 2. – С. 26–28.

Поступила в редакцию 10.06.2021 г.

Контакты: sakovichnv@tut.by (Сакович Наталья Владимировна),

elena.guseva.96@yandex.by (Засимович Елена Васильевна),

korlyukova_ia@grsu.by (Корлюкова Ирина Александровна)

Sakovich N.V., Zasimovich E.V., Korlyukova I.A. ON THE RELATION BETWEEN THE HAUSDORFF DIMENSION AND THE DERIVATIVE OF A POLYNOMIAL AT ITS ROOT.

Let $L_n(w)$ be the set of real numbers such that $|P(x)| < H^{-w}$, $w > n$ has an infinite number of solutions in integer polynomials of degree $\deg P = n$ and height $H = H(P)$. The height of a polynomial is defined as the modulus of the largest coefficient of $P(x)$. Baker, Schmidt and Bernik found the value of $\dim L_n(w)$, where $\dim A$ is the Hausdorff dimension of the set $A \subset \mathbb{R}$. In addition to the bound on the value of the polynomial consider a bound for its first derivative $|P'(x)| < H^{1-v}$, $v > 0$. Let $t_n(v, w)$ denote the set of $x \in \mathbb{R}$ such that the resulting of inequalities has infinitely many solutions.

The article by V. Beresnevich, V. Bernik, F. Goetze states a problem of finding the Hausdorff measure of the set $B_n(v, w)$. From the lower bound for $\dim B_n(v, w)$ it follows that real algebraic numbers α with the condition $|P'(\alpha)| < H^{1-v}$ form a regular system together with the function $N(\alpha) = H(\alpha)^{n+1}$. The concept of a regular system was introduced in 1970 by W. Schmidt in [1]. Its application in the current paper is based on Lemma 7.

The main result of the paper is an upper bound for $\dim L_n(v, w)$, where $0 < v \leq \frac{1}{2}$.

Keywords: Diophantine approximation, Hausdorff dimension, Minkowski's theorem on linear forms, regularity of the set of real algebraic numbers.

УДК 510.522

О ПОРЯДКЕ СЛЕДОВАНИЯ КОМАНД В ПРОГРАММАХ ОДНОЦИКЛОВЫХ МАШИН ТЬЮРИНГА

А. Е. Будько

кандидат физико-математических наук, доцент

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

Рассматривается машина Тьюринга с одной лентой, одной головкой и с внешним алфавитом из двух символов. Программа машины задается списком команд, а также ориентированным графом. Определяется, каким образом машина отыскивает очередную команду в своей программе, которую она должна выполнять. Задается оптимальный порядок следования команд в программе как порядок, при котором время их отыскания будет наименьшим. Исходя из структуры программы машины, заданной графом, определяются одноцикловые машины Тьюринга. Для одноцикловых машин указаны оптимальный порядок следования команд и границы времени их отыскания при оптимальном порядке.

Ключевые слова: одноцикловая машина Тьюринга, команда, программа, порядок следования команд, время отыскания команд.

Введение

Классической моделью алгоритма является машина Тьюринга и она позволяет исследовать его свойства. Самое значительное количество исследований посвящено рассмотрению сложности вычислений на машинах Тьюринга. Обзоры исследований по данному направлению даны в [1; 2]. Близким к этому направлению является исследование сложности самого алгоритма и, в частности, сложности универсальных машин Тьюринга [3–5]. Ряд работ посвящен разработке методов построения машин Тьюринга [6; 7]. Разрабатывается также программное обеспечение анимации работы машины [8]. Данная работа посвящена нахождению оптимального порядка следования команд в программах одноцикловых машин Тьюринга.

В настоящей работе рассматриваются машины Тьюринга с одной лентой, одной головкой и с внешним алфавитом $\{0,1\}$.

Программу машины Тьюринга можно задавать как списком команд, так и ориентированным графом. При задании списком программа определяется перечнем команд вида $q_i a_i \rightarrow a_k Dq_j$, где q_r, q_j – внутренние состояния машины, $a_r, a_k \in \{0,1\}$, $D \in \{L, P, C\}$. Состояние q_0 называется конечным и команда, в правой части которой записано это состояние, – конечной. Машина следующим образом отыскивает в списке команду, которую она должна выполнять в данный момент:

1. Пусть в начальный момент головка обозревает символ a_r . Тогда машина сравнивает $q_i a_r$ с левыми частями первой, второй и т. д. команд списка до тех пор, пока не найдет команду с левой частью $q_i a_r$, которую она и будет выполнять.

2. Пусть в момент после выполнения команды $q_i a_i \rightarrow a_k Dq_j$ ($q_j \neq q_0$) головка обозревает символ a_c . Тогда, начиная с команды, следующей за выполненной, машина сравнивает $q_j a_c$ с левыми частями команд списка до тех пор, пока не найдет команду с левой частью $q_j a_c$, которую она и будет выполнять. Сравнение произво-

дится в том порядке, в котором команды следуют в списке. При этом, если после сравнения с левой частью последней команды списка нужная команда не найдена, сравнение продолжается, начиная с первой команды списка.

3. Сравнение любого $q_j a_k$ с левой частью любой команды списка проводится за одинаковое время: за одну единицу времени.

В настоящей работе рассматривается нахождение такого порядка следования команд в программе, заданной списком, при котором время отыскания команд будет наименьшим. При этом под наименьшим понимается наименьшее среднее время отыскания команд как отношение суммы времени отыскания по всем начальным конфигурациям к числу этих конфигураций. Порядок следования команд, соответствующий наименьшему среднему времени их отыскания, называется оптимальным.

Предварительные сведения

Кроме задания программы в виде списка команд будем использовать еще и представление программы в виде ориентированного графа. В этом графе внутренним состояниям машины Тьюринга будут соответствовать вершины, а дуги будут определять команды. В [9] введена классификация L_0, L_1, L_2, \dots машин Тьюринга в зависимости от структуры графа, задающего программу машины. Программы машин класса L_0 , заданные графами, удовлетворяют следующим требованиям:

- 1) из каждой неконечной вершины исходят ровно две дуги;
- 2) граф является связным и не содержит циклов;
- 3) в каждую неконечную вершину, отличную от начальной, входит ровно одна дуга. В начальную вершину не входит ни одна дуга.

В [10; 11] рассмотрены два вида машин класса L_0 . При этом в [10] определена элементарная машина, как машина с n внутренними состояниями программа которой, заданная ориентированным графом, удовлетворяет следующим условиям:

- 1) из каждой вершины i ($1 \leq i \leq n - 1$) одна дуга уходит в конечную вершину, а другая – в вершину $i + 1$;
- 2) из вершины n обе дуги уходят в конечную вершину.

Теорема 1 [10]. Для элементарной машины Тьюринга, имеющей n внутренних состояний, выполняются следующие утверждения:

- 1) минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $n^2 + 2n$;
- 2) оптимальным является тот порядок, при котором вначале следуют команды дуг, исходящих из вершины 1, затем – команды дуг, исходящих из вершины 2, и т. д. При этом в каждой паре команд дуг, исходящих из вершины i ($1 \leq i \leq n - 1$), первой следует команда дуги, уходящей в конечную вершину.

Основная часть

Лемма 1. Пусть дана программа элементарной машины Тьюринга M с n внутренними состояниями, заданная графом. Удалим из графа дугу, уходящую из вершины n в конечную вершину и машину с полученной программой обозначим через M_1 . Тогда для машины M_1 оптимальным порядком следования команд будет порядок, полученный из оптимального порядка программы машины M удалением команды исключаемой дуги.

Доказательство. Оптимальный порядок следования команд для машины M обозначим через f , удаляемую дугу – через d . Из теоремы 1 [10] следует, что команда дуги d при оптимальном порядке следования команд f находится на последнем месте. Для машины M имеется $n + 1$ начальных конфигураций, которые соответствуют $n + 1$ дугам, уходящим в конечную вершину. Команда дуги d при оптимальном порядке f просматривается и выполняется только при работе над начальной конфигурацией, соответствующей этой дуге. Обозначим эту конфигурацию через P .

Порядок следования команд машины M_1 , получаемый из порядка f удалением команды дуги d , обозначим через f_1 . Доказываемая лемма утверждает, что порядок следования f_1 для машины M_1 является оптимальным. Предположим, что это не так. Это значит, имеется некоторый порядок следования команд машины M_1 , обозначим его g , при котором сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям будет меньше, чем такое же время при порядке f_1 .

Рассмотрим следующий порядок следования команд машины M , который обозначим через f : последней следует команда дуги d , а оставшиеся $2n - 1$ команд следуют до команды дуги d в порядке g . Команда дуги d машины M и при порядке f и при оптимальном порядке f просматривается и выполняется только при работе над начальной конфигурацией P . При этом время отыскания команд при работе над конфигурацией P и при порядке f и при оптимальном порядке f одно и то же и оно равно $2n$. Но при работе машины M над всеми остальными n начальными конфигурациями сумма времени отыскания команд при порядке следования команд f по предположению меньше, чем при оптимальном порядке f . Следовательно, для машины M имеется порядок следования команд f , при котором сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям будет меньше, чем при оптимальном порядке f . Пришли к противоречию. Следовательно, наше предположение неверно. Лемма 1 доказана.

Машину Тьюринга класса L_1 с n внутренними состояниями назовем одноцикловой, если ее программа, заданная графом, удовлетворяет следующим условиям:

- 1) из каждой вершины i ($1 \leq i \leq n - 1$) одна дуга уходит в конечную вершину, а другая – в вершину $i + 1$;
- 2) из вершины n одна дуга уходит в конечную вершину, а другая – в вершину 1.

Лемма 2. Для одноцикловой машины Тьюринга оптимальным является тот порядок, при котором вначале следуют команды дуг, исходящих из вершины 1, затем – команды дуг, исходящих из вершины 2, и т. д. При этом в каждой паре команд дуг, исходящих из вершины i ($1 \leq i \leq n$), первой следует команда дуги, уходящей в конечную вершину.

Доказательство. При работе одноцикловой машины над начальной конфигурацией вначале, вообще говоря, несколько раз по одному разу выполняются команды дуг, образующих цикл. Выполнение этих команд происходит в порядке их следования в цикле. Затем выполняются первые k ($1 \leq k \leq n - 1$) команд дуг, входящих в цикл, и – команда дуги, выходящая из вершины $k + 1$ и входящая в конечную вершину. После выполнения команды последней указанной дуги машина останавливается.

При однократном, но не последнем выполнении команд всех дуг, образующих цикл, время отыскания команд не может быть меньше, чем $2n$ поскольку машина должна просмотреть все $2n$ команд хотя бы по одному разу. При порядке следования команд, указанном в доказываемой лемме, время отыскания команд при однократном проходе цикла будет равно $2n$.

При последнем неполном проходе цикла команда дуги, выходящей из вершины n и входящей в вершину 1, обозначим ее через d , не выполняется. Это значит при последнем неполном проходе цикла машина работает как машина M_1 из леммы 1, где в качестве удаляемой дуги выступает дуга d . Очевидно, оптимальный порядок следования команд машины M_1 совпадает с порядком следования команд, указанном в доказываемой лемме, если к оптимальному порядку команд машины M_1 добавить команду дуги d . Лемма 2 доказана.

Ячейки ленты, просматриваемые головкой при выполнении i -го ($i \geq 1$) полного прохода цикла, назовем i -й активной зоной цикла. Очевидно, все активные зоны цикла имеют одинаковую длину и эту длину обозначим через $d(n)$. Значение $d(n)$ удовлетворяет условию $1 \leq d(n) \leq n$. При этом, $d(n) = 1$, если циклом является петля и $d(n) = n$, если для каждой дуги цикла значение $D = П$ или для каждой дуги цикла значение $D = Л$. Если $d(n) = n$, то при полном проходе цикла головка сдвигается за пределы активной зоны на одну ячейку вправо или влево, и это происходит при выполнении последней команды цикла.

Если машина совершает i -й полный проход цикла, то запись, имеющуюся в i -й активной зоне перед выполнением i -го полного прохода цикла, назовем стандартной записью активной зоны. Перед началом работы машины и перед выполнением каждого полного прохода цикла машина всегда находится в состоянии q_1 . Тогда стандартную запись активной зоны совместно с состоянием q_1 и указанием обозреваемого символа назовем стандартной конфигурацией активной зоны.

Количество ячеек, на которое головка сдвигается за один полный проход цикла либо влево, либо вправо, обозначим через s . Очевидно, $0 \leq s \leq n$.

Мы не будем рассматривать случай, когда $s = 0$. В этом случае либо машина будет неприменима к начальной конфигурации, либо, совершив первый полный проход цикла, машина совершает неполный проход цикла и останавливается. Действительно, перед первым полным проходом цикла запись в активной зоне является стандартной. Если после первого полного прохода цикла запись в активной зоне не изменилась, то есть осталась стандартной и поскольку головка осталась на месте, так как $s = 0$, то машина совершит второй полный проход цикла, затем – третий и т. д. Это значит машина будет работать бесконечно. Если же после первого полного прохода цикла запись в активной зоне изменилась, то есть перестала быть стандартной, то машина совершает неполный проход цикла и останавливается.

В дальнейшем будем считать, что $s \geq 1$. Это значит в результате выполнения полного прохода цикла головка сдвигается либо влево, либо вправо на $s \geq 1$ ячеек. Пусть для определенности головка сдвигается вправо. Это значит, $(i + 1)$ -я активная зона цикла по сравнению с i -й смещена вправо на s ячеек.

$(i + 1)$ -ю активную зону разобьем на две части: левую и правую. Левая часть состоит из тех ячеек, которые входили в i -ю зону, правая часть – из оставшихся ячеек. Очевидно, правая часть состоит из s ячеек. Стандартную запись также разобьем на две части: левую и правую соответственно левой и правой частям активной зоны.

Количество ячеек начальной записи, которые занимает левая часть первой активной зоны, обозначим через v .

Замечание 1. Если для каждой дуги цикла значение $D = П$, то при полном проходе цикла головка сдвигается за пределы активной зоны на одну ячейку вправо. Поэтому i -я и $(i + 1)$ -я активные зоны общей части не имеют. В этом случае актив-

ная зона состоит из одной только правой части, то есть $v = 0$ и, соответственно, стандартная запись состоит тоже из одной только правой части.

В начальный момент левая часть (если она есть) первой активной зоны занимает v ячеек начальной записи, правая часть занимает s ячеек. Если в следующих s ячейках запись совпадает с правой частью активной зоны, то машина совершит второй полный проход цикла. Если после выполнения i -го ($i \geq 2$) полного прохода цикла запись в s ячейках, следующих за i -й активной зоной:

– совпадает с правой частью стандартной записи, то машина выполнит $(i + 1)$ -й полный проход цикла;

– не совпадает с правой частью стандартной записи, то машина совершит неполный проход цикла и остановится.

Следовательно, для того чтобы головка просмотрела все ячейки начальной записи необходимо чтобы начальная запись имела следующий вид: в первых v ячейках записаны соответствующие символы левой части (если она есть) стандартной записи, а затем в каждой последующих s ячейках записаны символы правой части стандартной записи. Такую начальную запись с указанием обозреваемого символа и состояния q_1 назовем стандартной начальной конфигурацией.

Замечание 2. Будем рассматривать только те начальные конфигурации, где головка просматривает все ячейки начальной записи. Это требование означает, что начальная конфигурация должна быть стандартной.

Теорема 2. Для одноциклового машины Тьюринга с n внутренними состояниями при работе над каждой начальной конфигурацией время отыскания команд T при оптимальном порядке их следования удовлетворяет условию

$$T \leq 2mn + 1,$$

где $m \geq 3$ – длина начальной записи на ленте.

Доказательство. Пусть дана одноциклового машина с n внутренними состояниями и пусть дана начальная запись длины m . Пусть, кроме того, порядок следования команд является оптимальным.

Случай 1. $m = v + as$, где $a \geq 1$. Тогда в следующих s ячейках, расположенных справа за начальной записью, в начальный момент запись будет отлична от правой части стандартной записи. Действительно, во всех ячейках, расположенных справа за ячейками начальной записи, в начальный момент записаны одни нули. Поэтому если предположить, что в начальный момент в s ячейках, расположенных справа за начальной записью, запись совпадает с правой частью стандартной записи, то получим, что правая часть стандартной записи состоит из одних нулей. В этом случае в каждой s ячейках, расположенных справа от ячеек начальной записи, в начальный момент запись совпадает с правой частью стандартной записи. Поэтому в этом случае машина будет неприменима к начальной конфигурации.

Таким образом в s ячейках, расположенных справа за ячейками начальной записью, в начальный момент запись будет отлична от правой части стандартной записи. Поэтому машина совершает a полных проходов цикла, а $(a + 1)$ -й проход полным уже не будет.

Из условия случая 1 следует, что $a = \frac{m-v}{s}$. Наибольшего значения a достигает тогда, когда $s = 1$, $v = 0$. В этом случае совершается $a = m$ полных проходов цикла и время отыскания команд за эти проходы будет равно $2mn$, так как за один полный проход цикла время отыскания команд равно $2n$. Поскольку $v = 0$ и $s = 1$, то, соот-

ветственно, стандартная запись состоит из одной только правой части и длина этой части равна 1. За пределами начальной записи слева и справа записаны нули. Поэтому стандартной записью с длиной равной 1 может быть только 1. Следовательно, начальной записью является последовательность, состоящая из m единиц. Тогда, совершив m полных проходов цикла, головка попадает в первую ячейку справа от начальной записи. В этой ячейке записан 0, поэтому машина выполняет команду дуги, уходящей в конечную вершину, и останавливается. Следовательно, время отыскания команд в случае 1 будет равно $2mn + 1$.

Случай 2. $m = v + as + j$, где $a \geq 1$, $1 \leq j \leq s - 1$. Тогда запись в j последних ячейках и $s - j$ ячейках справа от ячеек начальной записи может совпадать с правой частью стандартной записи, но уже в последующих j ячейках совпадать не будет, иначе машина будет неприменима к начальной конфигурации. Действительно, в $s - j$ ячейках справа от ячеек начальной записи и в последующих j ячейках в начальный момент записаны нули. Поэтому, если предположить, что запись в последующих j ячейках совпадает с записью в соответствующих ячейках стандартной записи, то получим, что стандартная запись состоит из одних нулей. Тогда машина будет неприменима к начальной конфигурации.

Следовательно, машина совершает не более, чем $a + 1$ полных проходов цикла, и $(a + 2)$ -й проход полным уже не будет. Кроме того, при $(a + 2)$ -м проходе выполняется не более, чем j команд, так как запись в указанных выше j ячейках не совпадает с записью в соответствующих ячейках стандартной записи. Поэтому при $(a + 2)$ -м проходе выполняется не более, чем $2j - 1$ сравнений команд. Следовательно, время отыскания команд не будет превышать $2n(a + 1) + 2j - 1$.

Из условия случая 2 следует, что $a = \frac{m - v - j}{s}$. Поскольку $1 \leq j \leq s - 1$, то $s \geq 2$ и поэтому $a \leq \frac{m - v - j}{2}$. Кроме того, $1 \leq j$ и $v \geq 0$. Поэтому $a \leq \frac{m - 1}{2}$.

В случае 2 совершается не более, чем $a + 1 \leq \frac{m - 1}{2} + 1 = \frac{m + 1}{2}$ полных проходов цикла, при которых время отыскания команд не превышает величины $\frac{m + 1}{2} 2n = (m + 1)n$. При $(a + 2)$ -м проходе время отыскания команд не более, чем $2j - 1$. Следовательно, общее время отыскания команд в случае 2 не превышает величины $(m + 1)n + 2j - 1$. Так как $j \leq s - 1$ и $s \leq n$, то $j \leq n - 1$. Поэтому $(m + 1)n + 2j - 1 \leq (m + 1)(n + 2(n - 1) - 1) \leq (m + 3)n - 3$.

Таким образом, в случае 1 время отыскания команд не превышает величины $2mn + 1$, в случае 2 – величины $(m + 3)n - 3$. При $m \geq 3$ первая величина превышает вторую. Теорема 2 доказана.

Оценим T_{min} – минимальное время среднее отыскания команд по всем начальным конфигурациям.

Теорема 3. Для одноциклового машины Тьюринга минимальное среднее время отыскания команд T_{min} по всем начальным конфигурациям удовлетворяет условию

$$T_{min} \geq 2m + n,$$

где m – длина начальной записи на ленте.

Доказательство. Пусть дана одноциклового машина с n внутренними состояниями и пусть дана начальная запись длины m . Минимальное среднее время отыскания команд достигается при оптимальном порядке их следования. Поэтому будем считать, что порядок следования команд является оптимальным.

Время отыскания команд будет наименьшим в том случае, когда машина совершает наименьшее количество полных проходов цикла. Первую ячейку справа от ячеек начальной записи обозначим через r . Меньше всего полных проходов цикла до тех пор, пока головка не попадет в ячейку r ; машина совершает тогда, когда за один проход цикла головка сдвигается вправо на максимальное число ячеек, то есть на n ячеек. В этом случае, очевидно, $s = n$ и $v = 0$.

Случай 1. $m = v + \alpha s$, где $\alpha \geq 1$. Тогда $m = \alpha n$ и $\alpha = \frac{m}{n}$, то есть в этом случае совершается $\alpha = \frac{m}{n}$ полных проходов цикла, прежде чем головка попадет в ячейку r . При каждом $\frac{m}{n}$ проходе цикла время отыскания команд равно $2n$. Следовательно, время отыскания команд при всех полных проходах цикла будет равно $\frac{m}{n} \times 2n = 2m$.

Рассмотрим последний неполный проход цикла. Если неполный проход цикла заканчивается выполнением команды дуги, входящей в конечную вершину и выходящей из вершины:

- 1, то время отыскания команд равно 1;
- 2, то время отыскания команд равно 3;
-
- n , то время отыскания команд равно $2n - 1$.

Тогда время отыскания команд по всем указанным случаям будет равно

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = 1/2 (1 + (2n - 1)) \times n = n^2.$$

Следовательно, среднее время отыскания команд по всем n случаям при последнем неполном проходе цикла будет равно

$$n^2/n = n.$$

Таким образом, минимальное среднее время отыскания команд $T_{min.}$ удовлетворяет условию

$$T_{min.} \geq 2m + n.$$

Случай 2. $m = v + \alpha s + j$, где $\alpha \geq 1$, $1 \leq j \leq s - 1$. Тогда $m = \alpha n + j$, и $\alpha = \frac{m - j}{n}$, то есть в этом случае прежде чем головка попадет в ячейку r совершается $\alpha = \frac{m - j}{n}$

полных проходов цикла и головка просматривает еще j последних ячеек начальной записи. Время отыскания команд при выполнении этих действий будет равно

$$\alpha \times 2n + 2j = \frac{m - j}{n} \times 2n + 2j = 2(m - j) + 2j = 2m.$$

По аналогии со случаем 2 из доказательства теоремы 2 можно показать, что запись в j последних ячейках и $s - j$ ячейках справа от ячеек начальной записи может совпадать с правой частью стандартной записи, но уже в последующих j ячейках совпадать не будет.

Рассмотрим работу машины, начиная с того момента, когда головка впервые попадает в ячейку r . Очевидно, головка попадает в ячейку r в состоянии q_j . Если работа машины заканчивается выполнением команды дуги, входящей в конечную вершину и выходящей из вершины:

- j , то время отыскания команд равно $2j - 1$;
- $j + 1$, то время отыскания команд равно $2(j + 1) - 1 = 2j + 1$;
-

– n , то время отыскания команд равно $2n - 1$;

– 1, то время отыскания команд равно 1;

– 2, то время отыскания команд равно 3;

.....

– $(j - 1)$, то время отыскания команд $2(j - 1) - 1 = 2j - 3$.

Тогда время отыскания команд по всем указанным случаям будет равно

$$(2j - 1) + (2j + 1) + \dots + (2n - 1) + 1 + 3 + \dots + (2j - 3) = \\ = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = 1/2 (1 + (2n - 1)) \times n = n^2.$$

Следовательно, среднее время отыскания команд по всем n случаям будет равно $n^2/n = n$.

Таким образом, минимальное среднее время отыскания команд T_{min} удовлетворяет условию

$$T_{min} \geq 2m + n.$$

Теорема 3 доказана.

Заключение

Таким образом, для одноцикловых машин Тьюринга определен оптимальный порядок следования команд. Кроме того, для таких машин указана верхняя оценка времени отыскания команд при оптимальном порядке их следования, а также – нижняя оценка среднего времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Слисенко, О. А.* Сложностные задачи теории вычислений / О. А. Слисенко // Успехи математических наук. – 1981. – Т. 36, вып. 6(222). – С. 21–103.
2. *Марченков, С. С.* Сложность алгоритмов и вычислений / С. С. Марченков, В. Л. Матросов // Итоги науки и техники. Серия: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. – 1979. – Т. 16. – С. 103 – 149.
3. *Минский, М.* Вычисления и автоматы / М. Минский. – М. : Мир, 1971. – 281 с.
4. *Рогожин, Ю. В.* Семь универсальных машин Тьюринга / Ю. В. Рогожин // Математические исследования. – 1982. – № 69. – С. 76–90.
5. *Herman, G. T.* The halting problem of one state Turing machines with n -dimensional tape / G. T. Herman // Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. – 1968. – № 2. – P. 185–191.
6. *Мальцев, А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1986. – 368 с.
7. *Яблонский, С. В.* Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Высшая школа. 2006. – 386 с.
8. *Ясюкович, Э. И.* Разработка алгоритма и программного обеспечения детерминированной машины Тьюринга / Э. И. Ясюкович // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2017. – № 2. – С. 1–22.
9. *Будько, А. Е.* О двух классах машин Тьюринга / А. Е. Будько // Доклады АН БССР. – 1985. – № 9. – С. 792–793.
10. *Будько, А. Е.* О порядке следования команд в программах элементарных машин Тьюринга / А. Е. Будько // Вучон. зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А. С. Пушкіна. Вып. 16, ч. 2. – 2020. – С. 7–12.
11. *Будько, А. Е.* О порядке следования команд в программах полных древовидных машин Тьюринга / А. Е. Будько // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2021. – № 1. – С. 19–26.

Поступила в редакцию 22.09.2021 г.

Контакты: budzko@brsu.brest.by (Будько Александр Евгеньевич)

Budko A.E. ON THE ORDER OF FOLLOWING COMMANDS IN PROGRAMS OF ONE-CYCLE TURING MACHINES

A Turing machine with one tape, one head and an external two-character alphabet is under investigation. The machine program is set by a list of commands, as well as a direct graph. The way the machine retrieves the next command in its program to perform is revealed. The optimal order of the sequence of commands in the program is set as the order in which the retrieval time will be the shortest. Based on the structure of the machine program, determined by the graph, one-cycle Turing machines are defined. For single-cycle machines, the optimal order of commands and time bounds for retrieving them in the optimal order are identified.

Keywords: single-cycle Turing machine, command, program, order of commands, command retrieval time.

УДК 512.548

ИДЕМПОТЕНТЫ И ДЕЛИТЕЛИ НУЛЯ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий,
Могилев

В статье продолжается изучение полиадических группоидов специального вида, то есть полиадических группоидов с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и n -арной операции η . В частности, доказано, что если n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем, то в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ все элементы являются делителями нуля. Если к тому же σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k , то в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет идемпотентов, обладающих одновременно как нулевыми, так и ненулевыми компонентами.

Ключевые слова: полиадическая операция, n -арный группоид, нуль, идемпотент, делитель нуля, цикл.

1. Введение

Полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ арности $l = s(n-1) + 1$, где $n \geq 2$, $s \geq 1$, $k \geq 2$, была определена в [1] на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η . Определение l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ есть также в [2]. Полиадическую операцию $\eta_{s, \sigma, k}$ и универсальную алгебру $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ называют, соответственно, полиадической операцией специального вида и полиадическим группоидом специального вида. При $n = 2$ l -арную операцию $\eta_{s, \sigma, k}$ обозначают символом $[]_{l, \sigma, k}$, она первоначально была определена в [3] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ на k -й декартовой степени A^k полугруппы A . Еще раньше два частных случая l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ изучал Э. Пост [4].

В данной статье изучаются полиадические группоиды $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ специального вида, определенные на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, обладающего нулем. В этом случае нулем обладает и l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Доказано, что все его элементы являются делителями нуля.

2. Предварительные сведения

Если в n -арном группоиде $\langle A, \eta \rangle$ имеется такой элемент 0 , что

$$\begin{aligned} \eta(0a_2 \dots a_n) &= \eta(a_1 0a_3 \dots a_n) = \dots \\ \dots &= \eta(a_1 \dots a_{n-2} 0a_n) = \eta(a_1 \dots a_{n-1} 0) = 0 \end{aligned}$$

для всех $a_1, \dots, a_n \in A$, то его называют нулем этого n -арного группоида.

Как и в бинарном случае, n -арный группоид не может иметь более одного нуля.

Элемент a n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с нулем 0 называют его i -ым делителем нуля, где $i \in \{1, \dots, n\}$, если существуют элементы $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n \in A$, отличные от нуля, такие, что

$$[b_1 \dots b_{i-1} a b_{i+1} \dots b_n] = 0.$$

Если элемент a является i -ым делителем нуля для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, то a называют делителем нуля в $\langle A, \eta \rangle$.

Это определение обобщает на n -арный случай определение делителя нуля группоида.

Понятно, что сам нуль является делителем нуля.

Следующая теорема позволяет находить значения l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, не используя явно n -арную операцию $\eta_{1, \sigma, k}$, как это сделано в определении l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ в [1].

Теорема 2.1 [1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{11} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}) \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}) \eta(\dots \dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots)). \quad (2.1)$$

Для бинарной операции η полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[\]_{s+1, \sigma, k}$ из [3]. При этом равенство (2.1) принимает вид

$$y_j = (x_{11} (x_{2\sigma(j)} (\dots (x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} \dots))). \quad (2.2)$$

Согласно следующей теореме, тождественность подстановки σ^{l-1} влечет за собой перенос ассоциативности с n -арной операции η на l -арную операцию $\eta_{s, \sigma, k}$.

Теорема 2.2 [1]. *Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна, то есть универсальная алгебра $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является l -арной полугруппой.*

Наличие нуля в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ гарантирует следующая

Теорема 2.3 [2]. *Если n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , то элемент $\mathbf{0}$ является нулем l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} = (\underbrace{0, \dots, 0}_k)$.*

Нам понадобится еще одна теорема.

Теорема 2.4 [2]. *Пусть n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , $k \leq l$, σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k ,*

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{m-1}, a_m = 0, a_{m+1}, \dots, a_k) \in A^k \quad (2.3)$$

для некоторого $m \in \{1, \dots, k\}$. Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l) = (\underbrace{0, \dots, 0}_k).$$

3. Основные результаты

Приведем пример тернарного группоида с нулем, в котором все элементы являются делителями нуля.

Пример 3.1. Рассмотрим тернарный группоид $\langle A^2, \eta_{2, (12), 2} \rangle$, где $\langle A, \eta \rangle$ – группоид с бинарной операцией η и нулем 0 . Согласно теореме 2.3, $(0, 0)$ – нуль в $\langle A^2, \eta_{2, (12), 2} \rangle$. Это же можно доказать, проведя соответствующие вычисления.

1) Согласно (2.2) имеем

$$\eta_{2, (12), 2}((a, b)(a, b)(a, b)) = (\eta(a\eta(ba)), \eta(b\eta(ab))).$$

Из последнего равенства следует, что элемент (a, b) является идемпотентом в $\langle A^2, \eta_{2, (12), 2} \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\eta(a\eta(ba)) = a, \eta(b\eta(ab)) = b.$$

В частности, элементы вида (a, a) являются идемпотентами в $\langle A^2, \eta_{2, (12), 2} \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\eta(a\eta(aa)) = a.$$

2) Так как

$$\eta_{2, (12), 2}((a, b)(0, c)(0, c)) = (\eta(a\eta(c0)), \eta(b\eta(0c))) = (0, 0),$$

$$\eta_{2, (12), 2}((0, c)(a, b)(c, 0)) = (\eta(0\eta(bc)), \eta(c\eta(a0))) = (0, 0),$$

$$\eta_{2, (12), 2}((0, c)(0, c)(a, b)) = (\eta(0\eta(ca)), \eta(c\eta(0b))) = (0, 0)$$

для всех $(a, b) \in A^2$ и любого $c \in A$, то в $\langle A^2, \eta_{2, (12), 2} \rangle$ все элементы являются делителями нуля.

Замечание 3.1. Ясно, что если элемент 0 является нулем n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, то элемент $\mathbf{0} = (\underbrace{0, \dots, 0}_k)$ является идемпотентом l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Следующее предложение показывает, что в условиях теоремы 2.4 в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет идемпотентов, обладающих одновременно как нулевыми, так и ненулевыми компонентами.

Предложение 3.1. Пусть n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , σ – циклы длины k из \mathbf{S}_k , $k \leq l$, элемент $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ является идемпотентом в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда либо все компоненты a_1, \dots, a_k совпадают с 0 , либо все компоненты a_1, \dots, a_k отличны от 0 .

Доказательство. Если $a_m = 0, a_j \neq 0$, для некоторых

$$m, j \in \{1, \dots, k\}, m \neq j,$$

то $\mathbf{a} \neq (\underbrace{0, \dots, 0}_k)$. А так как по теореме 2.4

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l) = (\underbrace{0, \dots, 0}_k),$$

то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l) \neq \mathbf{a}.$$

Следовательно, элемент $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ не является идемпотентом в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, что противоречит условию предложения. Предложение доказано.

Таким образом, в условиях теоремы 2.4 любой элемент l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, обладающий как нулевыми, так и не нулевыми компонентами, не может быть его идемпотентом. Иначе говоря, элемент, имеющий нулевую компоненту, является идемпотентом в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда у него все компоненты совпадают с нулем группоида $\langle A, \eta \rangle$. Следовательно, $(\underbrace{0, \dots, 0}_k)$ – единственный идемпотент в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, имеющий, по крайней мере,

одну нулевую компоненту.

В [2] построен пример, показывающий, что в теореме 2.4 условие $k \leq l$ существенно. Покажем, что в предложении 3.1, полученном с помощью теоремы 2.4, это ограничение является излишним.

Теорема 3.1. Пусть n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k , элемент $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ является идемпотентом в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда либо все компоненты a_1, \dots, a_k совпадают с 0 , либо все компоненты a_1, \dots, a_k отличны от 0 .

Доказательство. Предположим, что среди компонент a_1, \dots, a_k имеется, по крайней мере, одна нулевая, то есть идемпотент \mathbf{a} может быть представлен в виде (2.3) для некоторого $m \in \{1, \dots, k\}$. Так как σ – цикл длины k , то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ индексы $j, \sigma(j), \dots, \sigma^{k-1}(j)$ составляют все множество $\{1, \dots, k\}$. Следовательно, $m = \sigma^r(j)$ для некоторого $r \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, откуда ввиду $a_m = 0$, следует

$$a_{\sigma^r(j)} = 0. \quad (3.1)$$

Так как \mathbf{a} – идемпотент в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$(a_1, \dots, a_k) = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{(a_1 \dots a_k)(a_1 \dots a_k) \dots (a_1 \dots a_k)}_l). \quad (3.2)$$

Из равенства (3.2), применяя к его правой части теорему 2.1, получим

$$a_{\sigma^{r-1}(j)} = \eta(a_{\sigma^{r-1}(j)} a_{\sigma(\sigma^{r-1}(j))} \dots a_{\sigma^{n-2}(\sigma^{r-1}(j))} \eta(a_{\sigma^{n-1}(\sigma^{r-1}(j))} \dots a_{\sigma^{2(n-1)-1}(\sigma^{r-1}(j))} \eta(\dots$$

$$\dots \eta(a_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(\sigma^{r-1}(j))} \dots a_{\sigma^{s(n-1)}(\sigma^{r-1}(j))} \dots))),$$

откуда следует

$$a_{\sigma^{r-1}(j)} = \eta(a_{\sigma^{r-1}(j)} a_{\sigma^r(j)} \dots a_{\sigma^{n+r-3}(j)} \eta(a_{\sigma^{n+r-2}(j)} \dots a_{\sigma^{2(n-1)+r-2}(j)} \eta(\dots$$

$$\dots \eta(a_{\sigma^{(s-1)(n-1)+r-1}(j)} \dots a_{\sigma^{s(n-1)+r-1}(j)} \dots))).$$

Подставляя (3.1) в правую часть этого равенства, получим

$$a_{\sigma^{r-1}(j)} = \eta(a_{\sigma^{r-1}(j)} \cdot 0 a_{\sigma^{r+1}(j)} \cdots a_{\sigma^{n+r-3}(j)} \eta(a_{\sigma^{n+r-2}(j)} \cdots a_{\sigma^{2(n-1)+r-2}(j)} \eta(\dots \eta(a_{\sigma^{(s-1)(n-1)+r-1}(j)} \cdots a_{\sigma^{s(n-1)+r-1}(j)} \dots)))$$

Так как правая часть полученного равенства равна нулю, то

$$a_{\sigma^{r-1}(j)} = 0. \tag{3.3}$$

Используя равенство (3.3) и рассуждая для $a_{\sigma^{r-2}(j)}$ также, как выше для $a_{\sigma^{r-1}(j)}$, приходим к равенству $a_{\sigma^{r-2}(j)} = 0$. Продолжая этот процесс, получим $a_{\sigma(j)} = 0$.

Так как, согласно теореме 2.1 (равенству (2.1)),

$$a_j = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{n-2}(j)} \eta(a_{\sigma^{n-1}(j)} \cdots a_{\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \eta(a_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \cdots a_{\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots)))$$

то ввиду равенства $a_{\sigma(j)} = 0$, имеем $a_j = 0$. В силу произвольного выбора $j \in \{1, \dots, k\}$, доказано равенство

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k = \mathbf{0}.$$

Теорема доказана.

Замечание 3.2. Если в доказательстве теоремы 3.1 $r = 0$, то

$$\sigma^{r-1} = \sigma^{-1} = \sigma^{k-1}.$$

Поэтому при $r = 0$ равенство (3.3) принимает вид $a_{\sigma^{k-1}(j)} = 0$.

Полагая в теореме 3.1 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 3.1. Пусть n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , элемент $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ является идемпотентом в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$. Тогда либо все компоненты a_1, \dots, a_k совпадают с 0 , либо все компоненты a_1, \dots, a_k отличны от 0 .

Полагая в теореме 3.1 и следствии 3.1 $n = 2$, получим еще два следствия

Следствие 3.2. Пусть группоид A обладает нулем 0 , σ – цикл длины k из \mathbf{S}_k , элемент $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ является идемпотентом в l -арном группоиде $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$. Тогда либо все компоненты a_1, \dots, a_k совпадают с 0 , либо все компоненты a_1, \dots, a_k отличны от 0 .

Следствие 3.3. Пусть группоид A обладает нулем 0 , элемент $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ является идемпотентом в l -арном группоиде $\langle A^k, []_{l, (12 \dots k), k} \rangle$. Тогда либо все компоненты a_1, \dots, a_k совпадают с 0 , либо все компоненты a_1, \dots, a_k отличны от 0 .

Проиллюстрируем теорему 3.1 примером.

Пример 3.2. Рассмотрим в качестве группоида $\langle A, \eta \rangle$ из примера 3.1 полу-группу \mathbf{N} всех натуральных чисел с операцией взятия наибольшего общего делителя:

$$\eta(mn) = \text{НОД}(m, n).$$

Число 1 является нулем этой полугруппы.

По теореме 2.2 тернарный группоид $\langle \mathbf{N}^2, \eta_{2, (12), 2} \rangle$ является тернарной полугруппой, в которой, как установлено в примере 3.1 (утверждение 1)), элемент (m, n) является идемпотентом в $\langle \mathbf{N}^2, \eta_{2, (12), 2} \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\text{НОД}(m, \text{НОД}(n, m)) = m, \text{НОД}(n, \text{НОД}(m, n)) = n. \quad (3.4)$$

Такое возможно только в случае $m = n$. Действительно, используя ассоциативность и коммутативность операции взятия наибольшего общего делителя, преобразуем левые части записанных выше двух равенств

$$\begin{aligned} \text{НОД}(m, \text{НОД}(n, m)) &= \text{НОД}(m, \text{НОД}(m, n)) = \\ &= \text{НОД}(\text{НОД}(m, m), n) = \text{НОД}(m, n), \\ \text{НОД}(n, \text{НОД}(m, n)) &= \text{НОД}(n, \text{НОД}(n, m)) = \\ &= \text{НОД}(\text{НОД}(n, n), m) = \text{НОД}(n, m) = \text{НОД}(m, n), \end{aligned}$$

откуда и из (3.4) следует

$$\text{НОД}(m, n) = m, \text{НОД}(m, n) = n.$$

Следовательно, $m = n$. Таким образом, в тернарной полугруппе $\langle \mathbf{N}^2, \eta_{2, (12), 2} \rangle$ множество всех идемпотентов исчерпывается элементами вида (n, n) . В частности нуль $(1, 1)$ этой тернарной полугруппы является и ее идемпотентом.

В примере 3.1 также установлено, что в тернарной полугруппе $\langle \mathbf{N}^2, \eta_{2, (12), 2} \rangle$ все элементы являются делителями ее нуля $(1, 1)$.

Выясним, существуют ли в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ делители нуля?

Теорема 3.2. Если n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , $l \geq 3$, то в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ все элементы являются делителями нуля.

Доказательство. 1) Пусть

$$\mathbf{c} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik})$$

– произвольный элемент из A^k для фиксированного $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ и положим

$$\mathbf{a}_t = (a_{t1}, a_{t2}, \dots, a_{tk}), t \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, l\},$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{c} \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l) = (y_1, y_2, \dots, y_k).$$

Согласно теореме 2.1, для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ верно равенство

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(a_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots a_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ &\dots \eta(a_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots a_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Рассмотрим три случая.

I) Для $i \geq 3$ положим

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11} = 0, \dots, a_{1(k-1)} = 0, a_{1k} \neq 0),$$

$$\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2k} \neq 0, a_{2\sigma(k)} = 0,$$

$$\mathbf{a}_r \neq 0, r \in \{3, \dots, i-1, i+1, \dots, l\}.$$

Если $j \in \{1, \dots, k-1\}$, то, подставляя в (3.5) $a_{1j} = 0$, получим

$$y_j = \eta(0a_{2\sigma(j)} \dots a_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(a_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots a_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ \dots \eta(a_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots a_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))) = 0.$$

Если $j = k$, то

$$y_k = \eta(a_{1k}a_{2\sigma(k)} \dots a_{(n-1)\sigma^{n-2}(k)} \eta(a_{n\sigma^{n-1}(k)} \dots a_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(k)} \eta(\dots \\ \dots \eta(a_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(k)} \dots a_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(k)} \dots))) \quad (3.6)$$

В правой части равенства (3.6) присутствует элемент $a_{2\sigma(k)} = 0$, откуда $y_k = 0$. Таким образом, если $i \geq 3$, то $y_1 = \dots = y_k = 0$ и верно равенство

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{c}_{\mathbf{a}_{i+1}} \dots \mathbf{a}_l) = \mathbf{0}, \quad (3.7)$$

где все $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_l$ отличны от $\mathbf{0}$.

II) Для $i = 2$, положим: \mathbf{a}_1 таким же как и в случае I); в $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$ компонента $a_{3\sigma^2(k)}$ равна нулю n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$; элементы $\mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_l$ отличны от нуля l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Если $j \in \{1, \dots, k-1\}$, то, как и в случае I), подставляя в (3.5) $a_{1j} = 0$, получим $y_1 = \dots = y_{k-1} = 0$.

Если $j = k$, то компонента y_k определяется равенством (3.6), в правой части которого присутствует элемент $a_{3\sigma^2(k)} = 0$, откуда $y_k = 0$. Таким образом, для $i = 2$ равенство (3.7) также верно.

III) Для $i = 1$ положим

$$a_{2\sigma(1)} = \dots = a_{2\sigma(k-1)} = 0, a_{2\sigma(k)} \neq 0,$$

$\mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_l$ такие же, как и в случае II).

Если $j \in \{1, \dots, k-1\}$, то, заменяя, присутствующий в правой части равенства (3.5) элемент $a_{2\sigma(j)}$ нулем n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, снова получим $y_1 = \dots = y_{k-1} = 0$.

Если $j = k$, то компонента y_k , как и в случае II), определяется равенством (3.6), в правой части которого присутствует элемент $a_{3\sigma^2(k)} = 0$, откуда $y_k = 0$.

Таким образом, для $i = 1$ равенство (3.7) также верно.

Так как равенство (3.7) справедливо для любого $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, то элемент \mathbf{c} является делителем нуля l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Теорема доказана.

Замечание 3.3. Когда в доказательстве теореме 3.2 отмечается, что тот или иной элемент присутствует в правой части равенства (3.5) или равенства (3.6), то надо иметь в виду, что место этого элемента относительно символов операции η зависит от ее арности n . Например, элемент $a_{3\sigma^2(k)}$ при $n \geq 4$ присутствует в правой части равенства (3.6) на третьем месте после первого внешнего символа операции η . При $n = 3$ этот же элемент присутствует в правой части равенства (3.6) на первом месте после второго внешнего символа операции η (в этом случае последовательность $a_{2\sigma(j)} \dots a_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}$ совпадает с элементом $a_{2\sigma(j)}$). При $n = 2$ элемент $a_{3\sigma^2(k)}$ присутствует в правой части равенства (3.6) на первом месте после ее третьего внешнего символа (в этом случае последовательность

$a_{2\sigma(j)} \dots a_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}$ – пустая, а последовательность $a_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots a_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}$ совпадает с элементом $a_{2\sigma(j)}$.

Теорема 3.2 обобщает утверждение 2) примера 3.1.

Полагая в теореме 3.2 $n = 2$, получим

Следствие 3.4. Если группоид A обладает нулем 0 , $l \geq 3$, то в l -арном группоиде $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ все элементы являются делителями нуля.

Замечание 3.4. Следствие 3.4 доказано в [3, предложение 3.7.1] для полугруппы A .

Теоремы 2.2 – 2.4 и 3.2 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.3. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда универсальная алгебра $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является l -арной полугруппой, и справедливы следующие утверждения:

1) элемент 0 является нулем l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда $0 = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$;

2) если $l \geq 3$, то в l -арной полугруппе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ все элементы являются делителями нуля;

3) если σ – цикл длины k из S_k , то у любого идемпотента из $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ все компоненты либо совпадают с 0 , либо отличны от 0 , имеет место также равенство

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l) = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$$

для любого элемента $\mathbf{a} \in A^k$, у которого по крайней мере одна компонента является нулевой.

Замечание 3.5. Для выполнения равенства, присутствующего в утверждении 3) теоремы 3.3, условие $k \leq l$ не обязательно, в отличие от теоремы 2.4. Это вызвано тем, что если цикл σ порядка k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $l - 1 = tk$ для некоторого $t \geq 1$, то есть в этом случае $k \leq l$.

Полагая в теореме 3.3 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 3.5. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , цикл $\sigma = (12 \dots k)$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда универсальная алгебра $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ является l -арной полугруппой, и справедливы следующие утверждения:

1) элемент 0 является нулем l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ тогда и только тогда, когда $0 = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$;

2) если $l \geq 3$, то в l -арной полугруппе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ все элементы являются делителями нуля;

3) у любого идемпотента из $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ все компоненты либо совпадают с 0 , либо отличны от 0 , имеет место также равенство

$$\eta_{s, (12 \dots k), k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l) = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$$

для любого элемента $\mathbf{a} \in A^k$, у которого по крайней мере одна компонента является нулевой.

Полагая в теореме 3.3 и следствии 3.5 $n = 2$, получим еще два следствия

Следствие 3.6. Пусть полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда универсальная алгебра $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ является l -арной полугруппой, и справедливы следующие утверждения:

1) элемент $\mathbf{0}$ является нулем l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$;

2) если $l \geq 3$, то в l -арной полугруппе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ все элементы являются делителями нуля;

3) если σ – цикл длины k из S_k , то у любого идемпотента из $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ все компоненты либо совпадают с 0 , либо отличны от 0 , имеет место также равенство

$$\underbrace{[\mathbf{a} \dots \mathbf{a}]_l}_{l, \sigma, k} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$$

для любого элемента $\mathbf{a} \in A^k$, у которого по крайней мере одна компонента является нулевой.

Следствие 3.7. Пусть полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , цикл $\sigma = (12 \dots k)$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда универсальная алгебра $\langle A^k, []_{l, (12 \dots k), k} \rangle$ является l -арной полугруппой, и справедливы следующие утверждения:

1) элемент $\mathbf{0}$ является нулем l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, (12 \dots k), k} \rangle$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$;

2) если $l \geq 3$, то в l -арной полугруппе $\langle A^k, []_{l, (12 \dots k), k} \rangle$ все элементы являются делителями нуля;

3) у любого идемпотента из $\langle A^k, []_{l, (12 \dots k), k} \rangle$ все компоненты либо совпадают с 0 , либо отличны от 0 , имеет место также равенство

$$\underbrace{[\mathbf{a} \dots \mathbf{a}]_l}_{l, (12 \dots k), k} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$$

для любого элемента $\mathbf{a} \in A^k$, у которого по крайней мере одна компонента является нулевой.

Так как цикл σ длины $n - 1$ из S_{n-1} удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$, то из теоремы 3.3 при $k = n - 1$ вытекает

Следствие 3.8. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^{n-1} = \sigma$. Тогда универсальная алгебра $\langle A^{n-1}, \eta_{\sigma, \sigma, n-1} \rangle$ является l -арной полугруппой, и справедливы следующие утверждения:

1) элемент $\mathbf{0}$ является нулем l -арной полугруппы $\langle A^{n-1}, \eta_{\sigma, \sigma, n-1} \rangle$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-1}$;

2) если $l \geq 3$, то в l -арной полугруппе $\langle A^{n-1}, \eta_{\sigma, \sigma, n-1} \rangle$ все элементы являются делителями нуля;

3) если σ – цикл длины $n - 1$ из S_{n-1} , то у любого идемпотента из $\langle A^{n-1}, \eta_{\sigma, \sigma, n-1} \rangle$ все компоненты либо совпадают с 0 , либо отличны от 0 , имеет место также равенство

$$\eta_{s, \sigma, n-1}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$$

для любого элемента $\mathbf{a} \in A^{n-1}$, у которого по крайней мере одна компонента является нулевой.

Полагая в следствии 3.8, $\sigma = (12 \dots n-1)$, получим

Следствие 3.9. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 . Тогда универсальная алгебра $\langle A^{n-1}, \eta_{s, (12 \dots n-1), n-1} \rangle$ является l -арной полугруппой, и справедливы следующие утверждения:

1) элемент $\mathbf{0}$ является нулем l -арной полугруппы $\langle A^{n-1}, \eta_{s, (12 \dots n-1), n-1} \rangle$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$;

2) если $l \geq 3$, то в l -арной полугруппе $\langle A^{n-1}, \eta_{s, (12 \dots n-1), n-1} \rangle$ все элементы являются делителями нуля;

3) у любого идемпотента из $\langle A^{n-1}, \eta_{s, (12 \dots n-1), n-1} \rangle$ все компоненты либо совпадают с 0 , либо отличны от 0 , имеет место также равенство

$$\eta_{s, (12 \dots n-1), n-1}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1})$$

для любого элемента $\mathbf{a} \in A^{n-1}$, у которого по крайней мере одна компонента является нулевой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Гальмак, А. М. Элементы с нулевыми компонентами в полиадических группоидах специального вида / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2021. – № 2(58). – С. 7–15.
3. Гальмак, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

Поступила в редакцию 22.09.2021 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A.M. IDEMPOTENTS AND ZERO DIVISORS IN l -ARY GROUPOIDS OF SPECIAL FORM.

Polyadic groupoids of special form, i.e. polyadic groupoids with l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power A^k of n -ary groupoid $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in \mathcal{S}_k$ and n -ary operation η are under way. In particular, it has been proved that if n -ary groupoid has zero, then in l -ary groupoid $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ all the elements are zero divisors. Moreover, if σ is cycle of length k from \mathcal{S}_k , then there are no idempotents in $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ that have both zero and nonzero components.

Keywords: polyadic operation, n -ary groupoid, zero, idempotent, zero divisor, cycle.

УДК 517.925.42

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА ТИПА 2A+1S

И. Н. Сидоренко

кандидат физико-математических наук

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В настоящей работе исследуется семейство кубических систем Льенара, имеющее в конечной части плоскости два антиседла (2A) и одно седло (1S). Известно, что количество малоамплитудных предельных циклов для рассматриваемого семейства равно 2. Целью данной работы является разбиение плоскости параметров системы на области, в каждой из которых система имеет заданное распределение предельных циклов. Рассмотрены и улучшены методы построения конкретных систем Льенара с наперед заданным количеством предельных циклов, окружающих группу особых точек. Выдвинута гипотеза об отсутствии предельных циклов, окружающих группу особых точек у систем рассматриваемого типа.

Ключевые слова: предельный цикл “нормального размера”, система Льенара, метод прогноза.

Введение

Рассматривается система Льенара вида

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = g(x) - \varepsilon f(x)y, \quad (1)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – полиномы третьей степени, а ε – малый параметр >0 . Будем рассматривать системы (1), которые в конечной части плоскости имеют три простые особые точки – два антиседла (2A) и одно седло (1S). Известно [1], что количество малоамплитудных предельных циклов для рассматриваемого семейства систем равно трем.

Целью данной работы является оценка максимального числа предельных циклов “нормального размера” [2] для систем (1) с учетом их различных распределений вокруг особых точек.

Основная часть

Системы Льенара известны тем, что все особые точки располагаются на оси Ox и седла чередуются с антиседлами. С учетом сказанного семейство систем (1) можно привести к каноническому виду:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x)(1-Lx) - \varepsilon(a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3)y, \quad (2)$$

где $L \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Поместим в точку $O(0; 0)$ седло, а в точку $E(1, 0)$ – антиседло, тогда $L < 0$. В данной работе применяются модификация прогнозного метода оценки числа предельных “нормального размера” [2; 3; 4], а также конструктивных методов возмущения систем с центром при помощи функций последования и Мельникова. Построены примеры конкретных систем с максимальным числом предельных циклов, окружающих все конечные особые точки, а также наиболее интересные распределения предельных циклов. С помощью метода прогноза [2]

произведено разбиение плоскости параметров на области с заданным распределением предельных циклов.

1. Предварительный результат

Рассмотрим основные методы, используемые для исследования распределений предельных циклов систем (2).

1.1. Метод прогноза Смейла для систем Льенара [5]

С. Смейл в своей работе [5] поддержал гипотезу о том, что система Льенара (3)

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x), \quad (3)$$

в случае $g(x) = x$, а $F(x)$ – полином степени $2k+1$ и $F(0) = 0$, может иметь не более k предельных циклов вокруг антиседла $O(0,0)$.

Гипотеза 1. В пространстве параметров системы (3) с $g(x) = x$ существует область Ω , в которой число предельных циклов системы (3) не превосходит количества t нулей нечетной части функции $F(x)$, т.е. положительных нулей функции

$$\varphi(x) = F(x) - F(-x), \quad (4)$$

а также внутри Ω существует подобласть, в которой это число равно t .

Определение. Пусть система Льенара (3) имеет антиседло $A(x_0, 0)$. Обозначим через ξ_1 (ξ_2) абсциссу ближайшей слева (справа) к точке A особой точки. Если слева (справа) особых точек нет, то считаем $\xi_1 = -\infty$ ($\xi_2 = +\infty$). Системой прогноза вокруг особой точки $A(x_0, 0)$ для системы Льенара (1) будем называть систему

$$F(\eta) = F(\mu), \quad G(\eta) = G(\mu), \quad (5)$$

где $F(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} f(x) dx$, $G(\mu) = \int_{x_0}^{\mu} g(x) dx$, $\xi_1 < \eta < x_0$, $x_0 < \mu < \xi_2$.

Таким образом, для прогноза числа предельных циклов индивидуальной системы Льенара будем использовать следующий алгоритм.

Алгоритм (Прогноз числа предельных циклов)

Для прогноза числа предельных циклов системы Льенара (3) вокруг антиседла $A(x_0, 0)$ необходимо:

- 1) составить систему прогноза (5) для системы Льенара (3) и особой точки A ;
- 2) определить промежутки изменения переменных η , μ ;
- 3) определить число k – количество решений системы прогноза (3) на полученном промежутке изменения переменных η , μ .

С учетом справедливости гипотезы 1 в области Ω существует система, которая имеет k предельных циклов вокруг рассматриваемой особой точки.

Описанный алгоритм является конечным и алгебраическим.

Сформулированные определения и алгоритм остаются справедливыми и для оценки числа предельных циклов вокруг группы особых точек с суммарным индексом, равным $+1$. В данном случае в качестве x_0 необходимо брать “центральную” точку (это может быть и седло), ξ_1 , ξ_2 – абсциссы ближайших левой и правой особых точек, не входящих в группу, вокруг которой производится оценка, а $\xi_1 < \eta < \xi_2$, $\xi_2 < \mu < \xi_2$, где ξ_1 , ξ_2 находятся из условия $G(\xi_1) = G(\xi_2) = \max \{G(x_i)\}$, $\xi_1 < x_i < \xi_2$, x_i – абсциссы всех особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов.

1.2. Возмущение систем с центром

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_0(x, y) + \varepsilon P(x, y, a) = \tilde{P}(x, y, \varepsilon, a) \\ \frac{dy}{dt} = Q_0(x, y) + \varepsilon Q(x, y, a) = \tilde{Q}(x, y, \varepsilon, a) \end{cases}, \quad (6)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, P_0, Q_0, P, Q – многочлены, a – вектор их коэффициентов. При $a = 0$ система (6) имеет центр $O(0,0)$, кривые которого трансверсально пересекают ось Ox на отрезке $[p, q]$, $p > 0$. Тогда на $[p, q]$ определена функция Мельникова [6]

$$\Phi(x, a) = \int_{\gamma(x)} M(x, y)(Pdy + Qdx) = \sum_{i=1}^m a_i \int_{\gamma(x)} M(x, y)(P_i dy + Q_i dx) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x), \quad (7)$$

где $M(x, y)$ – интегрирующий множитель невозмущенной системы, $\gamma(x)$ – овал центра, проходящий через точку $(x, 0)$. Тогда простым нулям функции Мельникова $\Phi(x, a)$ соответствуют овалы, порождающие предельные циклы возмущенной системы.

Пусть требуется найти $n_0 - 1$ предельных циклов системы (3), пересекающих $[p, q]$ оси Ox при условии, что задача имеет решение. Для этого выберем точки $x_i \in (p, q), i = \overline{1, n_0}$ произвольным образом (возмущаем центр):

$$(-1)^i \sum_{j=1}^{m_0} a_j \varphi_j(x_i) > L, i = \overline{1, n_0}, L \rightarrow \max, |a_j| \leq 1. \quad (8)$$

Если задача (8) имеет решение

$$a = a^*, L = L^*,$$

то в системе (3) существует достаточно малое $\varepsilon > 0$, при котором она имеет $n_0 - 1$ предельных циклов, пересекающих $[x_i, x_{i+1}], i = \overline{1, n_0 - 1}$.

Так как функция Мельникова при $a = a^*, L = L^*$ имеет наибольшее отклонение от нуля в выбранных точках x_i , то предельные циклы будут существовать не при слишком малых значениях $\varepsilon > 0$, т. е. они будут “нормального размера”. Конечно, успех зависит еще от точности приближенно найденных функций $\varphi_j(x)$. Для нахождения $\varphi_j(k)$ на промежутке $[p, q]$ выбираем равномерную сетку узлов $v_k, k = \overline{1, N_0 + 1}$, приближенно интегрируя систему

$$\frac{dx}{dt} = P_0, \frac{dy}{dt} = Q_0, \frac{dM}{dt} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right), \frac{d\Psi_j}{dt} = M(P_j Q_0 + Q_j P_0)$$

на $[0, T_k]$, $\Psi_j(0) = 0, x(0) = v_k, y(0) = 0, T_k$ – период обхода овала $\gamma(v_k)$ в системе (6), который находится численно. Тогда функции $\varphi_j(x)$ можно приближенно найти в виде многочлена или сплайн-функции по значениям $\varphi_j(v_k) = \psi_j(T_k), j = \overline{1, m}$.

Если задача (8) не имеет решения, меняем набор точек x_i и повторяем вычисления. При достаточно большом числе экспериментов получим решение задачи (8), если заранее известно, что оно существует. Очевидно, данный метод имеет много источников ошибок и поэтому может применяться только при небольших значениях n . Максимальное значение, при котором был осуществлен удачный эксперимент, показывает, что $n < 10$.

Отметим также, что число предельных циклов $n_0 - 1$ может быть больше $m - 1$. Если же $\varphi_j(x)$ образуют систему функций Чебышева, то $n_0 \leq m$ и максимальное число нулей функции (7) равно $m - 1$, при этом их можно выбрать произвольно на отрезке $[p, q]$.

1.3. Метод возмущения кратного фокуса [2]

Допустим, что при $a = a_0$ система (6) имеет негрубый фокус $O(0,0)$ кратности k . Тогда можно определить функцию последования

$$\Delta(x_0, a) = x(T, x_0, a, \varepsilon) - x_0,$$

где $x(t)$, $y(t)$ – решение системы (4), $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, T – период обхода дуги соответствующей траектории вокруг особой точки $O(0,0)$. Выберем на промежутке $[p, q]$ точки x_i , $i = \overline{1, n_0}$ и рассмотрим разложение функции последования в ряд Тейлора в окрестности точки a_0 , учитывая, что $\Delta(x_i, a^0) \neq 0$, т. к. траектории в окрестности a_0 являются спиралями. Тогда

$$\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j + o(\Delta a),$$

$$\text{где } tp(i, j) = \frac{\partial \Delta(x_i, a^0)}{\partial a_j}.$$

Для нахождения $tp(i, j)$ в общем случае необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu_i P_0, \quad \frac{dy}{dt} = \mu_i Q_0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial a_j} \right) &= \mu_i \left(P_j + \frac{\partial P_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_j} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_j} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial a_j} \right) = \mu_i \left(Q_j + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_j} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_j} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right) &= P_0 + \mu_i \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mu} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial \mu} \right) = Q_0 + \mu_i \left(\frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mu} \right), \\ x(0) &= x_i, \quad y(0) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial a_j}(0) = \frac{\partial y}{\partial a_j}(0) = \frac{\partial x}{\partial \mu}(0) = \frac{\partial y}{\partial \mu}(0) = 0, \end{aligned}$$

где $P_0 = P(x, y, a_0, \varepsilon)$, $Q_0 = Q(x, y, a_0, \varepsilon)$,

$$P_j = \frac{\partial P(x, y, a^0)}{\partial a_j}, \quad Q_j = \frac{\partial Q(x, y, a^0)}{\partial a_j}, \quad \mu_i = \frac{T(x_i)}{2\pi},$$

$T(x_i)$ – период обхода дуги, соответствующей траектории вокруг особой точки.

Тогда

$$tp(i, j) = \frac{\partial x}{\partial a_j} - \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial a_j} \Big/ \frac{\partial y}{\partial \mu} \Big|_{t=T(x_i)}.$$

Как известно [6], вопрос о числе предельных циклов у системы (5) эквивалентен вопросу о числе действительных нулей функции последования. Поэтому потребуем, чтобы в точке x_1 функция последования была отрицательна (положительна), если фокус устойчивый (неустойчивый), в точке x_2 положительна (отрицательна) и т. д. При этом Δa должны быть достаточно малыми, чтобы $o(\Delta a)$ в разложении Тейлора не влияла на знак функции последования. Все перечисленные условия соответствуют задаче линейного программирования

$$L \rightarrow \min, \pm (-1)^i \left(\Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j \right) \geq 0, i = \overline{1, k+1}, |\Delta a_j| \leq L. \quad (9)$$

В неравенствах (9) выбираем знак “плюс”, если фокус неустойчивый, и знак “минус” – в противном случае. Если задача (9) имеет решение $\Delta a = \Delta a^*$, $L = L^*$, то проверяем неравенства

$$(-1)^i \Delta(x_i, \Delta a^*) > 0, i = \overline{1, k+1}.$$

Если они выполняются, то система (6) имеет, по крайней мере, k предельных циклов. Если же неравенства не выполняются и Δa^* велико, то это означает, что система далека от искомой. Если неравенства не выполняются и Δa^* сравнительно небольшое, то систему можно “улучшить”, взяв вместо точки a_0 точку $a_0 + \Delta a^*$, сделав, таким образом, процесс “улучшения” итерационным. Здесь важно следить за тем, чтобы, улучшая систему, мы не пришли к системе с центром. На каждом шаге итерации знак функции $\Delta(x, a_0 + \Delta a^*)$ должен проверяться на более мелкой сетке узлов.

2. Прогнозные бифуркационные кривые

Для нахождения систем (2) с заданным распределением предельных циклов, а также для нахождения систем с максимальным распределением предельных циклов удобно использовать прогнозные бифуркационные кривые, которые находятся алгебраическими методами, что значительно упрощает вычисления.

Определим следующие прогнозные кривые:

2.1. Прогнозная кривая двукратных предельных циклов $2LCP$. Двукратным предельным циклам системы (2) соответствуют двукратные положительные нули функции $\varphi(u)$. Как известно [7], отыскание положительных нулей функции $\varphi(u)$ сводится к решению системы алгебраических уравнений (5). После упрощения и сокращения на $(x - y) \neq 0$ получим систему

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{1+L}{3}(x^2 + xy + y^2) + \frac{L}{4}(x+y)(x^2 + y^2) = 0, \\ a_1 + \frac{a_2}{2}(x+y) + \frac{a_3}{3}(x^2 + xy + y^2) + \frac{a_4}{4}(x^2 + y^2)(x+y) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

По основной теореме о симметрических многочленах уравнения системы (10) алгебраически выражаются через известные симметрические многочлены. В рассматриваемом случае через

$$x + y = u, \quad xy = v.$$

Итак, получили систему из двух уравнений с семью неизвестными. Зафиксируем три параметра, например, L, a_3 и a_4 , и, исключив из этой системы переменные u и v , получим уравнение по a_1 и a_2 , которое и задает кривую двукратных предельных ци-

клов в плоскости параметров (a_1, a_2) . Так, например, для $L = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 1, a_4 = -1$ кривая $2LCp$ задается уравнением

$$432a_1^3 + 27a_1^2(84 + (4 - 3a_2)a_2) - (a_2 + 2)^2(4 + a_2(9a_2 - 52)) + 18a_1(8 + a_2(116 + a_2(3a_2 - 34))) = 0.$$

У найденной кривой двукратных предельных циклов имеются “ложные” участки, которые не влияют на распределение предельных циклов.

2.2. Прогнозные кривые негрубых фокусов WF_1 и WF_2 . Как видно из названия, эти кривые определяют условия негрубости фокусов: WF_1 – фокуса $E(1, 0)$, WF_2 – фокуса $D(1/L, 0)$. Для того чтобы фокус $E(1, 0)$ был негрубым, необходимо, чтобы дивергенция векторного поля в точке E была равной нулю, что определяется следующим уравнением $\text{div}(\Omega)|_{(1,0)} = f(1) = 0$, где Ω – векторное поле системы (2). Последнее уравнение в плоскости параметров (a_1, a_2) является уравнением прямой $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ (при фиксированном значении параметров a_3 и a_4). Аналогичным образом определяется кривая, точнее, прямая WF_2 : $a_1 - 2a_2 + 4a_3 - 8a_4 = 0$.

2.3. Прогнозные кривые сепаратрисных циклов $SC1p$, $SC2p$ и $SC3p$. Прогнозная кривая $SC1p$ определяет условие петли вокруг правого антиседла, $SC2p$ – условие петли вокруг левого антиседла, а $SC3p$ определяет условие петли, имеющей форму “неполной” восьмерки. Все эти кривые, а точнее, прямые, определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} F(x) = F(y), \\ G(0) = G(x) = G(y) \end{cases}$$

при фиксированных значениях параметров L , a_3 и a_4 . Так, например, для $L = -\frac{1}{2}$, $a_3 = 1, a_4 = -1$ имеем следующие уравнения для прогнозных кривых сепаратрисных циклов:

$$\begin{aligned} SC1p: a_1 &= \frac{1}{27}(-17 - 8\sqrt{10} + 9(1 + \sqrt{10})a_2), \\ SC2p: a_1 &= \frac{1}{27}(-17 + 8\sqrt{10} + 9(1 - \sqrt{10})a_2), \\ SC3p: a_1 &= \frac{1}{27}(-25 + 18a_2). \end{aligned}$$

Рассмотрим систему (2) при значении $L = -1/2$. Сформулируем теорему

Теорема. Для системы Льенара (2)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - (1 + L)x + Lx^2) - \varepsilon \sum_{j=1}^4 a_j x^{j-1} y$$

с $L = -1/2$, $a_3 = 1, a_4 = -1$, имеющей антиседла $A(-2, 0)$, $E(1, 0)$ и седло $O(0, 0)$, выполняются следующие утверждения:

1. Все решения соответствующей системы прогноза (5) для системы Льенара (2) типа $((k_2, k_3), k_1)$ удовлетворяют неравенству $k_1 + k_2 + k_3 > 4$.

2. Система прогноза (5) для рассматриваемой системы Льенара (2) может иметь решения только следующих типов: $((1, 0), 0)$, $((0, 1), 0)$, $((0, 0), 1)$, $((1, 0), 1)$, $((0, 1), 1)$, $((1, 1), 1)$, $((0, 2), 0)$, $((2, 0), 0)$, $((0, 0), 2)$.

3. В каждой области пространства коэффициентов, в которой система прогноза имеет решение типа $((k_2, k_3), k_1)$, существует подмножество, в котором система Льенара (2) при $\varepsilon = 0.01$ имеет такое же распределение $((k_2, k_3), k_1)$ предельных циклов.

4. Если $k_2 = 0$ ($k_3 = 0$), то система Льенара (2) не имеет предельных циклов, окружающих особую точку $A(-2, 0)$ ($E(1, 0)$).

Доказательство

1. Систему прогноза (5) для системы Льенара (2) всегда можно сократить на $\eta - \mu \neq 0$. После сокращения получим, что первое уравнение системы является полиномом второй степени, а второе уравнение – полином третьей степени. Следовательно, система (5) не может иметь более шести решений, а в силу симметрии существенными являются только три. Этим и обуславливается невозможность существования решения типа $((k_2, k_3), k_1)$ с $k_1 + k_2 + k_3 > 4$.

2. Построим для рассматриваемой системы Льенара (2) все прогнозные бифуркационные кривые описанным выше способом. Тогда вся плоскость параметров (a_1, a_2) разбивается на подобласти (рис. 1), каждая из которых соответствует определенному типу решений системы прогноза (10). Отсюда и следует второе утверждение теоремы.

3. Доказательство третьего утверждения теоремы основывается на выборе точки из каждой подобласти плоскости (a_1, a_2) , соответствующей данному типу решений системы прогноза (5), построению соответствующей системы (2) и проверке существования предельных циклов численными методами (см. примеры 1 – 4).

4. Четвертое утверждение общеизвестно [8].

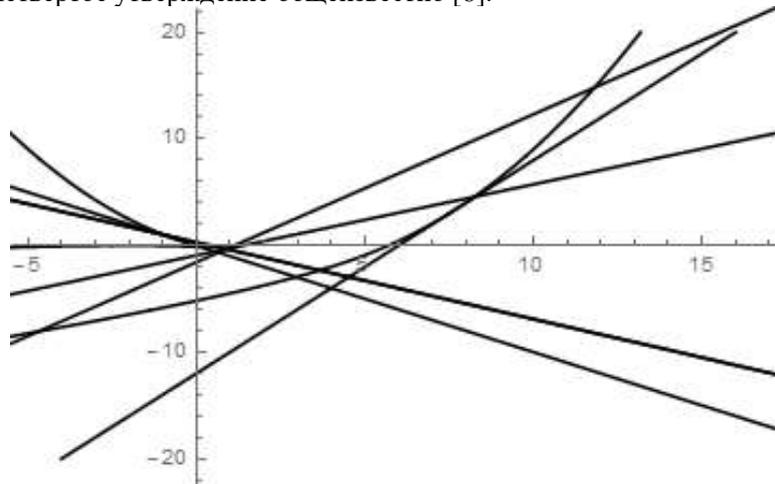


Рисунок 1. – Прогнозные бифуркационные кривые для системы Льенара (2)

При различных значениях параметра $L \in [-1, 0)$ все области сохраняются и сохраняется их взаимное расположение, что позволяет выдвинуть гипотезу о том, что данная теорема справедлива для всех $L < 0$.

Пример 1. Системы (2) с $a_1 = 0.685$, $a_2 = 2.31$, $a_3 = 1$, $a_4 = -0.01$, $L = -1/2$ имеют два предельных цикла вокруг одного седла, проходящих через точки $x_1 = -0.164213$, $x_2 = -0.719018$ (рис. 2 а).

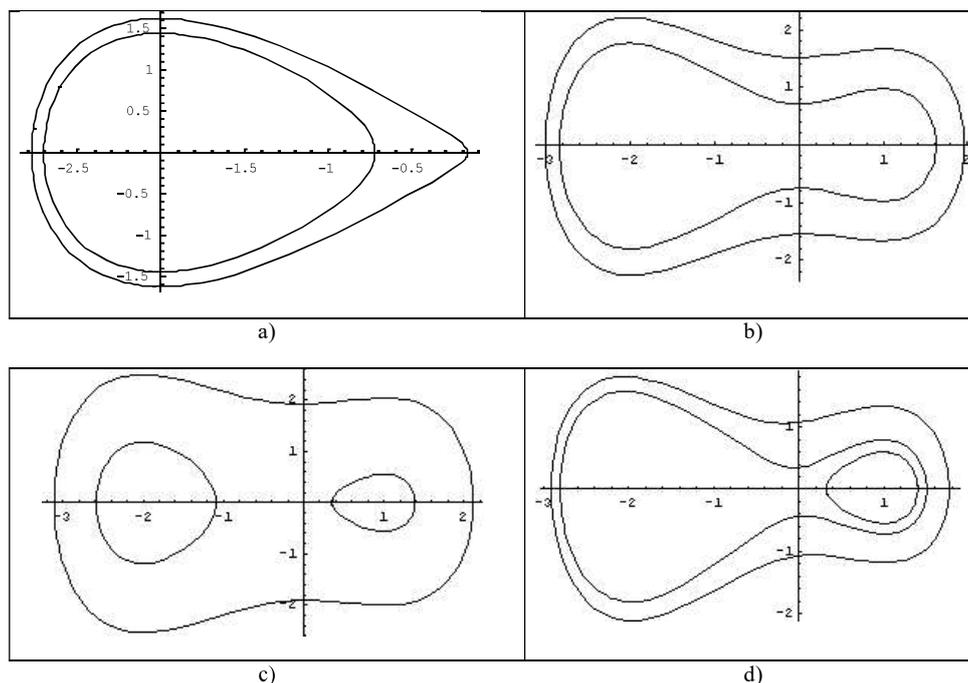


Рисунок 2. – Предельные циклы “нормального размера” систем Лъенара (2)

Пример 2. Система (2) с $a_1 = -0.022$, $a_2 = 0.004$, $a_3 = 0.01$, $a_4 = -0.01$, $L = -1/2$ имеет два предельных цикла, окружающих все состояния равновесия и проходящих через точки $x_1 = 1.9613$, $x_2 = 1.62612$ (рис. 2 б).

Пример 3. Система (2) с $a_1 = -0.018$, $a_2 = 0.01$, $a_3 = 0.01$, $a_4 = -0.01$, $L = -1/2$ имеет три предельных цикла, проходящих через точки $x_1 = -1.09$, $x_2 = 1.389$, $x_3 = 2.1145$ (по одному вокруг фокусов), и один предельный цикл, окружающий все три состояния равновесия (рис 2 с).

Пример 4. Система (2) с $a_1 = -0.164$, $a_2 = 0.084$, $a_3 = 0.1$, $a_4 = -0.01$, $L = -1/2$ имеет два предельных цикла, окружающих все состояния равновесия и проходящих через точки $x_1 = 1.50434$, $x_2 = 1.7665$, и один предельный цикл, окружающий особую точку $E(1,0)$ и проходящий через точку $x_3 = 1.398$ (рис. 2 д).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы “нормального размера”, окружающие группу особых точек систем Лъенара с симметрией / И. Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2019. – № 2(54). – С. 21–29.
2. **Perko, L. M.** Limit cycles of quadratic systems in the plane / L. M. Perko // Rocky Mountain of Mathematics. – 1984. – Vol. 14. – Pp. 619–644.
3. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы “нормального размера” систем Лъенара с пятью особыми точками / И. Н. Сидоренко // Международная математическая конференция “Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям”, посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова : материалы Междунар. науч. конф. Минск, 1–4 июня 2021 г. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2021. – С. 214–215.

4. *Сидоренко, И. Н.* Системы Куклеса с максимальным числом предельных циклов нормального размера / И. Н. Сидоренко, Л. А. Черкас // Веснік ГрДУ. Серыя 2. – 2008. – № 3. – С. 20–26.

5. *Smale, S.* Mathematical problems for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer. – 1998. – Vol. 20, №. 2. – Pp. 7–15.

6. *Черкас, Л. А.* Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков ; Учреждение образования “Гродненский гос. ун-т им. Я. Купалы”. – Гродно : ГрГУ, 2013. – 489 с.

7. *Сидоренко, И. Н.* Предельные циклы “нормального размера” систем Льенара, квадратичных и кубических систем : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 – дифференциальные уравнения / И. Н. Сидоренко ; Гродненский государственный университет имени Янки Купалы. – Гродно, 2010 – 26 с.

Поступила в редакцию 20.12.2021 г.

Контакты: sidorenko_in@msu.by (Сидоренко Иван Николаевич)

Sidorenko I. N. LIMIT CYCLES OF THE CUBIC LIÉNARD SYSTEM TYPE 2A+1S.

In this paper, a family of cubic Liénard systems, which has two anti-saddles points (2A) and one saddle point (1S) in the final part of the plane are investigated. It is known that the number of small-amplitude limit cycles for the family under consideration is 2. The goal of the research is to partition the plane of the parameters of the system into regions, in each of which the system has a given distribution of limit cycles. The methods for constructing specific Liénard systems with a predetermined number of limit cycles surrounding a group of singular points are considered and improved. A hypothesis about the absence of limit cycles surrounding the group of singular points for systems of the type under consideration is put forward.

Keywords: limit cycle of “normal size”, Liénard system, forecast method.

UDK 535.2:621.372

RAYLEIGH SERIES FOR DIELECTRIC WAVEGUIDES OF COMPLEX CROSS-SECTION

A. B. Sotsky

doctor of physical and mathematical sciences

Mogilev State A. Kuleshov University

An Ying

master's student

Mogilev State A. Kuleshov University

Sotsky A. B., An Ying. RAYLEIGH SERIES FOR DIELECTRIC WAVEGUIDES OF COMPLEX CROSS-SECTION.

With the use of the Rayleigh series in cylindrical functions for the longitudinal components of the electromagnetic field and the Green's theorem, an algebraic formulation of the problem of calculating the modes of three-dimensional open dielectric waveguides of complex cross-section is obtained. The effectiveness of the approach is demonstrated by examples of calculating dielectric waveguides with elliptical cross-sections. The illustrations of the internal convergence of the method are given, and the obtained dispersion characteristics of the modes are compared with the data of other less general numerical approaches.

Keywords: dielectric waveguide of complex cross-section, Rayleigh series, Green's theorem, elliptical waveguides.

Introduction

At present, open dielectric waveguides are widely used in optical communication and information systems [1]. However, the modes of such waveguides can be rigorously calculated only in the simplest cases of planar structures and structures with circular symmetry [2–4]. This stimulates the development of numerical methods for calculating the mode characteristics of open waveguides.

Of main interest are vector methods that allow a consistently refined solution of the waveguide problem to be obtained. Currently there are three groups of such methods [5–9].

The first group includes variational methods [3; 6; 9]. Strictly speaking, they are applicable only to the calculation of the guided modes of waveguides, since the variational principle requires square-integrable mode fields in the plane orthogonal to the waveguide axis. Variational methods are subdivided into approximate analytical ones having closed formulation [3] and more accurate numerical methods [6; 9]. In numerical methods to overcome the above limitation, perfectly matched layers (PMLs) are used that completely absorb the incident radiation, simulating an open space [5; 6]. However, in the case of open three-dimensional waveguides, this approach introduces uncontrollable errors, since only flat PMLs can completely absorb the radiation. Nevertheless, the variational method known as the finite element method is widely used to estimate the characteristics of the modes of open three-dimensional waveguides [6; 9]. This method is reduced to solving by the reduction method of infinite homogeneous algebraic systems with respect to the values of the components of the electromagnetic field in the interpolation nodes, the grid of which covers the cross section of the waveguide. Because it contains such uncertainties as errors of the reduction method and the use of PMLs, the boundaries of the applicability of such obtained estimates are not always clear.

The second group includes finite difference schemes [5; 8]. They imply a replacing the differential operators in the Maxwell's system by finite differences. Boundary conditions in the schemes are formulated with the use of PMLs, modeling the open space. As above, the waveguide problem is reduced to a solving a infinite homogeneous algebraic system for values of the mode field components in interpolation nodes. As a result, finite difference schemes have qualitative the same restrictions as the finite element method.

Methods of third group are methods of integral equations and Green's function [3]. They are determined as for guided well as for leaky modes of open dielectric waveguides and do not use PMLs. So these methods allow overcome one of above restrictions. But they also use infinite algebraic systems solved by reduction schemes.

The Green's function method has been developed for microstructured optical fibers formed in a dielectric matrix by air channels of circular cross section. In this case mode field components are represented by rows in cylindrical functions and the standard Graph addition theorem for the two dimensional Green's function is used. But if the channels have more complicated cross sections this approach loses its applicability. In this case it is naturally to trade to use the mode electromagnetic field presentation by Rayleigh series in cylindrical functions. So far, such series have been used only for rectangular dielectric waveguides in the so-called collocation method [2]. In this method the boundary conditions for the electromagnetic field along the waveguide cross section are approximately satisfied by the method of least squares [2].

It is also necessary to note the method of separation of variables, applicable to waveguides of elliptic cross section [5, 10]. But in this method calculations of the Mathieu functions and infinite matrix determinant are complex computational problems that have to be solved numerically, so it cannot be called analytical.

In this work a new full vectorial mode solver that combine the Green's function method and a field presentation by Rayleigh series is studied. This approach has extended area of applicability. In particular, it allows modes of elliptic dielectric waveguides to be investigated. On the other hand, this waveguide can be investigated by other numerical methods named above. Comparison of the results of various methods for modal characteristics of elliptical dielectric waveguides opens up opportunities to assess the applicability and convergence of various computational schemes, including the new method indicated above.

Formulation of the Green's function method

A cross-section of the waveguide under consideration is presented in Fig. 1. The waveguide is supposed to be infinite and regular in z direction. The inner and outer areas of the waveguide have relative permittivities ϵ_w and ϵ_s , respectively. Media in these areas are supposed to be non-magnetic, i. e. their magnetic permeability is equal to the magnetic permeability of vacuum μ . A mode with the time and z - dependency factor

$$\exp(i\omega t - ik_0\beta z) \quad (1)$$

propagates along the waveguide. Here $k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda$ is the wave number of vacuum, β is dimensionless mode propagation constant. Values of ϵ_w , ϵ_s and β in general case can be complex.

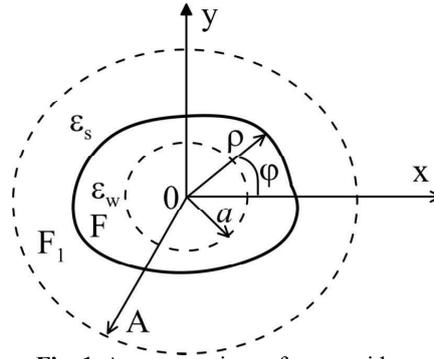


Fig. 1. A cross sections of waveguides under investigation

The electromagnetic field of the mode everywhere obeys the homogeneous Maxwell's equations [4]

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon(x, y)\varepsilon_0\mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (3)$$

where $\varepsilon(x, y)$ is a step-like function of x and y , equal to ε_w and ε_s within and out the waveguide, ε_0 is the permittivity of vacuum.

According to (1), the vectorial equations (2), (3) are equivalent to six scalar equations

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + i\beta H_y = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_x, \quad (4)$$

$$-i\beta H_x - \frac{\partial H_x}{\partial x} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_y, \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_z, \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\beta E_y = -i\omega\mu H_x, \quad (7)$$

$$i\beta E_x + \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega\mu H_y, \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z, \quad (9)$$

It follows from (4), (5), (7), (8), that

$$E_x = -\frac{i}{\chi^2} \left(k_0\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \quad (10)$$

$$E_y = -\frac{i}{\chi^2} \left(k_0\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \quad (11)$$

$$H_x = -\frac{i}{\chi^2} (k_0 \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial y}), \quad (12)$$

$$H_y = -\frac{i}{\chi^2} (k_0 \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial x}), \quad (13)$$

where $\chi^2 = k_0^2 (\epsilon - \beta^2)$. The substitution of (10), (11) into (9) and of (12), (13) into (6) yields the system of two second-order differential equations with respect to E_z and H_z :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2 \kappa_s^2 E_z = f_1, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_0^2 \kappa_s^2 H_z = f_2, \quad (15)$$

where $\kappa_s^2 = \epsilon_s - \beta^2$,

$$f_1 = -\frac{\chi^2}{\epsilon \epsilon_0} \left\{ \frac{k_0 \beta}{\omega} \left[\frac{\partial \chi^{-2}}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial \chi^{-2}}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] + \frac{\partial (\epsilon \epsilon_0 \chi^{-2})}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial (\epsilon \epsilon_0 \chi^{-2})}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right\} - k_0^2 (\epsilon - \epsilon_s) E_z, \quad (16)$$

$$f_2 = -\frac{k_0 \beta}{\omega \mu} \left[\frac{\partial \chi^{-2}}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial \chi^{-2}}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right] - \frac{\partial \chi^{-2}}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial \chi^{-2}}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial y} - k_0^2 (\epsilon - \epsilon_s) H_z. \quad (17)$$

So, the waveguide problem is reduced to solving the system (14), (15) with respect to the longitudinal components of the mode electromagnetic field. Next computing the total mode field can be made by formulas (10) – (13).

According to Eqs (16), (17), Eqs (14), (15) are mutually coupled on the boundary of the waveguide only. Within the waveguide they separate into two independent equations

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2 \kappa_w^2 E_z = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_0^2 \kappa_w^2 H_z = 0, \quad (19)$$

where $\kappa_w = \sqrt{\epsilon_w - \beta^2}$. Similarly, out the waveguide

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2 \kappa_s^2 E_z = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_0^2 \kappa_s^2 H_z = 0. \quad (21)$$

where $\kappa_s = \sqrt{\epsilon_s - \beta^2}$.

In the waveguide area $r = \sqrt{x^2 + y^2} < \rho(\varphi)$ (see Fig. 1) finite solutions of Eqs (18), (19) can be presented as series in the cylindrical functions [2]

$$E_z = \sum_{v=-m}^m e_v^- \exp(iv\varphi) J_v(\kappa_w k_0 r), \quad (22)$$

$$H_z = \sum_{v=-m}^m h_v^- \exp(iv\varphi) J_v(\kappa_w k_0 r), \quad (23)$$

where $J_v(\kappa_w k_0 r)$ are the Bessel's functions of integer orders, r and φ are the polar coordinates (see Fig. 1), e_v^- , h_v^- are unknown coefficients, m is the order of the series reduction. The function $\rho(\varphi)$ describes the perimeter of the waveguide cross section (see Fig. 1).

Out the waveguide series analogous to (22), (23) are [2]:

$$E_z = \sum_{v=-m}^m e_v^+ \exp(iv\varphi) H_v^{(2)}(\kappa_s k_0 r), \quad (24)$$

$$H_z = \sum_{v=-m}^m h_v^+ \exp(iv\varphi) H_v^{(2)}(\kappa_s k_0 r), \quad (25)$$

where e_v^+ , h_v^+ are unknown coefficients, $\kappa_s = \sqrt{\varepsilon_s - \beta^2}$ are the Hankel's function of the second kind and integer orders. Branch of the radical $\kappa_s = \sqrt{\varepsilon_s - \beta^2}$ depends on the type of the mode under investigation. If the mode is guided, then $\text{Im}(\kappa_s) < 0$, and if the mode is leaky, then $\text{Re}(\kappa_s) > 0$ [3].

In the literature, to solve the waveguide problem using Rayleigh's series (22) – (25), the collocation method was used [2]. In it, after substituting (22) – (25) into (10) – (13), the tangential components of the electromagnetic field on the contour of the waveguide boundary are calculated within the limits from the sides of the waveguide area and its surrounding. Next, the mean-square functional of the residual of these components is constructed. From the requirement of the minimum of the functional, a homogeneous algebraic system of dimension $4(2m+1) \times 4(2m+1)$ with respect to the values of h_v^\pm , e_v^\pm is obtained. The propagation constants β of the waveguide modes are determined from the condition that the determinant of this system is equal to zero. Next, the mode fields are calculated using formulas (10) – (13) after expressing all amplitudes through one of them as a result of solving an inhomogeneous algebraic system with a matrix of rank $8m+3$.

The collocation method is applicable to the study of open waveguides with a simple cross-sectional shape. In more complex cases, for example, in the study of microstructured fibers, it loses its applicability. In this thesis, a more general formulation of a boundary value problem based on Green's theorem is used, free from the indicated restrictions.

To solve the system (14), (15) the two-dimensional electrodynamics Green's function [3]

$$G = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(\kappa_s k_0 R), \quad (26)$$

where $R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$, is used. This function obeys the equation [3]

$$(\Delta' + k_0^2 \kappa_s^2)G = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (27)$$

where $\Delta' = \partial^2 / \partial x'^2 + \partial^2 / \partial y'^2$, $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ is the two - dimensional Dirac's delta function.

Let's multiply Eq. (15) by G , Eq. (27) – by H_z and integrate the results over the circular area F_1 of radius A covering the waveguide (see Fig.1). Then subtract them term by term from each other. As a result,

$$\int_{F_1} [G\Delta'H_z(x',y') - H_z(x',y')\Delta'G]dx'dy' = \int_{F_1} f_2(x',y')Gdx'dy' - \begin{cases} H_z(x,y) & \text{in } F_1 \\ 0 & \text{out of } F_1 \end{cases} \quad (28)$$

Application to the left-hand part of Eq. (28) the Green's theorem [11] gives

$$A \int_0^{2\pi} \left(G \frac{\partial H_z}{\partial r'} - H_z \frac{\partial G}{\partial r'} \right)_{r'=A} d\varphi' = \int_{F_1} f G dx' dy' - \begin{cases} H_z(x,y) & \text{in } F_1 \\ 0 & \text{out of } F_1 \end{cases}, \quad (29)$$

where $x' = A \cos \varphi'$, $y' = A \sin \varphi'$, $\partial / \partial n'$ means derivative by outer normal to the area F_1 boundary.

Since the function (16) differs from zero in the waveguide area F only, by analogy with (29) one can obtain next formula

$$\oint \left(G \frac{\partial H_z}{\partial n'} - H_z \frac{\partial G}{\partial n'} \right)_{r'=\rho(\varphi')+0} d\tau' = \int_{F_1} f G dx' dy' - \begin{cases} H_z(x,y) & \text{in } F \\ 0 & \text{out of } F \end{cases}, \quad (30)$$

where $d\tau'$ is the infinitesimal length of the waveguide area perimeter (see Fig. 1) and $\partial / \partial n'$ means derivative by outer normal to the area F boundary. It should be noted that the integrand in the left hand part of Eq (30) should be taken in the limit

$$r' \rightarrow \rho(\varphi') + 0. \quad (31)$$

For practical calculations it is convenient to write the left side of equation (2.1330) in polar coordinates $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ and φ' :

$$\begin{aligned} & \oint \left(G \frac{\partial H_z}{\partial n'} - H_z \frac{\partial G}{\partial n'} \right)_{r'=\rho(\varphi')+0} d\tau' = \\ & = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi'} \right)^2 + \rho^2} \left(G \frac{\partial H_z}{\partial n'} - H_z \frac{\partial G}{\partial n'} \right)_{r'=\rho(\varphi')+0} d\varphi', \end{aligned} \quad (32)$$

where integrands are calculated in the limit (31) and

$$\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi'} \right)^2 + \rho^2}} \left(\rho \frac{\partial}{\partial r'} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi'} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \right). \quad (33)$$

Excluding the term

$$\int_{F_1} f G dx' dy'$$

from Eqs (29), (30), we come to the functional equation

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi'}\right)^2 + \rho^2} \left(G \frac{\partial H_z}{\partial n'} - H_z \frac{\partial G}{\partial n'} \right)_{r'=\rho(\varphi')+0} d\varphi' -$$

$$- A \int_0^{2\pi} \left(G \frac{\partial H_z}{\partial r'} - H_z \frac{\partial G}{\partial r'} \right)_{r'=A} d\varphi' = \begin{cases} 0 & \text{in } F \\ 0 & \text{out of } F_1. \end{cases} \quad (34)$$

The analogous analysis of Eq. (14) results in the functional equation analogous to (34):

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi'}\right)^2 + \rho^2} \left(G \frac{\partial E_z}{\partial n'} - E_z \frac{\partial G}{\partial n'} \right)_{r'=\rho(\varphi')+0} d\varphi' -$$

$$- A \int_0^{2\pi} \left(G \frac{\partial E_z}{\partial r'} - E_z \frac{\partial G}{\partial r'} \right)_{r'=A} d\varphi' = \begin{cases} 0 & \text{in } F \\ 0 & \text{out of } F_1. \end{cases} \quad (35)$$

The first step towards transforming the functional equations (34), (35) into algebraic equations with respect to coefficients h_v^\pm , e_v^\pm of the series (6) – (8) is to express through these coefficients the functions H_z , $\partial H_z / \partial n'$, E_z , $\partial E_z / \partial n'$ taken in the limit (31). Due to continuity of the electromagnetic field tangential components E_z and H_z , on the perimeter of the waveguide, for these components series (22), (23) still be valid. To find the derivatives

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial n'} \right)_{r'=\rho(\varphi')+0}, \quad \left(\frac{\partial E_z}{\partial n'} \right)_{r'=\rho(\varphi')+0}$$

it is sufficient to use the conditions of continuity of the tangential components of the fields \mathbf{H} and \mathbf{E} on the perimeter of the waveguide lied in the plane $z=0$ (see Fig. 1). Then using Eqs (10) – (13), one can obtain

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial n'} \right)_{r'=\rho(\varphi')+0} = \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial n'} \right)_{r'=\rho(\varphi')-0} + \beta \left(1 - \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2} \right) \left(\frac{\partial E'_z}{\partial \tau} \right)_{r'=\rho(\varphi')}, \quad (36)$$

$$\left(\frac{\partial E'_z}{\partial n'} \right)_{r'=\rho(\varphi')+0} = \frac{\kappa_s^2 \varepsilon_w}{\kappa_w^2 \varepsilon_s} \left(\frac{\partial E'_z}{\partial n'} \right)_{r'=\rho(\varphi')-0} - \left(1 - \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2} \right) \frac{\beta}{\varepsilon_s} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \tau} \right)_{r'=\rho(\varphi')}, \quad (37)$$

where $E'_z = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu} E_z$,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi'}\right)^2 + \rho^2}} \left(\frac{d\rho}{d\varphi'} \frac{\partial}{\partial r'} + \frac{\partial}{\partial \varphi'} \right). \quad (38)$$

The second and final step consist in the use of the Graf's addition theorem consequences [11]

$$H_0^{(2)}(\kappa_s k_0 R) = \sum_{v=-m}^m \exp[v(\varphi - \varphi')] \begin{cases} H_v^{(2)}(k_0 \kappa_s r') J_v(k_0 \kappa_s r) & r < r' \\ H_v^{(2)}(k_0 \kappa_s r) J_v(k_0 \kappa_s r') & r > r', \end{cases} \quad (39)$$

where $r = |\mathbf{r}|$, $r' = |\mathbf{r}'|$. According to (33), (34), (36), (38), (39), within a circular area of radius $a < \rho_{\min}$, where ρ_{\min} is the function $\rho(\varphi)$ minimum (see Fig.1),

$$\sum_{\nu=-m}^m \exp(i\nu\varphi) J_{\nu}(k_0 \kappa_w r) \sum_{\mu=-m}^m (HHI_{\nu\mu} h_{\mu}^{-} + HEI_{\nu\mu} e_{\mu}^{-}) = 0, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} HHI_{\nu\mu} = & \int_0^{2\pi} d\varphi' \exp[i(\mu - \nu)\varphi'] \times \\ & \times \{k_0 \kappa_s \rho [(\kappa_s / (2\kappa_w)) [(J_{\mu-1}(k_0 \kappa_w \rho) - J_{\mu+1}(k_0 \kappa_w \rho)) H_{\nu}^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho) - \\ & - J_{\mu}(k_0 \kappa_w \rho) (H_{\nu-1}^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho) - H_{\nu+1}^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho))] - \\ & - i \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi'} (\nu + \mu \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2}) H_{\nu}^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho) J_{\mu}(k_0 \kappa_w \rho)\}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} HEI_{\nu\mu} = & \beta (1 - \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2}) \int_0^{2\pi} d\varphi' \exp[i(\mu - \nu)\varphi'] \times \\ & \times \{i\mu J_{\mu}(k_0 \kappa_w \rho) + \frac{k_0 \kappa_w}{2} \frac{d\rho}{d\varphi'} [(J_{\mu-1}(k_0 \kappa_w \rho) - J_{\mu+1}(k_0 \kappa_w \rho))] H_{\nu}^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho)\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Within the open area $r > A$ (see Fig.1)

$$\sum_{\nu=-m}^m \exp(i\nu\varphi) H_{\nu}^{(2)}(k_0 \kappa_s r) \sum_{\mu=-m}^m (h_{\nu}^{+} - HHO_{\nu\mu} h_{\mu}^{-} - HEO_{\nu\mu} e_{\mu}^{-}) = 0, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} HHO_{\nu\mu} = & \int_0^{2\pi} d\varphi' \exp[i(\mu - \nu)\varphi'] \times \\ & \times \{k_0 \kappa_s \rho [(\kappa_s / (2\kappa_w)) [(J_{\mu-1}(k_0 \kappa_w \rho) - J_{\mu+1}(k_0 \kappa_w \rho)) J_{\nu}(k_0 \kappa_s \rho) - \\ & - J_{\mu}(k_0 \kappa_w \rho) (J_{\nu-1}(k_0 \kappa_s \rho) - J_{\nu+1}(k_0 \kappa_s \rho))] - \\ & - i \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi'} (\nu + \mu \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2}) J_{\nu}(k_0 \kappa_s \rho) J_{\mu}(k_0 \kappa_w \rho)\}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} HEO_{\nu\mu} = & \beta (1 - \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2}) \int_0^{2\pi} d\varphi' \exp[i(\mu - \nu)\varphi'] \times \\ & \times \{i\mu J_{\mu}(k_0 \kappa_w \rho) + \frac{k_0 \kappa_w}{2} \frac{d\rho}{d\varphi'} [(J_{\mu-1}(k_0 \kappa_w \rho) - J_{\mu+1}(k_0 \kappa_w \rho))] J_{\nu}(k_0 \kappa_s \rho)\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Obtaining Eqs (41) – (45) the relation

$$\frac{dZ_{\nu}}{dz} = 0.5(Z_{\nu-1} - Z_{\nu+1}).$$

where $Z_{\nu}(z)$ is any cylindrical function [11], was used.

Since functions $\exp(i\nu\varphi) J_{\nu}(k_0 \kappa_w r)$ in (40) and $\exp(i\nu\varphi) H_{\nu}^{(2)}(k_0 \kappa_s r)$ in (43) are linearly independent, (40) and (43) result in algebraic equations

$$\sum_{\mu=-m}^m (HHI_{\nu\mu} h_{\mu}^{-} + HEI_{\nu\mu} e_{\mu}^{-}) = 0 \quad (\nu = \overline{-m, m}), \quad (46)$$

$$h_v^+ = \sum_{\mu=-m}^m (HHO_{v\mu} h_\mu^- + HEO_{v\mu} e_\mu^-) \quad (v = \overline{-m, m}). \quad (47)$$

An analogous analysis of functional equations (35) yields

$$\sum_{\mu=-m}^m (EHI_{v\mu} h_\mu^- + EEI_{v\mu} e_\mu^-) = 0 \quad (v = \overline{-m, m}), \quad (48)$$

$$e_v^+ = \sum_{\mu=-m}^m (EHO_{v\mu} h_\mu^- + EEO_{v\mu} e_\mu^-) \quad (v = \overline{-m, m}), \quad (49)$$

$$EHI_{v\mu} = -\frac{\beta}{\varepsilon_s} \left(1 - \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi' \exp[i(\mu - v)\varphi'] \times \quad (50)$$

$$\times \{i\mu J_\mu(k_0 \kappa_w \rho) + \frac{k_0 \kappa_w}{2} \frac{d\rho}{d\varphi'} [(J_{\mu-1}(k_0 \kappa_w \rho) - J_{\mu+1}(k_0 \kappa_w \rho))] \} H_v^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho),$$

$$EEI_{v\mu} = \int_0^{2\pi} d\varphi' \exp[i(\mu - v)\varphi'] \times$$

$$\times \{k_0 \kappa_s \rho [(\kappa_s \varepsilon_w / (2\kappa_w \varepsilon_s)) (J_{\mu-1}(k_0 \kappa_w \rho) - J_{\mu+1}(k_0 \kappa_w \rho)) H_v^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho) - \quad (51)$$

$$- J_\mu(k_0 \kappa_w \rho) (H_{v-1}^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho) - H_{v+1}^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho))] -$$

$$- i \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi'} \left(v + \mu \frac{\kappa_s^2 \varepsilon_w}{\kappa_w^2 \varepsilon_s} \right) H_v^{(2)}(k_0 \kappa_s \rho) J_\mu(k_0 \kappa_w \rho) \},$$

$$EHO_{v\mu} = -\frac{\beta}{\varepsilon_s} \left(1 - \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi' \exp[i(\mu - v)\varphi'] \times \quad (52)$$

$$\times \{i\mu J_\mu(k_0 \kappa_w \rho) + \frac{k_0 \kappa_w}{2} \frac{d\rho}{d\varphi'} [(J_{\mu-1}(k_0 \kappa_w \rho) - J_{\mu+1}(k_0 \kappa_w \rho))] \} J_v(k_0 \kappa_s \rho),$$

$$EEO_{v\mu} = \int_0^{2\pi} d\varphi' \exp[i(\mu - v)\varphi'] \times$$

$$\times \{k_0 \kappa_s \rho [(\varepsilon_w \kappa_s / (2\kappa_w \varepsilon_s)) (J_{\mu-1}(k_0 \kappa_w \rho) - J_{\mu+1}(k_0 \kappa_w \rho)) J_v(k_0 \kappa_s \rho) - \quad (53)$$

$$- J_\mu(k_0 \kappa_w \rho) (J_{v-1}(k_0 \kappa_s \rho) - J_{v+1}(k_0 \kappa_s \rho))] -$$

$$- i \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi'} \left(v + \mu \frac{\kappa_s^2 \varepsilon_w}{\kappa_w^2 \varepsilon_s} \right) J_v(k_0 \kappa_s \rho) J_\mu(k_0 \kappa_w \rho) \}.$$

Thus, the diffraction problem on the investigation of dielectric waveguides of complex cross-section by the Green's function method is reduced to solving the homogeneous algebraic system (46), (48) with respect to coefficients of Rayleigh expansions (22), (23) for longitudinal components of the mode electromagnetic field within the waveguide area. Possible values of the mode propagation constants β are zeros of the system (46), (48) determinant. Finding these zeros play a key role and can be performed by the contour integration method [3]. Next computing the outer mode field consists in the use of expansions (24), (25) with direct computing of amplitudes of the cylindrical functions by formulas (47), (49). The shape of the cross-section of the concrete waveguide is taken into account by the function $\rho(\varphi')$ entering the integral formulas for matrix elements (41), (42), (44), (45), (50) – (53).

To check the correctness of the developed computational scheme, let us consider the passage to the limit of a waveguide investigated into a round waveguide, for which there is an analytical solution to the waveguide problem [4]. In this case $\rho(\varphi') = a = const$. As a result, the integrals in Eqs (41), (42), (44), (45), (50) – (53) can be calculated analytically. The result is:

$$\begin{aligned}
 HHI_{\nu\mu} &= \pi\delta_{\nu\mu}k_0\kappa_s a \left\{ \frac{\kappa_s}{\kappa_w} [J_{\mu-1}(k_0\kappa_w a) - J_{\mu+1}(k_0\kappa_w a)] H_{\mu}^{(2)}(k_0\kappa_s a) - \right. \\
 &\quad \left. - J_{\mu}(k_0\kappa_w a) [H_{\mu-1}^{(2)}(k_0\kappa_s a) - H_{\mu+1}^{(2)}(k_0\kappa_s a)] \right\}, \\
 HEI_{\nu\mu} &= 2\pi\delta_{\nu\mu}\beta \left(1 - \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2}\right) i\mu J_{\mu}(k_0\kappa_w a) H_{\mu}^{(2)}(k_0\kappa_s a) \\
 EHI_{\nu\mu} &= -2\pi\delta_{\nu\mu} \frac{\beta}{\varepsilon_s} \left(1 - \frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2}\right) i\mu J_{\mu}(k_0\kappa_w a) H_{\mu}^{(2)}(k_0\kappa_s a) \\
 EEI_{\nu\mu} &= \pi\delta_{\nu\mu}k_0\kappa_s a \left\{ \frac{\kappa_s\varepsilon_w}{\kappa_w\varepsilon_s} [J_{\mu-1}(k_0\kappa_w a) - J_{\mu+1}(k_0\kappa_w a)] H_{\mu}^{(2)}(k_0\kappa_s a) - \right. \\
 &\quad \left. - J_{\mu}(k_0\kappa_w a) [H_{\mu-1}^{(2)}(k_0\kappa_s a) - H_{\mu+1}^{(2)}(k_0\kappa_s a)] \right\},
 \end{aligned}$$

where $\delta_{\nu\mu}$ is the Kroneker's delta. In this case determinant of the system (46), (48) of dimension 2×2 is

$$\begin{aligned}
 \det &= \frac{(\kappa_s k_0 a)^2}{4} \left\{ \frac{\kappa_s}{\kappa_w} [J_{\mu-1}(\kappa_w k_0 a) - J_{\mu+1}(\kappa_w k_0 a)] H_{\mu}^{(2)}(\kappa_s k_0 a) - \right. \\
 &\quad \left. - J_{\mu}(\kappa_w k_0 a) [H_{\mu-1}^{(2)}(\kappa_s k_0 a) - H_{\mu+1}^{(2)}(\kappa_s k_0 a)] \right\} \times \\
 &\quad \left(\frac{\kappa_s}{\kappa_w} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} [J_{\mu-1}(\kappa_w k_0 a) - J_{\mu+1}(\kappa_w k_0 a)] H_{\mu}^{(2)}(\kappa_s k_0 a) - \right. \\
 &\quad \left. - J_{\mu}(\kappa_w k_0 a) [H_{\mu-1}^{(2)}(\kappa_s k_0 a) - H_{\mu+1}^{(2)}(\kappa_s k_0 a)] \right) - \\
 &\quad - \mu^2 \left(\frac{\kappa_s^2}{\kappa_w^2} - 1 \right)^2 \frac{\beta^2}{\varepsilon_s} [J_{\mu}(\kappa_w k_0 a) H_{\mu}^{(2)}(\kappa_s k_0 a)]^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Using the new variable $\gamma = i\kappa_s$ and taking into account identities [11]

$$H_{\mu}^{(l)}[-(-1)^l i\gamma k_0 a] = (-1)^l \frac{2i}{\pi} \exp\left[(-1)^l i\mu \frac{\pi}{2}\right] K_{\mu}(\gamma k_0 a),$$

where $l = 1, 2$, one can reduce (54) to the form

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_s} \frac{\gamma^2 k_0 a}{2\kappa_w} \frac{J_{\mu-1}(\kappa_w k_0 a) - J_{\mu+1}(\kappa_w k_0 a)}{J_{\mu}(\kappa_w k_0 a)} + i\gamma k_0 a \frac{H_{\mu-1}^{(1)}(i\gamma k_0 a) - H_{\mu+1}^{(1)}(i\gamma k_0 a)}{2H_{\mu}^{(1)}(i\gamma k_0 a)} \right] \times \\
 &\times \left[\frac{\gamma^2 k_0 a}{2\kappa_w} \frac{J_{\mu-1}(\kappa_w k_0 a) - J_{\mu+1}(\kappa_w k_0 a)}{J_{\mu}(\kappa_w k_0 a)} + i\gamma k_0 a \frac{H_{\mu-1}^{(1)}(i\gamma k_0 a) - H_{\mu+1}^{(1)}(i\gamma k_0 a)}{2H_{\mu}^{(1)}(i\gamma k_0 a)} \right] = \\
 &= \frac{\mu^2 \varepsilon_s \beta^2}{\kappa_w^4} \left(1 - \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_s}\right)^2,
 \end{aligned}$$

that is in agreement with the classical dispersion equation for the round dielectric waveguide [4].

The limit transition obtained confirms validation of the approach developed. In the next section it to be applied to the study of modes of open dielectric waveguides of elliptical cross section.

Computation of open dielectric waveguides of elliptical cross section

To test the method developed in the previous section it is naturally to compare its results with ones of less general computational schemes for waveguides for which these schemes are applicable. Such waveguides include dielectric waveguides of elliptical cross section, which are of significant practical interest.

A cross section of an open dielectric elliptical waveguide is shown in inset to Figs 2 and 3. Here a and b are semi-major and semi-minor axes of the ellipse. In this case

$$\rho(\varphi) = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{absin(2\varphi)(b^2 - a^2)}{2\left(\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}\right)^3}.$$

As a result, matrix elements (41), (42), (44), (45), (50) – (53) have to be computed numerically only. Corresponding calculations were performed with a Fortran computer program. Integrals were computed by the Simpson's scheme. In computations of cylindrical functions the row

$$J_\nu(z) = \frac{z^{2\nu}}{2^\nu 0!\nu!} - \frac{z^{2\nu+2}}{2^{\nu+2} 1!(\nu+1)!} + \frac{z^{2\nu+4}}{2^{\nu+4} 2!(\nu+2)!} - \dots$$

if $|z| \leq 10$, or the formula

$$J_\nu(z) = 0.5[H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)]$$

if $|z| > 10$ [11] were used. Henkel's functions were taken in the Poisson's presentation [11]

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(2z)^\nu \exp[i(z - \pi\nu/2 - \pi/4)]}{(2\nu-1)!!\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp(-zt)[t(1+it/2)]^\nu}{\sqrt{t(1+it/2)}} dt,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(2z)^\nu \exp[-i(z - \pi\nu/2 - \pi/4)]}{(2\nu-1)!!\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp(-zt)[t(1+it/2)]^\nu}{\sqrt{t(1-it/2)}} dt.$$

Fig.2 illustrates the dispersion of the fundamental modes with maximal propagation constants of elliptic waveguides of different formats $\phi = b/a$. Here $B = (\beta^2 - \epsilon_s) / (\epsilon_w - \epsilon_s)$ is the normalized mode propagation constant.

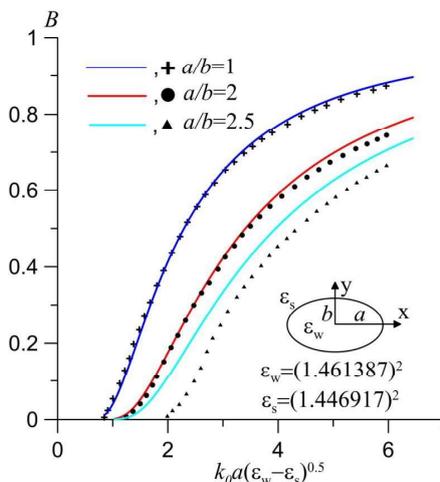


Fig. 2. Dispersion curves of the fundamental mode of elliptic waveguides of different formats. Solid curves – developed method, discrete points – literature data [10]

Discrete points in Fig. 2 – results of the work [10] obtained by the method of separation of variables in elliptic coordinates. This separation of variables allows electromagnetic field in the Mathieu functions to be expressed. However in this case the dispersion equation for β has very complex form of the infinite matrix determinant. Numerically finding zeros of this determinant is not an easy task, it can be accompanied by computational errors. Apparently, it is precisely these errors that explain the discrepancy between the solid curves and discrete points in Fig. 2. In particular, for $a/b = 1$ (round waveguide) the Green’s function method gives an exact analytical solution to the waveguide problem. Therefore, the systematic deviation of discrete points (crosses) from the solid curve in the upper part of the dispersion dependence for waveguide format 1 in Fig. 2 indicates errors in the computational scheme of work [10]. According to Fig. 2, these errors tend to increase with increasing the waveguide format.

High accuracy of the developed Green’s function method is obvious from Table, which illustrates its internal convergence.

The internal convergence of the Green’s function computational scheme in relation to the waveguide described in Fig.2 at $k_0 a \sqrt{\epsilon_w - \epsilon_s} = 4$.

$\phi = a/b$	m	B
1	1	0.771859
	3	0.771859
	5	0.771859
	7	0.771859
	9	0.771859
2	1	0.563500
	3	0.590069
	5	0.590112
	7	0.590111
	9	0.590111

Table ending

$\phi = a/b$	m	B
2.5	1	0.464619
	3	0.506356
	5	0.503078
	7	0.503074
	9	0.503074

Another test of the effectiveness of the developed approach is shown in Fig. 3, where the dispersion curves of the fundamental E_{x11} and first higher E_{x21} modes of elliptical waveguides with formats 2 and 3 computed in the our approach and by the numerical finite element method [9] are compared.

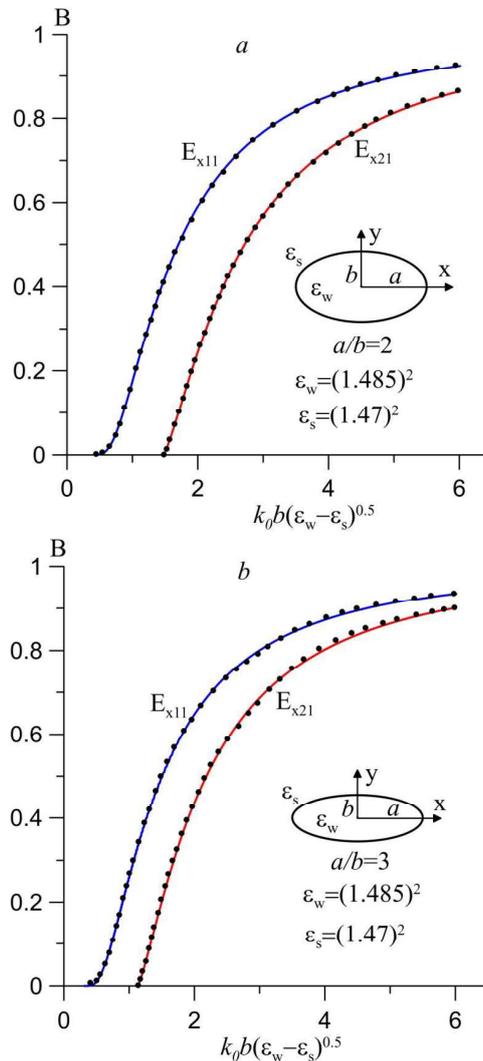


Fig. 3. Dispersion curves of the fundamental E_{x11} and the first higher E_{x21} modes of elliptic waveguides of formats $\phi = 2$ (a) and $\phi = 3$ (b). Solid curves – developed method, discrete points – the finite element method [9]

The mode designation E_{xij} in Fig. 3 indicates the main component of its electric field and the number of maxima in the intensity distribution of the mode over the waveguide cross section in x (i) and y (j) directions, respectively [3].

The results of both approaches almost coincide within graphic errors. As the finite element method is well suited for guided modes of elliptic waveguides [9], this comparison again confirms high precision of the method developed.

Conclusion

As a result of the work performing, modern methods for calculating three-dimensional open dielectric waveguides were studied using the Green's theorem and Rayleigh series has been developed, suitable for calculating open dielectric waveguides of complex cross-section. Details of the method have been concretized for dielectric waveguides of elliptic cross section. For these waveguides fast inner convergence of the method has been confirmed and dispersion curves of the fundamental and first high order modes have been computed and compared with known literature data. The comparison confirms high efficiency of the approach developed, which even turned out to be more accurate than the classic method of separation of variables.

This work was supported by the State Research Program of the Republic of Belarus 1.15 "Electronics and photonic for innovation".

REFERENCES

1. **Selvaraja, S. K.** Review of Optical Waveguides / S. K. Selvaraja, P. Sethi // Intech Open – 2018. P.95 – 129. <http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.77150>
2. **Yeh, C.** The Essence of Dielectric Waveguides / C. Yeh, F. I. Shimabukuro – Springer. – 2008. – 512 p.
3. **Sotsky, A. B.** Theory of optical waveguide elements / A. B. Sotsky – Mogilev State A. Kuleshov University. – 2011. – 475 p.
4. **Marcuse, D.** Light Transmission Optics / D. Marcuse – Van Nostrand Reinhold Company. – 1972. – 576 p.
5. **Huang, V. P.** Methods for Modeling Guided-Waves Optoelectronic Devices / V. P. Huang – Cambridge, Massachusetts. – 1995. – 181 p.
6. **Kio, W.** Study of photonic crystals on thin film lithium niobate for sensing applications / W. Kio – Universite de Franche-Comte. – 2016. – 160 p.
7. **Zhu, J.** An Efficient Solver of Eigenmodes for a Class of Complex Optical Waveguides / J. Zhu, L. Li // Journal of Applied & Computational Mathematics 2020. Vol. 9:1. DOI: 10.37421/jacm.2020.9.449
8. **Zhu, Z.** Full-vectorial finite-difference analysis of microstructured optical fibers / Z. Zhu, T. G. Brown // Optics Express. – 2002. – Vol. 10. – No. 17. – P. 853–864.
9. **Eguchi, M.** Accurate Finite-Element Analysis of Dual-Mode Highly Elliptical-Core Fibers / M. Eguchi, M. Koshihara // Journal of Lightwave Technology. 1994. Vol. 12, N 4. – P. 607–613.
10. **Krasinski, Z.** Highly-birefringent elliptical structures / Z. Krasinski, A. Majewski // Optica Applicata. 1999. – Vol. 29, N 1–2. – P. 52–70.
11. **Korn, G.** Mathematical Handbook / G. Korn, T. Korn. – McGraw-Hill Book Company. – 1968. – 831p.

Поступила в редакцию 03.09.2021 г.

Контакты: ab_sotsky@mail.ru (Сотский Александр Борисович)

Сотский А. Б., An Ying. РЯДЫ РЭЛЕЯ ДЛЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ СЛОЖНОГО СЕЧЕНИЯ.

С использованием рядов Рэлея по цилиндрическим функциям для продольных компонент электромагнитного поля и теоремы Грина получена алгебраическая формулировка задачи о расчете мод трехмерных открытых диэлектрических волноводов сложного сечения. Эффективность подхода продемонстрирована на примерах расчета диэлектрических волноводов эллиптического поперечного сечения. Даны иллюстрации внутренней сходимости метода и выполнено сравнение полученных дисперсионных характеристик мод с данными других менее общих численных методов.

Ключевые слова: диэлектрические волноводы сложного сечения, ряды Рэлея, теорема Грина, эллиптические волноводы.

УДК 535.32: 535.51: 538.975

ОПТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛЕНОК ОКСИДА НИКЕЛЯ, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ ВЧ МАГНЕТРОННОГО НАПЫЛЕНИЯ

И. В. Ивашкевич

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Определена дисперсия оптических характеристик пленок оксида никеля в видимой области спектра и установлена их зависимость от условий формирования пленок методом ВЧ магнетронного напыления. Сравнительный анализ рассчитанных спектров показателей преломления и поглощения показал, что в значительной мере на ход дисперсионных кривых оказывает тип подложки и ее температура. Пленки, осажденные на кремниевые подложки, обладают наиболее оптимальными свойствами для применения в фотоэлектрических элементах.

Ключевые слова: спектральная эллипсометрия, оптические характеристики, тонкие пленки.

Введение

Благодаря своим уникальным оптическим и электрическим свойствам, а также хорошей химической стабильности оксид никеля (NiO) в последнее время стал наиболее перспективным материалом для фотоэлектрических солнечных элементов, в первую очередь в качестве прозрачных проводящих электродов [1–2]. Поэтому необходимо разработать технологические режимы получения тонких пленок NiO с оптимальными характеристиками для их применения в фотовольтаике. Наиболее подходящим методом исследования оптических и электрических свойств таких пленок является метод спектральной эллипсометрии в силу своей информативности и как неразрушающий метод [3].

В данной работе для установления влияния условий формирования тонких пленок оксида никеля методом высокочастотного магнетронного распыления на их оптические свойства исследуются оптические характеристики (показатели преломления $n(\lambda)$ и поглощения $k(\lambda)$) данных пленок, определенные методом спектральной эллипсометрии.

Эксперимент

Для исследования была предоставлена серия образцов пленок оксида никеля, осажденных на кремниевые и стеклянные подложки методом высокочастотного магнетронного распыления при различных режимах получения (БГУИР, Минск). Информация об условиях формирования исследуемых пленок представлена в таблице 1. Для образцов 1, 3 – 5 в качестве мишени использовалась фольга никеля, предварительно отожженная в среде кислорода при температуре 950°C в течение 10 минут. Для образца 2 добавлялась еще одна мишень из фольги чистого никеля. Угол наклона между подложкой и мишенью в ВЧ магнетроне 45°. Нанесение пленки оксида никеля на образцы осуществлялось распылением мишени в газовой

среде аргона с кислородом.

Таблица 1 – Условия формирования пленок NiO

Номер образца	Тип подложки	Температура подложки, °C	Время напыления, min.
1	c-Si	25	10
2	c-Si (2 мишени)	25	10
3	SiO ₂	25	10
4	SiO ₂	25	5
5	SiO ₂	400	5

Проводились измерения спектров $\text{tg}\Psi(\lambda)$ и $\text{cos}\Delta(\lambda)$ на спектральном эллипсометре ES-2 [4] исследуемых пленок оксида никеля на кремниевых и стеклянных подложках при углах падения излучения 75°, 70°, 65° и 60° в спектральном диапазоне 400–1000 нм (рисунок 1).

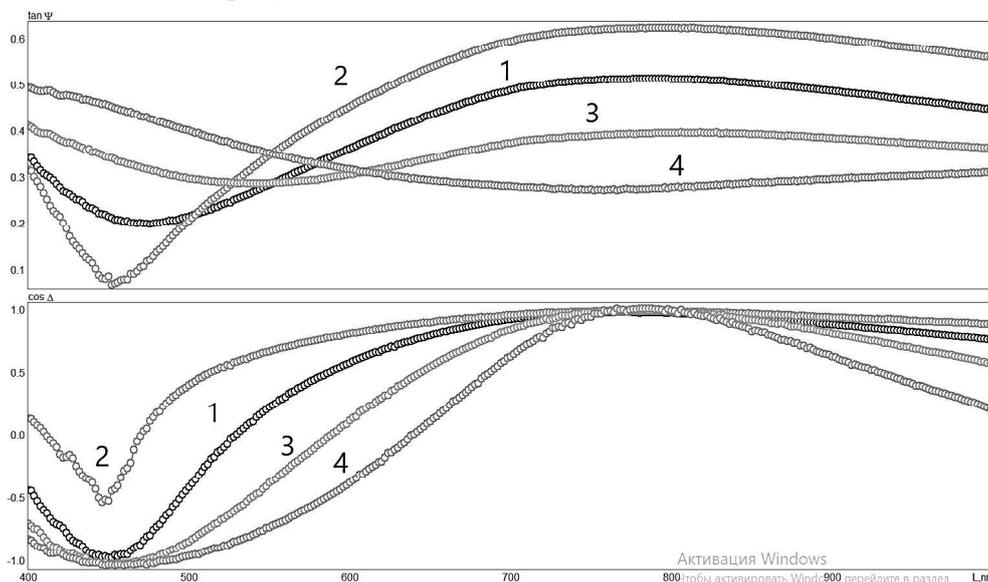


Рисунок 1 – Экспериментальные спектры $\text{tg}\Psi(\lambda)$ и $\text{cos}\Delta(\lambda)$ пленки NiO (образец 1) (спектры 1, 2, 3, 4 – при углах падения 70°, 75°, 65°, 60° соответственно)

С целью определения дисперсии показателей преломления $n(\lambda)$ и поглощения $k(\lambda)$ исследуемых пленок был разработан алгоритм решения обратной задачи спектральной эллипсометрии (ОЗСЭ) для модели двухслойного клина на полубесконечной подложке (рисунок 2). Выбор этой модели обусловлен, во-первых, наклонным расположением подложки к оси магнетрона, что может вызвать неоднородность по толщине у сформированных пленок [5]. Во-вторых, в процессе осаждения пленок на подложки возможно формирование переходного слоя между пленкой и подложкой, оптические характеристики которого отличны от обеих сред [6].

Решение ОЗСЭ было получено для экспериментальных спектров поляризационных углов при 4-х углах падения излучения (рисунок 1), при этом дисперсия оптических характеристик подложек задавалась известной [7], переходный слой

описывался как бинарный моделью Максвелла – Гарнетта [8], а дисперсию оптических характеристик слоя задавали упрощенной моделью Зельмейера [4]

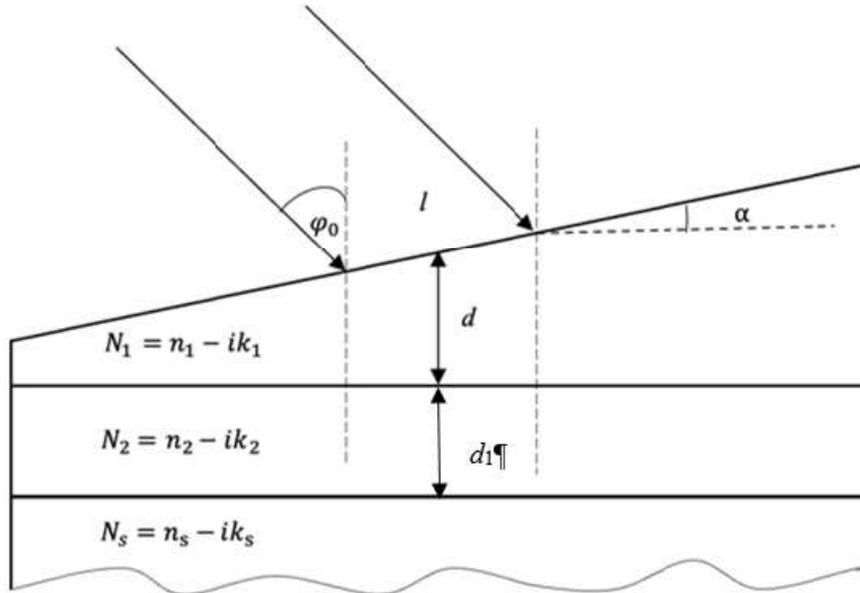


Рисунок 2 – Двухслойная модель клиновидной пленки на полубесконечной подложке: α – угловая толщина клина, N_1 , N_2 и N_3 – комплексный показатель преломления пленки, переходного слоя и полубесконечной подложки соответственно; φ_0 – угол падения излучения

$$n(\lambda)^2 = n_0^2 + \frac{1}{(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2})}, k(\lambda) = k_m e^{\frac{\lambda_m - \lambda}{\lambda_1}},$$

где n_0 – значение показателя преломления на бесконечной длине волны; λ_0 – длина волны, на которой $n \rightarrow \infty$, $\lambda_m = 550$ нм; n_m – значение показателя преломления на длине волны λ_m , k_m – значение показателя поглощения k на длине волны λ_m , λ_1 – интервал длины волны, на котором k меняется в e раз.

Результаты и их обсуждение

Результаты решения обратной задачи спектральной эллипсометрии для исследуемых образцов представлены в таблице 2. Как видно из данных таблицы 2, пленки, осажденные на кремниевые подложки, оказались однородными по толщине и их структура удовлетворительно описывается однослойной моделью ($\alpha = 0$, $d_1 = 0$). Пленки, сформированные на стеклянных подложках, имеют худшую адгезию с подложкой. На это указывает наличие переходного слоя, толщина которого соизмерима с толщиной самой пленки (образцы 4, 5). При этом наблюдается неоднородность толщины пленок вдоль поверхности ($\alpha \neq 0$).

Таблица 2 – Рассчитанные параметры пленок

№ образца	d , нм	α , рад.	d_1 , нм	n_m	k_m	l	l	Deviation
1	102	-	-	2.263	0.074	316.6	391150	0.0224
2	113	-	-	2.061	0.104	114.5	132.4	0.0356
3	103	$8,9 \cdot 10^{-6}$	8	2.015	0.081	278.3	40121	0.0271
4	26	$3,5 \cdot 10^{-6}$	11	1.956	0.0536	163.4	70522	0.0304
5	23	$4,1 \cdot 10^{-6}$	14	1.976	0.0084	254.4	33182	0.0206

Анализ полученных решений обратной задачи спектральной эллипсометрии показал:

– дисперсионные зависимости показателя преломления $n(\lambda)$ и показателя поглощения $k(\lambda)$ пленок оксида никеля на кремниевой и стеклянной подложках удовлетворительно описываются формулой Зельмейера для пленок толщиной $d > 100$ нм;

– пленки, осажденные на кремниевые подложки, обладают более высоким показателем преломления по сравнению с пленками на стеклянных подложках (рисунки 3, 4);

– добавление чистой никелевой мишени при формировании пленок оксида никеля методом высокочастотного магнетронного распыления приводит к образованию пленок оксида никеля нестехиометрического состава (NiO_x , $x < 1$); рассчитанный спектр показателя преломления таких пленок (рисунок 3, спектр 2) значительно ниже аналогичного спектра $n(\lambda)$ (рисунок 3, спектр 1) стехиометрической пленки NiO , а прозрачность пленки NiO_x значительно выше в области $\lambda > 500$ нм;

– повышение температуры подложки приводит к значительному снижению показателя поглощения пленок оксида никеля, осажденных на стеклянные подложки (рисунок 4).

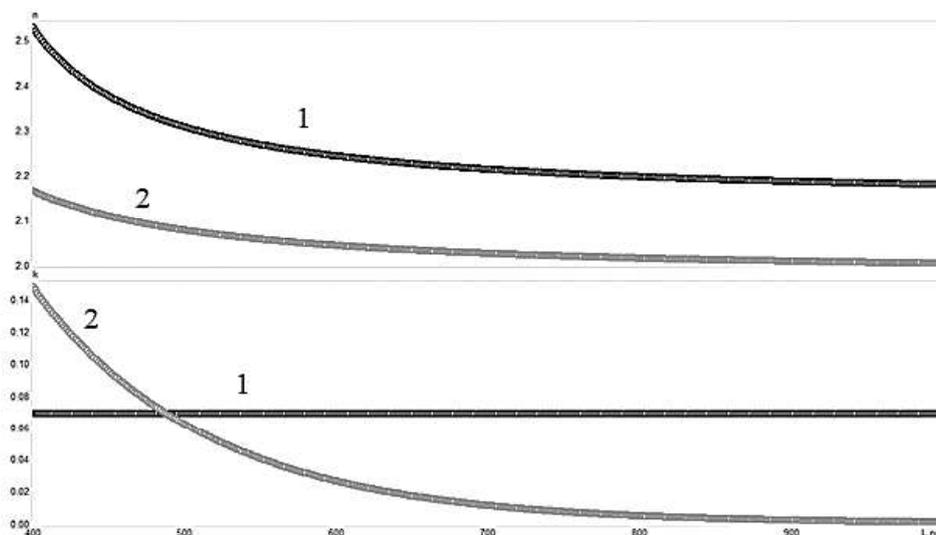


Рисунок 3 – Рассчитанные дисперсионные зависимости показателей преломления и поглощения образцов 1 и 2

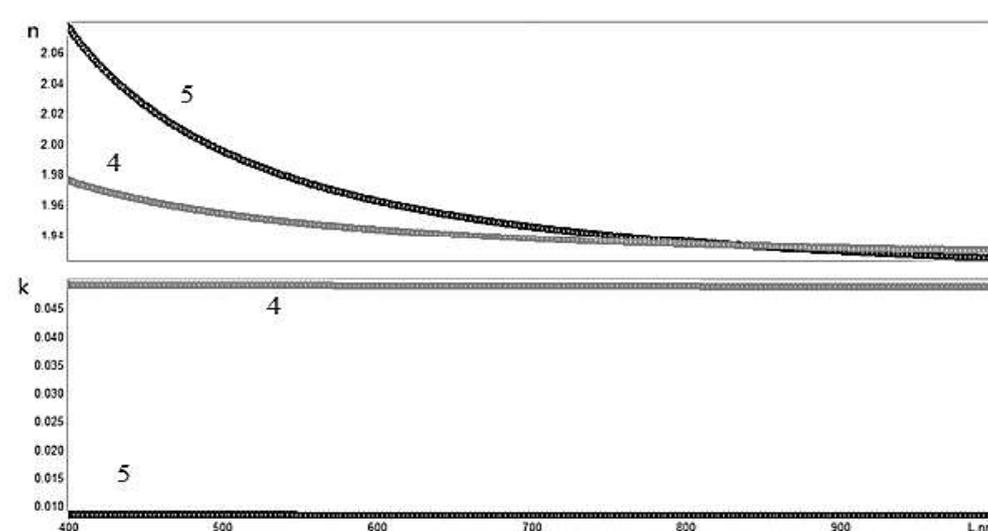


Рисунок 4 – Рассчитанные дисперсионные зависимости показателей преломления и поглощения образцов 4 и 5

Заключение

Для отработки оптимальных режимов ВЧ магнетронного распыления тонких пленок оксида никеля, используемых в фотовольтаике, были проанализированы оптические характеристики серии пленок оксида никеля, осажденных на кремниевую и стеклянную подложки. Обнаружено, что основными факторами, влияющими на ход дисперсии показателей преломления $n(\lambda)$ и поглощения $k(\lambda)$ пленок NiO, являются тип подложки, а также ее температура. Пленки, осажденные на кремниевые подложки, обладают наиболее оптимальными свойствами для применения в фотоэлектрических элементах.

Результаты исследования могут быть использованы для корректировки условий осаждения пленок оксида никеля на кремниевые и стеклянные подложки методом ВЧ магнетронного распыления с оптимальными условиями для использования в фотовольтаике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Jamala, M. S.* Effectsofgrowthtemperature onthe photovoltaic properties ofRF sputtered undoped NiO thin films / M. S Jamala,b, S. A. Shahahmadic, P. Chelvanathana – Results in Physics Volume 14, September 2019, 102360.
2. Особенности магнетронного напыления тонких пленок оксида никеля для применения в составе перовскитных солнечных элементов / А. С. Агликов [и др.] // Журнал технической физики. – 2019. – Т. 89, вып. 3. – С. 460–464.
3. *Аззам, Р.* Эллипсометрия и поляризованный свет / Р. Аззам, Н. Башара. – М. : Мир, 1981. – 583 с.
4. Спектральная эллипсометрия многослойных гетероструктур ZnS/ZnSe / В. И. Ковалев [и др.] // Журнал прикладной спектроскопии. – 2002. – Т. 69, № 2. – С. 258–263.
5. *Ивашкевич, И. В.* Спектральная эллипсометрия неоднородных полупроводниковых пленок / И. В. Ивашкевич, Е. В. Третьяк // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серія В. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 54–60.

6. **Стаськов, Н. И.** Эллипсометрия переходных слоев полупроводник – диэлектрик / Н. И. Стаськов, И. В. Ивашкевич, Н. А. Кречотень // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 2(15). – С. 18–24.

7. Учет влияния естественного поверхностного слоя при исследовании кремниевых пластин методом спектральной эллипсометрии / Н. И. Стаськов [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 – С. 26–30.

8. **Ржанов, А. В.** Эллипсометрия – метод исследования поверхности / под ред. А. В. Ржанова. – Новосибирск : Наука, 1983. – 180 с.

Поступила в редакцию 18.11.2021 г.

Контакты: ivashkevich@msu.by (Ивашкевич Инна Викторовна)

Ivashkevich I. V. OPTICAL CHARACTERISTICS OF NICKEL OXIDE FILMS OBTAINED BY HF MAGNETRON SPUTTERING.

The dispersion of the optical characteristics of nickel oxide films in the visible region of the spectrum has been determined, and the dependence of the optical characteristics on the conditions of the film formation by HF magnetron sputtering has been established. The comparative analysis of the calculated spectra of refractive indices and absorption has shown that the dispersion curves are significantly influenced by the type of substrate and its temperature. The films deposited on silicon substrates have the most optimal properties for photovoltaic cells use.

Keywords: spectral ellipsometry, optical constants, thin films.

УДК 581.192+574.24

ИЗМЕНЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТНОГО СОСТАВА ХВОИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ АНТРОПОГЕННОЙ НАГРУЗКИ (на примере города Минска)

А. Н. Хох

заведующий лабораторией исследования материалов, веществ и изделий
Научно-практический центр Государственного комитета судебных экспертиз
Республики Беларусь

В. Б. Звягинцев

кандидат биологических наук, доцент
Белорусский государственный технологический университет

В работе обоснована возможность применения метода атомно-эмиссионной спектроскопии с индуктивно-связанной плазмой в целях контроля за состоянием городских фитоценозов. Проведено сравнение степени накопления и выявлены особенности аккумуляции элементов в хвое сосны обыкновенной, произрастающей в местах г. Минска с различным по интенсивности автотранспортным и промышленным воздействием. В целом по результатам исследования можно констатировать, что ассимиляционный аппарат играет роль регуляторного звена в функционировании растительных организмов и весьма чувствителен к изменению условий произрастания.

Ключевые слова: сосна обыкновенная, элементный состав, хвоя, атомно-эмиссионная спектроскопия с индуктивно-связанной плазмой, антропогенные факторы.

Введение

Растения играют важную роль в круговороте питательных веществ и микроэлементов в окружающей среде. Биомониторинг ряда химических элементов необходим для оценки состояния экосистем, особенно урбанизированных.

Хвоя сосны является чувствительным биоиндикатором загрязнения воздуха промышленностью [1] и транспортом [2].

В условиях антропогенного загрязнения часто встречаются проявления антагонистических отношений между элементами, входящими в состав хвои [3]. Так, например, поглощение кальция и магния растениями может быть ингибировано при высоких концентрациях алюминия в почвах [4]. Угнетающим действием на поглощение этих элементов обладает также калий [5].

Экстремальный уровень антропогенного воздействия на среду города определяет необходимость контроля за их последствиями и принятия мер по их минимизации.

В связи с тем что у сосны обыкновенной физиологическое ослабление и внешние признаки повреждения (хлороз и некроз хвои) проявляются не сразу, необходим поиск показателей, которые позволили бы оценить состояние древесной растительности на том этапе, когда происходящие в растительном организме изменения еще носят обратимый характер. В качестве таких показателей может быть использован элементный состав хвои.

Целью работы являлось изучение изменений элементного состава в ассимиляционных органах сосны обыкновенной, подвергающейся воздействию антропогенного загрязнения, по сравнению с фоновыми территориями.

Основными задачами было: определение пунктов сбора образцов хвои; обоснование возможности применения метода атомно-эмиссионной спектроскопии с индуктивно-связанной плазмой в целях контроля за состоянием урбанизированных экосистем; сравнение степени накопления и выявления особенностей аккумуляции элементов в хвое сосны обыкновенной, произрастающей в местах с различным по интенсивности автотранспортным и промышленным воздействием г. Минска.

Материалы и методы исследований

Объектами исследования являлись сосновые насаждения Первомайского (с благоприятной экологической ситуацией) и Партизанского (с преимущественно наиболее неблагоприятной ситуацией, обусловленной высоким уровнем загрязнения воздуха и почв, угнетением растительности [6]) районов города Минска; в качестве контроля (условно чистая территория) были взяты деревья сосны, произрастающие на территории государственного природоохранного учреждения “Березинский биосферный заповедник”.

Краткая характеристика исследованных древостоев представлена в таблице 1.

Таблица 1 – Места отбора образцов

№№	Район, улица/лесничество	Координаты	Средний возраст, лет	Высота, м	Диаметр, см
1	Первомайский, Всехсвятская	53°57'46.3"N 27°35'59.8"E	70	18	17,2
2	Первомайский, Вересковая	53°56'45.1"N 27°39'23.5"E	70	17,5	25,5
3	Партизанский, Герасименко	53°52'41.4"N 27°41'18.7"E	80	19	30,8
4	Партизанский, Ваупшасова	53°54'04.3"N 27°40'06.8"E	70	23	29,9
5	Партизанский, Долгобродская	53°52'51.3"N 27°37'22.0"E	75	21	27,4
6	Березинский биосферный заповедник, Домжерицкое	54°43'24.0"N 28°17'11.5"E	80	24	33,1

Образцы хвои сосны обыкновенной 2-го года жизни отбирали на каждом из перечисленных мест отбора с ветвей 1-го порядка в нижней части по всему диаметру кроны у 15 деревьев в конце вегетационных сезонов 2018 и 2019 гг. (по 30 пар с каждого дерева).

В дальнейшем хвоя, собранная с одного дерева, измельчалась до мелкодисперсного состояния с помощью агатовой ступки, после чего методом квартования отбиралась навеска массой 500 мг, которая помещалась в фарфоровый тигель, и проводилось озоление путем прокалывания в муфельной печи при температуре 500°C в течение 4 часов.

Далее зола помещалась в цилиндр картриджа систем микроволнового разложения с уже внесенными туда 10 мл концентрированной азотной кислоты и 2 мл пероксида водорода. Микроволновое разложение проводилось в две последова-

Окончание таблицы 2

Элемент, мг/кг	№1		№2		№3		№4		№5		№6	
	2018	2019	2018	2019	2018	2019	2018	2019	2018	2019	2018	2019
Zn	22,3±4,8	22,7±6,1	53,4±8,9	50±15,3	50,2±8,6	53,7±11,2	84,5±21,7	95±17,8	53,5±9,3	56,8±14,0	24,7±4,8	25,8±7,5
Значение W	63,0		43,5		72,0		61,0		73		62,5	
p-value	0,86		0,35		0,5		0,6		0,46		0,89	
Значение U	145,5	132,5	0,000	1,0	0,000	0,5	0,000	0,000	0,000	15,00		
p-value	0,17	0,41	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
Mn	232,9 ±42,1	224,4 ±55,4	212,0 ±51,0	207,3 ±55,0	226,4 ±36,8	233,3 ±64,4	233,8 ±36,7	220,7 ±56,6	225,2 ±50,3	231,3 ±49,0	211,3 ±47,4	214 ±66,8
Значение W	55,5		49,5		63		48,5		58		64,5	
p-value	0,80		0,85		0,87		0,51		0,91		0,8	
Значение U	77,5	104,5	104,5	122,0	80,5	96,5	75,5	106,0	90,0	93		
p-value	0,15	0,74	0,74	0,71	0,19	0,51	0,13	0,8	0,37	0,43		
Ni	1,6±0,6	1,0±0,3	1,7±0,5	1,2±0,5	2,9±0,3	2,6±0,4	3,8±0,8	3,7±0,9	2,7±0,4	2,1±0,6	0,9±0,2	1,0±0,3
Значение W	5,0		12,5		10,5		21,5		11,5		20,6	
p-value	0,03		0,01		0,01		0,54		0,006		0,04	
Значение U	14,0	115,5	10,5	73,0	0,000	1,0	0,000	0,000	0,000	11,0		
p-value	0,000	0,9	0,000	0,1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
Co	0,9±0,3	0,9±0,3	0,9±0,5	0,9±0,4	0,9±0,2	1,2±0,3	1,2±0,4	1,5±0,2	1,2±0,4	1,1±0,3	0,8±0,2	0,9±0,2
Значение W	22,5		60,0		68,5		62,5		23,5		53,5	
p-value	0,6		0,64		0,02		0,23		0,40		0,6	
Значение U	93,0	110,0	93,0	110,0	87,0	57,0	41,5	29,0	43,0	72,0		
p-value	0,44	0,9	0,44	0,9	0,31	0,02	0,002	0,000	0,003	0,1		
Fe	53,7 ±13,7	55,7 ±15,9	61,9 ±6,7	58,1 ±14,2	102,1 ±10,6	113,6 ±16,4	115,3 ±22,7	130,7 ±17,1	125,0 ±18,3	144,7 ±19,8	32,7 ±7,3	31,9 ±7,6
Значение W	63,0		56,0		78,5		88,5		106,0		48,5	
p-value	0,87		0,82		0,02		0,02		0,009		0,8	
Значение U	14,0	8,5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
p-value	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
Cr	0,4±0,2	0,4±0,1	0,4±0,1	0,4±0,1	0,6±0,1	0,5±0,2	0,5±0,2	0,6±0,2	0,5±0,2	0,7±0,1	0,4±0,1	0,3±0,1
Значение W	35,5		26,5		0,00		42,0		62,0		9,0	
p-value	0,47		0,17		0,16		0,8		0,01		0,009	
Значение U	113,5	64,5	101,0	50,0	57,0	35,0	102,0	55,0	74,5	1,5		
p-value	0,97	0,045	0,009	0,00	0,02	0,001	0,68	0,02	0,12	0,000		

Примечание: *M* – среднее, $\pm SD$ – стандартное отклонение; курсивом выделены значения p-value на уровне $< 0,05$

Прежде всего, нами была рассмотрена погодичная изменчивость, которая является одной из разновидностей временной изменчивости для многолетних растений. В методическом отношении достоверность экологической изменчивости химизма растений может быть подтверждена лишь в том случае, когда будет установлено, что соответствующие различия превышают те, которые вызваны погодичной изменчивостью.

По результатам анализа содержания алюминия, свинца, цинка и марганца для всех исследованных мест отбора в независимости от уровня антропогенной нагрузки не было выявлено статистически значимых различий между 2019 и 2020 гг. ($p > 0,05$), т. е. для данных элементов погодичная изменчивость отсутствовала. В случае с кадмием и кобальтом установлена статистически значимая разница для древостоя № 3, в случае с медью и хромом для двух древостоев – № 3 и № 5, а так-

же № 3 и № 6 соответственно. По железу статистически значимые различия были выявлены для трех древостоев (№№ 3-5), по никелю – для пяти (№№ 1-3, 5-6). На рисунке 1 для примера приведена диаграмма размахов, отображающая разницу в содержании никеля между изучаемыми территориями в 2018 и 2019 гг.

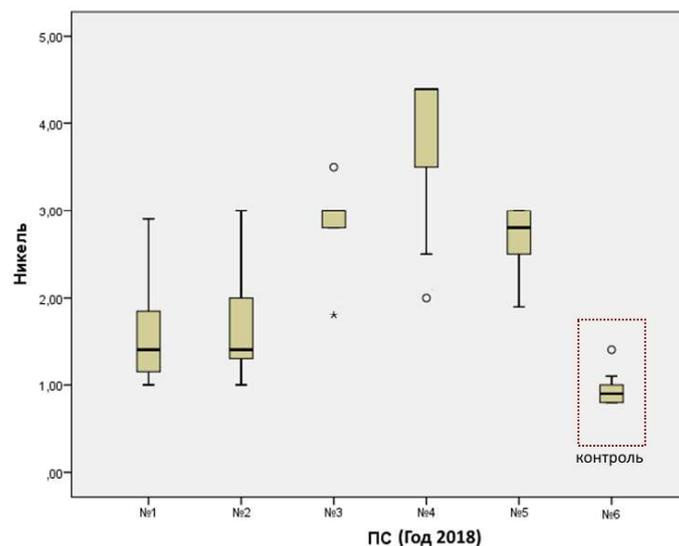


Рисунок 1 – Содержание никеля на исследуемых территориях в 2018 г.

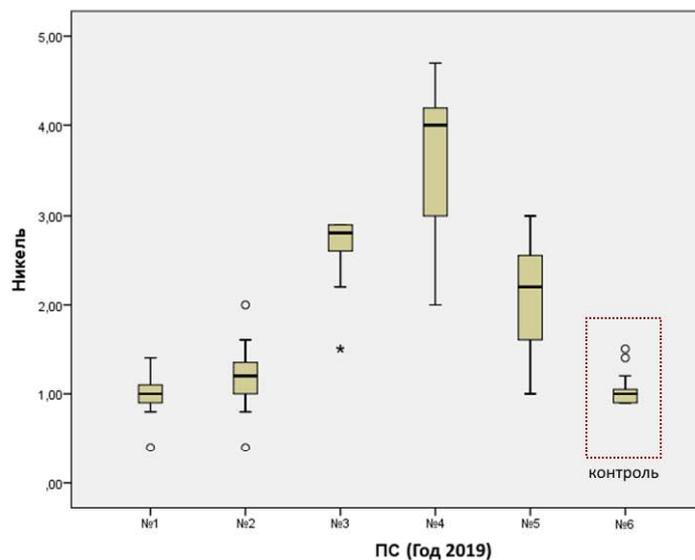


Рисунок 2 – Содержание никеля на исследуемых территориях в 2019 г.

Экологическая изменчивость, определяемая в данном исследовании уровнем антропогенной нагрузки, в проводимом исследовании изучалась отдельно для 2018 и 2019 гг.

Установлено, что содержание марганца в хвое сосны не зависит от уровня антропогенной нагрузки. Также следует отметить свинец, для которого выявлены статистически значимые отличия по сравнению с контролем на всех местах отбора в Партизанском районе, в то время как для Первомайского экологическая изменчивость отсутствовала.

В целом сравнение погодичной и экологической изменчивости химизма хвои сосны по всем исследуемым элементам, за исключением марганца, показало четко прослеживаемую зависимость: экологическая изменчивость больше погодичной.

Также отметим, что минимальное варьирование в хвое сосны отмечено для алюминия (средний коэффициент вариации составил 13,2%), а максимальное – для кадмия (это единственный элемент, средний коэффициент вариации которого превысил 33% и составил 37,1%). Принято считать, что если значение коэффициента вариации менее 33%, то совокупность данных является однородной, если более 33% – то неоднородной [8]. В целом чем меньше значение коэффициента вариации, тем однороднее совокупность по изучаемому признаку и типичнее средняя.

Для предварительной оценки зависимости содержания элементов в хвое сосны от уровня антропогенной нагрузки (1 – контроль (условно чистая территория); 2 – низкий уровень антропогенной нагрузки; 3 – высокий уровень антропогенной нагрузки) был проведен парный регрессионный анализ, который в 2018 г. выявил высокодостоверные взаимосвязи для алюминия, свинца, кадмия меди, цинка, никеля, кобальта и железа. Для магния и хрома достоверных взаимосвязей не выявлено. В 2019 г. достоверные взаимосвязи выявлены только для алюминия, цинка и кобальта, что позволяет предположить, что содержание данных элементов в наибольшей степени определяется уровнем антропогенной нагрузки.

Параметры уравнений линейной регрессии, аппроксимируемых линейными уравнениями вида $y = a + bx$, описывающих закономерность между исследуемым параметром, приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты регрессионного анализа

Элемент	Уравнение регрессии	
	Год 2018	Год 2019
Al	$y = 0,0207x - 0,5057, R^2 = 0,8418, r = 0,92, p = 0,000$	$y = 0,0135x + 0,4573, R^2 = 0,4814, r = 0,69, p = 0,000$
Pb	$y = 1,0866x - 1,0151, R^2 = 0,6616, r = 0,66, p = 0,000$	$y = 0,0132x + 1,9588, R^2 = 0,0024, r = 0,05, p = 0,74$
Cd	$y = 4,417x + 0,9857, R^2 = 0,4613, r = 0,68, p = 0,000$	$y = -0,0078x + 2,0129, R^2 = 0,0042, r = -0,07, p = 0,67$
Cu	$y = 0,5336x + 0,0028, R^2 = 0,8597, r = 0,92, p = 0,000$	$y = 0,0696x + 1,7018, R^2 = 0,0842, r = 0,29, p = 0,05$
Zn	$y = 0,0443x + 0,1521, R^2 = 0,842, r = 0,91, p = 0,000$	$y = 0,0381x + 0,455, R^2 = 0,6693, r = 0,81, p = 0,000$
Mn	$y = 0,0046x + 0,9936, R^2 = 0,0417, r = 0,20, p = 0,18$	$y = 0,002x + 1,5923, R^2 = 0,0192, r = 0,14, p = 0,36$
Ni	$y = 0,786x + 0,5075, R^2 = 0,8646, r = 0,93, p = 0,000$	$y = 0,0417x + 1,9042, R^2 = 0,0336, r = 0,18, p = 0,23$
Co	$y = 1,6304x + 0,4409, R^2 = 0,2246, r = 0,47, p = 0,001$	$y = -0,0364x + 2,0367, R^2 = 0,0001, r = -0,01, p = 0,94$
Fe	$y = 0,0222x + 0,484, R^2 = 0,9055, r = 0,95, p = 0,000$	$y = 0,017x + 0,8315, R^2 = 0,7765, r = 0,88, p = 0,000$
Cr	$y = 1,7911x + 1,1688, R^2 = 0,0796, r = 0,28, p = 0,06$	$y = 4,2709x + 0,1856, R^2 = 0,5505, r = 0,74, p = 0,000$

Примечание: R^2 – коэффициент детерминации; r – коэффициент корреляции; p – уровень значимости.

На рисунках 3 и 4 для примера показана взаимосвязь содержания алюминия и марганца от уровня антропогенной нагрузки в 2018 г. По рисункам 3 и 4 видно, что в случае алюминия существует прямая, сильная корреляционная связь ($r = 0,92$; $p = 0,000$), а в случае марганца такая связь отсутствует ($r = 0,20$; $p = 0,18$), т.е. содержание марганца от уровня антропогенной нагрузки не зависит.

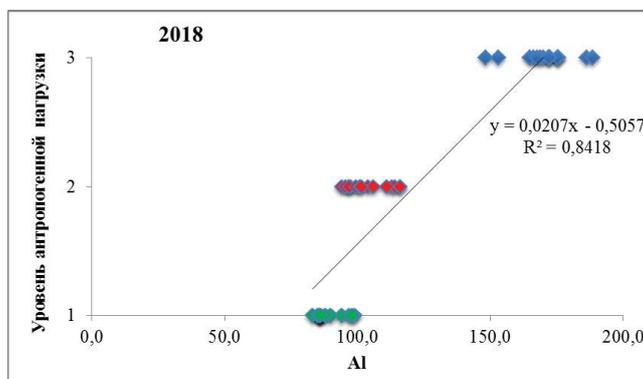


Рисунок 3 – Зависимость содержания *Al* от уровня антропогенной нагрузки (в условных единицах)

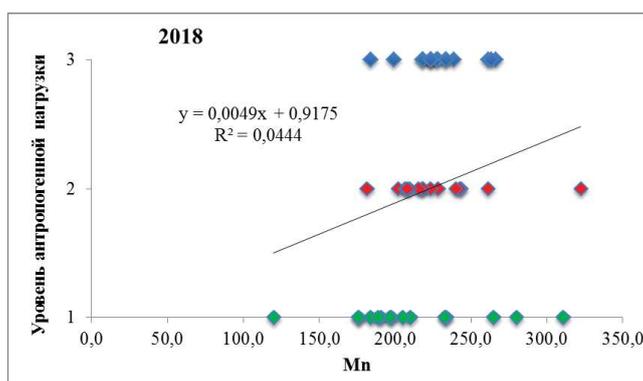


Рисунок 4 – Зависимость содержания *Mn* от уровня антропогенной нагрузки (в условных единицах)

Отметим, что ранее нами для указанных объектов (№№ 1-6) был проведен анализ морфолого-анатомических и билатеральных (по величине флуктуирующей асимметрии) параметров хвои [9]; полученные результаты согласуются между собой, что позволяет в дальнейшем проводить комплексный анализ для осуществления контроля за состоянием городских фитоценозов.

Заключение

Таким образом, установлено, что в условиях антропогенного загрязнения происходят изменения химического состава хвои сосны обыкновенной, которые проявляются в накоплении элементов, преимущественно связанных с техногенезом. Применение методов математической обработки позволило судить о достоверности различий их содержания в хвое сосновых насаждений, произрастающих в местах г. Минска с различным по интенсивности автотранспортным и промышленным воздействием. Полученные результаты исследований по оценке степени

накопления и выявлению особенностей аккумуляции ряда элементов открывают перспективы для оценки степени благоприятности условий среды для произрастания сосны обыкновенной.

Характер исследования потребовал массового сбора хвои и применения метода атомно-эмиссионной спектроскопии с индуктивно-связанной плазмой, позволяющего осуществить многочисленные индивидуальные анализы образцов с одновременным определением целого ряда микроэлементов.

В целом проведенное исследование доказывает, что ассимиляционный аппарат играет роль регуляторного звена в функционировании растительных организмов и весьма чувствителен к изменению условий произрастания.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Майджи, О. В.** Загрязнение атмосферного воздуха автомобильным транспортом в г. Балашиха / О. В. Майджи // Вестник Российского государственного аграрного заочного университета. – 2010. – № 8. – С. 54–59.
2. **Бородина, Н. А.** Аккумуляция тяжелых металлов хвоей сосны в урбоэкосистеме города Благовещенска / Н. А. Бородина // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2012. – Т. 14. – № 1–8 – С. 1958–1962.
3. **Второва, В. Н.** Концентрации химических элементов в растениях и почве и оценка состояния лесных экосистем / В. Н. Второва, Л. Б. Холопова // Лесоведение. – 2009. – № 1. – С. 11–17.
4. **Ulrich, B.** Ökologische Gruppierung von Böden nach ihrem chemischen Bodenzustand / B. Ulrich // Zeitschrift für Pflanzenernährung und Bodenkunde. – 1981. – Vol. 144. – № 3. – P. 289–305.
5. **Hambuckers, A.** Nutritional status of declining spruce (*Picea abies* (L.) Karst.): Effect of soil organic matter turnover rate / A. Hambuckers, J. Remacle // Water, Air, and Soil Pollution. – 1991. – V. 59. – № 1. – P. 95–106.
6. **Хомич, В. С.** Городская среда: геоэкологические аспекты / В. С. Хомич, С. В. Какаренко, Т. И. Кухарик // под ред. В. С. Хомича. – Минск : Беларуская навука, 2013. – 301 с.
7. **Väisänen, A.** Determination of mineral and trace element concentrations in pine needles by ICP-OES: evaluation of different sample pre-treatment methods / A. Väisänen, P. Laatikainen, A. Pander, S. Renvall // International Journal of Environmental and Analytical Chemistry. – 2008. – V. 88. – № 14. – P. 1005–1016.
8. **Miller, J.** Statistics and chemometrics for analytical chemistry / J. Miller, J. Miller // USA: Pearson Education, 2018. – 297 p.
9. **Хох, А. Н.** Влияние антропогенного загрязнения на морфолого-анатомические параметры и спектральные характеристики хвои сосны обыкновенной / А. Н. Хох, В. Б. Звягинцев // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. Электронный научный журнал. – 2021. – № 1(37). – С. 69–80. DOI: <https://doi.org/10.32516/2303-9922.2021.37.6>

Поступила в редакцию 22.07.2021 г.

Контакты: lann1hoh@gmail.com (Хох Анна Николаевна, Звягинцев Вячеслав Борисович)

Khokh A. N., Zvyagintsev V. B. VARIABILITY OF PINE ELEMENTAL COMPOSITION UNDER THE ANTHROPOGENIC IMPACT (the case of Minsk).

In the work, the possibility of using the atomic emission spectrometry method with inductively coupled plasma in order to control the state of urban phytocenoses is demonstrated. The incorporation rate has been compared; the peculiarities of elemental accumulation in the Scots pine growing on the sites of Minsk with different intensity of automobile and industrial impact have been discovered. In general, on the basis of the research results it can be stated that the assimilation apparatus represents a regulatory element in the functioning of plants which is quite sensitive to any change of site conditions.

Keywords: Scots Pine, elemental composition, pine needles, spectrometry with inductively coupled plasma, anthropogenic factors.

УДК 577

ВОЗМОЖНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПОНЕНТОВ РАСТИТЕЛЬНЫХ ЭКСТРАКТОВ С ПОМОЩЬЮ ИНДЕКСОВ УДЕРЖИВАНИЯ

В. А. Седакова

кандидат технических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. В. Клебанов

кандидат химических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В. Б. Луковская

студентка 2 курса

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Е. В. Седаков

кандидат технических наук

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий
(Могилев)

В. Д. Рафеенко

студентка 2 курса

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В статье рассматривается возможность определения компонентов растительных экстрактов на примере спиртового экстракта мяты перечной с помощью газохроматографических индексов удерживания. Проведено определение хроматографических параметров n-алканов (C5-C12) для определения индексов удерживания графическим и расчетным способом. Определены индексы удерживания L-ментола и компонентов спиртового раствора мяты перечной.

Ключевые слова: газовая хроматография, индексы удерживания, алканы, ментол, растительные экстракты.

Введение

Одним из важнейших направлений нутрициологии, науки возникшей на стыке химии, биологии и гигиены питания, является исследование пищевых компонентов, как фактора профилактического и целебного воздействия на организм человека. Хозяйственная деятельность человека приводит к ухудшению состояния окружающей среды и, как следствие, возникновению заболеваний, связанных с экологическими проблемами [1]. Поэтому в последние годы многими учеными активно разрабатываются эффективные и безопасные средства растительного происхождения, оказывающие лечебное-профилактическое или лечебное воздействие на организм человека [1; 2]. Создание подобных средств подразумевает установление взаимосвязи между химическим составом и биологической активностью. Согласно литературным данным [3; 4] многие компоненты распространённых лекарственных трав, например, мяты, обладают широким спектром биологической

© Седакова В. А., Клебанов А. В., Луковская В. Б.,

Седаков Е. В., Рафеенко В. Д.

активности: антимикробной, противоопухолевой, противовоспалительной и антиаллергенной [5]. Поэтому в фармацевтике широко используются как различные сборы сушеных лекарственных трав, так и различные настойки и экстракты.

Растительные экстракты представляют собой многокомпонентные системы, содержащие большое количество летучих душистых веществ, которые относятся к различным классам органических соединений: терпеноидам, ароматическим и алифатическим соединениям [4; 6]. Терпеноиды могут быть представлены насыщенными, ненасыщенными, ациклическими и циклическими соединениями (спирты, альдегиды, кетоны, кислоты, эфиры, лактоны, хиноны) [4]. Ароматические соединения чаще всего представлены производными фенола [2; 4]. Например, одно из старейших лекарственных растений – мята содержит такие терпеноиды, как L-ментол, изоментилацетат, п-ментон, цинеол, ментилацетат. Основным ценным лечебным компонентом мяты является ментол, содержание которого зависит как от вида мяты (наибольшее количество ментола обнаруживается у мяты перечной), так и места выращивания, климатических особенностей, сроков уборки и стадии вегетации, длительности и условий хранения сырья [3]. Поэтому важной задачей при переработке растительного сырья является определение качественного и количественного состава на всех этапах процесса.

Газовая хроматография является одним из наиболее успешно применяемых методов исследования сложных многокомпонентных смесей органических соединений [7], характеризующихся высокой специфичностью и чувствительностью, а также хорошей воспроизводимостью результатов. Основной проблемой при хроматографическом анализе растительных экстрактов является отсутствие стандартов веществ, подлежащих идентификации, а также не полнота сведений о химическом составе экстрактов. Одним из решений данной проблемы является использование хромато-масс-спектропии при идентификации соединений в экстрактах [8], что предусматривает наличие специального дорогостоящего оборудования. Другим способом идентификации неизвестных компонентов растительных экстрактов может быть использование газохроматографических индексов удерживания, в том числе рассчитанных с помощью аддитивных схем, предложенных И. Г. Зенкевичем с соавторами [9; 10; 11]. Идеей данного способа идентификации является возможность предварительного расчёта газохроматографических индексов удерживания веществ, о которых отсутствует информация в базах данных. Индекс удерживания Ковача соединения является его важнейшей характеристикой, которая определяется только физико-химическими свойствами анализируемого вещества, природой неподвижной фазы и температурным режимом колонки [11; 12].

Целью настоящей работы являлась возможность определения компонентов растительных экстрактов (на примере мяты перечной) с помощью газохроматографических индексов удерживания.

Материалы и методы. Объектами исследования были алканы неразветвленного строения: пентан (C_5H_{12}), гексан (C_6H_{14}), гептан (C_7H_{16}), октан (C_8H_{18}), нонан (C_9H_{20}), декан ($C_{10}H_{22}$), додекан ($C_{12}H_{26}$), L-ментол, маркировки х.ч. Экстракт мяты перечной получали путем экстрагирования высушенного растительного сырья (аптечный образец) этиловым спиртом в аппарате Сокслета в течение 5 часов [13].

Определение индивидуальных веществ и их смесей проводили методом газовой хроматографии на хроматографе Хроматэк Кристалл-5000 с пламенно-ионизационным детектором и кварцевой капиллярной колонкой длиной 100 м, внутрен-

ним диаметром 0,25 мм, с неподвижной фазой – пленка 100% диметилполисилоксан; толщина пленки – 0,5 мкм (производитель “Текнокрома”, Испания). Хроматографирование проводили в изотермическом режиме при следующих параметрах:

температура термостата – 160 °С;

температура испарителя и детектора – 230 °С;

расход газа-носителя составлял: 30 см³/мин, водорода – 20, воздуха – 200.

Ввод пробы осуществлялся с делением потока газа-носителя (коэффициент деления 1 : 30).

Объем вводимой пробы составлял 1 мкл.

Обработка результата проводилась с использованием программного обеспечения “Хроматэк – Аналитик 3.0”. Базы данных с результатами исследования формировались с использованием MS Excel и проводились расчеты индексов удерживания [12; 14; 15].

Основная часть

Результаты и их обсуждение.

Для расчета индексов удерживания (RI) необходимо знать приведенное время удерживания, которое рассчитывается по формуле [12]:

$$t' = t_R - t_m, \quad (1)$$

где t' – приведенное время удерживания, мин;

t_R – экспериментально определенное время удерживания, мин;

t_m – мёртвое время удерживания, мин.

Для определения мертвого времени удерживания необходимо знать экспериментальное время удерживания трех соседних членов гомологического ряда алканов. Тогда, рассчитать мертвое время можно по формуле [14]:

$$t_m = t_2 - \frac{\Delta t_1 \cdot \Delta t_3}{\Delta t_3 - \Delta t_1}, \quad (2)$$

где t_m – мёртвое время удерживания, мин;

t_1 – экспериментально определенное время удерживания n -алкана (C_n), мин;

t_2 – экспериментально определенное время удерживания n -алкана (C_{n+1}), мин;

t_3 – экспериментально определенное время удерживания n -алкана (C_{n+2}), мин;

Δt_1 – разница между экспериментально определенными временами удерживания n -алканов C_{n+1} и C_n , мин;

Δt_3 – разница между экспериментально определенными временами удерживания n -алканов C_{n+2} и C_{n+1} , мин.

С целью определения мертвого времени удерживания нами были установлены времена удерживания отдельных алканов, которые приведены в таблице 1, и проведено разделение смеси алканов на колонке с неполярной неподвижной фазой. Результаты хроматографического разделения n -алканов приведены на рисунке 1.

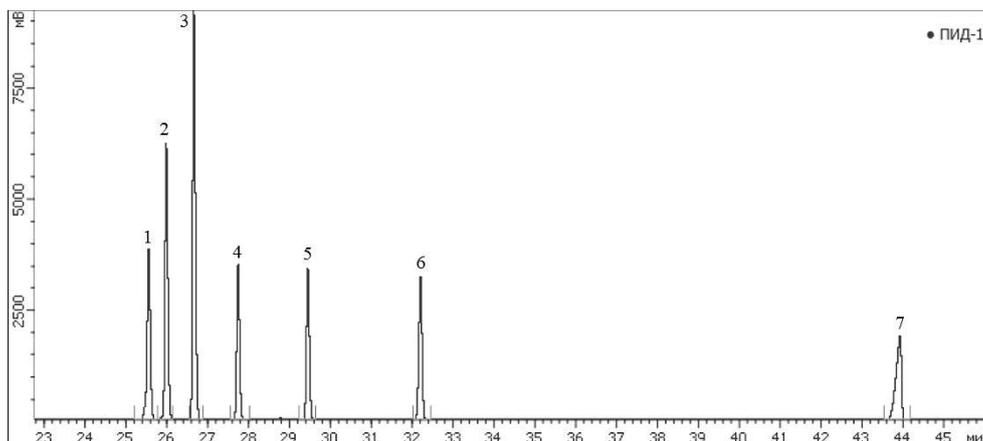


Рисунок 1 – Хроматограмма смеси неразветвленных алканов: 1 – пентана, 2 – гексана, 3 – гептана, 4 – октана, 5 – нонана, 6 – декана, 7 – додекана.

Изотермическое определение, газ-носитель – азот

Как видно из представленных данных, при выбранных условиях хроматографирования на неполярной кварцевой капиллярной колонке смесь алканов разделяется полностью. Хроматографические характеристики разделения смеси алканов приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Хроматографические характеристики алканов

Алкан	Экспериментально определенное время удерживания, мин (t)	Приведенное время удерживания, мин (t')	Логарифм приведенного времени удерживания (lg t')
Пентан	25,560	0,76	-0,1192
Гексан	25,989	1,189	0,0752
Гептан	26,661	1,861	0,2697
Октан	27,745	2,945	0,4691
Нонан	29,451	4,651	0,6675
Декан	32,207	7,407	0,8696
Додекан	43,933	19,133	1,2818

На основании экспериментально определенных времен удерживания трех соседних членов гомологического ряда алканов по формуле (2) было рассчитано мертвое время для $C_5-C_6-C_7$, $C_6-C_7-C_8$ и $C_8-C_9-C_{10}$: 24,786 мин, 24,772 мин и 24,842 мин соответственно. Для дальнейших расчетов посчитано среднее значение мертвого времени удерживания, которое составило 24,8 мин. Далее по формуле (1) было рассчитано приведенное время удерживания, которое представлено в столбце 3 таблицы 1, и логарифмы приведенного времени удерживания – представлены в столбце 4 таблицы 1.

Для определения индексов удерживания использовали графический [15] и расчетный [12] способы. Графический способ вычисления индексов удерживания основывается на построении графической зависимости в координатах:

$$\lg t' = a + b * N, \quad (3)$$

где N – число атомов углерода в n-алкане;

t' – приведенное время удерживания n-алканов.

На основании данных таблицы 1 была построена соответствующая графическая зависимость, которая приведена на рисунке 2.

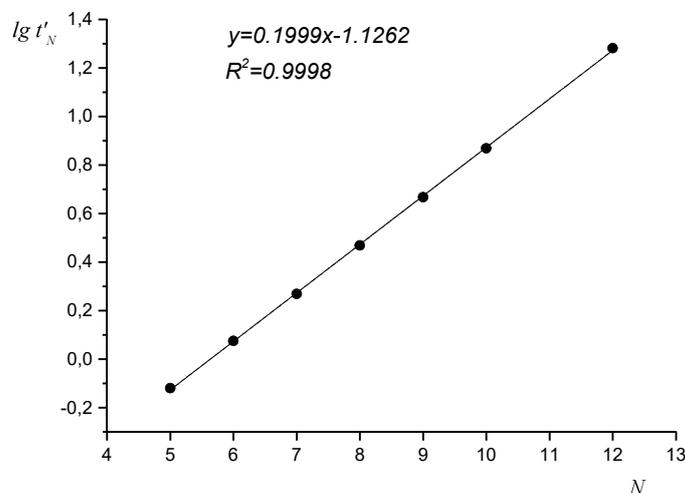


Рисунок 2 – Зависимость логарифма приведенного времени удерживания от числа атомов углерода в алкане

Как видно из представленных данных, зависимость логарифма приведенного времени удерживания от числа атомов углерода в n-алкане имеет явно выраженный линейный вид, что подтверждается величиной достоверности аппроксимации ($R^2 = 0,9998$). Таким образом, получили множитель b (тангенс угла наклона) прямой (3), равный 0,1999. Зная множитель b , индексы удерживания рассчитывали по формуле:

$$RI = 100 \left[\frac{\lg t'_x - \lg t'_N}{b} + N \right], \quad (4)$$

где N – число атомов углерода в n-алкане;

t'_x и t'_N – приведенные времена удерживания исследуемого вещества и n-алкана с N углеродными атомами.

Расчетный способ вычисления индексов удерживания основывается на формуле:

$$RI = 100n \frac{\lg t'_x - \lg t'_N}{\lg t'_{N+n} - \lg t'_N} + 100N, \quad (5)$$

где t'_x , t'_N и t'_{N+n} – приведенные времена удерживания исследуемого вещества и n-алканов с N и $N+n$ углеродными атомами.

Причем, должно соблюдаться условие:

$$t'_N < t'_x < t'_{N+n} \quad (6)$$

Таким образом, для использования расчетного способа определения индекса удерживания необходимо знание приведенных времен удерживания двух ближайших алканов с меньшим и большим приведенным временем удерживания по сравнению с определяемым компонентом.

Для проверки определения индексов удерживания графическим способом была получена хроматограмма L-ментола и определен индекс удерживания. Полученные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Хроматографические параметры образца ментола

Образец	Экспериментально определенное время удерживания, мин (t)	Приведенное время удерживания, мин (t')	Индекс удерживания, определенный графическим методом (RI)
L-ментол	42,367	17,567	1188

Сравнивая полученные значения индекса удерживания с литературными данными, мы пришли к заключению, что определенный графическим способом индекс удерживания L-ментола 1188 сопоставим с литературными данными. Следует отметить тот факт, что, анализируя литературные данные [1; 7; 16; 17] по индексам удерживания ментола мы обнаружили достаточно широкий диапазон приводимых значений от 1156 [7] до 1187 [17], что, по-видимому, объясняется определением различных энантиомерных форм ментола: (+)-ментола, (-)-ментола, а также некоторых его производных: ментона, карвоментола, каждая из которых в литературе зачастую называется просто “ментол”.

Следующим этапом исследования было определение индексов удерживания отдельных соединений в сложной многокомпонентной системе – спиртовом экстракте мяты перечной. Хроматограмма спиртового экстракта приведена на рисунке 3.

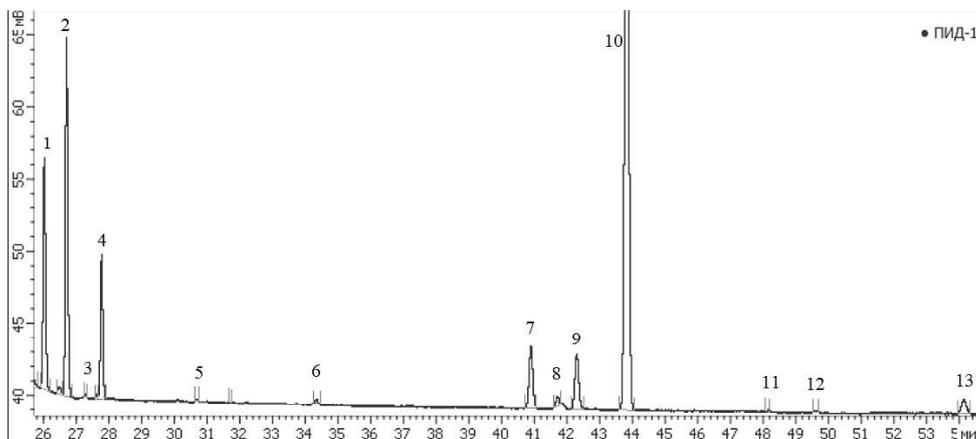


Рисунок 3 – Хроматограмма спиртового экстракта мяты перечной. Изотермическое определение, газ-носитель – азот

Как видно из представленных данных, пики с временами удерживания от 26,023 мин до 54,134 мин соответствуют экстрактивным веществам.

Хроматографические параметры полученных пиков в спиртовом экстракте мяты приведены в таблице 3.

Для определения индексов удерживания расчетным и графическим способом использовали пики с временами удерживания от 26,023 мин до 34,349 мин. Полученные данные представлены в таблице 4.

Сравнивая значения индексов удерживания, полученных расчетным и графическим методами, видно, что они полностью совпадают у пиков № 1, 2, 4, а у пиков № 3, 5 и 6 различаются не более, чем на 1, что укладывается в погрешность эксперимента. Вместе с тем следует отметить, что для определения индексов удерживания остальных пиков спиртового экстракта № 7-13 мы использовали графический метод, поскольку он дает такие же результаты, что и расчетный, но не требует использования двух алканов для определения, достаточно одного с наиболее близким временем удерживания к анализируемому компоненту. Используя литературные данные и базы данных индексов удерживания компонентов растительных масел, мы смогли идентифицировать 12 из 13 компонентов. Полученные данные приведены в таблице 5.

Таблица 3 – Хроматографические параметры пиков спиртового экстракта мяты перечной

№ пика	Экспериментально определенное время удерживания, мин (t)	Приведенное время удерживания, мин (t')	Логарифм приведенного времени удерживания (lg t')
1	26,023	1,223	0,0874
2	26,704	1,904	0,2797
3	27,283	2,483	0,3949
4	27,774	2,974	0,4733
5	30,680	5,880	0,7694
6	34,349	9,549	0,9799
7	40,903	16,103	1,2069
8	41,708	16,908	1,2281
9	42,303	17,503	1,2431
10	43,829	19,029	1,2794
11	48,153	23,353	1,3683
12	49,627	24,827	1,3949
13	54,134	29,334	1,4674

Таблица 4 – Индексы удерживания пиков № 1–6, определенные расчетным и графическим методами

N n/n	Экспериментально определенное время удерживания, мин (t)	Приведенное время удерживания, мин (t')	Индекс удерживания, определенный расчетным методом (RI) [12]	Индекс удерживания, определенный графическим методом (RI) [15]
1	26,023	1,223	606	606
2	26,704	1,904	705	705
3	27,283	2,483	762	763
4	27,774	2,974	802	802
5	30,680	5,88	950	951
6	34,349	9,549	1054	1055

Таблица 5 – Компонентный состав спиртового экстракта мяты перечной

Nn/n	Экспериментально определенное время удерживания, мин (t)	Индекс удерживания, определенный графическим методом (RI) [15]	Литературное значение индекса удерживания (RI)	Предполагаемый компонент
1	26,023	606	606 [17]	пропилформиат
2	26,704	705	705 [17]	метилбутират
3	27,283	763	763 [17]	паральдегид
4	27,774	802	802 [17]	метилмеркаптоацетат или циклопентанон
5	30,680	951	951 [1,17]	камфен
6	34,349	1055	1055 [17] 1058 [16]	метил-2-ацетилпиррол или тетрагидрофуруриацетат γ-терпинен
7	40,903	1169	1171 [17]	ментол
8	41,708	1179	1175 [17]	п-мент-4-ен-3-он
9	42,303	1187	1186 [17] 1188	карвоментол или нео-изокарвоментол L-ментол
10	43,829	1205	1207 [16]	транс-пиперитол
11	48,153	1243	1243 [17] 1245 [16]	гераниол карвон
12	49,627	1257		не идентифицирован
13	54,134	1293	1292 [17] 1292 [16]	п-мента-2,6-диен-8-ил ацетат тимол

Как видно из данных, приведенных в таблице 5, в спиртовом экстракте мяты перечной обнаружены 13 компонентов, 12 из которых идентифицированы на основании индексов удерживаний. Пики с индексами удерживания 606 и 705 соответствуют летучим эфирам пропилформиату и метилбутирату. Пик с индексом удерживания 763 соответствует паральдегиду, а пик с RI 802 может соответствовать либо метилмеркаптоацетату, либо 2-пропилтиофену. Для однозначного определения данного компонента, как и компонентов с RI 1055, 1187, 1243, 1293 следует провести дополнительное определение индекса удерживания на полярной колонке [17]. Пикам с RI 1169 соответствует ментол, 1179 – п-мент-4-ен-3-он, 1205 – транс-пиперитол.

Заклучение

В результате проведенных исследований методом газовой хроматографии показана возможность определения индексов удерживания компонентов растительных экстрактов на примере спиртового экстракта мяты перечной.

Проведенные эксперименты позволяют заключить, что индексы удерживания летучих органических соединений, определенные расчетным и графическим способом, дают идентичные значения. Вместе с тем графический способ определения индексов удерживания имеет преимущество благодаря экстраполяции результатов. Определены индексы удерживания для 13 компонентов в спиртовом экстракте мяты перечной, на основании которых 12 компонентов были идентифицированы с использованием литературных баз данных. Перспективным направлением дальнейших исследований является определение двух индексов удерживания на полярной / неполярной колонке с целью однозначной идентификации некоторых компонентов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Леонтьев, В. Н.* Газохроматографическая идентификация эфирных масел [Электронный ресурс] / В. Н. Леонтьев [и др.] // Труды Белорусского государственного университета: научный журнал. – 2006. – Режим доступа: <http://elib.bsu.by/handle/123456789/16076>. – Мн. : БГУ, 2006. – Т. 1, ч. 1. – С. 261–267.
2. *Емельянова, И. А.* Антиоксидантная и биологическая активность алкилметильных производных гидрохинона / И. А. Емельянова, Т. К. Багавиева, А. Е. Просенко // Фенольные соединения: свойства, активность, инновации: сборник научных статей по материалам X Международного симпозиума “Фенольные соединения: фундаментальные и прикладные аспекты”, Москва, 14–19 мая 2018 г. – М. : ИФР РАН, 2018. – С. 71–75.
3. *Шайдулина, Г. М.* Хромато-масс-спектрометрический анализ при производстве ароматообразующих композиций с использованием эфирных масел мяты / Г. М. Шайдулина // Пищевая промышленность. – 2005. – № 5. – С. 16–19.
4. *Лапко, И. В.* Эфирные масла: методы определения подлинности и выявления фальсификации. Обзор / И. В. Лапко [и др.] // Аналитика и контроль. – 2019. – Т. 23. – № 4. – С. 444–475.
5. *Bakkali F.* Biological effects of essential oils – a review / F. Bakkali [et al.] // Food Chem. Toxicol. – 2008. – V.46. – P. 446–475.
6. *Gherman, C.* Comparative analysis of some active principles of herb plants by GC/MS / C. Gherman, M. Culea, O. Cosar // Talanta. – 2000. – V. 53. – P. 253–262.
7. *Арутюнов, Ю. И.* Хроматографические спектры удерживания летучих компонентов равновесной паровой фазы лекарственных растений “Лаванда колосовая”, “Мята перечная”, “Трава тархуна” / Ю. И. Арутюнов [и др.] // Вестник СамГУ. – 2015. – № 3(125). – С. 153–163.
8. *Кузьменко, А. Н.* Изучение состава растительного лекарственного сбора методом газожидкостной хроматографии с хромато-масс-спектрометрическим детектированием / А. Н. Кузьменко [и др.] // Вестник Московского университета. Сер. 2. Химия. – 2010. – Т. 51. – № 2. – С. 132–138.
9. *Зенкевич, И. Г.* Интерпретация зависимости температур кипения изомерных органических соединений от динамических молекулярных параметров / И. Г. Зенкевич // Вестник СПбГУ. – 2004. – Сер.4. – Вып. 2. – С. 85–93.
10. *Уколов, А. И.* Установление структуры изомерных продуктов алкилирования аренов с использованием аддитивных схем оценки газохроматографических индексов удерживания / А. И. Уколов, И. Г. Зенкевич // Вестник СПбГУ. – 2011. – Сер. 4. – Вып. 1. – С. 83–93.
11. *Зенкевич, И. Г.* Зависимость газохроматографических индексов удерживания от соотношения характеризующих и реперных компонентов / И. Г. Зенкевич, Е. С. Ивлева // Журнал аналитической химии. – 2011. – Т. 66. – № 1. – С. 47–55.
12. *Царев, Н. И.* Практическая газовая хроматография : учебно-методическое пособие для студентов химического факультета по спецкурсу “Газохроматографические методы анализа” / Н. И. Царев, В. И. Царев, И. Б. Катраков. – Барнаул : Изд-во Алт. ун-та, 2000. – 156 с.

13. **Тюкавкина, Н. А.** Руководство к лабораторным занятиям по биоорганической химии : пособие для вузов / Н. А. Тюкавкина [и др.] ; под ред. Н. А. Тюкавкиной. – 4-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2008. – 318 с.

14. **Винарский, В. А.** Хроматография : курс лекций : в 2 ч. [Электронный ресурс]. – Ч. 1 : Газовая хроматография. – Электрон. текст. дан. (4,1 Мб). – Мн. : Научно-методический центр “Электронная книга БГУ”, 2003. – Режим доступа: <http://anubis.bsu.by/publications/elresources/Chemistry/vinarski.pdf>

15. Система индексов удерживания Ковача – наиболее удобный способ выражения данных по удерживанию в газовой хроматографии (сокращенный перевод статьи Этте Л. С.) // Успехи химии, 1966. – Т. XXXV. – Вып. 10. – С. 1883–1895.

16. **Лубсандоржиева, П. Б.** Химический состав эфирного масла гепатопротекторного сбора / П. Б. Лубсандоржиева, Н. Б. Болданова, Т. Э. Соктоева // Сибирский медицинский журнал. – 2013. – № 2. – С. 99–101.

17. Индексы удерживания компонентов эфирных масел [электронный ресурс]. – Режим доступа: http://viness.narod.ru/ret_ind.htm. – Дата доступа: 25.06.2021.

Поступила в редакцию 28.07.2021 г.

Контакты: sedakova@msu.by (Седакова Валентина Антоновна)

Sedakova V. A., Klebanov A. V., Lukovskaya V. B., Sedakov E. V., Rafeyenko V. D. DETERMINING COMPONENTS OF PLANT EXTRACTS USING RETENTION INDICES.

The article discusses the possibility of determining the components of plant extracts using gas chromatographic retention indices (the example of alcoholic peppermint extracts being under consideration). The research of the chromatographic parameters of n-alkanes (C5-C12) has been carried out to determine the retention indices by the graphic and calculation methods. The retention indices of L-menthol and the components of an alcoholic solution of peppermint have been defined.

Keywords: gas chromatography, retention indices, alkanes, menthol, plant extracts.

УДК 582.572.226

ОСОБЕННОСТИ РЕПРОДУКТИВНОЙ СПОСОБНОСТИ СОРТОВ *TULIPA GREIGII* REGEL И ВЛИЯНИЕ НА НИХ ПРЕПАРАТОВ ГУМИНОВОЙ И МЕЛАНОИДИНОВОЙ ПРИРОДЫ В УСЛОВИЯХ БЕЛАРУСИ**М. А. Левая**

кандидат биологических наук

Барановичский государственный университет

*В статье рассматриваются особенности репродуктивной способности тюльпанов. Приводится сравнительная оценка репродуктивной способности 15 сортов *Tulipa greigii* Regel в климатических условиях Беларуси. Выделены сорта тюльпанов, имеющие наиболее высокий коэффициент вегетативного размножения в данном классе, которые можно рекомендовать для промышленного размножения.*

*Проведена оценка эффективности влияния обработки препаратами гуминовой и меланоидиновой природы на коэффициент вегетативного размножения сортов *Tulipa greigii* Regel.*

Ключевые слова: тюльпан, *Tulipa greigii* Regel, репродуктивная способность, коэффициент вегетативного размножения, гидрогумат, мальтамин, гарант, сфагнин, таболин.

Введение

Тюльпаны размножаются семенами и вегетативно. В природных условиях семена осенью высыпаются из созревших коробочек и при благоприятных условиях прорастают весной. Сеянцы развиваются в природе от всходов до цветения в срок от 8 до 10–15 лет в зависимости от вида тюльпана и района его произрастания. В культуре этот процесс протекает быстрее: от 3 до 5–7 лет [1; 2]. Многие сорта тюльпанов хорошо завязывают семена, но сортовые признаки в потомстве, выращенном из семян, как правило, не сохраняются. Сеянцы зацветают на 5-6 год, а иногда и в более отдаленные сроки [3]. Поэтому семенное размножение используют главным образом в селекционной работе при получении новых сортов (путем гибридизации), для размножения дикорастущих видов [4].

Наиболее эффективным способом размножения сортовых тюльпанов является вегетативный – дочерними луковицами. Некоторые виды тюльпана в природе сохраняют эту способность в ювенильном возрасте, но с наступлением половой зрелости ее теряют [2]. У большинства диких видов заложение и рост почек-деток протекают более медленно по сравнению с сортами, либо зачатки боковых луковиц погибают [5].

М. В. Баранова на основе изучения признаков монокарпического побега тюльпанов и особенностей его формирования, утрату способности зрелых растений видов *Tulipa* к вегетативному размножению в естественных местах произрастания объясняет снижением активности пазушных меристем и обильным плодоношением под влиянием сухого и жаркого климата [6].

Тюльпаны класса Грейга в природе вегетативно практически не размножаются, а лишь возобновляются. У них происходит закладка только одной замещающей луковицы в пазухе центральной чешуи и ежегодно развивается только одна замещающая луковица. Дочерние луковицы в пазухах второй, третьей и других

чешуй не образуются, и размножение этих тюльпанов в естественных местах произрастания происходит семенным путем. Это обстоятельство позволило Н. Н. Данилиной предположить, что способность тюльпанов размножаться вегетативно – достижение селекции, и особенно важно создать оптимальные условия для поддержания этого свойства [7].

Часть сортов тюльпанов из класса Грейга способна образовывать дочерние луковицы, но количество их очень ограничено [8]. Сорта данного класса тюльпанов эффективны в озеленении, и спрос на их луковицы значительно превышает предложение. Поэтому постоянно ведется поиск способов, позволяющих стимулировать закладку дочерних луковиц в пазухах 2, 3 и других чешуй материнской луковицы. Проведен ряд исследований, которые свидетельствуют, что обработка семян биологически активными веществами гуминовой и меланоидиновой природы повышает энергию прорастания, ускоряет рост растений, что приводит к увеличению урожая [9–13]. В этом направлении использование биологически активных веществ гуминовой и меланоидиновой природы для увеличения коэффициента вегетативного размножения тюльпанов является актуальным.

Скрининг литературных источников по вопросам стимулирования размножения тюльпанов из класса Грейга привел нас к заключению о необходимости изучения влияния новых видов БАВ на закладку дочерних луковиц у различных сортов этого класса [14; 15; 16]. Ранее нами изучалось влияние гуминовых и меланоидиновых препаратов на сорта тюльпанов данного класса [17]. Вызывает интерес продолжение исследований, используя иную методику проведения опытов: учитывая рекомендации ученых об эффективности влияния предпосадочного замачивания на урожай товарных луковиц [18], актуально также установить, будет ли эффективно влиять изменение (увеличение) концентраций исследуемых препаратов при обработке сортов тюльпанов класса Грейга на коэффициент вегетативного размножения.

Цель данного исследования – изучить особенности репродуктивной способности сортов тюльпанов класса Грейга и влияние на репродуктивную способность обработки препаратами гуминовой и меланоидиновой природы в условиях Беларуси.

Материалы и методы исследования. Исследования проводились в Центральном ботаническом саду НАН Беларуси. Объектом изучения служили 15 сортов тюльпана гибридного из класса Грейга (*Tulipa greigii* Regel): ‘Addis’, ‘Grand Prestige’, ‘March of Time’, ‘Mary Ann’, ‘Miskodeed’, ‘Oriental Beauty’, ‘Oriental Splendour’, ‘Pandour’, ‘Perlina’, ‘Plaisir’, ‘Queen Ingrid’, ‘Red Riding Hood’, ‘Rosanna’, ‘Segwan’, ‘Zampa’. Критерием отбора сортов для исследования послужили рекомендации Центрального ботанического сада НАН Беларуси, согласно которым эти сорта наиболее устойчивы и декоративны в условиях Беларуси.

В опытах использованы БАВ: вещества растительного происхождения – гидрогумат, мальтамин, гарант, сфагнин, таболин в концентрациях 2 г/л. Обработку растений БАВ осуществляли согласно разработанной нами схеме, учитывая рекомендации для других культур [19; 20]. Луковицы тюльпанов замачивали непосредственно перед посадкой на 2 часа в растворах с концентрацией 2 г/л, а в последующем вегетирующие растения трехкратно обрабатывали методом опрыскивания до полного смачивания листовой поверхности в фазах: отрастание, бутонизация, цветение.

Выбор участка, подготовка почвы и посадка луковиц тюльпанов проведены на основе методики первичного сортоизучения тюльпанов, составленной в НИИ горного садоводства и цветоводства [21], и методических указаний по выращиванию посадочного материала тюльпанов [22].

Биометрические измерения, учет урожайности проведены с использованием методики государственного сортоиспытания цветочно-декоративных растений [21], а также методики первичного сортоизучения и методики отдела цветоводства ГБС РАН [23].

Основная часть

Взрослая половозрелая луковица тюльпана имеет 3-6 запасующих чешуй, в пазухах которых закладываются боковые или дочерние луковицы. Заложение их начинается от внешних чешуй к центру, но развивается быстрее всех дочерняя луковица, которая находится в пазухе центральной, более крупной мясистой чешуи. Эта луковица со временем станет материнской или замещающей. Чем дальше от центра, тем мельче дочерние луковицы [24].

Цикл жизни материнской луковицы складывается из двух лет. В первый год она развивается за счет материнского растения, находясь внутри ее чешуй, во второй год развивается самостоятельно. Осенью, в момент посадки, материнская луковица имеет зачатки дочерних в пазухах всех чешуй, которые начали развиваться в ней еще в феврале, когда она не была еще самостоятельной и находилась внутри своей материнской луковицы. В этот период года материнская луковица имеет два поколения дочерних луковиц. Третье поколение дочерних луковиц закладывается внутри дочерних второго поколения в период от февраля до июня. В конце вегетации материнская луковица отмирает, а дочерние луковицы второго поколения обособляются [14].

Из одной материнской луковицы образуется гнездо дочерних луковиц. Отношение числа дочерних луковиц к числу выкопанных гнезд определяет истинный коэффициент размножения. Он зависит от сорта, условий выращивания, а также от величины материнской луковицы: чем она крупнее, тем больше в ней запасующих чешуй, а, следовательно, выше коэффициент размножения [1].

Польские ученые *Mynett K.*, *Startek L.* исследовали влияние сорта, длины цикла роста и размера материнских луковиц на коэффициент увеличения массы на потомство луковиц тюльпана. Результаты показали, что сорт, размер материнских луковиц и длина вегетационного цикла оказывают значительное влияние на увеличение массы луковиц потомства тюльпана. Более длительное выращивание приводило к снижению общего урожая луковиц потомства даже при 2-летнем цикле выращивания, и очень сильное снижение коэффициента увеличения массы луковиц наблюдалось при 3-летнем и более продолжительных циклах. Независимо от сорта и цикла выращивания, более высокие коэффициенты увеличения массы луковиц были получены из мелких материнских луковиц в сравнении с крупными. Наиболее оптимальным был 2-летний цикл выращивания с размером луковиц 6–9 см [25].

В период проведения исследований 2017–2019 гг., наблюдались существенные отличия гидрометеорологических условий (таблица 1).

Таблица 1 – Температура воздуха и осадки в Минске в мае – апреле, 2017–2019 гг. [26]

Месяц	Среднесуточные температуры, °C			
	2017 год	2018 год	2019 год	норма
апрель	6,0	10,5	7,7	7,2
май	13,1	17,4	13,8	13,3
Месяц	Сумма осадков, мм			
	2017 год	2018 год	2019 год	норма
апрель	71	31	4	42
май	28	53	70	65

Анализ полученных в наших исследованиях данных показал, что коэффициент размножения сортов тюльпанов из класса Грейга составил в среднем за три года $2,62 \pm 0,11$. В зависимости от сорта величина его колебалась в среднем от 1,91 до 3,67. Коэффициент изменчивости признака составляет в среднем 13,82, и колебания его в пределах изучаемых сортов не превышают нормы (таблица 2).

Таблица 2 – Коэффициент вегетативного размножения сортов тюльпанов класса Грейга в 2017–2019 гг.

Сорт	2017 год		2018 год		2019 год		Среднее	
	$x \pm Sx$	V, %						
'Addis'	2,23±0,17	13,88	2,75±0,09	17,73	1,91±0,12	11,82	2,29±0,13	11,16
'Grand Prestige'	2,13±0,14	11,97	2,47±0,33	26,18	2,25±0,22	26,03	2,28±0,18	7,80
'March of Time'	2,70±0,26	8,34	3,63±0,18	11,10	2,89±0,09	12,18	3,07±0,30	8,17
'Mary Ann'	2,21±0,21	19,11	2,74±0,11	20,15	2,01±0,19	15,40	2,32±0,15	17,02
'Miskodeed'	2,72±0,18	11,38	3,44±0,24	18,65	2,71±0,22	12,75	2,96±0,11	13,16
'Oriental Beauty'	3,16±0,24	18,85	3,45±0,26	7,98	2,83±0,25	15,33	3,15±0,08	19,70
'Oriental Splendour'	3,11±0,22	9,84	3,61±0,37	15,63	2,80±0,11	14,30	3,17±0,13	10,07
'Pandour'	2,23±0,14	16,53	2,71±0,20	18,05	2,39±0,18	9,80	2,44±0,14	14,40
'Perlina'	2,07±0,19	12,00	2,78±0,22	13,18	2,22±0,34	11,23	2,36±0,19	17,33
'Plaisir'	2,17±0,13	15,42	2,81±0,28	17,37	2,74±0,19	17,80	2,57±0,20	7,89
'Queen Ingrid'	2,19±0,30	9,98	2,80±0,07	5,18	2,13±0,20	12,63	2,37±0,12	14,60
'Red Riding Hood'	2,73±0,17	14,48	3,11±0,16	17,88	2,18±0,11	15,30	2,67±0,15	9,84
'Rosanna'	2,02±0,16	6,07	2,51±0,18	11,46	2,19±0,22	12,32	2,24±0,18	12,92
'Segwan'	3,08±0,24	13,72	3,67±0,22	14,26	2,93±0,28	11,93	3,23±0,11	16,07
'Zampa'	2,09±0,14	11,60	2,41±0,21	19,93	2,20±0,17	9,79	2,23±0,16	15,11
$x \pm Sx; V, \%$	2,45±0,12; 14,11		2,99±0,08; 16,08		2,42±0,17; 12,75		2,62±0,11; 13,82	

Достаточно стабильным и наиболее высоким коэффициентом размножения на протяжении всех трех лет отличались сорта 'Segwan' ($3,23 \pm 0,11$), 'Oriental Splendour' ($3,17 \pm 0,13$), 'Oriental Beauty' ($3,15 \pm 0,08$), 'March of Time' ($3,07 \pm 0,30$).

Наиболее низкий среди сортов данного класса коэффициент вегетативного размножения имеют сорта 'Zampa' ($2,23 \pm 0,16$), 'Rosanna' ($2,24 \pm 0,18$), 'Grand Prestige' ($2,28 \pm 0,18$), 'Addis' ($2,29 \pm 0,13$).

Отмечено, что в 2018 г. коэффициент размножения всех сортов был несколько выше, чем в последующие годы исследования, и составил в среднем $2,99 \pm 0,08$. Вероятно, данные отличия обусловлены погодными условиями (таблица 1). Области естественного распространения дикорастущих видов тюльпанов приурочены в основном к районам с жарким сухим летом и небольшим количеством осадков весной и осенью. Среднесуточные температуры в апреле и мае 2018 г. заметно выше, чем в 2017 и 2019 гг., в то же время сумма осадков в 2018 г. несколько ниже нормы, это оказалось наиболее благоприятным для формирования дочерних луковиц. В 2019 г. коэффициент размножения изучаемых сортов был ниже и составил $2,42 \pm 0,17$, в 2017 г. – $2,45 \pm 0,12$. В эти годы погодные условия были менее благоприятными. Значительной вариабельностью этого показателя на протяжении всего периода исследований характеризовались сорта 'Oriental Beauty' (19,70%), 'Perlina' (17,33%), 'Mary Ann' (17,02%). Данные сорта находятся в большей зависимости от погодных условий по сравнению с другими сортами класса Грейга.

Анализируя эффективность применения регуляторов роста гуминовой и меланоидиновой природы на тюльпанах класса Грейга, необходимо отметить, что оказали наиболее эффективное воздействие обработки гарантом и мальтамином (таблица 3). Они увеличили коэффициент вегетативного размножения в среднем на 17% и 22% соответственно. Обработки гидрогуматом, сфагнином и таболином не приводили к существенному увеличению урожайности тюльпанов, коэффициент вегетативного размножения находился на уровне контроля.

Если сравнивать полученные нами данные с результатами предыдущего опыта, проведенного нами в 2004 г. [17], то необходимо отметить, что эффективность применения гаранта и мальтамина подтверждается. В то же время полученные данные свидетельствуют о том, что при обработке гарантом в концентрации 0,5 г/л увеличение коэффициента вегетативного размножения составляет 31,5%, а при обработке этим же препаратом в концентрации 2 г/л отмечено увеличение коэффициента вегетативного размножения на 17%, что статистически достоверно ниже. Такая же тенденция прослеживается и при обработке сортов тюльпанов класса Грейга мальтамином. Это дает основание утверждать, что концентрация исследуемых препаратов 0,5 г/л является наиболее оптимальной для гаранта и мальтамина. Дальнейшее увеличение концентрации не приводит к существенным положительным изменениям коэффициента вегетативного размножения тюльпанов класса Грейга и является неэффективным.

Выявлено, что эффект влияния обработки препаратами гуминовой и меланоидиновой природы не зависел от сортовых особенностей.

Таблица 3 – Коэффициент вегетативного размножения сортов тюльпанов класса Грейга под влиянием обработки БАВ в 2017–2019 гг.

Вариант обработки	2017 год		2018 год		2019 год		Среднее	
	$\bar{x} \pm S_x$	V, %						
<i>Гарант</i>	$2,87 \pm 0,13$	12,08	$3,44 \pm 0,19$	14,72	$2,86 \pm 0,21$	17,80	$3,06 \pm 0,14$	10,13
<i>Гидрогумат</i>	$2,50 \pm 0,24$	9,95	$3,05 \pm 0,23$	21,15	$2,40 \pm 0,12$	16,13	$2,65 \pm 0,22$	17,81

Вариант обработки	2017 год		2018 год		2019 год		Среднее	
	$\bar{x} \pm S_x$	V, %						
<i>Мальтамин</i>	2,94±0,16	18,32	3,68±0,08	10,15	2,95±0,19	17,10	3,19±0,20	18,16
<i>Сфагнин</i>	2,49±0,11	12,10	2,98±0,17	22,11	2,49±0,15	19,05	2,65±0,13	14,12
<i>Таболин</i>	2,57±0,15	12,28	3,07±0,21	14,63	2,40±0,20	11,74	2,68±0,17	12,10
<i>Контроль</i>	2,45±0,12		2,99±0,08		2,42±0,17		2,62±0,11;	

Заклучение

Таким образом, дана сравнительная оценка репродуктивной способности 15 сортов тюльпанов класса Грейга. Как показали результаты исследований сорта тюльпанов класса Грейга: 'Segwan', 'Oriental Splendour', 'Oriental Beauty', 'March of Time', которые имеют наиболее высокий коэффициент вегетативного размножения, можно рекомендовать для промышленного размножения, так как при их выращивании можно получить больше посадочного материала за меньший промежуток времени и тем самым сократить затраты на выращивание посадочного материала.

Проведена оценка эффективности влияния обработки препаратами гуминовой и меланоидиновой природы на коэффициент вегетативного размножения сортов тюльпанов класса Грейга. Эффект влияния обработки препаратами гуминовой и меланоидиновой природы не зависел от сортовых особенностей в данном классе. Установлено, что обработка гарантом и мальтамином наиболее эффективно повышает коэффициент вегетативного размножения сортов тюльпанов класса Грейга. Выявлено, что концентрация 0,5 г/л является наиболее оптимальной для гаранта и мальтамина. Обработку данными препаратами целесообразно использовать в технологии выращивания тюльпанов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Рыженкова, Ю. И.* Тюльпаны / Ю. И. Рыженкова. – М. : Издательский Дом МСП, 2003. – 80 с.
2. *Александрова, Л. М.* Интродукционная сортооценка и особенности вегетативного размножения тюльпанов в степном Крыму : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Л. М. Александрова ; Укр. акад. аграр. наук, Гос. Никит. ботан. сад. – Ялта, 1995. – 26 с.
3. *Малова, Н. Б.* Тюльпаны / Н. Б. Малова. – М. : ОЛМА-ПРЕСС, 2001. – 96 с.
4. *Кудрявцева, В. М.* Современная классификация и методы селекции тюльпанов / В. М. Кудрявцева // Весці АН БССР. Сер. біял. навук. – 1984. – № 3. – С. 11–15.
5. *Печеницын, В. П.* Влияние температуры на морфогенез среднеазиатских тюльпанов / В. П. Печеницын. – Ташкент, 1990. – 81 с.
6. *Баранова, М. В.* Луковичные растения семейства лилейных / М. В. Баранова. – СПб. : Наука, 1999. – 228 с.
7. *Данилина, Н. Н.* Тюльпаны / Н. Н. Данилина. – М. : Кладезь-Букс, 2006. – 93 с.
8. *Левая, М. А.* Сравнительный анализ интенсивности размножения партнерных тюльпанов / М. А. Левая, Ю. И. Рыженкова // Теоретичні та прикладні аспекти інтродукції рослин і зеленого будівництва: мат. V міжнародної наукової конференції молодих дослідників, Київ, 7–10 червня 2005 року / Національний ботанічний сад ім. М. М. Гришка НАН України; редкол.: Н. В. Заїменко [та ін.]. – Київ : Фітосоціоцентр, 2005. – С. 71–72.
9. *Наумова, Г. В.* Влияние регуляторов роста меланоидиновой природы на развитие и продуктивность растений / Г. В. Наумова [и др.] // Регуляция роста, развития и продуктивности растений : мат-лы Междунар. науч. конф. – Минск, 2007. – С. 117.

10. **Горбунов, А. К.** Влияние биологически активных препаратов дублин и сфагнин на развитие семян и проростков растений / А. К. Горбунов [и др.] // Сб. науч. тр. / Ин-т проблем использования природных ресурсов и экологии НАН Беларуси. – Мн. : ОДО “Тонпик”, 2004. – Вып. 10 : Природопользование. – С. 134–136.
11. **Киселева, Л. И.** Стимулирующее влияние гуминовых препаратов на продуктивность и качество сельскохозяйственных культур: лекция Л. И. Киселева, И. З. Голикова. – Новосибирск : НСХИ, 1986.
12. **Пироговская, Г. В.** Об эффективности применения регуляторов роста растений при возделывании многолетних трав / Г. В. Пироговская [и др.] // Сб. науч. тр. / Ин-т проблем использования природных ресурсов и экологии НАН Беларуси. – Мн. : ОДО “Тонпик”, 2003. – Вып. 9: Природопользование. – С. 168–171.
13. **Овчинникова, Т. Ф.** Обоснование и разработка технологических приемов гидролитической деструкции торфа с получением регуляторов роста : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.17.07 / Т. Ф. Овчинникова ; Ин-т проблем использования природ. ресурсов и экологии АНБ. – Минск, 1996. – 19 с.
14. **Кудрявцева, В. М.** Тюльпаны / В. М. Кудрявцева. – Минск : Польша, 1987. – 239 с.
15. **Shahab, S.** Growth Promotion Of Mung Beans By Bacterial Pyrroloquinoline / S. Shahab, N. Ahmed // The Internet Journal of Genomics and Proteomics. – 2011. Volume 1. № 1. – DOI: 10.5580/209f
16. **Прокофьева, Г. Н.** О влиянии гербицидов на урожай и химический состав гладиолусов и тюльпанов / Г. Н. Прокофьева // Интродукционное изучение и основы селекции декоративных растений. – М. : Наука, 1988. – С. 178–187.
17. **Левая, М. А.** Эффективность применения биологически активных веществ при обработке тюльпанов классов Кауфмана и Грейга / М. А. Левая, Ю. И. Рыженкова // Материалы I (IX) Междунар. конф. молодых ботаников в Санкт-Петербурге, 21–26 мая 2006 г. / РАН, Ботанический ин-т им. В. Л. Комарова РАН ; редкол.: О. Н. Воронова [и др.]. – Санкт Петербург, 2006. – С. 256.
18. **Hetman, J.** Wpływ ciecia Kwiatów i dokarmiania dolisnego na plon cebul tulipanów / J. Hetman, H. Laskowska, W. Durlak // Roczn. AR Poznaniu Ogrod. – 2000. – № 29. – P. 45–50.
19. **Будько, А. В.** Средства защиты и регуляторы роста растений: дополнение 4 к списку / А. В. Будько [и др.]. – Минск : Белнаучцентринформмаркетинг АПК, 1998. – С. 40–41.
20. **Будько, А. В.** Средства защиты и регуляторы роста растений: список препаратов, разрешенных для применения в Республике Беларусь / А. В. Будько [и др.]. – Минск : Белнаучцентринформмаркетинг АПК, 1998. – С. 238.
21. Методика первичного сортоизучения тюльпанов / М-во с.-х. СССР, НИИ горного садоводства и цветоводства ; сост.: В. И. Болгов, Ю. Ф. Кулибаба. – Сочи, 1983. – 15 с.
22. Методические указания по выращиванию посадочного материала тюльпанов / С. Т. Тесля [и др.] ; под ред. В. С. Вакула. – М. : Колос, 1971. – 17 с.
23. Методика государственного испытания сельскохозяйственных культур: Декоративные культуры. – М. : Колос, 1968. – Вып. 6. – 223 с.
24. **Зайцева-Гушнова, Е. Н.** Тюльпаны / Е. Н. Зайцева-Гушнова. – М. : ЗАО “Фитон+”, 2002. – 208 с.
25. **Mynett, K.** Badania nad ubylinawianiem tulipanów. Cz. III. Wpływ odmiany, dylgosci cyklu uprawowego oraz wielkoscii cebul matecznych na współczynnik przyrostu masy cebul potomnych tulipanów / K. Mynett, L. Startek // Folia Univ. agr. Stetin. Agr. – 1999. – № 78. – P. 235–241.
26. Погода и климат [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.pogodaiklimat.ru/monitor.php?id=26850&month=6&year> – Дата доступа: 11.12.2020.

Поступила в редакцию 19.11.2021 г.

Контакты: +375 297 29 70 27 (Левая Марина Антоновна)

Levaya M. A. CHARACTERISTICS OF THE REPRODUCTIVE ABILITY OF TULIPA GREIGII REGEL VARIETIES AND THE INFLUENCE OF HUMIC AND MELANOIDIN SUBSTANCES ON THEM IN THE CLIMATIC CONDITIONS OF BELARUS.

The article discusses the features of the reproductive capacity of tulips and provides a comparative assessment of the reproductive capacity of 15 cultivars of Tulipa greigii Regel in the climatic conditions of Belarus. The cultivars of tulips with the highest coefficient of vegetative propagation in this class are identified and can be recommended for industrial propagation.

The influence of the preparations of humic and melanoidin nature on the coefficient of vegetative reproduction of Tulipa greigii Regel varieties is assessed. Evaluation of the effectiveness of the effect of treatment with preparations of humic and melanoidin nature on the coefficient of vegetative reproduction of varieties Tulipa greigii Regel.

Keywords: Tulip, *Tulipa greigii* Regel, reproductive ability, coefficient of a vegetative reproduction, hydrohumate, sphagnin, guarantor, maltamine, tabolin.

УДК 581.844

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СТРУКТУРЫ ОДНОЛЕТНЕГО СТЕБЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ СЕМЕЙСТВА ПАСЛЕНОВЫЕ (*SOLANACEAE* JUSS.)

В. И. Бойко

кандидат биологических наук, доцент

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

Г. Н. Тихончук

кандидат биологических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Н. В. Шкуратова

кандидат биологических наук, доцент

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

В статье рассматривается анатомическое строение коры однолетних стеблей 5 представителей из семейства Пасленовые. Проведен сравнительно-анатомический анализ исследованных видов, выявлены диагностические признаки, составлены ключи для определения объектов.

Ключевые слова: однолетний стебель, перидерма, эпидерма, флоэма, ксилема, сердцевина, первичная кора, перец, томат, физалис.

Введение

Комплексное использование растительных ресурсов должно быть основано на знании не только полезности сырья, но и его структуры, обуславливающей технологию переработки, а также сферу применения. Покрытосеменные растения широко используются как витаминоносные растения, для получения пищи и лекарственных препаратов, кормовой базы и в целях озеленения парков, приусадебных участков. Анатомия растений может изменяться с возрастом и связана с условиями произрастания, что позволяет изучать влияние экологических факторов на микроструктуру стеблей и, соответственно, использовать полученные данные в природоохранных целях.

Изучение анатомического строения однолетнего стебля растений имеет большое значение в целях диагностики и уточнения границ таксонов, для решения вопросов филогении, а также для проведения биологической и криминалистической экспертиз.

Целью работы было исследование анатомического строения однолетних стеблей некоторых представителей семейства Пасленовые.

Для достижения цели поставлены следующие задачи: описать топографию и анатомическое строение однолетних стеблей у 5 представителей семейства Пасленовые; выявить их диагностические признаки и составить ключ для определения.

Объекты исследования *Brunfelsia hopeana* (Hook) Brenth, *Physalis peruviana* L., *Physalis alkekengi* L., *Capsicum annuum* L., *Solanum lycopersicum* L. (*slivka moskovskaya.html*).

При выполнении работы нами использованы следующие методики: сбора полевого материала и изготовления постоянных препаратов.

Сбор полевого материала проводился на приусадебном участке города Кобрина, а также в Зимнем саду Центра экологии учреждения образования “Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина”. Объекты исследования собирались в октябре месяце 2018 и 2020 г., т. е. в период, когда камбий находится в неактивном состоянии. Образцы фиксировали в 96% спирте и выдерживали в смеси спирта и глицерина (1:1).

Из образцов однолетнего стебля готовили микрообразцы, которые использовали для получения срезов. Толщина срезов составила 10–30 мкм. Изготавливали их вручную, с помощью лезвия “Спутник”. Срезы выполнялись в трех направлениях: поперечном, радиальном и тангентальном. Затем они окрашивались регрессивным способом, помещая в сафранин и нильский синий, после окраски срезы проводили через растворы спиртов разных концентраций (50%, 70%, 90% и абсолютный спирт). На следующем этапе они обрабатывались карбол-ксилолом и ксилолом, после чего помещались в канадский бальзам. Таким образом, методика была общепринятой в анатомии растений [1]. Последние анализировали при помощи окуляр – микрометра МОВ -1-15.

Основная часть

На поперечном срезе однолетний стебель Брунфельсии Хопа окружен эпидермой, под которой находится перидерма, граничащая с колленхимой, охватывающей первичную кору. Центральнее располагается кольцо механических элементов, которое окружает первичную и вторичную флоэму. Ко внутри от последней находятся древесина и сердцевина. Между вторичными проводящими тканями имеется однослойный камбий.

Снаружи стебель покрыт однослойной эпидермой. Тангентальный и радиальный размер ее клеток составляет от 25 до 30 мкм. Наиболее утолщена наружная тангентальная стенка, толщина которой достигает 2 мкм. Трихомы отсутствуют.

Центральнее от эпидермы закладывается перидерма. Тип заложения ткани является субэпидермальным. Она типичная, состоит из феллемы, феллогена и феллодермы. В радиальном ряду однолетнего стебля поперечного среза располагается 4-5 слоев клеток пробки. Клетки заполнены воздухом, их радиальный размер составляет 25–30 мкм, а тангентальный – от 15 до 20 мкм. Последние имеют прямоугольную форму. Феллема содержит чечевички, которые, как правило, возвышаются над поверхностью стебля.

Под пробкой закладывается феллоген. Ткань представлена одним слоем живых клеток, обеспечивающих образование феллодермы и феллемы. Тангентальный размер клеток феллогена от 25 до 30 мкм, а радиальный – 5–7 мкм. Под феллогеном располагается однослойная феллодерма. Последняя представлена живой паренхимной тканью, ее клетки несколько больше по размеру чем у феллогена. Радиальный размер клеток феллодермы составляет 10–13 мкм, а тангентальный – от 25 до 30 мкм.

Центральнее от перидермы располагается колленхима, которая представлена равномерно утолщенными клетками. Ткань образована 4-5 слоями паренхимных клеток, их составляет от 10 до 25 мкм. Клетки имеют форму многогранника. Ширина ткани на поперечном срезе достигает 60 мкм.

Под колленхимой располагается первичная кора. Ткань гомогенная, а ее клетки имеют вид многогранников, диаметр которых колеблется от 18 до 35 мкм. В клетках встречаются многочисленные друзы оксалата кальция.

Кольцо механических элементов на поперечном срезе представлено 2-3 слоями волокон. Оно сплошное, состоит из групп волокон, которые соединены брахисклереидами. Поперечники волокон имеют форму пяти-шестиугольников. Их диаметр колеблется в пределах от 10 до 13 мкм. Клетки имеют толстые оболочки, длина достигает 250–300 мкм. Радиальный размер брахисклереид достигает 20–30 мкм, тангентальный – 10–15 мкм, а толщина стенки – 3–4 мкм. Склерейды образуются из клеток первичной коры.

Флоэма на поперечном срезе имеет ширину от 40 до 60 мкм. Ткань представлена проводящими и запасующими элементами. Лубяные волокна во флоэме отсутствуют. Членики ситовидных трубок имеют поперечное сечение в виде четырех-пятиугольников. Их тангентальные стенки слегка вытянуты к периферии стебля и образуют нечеткие радиальные ряды. Радиальный размер члеников составляет 7–9 мкм, а тангентальный – от 10 до 16 мкм.

Сердцевинные лучи однорядные, реже встречаются двухрядные, их ширина составляет 10–15 мкм. Во вторичной флоэме клетки лучей немного расширены. Высота сердцевинных лучей составляет от 400 до 500 мкм, а слойность – от 16 до 22 клеток. Вертикальная паренхима представлена клетками в поперечнике округлой формы, диаметр которых составляет 9–10 мкм. В вертикальном ряду располагается по 3–4 клетки.

Камбий располагается между вторичными флоэмой и ксилемой. Ткань представлена одним слоем тонкостенных клеток, поперечник которых составляет 5–6 мкм, а длина – до 8–11 мкм.

Ширина ксилемы на поперечном срезе составляет от 500 до 600 мкм. Ткань является рассеяно-сосудистой и представлена проводящими, запасующими и механическими элементами. Радиальный размер сосудов колеблется в пределах 19–28 мкм, тангентальный – от 20 до 35 мкм, а высота члеников – 70–80 мкм. Они на поперечном срезе образуют радиальные ряды, которые включают 6–7 структур.

Трахеиды имеют диаметр поперечника 8–12 мкм и длину от 300 до 350 мкм. Волокна в поперечном сечении обладают шестиугольной формой. Их тангентальный размер составляет 10–14 мкм, радиальный – 12–16 мкм, а длина – 280–300 мкм.

Волокна образуют толстые стенки, размер которых достигает до 3 мкм. Диаметр просвета составляет 8–10 мкм. Клетки на поперечном срезе уложены радиальными рядами.

Лучи однорядные, но также встречаются и двухрядные, их ширина составляет 10–15 мкм, высота – 400–500 мкм, а слойность – от 16 до 22 клеток.

Вертикальная паренхима представлена клетками округлой формы в продольном сечении. Их диаметр достигает от 9 до 10 мкм. В вертикальном ряду на поперечном срезе располагается 3–4 клетки.

Диаметр сердцевинки составляет около 1000 мкм. Ткань гомогенная, поперечники клеток имеют форму пяти-шестиугольников, они тонкостенные, а диаметр клеток достигает 40–70 мкм.

В сердцевине содержится большое количество друз оксалата кальция. Наружные клетки образуют перимедуллярную зону. Диаметр их составляет от 8 до 11 мкм.

Топография тканей однолетнего стебля Физалиса перуанского следующая: снаружи стебель покрыт эпидермой, ко внутри от которой располагается колленхима, граничащая с первичной корой. Под последней располагается флоэма, граничащая с ксилемой. Проводящие ткани разделены камбием. В центре располагается сердцевина. Снаружи стебель покрыт однослойной эпидермой. Ширина ткани составляет 35 мкм. Наружные тангентальные стенки покрыты слоем кутикулы, который составляет – 4 мкм. Клетки ткани образуют многочисленные трихомы, которые являются кроющими. Их длина составляет 300–700 мкм.

Центральнее от эпидермы расположена колленхима. Ширина ткани на поперечном срезе составляет от 150 до 200 мкм. Колленхима представлена 3–5 слоями овальных и округлых клеток, тангентальный размер которых достигает от 30 до 50 мкм, а радиальный – от 25 до 60 мкм. Оболочки клеток равномерно утолщены.

Под колленхимой располагается первичная кора. Ткань гомогенная, ее клетки утолщены равномерно. Ширина ткани на поперечном срезе достигает 25–300 мкм. Клетки имеют форму многоугольника и их диаметр равен 80–120 мкм.

Флоэма на поперечном срезе имеет ширину до 100 мкм. Ткань представлена только запасными и проводящими элементами. Радиальный размер ситовидных трубок составляет от 17 до 19 мкм, а тангентальный – 20–23 мкм. Длина члеников ситовидных трубок достигает от 59 до 70 мкм. Поперечные стенки располагаются перпендикулярно к продольным.

Клетки вертикальной паренхимы имеют диаметр поперечника от 20 до 28 мкм. Лучи однорядные и двурядные, их ширина колеблется от 18 до 40 мкм, высота – 250–350 мкм, а слойность – 16–25 клеток.

Камбий располагается на границе между вторичной флоэмой и ксилемой. Клетки диаметром 3–4 мкм имеют веретеновидную форму.

Вторичная ксилема представлена запасными, проводящими и механическими элементами. Сосуды в поперечнике имеют овальную форму. Радиальный размер сосудов составляет 70–100 мкм, а тангентальный – 50–70 мкм, длина члеников может быть от 100 до 130 мкм. Трахеиды имеют тангентальный размер от 25 до 32 мкм, а радиальный – 35–40 мкм. Длина клеток достигает от 180 до 270 мкм. По типу ткань является рассеянно-сосудистой. Вторичные утолщения проводящих элементов спиральные. Лучи однорядные, а также бывают и двурядные. Ширина лучей составляет от 16 до 40 мкм, высота – 250–350 мкм, а слойность – от 16 до 25 клеток.

Диаметр клеток сердцевины находится в пределах 100–180 мкм. Клетки имеют округлую форму, но иногда многоугольную. Ткань имеет гомогенную структуру, ее наружные клетки образуют перимедулярную зону. Диаметр ткани составляет 1500–2000 мкм.

Топография тканей физалиса декоративного на поперечном срезе однолетнего стебля следующая: снаружи орган покрыт эпидермой, которая граничит с колленхимой. Под последней располагается первичная кора, а ко внутри от нее находится кольцо механических элементов, которое контактирует со вторичной флоэмой, граничащей со вторичной ксилемой. Проводящие ткани разделены камбием. В центре стебля располагается сердцевина.

Снаружи стебель физалиса декоративного покрыт эпидермой, клетки которой имеют овальную форму и образуют многоклеточные трихомы игловидной формы.

Эпидерма граничит с колленхимой (наружным слоем коровой паренхимы). Оболочки клеток ткани равномерно утолщаются, придавая протопластам овальную форму.

Первичная кора гетерогенная, так как помимо типичных клеток встречаются еще и брахисклереиды. Диаметр клеток достигает 15–20 мкм.

Кольцо механических элементов на поперечном срезе представлено 1–2 слоями волокон, оно прерывистое. Волокна в поперечнике имеют форму пятиугольников. Их диаметр составляет 11–15 мкм.

Центральнее от последней располагается вторичная флоэма, граничащая со вторичной ксилемой. Проводящие ткани разделены камбием.

Вторичная флоэма состоит из проводящих, механических и запасующих элементов. Ситовидные трубки в поперечнике имеют форму пяти-шестиугольников. Их радиальный размер составляет 8–10 мкм, тангентальный – 10–12 мкм, длина члеников – 75–105 мкм. Лучи однорядные, их ширина колеблется от 13 до 17 мкм, слойность составляет 16–26 клеток.

Древесина рассеянно-сосудистая. Ткань состоит из сосудов, волокнистых трахеид и запасующей паренхимы (горизонтальной и вертикальной). Сосуды в поперечнике овальной формы. Их радиальный размер составляет 40–70 мкм, тангентальный – 35–55 мкм, длина члеников сосудов – 90–150 мкм. Диаметр трахеид составляет 15–19 мкм. Форма их поперечников пяти-шестиугольная, длина достигает 150–210 мкм. Лучи однорядные, их ширина колеблется от 12 до 15 мкм, слойность составляет 12–22 клетки.

Сердцевина гетерогенная, представлена клетками, которые в поперечнике имеют шестиугольную форму. Диаметр клеток достигает 120–190 мкм. Наружные клетки образуют перимедулярную зону. В ткани присутствуют брахисклереиды. Диаметр ткани достигает 1600–1900 мкм.

Топография тканей однолетнего стебля перца овощного на поперечном срезе следующая: снаружи располагается эпидерма, под которой участками по периферии располагается колленхима и перидерма. Центральнее от них находится первичная кора, с которой граничит кольцо механических элементов, под ним располагается вторичная флоэма, которая граничит со вторичной ксилемой. Между проводящими тканями имеется камбий. В центре стебля находится сердцевина, в которой обнаружены слизевые вместилища.

Однолетний стебель снаружи покрыт эпидермой. Ткань однослойная, представлена клетками овальной формы. Тангентальный размер колленхимы составляет от 20 до 35 мкм, а радиальный – 15–18 мкм. Наружные тангентальные стенки слегка выгнуты к периферии стебля и покрыты слоем кутикулы, который достигает 2 мкм.

Редко встречаются многоклеточные трихомы, состоящие из трёх клеток. Конечная клетка шарообразно закруглена, ее диаметр может достигать 40 мкм.

Стебель имеет неровные очертания и в выступах располагается колленхима, которая не всегда образует сплошной слой. В ребрышках ткань равномерно утолщена. Колленхима состоит из 2–3 слоев клеток, ее ширина на поперечном срезе достигает до 80 мкм. Тангентальный размер клеток равен 20–30 мкм, а радиальный 15–25 мкм. Клетки равномерно утолщены.

Под колленхимой располагается первичная кора. Ткань является гомогенной. Клетки тонкостенные волнистые, имеют форму пяти-шестигранника. В поперечнике диаметр клеток колеблется в пределах 18–35 мкм.

Кольцо механических элементов представлено группами волокон, клетки которых в поперечном сечении четырех-пятиугольной формы. Радиальный размер волокон составляет 15–18 мкм, а тангентальный около 30 мкм. Толщина клеточной стенки равна 3–4 мкм, а длина волокон около 190–260 мкм. Последние заострены на концах.

Вторичная флоэма имеет ширину от 50 до 70 мкм и представлена проводящими и запасующими элементами. Членики ситовидных трубок на поперечном срезе четырех-пятиугольной формы, их радиальный размер достигает 17 мкм, а тангентальный – 18–22 мкм. Длина члеников составляет 60–70 мкм. На поперечном срезе членики ситовидных трубок образуют слабовыраженные радиальные ряды. Клетки вертикальной паренхимы имеют овальную форму в поперечнике. Тангентальный размер клеток составляет около 20 мкм, а радиальный – 10 мкм.

Камбий располагается между вторичными флоэмой и ксилемой. Ткань представлена одним слоем тонкостенных клеток, поперечник которых достигает 7 мкм.

Вторичная ксилема на поперечном срезе имеет ширину около 1000 мкм. Ткань является рассеянно-сосудистой и представлена запасующими, проводящими и механическими элементами. Радиальный размер сосудов находится в пределах 20–40 мкм, а тангентальный – 20–35 мкм. Волокнистые трахеиды уложены радиальными рядами. В поперечном сечении они имеют форму четырех-пятиугольников. Тангентальный размер волокнистых трахеид колеблется от 10 до 15 мкм, а радиальный – 19–22 мкм. Лучи однорядные, их ширина составляет до 20 мкм, слойность – 17–23 клеток.

Сердцевина имеет диаметр от 1500 до 2000 мкм, содержит слизевые вместилища. Клетки ткани имеют форму шестиугольника. Их диаметр составляет от 30 до 60 мкм. По периферии сердцевинки клетки образуют перимедулярную зону, среди клеток которой встречаются пучки первичной ксилемы. То есть стебель сформирован на основе проводящих пучков, а в результате последующего развития вторичные проводящие ткани образуют сплошное кольцо.

Снаружи однолетний стебель Томата (сорт Сливка московская) покрыт эпидермой, которая защищена слоем кутикулы, достигающим 3–4 мкм. Клетки эпидермы округлой и овальной формы. Наиболее утолщена наружная тангентальная стенка, которая слегка вытянута к периферии органа. Радиальный размер клеток находится в пределах от 25 до 40 мкм, а тангентальный – от 25 до 50 мкм.

Обнаружены многоклеточные трихомы игловидной формы, длина достигает до 60 мкм. Иногда, в средней части, они могут сильно расширяться – до 30 мкм, в то время как обычно ширина волосков достигает 10–20 мкм. Ширина ткани на поперечном срезе колеблется от 20 до 30 мкм.

Под эпидермой располагается первичная кора, ширина которой на поперечном срезе составляет около 140 мкм. Ткань сложена клетками, которые подобно мезофиллу листа образуют столбчатую и губчатую ткань.

Клетки субэпидермального слоя располагаются перпендикулярно к эпидерме.

Радиальный размер их составляет 38–40 мкм, а тангентальный составляет 18–24 мкм. Под этим слоем располагаются паренхимные клетки округлой формы диаметром 16–22 мкм, их оболочки волнистые.

Первичная кора гетерогенная, так как в ткани встречаются брахисклереиды. Они овальной формы, тангентальный размер составляет 25–30 мкм, радиальный –

15–20 мкм, а толщина стенки достигает 5 мкм. Изредка встречаются призматические кристаллы оксалата кальция.

Глубже от первичной коры располагается кольцо механических элементов. Ширина ткани на поперечном срезе составляет 30–40 мкм.

Кольцо практически сплошное, в некоторых местах прерывается паренхимными клетками. Волокна на поперечном срезе имеют форму от шестиугольника до округлой. Их тангентальный размер находится в пределах от 18 до 22 мкм, а радиальный – 17–25 мкм. Длина волокон составляет 230 мкм.

Вторичная флоэма состоит только из запасующих и проводящих элементов. Ширина ткани на поперечном срезе равна 40 мкм. Членики ситовидных трубок в поперечнике имеют четырех-пятиугольную форму. Их радиальный размер составляет 10–12 мкм, а тангентальный – 13–15 мкм. Длина члеников ситовидных трубок находится в пределах 70–80 мкм. Сердцевинные лучи имеют размер от 25 до 35 мкм, они чаще однорядные, их высота колеблется от 150 до 280 мкм, слойность – 15–20 клеток. В клетках флоэмных лучей также изредка встречаются призматические кристаллы оксалата кальция.

Камбий располагается между вторичной флоэмой и ксилемой. Ткань представлена тонкостенными клетками веретеновидной формы, размер которых составляет от 3 до 4 мкм.

Вторичная ксилема является рассеянно-сосудистой тканью. Ширина ее на поперечном срезе достигает 160–180 мкм. Тангентальный размер сосудов достигает 30–35 мкм, радиальный достигает 30–40 мкм. Высота члеников сосудов составляет 90–120 мкм. Имеются волокнистые трахеиды, тангентальный размер которых достигает от 18 до 20 мкм, радиальный – 20–22 мкм, а высота трахеид – 50 мкм. Лучи однорядные, реже бывают двурядными, их ширина колеблется от 18 до 30 мкм, слойность – 18–20 мкм, а высота – 180–250 мкм.

В центре стебля находится гомогенная сердцевина. Ее клетки округло-овальной формы, диаметр их составляет от 60 до 80 мкм. Редко встречаются друзы оксалата кальция. В периферической области сердцевины местами встречаются пучки первичной ксилемы. Это говорит о том, что стебель сформирован на основе прокамбиальных пучков.

В целях таксономии и систематики используются не только морфологические, но и анатомические признаки. Первая попытка построения ключей по внутренним признакам для покрытосеменных была сделана Е. В. Малыченко для ив средней полосы России [2], позже В. И. Бойко для семейства Ericaceae Juss. (по признакам коры) [3], а затем Д. И. Шевчук для семейства Буковые [4]. Нами выявлены анатомические признаки изученных представителей семейства Пасленовые, которые могут быть использованы в качестве диагностических.

Сравнительно-анатомический анализ тканей однолетних стеблей исследованных представителей семейства Пасленовые позволил выделить следующие диагностические признаки:

Эпидерма:

- 1) форма эпидермальных клеток в поперечнике;
- 2) наличие или отсутствие трихом;
- 3) форма трихом (игловидная, головчатая).

Перидерма: диагностическим признаком является наличие или отсутствие этой ткани.

Колленхима:

- 1) форма клеток ткани в поперечнике;
- 2) располагается сплошным кольцом или группами волокон.

Паренхима первичной коры:

- 1) структура ткани (гомогенная или гетерогенная);
- 2) наличие или отсутствие склереид;
- 3) наличие или отсутствие кристаллов оксалата кальция.

Кольцо первичных механических элементов:

- 1) наличие или отсутствие кольца механических элементов;
- 2) структура ткани (гомогенная или гетерогенная);
- 3) количество и форма волокон в группах;
- 4) структура расположения (сплошное или прерывистое).

Вторичная флоэма:

- 1) рядность лучей флоэмы;
- 2) форма члеников ситовидных трубок;
- 3) наличие кристаллов оксалата кальция во флоэмных лучах.

Древесина:

- 1) диагностическим признаком является наличие или отсутствие пучков первичной ксилемы;
- 2) тип ткани: кольце-сосудистая или рассеянно-сосудистая;
- 3) наличие кристаллов в лучах.

Сердцевина:

- 1) структура ткани (гомогенная или гетерогенная);
- 2) наличие или отсутствие склереид;
- 3) наличие или отсутствие кристаллов оксалата кальция.

Ключ

для определения исследованных представителей семейства Пасленовые по анатомическим признакам однолетнего стебля:

- | | |
|--|---|
| 1 Перидерма в однолетнем стебле присутствует, трихомы не образуются..... | |
| Брунфельсия Хопа (<i>Brunfelsia hopeana</i>) | |
| – Перидерма не закладывается, трихомы формируются..... | 2 |
| 2 Трихомы железистые, головчатой формы..... | |
| Перец овощной (<i>Capsicum annuum</i>) | |
| – Трихомы игловидной формы..... | 3 |
| 3 Первичная кора гомогенная..... | |
| Физалис перуанский (<i>Physalis peruviana</i>) | |
| – Первичная кора гетерогенная..... | 4 |
| 4 Наличие друз оксалата кальция в первичной коре и флоэме, гомогенная сердцевина, не содержащая склереид..... | |
| Томат (сорт Сливка московская) (<i>Solanum lycopersicum</i>) | |
| – Отсутствие друз оксалата кальция в первичной коре и флоэме, гетерогенная сердцевина, содержащая склереиды..... | |
| Физалис декоративный (<i>Physalis alkekengi</i>) | |

Заклучение

1. Описана топография тканей однолетних стеблей на поперечном срезе у 5 видов из семейства Пасленовые. Стебель сложен как тканями первичного (эпидерма, колленхима, первичная кора, механическое кольцо, первичные флоэма и ксилема, сердцевина) так и вторичного происхождения (камбий, вторичные флоэма и ксилема, перидерма).

2. Несмотря на схожесть в топографии и общей структуре тканей, исследованные представители отличаются по ряду признаков: наличием или отсутствием многоклеточных трихом в эпидерме, перидермы, кольца механических элементов, расположением первичной ксилемы, друз оксалата кальция, брахисклереид и слизевых вместилищ. Эти признаки выделены в качестве диагностических.

3. Составлен ключ для определения исследованных видов по анатомическим признакам коры.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Прозина, М. Н.* Ботаническая микротехника / М. Н. Прозина. – М. : Высшая школа, 1960. – 206 с.

2. *Малыченко, Е. В.* Анатомия коры ив средней полосы Европейской части СССР : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Е. В. Малыченко. – М., 1986. – 22 с.

3. *Бойко, В. И.* Анатомическое строение коры видов сем. *Ericaceae* Juss. : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / В. И. Бойко ; Воронежский государственный ун-т. – Воронеж, 1996. – 18 с.

4. *Шевчук, Д. И.* Таксономическая ценность анатомических признаков надземных вегетативных органов семейства Буковые (*Fagaceae* Dumort.) / Д. И. Шевчук, В. И. Бойко // Современные исследования в гуманитарных и естественнонаучных отраслях : сб. научн. ст. Ч. IV / научн. ред. к. пед. наук Т. А. Колесникова. – М. : Перо, 2020. – С. 38–42.

Поступила в редакцию 03.12.2021 г.

Контакты: tikhonchuk@msu.by (Тихончук Галина Николаевна)

Boyko V. I., Tikhonchuk G. N., Shkuratova N. V. COMPARATIVE CHARACTERISTICS OF THE STRUCTURE OF ONE-YEAR STEM OF SOME REPRESENTATIVES OF THE SOLANACEAE FAMILY (SOLANACEAE YUSS.).

The article discusses the anatomical structure of the bark of one-year stems of 5 representatives of the Solanaceae family. The comparative anatomical analysis of the investigated species has been carried out, the diagnostic signs have been identified, and the keys have been provided for identifying objects.

Keywords: one-year stem, peridermis, epidermis, phloem, xylem, core, primary bark, pepper, tomato, physalis.

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў
на англійскую мову
Я.В. Рубанава

Тэхнічныя рэдактары: *А. Л. Пазнякоў, Л. І. Будкова*
Камп'ютарны набор і вёрстка *А. Л. Пазнякоў*
Карэктары: *Г. В. Карпянкова, І. Г. Каржова, І. І. Талкачова*

Падпісана да друку .03.2022 г.
Фармац 70x108¹/₁₆. Папера афсетная. Гарнітура Times New Roman.
Ум.-друк. арк. 9,0. Ул.-выд. арк. 10,5. Тыраж 100 экз. Заказ № 1452.

Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А.А. Куляшова”, 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства
“Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля”
ЛП № 02330/23 ад 30.12.2013 г.
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў