

ISSN 2409-3777



ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта

імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

2 (58)
2021

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.В. Марчанка (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
канд. гіст. навук А.У. Коласаў (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар М.М. Дабравольскі (Тула)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.В. Івашкевіч (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.М. Сідарэнка (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А.В. Цімошчанка (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар А.М. Дворнік (Гомель)
д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт Г.М. Ціханчук (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт А.А. Анціпенка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс "Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А.А. Куляшова" ўключаны ў РІНЦ
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),
ліцэнзійны дагавор № 811-12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 413, т. +375 44 716 34 97; vesnik_mdu@mail.ru

**MOGILEV STATE
A. KULESHOV UNIVERSITY
BULLETIN**

THEORETICAL-SCIENTIFIC JOURNAL

Founded in December 1998

Series B. NATURAL SCIENCES
(Mathematics, Physics, Biology)

Published twice per year

**2 (58)
2021**

Editorial Board:

Lavrinovich D.S., Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor,
Vishnevsky M.I., Deputy Chief Editor, Doctor of Philosophical Sciences, Professor
Riyer Y.G., Deputy Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor
Chebotarevsky B.D., Chairman of the Editorial Committee (Series B),
Ph.D., Associate Professor
Kolosov A.V., Executive Secretary of the Editorial Board

Mathematics, Physics:

Lebedev V.I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Yerovenko V.A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Bernik V.I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Laptinsky V.N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of
the Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus
(Mogilev)
Dobrovolsky N.M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Tula)
Sotsky A.B., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Galmak A.M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Turtsevich A.S., Doctor of Technical Sciences (Minsk)
Timoschenko E.V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Ivashkevich I.V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)

Biology:

Dvornik A.M., Doctor of Biological Sciences, Professor (Gomel)
Maksimova N.P., Doctor of Biological Sciences, Professor (Minsk)
Naumov A.D., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Minsk)
Lazarevich S.V., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Gorky)
Akulich N.V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Tihonchuk G.N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Marochkov A.V., Doctor of Medical Sciences, Professor (Mogilev)
Simchenko N.I., Doctor of Medical Sciences (Mogilev)
Lopuh P.S., Doctor of Geographical Sciences, Professor (Minsk)
Poliachenok O.G., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)
Roganov G.N., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)

Theoretical-scientific journal
“Mogilev State A. Kuleshov University Bulletin”
is included in the bibliographic database
“Russian Science Citation Index”
License agreement № 811-12/2014

The editorial board address:
212022, Mogilev, Kosmonavtov Str., 1,
room 413, tel. +375 44 716 34 97; vesnik_mdu@mail.ru

З М Е С Т

<i>ГАЛЬМАК А. М., КУЛАЖЕНКО Ю. И.</i> Элементы с нулевыми компонентами в полиадических группоидах специального вида.....	7
<i>КАШПАР А. И., ЛАПТИНСКИЙ В. Н.</i> О краевой задаче Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка.....	16
<i>ЛОМОВЦЕВ Ф. Е., ЛЫСЕНКО В. В.</i> Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения в полуполосе плоскости при нестационарных нехарактеристических вторых производных	28
<i>КОСОВ В. Н., ФЕДОРЕНКО О. В., МУХАТОВА К. М., МЕЙРАМБЕКУЛЫ Е.</i> Некоторые особенности конвективных режимов смещения, вызванных неустойчивостью механического равновесия тройных газовых смесей	56
<i>ЮРЕВИЧ В. А.</i> Резонансное отражение короткого оптического импульса квазидвумерным суперкристаллом	65
<i>ТИМОЩЕНКО Е. В., ЮРЕВИЧ Ю. В.</i> Гистерезис в излучении полупроводникового лазера с квазидвумерным суперкристаллом	73
<i>СПИРИДОНОВ А. А., УШАКОВ Д. В., ЧЕРНЫЙ В. Е., САЕЧНИКОВ В. А.</i> Прогнозирование первых пролетов наноспутника CubeBel-1 над университетской наземной станцией	83
<i>КИРКОР М. А., ПОКАТИЛОВ А. Е., ГАЛЬМАК А. М.</i> Исследование движения в биомеханике спорта.....	93
<i>МАРТУСЕВИЧ Н. О., КИРЕЙЦЕВ А. А.</i> Изучение анальгетического эффекта плацебо-препаратов при оценке острой боли у спортсменов разных специализаций.....	105
<i>ПОВОРОВА О. В., ТИТОВА Н. Д., ЛИВИНСКАЯ В. А.</i> Комплексная оценка состояния иммунного статуса детей с частыми респираторными инфекциями	112
<i>ДЕНИСОВА С. И., СЕДЛОВСКАЯ С. М.</i> Зависимость уровня метаболизма дендрофильных чешуекрылых от вида кормового растения	121

C O N T E N T S

<i>GALMAK A.M., KULAZHENKO YU.I.</i> ELEMENTS WITH ZERO COMPONENTS IN POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL FORM.....	7
<i>KASHPAR A.I., LAPTINSKIY V.N.</i> ON THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF DE LA VALLEE POUSSIN FOR THE LYAPUNOV'S SECOND-ORDER MATRIX EQUATION.....	16
<i>LOMOVTSEV F.E., LYSENKO V.V.</i> MIXED PROBLEM FOR A GENERAL ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION IN A SEMI-STRIP OF THE PLANE WITH NON-STATIONARY NON-CHARACTERISTIC SECOND DERIVATIVES.....	28
<i>KOSOV V.N., FEDORENKO O.V., MUKHATOVA K.M. MEIRAMBEKULYE.</i> SOME FEATURES OF CONVECTIVE MIXING REGIMES CAUSED BY THE INSTABILITY OF MECHANICAL EQUILIBRIUM OF THREE-COMPONENT GAS MIXTURES	56
<i>YUREVICH V.A.</i> RESONANT REFLECTION OF SHORT OPTICAL PULSES BY QUASI-TWO-DIMENSIONAL SUPERCRYSTAL.....	65
<i>TIMOSCHENKO E.V., YUREVICH Yu.V.</i> HYSTERESIS IN THE EMISSION OF A SEMICONDUCTOR LASER WITH A QUASI-TWO-DIMENSIONAL SUPERCRYSTAL.....	73
<i>SPIRIDONOV A.A., USHAKOV D.V., CHERNY V.E., SAYECHNIKOV V.A.</i> PREDICTION OF THE FIRST PASSES OF THE CUBEBEL-1 NANOSATELLITE OVER THE UNIVERSITY GROUND STATION	83
<i>KIRKOR M.A., POKATILOV A.E., GALMAK A.M.</i> INVESTIGATION OF MOVEMENT IN SPORTS BIOMECHANICS	93
<i>MARTUSEVICH N.O., KIREITSEV A.A.</i> STUDYING THE ANALGESIC EFFECT OF PLACEBO MEDICATION WHILE ASSESSING ACUTE PAIN IN ATHLETES OF DIFFERENT SPORT SPECIALIZATIONS.....	105
<i>POVOROVA O.V., TITOVA N.D., LIVINSKAYA V.A.</i> COMPREHENSIVE ASSESSMENT OF THE IMMUNE STATUS OF CHILDREN WITH FREQUENT RESPIRATORY INFECTIONS.....	112
<i>DENISOVA S.I., SEDLOVSKAYA S.M.</i> THE DEPENDENCE OF DENDROPHILOUS LEPIDOPTERA METABOLISM RATE ON FORAGE PLANT SPECIES	121

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

ЭЛЕМЕНТЫ С НУЛЕВЫМИ КОМПОНЕНТАМИ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук, профессор
Белорусский государственный университет пищевых
и химических технологий

Ю. И. Кулаженко

доктор физико-математических наук
Белорусский государственный университет транспорта

В статье изучаются полиадические группоиды специального вида, то есть полиадические группоиды с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$ и n -арной операции η . В частности, доказано, что если n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ без нуля обладает единицей, σ – цикл длины k , то в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет нуля.

Ключевые слова: полиадическая операция, n -арный группоид, нуль, цикл.

1. Введение

Полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ арности $l = s(n - 1) + 1$ была определена в [1] на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η следующим образом.

Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n - 1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$. Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(x_1 \dots x_n) &= \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \end{aligned}$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_l) &= \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(x_1 \dots x_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(x_n \dots x_{2(n-1)}) \eta_{1, \sigma, k}(\dots \\ &\dots \eta_{1, \sigma, k}(x_{(s-2)(n-1)+1} \dots x_{(s-1)(n-1)}) \eta_{1, \sigma, k}(x_{(s-1)(n-1)+1} \dots x_{s(n-1)+1})) \dots)). \end{aligned}$$

Полиадическую операцию $\eta_{s, \sigma, k}$ и универсальную алгебру $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ называют полиадической операцией специального вида и полиадическим группоидом специального вида соответственно.

Частным случаем ($n = 2$) полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ является l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на k -ой декартовой степени A^k полугруппы A . В свою очередь, частными случаями l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ являются две полиадические операции Э. Поста [3], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

В данной статье изучаются полиадические группоиды $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ специального вида, определенные на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, обладающего нулем. В этом случае нулем обладает и l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Найдены условия, гарантирующие отсутствие нуля в этом l -арном группоиде.

2. Предварительные сведения

Элемент 0 n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его нулем, если для всех $a_1, \dots, a_n \in A$ верно

$$\begin{aligned} \eta(0a_2 \dots a_n) &= \eta(a_1 0a_3 \dots a_n) = \dots \\ \dots &= \eta(a_1 \dots a_{n-2} 0a_n) = \eta(a_1 \dots a_{n-1} 0) = 0. \end{aligned}$$

Понятно, что n -арный группоид не может иметь более одного нуля.

Элемент a n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с нулем 0 называют его i -ым делителем нуля, где $i \in \{1, \dots, n\}$, если существуют элементы $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n \in A$, отличные от нуля, такие, что

$$\eta(b_1 \dots b_{i-1} a b_{i+1} \dots b_n) = 0.$$

Если элемент a является i -ым делителем нуля для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$, то a называют делителем нуля в $\langle A, \eta \rangle$.

Это определение обобщает на n -арный случай определение делителя нуля группоида.

Понятно, что сам нуль является делителем нуля.

Элемент $e \in A$ n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его единицей, если для любого $x \in A$ и любого $i = 1, 2, \dots, n$ верно

$$\eta(\underbrace{xe \dots e}_{n-1}) = \eta(\underbrace{ex e \dots e}_{n-2}) = \dots = \eta(\underbrace{e \dots e x e}_{n-2}) = \eta(\underbrace{e \dots e x}_{n-1}) = x.$$

Это определение обобщает на n -арный случай определение единицы группоида A как элемента $e \in A$ такого, что $ex = xe = x$ для любого $x \in A$.

Следующая теорема позволяет находить значения l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, не используя явно n -арную операцию $\eta_{1, \sigma, k}$, как это сделано в определении l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

Теорема 2.1 [1]. Если

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -ая компонента y_j находится по формуле

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ &\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Если η – бинарная операция, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[\]_{s+1, \sigma, k}$ из [2]. При этом равенство (2.1) принимают вид

$$y_j = (x_{1j} (x_{2\sigma(j)} (\dots (x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} \dots))). \quad (2.2)$$

В правой части равенства (2.2) символ бинарной операции η , как обычно, не указан.

Согласно следующей теореме, тождественность подстановки σ^{l-1} влечет за собой перенос ассоциативности с n -арной операции η на l -арную операцию $\eta_{s, \sigma, k}$.

Теорема 2.2 [1]. *Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна, то есть универсальная алгебра $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является l -арной полугруппой.*

3. Основные результаты

Начнем с примера.

Пример 3.1. Определим на декартовом квадрате A^2 группоида $\langle A, \eta \rangle$ с нулем 0 тернарную операцию $\eta_{2, (12), 2} = []_{3, (12), 2}$ и рассмотрим тернарный группоид $\langle A^2, \eta_{2, (12), 2} \rangle$. Ясно, что $(0, 0)$ – нуль этого тернарного группоида.

Так как, согласно определению операции $\eta_{s, \sigma, k}$

$$\eta_{2, (12), 2}((a_1, a_2)(b_1, b_2)(c_1, c_2)) = (\eta(a_1\eta(b_2c_1)), \eta(a_2\eta(b_1c_2)))$$

для любых

$$(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in A^2,$$

то

$$\eta_{2, (12), 2}((a, 0)(a, 0)(a, 0)) = (\eta(a\eta(0a)), \eta(0\eta(a0))) = (0, 0),$$

$$\eta_{2, (12), 2}((0, a)(0, a)(0, a)) = (\eta(0\eta(a0)), \eta(a\eta(0a))) = (0, 0).$$

Покажем, что полученные в примере 3.1 равенства являются следствиями более общего результата.

Теорема 3.1. *Пусть n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0, $k \leq l$, σ – цикл длины k из S_k ,*

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{m-1}, a_m = 0, a_{m+1}, \dots, a_k) \in A^k \tag{3.1}$$

для некоторого $t \in \{1, \dots, k\}$. Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l) = (\underbrace{0, \dots, 0}_k). \tag{3.2}$$

Доказательство. Если положить

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l) = \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

где

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a} = (a_{i1} = a_1, \dots, a_{i(m-1)} = a_{m-1}, a_{im} = a_m = 0,$$

$$a_{i(m+1)} = a_{m+1}, \dots, a_{ik} = a_k), i = 1, \dots, l,$$

то, согласно теореме 2.1, для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ имеем

$$y_j = \eta(a_{1j}a_{2\sigma(j)} \dots a_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(a_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots a_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \dots \eta(a_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots a_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \tag{3.3}$$

Так как $k \leq l = s(n-1) + 1$, то все элементы

$$a_{1j}, a_{2\sigma(j)}, a_{3\sigma^2(j)}, \dots, a_{l\sigma^{l-1}(j)},$$

присутствующие в правой части равенства (3.3), можно перечислить в том же порядке следующим образом:

$$a_{1j}, a_{2\sigma(j)}, \dots, a_{k\sigma^{k-1}(j)}, \dots, a_{l\sigma^{l-1}(j)}. \tag{3.4}$$

Так как σ – цикл длины k , то индексы $j, \sigma(j), \dots, \sigma^{k-1}(j)$ составляют все множество $\{1, \dots, k\}$. Поэтому в (3.4) среди элементов

$$a_{1j}, a_{2\sigma(j)}, \dots, a_{k\sigma^{k-1}(j)}$$

имеется, по крайней мере, один нуль, а именно элемент $a_m = 0$. Соответственно, и в правой части равенства (3.3) содержится этот нуль. Следовательно, $y_j = 0$. В силу произвольного выбора $j \in \{1, \dots, k\}$ требуемое равенство (3.2) верно. Теорема доказана.

Покажем, что в теореме 3.1 условие $k \leq l$ существенно.

Пример 3.2. Определим на четвертой декартовой степени A^4 группоид $\langle A, \eta \rangle$ с нулём 0 тернарную операцию $\eta_{2, (1234), 4} = []_{3, (1234), 4}$ и рассмотрим тернарный группоид $\langle A, \eta_{2, (1234), 4} \rangle$. В этом случае $k = 4, l = 3$, то есть условие $k \leq l$ не выполняется.

Ясно, что $(0, 0, 0)$ – нуль этого тернарного группоида.

Согласно определению операции $\eta_{s, \sigma, k}$

$$\begin{aligned} & \eta_{2, (1234), 4}((a_1, a_2, a_3, a_4)(b_1, b_2, b_3, b_4)(c_1, c_2, c_3, c_4)) = \\ & = (\eta(a_1\eta(b_2c_3)), \eta(a_2\eta(b_3c_4)), \eta(a_3\eta(b_4c_1)), \eta(a_4\eta(b_1c_2))) \end{aligned}$$

для любых

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4), (c_1, c_2, c_3, c_4) \in A^4.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \eta_{2, (1234), 4}((0, a, a, a)(0, a, a, a)(0, a, a, a)) = \\ & = (\eta(0\eta(aa)), \eta(a\eta(aa)), \eta(a\eta(a0)), \eta(a\eta(0a))) = (0, \eta(a\eta(aa)), 0, 0). \end{aligned}$$

Так как для ненулевого элемента a элемент $\eta(a\eta(aa))$ может быть отличен от 0 , то равенство

$$\eta_{2, (1234), 4}((0, a, a, a)(0, a, a, a)(0, a, a, a)) = (0, 0, 0, 0)$$

в общем случае неверно.

Например, если $\langle A, \eta \rangle$ – мультипликативный группоид с нулем 0 и единицей 1 , то

$$\eta_{2, (1234), 4}((0, 1, 1, 1)(0, 1, 1, 1)(0, 1, 1, 1)) = (0, 1, 0, 0) \neq (0, 0, 0, 0).$$

Таким образом, в теореме 3.1 условие $k \leq l$ существенно.

В качестве цикла длины k из S_k в теореме 3.1 можно взять цикл $\sigma = (12 \dots k)$.

Следствие 3.1. Пусть n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем $0, k \leq l$, элемент $\mathbf{a} \in A^k$ имеет вид (3.1) для некоторого $t \in \{1, \dots, k\}$. Тогда

$$\eta_{s, (12 \dots k), k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l) = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k. \quad (3.5)$$

Полагая в теореме 3.1 и следствии 3.1 $n = 2$, получим еще два следствия.

Следствие 3.2. Пусть группоид A обладает нулем $0, k \leq l, \sigma$ – цикл длины k из S_k , элемент $\mathbf{a} \in A^k$ имеет вид (3.1) для некоторого $t \in \{1, \dots, k\}$. Тогда

$$\underbrace{[\mathbf{a} \dots \mathbf{a}]_l}_{l, \sigma, k} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k. \quad (3.6)$$

Следствие 3.3. Пусть группоид A обладает нулем $0, k \leq l$, элемент $\mathbf{a} \in A^k$ имеет вид (3.1) для некоторого $t \in \{1, \dots, k\}$. Тогда

$$\underbrace{[\mathbf{a} \dots \mathbf{a}]_l}_{l, (12 \dots k), \kappa} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k. \quad (3.7)$$

Если цикл σ порядка k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $l - 1 = tk$ для некоторого $t \geq 1$, то есть в этом случае $k \leq l$. Поэтому теорема 3.1 позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.2. Пусть n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , цикл σ длины k из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, элемент $\mathbf{a} \in A^k$ имеет вид (3.1) для некоторого $t \in \{1, \dots, k\}$. Тогда верно равенство (3.2).

Сформулируем следствия из теоремы 3.2, аналогичные следствиям 3.1 – 3.3.

Следствие 3.4. Пусть n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , цикл $\sigma = (12 \dots k)$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, элемент $a \in A^k$ имеет вид (3.1) для некоторого $t \in \{1, \dots, k\}$. Тогда верно равенство (3.5).

Следствие 3.5. Пусть группоид A обладает нулем 0 , цикл σ длины k из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, элемент $\mathbf{a} \in A^k$ имеет вид (3.1) для некоторого $t \in \{1, \dots, k\}$. Тогда верно равенство (3.6).

Следствие 3.6. Пусть группоид A обладает нулем 0 , цикл $\sigma = (12 \dots k)$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, элемент $\mathbf{a} \in A^k$ имеет вид (3.1) для некоторого $t \in \{1, \dots, k\}$. Тогда верно равенство (3.7).

Замечание 3.1. Следствие 3.5 доказано в [2, предложение 3.7.2] для полугруппы A .

Замечание 3.2. Так как в теореме 3.2 цикл $\sigma \in S_k$ имеет порядок k и удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $l - 1 = tk$ для некоторого $t \geq 1$. Поэтому все элементы

$$a_{1j}, a_{2\sigma(j)}, a_{3\sigma^2(j)}, \dots, a_{l\sigma^{l-1}(j)},$$

присутствующие в правой части равенства (3.3), можно перечислить в том же порядке следующим образом:

$$a_{1j}, a_{2\sigma(j)}, \dots, a_{k\sigma^{k-1}(j)}, a_{(k+1)j}, a_{(k+2)\sigma(j)}, \dots, a_{(2k)\sigma^{k-1}(j)}, a_{(2k+1)j}, \dots$$

$$\dots, a_{((s-1)k+1)j}, a_{((s-1)k+2)\sigma(j)}, \dots, a_{(tk)\sigma^{k-1}(j)}, a_{tj}.$$
(3.8)

Так как σ – цикл длины k , то индексы $j, \sigma(j), \dots, \sigma^{k-1}(j)$ составляют все множество $\{1, \dots, k\}$. Поэтому в каждом из приведенных ниже s наборов:

$$a_{1j}, a_{2\sigma(j)}, \dots, a_{k\sigma^{k-1}(j)};$$

$$a_{(k+1)j}, a_{(k+2)\sigma(j)}, \dots, a_{(2k)\sigma^{k-1}(j)};$$

.....

$$\dots, a_{((s-1)k+1)j}, a_{((s-1)k+2)\sigma(j)}, \dots, a_{(tk)\sigma^{k-1}(j)}$$

имеется, по крайней мере, один нуль, а именно элемент $a_m = 0$. Соответственно, в (3.8), а значит, и в правой части равенства (3.3) содержится не менее t сомножителей, равных нулю.

Так как цикл σ длины $n - 1$ из S_{n-1} удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$, то из теоремы 3.2 при $k = n - 1$ вытекает

Следствие 3.7. Пусть n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , σ – цикл длины $n - 1$ из S_{n-1} ,

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{m-1}, a_m = 0, a_{m+1}, \dots, a_{n-1}) \in A^{n-1} \tag{3.9}$$

для некоторого $t \in \{1, \dots, n - 1\}$. Тогда

$$\eta_{s, \sigma, n-1}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Полагая в следствии 3.7 $\sigma = (12 \dots n-1)$, получим

Следствие 3.8. Пусть n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , элемент $\mathbf{a} \in A^{n-1}$ имеет вид (3.9) для некоторого $t \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогда

$$\eta_{s, (12 \dots n-1), n-1}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Полагая в следствиях 3.7 и 3.8 $n = 2$, получим еще два следствия.

Следствие 3.9. Пусть группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , σ – цикл длины $n-1$ из S_{n-1} , элемент $\mathbf{a} \in A^{n-1}$ имеет вид (3.9) для некоторого $t \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l]_{l, \sigma, n-1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Следствие 3.10. Пусть группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , элемент $\mathbf{a} \in A^{n-1}$ имеет вид (3.9) для некоторого $t \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_l]_{l, (12 \dots n-1), n-1} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}).$$

Замечание 3.3. Если в теореме 3.2 и следствиях 3.4 – 3.10 операция η – ассоциативна, то по теореме 2.2 ассоциативными будут и соответствующие l -арные операции в указанных утверждениях.

Покажем, что элемент $(\underbrace{0, \dots, 0}_k)$ является нулем l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 3.3. Если n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает нулем 0 , то элемент $\mathbf{0}$ является нулем l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} = (\underbrace{0, \dots, 0}_k)$.

Доказательство. Зафиксируем $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ и положим

$$\mathbf{a}_t = (a_{t1}, a_{t2}, \dots, a_{tk}), t \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, l\},$$

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}) = (\underbrace{0, \dots, 0}_k),$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l) = (y_1, y_2, \dots, y_k). \quad (3.10)$$

Согласно теореме 2.1, для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ верно равенство (3.3). Так как элемент \mathbf{a}_i стоит в левой части (3.10) на i -ом месте, то для элементов

$$a_{i\sigma^{i-1}(1)}, a_{i\sigma^{i-1}(2)}, \dots, a_{i\sigma^{i-1}(k)},$$

присутствующих в (3.3) соответственно для $j = 1, \dots, k$, имеем

$$a_{i\sigma^{i-1}(1)} = a_{i\sigma^{i-1}(2)} = \dots = a_{i\sigma^{i-1}(k)} = 0.$$

В частности, если $i = 1$, то считаем $\sigma^{i-1}(j) = \sigma^0(j) = j$. Поэтому в данном случае

$$a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1k} = 0.$$

Таким образом, в (3.3) содержится элемент $a_{i\sigma^{i-1}(j)}$, равный нулю n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$. Следовательно, $y_j = 0$ для любого $j \in \{1, \dots, k\}$. Тем самым доказано равенство

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \underbrace{(0, \dots, 0)}_k \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l) = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k.$$

А так как это верно для любого $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, то $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$ – нуль l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Других нулей в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет, так как полиадический группоид не может иметь более одного нуля. Теорема доказана.

В следующей теореме указаны условия, гарантирующие отсутствие нуля в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 3.4. Пусть n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ без нуля обладает единицей, σ – цикл длины k из S_k . Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет нуля.

Доказательство. Предположим, что в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ имеется нуль $\mathbf{0} = (0_1, \dots, 0_k)$ и для $i \in \{1, \dots, n\}$ положим

$$\mathbf{u}_1 = \dots = \mathbf{u}_{i-1} = \mathbf{u}_{i+1} = \dots = \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n+1} = \dots = \mathbf{u}_l = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k,$$

где 1 – единица в $\langle A, \eta \rangle$.

Так как $\mathbf{0}$ – нуль в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{i-1} (0_1, \dots, 0_k) \mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_n \mathbf{u}_{n+1} \dots \mathbf{u}_l) = (0_1, \dots, 0_k).$$

Применяя к левой части полученного равенства теорему 2.1 и приравнивая j -ые компоненты в его левой и правой частях, получим

$$\eta(\underbrace{1 \dots 1}_{i-1} 0_{\sigma^{i-1}(j)} \underbrace{1 \dots 1}_{n-i-1} \eta(\underbrace{1 \dots 1}_{n-1} \eta(\dots \eta(\underbrace{1 \dots 1}_{n-1} \eta(\underbrace{1 \dots 1}_n))) \dots))) = 0_j$$

для любого $j \in \{1, \dots, k\}$. А так как 1 – единица в $\langle A, \eta \rangle$, то из этого равенства следует

$$0_{\sigma^{i-1}(j)} = 0_j, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k\}.$$

В частности, для $i = 2$ имеем

$$0_{\sigma(j)} = 0_j, j \in \{1, \dots, k\}. \tag{3.11}$$

Далее, используя (3.11), последовательно получаем

$$0_{\sigma^2(j)} = 0_{\sigma(\sigma(j))} = 0_{\sigma(j)} = 0_j,$$

.....

$$0_{\sigma^{k-2}(j)} = 0_{\sigma(\sigma^{k-3}(j))} = 0_{\sigma^{k-3}(j)} = 0_j,$$

$$0_{\sigma^{k-1}(j)} = 0_{\sigma(\sigma^{k-2}(j))} = 0_{\sigma^{k-2}(j)} = 0_j.$$

Таким образом,

$$0_j = 0_{\sigma(j)} = 0_{\sigma^2(j)} = \dots = 0_{\sigma^{k-1}(j)}.$$

В частности, для $j = 1$ имеем

$$0_1 = 0_{\sigma(1)} = 0_{\sigma^{k-1}(1)} = \dots = 0_{\sigma^{k-1}(1)}.$$

Так как σ – цикл длины k из S_k , то множество $\{1, \sigma(1), \dots, \sigma^{k-1}(1)\}$ совпадает с множеством $\{1, 2, \dots, k\}$. Поэтому $0_1 = 0_2 = \dots = 0_k$, что позволяет ввести общее обозначение

$$0_1 = 0_2 = \dots = 0_k = 0.$$

При этом нуль $\mathbf{0}$ принимает вид

$$\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k. \quad (3.12)$$

Пусть теперь $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{ik})$ – произвольные элементы из A^k , где

$$t \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}, i \in \{1, \dots, n\},$$

и пусть

$$\mathbf{a}_{n+1} = \dots = \mathbf{a}_l = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k.$$

Так как $\mathbf{0}$ – нуль в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{0} \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_n \mathbf{a}_{n+1} \dots \mathbf{a}_l) = \mathbf{0}.$$

С помощью (3.12) это равенство переписывается в виде

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \underbrace{(0, \dots, 0)}_k \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_n \mathbf{a}_{n+1} \dots \mathbf{a}_l) = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k.$$

Применяя к левой части полученного равенства теорему 2.1 и приравнивая j -ые компоненты в его левой и правой частях, получим

$$\eta(a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} \mathbf{0} a_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots a_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \\ \eta(a_{n\sigma^{n-1}(j)} \underbrace{1 \dots 1}_{n-2} \eta(\dots \eta(\underbrace{1 \dots 1}_{n-1} \eta(\underbrace{1 \dots 1}_n))) \dots)) = 0$$

для любого $j \in \{1, \dots, k\}$. Так как 1 – единица в $\langle A, \eta \rangle$, то из этого равенства следует

$$\eta(a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} \mathbf{0} a_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots a_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} a_{n\sigma^{n-1}(j)}) = 0.$$

А так как все компоненты элементов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ выбраны в $\langle A, \eta \rangle$ произвольно, то последнее равенство можно переписать в виде

$$\eta(c_1 \dots c_{i-1} \mathbf{0} c_{i+1} \dots c_n) = 0,$$

где $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n$ – произвольные элементы из A . Следовательно, $\mathbf{0}$ является нулем n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, предположение о наличии нуля в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ неверно. Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.4 $\sigma = (1 \ 2 \dots \ k)$, получим

Следствие 3.11. Пусть n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ без нуля обладает единицей.

Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ нет нуля.

Полагая в теореме 3.4 и следствии 3.11 $n = 2$, получим еще два следствия.

Следствие 3.12. Пусть группоид $\langle A, \eta \rangle$ без нуля обладает единицей, σ – цикл длины k из S_k . Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ нет нуля.

Следствие 3.13. Пусть группоид A без нуля обладает единицей. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, [\]_{l, (12 \dots k), k} \rangle$ нет нуля.

Теорема 3.4 и следствия из нее представляют интерес с точки зрения построения примеров полиадических группоидов специального вида без нуля.

Пример 3.3. Рассмотрим в качестве группоида $\langle A, \eta \rangle$ в теореме 3.4 полугруппу \mathbb{N} натуральных чисел с операцией взятия наименьшего общего кратного:

$$\eta(mn) = \text{НОК}(m, n).$$

Число 1 является единицей этой полугруппы, в ней нет нуля. Тогда для любого цикла длины k из S_k в l -арном группоиде $\langle \mathbf{N}^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ нет нуля. В частности, это верно для l -арного группоида $\langle \mathbf{N}^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$.

Отсутствие нуля возможно и в полиадических полугруппах специального вида. Например, нет нуля в тернарном группоиде $\langle \mathbf{N}^2, \eta_{2, (12), 2} \rangle$, который по теореме 2.2 является тернарной полугруппой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Известия ГГУ имени Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Гальмак, А. М. Многместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Post, E.L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

Поступила в редакцию 20.03.2021 г.

Контакты: halm54@mail.ru

(Гальмак Александр Михайлович)

kulazhenko@bsut.by

(Кулаженко Юрий Иванович)

Galmak A., Kulazhenko Yu. ELEMENTS WITH ZERO COMPONENTS IN POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL FORM.

The article focuses on the study of polyadic groupoids of special form, that is the polyadic groups with l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$ which is called the polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power of A^k n -ary groupoid $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in S_k$ and n -ary operation η . It has been proved that if n -ary groupoid $\langle A, \eta \rangle$ with identity and no zero, σ – length cycle k , then in l -ary groupoid $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ there is no zero.

Keywords: polyadic operation, n -ary groupoid, zero, cycle.

УДК 517.925

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. И. Кашпар

Белорусско-Российский университет, помощник ректора

В. Н. Лаптинский

доктор физико-математических наук, профессор

Белорусско-Российский университет

Установлена связь конструктивного метода регуляризации краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка с методом функций Грина. Предложены способы решения матричного интегро-алгебраического уравнения, возникающего при сведении краевой задачи к эквивалентному интегральному уравнению.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, краевая задача.

Введение

В конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой $\|\mathbf{X}\|_C = \max_t \|\mathbf{X}(t)\|$ рассмотрим краевую задачу [1–4]

$$\frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{A}(t) \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt} \mathbf{B}(t) + \lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B}_1(t)) + \lambda(\mathbf{A}_2(t) \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt} \mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{X}(0, \lambda) = \mathbf{M}, \quad (2)$$

$$\mathbf{X}(\omega, \lambda) = \mathbf{N}, \quad (3)$$

где $t \in [0, \omega]$, $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$ ($i=1, 2$) – матрицы класса $\mathcal{C}[0, \omega]$ соответствующих размерностей; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, \mathbf{M} , \mathbf{N} – заданные вещественные матрицы.

Замечание 1. Рассмотрение уравнения более сложной структуры [5; 6]

$$\frac{d^2 \mathbf{X}(t)}{dt^2} = \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i(t) \mathbf{X}(t) \mathbf{B}_i(t) + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i(t) \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} \mathbf{B}_i(t) + \mathbf{F}(t)$$

не вносит принципиальных трудностей в анализ с помощью метода [7] краевой задачи типа (1) – (3).

В работе [1] на основе применения метода [7, гл. 1] задача (1) – (3) сведена к эквивалентной системе матричных интегральных уравнений

$$\mathbf{X}(t, \lambda) = \mathbf{M} + \int_0^t \mathbf{Y}(\tau, \lambda) d\tau, \quad (4)$$

$$\mathbf{Y}(t, \lambda) = \mathbf{U}(t) \left(\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M}) \right) \mathbf{V}(t) +$$

$$+\mathbf{U}(t)\Phi^{-1}\left(\int_0^{\infty}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^t\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t), \quad (5)$$

где $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений соответственно

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{E}_n, \quad (6)$$

$$\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = \mathbf{V}(t)\mathbf{B}(t), \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{E}_m, \quad (7)$$

\mathbf{E}_k – единичная матрица порядка k , $\mathbf{Y}(t, \lambda) = d\mathbf{X}(t, \lambda)/dt$,

$\mathbf{H}(t, \lambda) = \lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}(t, \lambda) + \mathbf{X}(t, \lambda)\mathbf{B}_1(t)) + \lambda(\mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y}(t, \lambda) + \mathbf{Y}(t, \lambda)\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t)$,

Φ – матричный оператор,

$$\Phi\mathbf{Z}(t) = \int_0^{\infty}\mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau.$$

В дальнейшем для удобства изложения опускаем индексы n , m в матрицах \mathbf{E}_n , \mathbf{E}_m .

На основе анализа системы (4), (5) получены коэффициентные достаточные условия ее однозначной разрешимости и выведены конструктивные оценки области локализации решения и его производной.

Важным структурным элементом методики получения системы (4), (5) является использование специального матричного оператора Φ , при этом методы построения обратного к Φ пока не разработаны.

В настоящей работе установлена связь конструктивного метода [7] с методом функций Грина, а также предложены способы построения Φ^{-1} .

Оператор Φ относится к матричным операторам типа [8; 9], возникающим при анализе многоточечных краевых задач для матричных дифференциальных уравнений. Построение обратных для таких операторов является самостоятельной и весьма непростой задачей [8; 9]. В случае двухточечных краевых задач получены различные формулы обращения операторов такого типа, например, [10]. Многоточечный случай мало изучен. Известны, по-видимому, два способа [8; 9]. Один из них основан на чисто алгебраическом подходе, другой – на использовании метода малого параметра.

1. О связи метода регуляризации с методом функций Грина

В [7, гл. 1] установлено, что с помощью конструктивного метода можно строить соответствующие функции Грина для периодических и многоточечных краевых задач. В связи с этим возникает вопрос о связи уравнений (4), (5) с соответствующей эквивалентной системой, полученной по методу функций Грина (см., например, [11, с. 496]).

Используя (5), запишем уравнение (4) в следующем виде:

$$\mathbf{X}(t, \lambda) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\Phi^{-1}\left(\int_0^{\infty}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{\varphi}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi, \quad (8)$$

где $\mathbf{P}_{UV}(t) = \int_0^t \mathbf{U}(\tau)(\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)d\tau$.

Заметим, что функция $\mathbf{P}_{UV}(t)$ удовлетворяет условию $\mathbf{P}_{UV}(\omega) = \mathbf{N} - \mathbf{M}$, поскольку

$$\mathbf{P}_{UV}(\omega) = \int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau)(\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)d\tau = \Phi(\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M})).$$

Далее, используя подходящее разбиение промежутка интегрирования во внутреннем интеграле правой части (8), получим

$$\mathbf{X}(t, \lambda) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{UV}(t) + \mathbf{S}_1(t, \mathbf{H}) + \mathbf{S}_2(t, \mathbf{H}) \equiv \mathbf{M} + \mathbf{P}_{UV}(t) + \mathbf{S}_{UV}(t, \mathbf{H}), \quad (9)$$

где

$$\mathbf{S}_1(t, \mathbf{H}) = -\int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\Phi^{-1}\left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{\tau} \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

$$\mathbf{S}_2(t, \mathbf{H}) = \int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\Phi^{-1}\left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{\varphi} \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

при этом $\mathbf{S}_1(0, \mathbf{H}) = \mathbf{S}_2(0, \mathbf{H}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{S}_1(\omega, \mathbf{H}) + \mathbf{S}_2(\omega, \mathbf{H}) = \mathbf{0}$; последнее равенство вытекает также из эквивалентности системы (4), (5) краевой задаче (1) – (3), а именно: из выполнимости краевых условий (2), (3).

Выражение для $\mathbf{S}_2(t, \mathbf{H})$ можно упростить, используя равенство

$$\begin{aligned} & \Phi^{-1}\left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{\varphi} \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right) = \\ & = \Phi^{-1}\left(\Phi\left(\int_0^{\varphi} \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\right) = \int_0^{\varphi} \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{S}_2(t, \mathbf{H}) = \int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\left(\int_0^{\varphi} \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi.$$

Аналогичные упрощения выполним в (5):

$$\mathbf{Y}(t, \lambda) = \mathbf{Q}_{UV}(t) + \mathbf{T}_1(t, \mathbf{H}) + \mathbf{T}_2(t, \mathbf{H}) \equiv \mathbf{Q}_{UV}(t) + \mathbf{T}(t, \mathbf{H}), \quad (10)$$

где

$$\mathbf{Q}_{UV}(t) = d\mathbf{P}_{UV}(t)dt = \mathbf{U}(t)(\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M}))\mathbf{V}(t),$$

$$\mathbf{T}_1(t, \mathbf{H}) = -\mathbf{U}(t)\Phi^{-1}\left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{\tau} \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2(t, \mathbf{H}) &= \mathbf{U}(t)\Phi^{-1}\left(\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t) = \\ &= \mathbf{U}(t)\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\int_0^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\right)\mathbf{V}(t) = \mathbf{U}(t)\int_0^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\mathbf{V}(t). \end{aligned}$$

Структура правой части (9) соответствует классической форме решения, вытекающей из метода функций Грина, основным приемом которого является отыскание начального значения искомого решения краевой задачи; затем выполняются соответствующие упрощающие выкладки. Воспользуемся этим приемом применительно к задаче (1) – (3).

Полагая в (4) $t = \omega$, получим на основании (3)

$$\int_0^\omega \mathbf{Y}(\tau, \lambda)d\tau = \mathbf{N} - \mathbf{M}. \quad (11)$$

Далее, используя принятое обозначение, уравнение (1) запишем в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}(t) + \mathbf{H}(t, \lambda). \quad (12)$$

На основании двусторонней формулы Коши с учетом (6), (7) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t, \lambda) &= \mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{Y}(\tau, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\mathbf{V}(t) + \\ &+ \mathbf{U}(t)\left(\int_\tau^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда находим

$$\mathbf{Y}(\tau, \lambda) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(t)\mathbf{V}(\tau) - \mathbf{U}(\tau)\left(\int_\tau^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau). \quad (14)$$

Из (14) имеем при $t = 0$

$$\mathbf{Y}(\tau, \lambda) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Y}(0, \lambda)\mathbf{V}(\tau) + \mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau). \quad (15)$$

Подставляя (15) в (11), получим

$$\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Y}(0, \lambda)\mathbf{V}(\tau)d\tau = \mathbf{N} - \mathbf{M} - \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau.$$

Отсюда находим

$$\mathbf{Y}(0, \lambda) = \Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M}) - \Phi^{-1}\left(\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right). \quad (16)$$

На основании (16) получим из (13) при $\tau = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t, \lambda) = \mathbf{U}(t) & \left(\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M}) - \Phi^{-1} \left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau) \left(\int_0^{\tau} \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) \mathbf{V}(\tau) d\tau \right) \right) \mathbf{V}(t) + \\ & + \mathbf{U}(t) \left(\int_0^t \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) \mathbf{V}(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Очевидно, соотношение (17) тождественно совпадает с (10).

Подставляя (10) в (4), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t, \lambda) = \mathbf{M} + \int_0^t \mathbf{U}(\tau) \Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M}) \mathbf{V}(\tau) d\tau - \\ - \int_0^t \mathbf{U}(\varphi) \left(\Phi^{-1} \left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau) \left(\int_0^{\tau} \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) \mathbf{V}(\tau) d\tau \right) \right) \mathbf{V}(\varphi) d\varphi + \\ + \int_0^t \mathbf{U}(\varphi) \left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) \mathbf{V}(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

тем самым пришли к уравнению (9). Стало быть, принципиальная связь между конструктивным методом [7] и методом функций Грина установлена. Осталось только привести уравнения (8), (9) к стандартной форме для метода функций Грина. Это можно сделать путем дальнейших весьма громоздких выкладок и упрощений. Однако суть этих упрощений более наглядная для односторонних регуляризаций и весьма прозрачна в случае, когда $\mathbf{A}(t) \equiv 0$, $\mathbf{B}(t) \equiv 0$. Рассмотрим именно этот случай. Тогда $\mathbf{U}(t) \equiv \mathbf{E}_n = \mathbf{E}$, $\mathbf{V}(t) \equiv \mathbf{E}_m = \mathbf{E}$, $\Phi \mathbf{Z}(t) = \omega \mathbf{Z}(t)$, $\Phi^{-1} \mathbf{Z}(t) = \frac{1}{\omega} \mathbf{Z}(t)$ и уравнение (10) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t, \lambda) = \frac{1}{\omega} (\mathbf{N} - \mathbf{M}) - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} d\tau \int_0^{\tau} \mathbf{H}(s, \lambda) ds + \int_0^t \mathbf{H}(\tau, \lambda) d\tau = \frac{1}{\omega} (\mathbf{N} - \mathbf{M}) + \\ + \int_0^t \frac{\tau}{\omega} \mathbf{H}(\tau, \lambda) d\tau + \int_t^{\omega} \left(\frac{\tau}{\omega} - 1 \right) \mathbf{H}(\tau, \lambda) d\tau \equiv \frac{1}{\omega} (\mathbf{N} - \mathbf{M}) + \int_0^{\omega} G'_t(t, \tau) \mathbf{H}(\tau, \lambda) d\tau. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогично поступаем с уравнением (9):

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t, \lambda) = \mathbf{M} + \frac{t}{\omega} (\mathbf{N} - \mathbf{M}) - \frac{t}{\omega} \int_0^{\omega} d\tau \int_0^{\tau} \mathbf{H}(s, \lambda) ds + \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} \mathbf{H}(s, \lambda) ds = \mathbf{M} + \frac{t}{\omega} (\mathbf{N} - \mathbf{M}) - \\ - \frac{t}{\omega} \int_0^{\omega} (\omega - \tau) \mathbf{H}(\tau, \lambda) d\tau + \int_0^t (t - \tau) \mathbf{H}(\tau, \lambda) d\tau = \mathbf{M} + \frac{t}{\omega} (\mathbf{N} - \mathbf{M}) + \int_0^t \tau \left(\frac{t}{\omega} - 1 \right) \mathbf{H}(\tau, \lambda) d\tau + \\ + \int_t^{\omega} t \left(\frac{\tau}{\omega} - 1 \right) \mathbf{H}(\tau, \lambda) d\tau \equiv \mathbf{M} + \frac{t}{\omega} (\mathbf{N} - \mathbf{M}) + \int_0^{\omega} G(t, \tau) \mathbf{H}(\tau, \lambda) d\tau. \end{aligned} \quad (19)$$

В уравнениях (18), (19) использована известная функция Грина $G(t, \tau)$ и ее

производная $G'_i(t, \tau)$ [11, с. 496]. Запишем их в явном виде

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \tau(\frac{t}{\omega} - 1), & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ t(\frac{\tau}{\omega} - 1), & 0 \leq t \leq \tau \leq \omega; \end{cases} \quad G'_i(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\omega}, & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ \frac{\tau}{\omega} - 1, & 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Из анализа структуры уравнений (18), (19) видно, что в данном случае между методом регуляризации [7] и методом функций Грина существует тесная связь не только по форме, но и по содержанию. Совпадению форм в общем случае препятствует матричная специфика задачи (1) – (3).

Теперь остается выяснить, какие интегральные уравнения целесообразно использовать для исследования разрешимости и построения решений задачи (1) – (3). Иными словами, какому методу следует отдать предпочтение при изучении этих вопросов. В [7, гл. 1] установлено, что конструктивный метод регуляризации более эффективен при построении решений рассматриваемых там краевых задач. В случае задачи (1) – (3) к этому выводу можно прийти на основе анализа структуры уравнений (4), (5). Из структуры этих уравнений видно, что они удобнее для построения решений, чем уравнения, полученные по методу функций Грина. Это должно проявиться в соответствующих алгоритмах типа [7] построения решения.

Для исследования разрешимости и получения априорных оценок решений, судя по результатам для задач, рассмотренных в [7], предпочтение следует отдать методу функций Грина.

Таким образом, метод [7] приводит к эквивалентным интегральным уравнениям двух типов, на основе которых можно выполнить анализ краевой задачи (1) – (3).

2. Способы построения оператора Φ^{-1}

Опишем некоторые методы решения относительно $\mathbf{Z}(t)$ соответствующего матричного алгебраического (точнее интегро-алгебраического) уравнения

$$\Phi \mathbf{Z}(t) = \mathbf{K}(t)$$

или

$$\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{Z}(t) \mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau = \mathbf{K}(t), \quad (20)$$

где $\mathbf{K}(t)$ – некоторая матрица-функция, играющая роль свободного члена, t – параметр, при этом в (20) будем использовать матрицы $\mathbf{U}^{-1}(\tau)$, $\mathbf{V}^{-1}(\tau)$, определяемые как решения дифференциальных уравнений, получаемых из (6), (7) соответственно,

$$\frac{d\mathbf{U}^{-1}(\tau)}{d\tau} = -\mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{A}(\tau), \quad (21)$$

$$\frac{d\mathbf{V}^{-1}(\tau)}{d\tau} = -\mathbf{B}(\tau) \mathbf{V}^{-1}(\tau). \quad (22)$$

При рассмотрении способов построения оператора Φ^{-1} возможны три варианта: использование матриц $\mathbf{U}^{-1}(\tau)$, $\mathbf{V}^{-1}(\tau)$ одновременно и по отдельности, т. е. случаи двусторонний и односторонние.

Примем следующие обозначения:

$$\alpha = \max_t \|\mathbf{A}(t)\|, \beta = \max_t \|\mathbf{B}(t)\|, \lambda_U = \max_{0 \leq s \leq \tau \leq \omega} \|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\|, \lambda_V = \max_{0 \leq s \leq \tau \leq \omega} \|\mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)\|, t \in [0, \omega],$$

$$\lambda_H = \max_t \|\mathbf{H}^{-1}(t)\|, \gamma_H = \left\| \int_0^\omega \mathbf{H}^{-1}(\tau) d\tau \right\|, \tilde{\alpha} = \max_t \|\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)\|, \tilde{\beta} = \max_t \|\mathbf{B}(t)\mathbf{V}^{-1}(t)\|,$$

$$p = \frac{1}{2}(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})\omega + \frac{1}{3}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\omega^2, \quad p_U = \frac{1}{2}\gamma_U\lambda_U\tilde{\beta}\omega^2, \quad p_V = \frac{1}{2}\gamma_V\tilde{\alpha}\lambda_V\omega^2.$$

Рассмотрим первый вариант. Из (21), (22) имеем соответственно

$$\mathbf{U}^{-1}(\tau) = \mathbf{E} - \int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds, \quad (23)$$

$$\mathbf{V}^{-1}(\tau) = \mathbf{E} - \int_0^\tau \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds. \quad (24)$$

Используя (23), (24), запишем левую часть уравнения (20) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_0^\omega \left[\mathbf{E} - \int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds \right] \mathbf{Z}(t) \left[\mathbf{E} - \int_0^\tau \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds \right] d\tau = \\ & = \omega \mathbf{Z}(t) - \int_0^\omega d\tau \int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds \mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}(t) \int_0^\omega d\tau \int_0^\tau \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds + \\ & + \int_0^\omega \left(\int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds \right) \mathbf{Z}(t) \left(\int_0^\tau \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds \right) d\tau = \omega \mathbf{Z}(t) - \\ & - \int_0^\omega (\omega - \tau) \mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{A}(\tau) d\tau \mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}(t) \int_0^\omega (\omega - \tau) \mathbf{B}(\tau)\mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^\omega \left(\int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds \right) \mathbf{Z}(t) \left(\int_0^\tau \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds \right) d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

На основании (25) уравнение (20) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(t) = & \int_0^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega} \right) \mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{A}(\tau) d\tau \mathbf{Z}(t) + \mathbf{Z}(t) \int_0^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega} \right) \mathbf{B}(\tau)\mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau - \\ & - \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left(\int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds \right) \mathbf{Z}(t) \left(\int_0^\tau \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds \right) d\tau + \frac{1}{\omega} \mathbf{K}(t). \end{aligned} \quad (26)$$

Запишем уравнение матричное (26) в операторном виде

$$\mathbf{Z} = \mathcal{L}(\mathbf{Z}) + \frac{1}{\omega} \mathbf{K}(t). \quad (27)$$

Для исследования разрешимости уравнения (27) воспользуемся принципом сжимающих отображений (см., например, [12, с. 605]). Очевидно, $\mathcal{L}(\mathbf{Z}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ для всякого $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Выясним вопрос о сжимаемости оператора \mathcal{L} .

Для любых $\tilde{\mathbf{Z}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Z}}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ имеем последовательно

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Z}})\| &= \|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}} - \tilde{\mathbf{Z}})\| \leq \left\| \int_0^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) \mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{A}(\tau) d\tau (\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)) \right\| + \\
 &\quad + \left\| (\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)) \int_0^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau \right\| + \\
 &\quad + \frac{1}{\omega} \left\| \int_0^\omega \left(\int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{A}(s) ds \right) (\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)) \left(\int_0^\tau \mathbf{B}(s) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) d\tau \right\| \leq \\
 &\leq \int_0^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) \|\mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{A}(\tau)\| d\tau \|\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)\| + \|\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)\| \int_0^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) \|\mathbf{B}(\tau) \mathbf{V}^{-1}(\tau)\| d\tau + \\
 &\quad + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left\| \left(\int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{A}(s) ds \right) (\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)) \left(\int_0^\tau \mathbf{B}(s) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) \right\| d\tau \leq \\
 &\leq \int_0^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) (\|\mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{A}(\tau)\| + \|\mathbf{B}(\tau) \mathbf{V}^{-1}(\tau)\|) d\tau \|\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)\| + \\
 &\quad + \int_0^\omega \left\| \int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{A}(s) ds \right\| \left\| \int_0^\tau \mathbf{B}(s) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right\| d\tau \|\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)\| = \\
 &= \left\{ \int_0^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) (\|\mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{A}(\tau)\| + \|\mathbf{B}(\tau) \mathbf{V}^{-1}(\tau)\|) d\tau + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left\| \int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{A}(s) ds \right\| \left\| \int_0^\tau \mathbf{B}(s) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right\| d\tau \right\} \times \\
 &\quad \times \|\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)\| \leq \int_0^\omega \left[(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right) + \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \tau^2 \right] d\tau \|\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)\| = \\
 &= \left[\frac{1}{2} (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) \omega + \frac{1}{3} \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \omega^2 \right] \|\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)\| = p \|\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)\|. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Согласно принципу сжимающих отображений при выполнении условия

$$\frac{1}{2} (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) \omega + \frac{1}{3} \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \omega^2 < 1 \quad (29)$$

уравнение (27) имеет единственное решение, стало быть, эквивалентное ему уравнение (20) имеет только одно решение. Это означает, что оператор Φ однозначно обратим в случае выполнения (29).

Используя (28), нетрудно получить оценку области локализации решения уравнения (27)

$$\|\mathbf{Z}(t)\| \leq \frac{\|\mathbf{K}(t)\|}{(1-p)\omega}. \quad (30)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. При выполнении условия (29) решение уравнения (20) существует и единственно, при этом справедлива оценка (30).

Более простые условия однозначной разрешимости уравнения (20) получаются на основе использования матриц $\mathbf{U}^{-1}(\tau)$, $\mathbf{V}^{-1}(\tau)$ по отдельности, т. е. в односторонних вариантах.

Рассмотрим второй вариант, согласно которому используется только решение уравнения (23). Тогда уравнение (20) примет вид

$$\int_0^{\omega} \left[\mathbf{E} - \int_0^{\tau} \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{A}(s) ds \right] \mathbf{Z}(t) \mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau = \mathbf{K}(t) \quad (31)$$

или

$$\mathbf{Z}(t) \int_0^{\omega} \mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau = \int_0^{\omega} \left(\int_0^{\tau} \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{A}(s) ds \right) \mathbf{Z}(t) \mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau + \mathbf{K}(t). \quad (32)$$

Пусть выполнено условие

$$\det \int_0^{\omega} \mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau \neq 0. \quad (33)$$

Тогда уравнение (32) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{Z}(t) = \left(\int_0^{\omega} \left(\int_0^{\tau} \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{A}(s) ds \right) \mathbf{Z}(t) \mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau + \mathbf{K}(t) \right) \left(\int_0^{\omega} \mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau \right)^{-1}. \quad (34)$$

Очевидно, уравнение (34) эквивалентно уравнению (20).

Для анализа разрешимости уравнения (34) снова воспользуемся принципом сжимающих отображений, рассматривая это уравнение в операторном виде

$$\mathbf{Z} = \mathcal{L}(\mathbf{Z}) + \mathbf{K}_v(t), \quad (35)$$

где

$$\mathbf{K}_v(t) = \mathbf{K}(t) \left(\int_0^{\omega} \mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau \right)^{-1}.$$

Очевидно, $\mathcal{L}(\mathbf{Z}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ для всякого $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Далее для любых $\tilde{\mathbf{Z}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Z}}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ получим

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{L}(\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Z}}) \right\| = \left\| \mathcal{L}(\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}} - \tilde{\mathbf{Z}}) \right\| = \\ & = \left\| \int_0^{\omega} \left(\int_0^{\tau} \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{A}(s) ds \right) (\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)) \mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau \left(\int_0^{\omega} \mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau \right)^{-1} \right\| \leq \\ & \leq \int_0^{\omega} \left\| \left(\int_0^{\tau} \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{A}(s) ds \right) (\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)) \mathbf{V}^{-1}(\tau) \right\| d\tau \left\| \left(\int_0^{\omega} \mathbf{V}^{-1}(\tau) d\tau \right)^{-1} \right\| \leq \\ & \leq \gamma_v \int_0^{\omega} \left(\int_0^{\tau} \left\| \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{A}(s) \right\| ds \right) \left\| \mathbf{V}^{-1}(\tau) \right\| d\tau \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t) \right\| \leq \frac{1}{2} \gamma_v \tilde{\alpha} \lambda_v \omega^2 \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t) \right\| = \\ & = p_v \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t) \right\|. \end{aligned} \quad (36)$$

Согласно принципу сжимающих отображений уравнение (34) (или (35)) однозначно разрешимо, если выполняется условие

$$p_V < 1, \quad (37)$$

при этом имеет место оценка

$$\|\mathbf{Z}(t)\| \leq \frac{\|\mathbf{K}_V(t)\|}{1 - p_V}. \quad (38)$$

Оценка (38) получена на основе (34) с использованием условия (37).

Для рассмотренного способа построения решения уравнения (20) справедлива

Теорема 2. *При выполнении условий (33), (37) уравнение (20) однозначно разрешимо, при этом справедлива оценка (38).*

Наконец рассмотрим способ, согласно которому используется решение уравнения (24). Уравнение (20) примет вид

$$\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{Z}(t) \left[\mathbf{E} - \int_0^{\tau} \mathbf{B}(s) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right] d\tau = \mathbf{K}(t)$$

или

$$\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau) d\tau \mathbf{Z}(t) = \int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{Z}(t) \left(\int_0^{\tau} \mathbf{B}(s) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) d\tau + \mathbf{K}(t). \quad (39)$$

Пусть выполнено условие

$$\det \int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau) d\tau \neq 0. \quad (40)$$

Используя (40), уравнение (39) запишем так:

$$\mathbf{Z}(t) = \left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau) d\tau \right)^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{Z}(t) \left(\int_0^{\tau} \mathbf{B}(s) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) d\tau + \mathbf{K}(t) \right\}$$

или в операторном виде

$$\mathbf{Z} = \mathcal{L}(\mathbf{Z}) + \mathbf{K}_U(t), \quad (41)$$

где

$$\mathbf{K}_U(t) = \left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau) d\tau \right)^{-1} \mathbf{K}(t).$$

Можно установить, что уравнение (41) эквивалентно уравнению (20).

Уравнение (41) по структуре аналогично уравнению (35), при этом $\mathcal{L}(\mathbf{Z}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ для всякого $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Далее поступаем так же, как и во втором случае, то есть изучим вопрос о сжимаемости оператора \mathcal{L} . Для этого выполним оценки типа (36)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Z}}) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Z}})\| &= \left\| \left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau) d\tau \right)^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau) (\tilde{\mathbf{Z}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)) \left(\int_0^{\tau} \mathbf{B}(s) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) d\tau \right\} \right\| \leq \\ &\leq \left\| \left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau) d\tau \right)^{-1} \right\| \left\| \int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau) (\tilde{\mathbf{Z}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t)) \left(\int_0^{\tau} \mathbf{B}(s) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) d\tau \right\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma_U \int_0^\omega \left\| \mathbf{U}^{-1}(\tau) (\tilde{\mathbf{Z}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(\tau)) \left(\int_0^\tau \mathbf{B}(s) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) \right\| d\tau \leq \\
&\leq \gamma_U \int_0^\omega \left\| \mathbf{U}^{-1}(\tau) \right\| \left(\int_0^\tau \left\| \mathbf{B}(s) \mathbf{V}^{-1}(s) \right\| ds \right) d\tau \left\| \tilde{\mathbf{Z}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t) \right\| \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \gamma_U \lambda_U \tilde{\beta} \omega^2 \left\| \tilde{\mathbf{Z}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t) \right\| = p_U \left\| \tilde{\mathbf{Z}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t) \right\|. \quad (42)
\end{aligned}$$

Согласно принципу сжимающих отображений уравнение (41) однозначно разрешимо, если выполняется соотношение

$$p_U < 1. \quad (43)$$

На основе (41), с использованием (42), нетрудно получить оценку

$$\left\| \mathbf{Z}(t) \right\| \leq \frac{\left\| \mathbf{K}_U(t) \right\|}{1 - p_U}. \quad (44)$$

Стало быть, для этого способа решения уравнения (20) справедлива

Теорема 3. При выполнении условий (40), (43) уравнение (20) однозначно разрешимо, при этом справедлива оценка (44).

Замечание 2. Для построения приближенных решений уравнений (26), (34), (41) может быть использован классический метод последовательных приближений (см., например, [12, с. 605]).

Замечание 3. Вместо условий (37), (43) можно принять следующие условия соответственно:

$$\frac{1}{2} \gamma_V \alpha \lambda_U \lambda_V \omega^2 < 1; \quad \frac{1}{2} \gamma_U \beta \lambda_U \lambda_V \omega^2 < 1. \quad (45)$$

Если же воспользоваться известными оценками (в подходящей норме, см., например, [13, с. 75]), то $\left\| \mathbf{U}^{-1}(t) \right\| \leq e^{\alpha\omega}$, $\left\| \mathbf{V}^{-1}(t) \right\| \leq e^{\beta\omega}$ и условия (37), (43) можно заметить на коэффициентные условия соответственно

$$\frac{1}{2} \gamma_V \alpha e^{(\alpha+\beta)\omega} \omega^2 < 1; \quad \frac{1}{2} \gamma_U \beta e^{(\alpha+\beta)\omega} \omega^2 < 1. \quad (46)$$

Условия (45), (46), очевидно, грубее условий (37), (43), но гораздо удобнее для применений.

Замечание 4. Из анализа соотношений (30), (38), (44) видно, что величины $\frac{1}{\omega(1-p)}$, $\frac{\gamma_V}{1-p_U}$, $\frac{\gamma_U}{1-p_V}$ представляют собой оценки нормы оператора Φ^{-1} , которые дают рассмотренные способы решения уравнения (20).

Заключение

Результаты работы заключаются в следующем:

- схематично описан метод редукции рассмотренной задачи Валле-Пуссена к эквивалентной системе интегральных уравнений;
- установлена связь используемого метода с классическим методом функций Грина;

– предложены способы обращения оператора, возникающего при сведении краевой задачи к эквивалентной интегральной задаче.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный анализ краевой задачи Валле-Пуассена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка Часть I. / В. Н. Лаптинский, А. И. Кашпар. – Могилев : Беларус.-Рос. ун-т, 2015. – 40 с. – (Препринт / Ин-т технол. металлов НАН Беларуси; № 39).
2. *Кашпар, А. И.* Исследование разрешимости краевой задачи Валле-Пуассена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2016. – № 2. – С. 17–29.
3. *Кашпар, А. И.* О построении решения краевой задачи Валле-Пуассена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2018. – № 2. – С. 45–54.
4. *Кашпар, А. И.* О разрешимости и построении решения задачи Валле-Пуассена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фіз.-матэ. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 50–61.
5. *Деревенский, В. П.* Матричные двусторонние линейные дифференциальные уравнения / В. П. Деревенский // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55, вып. 1. – С. 35–42.
6. *Деревенский, В. П.* Матричные линейные дифференциальные уравнения высших порядков / В. П. Деревенский // Дифференц. уравнения – 1993. – Т. 29, № 4. – С. 711–714.
7. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
8. *Murty, K. N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.
9. *Murty, K. N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems associated with an nth order nonlinear system of differential equations – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, G.V.R.L. Sarma // Mathem. Probl. in Engineering – 2000. – Vol. 6. – P. 395–410.
10. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
11. *Хартман, Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970. – 720 с.
12. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
13. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.

Поступила в редакцию 24.05.2021 г.

Контакты: alex.kashpar@tut.by (Кашпар Александр Иванович)

Kashpar A., Laptinskiy V. ON THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF DE LA VALLEE POUSSIN FOR THE LYAPUNOV'S SECOND-ORDER MATRIX EQUATION.

The connection is established between the constructive method of regularization of de la Vallée-Poussin boundary value problem for the Lyapunov's second-order linear matrix equation with the method of Green's functions. The methods for solving a matrix integro-algebraic equation arising when reducing a boundary value problem to an equivalent integral equation are proposed.

Keywords: matrix differential equation, boundary value problem.

УДК 517.956.32

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЩЕГО ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПОЛУПОЛОСЕ ПЛОСКОСТИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ф. Е. Ломовцев

доктор физико-математических наук
Белорусский государственный университет

В. В. Лысенко

аспирантка кафедры математической кибернетики
Белорусский государственный университет

Найдено решение линейной смешанной задачи для общего $(a_1 \neq a_2)$ неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны с зависящими от времени коэффициентами при частных производных до второго порядка включительно в граничных режимах для случая нехарактеристических вторых производных. Выведен критерий (необходимые и достаточные условия) ее корректности по Адамару (однозначной и устойчивой везде разрешимости) во множестве классических решений без продолжений исходных данных (правой части уравнения, начальных и граничных данных) вне множеств их задания. Критерий корректности этой задачи включает требования гладкости и два условия согласования исходных данных.

Ключевые слова: смешанная задача, нестационарный граничный режим, нехарактеристические вторые производные, классическое решение, критерий корректности, требование гладкости, условие согласования.

Введение

В настоящей работе методом “вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны (волнового уравнения на полупрямой)” из [1] найдено классическое решение в явном виде и выявлен критерий (необходимые и достаточные условия) корректности по Адамару (существования, единственности и устойчивости) на исходные данные во множестве классических решений линейной смешанной задачи для общего $(a_1 \neq a_2)$ уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных (с зависящими от времени коэффициентами) нехарактеристических вторых производных в граничных режимах. Критерий корректности включает необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования на исходные данные (правую часть уравнения, начальные и граничные данные), которые гарантируют ее однозначную и устойчивую везде разрешимость во множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций. Эти глобальные (полные и окончательные) результаты получены указанным выше методом из явного классического решения и критерия корректности вспомогательной смешанной задачи в первой четверти плоскости из [2]. Необходимая гладкость правой части волнового уравнения обеспечивается методом корректировки пробных решений из [3]. Статья авторов [4] была посвящена очень частному случаю нехарактеристических вторых производных в граничном режиме для простейшего $(a_1 = a_2)$ уравнения колебаний полуограниченной струны. Смешанная задача для

общего ($a_1 \neq a_2$) уравнения колебаний полуограниченной струны при некоторых факторизованных нехарактеристических вторых производных в граничном режиме изучалась в [5]. Ранее в диссертации [6] этим же методом также была установлена глобальная теорема корректности смешанной задачи, но только для простейшего ($a_1 = a_2$) уравнения колебаний ограниченной струны и при нехарактеристических первых косых производных в граничных режимах. Смешанная задача для общего уравнения вынужденных колебаний только полуограниченной струны при нестационарных характеристических вторых производных в граничном режиме в четверти плоскости изучалась в [7].

Вспомогательная смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарных нехарактеристических вторых производных на конце

В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ решена и исследована корректность общего одномерного неоднородного волнового уравнения

$$(\partial_t - a_2 \partial_x + b_2)(\partial_t + a_1 \partial_x + b_1)u(x, t) = f(x, t), (x, t) \in \dot{G}_\infty \quad (1)$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in]0, d[\quad (2)$$

и зависящем от времени $t \in [0, +\infty[$ граничном режиме

$$\Gamma(t)u \equiv [\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0} = \mu(t), t > 0, \quad (3)$$

где частные производные $\partial_t = \partial / \partial t$, $\partial_x = \partial / \partial x$, $\partial_{tt} = \partial^2 / \partial t^2$, $\partial_{xt} = \partial^2 / \partial t \partial x$, $\partial_{xx} = \partial^2 / \partial x^2$ и $f, \varphi, \psi, \mu, \zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma$ – заданные ограниченные функции указанных выше независимых переменных x и t , $a_1 > 0, a_2 \geq 0, b_1, b_2$ – вещественные постоянные.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество вещественнозначных k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Определение 1. Классическими решениями смешанной задачи (1)–(3) называются функции $u \in C^2(G_\infty)$, $G_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, удовлетворяющие уравнению (1) на \dot{G}_∞ в обычном смысле, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле пределов значений соответствующих дифференциальных выражений от $u(\dot{x}, \dot{t})$ во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ при $\dot{x} \rightarrow x$ и $\dot{t} \rightarrow t$ для всех указанных граничных точек (x, t) множества G_∞ .

Известно, что уравнение (1) имеет два различных семейства характеристик: $x - a_1 t = C_1, x + a_2 t = C_2, \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Предполагается, что в граничном режиме (3) вторые производные не являются характеристическими, т. е. направления вторых производных не совпадают с направлением характеристики $x = a_1 t$ для всех $t \geq 0$.

Определение 2. Характеристика $x = a_1 t$, где $a_1 > 0$, называется критической для уравнения (1) в первой четверти плоскости.

Чтобы математически выразить характеристичность вторых частных производных в граничном режиме (3), сначала вычисляется вторая производная по направлению $\vec{v} = \{1, a_1\}$ вдоль критической характеристики от функции u [2]:

$$(a_1^2 + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} = \sqrt{a_1^2 + 1} \frac{\partial}{\partial v} (\partial_t u + a_1 \partial_x u) = (\overline{\text{grad}}(\partial_t u + a_1 \partial_x u), \vec{v}) =$$

$$= \left(\left\{ \partial_{xx} u + a_1 \partial_{xt} u, \partial_{tx} u + a_1 \partial_{xx} u \right\}, \{1, a_1\} \right) = \partial_{xx} u + a_1 \partial_{xt} u + a_1 \partial_{tx} u + a_1^2 \partial_{xx} u. \quad (4)$$

Потом приравняем к нулю значения характеристического определителя

$$\Delta_{\chi}(t) \equiv \begin{vmatrix} \zeta(t) & \xi(t) & \theta(t) \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_1 & a_1^2 \end{vmatrix} = a_1(a_1^2 \zeta(t) - a_1 \xi(t) + \theta(t)) = 0, \quad t \in [0, +\infty[, \quad (5)$$

первой строкой которого служат коэффициенты при вторых производных в граничном режиме (3) и двумя следующими строками – коэффициенты при соответствующих вторых производных во второй производной по направлению вектора $\vec{v} = \{1, a_1\}$ из (4).

Определение 3 [2]. Определитель Δ_{χ} в левой части равенств (5) называется характеристическим для граничного режима (3) и уравнения (1), граничный режим (3), для которого определитель $\Delta_{\chi}(t)$ обращается в ноль при всех $t \geq 0$, – *характеристическим* и вторые частные производные в граничном режиме (3) – *характеристическими*.

Явная формула классического решения и критерий корректности по Адамару вспомогательной смешанной задачи

Критическая характеристика $x = a_1 t$, $a_1 > 0$, делит множество G_{∞} на два множества $G_- = \{(x, t) \in G_{\infty} : x > a_1 t, t > 0\}$, $G_+ = \{(x, t) \in G_{\infty} : x \leq a_1 t, x \geq 0\}$. Для классических решений $u \in C^2(G_{\infty})$ из уравнения (1) и условий (2), (3) вытекают очевидные необходимые требования гладкости

$$f \in C(G_{\infty}), \quad \varphi \in C^2[0, +\infty[, \quad \psi \in C^1[0, +\infty[, \quad \mu \in C[0, +\infty[. \quad (6)$$

Ниже мы выведем дополнительные необходимые требования гладкости на все эти исходные данные. Полагая $t = 0$ в граничном режиме (3) и вычисляя значения следов слагаемых с помощью начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (1) при $x = 0, t = 0$, находим необходимое условие согласования

$$Y = \zeta(0)[f(0, 0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1 a_2 \varphi''(0) - (b_1 + b_2)\psi(0) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\varphi'(0) - b_1 b_2 \varphi(0)] + \xi(0)\psi'(0) + \theta(0)\varphi''(0) + \alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0). \quad (7)$$

В следующей теореме нами используются следующие обозначения:

$$F(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau,$$

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 \varphi(x + a_2 t) + a_2 e^{B(a_2 t + x)} \varphi(0) + \int_0^{x + a_2 t} e^{B(x + a_2 t - s)} [A\varphi(s) + \psi(s)] ds \right\},$$

$$F_i(x, t) = \frac{e^{Bx - At}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t_1(x)} \int_{x_1(t, \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{t_1(x)}^t \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} e^{A\tau - Bs} f(s, \tau) ds d\tau \right], \quad (8)$$

$$A = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 + a_2}, \quad B = \frac{b_2 - b_1}{a_1 + a_2}, \quad t_1(x) = \frac{x}{a_1} - t > 0 \text{ на } G_-, \quad t_2(x) = t - \frac{x}{a_1} \geq 0 \text{ на } G_+,$$

$$x_i(t, \tau) = [1 - (-1)^i ((a_2 / a_1) + 1)](x - a_1 t) - a_2 \tau, \quad i = 1, 2,$$

$$P(t) = \mu(t) - \Gamma(t) (e^{-bt} \Phi(x, t) + F_2(x, t)),$$

$$\chi(a, b) = \exp \left\{ -a_1 \int_a^b \sigma(s) ds \right\}, \quad \sigma(t) = \frac{2a_1 b_1 \zeta(t) - b_1 \xi(t) - a_1 \alpha(t) + \beta(t)}{a_1^2 \zeta(t) - a_1 \xi(t) + \theta(t)}.$$

Частные решения $F_1, F_2 \in C^2(\dot{G}_\infty)$ из (8) уравнения (1) получены в [3].

Модификацией метода характеристик из [8] доказана

Теорема 1 [2]. Пусть непрерывны коэффициенты $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma \in C[0, +\infty[$, граничный режим (3) не является характеристическим: $a_1^2 \zeta(t) - a_1 \xi(t) + \theta(t) \neq 0, t \in [0, +\infty[$, и существует классическое решение $v \in C^2[0, +\infty[, v(\rho) \neq 0, v'(\rho) \neq 0, \rho \in [0, +\infty[$ дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} & [a_1^2 \zeta(\rho / a_1) - a_1 \xi(\rho / a_1) + \theta(\rho / a_1)] v''(\rho) - \\ & - [2a_1 b_1 \zeta(\rho / a_1) - b_1 \xi(\rho / a_1) - a_1 \alpha(\rho / a_1) + \beta(\rho / a_1)] v'(\rho) + \\ & + [b_1^2 \zeta(\rho / a_1) - b_1 \alpha(\rho / a_1) + \gamma(\rho / a_1)] v(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Задача (1)–(3) в \dot{G}_∞ имеет единственное и устойчивое по f, φ, ψ, μ классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$, если и только если верны условия (6), (7)

$$\begin{aligned} J_1(x, t) & \equiv \int_0^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_\infty), \\ J_{i+1}(x, t) & \equiv \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right] \int_0^{t_i(x)} f(x_i(t, \tau), \tau) d\tau + \\ & + \int_{t_i(x)}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_\infty), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Этим классическим решением смешанной задачи (1)–(3) служит функция

$$\begin{aligned} u_-(x, t) & = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 e^{-b_2 t} \varphi(x + a_2 t) + a_2 e^{-b_1 t} \varphi(x - a_1 t) + \right. \\ & \left. + \int_{x-a_1 t}^{x+a_2 t} e^{B(x-s)-At} [A\varphi(s) + \psi(s)] ds \right\} + F(x, t), \quad (x, t) \in G_-, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_+(x, t) & = e^{-b_2 t} \Phi(x, t) + e^{-b_1 t} v(a_1 t - x) \left\{ \int_0^{t_2(x)} \frac{a_1^2}{v^2(a_1 s)} \int_0^s \frac{e^{b_1 \tau} v(a_1 \tau) \chi(s, \tau) P(\tau)}{a_1^2 \zeta(\tau) - a_1 \xi(\tau) + \theta(\tau)} d\tau ds + \right. \\ & \left. + \frac{a_1 v(0) [b_2 \varphi(0) + \psi(0) - a_2 \varphi'(0)]}{a_1 + a_2} \int_0^{t_2(x)} \frac{\chi(s, 0)}{v^2(a_1 s)} ds \right\} + F_2(x, t), \quad (x, t) \in G_+. \end{aligned} \quad (12)$$

Замечание 1. В теореме 1 включения (10) эквивалентны двум включениям $J_2(x, t) \equiv \dots \in C^1(G_-)$, $J_3(x, t) \equiv \dots \in C^1(G_+)$ и фразе “первые частные производные от функций J_2 и J_3 непрерывны на характеристике $x = a_1 t$ ” статьи [2].

Основная часть

Основная смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при нестационарных нехарактеристических вторых производных на концах

В верхней полуполосе плоскости $\dot{G} =]0, d[\times]0, +\infty[$ исследуется смешанная задача для общего одномерного неоднородного волнового уравнения:

$$(\partial_t - a_2 \partial_x + b_2)(\partial_t + a_1 \partial_x + b_1)u(x, t) = f(x, t), (x, t) \in \dot{G}, \quad (13)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in]0, d[, \quad (14)$$

$$\Gamma_i u \equiv [\zeta_i(t)u_{tt} + \xi_i(t)u_{xt} + \theta_i(t)u_{xx} + \alpha_i(t)u_t + \beta_i(t)u_x + \gamma_i(t)u]_{x=d_i} = \mu_i(t), t > 0, \quad (15)$$

где $i = 1, 2$ и $f, \varphi, \psi, \mu_i, \zeta_i, \xi_i, \theta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2$ – заданные ограниченные функции своих независимых переменных x и t , $a_1 > 0, a_2 > 0, b_1, b_2$ – вещественные постоянные.

Определение 4. Классическими решениями смешанной задачи (13)–(15) называются функции $u \in C^2(G)$, удовлетворяющие уравнению (13) на \dot{G} поточечно в обычном смысле, а начальным условиям (14) и граничным режимам (15) в смысле пределов внутри значений соответствующих дифференциальных выражений от $u(\dot{x}, \dot{t})$ во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}$ при $\dot{x} \rightarrow x$ и $\dot{t} \rightarrow t$ для всех указанных граничных точек (x, t) множества G .

Для решения задачи (13)–(15) с помощью теоремы 1 методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны верхнюю полуполосу G заменяем расширяющимся по времени t множеством замкнутых прямоугольников $Q_n = [0, d] \times [0, d_{n+1}]$, где $d_n = (n-1)d / (a_1 + a_2)$, $n = 1, 2, \dots$. Для записи рекуррентных формул решения смешанной задачи (13)–(15) разбиваем эти прямоугольники Q_n на меньшие прямоугольники $G_k = [0, d] \times [d_k, d_{k+1}]$, $k = \overline{1, n}$, с высотой $d / (a_1 + a_2)$, равной времени однократного прохождения длины струны прямой и обратной волнами одновременно (см. рисунок).

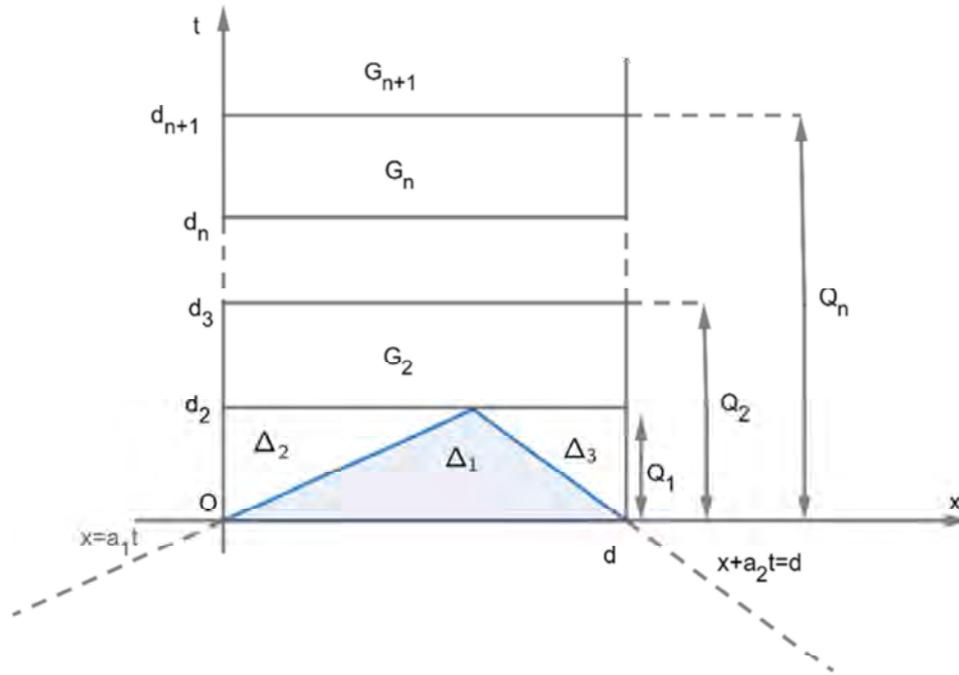
Затем делим каждый прямоугольник G_k характеристиками уравнения (13), называемыми нами критическими для задачи (13)–(15), на три треугольника:

$$\Delta_{3k-2} = \{(x, t) : x \geq a_1 t_k, x + a_2 t_k \leq d, x \in [0, d], t \in [d_k, d_{k+1}]\},$$

$$\Delta_{3k-1} = \{(x, t) : x \leq a_1 t_k, x \in [0, a_1 d_2], t \in [d_k, d_{k+1}]\},$$

$$\Delta_{3k} = \{(x, t) : x + a_2 t_k \geq d, x \in [a_1 d_2, d], t \in [d_k, d_{k+1}]\}, t_k = t - d_k, k = \overline{1, n}, n = 1, 2, \dots$$

Формулы единственных и устойчивых классических решений и необходимые и достаточные условия корректности по Адамару задачи (13)–(15), во множестве классических решений приведены в следующей теореме, в которой нами используются следующие функции и обозначения:



Прямоугольники Q_n , расширяющиеся по времени t и исчерпывающие верхнюю полуплоскость G плоскости

$$F_{2,k}^{(1)}(x,t) = \frac{e^{Bx-At}}{a_1 + a_2} \left[\int_{d_k}^{t_2(x)} \int_{a_2[t_2(x)-\tau]}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs} f(s,\tau) ds d\tau + \int_{t_2(x)}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs} f(s,\tau) ds d\tau \right],$$

$$F_{2,k}^{(2)}(x,t) = \frac{e^{Bx-At}}{a_1 + a_2} \left[\int_{d_k}^{t_2^*(x)} \int_{x-a_1(t-\tau)}^{d-a_1[t_2^*(x)-\tau]} e^{A\tau-Bs} f(s,\tau) ds d\tau + \int_{t_2^*(x)}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs} f(s,\tau) ds d\tau \right],$$

$$k = \overline{1, n}, \quad t_2(x) = t - x/a_1, \quad t_2^*(x) = t - ((d-x)/a_2),$$

$$\Phi_{3k-1}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 \varphi_k(x + a_2 t_k) + a_2 e^{B(x+a_2 t_k)} \varphi_k(0) + \int_0^{x+a_2 t_k} e^{B(x+a_2 t_k - s)} [A\varphi_k(s) + \psi_k(s)] ds \right\},$$

$$\Phi_{3k}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_2 \varphi_k(x - a_1 t_k) + a_1 e^{B(x-a_1 t_k)} \varphi_k(d) + \int_0^{x-a_1 t_k} e^{B(x-a_1 t_k - s)} [A\varphi_k(s) + \psi_k(s)] ds \right\},$$

$$+ \int_{x-a_k t_k}^d e^{B(x-a_k t_k-s)} [A\varphi_k(s) + \psi_k(s)] ds \Big\}, \quad k = \overline{1, n},$$

$$P_{3k-2+i}(t) = \mu_i(t) - \Gamma_i(t) \left(e^{-b_{3-i} t_k} \Phi_{3k-2+i}(x, t) + F_{2,k}^{(i)}(x, t) \right), \quad i = 1, 2,$$

$$\chi_i(a, b) = \exp \left\{ -a_i \int_a^b \sigma_i(s) ds \right\}, \quad \sigma_i(t) = \frac{2a_i b_i \zeta_i(t) + (-1)^i b_i \xi_i(t) - a_i \alpha_i(t) - (-1)^i \beta_i(t)}{a_i^2 \zeta_i(t) + (-1)^i a_i \xi_i(t) + \theta_i(t)}.$$

Теорема 2. Пусть коэффициенты граничных режимов непрерывны: $\zeta_i, \xi_i, \theta_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in C[0, +\infty[$, $i = 1, 2$, граничные режимы (15) нехарактеристические: $a_i^2 \zeta_i(t) + (-1)^i a_i \xi_i(t) + \theta_i(t) \neq 0$, $t \in [0, \infty[$, $i = 1, 2$ и существуют решения $v_i \in C^2[0, +\infty[$, $v_i(\rho) \neq 0$, $v_i'(\rho) \neq 0$, $\rho \in [0, +\infty[$ уравнений

$$[a_i^2 \zeta_i(\rho / a_i) + (-1)^i a_i \xi_i(\rho / a_i) + \theta_i(\rho / a_i)] v_i''(\rho) -$$

$$- [2a_i b_i \zeta_i(\rho / a_i) + (-1)^i b_i \xi_i(\rho / a_i) - a_i \alpha_i(\rho / a_i) - (-1)^i \beta_i(\rho / a_i)] v_i'(\rho) +$$

$$+ [b_i^2 \zeta_i(\rho / a_i) - b_i \alpha_i(\rho / a_i) + \gamma_i(\rho / a_i)] v_i(\rho) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Смешанная задача (13)–(15) имеет единственное и устойчивое классическое решение $u \in C^2(G)$, если и только если выполняются требования гладкости:

$$f \in C(G), \quad \varphi \in C^2[0, d], \quad \psi \in C^1[0, d], \quad \mu_i \in C[0, d_{n+1}[$$
, $i = 1, 2, \quad (17)$

$$J_{1,k}^{(p)}(x, t) \equiv \int_0^t f(x - (-1)^p a_{3-p}(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_k), \quad p = 1, 2, \quad (18)$$

$$J_{2,k}^{(i)}(x, t) \equiv \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right] \int_{d_k}^{t_i(x) + (2-i)2d_k} f(x_{i,k}(t, \tau), \tau) d\tau +$$

$$+ \int_{t_i(x) + (2-i)2d_k}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\Delta_{3k-2} \cup \Delta_{3k-1}), \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

$$J_{3,k}^{(i)}(x, t) \equiv \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right] \int_{d_k}^{(-1)^i t_2^*(x) + (2-i)2d_k} f(x_{i,k}^*(t, \tau), \tau) d\tau +$$

$$+ \int_{(-1)^i t_2^*(x) + (2-i)2d_k}^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\Delta_{3k-2} \cup \Delta_{3k}), \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

в которых $x_{i,k}(t, \tau) = \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right] (x - a_1 t_{(2-i)k}) - a_2 \tau_{(2-i)k}$,
 $x_{i,k}^*(t, \tau) = d + \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right] (x + a_2 t_{(2-i)k} - d) + a_1 \tau_{(2-i)k}$ и условия согласования

$$\zeta_i(0) [f(\hat{d}_i, 0) + (-1)^i (a_i - a_{3-i}) \psi'(\hat{d}_i) + a_i a_2 \varphi''(\hat{d}_i) - (b_i + b_{3-i}) \psi(\hat{d}_i) -$$

$$- (-1)^i (a_{3-i} b_i - a_i b_{3-i}) \varphi'(\hat{d}_i) - b_i b_{3-i} \varphi(\hat{d}_i)] + \xi_i(0) \psi'(\hat{d}_i) + \theta_i(0) \varphi''(\hat{d}_i) + \alpha_i(0) \psi(\hat{d}_i) +$$

$$+\beta_i(0)\varphi'(\hat{d}_i)+\gamma_i(0)\varphi(\hat{d}_i)=\mu_i(0), \quad \hat{d}_i=(i-1)d, \quad i=1, 2. \quad (21)$$

Этим классическим решением $u \in C^2(G)$ задачи (13)–(15) является функция

$$u_{3k-2}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}\left\{a_1e^{-b_2t_k}\varphi_k(x+a_2t_k)+a_2e^{-b_1t_k}\varphi_k(x-a_1t_k)\right\} + \quad (22)$$

$$+\int_{x-a_1t_k}^{x+a_2t_k} e^{B(x-s)-At_k} [A\varphi_k(s)+\psi_k(s)] ds \left\} + \frac{e^{Bx-At}}{a_1+a_2} \int_{d_k}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs} f(s,\tau) ds d\tau, (x,t) \in \Delta_{3k-2},$$

$$d_k=(k-1)d/(a_1+a_2), \quad u_{3k-1}(x,t)=e^{-b_2t_k}\Phi_{3k-1}(x,t)+F_{2,k}^{(1)}(x,t)+$$

$$+v_1(a_1t-x)\left\{e^{-b_1t} \int_{d_k}^{\frac{t-x}{d_k}} \frac{a_1^2}{v_1^2(a_1\delta)} \int_{d_k}^{\delta} \frac{e^{b_1\rho}v_1(a_1\rho)\chi_1(\delta,\rho)P_{3k-1}(\rho)}{a_1^2\zeta_1(\rho)-a_1\xi_1(\rho)+\theta_1(\rho)} d\rho d\delta + \quad (23)$$

$$+e^{-b_1t_k} \frac{a_1v_1(a_1d_k)[b_2\varphi_k(0)+\psi_k(0)-a_2\varphi_k'(0)]}{a_1+a_2} \int_{d_k}^{\frac{t-x}{d_k}} \frac{\chi_1(\delta,d_k)}{v_1^2(a_1\delta)} d\delta \right\}, (x,t) \in \Delta_{3k-1},$$

$$t_k=t-d_k, \quad u_{3k}(x,t)=e^{-b_1t_k}\Phi_{3k}(x,t)+F_{2,k}^{(2)}(x,t)+$$

$$+v_2(a_2t-d+x)\left\{e^{-b_2t} \int_{d_k}^{\frac{t-d-x}{d_k}} \frac{a_2^2}{v_2^2(a_2\delta)} \int_{d_k}^{\delta} \frac{e^{b_2\rho}v_2(a_2\rho)\chi_2(\delta,\rho)P_{3k}(\rho)}{a_2^2\zeta_2(\rho)+a_2\xi_2(\rho)+\theta_2(\rho)} d\rho d\delta + \quad (24)$$

$$+e^{-b_2t_k} \frac{a_2v_2(a_2d_k)[b_1\varphi_k(d)+\psi_k(d)-a_1\varphi_k'(d)]}{a_1+a_2} \int_{d_k}^{\frac{t-d-x}{d_k}} \frac{\chi_2(\delta,d_k)}{v_2^2(a_2\delta)} d\delta \right\}, (x,t) \in \Delta_{3k}, k=\overline{1,n},$$

где $n=1, 2, \dots$, u_{3k-l} – сужения классического решения u задачи (13)–(15) на Δ_{3k-l} , $l=0, 1, 2$ и промежуточные рекуррентные начальные данные равны

$$\varphi_1(x)=\varphi(x), \psi_1(x)=\psi(x), x \in [0, d], \varphi_k(x)=u_{3k+j-4} \Big|_{t=d_k},$$

$$\psi_k(x)=\partial_t u_{3k+j-4} \Big|_{t=d_k}, \quad x \in [ja_1d_2, (a_1+ja_2)d_2], j=0, 1, k=\overline{2,n}, n=2, 3, \dots$$

Доказательство. 1. Выполняем первый шаг математической индукции: получаем формулы классического решения $u \in C_2(Q_1)$ и необходимые и достаточные условия его существования и единственности для задачи (13)–(15) в первом прямоугольнике Q_1 . Для этого сначала мы берем сужение на трапецию $\Delta_1 \cup \Delta_2$ единственного и устойчивого классического решения вспомогательной смешанной задачи (1)–(3) для полуограниченной струны из формул (11) и (12) теоремы 1 при $\zeta = \zeta_1$, $\xi = \xi_1$, $\theta = \theta_1$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$ и получаем соответственно формулы классического решения:

$$u_-(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 e^{-b_2 t} \varphi(x + a_2 t) + a_2 e^{-b_1 t} \varphi(x - a_1 t) + \right. \\ \left. + \int_{x-a_1 t}^{x+a_2 t} e^{B(x-s)-At} [A\varphi(s) + \psi(s)] ds \right\} + \frac{e^{Bx-At}}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-Bs} f(s, \tau) ds d\tau, \quad (x, t) \in \Delta_1, \quad (25)$$

$$u_+(x, t) = e^{-b_2 t} \Phi_2(x, t) + F_{2,1}^{(1)}(x, t) +$$

$$+ e^{-b_1 t} \nu_1(a_1 t - x) \left\{ \int_0^{t-x/a_1} \frac{a_1^2}{\nu_1^2(a_1 s)} \int_0^s \frac{e^{b_1 \tau} \nu_1(a_1 \tau) \chi_1(s, \tau) P_2(\tau)}{a_1^2 \zeta_1(\tau) - a_1 \xi_1(\tau) + \theta_1(\tau)} d\tau ds + \right. \\ \left. + \frac{a_1 \nu_1(0) [b_2 \varphi(0) + \psi(0) - a_2 \varphi'(0)]}{a_1 + a_2} \int_0^{t-x/a_1} \frac{\chi_1(s, 0)}{\nu_1^2(a_1 s)} ds \right\}, \quad (x, t) \in \Delta_2, \quad (26)$$

где $\nu_1 \in C^2[0, +\infty[$ – решение уравнения (16) при $i = 1$ из теоремы 2. Формулы (25) и (26), полученные из теоремы 1, совпадают с формулами (22) и (23) соответственно при $n = k = 1$ из теоремы 2, так как $\Phi(x, t) = \Phi_2(x, t)$, $F_2(x, t) = F_{2,1}^{(1)}(x, t)$, $\sigma(t) = \sigma_1(t)$, $\chi(a, b) = \chi_1(a, b)$, $P(t) = P_2(t)$ на Δ_2 .

Берем сужения гладкости (6), (10) из теоремы 1 и в трапеции $\Delta_1 \cup \Delta_2$ получаем гладкость, совпадающую с гладкостью (17)–(19) при $k = 1$, $p = 1$:

$$f \in C(\Delta_1 \cup \Delta_2), \quad \varphi \in C^2[0, d], \quad \psi \in C^1[0, d], \quad \mu_1 \in C[0, d_2],$$

$$J_1(x, t) = \int_0^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau = J_{1,1}^{(1)}(x, t) \in C^1(\Delta_1 \cup \Delta_2),$$

$$J_2(x, t) = \int_0^{(x/a_1)-t} f\left(\left[\left(a_2/a_1\right) + 2\right](x - a_1 t) - a_2 \tau, \tau\right) d\tau + \\ + \int_{(x/a_1)-t}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau = J_{2,1}^{(1)}(x, t),$$

$$J_3(x, t) = -\frac{a_2}{a_1} \int_0^{t-(x/a_1)} f\left(\frac{a_2}{a_1}(a_1 t - x) - a_2 \tau, \tau\right) d\tau +$$

$$+ \int_{t-(x/a_1)}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau = J_{2,1}^{(2)}(x, t), \quad J_{2,1}^{(i)}(x, t) \in C^1(\Delta_1 \cup \Delta_2), \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

Условие согласования (7) из теоремы 1 при коэффициентах $\zeta_1, \xi_1, \theta_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ вместо коэффициентов $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma$ становится условием согласования (21) при $i = 1$ из Теоремы 2. Поэтому решение $u \in C^2(\Delta_1 \cup \Delta_2)$, так как функции u_1 и u_2 дважды непрерывно дифференцируемы не только в треуголь-

никах Δ_1 и Δ_2 соответственно, но и на общем отрезке характеристики $x = a_1 t$ ввиду этого условия согласования (21) при $i = 1$.

Для вычисления решения и критерия корректности задачи (13)–(15) в трапеции $\Delta_1 \cup \Delta_3$ мы сводим эту задачу для уравнения (13) с начальными условиями (14) и граничным режимом только при $x = d$ из (15) невырожденной заменой переменных $t = \tilde{t}$, $x = d - \tilde{x}$ относительно функции $\tilde{u}(\tilde{x}, t) = u(d - \tilde{x}, t) = u(x, t)$ к эквивалентной смешанной задаче

$$(\partial_t + a_2 \partial_{\tilde{x}} + b_2)(\partial_t - a_1 \partial_{\tilde{x}} + b_1)\tilde{u}(\tilde{x}, t) = \tilde{f}(\tilde{x}, t), (\tilde{x}, t) \in \tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2, \quad (28)$$

$$\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}), \partial_t \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\psi}(\tilde{x}), \tilde{x} \in [0, d[, \quad (29)$$

$$\tilde{\Gamma}(t)\tilde{u} = [\zeta_2(t)\tilde{u}_{tt} - \xi_2(t)\tilde{u}_{xt} + \theta_2(t)\tilde{u}_{xx} + \alpha_2(t)\tilde{u}_t - \beta_2(t)\tilde{u}_{\tilde{x}} + \gamma_2(t)\tilde{u}]_{\tilde{x}=0} = \mu_2(t), t \in [0, d_2], \quad (30)$$

в трапеции $\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2$ с треугольниками $\tilde{\Delta}_1 = \{(x, t) : x \geq a_1 t_k, x + a_2 t_k \leq d, x \in [0, d]\}$, $\tilde{\Delta}_2 = \{(x, t) : x \leq a_1 t_k, x \in [0, a_1 d_2]\}$, $t \in [d_k, d_{k+1}]$, $k = \overline{1, n}$, потому что производные $u_x(x, t) = -\tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, t)$ и $u_{xx}(x, t) = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}, t)$ Эквивалентность этих смешанных задач во множестве классических решений следует из невырожденности и достаточной гладкости сделанной замены переменных. Находим единственное и устойчивое классическое решение смешанной задачи (28)–(30) в трапеции $\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2$. Это можно сделать в силу соответствующей физико-геометрической интерпретации классических решений, которая аналогична интерпретации, проведенной в третьей главе диссертации [6]. В волновом уравнении (1) два дифференциальных множителя коммутируют. Поэтому можно воспользоваться формулами (11) и (12) из теоремы 1 для полуограниченной струны с правой частью уравнения $\tilde{f}(\tilde{x}, t) = f(d - \tilde{x}, t) = f(x, t)$, начальными данными $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(d - \tilde{x}) = \varphi(x)$, $\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \psi(d - \tilde{x}) = \psi(x)$. Вместо граничных коэффициентов $\zeta(t)$, $\xi(t)$, $\theta(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ и граничного данного $\mu(t)$ использовать граничные коэффициенты $\zeta_2(t)$, $-\xi_2(t)$, $\theta_2(t)$, $\alpha_2(t)$, $-\beta_2(t)$, $\gamma_2(t)$ и данное $\mu_2(t)$, а также взаимно заменяя коэффициенты a_1, b_1 на a_2, b_2 соответственно.

При этом в силу этих же замен (согласно **Теореме 1**) предполагаем, что существует решение $v_2 \in C^2[0, d]$, $v_2(\rho) \neq 0$, $v_2'(\rho) \neq 0$, $\rho \in [0, d]$ уравнения

$$\begin{aligned} & [a_2^2 \zeta_2(\rho / a_2) + a_2 \xi_2(\rho / a_2) + \theta_2(\rho / a_2)]v_2''(\rho) - \\ & - [2a_2 b_2 \zeta_2(\rho / a_2) + b_2 \xi_2(\rho / a_2) - a_2 \alpha_2(\rho / a_2) - \beta_2(\rho / a_2)]v_2'(\rho) + \\ & + [b_2^2 \zeta_2(\rho / a_2) - b_2 \alpha_2(\rho / a_2) + \gamma_2(\rho / a_2)]v_2(\rho) = 0. \end{aligned}$$

Тогда в трапеции $\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2$, в силу указанных выше замен коэффициентов граничного режима и уравнения из формул (11) и (12) **Теоремы 1** соответственно, имеем единственное и устойчивое классическое решение:

$$\tilde{u}_1(\tilde{x}, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \{ a_2 e^{-b_1 t} \tilde{\varphi}(\tilde{x} + a_1 t) + a_1 e^{-b_2 t} \tilde{\varphi}(\tilde{x} - a_2 t) +$$

$$+ \int_{\tilde{x}-a_2t}^{\tilde{x}+a_1t} e^{-B(\tilde{x}-s)-At} [A\tilde{\varphi}(s) + \tilde{\psi}(s)] ds \Big\} + \tilde{F}(\tilde{x}, t), \quad (\tilde{x}, t) \in \tilde{\Delta}_1, \quad (31)$$

$$\tilde{u}_2(\tilde{x}, t) = e^{-b_2t} v_2(a_2t - \tilde{x}) \left\{ \int_0^{\tilde{t}_2(\tilde{x})} \frac{a^2}{v_2^2(a_2s)} \int_0^s \frac{e^{b_2\tau} v_2(a_2\tau) \tilde{\chi}(s, \tau) \tilde{P}(\tau)}{a_2^2 \zeta_2(\tau) + a_2 \xi_2(\tau) + \theta_2(\tau)} d\tau ds + (32)$$

$$+ e^{-b_1t} \tilde{\Phi}(\tilde{x}, t) + \frac{a_2 v_2(0) [b_1 \tilde{\varphi}(0) + \tilde{\psi}(0) - a_1 \tilde{\varphi}'(0)]}{a_1 + a_2} \int_0^{\tilde{t}_2(\tilde{x})} \frac{\tilde{\chi}(s, 0)}{v_2^2(a_2s)} ds \Big\} + \tilde{F}_2(\tilde{x}, t), \quad (\tilde{x}, t) \in \tilde{\Delta}_2,$$

где использованы следующие функции и обозначения:

$$\tilde{F}(\tilde{x}, t) = \frac{e^{-B\tilde{x}-At}}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{\tilde{x}-a_2(t-\tau)}^{\tilde{x}+a_1(t-\tau)} e^{A\tau+Bs} \tilde{f}(|s|, \tau) ds d\tau,$$

$$\tilde{F}_2(\tilde{x}, t) = \frac{e^{-B\tilde{x}-At}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{\tilde{t}_2(\tilde{x})} \int_{\tilde{x}_2(t, \tau)}^{\tilde{x}+a_1(t-\tau)} e^{A\tau+Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau + \int_{\tilde{t}_2(\tilde{x})}^t \int_{\tilde{x}-a_2(t-\tau)}^{\tilde{x}+a_1(t-\tau)} e^{A\tau+Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau \right],$$

$$\tilde{t}_2(\tilde{x}) = t - \frac{\tilde{x}}{a_2}, \quad \tilde{x}_2(t, \tau) = \frac{a_1}{a_2} (a_2t - \tilde{x}) - a_1\tau,$$

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_2 \tilde{\varphi}(\tilde{x} + a_1t) + a_1 e^{-B(a_1t + \tilde{x})} \tilde{\varphi}(0) + \int_0^{\tilde{x}+a_1t} e^{-B(\tilde{x}+a_1t-s)} [A\tilde{\varphi}(s) + \tilde{\psi}(s)] ds \Big\},$$

$$\tilde{P}(t) = \mu_2(t) - \tilde{\Gamma}(t) \left(e^{-b_1t} \tilde{\Phi}(\tilde{x}, t) + \tilde{F}_2(\tilde{x}, t) \right),$$

$$\tilde{\chi}(a, b) = \exp \left\{ -a_2 \int_a^b \tilde{\sigma}(s) ds \right\}, \quad \tilde{\sigma}(t) = \frac{2a_2 b_2 \zeta_2(t) + b_2 \xi_2(t) - a_2 \alpha_2(t) - \beta_2(t)}{a_2^2 \zeta_2(t) + a_2 \xi_2(t) + \theta_2(t)}.$$

В полученных формулах (31) решения $\tilde{u}_1(\tilde{x}, t)$ в $\tilde{\Delta}_1$ и (32) решения $\tilde{u}_2(\tilde{x}, t)$ в $\tilde{\Delta}_2$ возвращаемся к старой переменной x обратной заменой $\tilde{x} = d - x$. В результате в треугольнике Δ_1 получаем классическое решение

$$\hat{u}_1(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 e^{-b_2t} \varphi(x + a_2t) + a_2 e^{-b_1t} \varphi(x - a_1t) + \right. \\ \left. + \int_{d-x-a_2t}^{d-x+a_1t} e^{B(x-d)+Bs-At} [A\varphi(d-s) + \psi(d-s)] ds \Big\} + \\ + \frac{e^{B(x-d)-At}}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{d-x-a_2(t-\tau)}^{d-x+a_1(t-\tau)} e^{A\tau+Bs} f(d-s, \tau) ds d\tau. \quad (33)$$

Это решение \hat{u}_1 совпадает с формулой (21) при $n = k = 1$ решения u_1 в Δ_1 . В этом можно убедиться заменой переменной интегрирования $\rho = d - s$ в (33):

$$\hat{u}_1(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 e^{-b_2 t} \varphi(x + a_2 t) + a_2 e^{-b_1 t} \varphi(x - a_1 t) + \int_{x-a_1 t}^{x+a_2 t} e^{B(x-\rho)-At} [A\varphi(\rho) + \psi(\rho)] ds \right\} + \frac{e^{Bx-At}}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-B\rho} f(\rho, \tau) d\rho d\tau = u_1(x,t), \quad (x,t) \in \Delta_1. \quad (34)$$

В треугольнике Δ_3 из (32) заменой $\tilde{x} = d - x$ находим единственное решение

$$u_3(x,t) = e^{-b_2 t} v_2(a_2 t - d + x) \left\{ \int_0^{t-\frac{d-x}{a_2}} \frac{a_2^2}{v_2^2(a_2 s)} \int_0^s \frac{e^{b_2 \tau} v_2(a_2 \tau) \chi_2(s, \tau) P_3(\tau)}{a_2^2 \zeta_2(\tau) + a_2 \xi_2(\tau) + \theta_2(\tau)} d\tau ds + \frac{a_2 v_2(0) [b_1 \varphi(d) + \psi(d) + a_1 \varphi'(d)]}{a_1 + a_2} \int_0^{t-\frac{d-x}{a_2}} \frac{\chi_2(s, 0)}{v_2^2(a_2 s)} ds \right\} + e^{-b_1 t} \Phi_3(x,t) + F_{2,1}^{(2)}(x,t), \quad (x,t) \in \Delta_3, \quad (35)$$

так как заменой переменной интегрирования $\rho = d - s$ убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tilde{x}, t) &= \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_2 \varphi(x - a_1 t) + a_1 e^{-B(a_1 t + d - x)} \varphi(d) + \int_d^{d-x+a_1 t} e^{-B(d-x+a_1 t-s)} [A\varphi(d-s) + \psi(d-s)] ds \right\} = \Phi_3(x,t), \\ \tilde{F}_2(\tilde{x}, t) &= \frac{e^{-B(d-x)-At}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t-\frac{d-x}{a_2}} \int_{\frac{a_1}{a_2}(x-d)+a_1(t-\tau)}^{d-x+a_1(t-\tau)} e^{A\tau+Bs} f(d-s, \tau) ds d\tau + \int_{t-\frac{d-x}{a_2}}^t \int_{d-x-a_2(t-\tau)}^{d-x+a_1(t-\tau)} e^{A\tau+Bs} f(d-s, \tau) ds d\tau \right] = F_{2,1}^{(2)}(x,t) = \\ &= \frac{e^{Bx-At}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t-\frac{d-x}{a_2}} \int_{x-a_1(t-\tau)}^{d-a_1(t_2^*(x)-\tau)} e^{A\tau-B\rho} f(\rho, \tau) d\rho d\tau + \int_{t-\frac{d-x}{a_2}}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} e^{A\tau-B\rho} f(\rho, \tau) d\rho d\tau \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t) &= \mu_2(t) - \Gamma_2(t) \left(e^{-bt} \Phi_3(x, t) + F_{2,1}^{(2)}(x, t) \right) = P_3(t), \\ \tilde{\sigma}(t) &= \frac{2a_2 b_2 \zeta_2(t) + b_2 \xi_2(t) - a_2 \alpha_2(t) - \beta_2(t)}{a_2^2 \zeta_2(t) + a_2 \xi_2(t) + \theta_2(t)} = \sigma_2(t), \\ \tilde{\chi}(a, b) &= \exp \left\{ -a_2 \int_a^b \tilde{\sigma}(s) ds \right\} = \chi_2(a, b).\end{aligned}$$

Эта формула (35) совпадает с формулой (24) при $n = k = 1$ решения u_3 в Δ_3 .

Для смешанной задачи (28)–(30) на трапеции $\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2$ из теоремы 1 взаимными заменами коэффициентов a_1 и a_2 мы выводим необходимые и достаточные требования гладкости

$$\tilde{f} \in C(\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2), \tilde{\varphi} \in C^2[0, d], \tilde{\psi} \in C^1[0, d], \mu_2 \in C[0, d_2],$$

$$\tilde{J}_1(\tilde{x}, t) \equiv \int_0^t \tilde{f}(\tilde{x} + a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2),$$

$$\begin{aligned}& \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right] \int_0^{(-1)^i \left(t - \frac{\tilde{x}}{a_2} \right)} \tilde{f} \left(\left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right] (\tilde{x} - a_2 t) - a_1 \tau, \tau \right) d\tau + \\ & + \int_{(-1)^i \left(t - \frac{\tilde{x}}{a_2} \right)}^t \tilde{f}(\tilde{x} - a_2(t - \tau), \tau) d\tau \equiv \tilde{J}_{i+1}(\tilde{x}, t) \in C^1(\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2), \quad i = 1, 2. \quad (36)\end{aligned}$$

Заменой $\tilde{x} = d - x$ требования гладкости (36) в трапеции $\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2$ становятся требованиями гладкости (17), (18), (20) при $k = 1$, $p = 2$ в трапеции $\Delta_1 \cup \Delta_3$:

$$f \in C(\Delta_1 \cup \Delta_3), \varphi \in C^2[0, d], \psi \in C^1[0, d], \mu_2 \in C[0, d_2],$$

$$J_{1,1}^{(2)}(x, t) \equiv \int_0^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\Delta_1 \cup \Delta_3),$$

$$\begin{aligned}& \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right] \int_0^{(-1)^i \left(t - \frac{d-x}{a_2} \right)} f \left(d + \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right] (x + a_2 t - d) + a_1 \tau, \tau \right) d\tau + \\ & + \int_{(-1)^i \left(t - \frac{d-x}{a_2} \right)}^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \equiv J_{3,1}^{(i)}(x, t) \in C^1(\Delta_1 \cup \Delta_3), \quad i = 1, 2, \quad (37)\end{aligned}$$

так как по определению этой замены $\tilde{f}(\tilde{x} + a_1(t - \tau), \tau) = f(d - \tilde{x} - a_1(t - \tau), \tau) = f(x - a_1(t - \tau), \tau)$,

$$\tilde{f}(\tilde{x} - a_2(t - \tau), \tau) = f(d - \tilde{x} + a_2(t - \tau), \tau) = f(x + a_2(t - \tau), \tau).$$

Таким образом, мы видим, что требования гладкости (27) и (37) совпадают с требованиями гладкости (17)–(20) при $n = k = 1$ на прямоугольнике Q_1 .

Указанными выше заменами в граничном режиме (3) коэффициентов $\zeta(t), \xi(t), \theta(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ и данного $\mu(t)$ на коэффициенты $\zeta_2(t), -\xi_2(t), \theta_2(t), \alpha_2(t), -\beta_2(t), \gamma_2(t)$ и данное $\mu_2(t)$, а также взаимными заменами в уравнении (1) коэффициентов a_1, b_1 на a_2, b_2 соответственно из условия согласования (7) теоремы 1 в трапеции $\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2$ выводим условие:

$$\tilde{Y} = \zeta_2(0)[\tilde{f}(0,0) + (a_1 - a_2)\tilde{\psi}'(0) + a_1 a_2 \tilde{\varphi}''(0) - (b_1 + b_2)\tilde{\psi}(0) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\tilde{\varphi}'(0) - b_1 b_2 \tilde{\varphi}(0)] - \xi_2(0)\tilde{\psi}'(0) + \theta_2(0)\tilde{\varphi}''(0) + \alpha_2(0)\tilde{\psi}(0) - \beta_2(0)\tilde{\varphi}'(0) + \gamma_2(0)\tilde{\varphi}(0) = \mu_2(0).$$

После обратной замены $\tilde{x} = d - x$ это необходимое и достаточное условие согласования, которое обеспечивает дважды непрерывную дифференцируемость функций \tilde{u}_1 и \tilde{u}_2 из (31) и (32) на отрезке характеристики $\tilde{x} = a_2 t$ в трапеции $\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2$, переходит в аналогичное необходимое и достаточное условие согласования (21) при $i = 2$ на отрезке характеристики $x + a_2 t = d$ в трапеции $\Delta_1 \cup \Delta_3$.

Из совпадения в (34) функций $\hat{u}_1(x, t) = u_1(x, t)$ на Δ_1 вытекает дважды непрерывная дифференцируемость функций u_1, u_2, u_3 из (22)–(24) при $n = k = 1$ на прямоугольнике $G_1 = Q_1$ в силу дважды непрерывной дифференцируемости функций u_1, u_2, u_3 и на общих отрезках характеристик $x = a_1 t, x + a_2 t = d$ благодаря двум условиям согласования (21) из **Теоремы 2**.

Итак, для смешанной задачи (13)–(15) в прямоугольнике Q_1 мы получили единственное и устойчивое классическое решение $u \in C^2(Q_1)$, которое выражается формулами (22)–(24) при $n = k = 1$, необходимые и достаточные требования гладкости (17)–(20) и условия согласования (21) из **Теоремы 2**.

2. На следующем шаге выведем также явные формулы единственного и устойчивого классического решения и критерий корректности смешанной задачи (13)–(15) во втором прямоугольнике $Q_2 = [0, d] \times [0, d_3]$.

Теперь мы решаем и изучаем корректность смешанной задачи для уравнения (13) с начальными условиями $u|_{t=d_2} = \varphi_2(x), \partial_t u|_{t=d_2} = \psi_2(x), x \in [0, d]$ и граничными режимами (15) в прямоугольнике $G_2 = [0, d] \times [d_2, d_3]$. Мы сводим эту задачу в прямоугольнике G_2 невырожденной заменой переменных $x = \tilde{x}, t = \tilde{t} + d_2$ к эквивалентной смешанной задаче для функции $\tilde{u}(x, \tilde{t}) = u(x, \tilde{t} + d_2) = u(x, t)$ в прямоугольнике $\tilde{G}_1 = [0, d] \times [0, d_2]$:

$$(\partial_{\tilde{t}} - a_2 \partial_x + b_2)(\partial_{\tilde{t}} + a_1 \partial_x + b_1)\tilde{u}(x, \tilde{t}) = \tilde{f}(x, \tilde{t}), (x, \tilde{t}) \in \tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2, \quad (38)$$

$$\tilde{u}|_{\tilde{t}=0} = \varphi_2(x), \partial_x \tilde{u}|_{\tilde{t}=0} = \psi_2(x), \tilde{x} \in [0, d], \quad (39)$$

$$\tilde{\Gamma}_i \tilde{u} \equiv \left[\tilde{\zeta}_i(\tilde{t})\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} + \tilde{\xi}_i(\tilde{t})\tilde{u}_{x\tilde{t}} + \tilde{\theta}_i(\tilde{t})\tilde{u}_{xx} + \tilde{\alpha}_i(\tilde{t})\tilde{u}_i + \tilde{\beta}_i(\tilde{t})\tilde{u}_x + \tilde{\gamma}_i(\tilde{t})\tilde{u} \right]_{x=\hat{d}_i} = \tilde{\mu}_2(\tilde{t}), \quad (40)$$

$$t \in [0, d_2], \hat{d}_i = d(i - 1), i = 1, 2,$$

для исходных данных $\tilde{f}(x, \tilde{t}) = f(x, \tilde{t} + d_2) = f(x, t), \tilde{\mu}_i(\tilde{t}) = \mu_i(\tilde{t} + d_2) = \mu_i(t)$ и коэффициентов $\tilde{\zeta}_i(\tilde{t}) = \zeta_i(\tilde{t} + d_2) = \zeta_i(t), \tilde{\xi}_i(\tilde{t}) = \xi_i(\tilde{t} + d_2) = \xi_i(t), \tilde{\theta}_i(\tilde{t}) = \theta_i(\tilde{t} + d_2) = \theta_i(t), \tilde{\alpha}_i(\tilde{t}) = \alpha_i(\tilde{t} + d_2) = \alpha_i(t), \tilde{\beta}_i(\tilde{t}) = \beta_i(\tilde{t} + d_2) = \beta_i(t),$

$\tilde{\gamma}_i(\tilde{t}) = \gamma_i(\tilde{t} + d_2) = \gamma_i(t)$, $i = 1, 2$. По предположениям теоремы 2 обыкновенные дифференциальные уравнения вида (16) с этими коэффициентами граничных режимов (40) имеют нетривиальные решения:

$$\tilde{v}_i(a_i \tilde{t}) = v_i(a_i(\tilde{t} + d_2)) = v_i(a_i t), \quad i = 1, 2. \quad (41)$$

Исходя из того что для прямоугольника $G_1 = Q_1$ мы уже доказали существование единственного и устойчивого классического решения смешанной задачи (13)–(15), то в прямоугольнике \tilde{G}_1 единственное и устойчивое классическое решение смешанной задачи (38)–(40) выражается формулами (22)–(24) при $n = k = 1$ и с начальными данными φ_2, ψ_2 соответственно вместо начальных данных φ, ψ :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_4(x, \tilde{t}) = & \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 e^{-b_2 \tilde{t}} \varphi_2(x + a_2 \tilde{t}) + a_2 e^{-b_1 \tilde{t}} \varphi_2(x - a_1 \tilde{t}) + \right. \\ & \left. + \int_{x - a_1 \tilde{t}}^{x + a_2 \tilde{t}} e^{B(x-s) - A\tilde{t}} [A\varphi_2(s) + \psi_2(s)] ds \right\} + \tilde{F}(x, \tilde{t}) \in \tilde{\Delta}_4, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_5(x, \tilde{t}) = & e^{-b_1 \tilde{t}} \tilde{v}_1(a_1 \tilde{t} - x) \left\{ \int_0^{\tilde{t} - x/a_1} \frac{a_1^2}{\tilde{v}_1^2(a_1 \delta)} \int_0^\delta \frac{e^{b_1 \rho} \tilde{v}_1(a_1 \rho) \tilde{\chi}_1(\delta, \rho) \tilde{P}_2(\rho)}{a_1^2 \tilde{\zeta}_1(\rho) - a_1 \tilde{\xi}_1(\rho) + \tilde{\theta}_1(\rho)} d\rho d\delta + \right. \\ & \left. + \frac{a_1 \tilde{v}_1(0) [b_2 \varphi_2(0) + \psi_2(0) - a_2 \varphi_2'(0)]}{a_1 + a_2} \int_0^{\tilde{t} - x/a_1} \frac{\tilde{\chi}_1(\delta, 0)}{\tilde{v}_1^2(a_1 \delta)} d\delta \right\} + \\ & + e^{-b_2 \tilde{t}} \tilde{\Phi}_2(x, \tilde{t}) + \tilde{F}_{2,1}^{(1)}(x, \tilde{t}), \quad (x, \tilde{t}) \in \tilde{\Delta}_5, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_6(x, \tilde{t}) = & e^{-b_2 \tilde{t}} \tilde{v}_2(a_2 \tilde{t} - d + x) \left\{ \int_0^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{a_2^2}{\tilde{v}_2^2(a_2 \delta)} \int_0^\delta \frac{e^{b_2 \rho} \tilde{v}_2(a_2 \rho) \tilde{\chi}_2(\delta, \rho) \tilde{P}_3(\rho)}{a_2^2 \tilde{\zeta}_2(\rho) + a_2 \tilde{\xi}_2(\rho) + \tilde{\theta}_2(\rho)} d\rho d\delta + \right. \\ & \left. + \frac{a_2 \tilde{v}_2(0) [b_1 \varphi_2(d) + \psi_2(d) - a_1 \varphi_2'(d)]}{a_1 + a_2} \int_0^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{\tilde{\chi}_2(\delta, 0)}{\tilde{v}_2^2(a_2 \delta)} d\delta \right\} + \\ & + e^{-b_1 \tilde{t}} \tilde{\Phi}_3(x, \tilde{t}) + \tilde{F}_{2,1}^{(2)}(x, \tilde{t}), \quad (x, \tilde{t}) \in \tilde{\Delta}_6. \end{aligned} \quad (44)$$

Согласно **Теореме 2** нами используются следующие функции, которые обратной заменой $\tilde{t} = t - d_2$ и соответствующими указанными ниже преобразованиями приводятся к нужным формулам. Заменой переменной интегрирования $\rho = \tau + d_2$ в силу равенства $\tilde{t} - \tau = t - \rho$ находим следующие частные решения неоднородного уравнения (13) из формул (42)–(44):

$$\tilde{F}(x, \tilde{t}) = \frac{e^{Bx - A\tilde{t}}}{a_1 + a_2} \int_0^{\tilde{t}} \int_{x - a_1(\tilde{t} - \tau)}^{x + a_2(\tilde{t} - \tau)} e^{A\tau - Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau = \frac{e^{Bx - A\tilde{t}}}{a_1 + a_2} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_0^{\tilde{t}} \int_{x-a_1(\tilde{t}-\tau)}^{x+a_2(\tilde{t}-\tau)} e^{A\tau-Bs} f(s, \tau + d_2) ds d\tau = \frac{e^{Bx-A\tilde{t}}}{a_1 + a_2} \int_{d_2}^t \int_{x-a_1(t-\rho)}^{x+a_2(t-\rho)} e^{A\rho-Bs} f(s, \rho) ds d\rho, \\
 \tilde{F}_{2,1}^{(1)}(x, \tilde{t}) &= \frac{e^{Bx-A\tilde{t}}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{\tilde{t}-\frac{x}{a_1}} \int_{a_2\left[\tilde{t}-\frac{x}{a_1}-\tau\right]}^{x+a_2(\tilde{t}-\tau)} e^{A\tau-Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau + \int_{\tilde{t}-\frac{x}{a_1}}^{\tilde{t}} \int_{x-a_1(\tilde{t}-\tau)}^{x+a_2(\tilde{t}-\tau)} e^{A\tau-Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau \right] = \\
 &= \frac{e^{Bx-A\tilde{t}}}{a_1 + a_2} \left[\int_{d_2}^{\tilde{t}-\frac{x}{a_1}} \int_{a_2\left[\tilde{t}-\frac{x}{a_1}-\rho\right]}^{x+a_2(t-\rho)} e^{A\rho-Bs} f(s, \rho) ds d\rho + \int_{\tilde{t}-\frac{x}{a_1}}^t \int_{x-a_1(t-\rho)}^{x+a_2(t-\rho)} e^{A\rho-Bs} f(s, \rho) ds d\rho \right] = F_{2,2}^{(1)}(x, t), \\
 \tilde{F}_{2,1}^{(2)}(x, \tilde{t}) &= \frac{e^{Bx-A\tilde{t}}}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{\tilde{t}-\frac{d-x}{a_2}} \int_{x-a_1(\tilde{t}-\tau)}^{d-a_1\left[\tilde{t}-\frac{d-x}{a_2}-\tau\right]} e^{A\tau-Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau + \right. \\
 &+ \left. \int_{\tilde{t}-\frac{d-x}{a_2}}^{\tilde{t}} \int_{x-a_1(\tilde{t}-\tau)}^{x+a_2(\tilde{t}-\tau)} e^{A\tau-Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau \right] = \frac{e^{Bx-A\tilde{t}}}{a_1 + a_2} \left[\int_{d_2}^{\tilde{t}-\frac{d-x}{a_2}} \int_{x-a_1(t-\rho)}^{d-\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{a_1+1}{a_2}\right)d-\frac{a_1}{a_2}x-a_1(t-\rho)} e^{A\rho-Bs} f(s, \rho) ds d\rho + \right. \\
 &+ \left. \int_{\tilde{t}-\frac{d-x}{a_2}}^t \int_{x-a_1(t-\rho)}^{x+a_2(t-\rho)} e^{A\rho-Bs} f(s, \rho) ds d\rho \right] = F_{2,2}^{(2)}(x, t). \tag{45}
 \end{aligned}$$

Только обратной заменой переменной $\tilde{t} = t - d_2 = t_2$ находятся функции:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}_2(x, \tilde{t}) &= \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 \varphi_2(x + a_2 \tilde{t}) + a_2 e^{B(x+a_2 \tilde{t})} \varphi_2(0) + \right. \\
 &+ \left. \int_0^{x+a_2 \tilde{t}} e^{B(x+a_2 \tilde{t}-s)} [A\varphi_2(s) + \psi_2(s)] ds \right\} = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 \varphi_2(x + a_2 t_2) + a_2 e^{B(x+a_2 t_2)} \varphi_2(0) + \right. \\
 &+ \left. \int_0^{x+a_2 t_2} e^{B(x+a_2 t_2-s)} [A\varphi_2(s) + \psi_2(s)] ds \right\} = \Phi_5(x, t), \\
 \tilde{\Phi}_3(x, \tilde{t}) &= \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_2 \varphi_2(x - a_1 \tilde{t}) + a_1 e^{B(x-a_1 \tilde{t})} \varphi_2(d) + \right. \\
 &+ \left. \int_{x-a_1 \tilde{t}}^d e^{B(x-a_1 \tilde{t}-s)} [A\varphi_2(s) + \psi_2(s)] ds \right\} = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_2 \varphi_2(x - a_1 t_2) + a_1 e^{B(x-a_1 t_2)} \varphi_2(d) + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{x-a_1 t_2}^d e^{B(x-a_1 t_2-s)} [A\varphi_2(s) + \psi_2(s)] ds \Big\} = \Phi_6(x, t). \quad (46)$$

Отсюда следует, что в формулах (43) и (44) при $k = 1$ верны равенства

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2(\tilde{t}) &= \tilde{\mu}_1(\tilde{t}) - \tilde{\Gamma}_1(\tilde{t}) \left(e^{-b_2 \tilde{t}} \tilde{\Phi}_2(x, \tilde{t}) + \tilde{F}_{2,1}^{(1)}(x, \tilde{t}) \right) = \\ &= \mu_1(t) - \Gamma_1(t) \left(e^{-b_2 t_2} \Phi_5(x, t) + F_{2,2}^{(1)}(x, t) \right) = P_5(t), \quad t \in [d_2, d_3], \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_3(\tilde{t}) &= \tilde{\mu}_2(\tilde{t}) - \tilde{\Gamma}_2(\tilde{t}) \left(e^{-b_1 \tilde{t}} \tilde{\Phi}_3(x, \tilde{t}) + \tilde{F}_{2,1}^{(2)}(x, \tilde{t}) \right) = \\ &= \mu_2(t) - \Gamma_2(t) \left(e^{-b_1 t_2} \Phi_6(x, t) + F_{2,2}^{(2)}(x, t) \right) = P_6(t), \quad t \in [d_2, d_3], \end{aligned} \quad (48)$$

так как $\tilde{\mu}_i(\tilde{t}) = \mu_i(\tilde{t} + d_2) = \mu_i(t)$, $\tilde{\Gamma}_i(\tilde{t}) = \Gamma_i(\tilde{t} + d_2) = \Gamma_i(t)$, $\tilde{t} \in [0, d_2]$, $i = 1, 2$, в граничном режиме (40).

Ввиду проведенной в задаче (13)–(15) на $G_2 = [0, d] \times [d_2, d_3]$ замены переменной $t = \tilde{t} + d_2$ для любых $t^{(1)} = \tilde{t}^{(1)} + d_2$, $t^{(2)} = \tilde{t}^{(2)} + d_2 \in [d_2, d_3]$ верны равенства $\tilde{\chi}_i(\tilde{t}^{(1)}, \tilde{t}^{(2)}) = \tilde{\chi}_i(\tilde{t}^{(1)} + d_2, \tilde{t}^{(2)} + d_2) = \chi_i(t^{(1)}, t^{(2)})$, $i = 1, 2$, потому что заменой переменной интегрирования $\varepsilon = s + d_2$ имеем тождества

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i(\tilde{t}) &= \frac{2a_i b_i \zeta_i(\tilde{t} + d_2) + (-1)^i b_i \xi_i(\tilde{t} + d_2) - a_i \alpha_i(\tilde{t} + d_2) - (-1)^i \beta_i(\tilde{t} + d_2)}{a_i^2 \zeta_i(\tilde{t} + d_2) + (-1)^i a_i \xi_i(\tilde{t} + d_2) + \theta_i(\tilde{t} + d_2)} = \sigma_i(t), \\ \tilde{\chi}_i(\tilde{t}^{(1)}, \tilde{t}^{(2)}) &= \exp \left\{ -a_i \int_{\tilde{t}^{(1)}}^{\tilde{t}^{(2)}} \tilde{\sigma}_i(s) ds \right\} = \exp \left\{ -a_i \int_{t^{(1)}-d_2}^{t^{(2)}-d_2} \sigma_i(s + d_2) ds \right\} = \\ &= \exp \left\{ -a_i \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} \sigma_i(\varepsilon) d\varepsilon \right\} = \chi_i(t^{(1)}, t^{(2)}), \quad \forall t^{(1)}, t^{(2)} \in [d_2, d_3], \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (49)$$

Поэтому, благодаря равенствам (41), (47)–(49) и заменам переменных интегрирования $\tau = \rho + d_2$, $s = \delta + d_2$, выполняются следующие соотношения для первых слагаемых решений (43) и (44):

$$\begin{aligned} e^{-b_1 \tilde{t}} \tilde{v}_1(a_1 \tilde{t} - x) &\int_0^{\tilde{t}-x/a_1} \frac{a_1^2}{\tilde{v}_1^2(a_1 \delta)} \int_0^\delta \frac{e^{b_1 \rho} \tilde{v}_1(a_1 \rho) \tilde{\chi}_1(\delta, \rho) \tilde{P}_2(\rho)}{a_1^2 \zeta_1(\rho) - a_1 \xi_1(\rho) + \theta_1(\rho)} d\rho d\delta = e^{-b_1 \tilde{t}} v_1(a_1(\tilde{t} + d_2) - x) \times \\ &\times \int_0^{\tilde{t}-x/a_1} \frac{a_1^2}{v_1^2(a_1(\delta + d_2))} \int_0^\delta \frac{e^{b_1 \rho} v_1(a_1(\rho + d_2)) \chi_1(\delta + d_2, \rho + d_2) P_5(\rho + d_2)}{a_1^2 \zeta_1(\rho + d_2) - a_1 \xi_1(\rho + d_2) + \theta_1(\rho + d_2)} d\rho d\delta = \\ &= e^{-b_1 t} v_1(a_1 t - x) \int_0^{\tilde{t}-x/a_1} \frac{a_1^2}{v_1^2(a_1(\delta + d_2))} \int_{d_2}^{\delta+d_2} \frac{e^{b_1 \tau} v_1(a_1 \tau) \chi_1(\delta + d_2, \tau) P_5(\tau)}{a_1^2 \zeta_1(\tau) - a_1 \xi_1(\tau) + \theta_1(\tau)} d\tau d\delta = \\ &= e^{-b_1 t} v_1(a_1 t - x) \int_{d_2}^{t-x/a_1} \frac{a_1^2}{v_1^2(a_1 s)} \int_{d_2}^s \frac{e^{b_1 \tau} v_1(a_1 \tau) \chi_1(s, \tau) P_5(\tau)}{a_1^2 \zeta_1(\tau) - a_1 \xi_1(\tau) + \theta_1(\tau)} d\tau ds, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
 & e^{-b_2 \tilde{t}} \tilde{v}_2(a_2 \tilde{t} - d + x) \int_0^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{a_2^2}{\tilde{v}_1^2(a_1 \delta)} \int_0^\delta \frac{e^{b_2 \rho} \tilde{v}_2(a_1 \rho) \tilde{\chi}_2(\delta, \rho) \tilde{P}_3(\rho)}{a_2^2 \tilde{\zeta}_2(\rho) + a_2 \tilde{\xi}_2(\rho) + \tilde{\theta}_2(\rho)} d\rho d\delta = \\
 & = e^{-b_2 \tilde{t}} v_2(a_2(\tilde{t} + d_2) - d + x) \times \\
 & \times \int_0^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{a_2^2}{v_2^2(a_2(\delta + d_2))} \int_0^\delta \frac{e^{b_2 \rho} v_2(a_2(\rho + d_2)) \chi_2(\delta + d_2, \rho + d_2) P_6(\rho + d_2)}{a_2^2 \zeta_2(\rho + d_2) + a_2 \xi_2(\rho + d_2) + \theta_2(\rho + d_2)} d\rho d\delta = \\
 & = e^{-b_2 t} v_2(a_2 t - d + x) \int_0^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{a_2^2}{v_2^2(a_2(\delta + d_2))} \int_{d_2}^{\delta + d_2} \frac{e^{b_2 \tau} v_2(a_2 \tau) \chi_2(\delta + d_2, \tau) P_6(\tau)}{a_2^2 \zeta_2(\tau) + a_2 \xi_2(\tau) + \theta_2(\tau)} d\tau d\delta = \\
 & = e^{-b_2 t} v_2(a_2 t - d + x) \int_{d_2}^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{a_2^2}{v_2^2(a_2 s)} \int_{d_2}^s \frac{e^{b_2 \tau} v_2(a_2 \tau) \chi_2(s, \tau) P_6(\tau)}{a_2^2 \zeta_2(\tau) + a_2 \xi_2(\tau) + \theta_2(\tau)} d\tau ds, \quad (51)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_1 \tilde{v}_1(0) [b_2 \varphi_2(0) + \psi_2(0) - a_2 \varphi_2'(0)]}{a_1 + a_2} \int_0^{\tilde{t} - x/a_1} \frac{\tilde{\chi}_1(s, 0)}{\tilde{v}_1^2(a_1 s)} ds = \\
 & = \frac{a_1 v_1(a_1 d_2) [b_2 \varphi_2(0) + \psi_2(0) - a_2 \varphi_2'(0)]}{a_1 + a_2} \int_0^{\tilde{t} - x/a_1} \frac{\chi_1(s + d_2, d_2)}{v_1^2(a_1(s + d_2))} ds = \\
 & = \frac{a_1 v_1(a_1 d_2) [b_2 \varphi_2(0) + \psi_2(0) - a_2 \varphi_2'(0)]}{a_1 + a_2} \int_{d_2}^{\tilde{t} - x/a_1} \frac{\chi_1(\delta, d_2)}{v_1^2(a_1 \delta)} d\delta, \quad (52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_2 \tilde{v}_2(0) [b_1 \varphi_2(d) + \psi_2(d) - a_1 \varphi_2'(d)]}{a_1 + a_2} \int_0^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{\tilde{\chi}_2(s, 0)}{\tilde{v}_2^2(a_2 s)} ds = \\
 & = \frac{a_2 v_2(a_2 d_2) [b_1 \varphi_2(d) + \psi_2(d) - a_1 \varphi_2'(d)]}{a_1 + a_2} \int_0^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{\chi_2(s + d_2, d_2)}{v_2^2(a_2(s + d_2))} ds = \\
 & = \frac{a_2 v_2(a_2 d_2) [b_1 \varphi_2(d) + \psi_2(d) - a_1 \varphi_2'(d)]}{a_1 + a_2} \int_{d_2}^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{\chi_2(\delta, d_2)}{v_2^2(a_2 \delta)} d\delta. \quad (53)
 \end{aligned}$$

Таким образом, на основании равенств (45)–(53) мы заключаем, что обратная замена $\tilde{t} = t - d_2$ переводит функции (42)–(44) в функции (22)–(24) при $k = 2$ вида u_4 , u_5 , u_6 искомой смешанной задачи (13)–(15) соответственно в треугольниках Δ_4 , Δ_5 , Δ_6 .

Критерий гладкости задачи (38)–(40) на \tilde{G}_1 – условия (17)–(20) при $k = 1$:

$$\tilde{f} \in C(\tilde{G}_1), \varphi_2 \in C^2[0, d], \psi_2 \in C^1[0, d], \tilde{\mu}_i \in C[0, d_2], i = 1, 2,$$

$$\tilde{J}_{1,1}^{(p)}(x, \tilde{t}) \equiv \int_0^{\tilde{t}} \tilde{f}(x - (-1)^p a_{p-i}(\tilde{t} - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\tilde{G}_1), p = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{2,1}^{(i)}(x, \tilde{t}) \equiv & \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right]^{(-1)^i \left(\tilde{t} - \frac{x}{a_1} \right)} \int_0^{(-1)^i \left(\tilde{t} - \frac{x}{a_1} \right)} \tilde{f} \left(\left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right] (x - a_1 \tilde{t}) - a_2 \tau, \tau \right) d\tau + \\ & + \int_{(-1)^i \left(\tilde{t} - \frac{x}{a_1} \right)}^{\tilde{t}} \tilde{f}(x - a_1(\tilde{t} - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\tilde{\Delta}_4 \cup \tilde{\Delta}_5), i = 1, 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{3,1}^{(i)}(x, \tilde{t}) \equiv & \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right]^{(-1)^i \left(\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2} \right)} \int_0^{(-1)^i \left(\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2} \right)} \tilde{f} \left(d + \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right] (x + a_2 \tilde{t} - d) + \right. \\ & \left. + a_1 \tau, \tau \right) d\tau + \int_{(-1)^i \left(\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2} \right)}^{\tilde{t}} \tilde{f}(x + a_2(\tilde{t} - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\tilde{\Delta}_4 \cup \tilde{\Delta}_6), i = 1, 2. \end{aligned}$$

Эти требования гладкости обратной заменой $\tilde{t} = t - d_2$ и заменой переменной интегрирования $\rho = \tau + d_2$ сводятся соответственно к требованиям:

$$f \in C(G_2), \varphi_2 \in C^2[0, d], \psi_2 \in C^1[0, d], \mu_i \in C[d_2, d_3], i = 1, 2,$$

$$\int_{d_2}^t f(x - (-1)^p a_{3-p}(t - \rho), \rho) d\rho \equiv J_{1,2}^{(p)}(x, t) \in C^1(G_2), p = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} & \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right]^{(-1)^i \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + (2-i)2d_2} \int_{d_2}^{(-1)^i \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + (2-i)2d_2} f \left(\left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right] (x - a_1 t_{(2-i)2}) - \right. \\ & \left. - a_2 \rho_{(2-i)2}, \rho \right) d\rho + \int_{(-1)^i \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + (2-i)2d_2}^t f(x - a_1(t - \rho), \rho) d\rho \equiv J_{2,1}^{(i)}(x, t) \in C^1(\Delta_4 \cup \Delta_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right]^{(-1)^i \left(t - \frac{d-x}{a_2} \right) + (2-i)2d_2} \int_{d_k}^{(-1)^i \left(t - \frac{d-x}{a_2} \right) + (2-i)2d_2} f \left(d + \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right] (x + a_2 t_{(2-i)2} - d) + \right. \\ & \left. + a_1 \rho_{(2-i)2}, \rho \right) d\rho + \int_{(-1)^i \left(t - \frac{d-x}{a_2} \right) + (2-i)2d_2}^t f(x + a_2(t - \rho), \rho) d\rho \equiv J_{3,1}^{(i)}(x, t) \in C^1(\Delta_4 \cup \Delta_6), \end{aligned}$$

где $i = 1, 2$ и $\rho_m = \rho - d_m$. Эти требования гладкости совпадают с требованиями гладкости (17)–(20) при $k = 2$, которые обеспечивают дважды непрерывную дифференцируемость единственного и устойчивого решения u_4, u_5, u_6 соответственно в треугольниках $\Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ прямоугольника G_2 . Действительно, эти решения выражаются через значения единственного классического решения $u \in C^2(Q_1)$ и его первой частной производной по t при $t = d_2$ и, следовательно, промежуточные начальные данные $\varphi_2(x) \in C^2[0, d]$, $\psi_2(x) \in C^1[0, d]$. Поэтому в силу этой гладкости новых начальных данных вытекает указанная выше дважды непрерывная дифференцируемость функций u_4, u_5, u_6 на треугольниках $\Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ из G_2 .

Условиями согласования (21) смешанной задачи (38)–(40) для решения $\tilde{u}(x, \tilde{t}) = u(x, \tilde{t} + d_2) = u(x, t)$ и начальных данных $\varphi = \varphi_2$, $\psi = \psi_2$ являются

$$\begin{aligned} & \tilde{\zeta}_i(0)[\tilde{f}(\hat{d}_i, 0) + (-1)^i(a_i - a_{3-i})\psi'(\hat{d}_i) + a_1 a_2 \varphi''(\hat{d}_i) - (b_i + b_{3-i})\psi(\hat{d}_i) - \\ & - (-1)^i(a_{3-i} b_i - a_i b_{3-i})\varphi'(\hat{d}_i) - b_i b_{3-i} \varphi(\hat{d}_i)] + \tilde{\xi}_i(0)\psi'(\hat{d}_i) + \tilde{\theta}_i(0)\varphi''(\hat{d}_i) + \\ & + \tilde{\alpha}_i(0)\psi(\hat{d}_i) + \tilde{\beta}_i(0)\varphi'(\hat{d}_i) + \tilde{\gamma}_i(0)\varphi(\hat{d}_i) = \tilde{\mu}_i(0), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Обратной заменой $\tilde{t} = t - d_2$ отсюда имеем условия согласования при $t = d_2$:

$$\begin{aligned} & \zeta_i(d_2)[f(\hat{d}_i, d_2) + (-1)^i(a_i - a_{3-i})\psi'(\hat{d}_i) + a_1 a_2 \varphi''(\hat{d}_i) - (b_i + b_{3-i})\psi(\hat{d}_i) - \\ & - (-1)^i(a_{3-i} b_i - a_i b_{3-i})\varphi'(\hat{d}_i) - b_i b_{3-i} \varphi(\hat{d}_i)] + \xi_i(d_2)\psi'(\hat{d}_i) + \theta_i(d_2)\varphi''(\hat{d}_i) + \\ & + \alpha_i(d_2)\psi(\hat{d}_i) + \beta_i(d_2)\varphi'(\hat{d}_i) + \gamma_i(d_2)\varphi(\hat{d}_i) = \mu_i(d_2), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (54)$$

В предыдущем пункте 1 нами доказано существование единственного и устойчивого классического решения $u \in C^2(G_2)$ смешанной задачи (13)–(15) на G_2 . Из определения классического решения $u \in C^2(G_2)$ и постановки этой смешанной задачи на G_2 так же, как перед формулировкой **Теоремы 2**, из граничного режима (15) выводится необходимость условий согласования вида (21) при всех $t \in [0, d_2]$ и, в частности, условия согласования (54) при $t = d_2$. Условия согласования (54) очевидно являются и достаточными для дважды непрерывной дифференцируемости функций u_4, u_5, u_6 на общих отрезках характеристик $x = a_1 t_2, x + a_2 t_2 = d$ треугольников $\Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$. В итоге приходим к единственному и устойчивому классическому решению $u \in C^2(G_2)$ смешанной задачи (13)–(15) в G_2 , которое выражается функциями (22)–(24) при $k = 2$ с критерием корректности (17)–(21) при $k = 2$.

По построению на общей стороне $t = d_2$ прямоугольников G_1 и G_2 для $x \in [ja_1 d_2, (a_1 + ja_2)d_2]$ справедливы равенства

$$u_4(x, t)|_{t=d_2} = \varphi_2(x) = u_{2+j}(x, t)|_{t=d_2}, \quad \partial_i u_4(x, t)|_{t=d_2} = \psi_2(x) = \partial_i u_{2+j}(x, t)|_{t=d_2}, \\ j = 0, 1.$$

Дифференцируя эти равенства нужное число раз по x и t , применяем уравнение (13) и эти же начальные условия и находим следующие значения частных производных на их общей стороне $t = d_2$:

$$\begin{aligned}\partial_x u_4(x, t)|_{t=d_2} &= \varphi'_2(x) = \partial_x u_{2+j}(x, t)|_{t=d_2}, \\ \partial_{tt} u_4(x, t)|_{t=d_2} &= f(x, d_2) + (a_2 - a_1)\varphi'_2(x) + a_1 a_2 \varphi''_2(x) - (b_1 + b_2)\psi_2(x) + \\ &+ (a_2 b_1 - a_1 b_2)\varphi'_2(x) - b_1 b_2 \varphi_2(x) = \partial_{tt} u_{2+j}(x, t)|_{t=d_2}, \\ \partial_{xt} u_4(x, t)|_{t=d_2} &= \psi'_2(x) = \partial_{xt} u_{2+j}(x, t)|_{t=d_2}, \\ \partial_{xx} u_4(x, t)|_{t=d_2} &= \varphi''_2(x) = \partial_{xx} u_{2+j}(x, t)|_{t=d_2}, \quad x \in [ja_1 d_2, (a_1 + ja_2)d_2], \quad j = 0, 1,\end{aligned}$$

которые подтверждают дважды непрерывную дифференцируемость решений (22)–(24) при $k = 1, 2$ задачи (13)–(15) на стыке $t = d_2$ множеств G_1 и G_2 .

Итак, мы доказали существование единственного классического решения $u \in C^2(Q_2)$ смешанной задачи (13)–(15) на Q_2 , выражающегося формулами (22)–(24) при $k = 1, 2$ с критерием корректности (17)–(21) при $k = 1, 2$.

3. На данном шаге математической индукции по n мы предполагаем, что рекуррентные формулы (22)–(24) единственного и устойчивого классического решения $u \in C^2([0, d] \times [0, d_{n+1}])$ и критерий корректности смешанной задачи (13)–(15) на прямоугольнике Q_n верны, и покажем существование единственного и устойчивого классического решения $u \in C^2([0, d] \times [0, d_{n+2}])$, которое выражается формулами (22)–(24) при $k = \overline{1, n+1}$, и критерий корректности этой задачи на прямоугольнике Q_{n+1} .

В G_{n+1} смешанная задача для уравнения (13) с начальными условиями

$$u|_{t=d_{n+1}} = \varphi_{n+1}(x), \quad \partial_t u|_{t=d_{n+1}} = \psi_{n+1}(x), \quad x \in [0, d].$$

и граничными режимами (15) при $t \in [d_{n+1}, d_{n+2}]$ заменой $t = \tilde{t} + d_2$ сводится в $\tilde{G}_n = [0, d] \times [d_n, d_{n+1}]$ для функции $\tilde{u} = \tilde{u}(x, \tilde{t}) = u(x, \tilde{t} + d_2) = u(x, t)$ к задаче

$$(\partial_{\tilde{t}} - a_2 \partial_x + b_2)(\partial_{\tilde{t}} + a_1 \partial_x + b_1)\tilde{u}(x, \tilde{t}) = \tilde{f}(x, \tilde{t}), \quad (x, \tilde{t}) \in \tilde{G}_n \quad (55)$$

при начальных условиях

$$\tilde{u}|_{\tilde{t}=d_{n+1}} = \varphi_{n+1}(x), \quad \partial_{\tilde{t}} \tilde{u}|_{\tilde{t}=d_{n+1}} = \psi_{n+1}(x), \quad x \in [0, d] \quad (56)$$

и зависящих от времени $\tilde{t} \in [d_n, d_{n+1}]$ граничных условиях

$$\left[\tilde{\zeta}_i(\tilde{t})\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{\xi}_i(\tilde{t})\tilde{u}_{x_i} + \tilde{\theta}_i(\tilde{t})\tilde{u}_{xx} + \tilde{\alpha}_i(\tilde{t})\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{\beta}_i(\tilde{t})\tilde{u}_{x_i} + \tilde{\gamma}_i(\tilde{t})\tilde{u} \right] \Big|_{x=d_i} = \tilde{\mu}_i(\tilde{t}), \quad i = 1, 2, \quad (57)$$

где функции \tilde{f} , $\tilde{\zeta}_i$, $\tilde{\xi}_i$, $\tilde{\theta}_i$, $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_i$, $\tilde{\gamma}_i$, $\tilde{\mu}_i$ имеют такой же вид, как в задаче (38)–(40). По предположению математической индукции ее единственное и устойчивое

классическое решение $\tilde{u} \in C^2(\tilde{G}_n)$ выражается формулами (22)–(24) при $k = n$ и начальных данных φ_{n+1} , ψ_{n+1} соответственно вместо φ_n , ψ_n :

$$\tilde{u}_{3n-2}(x, \tilde{t}) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_1 e^{-b_2 \tilde{t}_n} \varphi_{n+1}(x + a_2 \tilde{t}_n) + a_2 e^{-b_1 \tilde{t}_n} \varphi_{n+1}(x - a_1 \tilde{t}_n) + \right.$$

$$+ \int_{x-a_1\tilde{t}_n}^{x+a_2\tilde{t}_n} e^{B(x-s)-A\tilde{t}_n} [A\varphi_{n+1}(s) + \psi_{n+1}(s)] ds \left\} + \frac{e^{Bx-A\tilde{t}}}{a_1 + a_2} \int_{d_n}^{\tilde{t}} \int_{x-a_1(\tilde{t}-\tau)}^{x+a_2(\tilde{t}-\tau)} e^{A\tau-Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau, \quad (58)$$

$$\tilde{u}_{3n-1}(x, \tilde{t}) = e^{-b_2\tilde{t}_n} \tilde{\Phi}_{3n-1}(x, \tilde{t}) + \tilde{F}_{2,n}^{(1)}(x, \tilde{t}) +$$

$$+ \tilde{v}_1(a_1\tilde{t} - x) \left\{ e^{-b_1\tilde{t}} \int_{d_n}^{a_1} \frac{a_1^2}{\tilde{v}_1^2(a_1\delta)} \int_{d_n}^{\delta} \frac{e^{b_1\rho} \tilde{v}_1(a_1\rho) \tilde{\chi}_1(\delta, \rho) \tilde{P}_{3n-1}(\rho)}{a_1^2 \tilde{\zeta}_1(\rho) - a_1 \tilde{\xi}_1(\rho) + \tilde{\theta}_1(\rho)} d\rho d\delta + \right. \quad (59)$$

$$\left. + e^{-b_1\tilde{t}_n} \frac{a_1 \tilde{v}_1(a_1 d_n) [b_2 \varphi_{n+1}(0) + \psi_{n+1}(0) - a_2 \varphi'_{n+1}(0)]}{a_1 + a_2} \int_{d_n}^{a_1} \frac{\tilde{\chi}_1(\delta, d_n)}{\tilde{v}_1^2(a_1\delta)} d\delta \right\},$$

$$(x, \tilde{t}) \in \tilde{\Delta}_{3n-1},$$

$$\tilde{u}_{3n}(x, \tilde{t}) = e^{-b_1\tilde{t}_n} \tilde{\Phi}_{3n}(x, \tilde{t}) + \tilde{F}_{2,n}^{(2)}(x, \tilde{t}) +$$

$$+ \tilde{v}_2(a_2\tilde{t} - d + x) \left\{ e^{-b_2\tilde{t}} \int_{d_n}^{a_2} \frac{a_2^2}{\tilde{v}_2^2(a_2\delta)} \int_{d_n}^{\delta} \frac{e^{b_2\rho} \tilde{v}_2(a_2\rho) \tilde{\chi}_2(\delta, \rho) \tilde{P}_{3n}(\rho)}{a_2^2 \tilde{\zeta}_2(\rho) + a_2 \tilde{\xi}_2(\rho) + \tilde{\theta}_2(\rho)} d\rho d\delta + \right. \quad (60)$$

$$\left. + e^{-b_2\tilde{t}_n} \frac{a_2 \tilde{v}_2(a_2 d_n) [b_1 \varphi_{n+1}(d) + \psi_{n+1}(d) - a_1 \varphi'_{n+1}(d)]}{a_1 + a_2} \int_{d_n}^{a_2} \frac{\tilde{\chi}_2(\delta, d_n)}{\tilde{v}_2^2(a_2\delta)} d\delta \right\},$$

$$(x, \tilde{t}) \in \tilde{\Delta}_{3n}.$$

Здесь следующие решения неоднородного уравнения (13) в \tilde{G}_n заменами переменных $\tilde{t} = t - d_2$ и $\rho = \tau + d_2$ приводятся к решениям в G_{n+1} :

$$\frac{e^{Bx-A\tilde{t}}}{a_1 + a_2} \int_{d_n}^{\tilde{t}} \int_{x-a_1(\tilde{t}-\tau)}^{x+a_2(\tilde{t}-\tau)} e^{A\tau-Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau = \frac{e^{Bx-At}}{a_1 + a_2} \int_{d_{n+1}}^t \int_{x-a_1(t-\rho)}^{x+a_2(t-\rho)} e^{A\rho-Bs} f(s, \rho) ds d\rho,$$

$$\tilde{F}_{2,n}^{(1)}(x, \tilde{t}) = \frac{e^{Bx-A\tilde{t}}}{a_1 + a_2} \left[\int_{d_n}^{\tilde{t}-\frac{x}{a_1}} \int_{a_2 \left[\tilde{t}-\frac{x}{a_1} - \tau \right]}^{x+a_2(\tilde{t}-\tau)} e^{A\tau-Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau + \int_{\tilde{t}-\frac{x}{a_1}}^{\tilde{t}} \int_{x-a_1(\tilde{t}-\tau)}^{x+a_2(\tilde{t}-\tau)} e^{A\tau-Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau \right] =$$

$$= \frac{e^{Bx-At}}{a_1 + a_2} \left[\int_{d_{n+1}}^{\tilde{t}-\frac{x}{a_1}} \int_{a_2 \left[\tilde{t}-\frac{x}{a_1} - \rho \right]}^{x+a_2(t-\rho)} e^{A\rho-Bs} f(s, \rho) ds d\rho + \int_{\tilde{t}-\frac{x}{a_1}}^t \int_{x-a_1(t-\rho)}^{x+a_2(t-\rho)} e^{A\rho-Bs} f(s, \rho) ds d\rho \right] = F_{2,n+1}^{(1)}(x, t),$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{2,n}^{(2)}(x, \tilde{t}) &= \frac{e^{Bx-A\tilde{t}}}{a_1+a_2} \left[\int_{d_n}^{\tilde{t}-\frac{d-x}{a_2}} \int_{x-a_1(\tilde{t}-\tau)}^{d-a_1\left[\tilde{t}-\frac{d-x}{a_2}-\tau\right]} e^{A\tau-Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau + \right. \\
&+ \left. \int_{\tilde{t}-\frac{d-x}{a_2}}^{\tilde{t}} \int_{x-a_1(\tilde{t}-\tau)}^{x+a_2(\tilde{t}-\tau)} e^{A\tau-Bs} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau \right] = \frac{e^{Bx-At}}{a_1+a_2} \left[\int_{d_{n+1}}^{\tilde{t}-\frac{d-x}{a_2}} \int_{x-a_1(t-\rho)}^{\left(\frac{a_1+1}{a_2}\right)d-\frac{a_1}{a_2}x-a_1(t-\rho)} e^{A\rho-Bs} f(s, \rho) ds d\rho + \right. \\
&+ \left. \int_{\tilde{t}-\frac{d-x}{a_2}}^t \int_{x-a_1(t-\rho)}^{x+a_2(t-\rho)} e^{A\rho-Bs} f(s, \rho) ds d\rho \right] = F_{2,n+1}^{(2)}(x, t). \quad (61)
\end{aligned}$$

Замена $\tilde{t} = t - d_2$ переводит вспомогательные функции из \tilde{G}_n в функции в G_{n+1} :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_{3n-j}(x, \tilde{t}) &= \frac{1}{a_1+a_2} \left\{ a_{2-j} \varphi_{n+1}(x - (-1)^j a_{j+1} \tilde{t}_n) + a_{j+1} e^{B(x-(-1)^j a_{j+1} \tilde{t}_n)} \varphi_{n+1}(d - jd) + \right. \\
&+ \left. \int_{x-(-1)^j a_{j+1} \tilde{t}_n}^{d-jd} e^{B(x-(-1)^j a_{j+1} \tilde{t}_n - s)} [A\varphi_{n+1}(s) + \psi_{n+1}(s)] ds \right\} = \Phi_{3n+3-j}(x, t), \quad j = 0, 1, \\
\tilde{P}_{3n-2+i}(\tilde{t}) &= \tilde{\mu}_i(\tilde{t}) - \tilde{\Gamma}_i(\tilde{t}) \left(e^{-b_3-i\tilde{t}_n} \tilde{\Phi}_{3n-2+i}(x, \tilde{t}) + \tilde{F}_{2,n}^{(i)}(x, \tilde{t}) \right) = \\
&= \mu_i(t) - \Gamma_i(t) \left(e^{-b_3-i t_n} \Phi_{3n+1+i}(x, t) + F_{2,n+1}^{(i)}(x, t) \right) = P_{3n+1+i}(t), \quad i = 1, 2. \quad (62)
\end{aligned}$$

На основе равенств (41), (49), (61), (62) заменами переменных интегрирования $\tau = \rho + d_2$, $s = \delta + d_2$ находим первые слагаемые в (59), (60):

$$\begin{aligned}
&e^{-b_1 \tilde{t}} \int_{d_n}^{\tilde{t}-x/a_1} \frac{a_1^2}{\tilde{v}_1^2(a_1 \delta)} \int_{d_n}^{\delta} \frac{e^{b_1 \rho} \tilde{v}_1(a_1 \rho) \tilde{\chi}_1(\delta, \rho) \tilde{P}_{3n-1}(\rho)}{a_1^2 \tilde{\zeta}_1(\rho) - a_1 \tilde{\xi}_1(\rho) + \tilde{\theta}_1(\rho)} d\rho d\delta = \\
&= e^{-b_1 \tilde{t}} \int_{d_n}^{\tilde{t}-x/a_1} \frac{a_1^2}{v_1^2(a_1(\delta + d_2))} \int_{d_n}^{\delta} \frac{e^{b_1 \rho} v_1(a_1(\rho + d_2)) \chi_1(\delta + d_2, \rho + d_2) P_{3n+2}(\rho + d_2)}{a_1^2 \zeta_1(\rho + d_2) - a_1 \xi_1(\rho + d_2) + \theta_1(\rho + d_2)} d\rho d\delta = \\
&= e^{-b_1 t} \int_{d_n}^{\tilde{t}-x/a_1} \frac{a_1^2}{v_1^2(a_1(\delta + d_2))} \int_{d_{n+1}}^{\delta+d_2} \frac{e^{b_1 \tau} v_1(a_1 \tau) \chi_1(\delta + d_2, \tau) P_{3n+2}(\tau)}{a_1^2 \zeta_1(\tau) - a_1 \xi_1(\tau) + \theta_1(\tau)} d\tau d\delta = \\
&= e^{-b_1 t} \int_{d_{n+1}}^{\tilde{t}-x/a_1} \frac{a_1^2}{v_1^2(a_1 s)} \int_{d_{n+1}}^s \frac{e^{b_1 \tau} v_1(a_1 \tau) \chi_1(s, \tau) P_{3n+2}(\tau)}{a_1^2 \zeta_1(\tau) - a_1 \xi_1(\tau) + \theta_1(\tau)} d\tau ds, \\
&e^{-b_2 \tilde{t}} \int_{d_n}^{\tilde{t}-\frac{d-x}{a_2}} \frac{a_2^2}{\tilde{v}_1^2(a_1 \delta)} \int_{d_n}^{\delta} \frac{e^{b_2 \rho} \tilde{v}_2(a_1 \rho) \tilde{\chi}_2(\delta, \rho) \tilde{P}_{3n}(\rho)}{a_2^2 \tilde{\zeta}_2(\rho) + a_2 \tilde{\xi}_2(\rho) + \tilde{\theta}_2(\rho)} d\rho d\delta =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-b_2 \tilde{t}} \int_{d_n}^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{a_2^2}{v_2^2(a_2(\delta + d_2))} \int_{d_n}^{\delta} \frac{e^{b_2 \rho} v_2(a_2(\rho + d_2)) \chi_2(\delta + d_2, \rho + d_2) P_{3n+3}(\rho + d_2)}{a_2^2 \zeta_2(\rho + d_2) + a_2 \xi_2(\rho + d_2) + \theta_2(\rho + d_2)} d\rho d\delta = \\
& = e^{-b_2 \tilde{t}} \int_{d_n}^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{a_2^2}{v_2^2(a_2(\delta + d_2))} \int_{d_{n+1}}^{\delta + d_2} \frac{e^{b_2 \tau} v_2(a_2 \tau) \chi_2(\delta + d_2, \tau) P_{3n+3}(\tau)}{a_2^2 \zeta_2(\tau) + a_2 \xi_2(\tau) + \theta_2(\tau)} d\tau d\delta = \\
& = e^{-b_2 \tilde{t}} \int_{d_{n+1}}^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{a_2^2}{v_2^2(a_2 s)} \int_{d_{n+1}}^s \frac{e^{b_2 \tau} v_2(a_2 \tau) \chi_2(s, \tau) P_{3n+2}(\tau)}{a_2^2 \zeta_2(\tau) + a_2 \xi_2(\tau) + \theta_2(\tau)} d\tau ds, \\
& = e^{-b_2 \tilde{t}} \frac{a_1 \tilde{v}_1(a_1 d_n) [b_2 \varphi_{n+1}(0) + \psi_{n+1}(0) - a_2 \varphi'_{n+1}(0)]}{a_1 + a_2} \int_{d_n}^{\tilde{t} - x/a_1} \frac{\tilde{\chi}_1(\delta, d_n)}{\tilde{v}_1^2(a_1 \delta)} d\delta = \\
& = e^{-b_2 \tilde{t}} \frac{a_1 v_1(a_1(d_n + d_2)) [b_2 \varphi_{n+1}(0) + \psi_{n+1}(0) - a_2 \varphi'_{n+1}(0)]}{a_1 + a_2} \int_{d_n}^{\tilde{t} - x/a_1} \frac{\chi_1(\delta + d_2, d_{n+1})}{v_1^2(a_1(\delta + d_2))} d\delta = \\
& = e^{-b_1 t_{n+1}} \frac{a_1 v_1(a_1 d_{n+1}) [b_2 \varphi_{n+1}(0) + \psi_{n+1}(0) - a_2 \varphi'_{n+1}(0)]}{a_1 + a_2} \int_{d_{n+1}}^{\tilde{t} - x/a_1} \frac{\chi_1(s, d_n)}{v_1^2(a_1 s)} ds, \\
& = e^{-b_2 \tilde{t}} \frac{a_2 \tilde{v}_2(a_2 d_n) [b_1 \varphi_{n+1}(d) + \psi_{n+1}(d) - a_1 \varphi'_{n+1}(d)]}{a_1 + a_2} \int_{d_n}^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{\tilde{\chi}_2(\delta, d_n)}{\tilde{v}_2^2(a_2 \delta)} d\delta = \\
& = e^{-b_2 \tilde{t}} \frac{a_2 v_2(a_2 d_{n+1}) [b_1 \varphi_{n+1}(d) + \psi_{n+1}(d) - a_1 \varphi'_{n+1}(d)]}{a_1 + a_2} \int_{d_n}^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{\chi_2(\delta + d_2, d_{n+1})}{v_2^2(a_2(\delta + d_2))} d\delta = \\
& = e^{-b_2 t_{n+1}} \frac{a_2 v_2(a_2 d_{n+1}) [b_1 \varphi_{n+1}(d) + \psi_{n+1}(d) - a_1 \varphi'_{n+1}(d)]}{a_1 + a_2} \int_{d_{n+1}}^{\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2}} \frac{\chi_2(s, d_{n+1})}{v_2^2(a_2 s)} ds. \quad (63)
\end{aligned}$$

В решениях (58)–(60) мы делаем обратную замену $\tilde{t} = t - d_2$ и ввиду (63) имеем соответственно формулы (22)–(24) при $n + 1$ вместо n классического решения $u \in C^2(G_{n+1})$ смешанной задачи (13)–(15) в G_{n+1} , так как решение $\tilde{u} \in C^2(\tilde{G}_n)$. Единственность и дважды непрерывная дифференцируемость этого решения смешанной задачи (13)–(15) в \tilde{G}_n и, следовательно, ее решения в G_{n+1} вытекают из предположения математической индукции и гладкости исходных данных и в том числе начальных данных $\varphi_{n+1}(x) \in C^2[0, d]$, $\psi_{n+1}(x) \in C^1[0, d]$ из прямоугольника \tilde{G}_n в прямоугольник G_{n+1} .

Выведем критерий гладкости смешанной задачи (13)–(15) на G_{n+1} из критерия гладкости (17)–(20) при $k = n$ смешанной задачи (55)–(57) на \tilde{G}_n :

$$\tilde{f} \in C(\tilde{G}_n), \varphi_2 \in C^2[0, d], \psi_2 \in C^1[0, d], \tilde{\mu}_i \in C[d_n, d_{n+1}], i = 1, 2,$$

$$\tilde{J}_{1,n}^{(p)}(x, \tilde{t}) \equiv \int_{d_n}^{\tilde{t}} \tilde{f}(x - (-1)^p a_{p-i}(\tilde{t} - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\tilde{G}_n), \quad p = 1, 2,$$

$$\tilde{J}_{2,n}^{(i)}(x, \tilde{t}) \equiv \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right]^{(-1)^i \left(\tilde{t} - \frac{x}{a_1} \right) + (2-i)2d_n} \int_{d_n}^{\tilde{t}} \tilde{f} \left(\left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right] (x - a_1 \tilde{t}_{(2-i)n}) - \right.$$

$$\left. - a_2 \tau_{(2-i)n}, \tau \right) d\tau + \int_{(-1)^i \left(\tilde{t} - \frac{x}{a_1} \right) + (2-i)2d_n}^{\tilde{t}} \tilde{f}(x - a_1(\tilde{t} - \tau), \tau) d\tau \in C^1(\tilde{\Delta}_{3n-2} \cup \tilde{\Delta}_{3n-1}),$$

$$i = 1, 2,$$

$$\tilde{J}_{3,n}^{(i)}(x, \tilde{t}) \equiv \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right]^{(-1)^i \left(\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2} \right) + (2-i)2d_n} \int_{d_n}^{\tilde{t}} \tilde{f} \left(d + \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right] \times \right.$$

$$\left. \times (x + a_2 \tilde{t}_{(2-i)n} - d) + \right.$$

$$\left. + a_1 \tau_{(2-i)n}, \tau \right) d\tau + \int_{(-1)^i \left(\tilde{t} - \frac{d-x}{a_2} \right) + (2-i)2d_n}^{\tilde{t}} \tilde{f}(x + a_2(\tilde{t} - \tau), \tau) d\tau \in$$

$$\in C^1(\tilde{\Delta}_{3n-2} \cup \tilde{\Delta}_{3n}), \quad i = 1, 2.$$

Эти требования гладкости после замен переменной $\tilde{t} = t - d_2$ и переменной интегрирования $\rho = \tau + d_2$ становятся соответственно требованиями

$$f \in C(G_{n+1}), \quad \varphi_{n+1} \in C^2[0, d], \quad \psi_{n+1} \in C^1[0, d], \quad \mu_i \in C[d_{n+1}, d_{n+2}], \quad i = 1, 2,$$

$$\int_{d_{n+1}}^t f(x - (-1)^p a_{3-p}(t - \rho), \rho) d\rho \equiv J_{1,n+1}^{(p)}(x, t) \in C^1(G_{n+1}), \quad p = 1, 2,$$

$$\left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right]^{(-1)^i \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + (2-i)2d_{n+1}} \int_{d_{n+1}}^t f \left(\left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 \right) \right] (x - a_1 t_{(2-i)(n+1)}) - \right.$$

$$\left. - a_2 \rho_{(2-i)(n+1)}, \rho \right) d\rho + \int_{(-1)^i \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + (2-i)2d_{n+1}}^t f(x - a_1(t - \rho), \rho) d\rho \equiv$$

$$\equiv J_{2,n+1}^{(i)}(x, t) \in C^1(\Delta_{3n+1} \cup \Delta_{3n+2}), \quad i = 1, 2, \quad t_m = t - d_m,$$

$$\left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right]^{(-1)^i \left(t - \frac{d-x}{a_2} \right) + (2-i)2d_{n+1}} \int_{d_{n+1}}^t f \left(d + \left[1 - (-1)^i \left(\frac{a_1}{a_2} + 1 \right) \right] (x + a_2 t_{(2-i)(n+1)} - d) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+ a_1 \rho_{(2-i)(n+1), \rho} d\rho + \int_{(-1)^i \left(t - \frac{d-x}{a_2} \right)_+ + (2-i)2d_{n+1}}^t f(x + a_2(t - \rho), \rho) d\rho \equiv \\
 &\equiv J_{3,n+1}^{(i)}(x, t) \in C^1(\Delta_{3n+1} \cup \Delta_{3n+3}), \quad i = 1, 2, \quad \rho_m = \rho - d_m.
 \end{aligned}$$

Эти требования гладкости совпадают с требованиями гладкости (17)–(20) при $k = n + 1$. Они обеспечивают дважды непрерывную дифференцируемость единственного и устойчивого решения $u_{3n+1}, u_{3n+2}, u_{3n+3}$ соответственно в треугольниках $\Delta_{3n+1}, \Delta_{3n+2}, \Delta_{3n+3}$ прямоугольника G_{n+1} .

Аналогично прямоугольникам G_1 и G_2 необходимые и достаточные условия согласования вида (21) на \tilde{G}_n сводятся к справедливости граничного режима (15) при $t = d_{n+1}$ в прямоугольнике G_{n+1} . Эти необходимые и достаточные условия согласования (21) так же, как выше для прямоугольника G_2 , неявно обеспечивают дважды непрерывную дифференцируемость решения вида $u_{3n+1}, u_{3n+2}, u_{3n+3}$ смешанной задачи (13)–(15) на общих отрезках характеристик $x = a_1 t_{n+1}$, $x + a_2 t_{n+1} = d$ соответственно в треугольниках $\Delta_{3n+1}, \Delta_{3n+2}, \Delta_{3n+3}$ прямоугольника G_{n+1} . Дважды непрерывная дифференцируемость решения смешанной задачи (13)–(15) в G_{n+1} на стыке $t = d_{n+1}$ прямоугольников Q_n и G_{n+1} проверяется аналогично прямоугольникам $G_1 = Q_1$ и G_2 . Таким образом, подтверждаются требуемые математической индукцией при $n + 1$ вместо n рекуррентные формулы (22)–(24) единственного классического решения и критерий корректности (17)–(21) смешанной задачи (13)–(15) в прямоугольнике Q_{n+1} .

Непрерывная зависимость (устойчивость) классического решения задачи (13)–(15) от исходных данных следует из теорем Банаха о замкнутом графике или об открытом отображении ввиду существования и единственности решения, а также непосредственно вытекает из формул (22)–(24) решения.

Теорема 2 доказана.

Следствие. Если правая часть f зависит только от x или t и только непрерывна по x или t , то утверждение **Теоремы 1** верно без интегральных требований гладкости (18)–(20) на f .

Можно показать, что если f не зависит от t или x , то эти интегральные требования гладкости (18)–(20) на f автоматически выполняются [6].

Замечание 2. Если правая часть f зависит от x и t , то для $f \in C(G_k)$ требования гладкости о принадлежности интегралов (18)–(20) пространствам $C^1(\Omega_k)$, где множества Ω_k соответственно равны множествам $G_k, \Delta_{3k-2} \cup \Delta_{3k-1}$ и $\Delta_{3k-2} \cup \Delta_{3k}$, эквивалентны требованиям их принадлежности пространствам $C^{(1,0)}(\Omega_k)$ или $C^{(0,1)}(\Omega_k)$, $k = \overline{1, n}$. Здесь $C^{(1,0)}(\Omega_k)$ и $C^{(0,1)}(\Omega_k)$ – соответственно пространства непрерывно дифференцируемых по x и t и непрерывных по t и x функций на подмножествах Ω_k . Обоснование этого факта имеется в [6]. Правильность решений (11), (12) и (22)–(24) проверена на персональном компьютере в системе компьютерной алгебры Mathematics.

Заклучение

В данной работе доказана **Теорема 2**, которая является глобальной теоремой корректности по Адамару смешанной задачи (13)–(15) [9]. Выведены явные рекуррентные формулы классического решения и установлены необходимые и достаточные условия корректности по Адамару (существования, единственности и непрерывной зависимости решения) этой смешанной задачи при нестационарных нехарактеристических вторых производных в граничных режимах без продолжений ее исходных данных (правой части уравнения, начальных и граничных данных) вне множеств их задания. Критерий корректности состоит из требований гладкости и двух условий согласования на исходные данные. Указанная смешанная задача решена и исследована новым методом “вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны”, предложенным Ф. Е. Ломовцевым [1].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Ломовцев, Ф. Е.** Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны / Ф. Е. Ломовцев // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 7–10 декабря 2015 г. : в 2 ч. / БГУ, Ин-т математики НАН Беларуси ; ред. С. Г. Красовский. – Минск : ИМ НАН Беларуси. – Ч. 2. – С. 74–75.
2. **Ломовцев, Ф. Е.** Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных / Ф. Е. Ломовцев, В. В. Лысенко // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 3(104). – С. 5–17.
3. **Ломовцев, Ф. Е.** Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
4. **Ломовцев, Ф. Е.** Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при нестационарных первой косой и второй производной по x в граничном условии / Ф. Е. Ломовцев, В. В. Шоломицкая // Вестник БГУ. – 2016. – Сер. 1, № 2. – С. 95–102.
5. **Моисеев, Е. И.** Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полу-нестационарной факторизованной второй косой производной в граничном условии / Е. И. Моисеев, Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 459, № 5. – С. 544–549.
6. **Новиков, Е. Н.** Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Е. Н. Новиков ; Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2017. – 25 с.
7. **Спесивцева, К. А.** Критерий корректности начально-краевой задачи для общего волнового уравнения при характеристических вторых частных производных в нестационарном граничном условии / К. А. Спесивцева, Ф. Е. Ломовцев // Еругинские чтения – 2019 : материалы XIX Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Могилев, 14–17 мая 2019 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, БРУ ; ред. А. К. Демичук [и др.]. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 2019. – Ч. 2. – С. 40–42.
8. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский – М. : Наука, 2004. – 798 с.
9. **Ломовцев, Ф. Е.** О глобальных теоремах с явными решениями и условиями корректности начально-краевых задач для уравнения колебаний ограниченной струны / Ф. Е. Ломовцев // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016 : материалы Междунар. науч. конф., Воронеж, 25–31 январ. 2016 г. / ВГУ, МГУ имени М. В. Ломоносова, Математический ин-т имени В.А. Стеклова РАН ; ред. В. А. Костин. – Воронеж : Научная книга, 2016. – С. 279–282.

Поступила в редакцию 31.01.2021 г.

Контакты: lomovsev@bsu.by

(Ломовцев Фёдор Егорович)

Valery.sholomitskaya@gmail.com

(Лысенко Валерия Владимировна)

Lomovtsev F., Lysenko V. MIXED PROBLEM FOR A GENERAL ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION IN A SEMI-STRIP OF THE PLANE WITH NON-STATIONARY NON-CHARACTERISTIC SECOND DERIVATIVES.

For the first time the solution is found for a linear mixed problem for a general ($a_1 \neq a_2$) inhomogeneous vibration equation of a bounded string with time-dependent coefficients at partial derivatives up to the second order inclusive in boundary modes for the case of non-characteristic second derivatives. The criterion (necessary and sufficient conditions) is derived for its correctness in the Hadamard sense (unique and everywhere stable solvability) in the set of classical solutions without extensions of the initial data (the right-hand side of the equation, initial and boundary data) outside the sets of their assignment. This correctness criterion includes smoothness requirements and two matching conditions for the initial data.

Keywords: mixed problem, unsteady boundary mode, non-characteristic second derivatives, classical solution, correctness criterion, smoothness requirement, matching condition.

УДК 533.15:536.25

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ КОНВЕКТИВНЫХ РЕЖИМОВ СМЕШЕНИЯ, ВЫЗВАННЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ МЕХАНИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ТРОЙНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

В. Н. Косов

доктор физико-математических наук, профессор
Казахский национальный педагогический университет имени Абая

О. В. Федоренко

кандидат физико-математических наук
Казахский национальный университет имени аль-Фараби

К. М. Мухатова

докторант
Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Е. Мейрамбекулы

докторант
Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Анализ экспериментальных данных, связанных с изучением неустойчивости механического равновесия при изотермической многокомпонентной диффузии в вертикальных каналах, показал, что при определенных условиях в системе может возникнуть концентрационная гравитационная конвекция. В зависимости от давления интенсивность смешения проявляет немонотонный характер. В представленной работе выдвинуто предположение, что в многокомпонентных смесях при реализации конвекции максимумы интенсивности переноса компонентов могут быть связаны с различными модами возмущений. Для тройной системы $0,43 \text{ He} + 0,57 \text{ Ar} - \text{N}_2$ первое качественное изменение поведения системы, характеризующее переход “диффузия – конвекция”, определяется модой возмущений $n = 1$. В области давлений $0,3 - 0,4 \text{ МПа}$ наблюдается первая смена типа конвективных течений, соответствующая $n = 2$ и критическим числам Рэлея для гелия и аргона $R_1 = 235,50$ и $R_2 = 212,16$. Численный анализ также показал, что увеличение моды возмущений и давления приводит к нелинейному увеличению парциальных чисел Рэлея для легкого и тяжелого компонентов. Приведенные результаты согласуются с опытными данными.

Ключевые слова: диффузия, конвекция, неустойчивость механического равновесия, газовые смеси, давление, мода возмущений.

Введение

Изучение особенностей перехода системы из режима молекулярной диффузии в область концентрационной гравитационной конвекции показывает возможность значительного увеличения скорости парциального смешения компонентов [1; 2]. Различные типы конвективных движений в однокомпонентных средах с монотонной зависимостью плотности от температуры детально описаны в [3; 4]. В этих работах для неизотермических условий обобщены подходы, связанные с изучением естественной гравитационной конвекции в каналах различной формы и выработаны рекомендации по определению основных параметров тепломассопереноса, связанных со свойствами исследуемого вещества, позволяющими для конкретных

условий прогнозировать режимы смешения. При этом отмечается, что развитие конвективной неустойчивости зависит от взаимной ориентации градиента плотности и направления силы тяжести. Если направление градиента плотности совпадает с направлением силы тяжести, то говорят об устойчивой стратификации среды (возникновение конвективного движения в этой ситуации невозможно). Противоположное направление градиента плотности по отношению к направлению силы тяжести приводит к возникновению конвективных движений.

Однако распространение приведенных подходов для описания многокомпонентных систем при наличии нескольких градиентов концентраций и температуры может привести к искажению ожидаемых результатов, связанных с массопереносом, так как не учитываются особенности, которые отсутствуют в бинарных системах. К ним прежде всего следует отнести факт дестабилизирующего влияния диффузии на развитие конвективных течений в смесях [5–7]. Возникающее при этом движение является важным механизмом интенсификации теплопереноса и селективного разделения компонентов. Экспериментальные исследования, проведенные в [8; 9], показали, что даже в предельном случае изотермического многокомпонентного смешения возможно возникновение конвективных эффектов разделения, связанных с различием в коэффициентах диффузии компонентов, давлением и составом. Важная особенность наблюдаемого в [8; 9] смешения заключалась в том, что оно реализовывалось при условиях уменьшения плотности смеси с высотой. Поэтому решение вопросов, связанных с изучением механизмов разделения в многокомпонентных газовых смесях, является актуальным, так как позволит более корректно оценивать влияние парциального переноса в задачах комбинированного смешения.

Целью данной работы является численное исследование определения границы смены режимов “диффузия – концентрационная гравитационная конвекция” в изотермической трехкомпонентной газовой смеси при смешении в вертикальном плоском канале. В терминах диффузионных чисел Рэлея предлагаются рекомендации по определению расположения граничных линий смены кинетических режимов при различных модах возмущений. Полученные результаты численного исследования сравниваются с опытными данными.

Основная часть

Базовая система уравнений изотермической тройной диффузии

Система уравнений гидродинамики, определяющая движение тройной газовой смеси, находящейся в поле тяжести, при условии независимой диффузии, при которой для изотермической газовой смеси $\sum_{i=1}^3 \vec{j}_i = 0$; $\sum_{i=1}^3 c_i = 1$, имеет следующий вид [10]:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla \vec{u}) \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} + \left(\frac{\eta}{3} + \xi \right) \nabla \operatorname{div} \vec{u} + \rho \vec{g}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial t} + \vec{v} \nabla c_i = -\operatorname{div} \vec{j}_i, \quad (2)$$

$$\vec{j}_1 = -(D_{11}^* \nabla c_1 + D_{12}^* \nabla c_2), \quad \vec{j}_2 = -(D_{21}^* \nabla c_1 + D_{22}^* \nabla c_2), \quad (3)$$

$$\rho = \rho(c_1, c_2, p), \quad T = \text{const}, \quad (4)$$

где $\vec{u} = \frac{\rho_1 \vec{u}_1 + \rho_2 \vec{u}_2 + \rho_3 \vec{u}_3}{\rho}$, $\vec{v} = \frac{n_1 \vec{u}_1 + n_2 \vec{u}_2 + n_3 \vec{u}_3}{n}$ – среднemasсовая и среднечисловая

скорость тройной смеси соответственно, n – числовая плотность, u_i – скорость i -го компонента; ρ – плотность; p – давление; \vec{g} – ускорение силы тяжести; η и ξ – коэффициент сдвиговой и объемной вязкости; \bar{j}_i , c_i – плотность диффузионного потока и концентрации i -го компонента; T – температура; D_{ij}^* – практические коэффициенты многокомпонентной диффузии, которые связаны с коэффициентами взаимной диффузии [11] следующими соотношениями:

$$D_{11}^* = \frac{D_{13} [c_1 D_{32} + (c_2 + c_3) D_{12}]}{D}, \quad D_{12}^* = -\frac{c_1 D_{23} (D_{12} - D_{13})}{D},$$

$$D_{22}^* = \frac{D_{23} [c_2 D_{13} + (c_1 + c_3) D_{12}]}{D}, \quad D_{21}^* = -\frac{c_2 D_{13} (D_{12} - D_{23})}{D},$$

$$D = c_1 D_{23} + c_2 D_{13} + c_3 D_{12}.$$

При решении системы уравнений (1)–(4) применялся метод малых возмущений [3]. Учитывая, что при $L \gg d$ (L , d – длина и характерный размер диффузионного канала соответственно) различия между возмущениями среднечисловой \vec{v} и среднemasсовой \vec{u} скоростей в уравнении Навье-Стокса будут несущественны, окончательная система уравнений гравитационной концентрационной конвекции для возмущенных значений в безразмерных величинах примет вид:

$$P_{22} \frac{\partial c_1}{\partial t} - (\vec{u} \vec{\gamma}) = \tau_{11} \nabla^2 c_1 + \frac{A_2}{A_1} \tau_{12} \nabla^2 c_2, \quad (5)$$

$$P_{22} \frac{\partial c_2}{\partial t} - (\vec{u} \vec{\gamma}) = \frac{A_1}{A_2} \tau_{21} \nabla^2 c_1 + \nabla^2 c_2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla^2 \vec{u} + (R_1 \tau_{11} c_1 + R_2 c_2) \vec{\gamma}, \quad (7)$$

$$\text{div} \vec{v} = 0, \quad (8)$$

где $P_{ii} = \nu / D_{ii}^*$ – диффузионное число Прандтля, $R_i = g \beta_i A_i d^4 / \nu D_{ii}^*$ – парциальное число Рэлея, $\tau_{ij} = D_{ij}^* / D_{22}^*$ – параметр, определяющий соотношение между практическими коэффициентами диффузии, ν – кинематическая вязкость смеси, $\vec{\gamma}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх, d – характерный линейный размер полости, A_i – безразмерный градиент концентрации i -го компонента, β_i – коэффициент, характеризующий зависимость плотности газовой смеси от концентрации i -го компонента.

Система уравнений (5)–(8) позволяет исследовать поведение во времени всевозможных возмущений и определить спектр критических параметров, характеризующих потерю устойчивости газовой смеси.

Стационарное конвективное движение. Спектр возмущений

Система уравнений (5)–(8) имеет частные решения, зависящие от времени по экспоненциальному закону:

$$\{\vec{u}, \vec{v}, p, c_i\} \sim \exp(-\lambda t), \quad (9)$$

где λ – временной декремент возмущений. Подставляя (3) в (5)–(8), получим систему уравнений для амплитуд \bar{u} , p , c_i , \bar{v} :

$$-\lambda \bar{u} = -\nabla p + \nabla^2 \bar{u} + (R_1 \tau_{11} c_1 + R_2 c_2) \bar{\gamma}, \quad (10)$$

$$-\lambda P_{22} c_1 = \tau_{11} \nabla^2 c_1 + \frac{A_2}{A_1} \tau_{12} \nabla^2 c_2 + (\bar{v} \bar{\gamma}), \quad (11)$$

$$-\lambda P_{22} c_2 = \frac{A_1}{A_2} \tau_{21} \nabla^2 c_1 + \nabla^2 c_2 + (\bar{v} \bar{\gamma}), \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad (13)$$

По аналогии с [3] будем считать, что потеря устойчивости механического равновесия газовой смеси означает, что декременты λ некоторых возмущений при определенном числе R_* меняют знак, а сами возмущения, затухая при $R < R_*$, начинают возрастать при $R > R_*$. Обращение в нуль декремента определяет условие, при котором возмущение нейтрально. Это условие характеризует границу устойчивости механического равновесия относительно возмущения. Если в системе уравнений (10)–(13) предположить, что $\lambda = 0$, то система уравнений имеет вид:

$$-\nabla p + \nabla^2 \bar{u} + (R_1 \tau_{11} c_1 + R_2 c_2) \bar{\gamma} = 0, \quad (14)$$

$$\tau_{11} \nabla^2 c_1 + \frac{A_2}{A_1} \tau_{12} \nabla^2 c_2 + (\bar{v} \bar{\gamma}) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{A_1}{A_2} \tau_{21} \nabla^2 c_1 + \nabla^2 c_2 + (\bar{v} \bar{\gamma}) = 0, \quad (16)$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, задача на устойчивость сводится к определению последовательности критических соотношений для парциальных чисел Рэлея R_i . Если градиенты концентраций удовлетворяют критическому соотношению, то смесь становится устойчивой относительно соответствующих возмущений. При решении системы уравнений (14)–(17) для плоского вертикального канала граничные условия предполагают, что возмущения скорости и поток вещества на границах обращаются в нуль:

$$u = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x} = 0, \quad x = \pm 1. \quad (18)$$

Смена режимов наступает при условии $\lambda = 0$, и тогда система уравнений возмущений принимает вид:

$$\tau_{11} \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{A_2}{A_1} \tau_{12} \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + u = 0, \quad (19)$$

$$\frac{A_1}{A_2} \tau_{21} \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} + u = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R_1 \tau_{11} c_1 + R_2 c_2 = 0. \quad (21)$$

Из уравнений (19) и (20) найдем уравнения для концентраций компонентов:

$$\frac{\partial c_i}{\partial x^2} = -uK_i, \quad i = 1, 2, \quad (22)$$

$$\text{где } K_1 = \frac{\left(1 - \frac{A_2}{A_1} \tau_{12}\right)}{(\tau_{11} - \tau_{12} \tau_{21})}, \quad K_2 = \frac{\left(\tau_{11} - \frac{A_1}{A_2} \tau_{21}\right)}{(\tau_{11} - \tau_{12} \tau_{21})}.$$

Дважды дифференцируя уравнение (21) и учитывая (22), получим уравнение, содержащее только скорость:

$$u^{IV} - \gamma^4 u = 0, \quad (23)$$

где $\gamma^4 = K_1 R_1 \tau_{11} + K_2 R_2$.

Рассматриваемая задача имеет четные и нечетные относительно x решения. Нечетные относительно x решения имеют вид:

$$u = \frac{\text{sh} \gamma x}{\text{sh} \gamma} - \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma}, \quad c_i = -\frac{K_i}{\gamma^4} \left(\frac{\text{sh} \gamma x}{\text{sh} \gamma} + \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} \right). \quad (24)$$

Параметр γ определяется следующим характеристическим соотношением:

$$\text{cth} \gamma = -\text{ctg} \gamma. \quad (25)$$

Четные относительно x решения выражаются следующим образом:

$$u = \frac{\text{ch} \gamma x}{\text{ch} \gamma} - \frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma}, \quad c_i = -\frac{K_i}{\gamma^4} \left(\frac{\text{ch} \gamma x}{\text{ch} \gamma} + \frac{\cos \gamma x}{\cos \gamma} \right). \quad (26)$$

Параметр γ определяется теперь характеристическим уравнением

$$\text{th} \gamma = -\text{tg} \gamma. \quad (27)$$

Таким образом, спектр критических чисел Рэлея для нечетных и четных решений находится из уравнений (25) и (27) соответственно. Для нечетных решений имеем:

$$\gamma_1 = 2,365; \gamma_3 = 5,498; \gamma_5 = 8,638; \dots \quad (28)$$

$$R_1 = 31,29; R_3 = 931,8; R_5 = 5570; \dots \quad (29)$$

Для четных решений:

$$\gamma_0 = 0; \gamma_2 = 3,927; \gamma_4 = 7,069; \dots \quad (30)$$

$$R_0 = 0; R_2 = 237,6; R_4 = 2497; \dots \quad (31)$$

Если значение числа Рэлея в системе превышает критическое число Рэлея (29) для первой, наиболее опасной моды возмущений, то в системе должно возникать критическое течение, соответствующее этому числу Рэлея. Критические движения, отвечающие числам Рэлея для более высоких мод, являются недоступными, пока в системе не будут созданы условия, мешающие развитию первого критического движения.

В этом случае граничная линия устойчивости на плоскости чисел Рэлея имеет вид:

$$\tau_{11} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \tau_{12} \right) R_1 + \left(\tau_{11} - \frac{A_1}{A_2} \tau_{21} \right) R_2 = \gamma_n^4 (\tau_{11} - \tau_{12} \tau_{21}), \quad (32)$$

где $n = 1, 3, 5 \dots$ – нечетные моды возмущения.

Результаты исследований

Для исследования была выбрана система $0,43 \text{ He (1)} + 0,57 \text{ Ar (2)} - \text{N}_2 \text{ (3)}$, экспериментально изученная в работе [12]. Условимся, что числа перед химическим элементом соответствуют концентрации компонентов в смеси, а показатель в круглых скобках определяет нумерацию компонентов в системе. В рассматриваемой работе [12] исследования проводились с помощью двухколбового метода. Колбы диффузионного аппарата соединялись прямоугольным вертикальным каналом размером $a \times b \times L = 30 \times 6 \times 160 \text{ мм}$. Во всех экспериментах поддерживалась постоянная температура $T = 298,0 \text{ К}$. На рисунке 1 представлено поведение концентраций аргона и азота в зависимости от давления в опыте. Для рассматриваемой системы в диапазоне давлений от 0,2 до 2,0 МПа наблюдается неустойчивый диффузионный процесс, сопровождающийся возникающими в условиях эксперимента конвективными течениями. О наличии конвективных течений свидетельствует существенное расхождение между экспериментальными и вычисленными в предположении диффузии концентрациями компонентов. При давлении 0,5 МПа наблюдается максимум для диффундирующих компонентов аргона и азота. Появление максимумов по концентрации объясняется взаимодействием структурных образований, движущихся навстречу друг другу.

Если предположить, что областям, связанным с нелинейными изменениями интенсивности процесса, соответствуют новые масштабы возмущений, то экспериментальные парциальные числа Рэлея R_i должны находиться вблизи граничных линий, отвечающих разным модам возмущений n .

Для системы $0,43 \text{ He (1)} + 0,57 \text{ Ar (2)} - \text{N}_2 \text{ (3)}$ был проведен анализ на устойчивость на основе уравнения (16). В таблице приведен спектр критических чисел Рэлея R для плоского вертикального канала.

Для сравнения теории с опытными данными, приведенными в [12], представим их в виде парциальных чисел Рэлея. Парциальные числа Рэлея в соответствии с (5)–(8) можно записать следующим образом:

$$R_1 = \frac{gn(a/2)^2(b/2)^2 \Delta m_1}{\rho \nu D_{11}^*} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial z}, \quad R_2 = \frac{gn(a/2)^2(b/2)^2 \Delta m_2}{\rho \nu D_{22}^*} \cdot \frac{\partial c_2}{\partial z}, \quad (33)$$

где m_i – масса молекулы i -го сорта, $\Delta m_1 = m_1 - m_3$, $\Delta m_2 = m_2 - m_3$. Если известны условия проведения опыта (давление, температура, состав смесей в каждой из колб, размеры диффузионного канала), то по формулам (33) можно найти R_1 и R_2 и тем самым определить изображающую данный опыт точку на плоскости (R_1, R_2) . Из опыта известно, какой режим (диффузия или конвекция) имеет место при заданных условиях. При этом парциальные числа Рэлея нелинейно изменяются с ростом давления опыта.

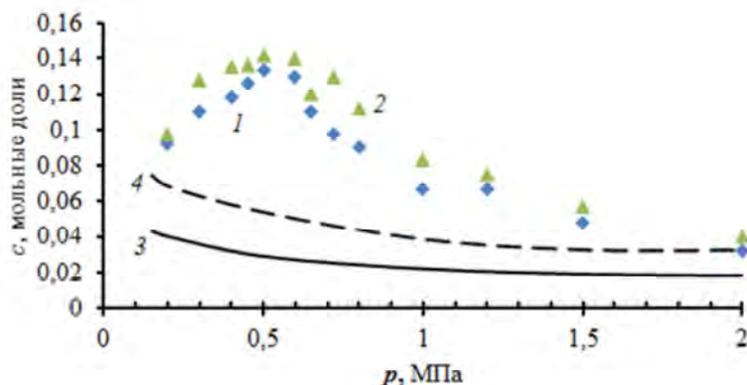


Рисунок 1 – Концентрации компонентов при различных давлениях в вертикальном плоском канале для системы 0,43 He (1) + 0,57 Ar (2) – N₂ (3). Экспериментальные точки 1 – аргон, 2 – азот. Сплошная 3 и штриховая 4 линии соответствуют вычисленным в предположении диффузии данным для аргона и азота [12]

Критические значения R для плоского вертикального канала

n	γ	R_1	R_2
1	2,365	30,98	27,91
2	3,927	235,50	212,16
3	5,498	904,83	815,17
4	7,069	2472,70	2227,70
5	8,639	5515,70	4969,20

На рисунке 2 представлены граничная линия устойчивости (32) при различных модах возмущения и опытные данные в терминах чисел Рэлея для системы 0,43 He (1) + 0,57 Ar (2) – N₂ (3), полученные варьированием давления. Сравнительный анализ данных, приведенных на рисунках 1 и 2, говорит о том, что в рассматриваемой системе наблюдается неустойчивый диффузионный процесс во всем диапазоне исследуемых давлений. Линии I, II, III, IV и V, приведенные на рисунке 2, соответствуют различным модам возмущений, при которых происходит изменение типа критических движений. Согласно проведенным расчетам для рассматриваемой системы переход от диффузионного режима к конвективному должен был произойти при $p = 0,13$ МПа. При $n = 2$ наблюдается первая смена характера конвективных течений, соответствующая области давлений 0,3–0,4 МПа. В области давлений около 0,7 МПа проявляется вторая смена типа конвективных течений, соответствующая моде $n = 3$. В области давлений 1,0–1,2 МПа мода $n = 4$ соответствует третьей смене типа конвективных течений.

Таким образом, каждому n (мода возмущений) соответствует свое масштабное возмущение, определяющее переход от одного типа течения к другому. Уменьшение масштаба возмущений, т. е. рост числа n , может происходить за счет увеличения одного из параметров при соблюдении условия неизменности других параметров системы.

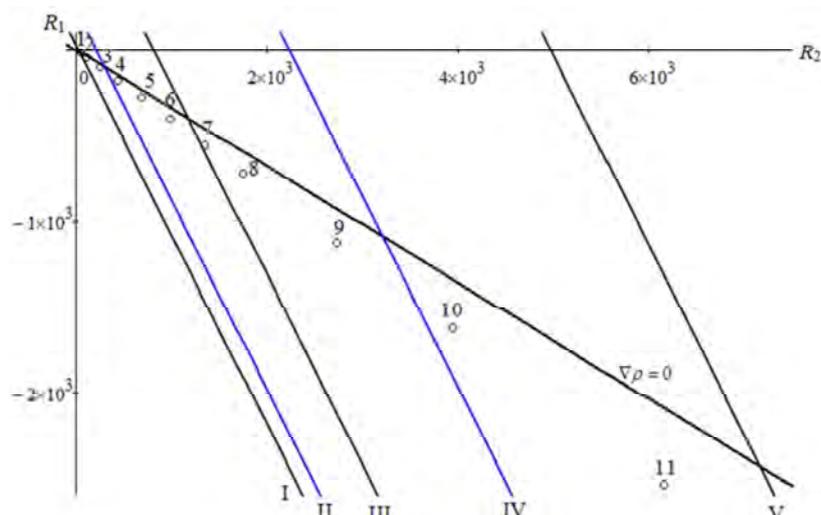


Рисунок 2 – Области неустойчивой диффузии для системы 0,43 He + 0,57 Ar – N₂.

Точки \circ – экспериментальные данные, определяющие неустойчивое состояние. Вариации параметра осуществлялись изменением давления и соответствуют следующим значениям:

- 1 – $p = 0,13$; 2 – 0,2; 3 – 0,3; 4 – 0,4; 5 – 0,5; 6 – 0,6; 7 – 0,7; 8 – 0,8; 9 – 1,0; 10 – 1,2;
11 – 1,5 МПа. I, II, III, IV и V – линии монотонных возмущений при $n = 1, n = 2, n = 3,$
 $n = 4$ и $n = 5$ соответственно. $\nabla\rho = 0$ – линия нулевого градиента плотности

Заключение

Рассмотрены особенности конвективных режимов при произвольных модах возмущений. Показано, что в условиях развитой конвекции изменение интенсивности переноса компонентов в зависимости от давления связано с модой возмущений, определяющей различные виды конвективных течений. Структурные образования, движущиеся навстречу друг другу, число которых в поперечном сечении диффузионного канала определяется модой возмущений, взаимодействуют и тем самым определяют изменение интенсивности неустойчивого процесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и образования Республики Казахстан (грант AP09259248).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Dil'man, V. V.** Instability in unsteady-state evaporation of binary solutions into an inert gas / V. V. Dil'man, D. A. Lipatov, V. A. Lotkhov, V. A. Kaminskii // Theor. Found. Chem. Eng. – 2005. – Vol. 39. – P. 566–572.
2. **Dil'man, V. V.** Molecular turbulent evaporation in a gravitational field / V. V. Dil'man, V. A. Lotkhov // Theor. Found. Chem. Eng. – 2015. – Vol. 49, No. 1. –P. 102–106.
3. **Гершуни, Г. З.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
4. **Nield, D. A.** Convection in Porous Media / D. A. Nield, A. Bejan. – New York : Springer, 2006. – 654 p.
5. **Hu, Yu-Peng.** Effects of enclosure geometry and thermal boundary condition on Rayleigh-Benard convection of cold water near its maximum density / Yu-Peng Hu, You-Rong Li, Ming-Hai Li, Li Zhang, Si-Zhong Li // Int. J. Therm. Sci. – 2017. – Vol. 120. – P. 220–232.
6. **Lyubimova, T. P.** Onset of Soret-induced convection in a horizontal layer of ternary fluid with fixed vertical heat flux at the boundaries / T. P. Lyubimova, E. S. Sadirov, S. A. Prokopen // Eur. Phys.

J. E. – 2017. – Vol. 40. – Article number: 15.

7. *Shevtsova, V.* Diffusion and Soret in ternary mixtures. Preparation of the DCMIX2 experiment on the ISS / V. Shevtsova, C. Santos, V. Sechenyh, J. C. Legros, A. Mialdun // *Microgravity Sci. Technol.* – 2014. – Vol. 25. – P. 275–283.

8. *Косов, В. Н.* Неустойчивость механического равновесия при диффузии в трехкомпонентной газовой смеси в вертикальном цилиндре кругового сечения / В. Н. Косов, О. В. Федоренко, Ю. И. Жаврин, В. Мукамеденкызы // *Журнал тех. физики.* – 2014. – Т. 84, № 4. – С. 15–18.

9. *Косов, В. Н.* Влияние концентрации компонентов смеси на возникновение конвективных режимов смешения при диффузии в тройных газовых смесях / В. Н. Косов, Д. У. Кульжанов, Ю. И. Жаврин, О. В. Федоренко // *Журнал физ. химии.* – 2017. – Т. 91, № 6. – С. 931–936.

10. *Косов, В. Н.* Аномальное возникновение свободной гравитационной конвекции в изотермических тройных газовых смесях / В. Н. Косов, В. Д. Селезнев. – Екатеринбург: УрО РАН, 2004. – 150 с.

11. *Bird, R. B.* Transport Phenomena / R. B. Bird, Stewart W. E., E. N. Lightfoot. – New York : John Wiley & Sons, 2007. – 522 p.

12. *Асембаева, М. К.* Влияние угла наклона канала на конвективное смешение, вызванное неустойчивостью механического равновесия тройной газовой смеси при изотермической диффузии / М. К. Асембаева, В. Н. Косов, С. А. Красиков, О. В. Федоренко // *Письма в ЖТФ.* – 2019. – Т. 45, № 21. – С. 7–10.

Поступила в редакцию 19.05.2021 г.

Контакты: kosov_vlad_nik@list.ru

(Косов Владимир Николаевич)

fedor23.04@mail.ru

(Федоренко Ольга Владимировна)

Kosov V., Fedorenko O., Mukhatova K., Meirambekuly E. SOME FEATURES OF CONVECTIVE MIXING REGIMES CAUSED BY THE INSTABILITY OF MECHANICAL EQUILIBRIUM OF THREE-COMPONENT GAS MIXTURES.

The analysis of the experimental data related to the study of the instability of mechanical equilibrium during isothermal multicomponent diffusion in the vertical channels shows that under certain condition the concentration gravitational convection can occur in the system. Depending on the pressure, the mixing intensity has a non-monotonic nature. In the research it is suggested that in the multicomponent mixtures, when convection occurs, the maxima of the transport intensity of the components can be associated with the different modes of perturbations. For the ternary system $0.43 \text{ He} + 0.57 \text{ Ar} - \text{N}_2$, the first qualitative change in the behaviour of the system characterising the “diffusion – convection” transition is determined by the perturbation mode $n = 1$. In the pressure range of $0.3 - 0.4 \text{ MPa}$, the first change in the type of convective flows corresponding to $n = 2$ is observed, and the critical Rayleigh numbers for helium and argon are equal to $R_1 = 235.50$ and $R_2 = 212.16$. The numerical analysis also shows that an increase in the perturbation mode and pressure leads to a nonlinear increase in the partial Rayleigh numbers for the light and heavy components. The given results agree with the experimental data.

Keywords: diffusion, convection, instability of mechanical equilibrium, gas mixtures, pressure, perturbation mode.

УДК 535.83

РЕЗОНАНСНОЕ ОТРАЖЕНИЕ КОРОТКОГО ОПТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА КВАЗИДВУМЕРНЫМ СУПЕРКРИСТАЛЛОМ

В. А. Юревич

доктор физико-математических наук

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

В рамках предложенной нелинейной модели энергообмена поля когерентного излучения и планарного квазикристалла из полупроводниковых квантовых точек, реагирующих на резонансное поле по трехуровневой схеме взаимодействия, проведен численный анализ изменения формы коротких импульсных оптических сигналов, отражаемых поверхностью квазикристалла.

Ключевые слова: наноразмерные квазикристаллы, полупроводниковые квантовые точки, когерентные оптические эффекты, резонансная оптическая нелинейность, метаповерхности.

Введение

Приемы современных нанотехнологий позволяют создание материалов с необычными физическими свойствами, отсутствующими у составляющих их исходных природных веществ. Такого рода неочевидные оптические или, в более широком частотном диапазоне, электромагнитные свойства обусловлены субволновым размером элементарного дипольного рассеивателя (или излучателя) при их плотной упаковке в среде и резонансным характером рассеяния внешнего излучения. Квазидвумерные суперкристаллы полупроводниковых квантовых точек (ПКТ) [1] представляют особый интерес. Квантовые излучательные переходы, совершаемые в оптической области спектра, характеризуются весьма высокой вероятностью, что приводит к эффективному проявлению нелинейности реакции на резонансное или квазирезонансное поле в ансамблях ПКТ при умеренных уровнях мощности высвечиваемого или действующего извне когерентного излучения. Оптические свойства квазикристалла из ПКТ зависят от размера активных центров, их формы, химического состава и геометрии решетки и могут быть целенаправленно контролируемы [2], чем созданы основания для применения подобных объектов в опто- и микроэлектронике. Низкоразмерные системы на основе полупроводников (также ряда активированных прозрачных материалов, например, полимеров или дихалькогенидов переходных металлов), которые можно характеризовать в качестве квазидвумерных суперкристаллов [3; 4], рассматриваются как метаповерхности, способные при отражении резонансного поля эффективно менять фазы волн в отраженном пучке [5]. Вариации фаз связаны с энергетическим состоянием внутренней структуры материала метаповерхности, а это состояние, особенно в “оптических” полупроводниках, управляется внешним излучением, что дает возможность проявлений самовоздействия излучения при отражении, то есть в предельно компактной оптической схеме. Это свойство по очевидным причинам широко востребовано для разработки миниатюрных модулирующих элементов, что делает метаповерхности в высшей степени перспективными с точки зрения нанофотоники и оптических нанотехнологических применений [6]. Известно, например, что

суперкристалл в зависимости от мощности поля способен эффективно отразить падающий свет в экситонном диапазоне частоты, то есть фактически выступить почти идеальным зеркалом нанометровой толщины [6], проявляя при этом на шкале интенсивности гистерезисные свойства отражения.

Оптические свойства этих объектов, особенно нелинейные, представляют собой перспективную и до настоящего времени во многом нерешенную проблему. Поэтому представляется актуальным анализ закономерностей отражения и трансформации динамики когерентного излучения в наноразмерных слоях при учете оптических процессов с участием экситонов и би-экситонов именно в рамках присущей этим структурным элементам квазикристалла трехуровневой схемы резонансной реакции на поле с дублетом в основном или возбужденном состоянии [7; 8].

Основные уравнения

В расчетах, положенных в основу настоящей работы, проведена количественная оценка нелинейного оптического отклика квазидвумерной решетки элементарных трехуровневых излучателей с дублетом в основном состоянии. Подход к изучению особенностей отклика, частично воспроизводит схему расчета, предложенную в [7; 8], где в качестве активных центров рассматривались легированные ПКТ. Благодаря высокой плотности элементарных квантовых излучателей (КИ) и относительно большой силе их осциллятора, диполь-дипольное взаимодействие активных центров играет важную роль в оптическом отклике наноразмерного слоя. Это взаимодействие обеспечивает положительную обратную связь, которая, вместе с нелинейностью элементарного излучателя, обусловленной насыщением поглощения и квазирезонансной поляризуемостью, существующей в условиях сложной энергетической структуры активных центров, приводит к экстраординарным оптическим свойствам планарного нанослоя, фактически представляющего один из типов метаповерхности.

Оригинальность проведенных расчетных оценок состоит именно в учете влияния квазирезонансной поляризуемости активных центров, осуществляемого в рамках обобщения модели двухуровневого дипольного квантового отклика. Наряду с типичным для плотной упаковки ПКТ влиянием ближних полей на поляризуемость активных центров ее величина и кинетика резонансного энергообмена может существенно зависеть от излучения соседних с основным переходов, способных реагировать на резонансное поле напряженности E . Динамическая реакция наноразмерного слоя на квазирезонансное излучение тогда существенно определяется следствиями бистабильности и мультистабильности отражения, которые способны возникать при относительно невысоких уровнях возбуждения и активного поглощения. Известны, что эти следствия проявляются в разных формах автомодуляционной трансформации структуры поля. Нелинейной динамикой отражения могут быть обусловлены самопроизвольные (обусловленные вариациями характеристик возбуждения и – в меньшей мере – материальными параметрами слоя) изменения формы действующих импульсов, возникновение в первоначально непрерывном излучении осцилляций, автоколебаний и состояния динамического хаоса [8; 9].

Рассматриваемая в расчетной модели система характеризуется относительно высокой концентрацией активных центров и рассматривается как ансамбль элементарных КИ, организованных периодически, т. е. считается суперкристаллом.

Этим обусловлены дополнительные степени свободы кинетической модели – геометрия решетки и взаимодействие активных центров, реакция которых на излучение характеризуется переходами в схеме энергетических состояний с дублетом в основном состоянии. Энергетическая схема элементарного КИ в рассматриваемой модели представлена трехуровневой квантовой системой Λ -типа, включающей состояния $|1\rangle$ и $|2\rangle$ дублета в нижнем состоянии и возбужденное состояние $|3\rangle$. Оптически разрешенными считаются переходы $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ и $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, характеризующиеся матричными элементами дипольных моментов $|\mu_{31}| = \mu_1$, $|\mu_{32}| = \mu_2$ и константами радиационного затухания T_{31} и T_{32} . Значения энергии $W_2 = \hbar\omega_2$ и $W_3 = \hbar\omega_3$ характеризуют “верхние” состояния $|2\rangle$ и $|3\rangle$; соответственно, предполагается, что невозбужденному состоянию $|1\rangle$ дублета отвечает $W_1 = 0$. Ширина спектральной линии перехода $|3\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ определена величиной $2/T_2$ (время T_2 характеризует темп фазовой релаксации, то есть процесс спонтанного распада поляризации ансамбля КИ в возбужденном состоянии). Частота дублетного расщепления Δ_{12} предполагается много меньшей частот оптических переходов. Релаксация в подсистеме состояний $|1\rangle$ и $|2\rangle$ дублета феноменологически учитывается константой τ_{21} .

Предполагается далее, что на планарный слой суперкристалла извне в направлении нормали действует плосковолновое гармоническое поле с квазистационарной амплитудой $E_i(t)$ и частотой ω , близкой к частотам квантовых переходов в рассматриваемой схеме (то есть ω вблизи значения ω_{31} в пределах ширины спектральной линии поглощения). Оптическую динамику отклика ансамбля квантовых излучателей в слое будем описывать уравнениями для матрицы плотности ρ_{jk} ($j, k = 1, 2, 3$). Для описания системы слоя во взаимодействии с излучением как целого также аналогично [7, 8] используем приближение среднего поля (нормированная амплитуда поля $e(t) = \mu_1 T_2 E / \hbar$, действующего на КИ, и матричные элементы ρ_{jk} не зависят от положения активных центров в слое). Во вращающейся с частотой внешнего поля ω системе координат и в нормированном времени $\tau = t/T_2$ уравнения для ρ_{jk} имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{31}}{d\tau} &= n_1 e - \sigma \rho_{21} e - (1 + i\Delta_1) \rho_{31}, \\ \frac{d\rho_{32}}{d\tau} &= \sigma n_2 e - \rho_{21}^* e - (1 + i\Delta_2) \rho_{32}, \\ \frac{d\rho_{21}}{d\tau} &= \rho_{32}^* e + \sigma \rho_{31} e - \left(\frac{1}{\tau_{21}} + i\Delta_3 \right) \rho_{21}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{d\tau} &= \frac{1 - n_1 - n_2}{\tau_1} + \frac{1 - n_1 + 2n_2}{T_1} - (\rho_{31}^* e + \rho_{31} e^*) - \frac{\sigma}{2} (\rho_{32}^* e + \rho_{32} e^*), \\ \frac{dn_2}{d\tau} &= \frac{1 - n_1 - n_2}{\tau_2} - \frac{1 - n_1 + 2n_2}{T_1} - \frac{1}{2} (\rho_{31}^* e + \rho_{31} e^*) - \sigma (\rho_{32}^* e + \rho_{32} e^*). \end{aligned}$$

Здесь ρ_{13} , ρ_{23} , ρ_{12} – недиагональные элементы матрицы плотности (вероятностные переменные, характеризующие поляризованность при переходах между уровнями схемы), $n_1 = \rho_{33} - \rho_{11}$, $n_2 = \rho_{33} - \rho_{22}$ – вероятности разностей населенностей верхнего уровня и уровней дублета, σ – соотношение сечений переходов с уровней дублета в возбужденное состояние, τ_1 , τ_2 , T_1 – времена спонтанного распада состояний (продольной релаксации), τ'_{12} – время фазовой релаксации в дублете,

$\Delta_{31} = (\omega - \omega_3)T_2$ и $\Delta_{32} = (\omega - \omega_3 + \omega_2)T_2$ – отстройки частоты ω_0 внешнего поля от частот резонансных переходов $|3\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ и $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ (все временные и частотные параметры нормированы по полуширине спектральной линии поглощения).

Амплитуда действующего на КИ поля $e(t)$ представляет собой сумму нормированного внешнего поля $e_i = \mu_1 T_2 t_0 E_i / \hbar$ и поля всех остальных КИ в месте расположения данного (второе слагаемое):

$$e \{ 1 - ik [\beta_1 (n_{01} - n_1) + \beta_2 (n_{02} - n_2)] \} = e_i + \kappa (1 + i\gamma) (\rho_{31} + \sigma \rho_{32}), \quad (2)$$

где β_1, β_2 – коэффициенты, пропорциональные разности поляризуемостей $\Delta\alpha_{1,2}$ активных центров в возбужденном состоянии и на уровнях дублета, $(n_{01,2} - n_{1,2})$ – резонансные вариации населенностей, t_0 – френелев коэффициент пропускания. Мнимая часть комплексного компонента в правой части (2) с нормирующим коэффициентом γ возникает при вводе локальной поправки к действующему полю и учитывает вклад диполь-дипольного взаимодействия в поле ближней к активному центру зоны. Его вещественная часть с показателем ненасыщенного резонансного поглощения κ представляет собой поле в дальней зоне и описывает динамическое коллективное радиационное затухание в ансамбле диполей. Второй же, мнимой, характеризуется динамический сдвиг частот оптических переходов $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ и $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$. Мнимый множитель в левой части (1) характеризует автомодуляционное смещение частоты поля, его величина определяется разностью поляризуемостей частиц на уровнях переходов и зависит от резонансной вариации разности населенностей. После подстановки (2) в систему (1) становится очевидным, что перестройка резонанса зависит от разности населенностей уровней.

Результаты моделирования

Непосредственно ставилась задача моделирования отражения импульсного сигнала низкоразмерным планарным квазикристаллом. Нормированная напряженность поля $e_i(\tau)$ светового импульса субпикосекундной длительности, зондирующего поверхность квазикристалла, задавалась в виде гиперболического секанса. Переходные процессы в трехуровневой схеме наведения поляризованности, а затем вынужденного и спонтанного распада этой поляризованности и заселенности происходят в сильно нестационарных условиях импульсного воздействия, поэтому неавтономная система уравнений (1), (2) рассчитывается численно. Амплитуды импульсов $e_i(\tau)$ соответствовали случаю рассматриваемых в теории когерентного взаимодействия так называемых π -импульсов. Величина полярного угла вектора Блоха [10], рассчитываемая как $\Theta_0 = \int_0^\infty e_i(\tau) d\tau$ и выражающая так называемую нормированную “площадь импульса поля”, для входных импульсов была сравнима или в несколько раз могла превышать значение π .

Примеры расчетного моделирования на основе системы (1), (2), наиболее характерные для большого числа вариантов трансформации импульсов, приведены ниже на рисунках 1–3 для временной зависимости величины $U(\tau)$. Разверткой этой нормированной (не имеющей размерности) величины на шкале времени характеризуется эволюция мощности отраженного светового сигнала. Время свержизлучения $\tau_R = T_2/\kappa$ не превышало 10^{-12} с, поэтому на рисунках временную развертку нормированной мощности импульсов удобно было привести именно на пикосекундной шкале времени.

Значения $U(\tau)$ пропорциональны квадрату модуля напряженности отраженного поля (r – френелев амплитудный коэффициент отражения поверхности)

$$e_r = -r \mu_1 T_2 E_i / \hbar + \kappa \{ \rho_{31} + \sigma \rho_{32} + i [\beta_1 (n_{01} - n_1) + \beta_2 (n_{02} - n_2)] e \}. \quad (3)$$

Наличие в (2) и (3) дополнительных к френелевым компонентом преломления и отражения определяет возможность послесвечения слоя с поверхностной резонансной поляризацией, происходящее после возбуждения в течение времени фазовой памяти ансамбля КИ [10]. Их мнимые составляющие характеризуют фазовую динамику материального отклика квазикристалла на когерентное поле, имеющую дисперсионную связь с энергетическим состоянием его среды. Это позволяет отнести квазидвумерный суперкристалл к метаповерхностям и ожидать нетривиальных следствий его реакции при отражении сигналов в виде сверхкоротких оптических импульсов

Преобразованному при нелинейном отражении сигналу соответствуют на приведенных рисунках 1–3 сплошные линии. На их фоне форма симметричного зондирующего сигнала $U_i(\tau) = e_i^2(\tau)$ (прерывистые линии) приведена в отдельном масштабе на вертикальной шкале, “события” для “входных” и отраженных сигналов на временной шкале совпадают. Развертки на рисунке 1 демонстрируют зависимость трансформации излучения от длительности “входного” импульса при его одинаковой пиковой мощности U_m . Различие в его длительности следует воспринимать визуально по приведенной форме сигнала на фрагментах рисунка.

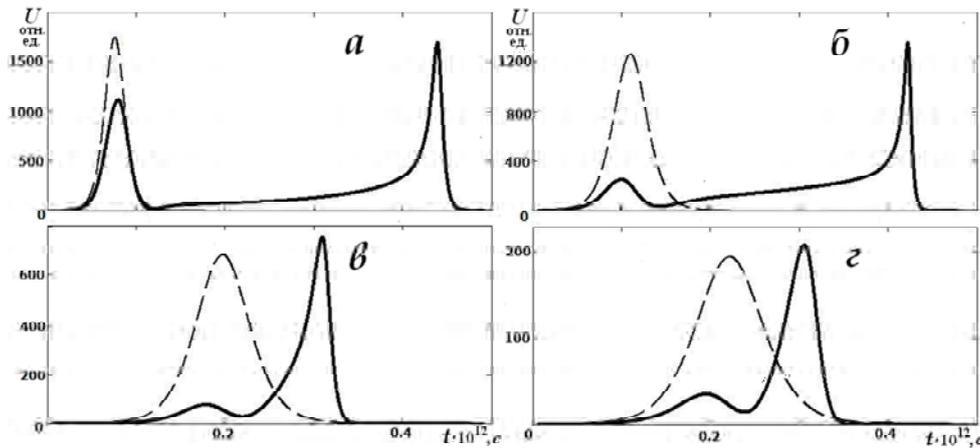


Рисунок 1 – Трансформация отраженных импульсов в зависимости от длительности “входных” импульсов возбуждения:

$$U_m = 2.5 \cdot 10^3 \text{ отн. ед.}, \kappa = 2.0, \beta_1 = 0.02, \beta_2 = 0.02, \lambda \sim 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \gamma = 2.5$$

Временной масштаб и диапазон возможных коэффициентов системы (1), (2) для анализируемых закономерностей в трансформации резонансных сигналов примерно соответствовал параметрам сред, рассмотренных в [5; 6]. При выборе параметров, в частности, также ориентировались на данные, приведенные в статьях [7–9].

Для частот, соответствующих экситонному диапазону и нанометрическим толщинам (то есть меньшим 10^{-7} м) пленок, можно выбирать величины γ в пределах примерно 1.5 ... 4.0 [7]. Оценку масштаба параметров и явлений необходимо

также дополнить указанием значений приблизительной мощности действующего на метаповерхность светового поля. Величина квадрата напряженности поля в световых монохроматических сигналах, приводящая к насыщению поглощения на резонансной частоте, примерно оценивается значением $\hbar^2/\mu_1^2 T_1 T_2$. Соответственно, приблизительные значения насыщающей интенсивности для этих сред могут иметь порядок не менее 10^3 Вт/см². Средняя пиковая интенсивность импульсов в релаксационных сериях, развиваемая в лазерном излучении на частотах в экситонном диапазоне, может приблизительно соответствовать уровню $\sim 10^4 \dots 10^5$ Вт/см², что примерно на 1–2 порядка выше мощности насыщения поглощения в рассматриваемых средах. В пиковой мощности одиночных импульсов, трансформация которых моделируется в данных расчетах, это превышение может достигать 5–6 порядков.

Рассчитываемая трансформация импульсов разнообразна и в ряде случаев носит характер расщепления импульсов (рисунки 1, в, з, 2, в, з). Это расщепление имеет признаки световой индукции, развивающейся в условиях запаздывания реакции на излучение трехуровневой среды и фазовой перестройки. Их следствием является перераспределение интенсивности в “индуктивных” составляющих расщепления. Отмечается заметная “связанность” составляющих в сдвоенных отраженных импульсах, иллюстрируемых на рисунках 2, а, б, 3, а-в. Во взаимном расположении контрастно разнесенных компонентах разверток, приведенных на рисунках 1, а, б, 3, з, есть признаки формирования расщепления типа “эхо”. Предсказываемые закономерности следует объяснять “переключением” резонанса поглощения, связанного с нелинейной перестройкой фазового соотношения светового поля и поляризации. Фазовая расстройка и происходящее “переключение” резонанса обусловлены смещением резонансной линии поглощения и частотным нелинейным уширением поля, вызванным дипольным взаимодействием и влиянием поглощения в квазирезонансных переходах на поляризуемость активных центров.

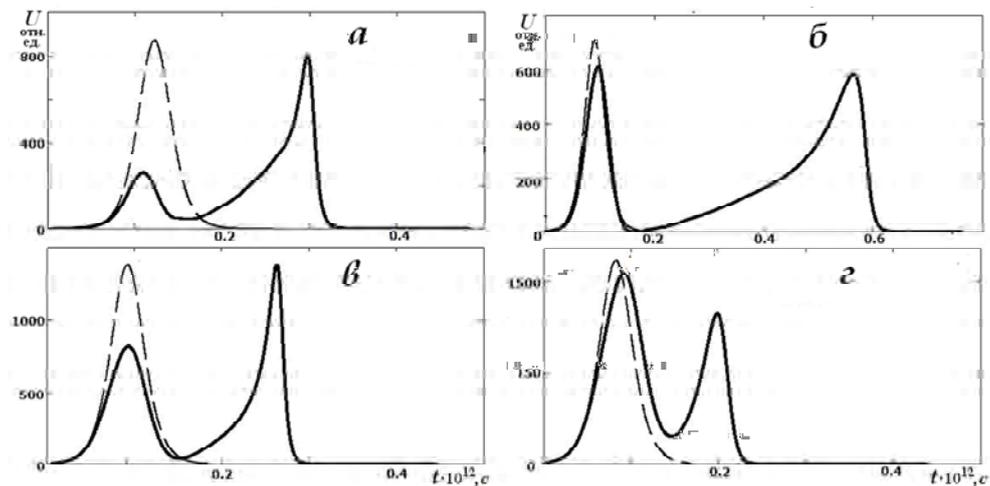


Рисунок 2 – Трансформация отраженных импульсов в зависимости от амплитуды “входных” импульсов возбуждения: $U_m = 2.5 \cdot 10^3$ (а), $5.0 \cdot 10^3$ (б), $8.0 \cdot 10^3$ (в), $1.0 \cdot 10^4$ отн. ед. (з), $\kappa = 1.5$, $\beta_1 = 0.02$, $\beta_2 = 0.025$, $\lambda \sim 1.3 \cdot 10^{-6}$ м, $\gamma = 3$

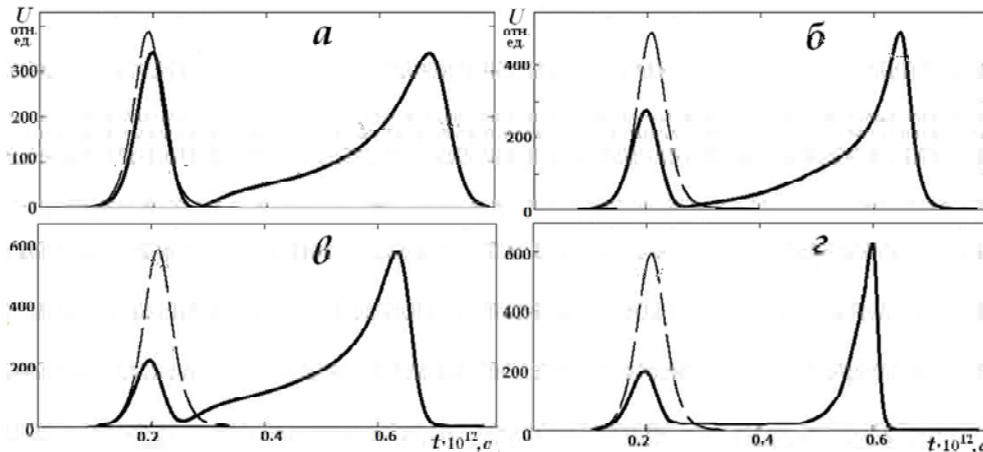


Рисунок 3 – Трансформация отраженных импульсов в зависимости от параметра резонансной нелинейности (показателя поглощения в квазикристалле):

$$\kappa = 2.0 (a), 2.5 (б), 3.2 (в), 4 (г); \beta_1 = 0.02, \beta_2 = 0.02, \lambda \sim 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \gamma = 2$$

Заключение

Резонансный оптический отклик суперкристалла, формируемого из элементарных излучателей типа легированных квантовых точек, судя по представленным расчетам, проявляет особую отражательную способность планарных наноразмерных систем на основе материалов этого типа. Закономерности резонансного отражения объясняются переключением оптического резонанса, происходящим в условиях фазовой нелинейности вынужденных релаксационных процессов в трехуровневой схеме взаимодействия квантовых точек и действующего поля когерентного излучения. Следствия нелинейной динамики реакции суперкристалла на когерентное излучение перспективны для применения в устройствах эффективной модуляции сверхкоротких световых сигналов. Метаповерхности из суперкристаллов тем самым могут рассматриваться в качестве кандидатов на реализацию систем нанофотоники с подобными функциями.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Low-Dimensional Semiconductor Superlattices Formed by Geometric Control over Nanocrystal Attachment / W.H. Evers [et al.] // *Nano Lett.* – 2013. – Vol. 13(6). – P. 2317–2323.
2. Quantum-dot supercrystals for future nanophotonics / A.S. Baimuratov [et al.] // *Scientific Reports.* – 2013. – Vol.
3. **Mak, K. F.** Photonics and optoelectronics of 2D semiconductor transition metal dichalcogenides / K. F. Mak, J. Shan // *Nature Photonics.* – 2016. – Vol. 10. – P. 216–226.
4. A two-dimensional conjugated aromatic polymer via C-C coupling reaction / W. Liu [et al.] // *Nature Chemistry.* – 2017. – Vol. 9. – P. 563–570.
5. Quantum metasurfaces with atom arrays / R. Bekenstein [et al.] // *Nature Physics.* – 2020. – Vol. 16. – P. 676–681.
6. Realization of an Electrically Tunable Narrow-Bandwidth Atomically Thin Mirror Using Monolayer $MoSe_2$ / P. Back [et al.] // *Phys. Rev. Letts.* – 2018. – Vol. 120. – P. 037401.
7. Кооперативное излучение ансамбля трехуровневых Λ -излучателей в резонаторе: взгляд с точки зрения динамики нелинейных систем / И. В. Рыжов [и др.] // *ЖЭТФ.* – 2017. – Т. 151, вып. 5. – С. 803–822.
8. Nonlinear optical dynamics of a 2D semiconductor quantum dot super-crystal: Emerging multistability, self-oscillations and chaos / V.A. Malyshev [et al.] // *Journal of Physics: Conf. Series.* – 2018. – Vol. 1220. – P. 012006(1–4).

9. Nonlinear optical response of a two-dimensional quantum-dot supercrystal: Emerging multistability, periodic and aperiodic self-oscillations, chaos, and transient chaos / I. V. Ryzhov [et al.] // Phys. Rev. – 2019. Vol. A100. – P. 033820–1–20.

10. *Гадомский, О. Н.* Эхо-спектроскопия поверхности / О. Н. Гадомский, Р. А. Власов. – Минск : Наука і тэхніка, 1990. – 246 с.

Поступила в редакцию 26.05.2021 г.

Контакты: va_yurevich@mail.ru

(Юревич Владимир Антонович)

Yurevich V. RESONANT REFLECTION OF SHORT OPTICAL PULSES BY QUASI-TWO-DIMENSIONAL SUPERCRYSTAL.

Based on the proposed nonlinear model of energy exchange between coherent radiation field and a planar quasicrystal made of semiconductor quantum dots that respond to a resonant light field according to a three-level interaction scheme, a numerical analysis of the change in the shape of pulsed optical signals reflected by the quasicrystal surface is carried out.

Keywords: nanoscale quasicrystals, semiconductor quantum dots, resonant optical nonlinearity, coherent optical effects, metasurfaces.

УДК 535.44:621.373

ГИСТЕРЕЗИС В ИЗЛУЧЕНИИ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ЛАЗЕРА С КВАЗИДВУМЕРНЫМ СУПЕРКРИСТАЛЛОМ

Е. В. Тимошенко

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Ю. В. Юревич

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

В статье приведено теоретическое решение задачи об автомодуляционном изменении мощности выходного излучения лазера с отражателем на основе квазидвумерного суперкристалла, примыкающего к выходному зеркалу резонатора. Как следствие существования этого предельно компактного элемента в системе обратной связи лазерного устройства эффективное отражение в резонаторе становится нелинейным и особым образом критично к мощности и частоте излучения генерации. Для модельных параметров, соответствующих инжекционным лазерам, предсказывается бистабильность и возможность гистерезисного переключения в зависимости мощности излучения от уровня тока накачки.

Ключевые слова: лазерная генерация, внутриврезонаторная модуляция излучения, низкоразмерный квазикристалл квантовых точек, резонансная оптическая нелинейность.

Введение

Развитие нанотехнологий позволило создавать так называемые метаматериалы, то есть вещества с оптическими свойствами, отсутствующими у их природных составляющих [1]. Особо актуальным представляется изучение свойств, формируемых на их основе планарных и крайне низкоразмерных объектов, получивших название метаповерхностей [2] и образованных излучающими или активно реагирующими на излучение элементами – мета-атомами, то есть образованиями, превышающими обычный размер атома. Примером мета-атомов могут служить экситоны. Допуская более или менее простую модельную форму, например, форму элементарного диполя, эти активные центры, имея размер до нескольких нанометров, обладают дискретными свойствами энергетического спектра. Установлено, что планарные структуры такого формата из регулярно расположенных дипольных центров, в частности, квантовых точек (КТ), образуя квазикристаллические низкоразмерные сверхрешетки, представляют собой один из примеров подобных объектов [3; 4] с возможностью эффективного контроля их оптических свойств при изменении формы и химического состава образующих элементов, а также геометрии их структуры. Квазикристаллы из КТ составлены на основе используемых в оптике и лазерной физике диалкогенидов переходных металлов, полупроводников или органических полимеров. Ввиду возможности создания высокой концентрации активных центров (именно КТ) эти материалы в низкоразмерном формате обладают свойствами плотных резонансных сред, характеризующихся особым рода фазовой нелинейностью, поэтому их нередко именуют квазидвумерными суперкристаллами [5]. В подавляющем большинстве материалами, образующими суперкристалл КТ, служат именно полупроводники, энергетическая структура ко-

© Тимошенко Е. В., Юревич Ю. В., 2021

торых может легко управляться внешним воздействием. Эта особенность делает их особо привлекательными для разработки управляемых внешним излучением компактных устройств нанофотоники. Реакция ансамблей КТ, формирующих структуру квазикристаллов, на резонансное оптическое излучение существенно нелинейна [6]. Квантовые переходы с поглощением или излучением, совершаемые в этих ансамблях в экситонной области спектра, характеризуются гигантскими силами осциллятора, что приводит к резульативному проявлению нелинейных оптических эффектов при умеренных уровнях интенсивности действующего в среде когерентного излучения. Для суперкристаллов характерно наличие дополнительных степеней свободы в схеме резонансного взаимодействия с когерентным излучением, например стимулирующее фазовую нелинейность возбуждение соседних с основным переходов и дипольное взаимодействие ближних полей КТ. Поэтому суперкристаллы, обладая наноразмерной толщиной, характеризуются уникальными оптическими свойствами. Суперкристалл, например, способен нелинейно, с проявлением гистерезиса, отразить световое поле в определенном спектральном диапазоне [7]. То есть, метаповерхность из квазикристалла КТ является эффективным критичным к частоте и интенсивности внешнего сигнала зеркалом нанометровой толщины, что делает их в высшей степени перспективными для применения в устройствах нанофотоники. Нелинейный отклик низкоразмерных квазикристаллов КТ на когерентное излучение особо выражен в спектральной области, соответствующей экситонным переходам [4; 7].

Постановка задачи. Оптическая бистабильность

Изучение возможности создания нелинейных отражателей, оптических фильтров и пассивных модуляторов в нанометровом формате необходимо для нужд разработки и совершенствования компактных устройств управления потоками когерентного излучения. Подобные структуры можно применить в качестве компактных элементов с нелинейным отражением (SESAM-зеркал) с целью внутрирезонаторной модуляции лазерного излучения [8; 9]. В настоящей работе поставлена задача изучения проявления оптических свойств и действенности суперкристалла КТ в качестве подобного элемента, помещенного в резонатор инжекционного полупроводникового лазера (ИПЛ), который излучает в установившемся режиме.

Теоретические оценки показывают, что отражательная способность тонкого слоя квазикристалла в условиях оптического резонанса (имеется в виду близость или точное совпадение несущей частоты падающего светового пучка и собственных частот активных центров) должна существенно определяться дополнительной к нерезонансным френелевым компонентам отражения (преломления) составляющей, которая обусловлена резонансной поверхностной поляризацией [10; 11]. В случае, если вещество модулятора представляет собой суперкристалл КТ, влияние этой составляющей возрастает вследствие ощутимого диполь-дипольного взаимодействия активных центров [5; 11]. Существенным оказывается при этом также квадратичный эффект Штарка [12]. Его особенность в рассматриваемом случае – отличный от нуля дефект поляризуемости активных центров в основном и возбужденном состояниях.

Эти свойства взаимодействия выступают факторами, усиливающими резонансную нелинейность отклика среды на интенсивное квазимонохроматическое поле. В результате в планарных слоях суперкристаллов может наблюдаться явление

ние бистабильности в отражении или пропускании, обусловленное, в основном, корреляциями образующих метаповерхность дипольных центров. Оптическая бистабильность представляет собой особый эффект, крайнее выражение нелинейности отклика физической системы, который проявляется в возможности двух ее стабильных состояний при одном и том же значении светового поля внешнего сигнала. В возникновении бистабильности, кроме нелинейности, нужна положительная обратная связь, поэтому кроме активной среды в схеме обратной связи необходимо внешнее зеркало. Бистабильность в оптическом слое с резонансным откликом называют внутренней, поскольку ее проявление возможно без зеркала. В этом случае обратная связь возникает за счет действия взаимосвязанных нелинейных эффектов, следствия которых в определении стабильных состояний отражения или пропускания слоя могут усиливать или компенсировать друг друга. Проявление бистабильности должно означать возникновение резкого, обладающего гистерезисными свойствами, скачка в нелинейном отражении суперкристалла КТ.

Наличие низкоразмерного суперкристалла как резонансного отражателя в системе обратной связи устройства ИПЛ без нарушения его компактности должно привести к возможности столь же резкого броска в выходной мощности при незначительном изменении уровня накачки. На практике это приводит к такой ситуации, что изменение выходной мощности при определенном сочетании параметров усиления и обратной связи перестает “следить” за изменением накачки и инверсной заселенности. Временное поведение лазера как физической системы, благодаря действию отражателя с гистерезисными свойствами, должно потерять устойчивость, приобрести автомодуляционную динамику. Одним из следствий утраты устойчивости может быть самопроизвольный переход лазера к режиму автоколебаний.

В настоящей работе исследуются особенности зависимости мощности выходного излучения инжекционных лазеров от уровня мощности накачки при условии, что схема обратной связи устройства ИПЛ содержит слой суперкристалла. Данный тонкослойный элемент выступает в качестве пассивного модулятора добротности лазерного резонатора. Нелинейное изменение его отражения определено несколькими эффектами, сопровождающими резонансный отклик квазикристалла – насыщением поглощения, влиянием ближних полей дипольных частиц и автомодуляционным уширением линии поглощения. Нелинейностью типа насыщения характеризуется усиление в рабочей среде ИПЛ. Фактор нелинейности также представлен порождаемой интерференционным полем лазерных мод продольной неоднородностью усиления в виде регулярной структуры инверсии. Уровень неоднородности инверсии в активных средах ИПЛ может, однако, снижаться за счет диффузии свободных носителей заряда. Решаемая в настоящей работе задача изучения комплексного действия указанных резонансных нелинейных эффектов в усиливающем элементе и модулирующем слое суперкристалла, их способности усиливать или ослаблять один другого в зависимости от мощности лазерного поля ставится впервые.

Основные уравнения

При формулировке расчетной модели исходили из достаточно обычной схемы лазера, когда плоский резонатор образован параллельными гранями усиливающего элемента длины L ; вдоль оси резонатора ориентирована ось Ox . Зеркало слева

(в точке $x = 0$) на частоте генерации имеет коэффициент отражения, равный r_0 . Зеркало справа (в точке $x = L$) является выходным и отражает поле генерации частично. Планарный слой суперкристалла примыкает к выходной грани (толщина слоя l считается много меньшей длины волны действующего на атомы пленки резонансного излучения $l = 2\pi c/\omega$). То есть, в рассматриваемой одномерной схеме модулирующий квазикристалл представляется точечным элементом. Предполагается, что набор спектральных параметров суперкристалла таков, что отражающая выходная грань усиливающего элемента представляет резонансный отражатель – частота основного перехода суперкристалла на спектральной шкале находится в полосе усиления активного слоя ИПЛ, хотя может и не совпадать с центром спектральной линии усиления. Результирующий коэффициент отражения R , рассчитываемый аналогично [13], при просветлении среды квазикристалла зависит не только от амплитуды, но и оказывается особенным образом критичным по отношению к фазе генерируемого в резонаторе светового поля.

Используем распределенную модель взаимодействия инвертированной среды усиливающего элемента и поля генерации в плоском резонаторе. Следуя [14], продольное изменение напряженности встречных полей, образующих излучаемую моду (стоячую волну в резонаторе), в стационарном режиме свечения может быть выражено решением системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left[(1 + k^2 D + S_+ + S_-) (1 + S_+ + S_-) - 2S_+ S_- \right] \frac{dS_{\pm}}{dx} = \pm G S_{\pm} (1 + k^2 D + S_{\pm}) \quad (1)$$

$$(0 \leq x \leq L).$$

Уравнения (1) формулируются как стационарное приближение полуклассической динамической модели генерации, в которой отклик среды с инверсной заселенностью, модулированной вдоль оси резонатора полем стоячей волны на частоте генерации, описывается с применением квантовомеханической матрицы плотности. Уже указывалось, что при анализе баланса энергии излучения и среды в процессах генерации в ИПЛ, необходимо учитывать, что продольная модуляция инверсии внутрирезонаторным интерференционным полем ослабляется эффектами, обусловленными диффузией носителей в активном слое.

В системе (1) S_+ , S_- – нормированные по уровню мощности насыщения (не имеющие размерности) интенсивности встречных плоских волн, G – величина коэффициента усиления, достигаемого при заданном уровне накачки, k – модуль волнового вектора, D – коэффициент диффузии носителей, L – длина активного слоя лазерного диода. Линейными потерями излучения при записи уравнений (1) пренебрегалось. Вклад нерезонансных потерь интенсивности поля внутри усиливающего элемента (на поглощение и рассеяние) может быть значительным, поэтому целесообразно предположить, что коэффициент отражения левого зеркала r_0 отличен от 1 (в реальных схемах это зеркало нередко глухое – $r_0 = 1$). Полагая $r_0 < 1$, можно учесть этот вид потерь, условно локализовав их источник. Граничные условия, соответствующие отражению встречных волн в рассматриваемой схеме, записываются в виде:

$$S_+(0) = r_0 S_-(0), \quad S_-(L) = R S_+(L), \quad (2)$$

где

$$R = \frac{\{r + g[1 - r\gamma(\Delta - \beta S')]\}^2 + g^2(\Delta - \beta S' + r\gamma)^2}{\{1 + g[1 - \gamma(\Delta - \beta S')]\}^2 + g^2(\Delta - \beta S' + \gamma)^2}. \quad (3)$$

Выражение (3) для величины резонансного отражения слоя R в условиях (2) обосновано, например, в [13], где аналогично [10] использовано приближение сверхтонкого слоя в естественном предположении нормального падения лазерного луча на поверхность отражателя. Отражение R определяется величинами: $r = (\eta - 1)/(\eta + 1)$ – френелевым (нерезонансным) значением отражательной способности суперкристалла с относительным показателем преломления

η , $g = \frac{\kappa_0 l}{1 + \Delta^2 + \sigma S'}$ – показателем нелинейного поглощения слоя с учетом

форм-фактора резонансной линии поглощения, κ_0 – коэффициентом ненасыщенного поглощения, Δ – дефектом частоты (нормированной по ширине линии отстройки частоты действующего поля ω от частоты резонанса), β – показателем резонансной нелинейности рефракции, $\gamma = c/3\omega l$ – лоренцевым коэффициентом при учете ближних полей дипольных центров. Величины составляющей интенсивности генерируемого поля в положительном направлении $S_+(L)$ и интенсивности S' излучения, действующего на активные центры модулирующего слоя, связаны соотношением:

$$\frac{S'}{S_+(L)} = \frac{4\eta}{(1+\eta)^2} \frac{1}{[1 + g - \gamma g(\Delta - \beta S')]^2 + g^2(\Delta - \beta S' + \gamma)^2}. \quad (4)$$

Соотношением (4), учитывающим нелинейные и дисперсионные свойства реакции резонансной среды на излучение, выражена пропускательная способность модулятора. Нормированная интенсивность S излучения, прошедшего в среду отражателя (в рассматриваемой схеме – интенсивность выходного излучения), рассчитывается без учета лоренцевской поправки [9]:

$$S = S' [1 - \gamma g(\Delta - \beta S')]^2 + (\gamma g)^2 S'. \quad (5)$$

Выражениями (3), (4) определяется зависимость эффективного энергетического коэффициента отражения модулятора R от интенсивности генерации. В схеме расчета учтена возможность различия сечений перехода в материалах активного элемента и отражателя, величина σ в (3), (4) равна отношению сечений перехода в слое суперкристалла и в усиливающей среде. Включение в (3)–(5) параметра нелинейной рефракции β представляется в данной модели принципиальным моментом. В среде резонансного отражателя учитывается автомодуляционное смещение спектральной линии поля, коэффициент β пропорционален разности поляризуемостей дипольных частиц на уровнях основного перехода [15]. Для используемых в оптике полупроводников типична зависимость показателя преломления от энергетического состояния среды (от уровня инверсии), этот коэффициент аналогичен известному в лазерной оптике полупроводников параметру – фактору Хенри [16]. В стационарном режиме его учет выражается в смещении частоты излучения, действующего на активные центры квазикристалла, пропорциональном интенсивности излучения. Наряду с этим фактором учитывается типичное для суперкристаллов влияние ближних полей элементарных диполей на поляризуемость активных центров. Соответствующие компоненты с нормированным лоренцевым параметром γ также следует рассматривать как дополнительный нелинейный вклад в частотную отстройку. Решение системы уравнений (1) при условиях (2) дает возможность расчета зависимости стационарной мощности излучения в резонаторе на частоте основной моды (ее частота, однако, может быть отстроена от ча-

стоты резонанса поглощения слоя), характеристик резонатора и релаксационных параметров среды резонансного отражателя при учете спектрального уширения и диполь-дипольного взаимодействия. Отметим еще одну важную особенность модели – в ней учитывается отстройка частоты генерации от частоты резонанса поглощения среды суперкристалла. Наличие дисперсионных компонентов (то есть, компонентов, содержащих отстройку Δ) в соотношениях (3)–(5) определено именно ненулевым дефектом частоты и означает учет еще одного нелинейного фазового эффекта – затягивания частоты к центру линии. В этом случае поглощение в центре линии может насыщаться составляющими поля излучения, отстроенными по частоте в пределах ширины резонанса [13].

Дисперсионные соотношения и результаты расчета

Схема расчета (1) представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, относительно легко разрешимых в аналитической форме после их преобразования в систему уравнений для переменных для $S_+ - S$ и $S_+ S_-(1 + S_+ + S_-)$. Интегрирование системы (1) с оригинальными граничными условиями (2), (3) приводит к аналитическим выражениям, связывающим значения интенсивности выходного излучения с уровнем мощности накачки и интенсивностью лазерного поля в резонаторе:

$$GL = S_+(L) - \frac{F}{2} - \frac{F^2 + 2(1 + k^2D)F}{2[2S_+(L) - F]} + \ln \left[\frac{2S_+(L) - F}{\sqrt{F^2 + 2(1 + k^2D)F}} \right]$$

$$S_+(L) = \frac{(1 + \eta)^2}{4\eta} S^+ \left\{ [1 + g - \gamma g (\Delta - \beta S^+)]^2 + g^2 (\Delta - \beta Y^+ + \gamma)^2 \right\} \quad (6)$$

$$S_+(0) = \frac{r_0}{(1 + r_0)^2} + \frac{1 + r_0}{2} F, \quad F = \frac{2R S_+^2(L)}{1 + k^2D + (1 + R) S_+(L)}$$

Использованные в системе (1) и дисперсионном выражении (6) величины и коэффициенты нормированы, поэтому последнее соотношение универсально, так как его можно использовать в расчётах зависимости стационарной выходной мощности от уровня накачки для твердотельных и полупроводниковых лазеров, способных излучать в непрерывном режиме. Для ИПЛ эту зависимость именуют ватт-амперной характеристикой. Накачка лазеров этого типа в непрерывном режиме свечения осуществляется постоянным током, идущим через лазерный диод, и уровню силы тока накачки прямо пропорциональны начальная инверсия и, соответственно, достижимый уровень ненасыщенного усиления, который в расчетной схеме (1) определяется параметром GL . Оценку выходной мощности S на основе зависимости $S_+(L)$ от достигнутого уровня усиления GL (то есть, и от значений тока накачки) удобно проводить, применяя методику параметрического расчета. Параметр S^+ в выражениях (3)–(5) и дисперсионном соотношении (6) следует считать неотрицательным и линейно нарастающим, тогда для получения соответствующей связи величин значения S и GL рассчитываются как его функции.

Расчеты, результаты которых приведены ниже, проводились для модели инжекционного лазера на основе $InAs/InAlAs$ на подложках $GaAs$, примерные параметры которого известны из работ [17; 18], коэффициент усиления G в активном слое предполагался не ниже 10 см^{-1} на длине активного слоя $L = 0.5 \text{ мм}$ при длине

волны $\lambda = 1.25 \cdot 10^{-6}$ м, интенсивность, при которой возможно насыщение усиления, примерно равна $1 \cdot 10^5$ Вт/см². Предполагалось, что на выходном зеркале лазера помещался модулятор на основе суперкристалла (в рассматриваемой расчетной модели – это точечный элемент). Частота экситонного перехода этого слоя соответствовала частоте излучения инжекционного лазера. Величины характеристик активного поглощения суперкристалла, образующего пленку-модулятор, перекрывались с теми, которые использовались в работах [4; 5]. Показатель резонансного поглощения слоя изменялся в пределах $1 \dots 3$; интенсивность, при которой ожидалось насыщение поглощения, была не ниже $5 \cdot 10^3$ Вт/см². Результат расчета зависимости $S(GL)$ рассматривается как теоретический аналог ватт-амперной характеристики.

Основной характеристикой применяемого в качестве модулятора тонкого резонансного слоя является величина показателя ненасыщенного (начального) поглощения $\kappa_0 l$. Если его величина относительно невелика, ход кривых выражает достаточно тривиальную зависимость $S(GL)$ с очевидной пороговой особенностью – выходная мощность плавно нарастает с увеличением уровня накачки (рис. 1). Уже при относительно небольшом превышении порога генерации нелинейность кривых с увеличением показателя поглощения $\kappa_0 l$ становится более выраженной, по мере этого роста пороговые значения усиления несколько снижаются. Это обусловлено особенностью резонансного отражения – вклад резонансной поверхностной поляризованности в отсутствие насыщения увеличивает отражение [13], которое затем, на стадии просветления пленки мощностью нарастающего излучения генерации, снижается. Применение квазикристаллов с большей концентрацией активных центров (соответственно, и с более высоким уровнем поглощения $\kappa_0 l$) должно привести к качественному изменению хода зависимости $S(GL)$. При определенных соотношениях дефекта частоты Δ , параметров поглощения и нелинейности отклика пленки на излучение зависимость $S(GL)$ в определенном диапазоне значений тока накачки утрачивает однозначный характер и выражает бистабильную связь выходной интенсивности и мощности накачки.

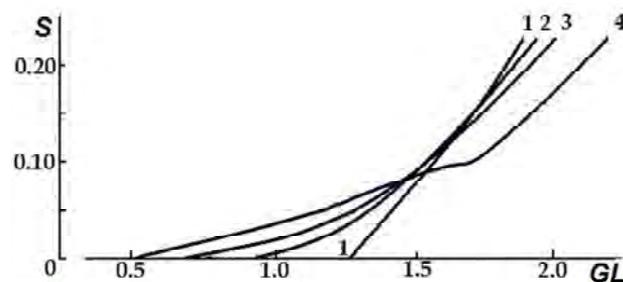


Рисунок 1 – Зависимость выходной интенсивности от уровня мощности накачки (в относительных единицах) для различных значений показателя поглощения: $\kappa_0 l = 0$ (1), 0.5 (2), 0.8 (3), 1.25 (4), $\Delta = 0$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 1.06$, $\sigma = 20$, $\eta = 3.6$, $\lambda = 1.25 \cdot 10^{-6}$ м, $r_0 = 0.32$, $D = 1.0 \cdot 10^{-9}$

Для иллюстрации на рисунке 2 выбраны варианты расчета для сочетания параметров лазерно-оптической системы, которые соответствуют в основном аномальному ходу кривых $S(GL)$. Такой ход кривых свидетельствует именно о бистабильном свойстве описываемых ими зависимостей, так как величина параметра

накачки GL для зависимостей рисунка 2 нормирована по пороговому значению GL первого из вариантов кривых и представлена как относительный параметр тока накачки α . Результаты, полученные путем многократных расчетов характеристик $S(GL)$ и подобные приведенным, позволяют сразу сделать вывод о том, что возникновение бистабильных особенностей у зависимостей $S(GL)$ существенно определяется уровнем резонансного поглощения, оцениваемого значениями $\kappa_0 l$ (рис. 2, а), а также от дефекта частоты Δ (рис. 2, б).

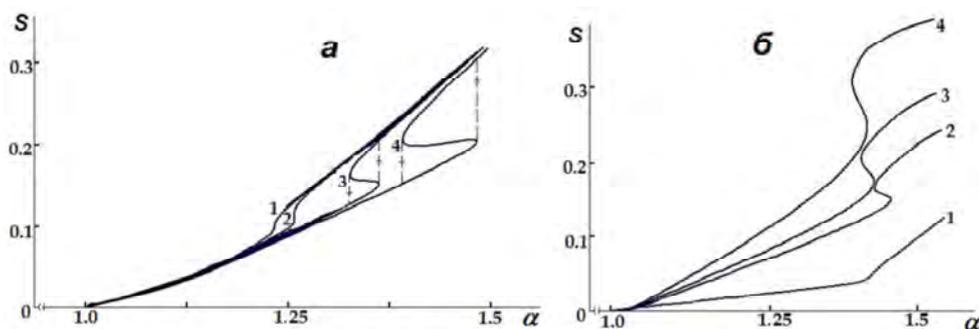


Рисунок 2 – Зависимость выходной интенсивности от параметра накачки для различных значений показателя поглощения и отстройки частоты генерации от резонанса поглощения (на кривых 3, 4 фрагмента а пунктиром указаны направления гистерезисного скачка): $\kappa_0 l = 1.2$ (1), 1.8 (2), 2.5 (3), 3.0 (4), $\Delta = 0.5$, $\sigma = 50$ (а); $\kappa_0 l = 2.2$, $\Delta = 0$ (1), 0.5 (2), 1.0 (3), 1.2 (4), $\sigma = 40$ (б); $\beta = 0.1$, $\gamma = 1.04$, $\eta = 3.6$, $\lambda = 1.25 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $r_0 = 0.32$

Демонстрируемым на рисунке 2 зависимостям характерны участки с большой крутизной, где незначительному изменению накачки соответствует резкое изменение выходной интенсивности S . Изменение параметров в схеме, например, отражения r_0 в резонаторе и отношения сечений перехода σ в среде модулятора и активном слое усиливающего элемента, может привести к качественной деформации характеристик. Особо отметим, что различие сечений должно быть довольно значительным – соответствовать условию $\sigma \geq 20$, для расчетных кривых ватт-амперной характеристики тогда характерен S-образный изгиб. Соответственно, зависимость интенсивности $S(GL)$ на некотором отрезке значений GL становится неоднозначной. В этом случае аналог ватт-амперной характеристики проявляет бистабильность, т. е. одному значению мощности накачки соответствует два значения выходной интенсивности излучения. Переключение зависимости с одной ветви бистабильной характеристики на другую возможно при изменении уровня накачки от достигнутого в окрестности точек поворота на гистерезисных кривых. В реальном устройстве такая особенность характеристики выходной мощности должна означать резкое, практически скачкообразное, нарастание интенсивности излучаемого светового поля при увеличении накачки. Можно предположить возможность генерации при снижении накачки от уровня, который соответствует правой точке поворота. Уменьшение скорости накачки в окрестности скачка не должно приводить к немедленному столь же резкому снижению излучаемой мощности. Бросок “вниз” на кривых $S(GL)$ должен произойти при меньшем уровне накачки, расстояние между точками поворота характеристики соответствует ширине петли гистерезиса. Это расстояние можно регулировать, изменяя уровень обратной связи или показатель поглощения пленки модулятора.

Физическую причину возникновения резкого, обладающего гистерезисным свойством скачка в зависимостях выходного излучения следует связать с действием в рассматриваемой схеме лазера нескольких взаимосвязанных нелинейных механизмов, определяющих его реакцию на фактор накачки. Для усиления в активном элементе и поглощения в среде квазикристалла характерно насыщение, его следствия различны для обеих сред – резонансы усиления и поглощения могут быть разнесены на шкале частот и параметры нелинейности, характеризующие оба процесса, различаться. Изменение отражательной способности суперкристалла происходит в результате резонансного просветления, которое сопровождается автомодуляционным смещением фазы излучения. Смещение фазы обусловлено тремя факторами: диполь-дипольным взаимодействием и влиянием спектрального уширения поля, действующего на активные центры суперкристалла, а также затягиванием частоты к центру линии. При определенных значениях параметров лазерной системы следствия фазовых автомодуляционных эффектов в их влиянии на баланс мощности в лазере приобретают встречный характер. В некоторой области значений мощности генерации, соответствующей насыщению поглощения, становится возможной их взаимная компенсация – этой зоне параметров устройства и характеристик светового поля становится присущей бистабильная связь характеристик излучения и накачки. Следует считать, что удовлетворяется условие особого рода нелинейного резонанса, поэтому гистерезисные зависимости на рисунке 2 и представляют собой деформированные резонансные кривые.

Заклучение

В предложенной расчетной модели предсказывается возможность наблюдения бистабильной и гистерезисной связи мощностей выходного излучения и накачки инжекционных лазеров при условии применения отражателя на основе квазидвумерного суперкристалла в схеме обратной связи. Основным фактором проявления бистабильности и обусловленного этим резкого переключения мощности выходного излучения оказывается нелинейное смещение фазы излучения, происходящее на метаповерхности, которую, в сущности, представляет низкоразмерный квазикристалл КТ. Автомодуляционное фазовое смещение вызвано эффектами, которые сопровождают резонансное просветление пленки активной среды и особо присущи суперкристаллам. Включение подобного элемента в структуру SESAM-отражателя способно существенно оптимизировать его действие. Модельные расчеты бистабильности проведены для параметров инжекционных лазеров. Применение планарного элемента из квазикристалла КТ именно в этом случае представляется предпочтительным, поскольку не нарушает компактности лазерного устройства. Типичное для бистабильности относительно резкое переключение уровня обратной связи в ходе генерации способно обусловить самопроизвольное возникновение режима регулярных пульсаций выходной интенсивности, который имеет высокую практическую значимость и обычно является результатом стимулирования за счет внешних устройств, синхронизированных с процессами накачки и значительно усложняющими оптоэлектронную схему ИПЛ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Alù, A.* Prime time / A. Alù // Nature Mater. – 2016. – Vol.15. – P. 1229–1231. <https://doi.org/10.1038/nmat4814>

2. Метаматериалы и метаповерхности / И. В. Семченко [и др.] // Наука и инновации. – 2020. – № 8(210). – С. 23–27.
3. Long-range orientation and atomic attachment of nanocrystals in 2D honeycomb superlattices / M. P. Boneschanscher [et al.] // Science – 2014. – Vol. 344, P. 1377–1380. <https://doi.org/10.1126/science.1252642>
4. Low-Dimensional Semiconductor Superlattices Formed by Geometric Control over Nanocrystal Attachment / W.H. Evers [et al.] // Nano Lett.– 2013. – Vol. 13(6). – P. 2317–2323.
5. Nonlinear optical response of a two-dimensional quantum-dot supercrystal: Emerging multistability, periodic and aperiodic self-oscillations, chaos, and transient chaos / I. V. Ryzhov [et al.] // Phys. Rev. A. – 2019. – Vol. 100. – P. 033820.
6. **Mak, K. F.** Photonics and optoelectronics of 2D semiconductor transition metal dichalcogenides / K. F. Mak, J. Shan // Nature Photonics. — 2016. – Vol. 10. – P. 216–226.
7. Large Excitonic Reflectivity of Monolayer $MoSe_2$ Encapsulated in Hexagonal Boron Nitride / G. Scuri [et al.] // Physical Review Letters. – 2018. – Vol. 120. – P. 037402. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.037402>.
8. Ultrashort-pulse laser with an intracavity phase shaping element / Metzger N.K. [et al.] // Optics Express. – 2010. – Vol. 16, No.8. – P. 8123–8134.
9. **Keller, U.** Ultrafast solid-state laser oscillators: a success story for the last 20 years with no end in sight / U. Keller // Appl. Phys. B. – 2010. – Vol. 100. – P. 15–28. <https://doi.org/10.1007/s00340-010-4045-3>
10. **Гадомский, О. Н.** Эхо-спектроскопия поверхности. / О. Н. Гадомский, Р. А. Власов. – Минск : Наука і тэхніка. – 1990. – 246 с.
11. **Захаров, С. М.** Взаимодействие УКИ света с тонкопленочными резонаторными структурами / С. М. Захаров // ЖЭТФ. – 1998. – Т. 114, вып. 5(11). – С. 1578–1594.
12. Optical Stark effect in a quantum dot: Ultrafast control of single exciton polarizations / T. Unold [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 92, № 15. – P. 157401(1-4).
13. **Timoshchenko, E. V.** Resonance reflection of light by a thin layer of a dense nonlinear medium. / E. V. Timoshchenko, V. A. Yurevich, Yu. V. Yurevich // Technical Physics. – 2013. – Vol. 58. – P. 251–254. <https://doi.org/10.1134/S1063784213020254>
14. **Юревич, В. А.** О влиянии нелинейности показателя преломления на выходную мощность лазера / В. А. Юревич // Доклады АН БССР. – 1982. – Т. 26, № 7. – С. 600–603.
15. **Апанасевич, П. А.** Основы теории взаимодействия света с веществом / П. А. Апанасевич. – Минск : Наука і тэхніка, 1977. – 496 с.
16. **Garmire, E.** Resonant optical nonlinearities in semiconductors / E. Garmire // IEEE Journ. Sel. Top. Quant. Electron. – 2000. – Vol. 6, № 6. – P. 1094–1110.
17. Rabi oscillations in the excitonic ground-state transition of $InGaAs$ quantum dots / P. Borri [et al.] // Phys. Rev. B. – 2002. – Vol. 66, No. 8. – P. 081306(1-4).
18. **Panzarini, G.** Self-induced transparency in semiconductor quantum dots / G. Panzarini, U. Hohenester, E. Molinari // Phys. Rev. B. – 2002. – Vol. 65, No. 16. – P. 165322(1-6).

Поступила в редакцию 04.06.2021 г.

Контакты: timoshchenko@msu.by

(Тимошенко Елена Валерьевна, Юревич Юрий Владимирович)

Timoshchenko E., Yurevich Yu. HYSTERESIS IN THE EMISSION OF A SEMICONDUCTOR LASER WITH A QUASI-TWO-DIMENSIONAL SUPERCRYSTAL.

A theoretical solution to the problem of the self-modulation variation of the output radiation power of a laser with a reflector based on a quasi-two-dimensional supercrystal adjacent to the output mirror of the cavity is presented. As a consequence of the existence of this extremely compact element in the feedback system of the laser device, the effective reflection in the cavity becomes nonlinear and in a special way critical to the power and frequency of the lasing radiation. For the model parameters corresponding to injection lasers, bistability and the possibility of hysteresis switching of the dependence of the radiation power on the level of the pump current are predicted.

Keywords: laser generation, intracavity radiation modulation, low-dimensional quasicrystal of quantum dots, resonant optical nonlinearity.

УДК 521.32

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПЕРВЫХ ПРОЛЕТОВ
НАНОСПУТНИКА CUBEVEL-1
НАД УНИВЕРСИТЕТСКОЙ НАЗЕМНОЙ СТАНЦИЕЙ**

А. А. Спиридонов

старший преподаватель

Белорусский государственный университет

Д. В. Ушаков

кандидат физико-математических наук

Белорусский государственный университет

В. Е. Черный

старший научный сотрудник

Белорусский государственный университет

В. А. Саечников

доктор физико-математических наук

Белорусский государственный университет

Проведено предполетное прогнозирование орбитальных параметров наноспутника CubeVel-1 Белорусского государственного университета на основе численного анализа истории 5 запусков в 2018 г. космических аппаратов на солнечно-синхронную орбиту с китайского космодрома Цзюцюань двухступечатыми ракетносителями Long March 2C и 2D. В модели возмущенного кругового движения определен вектор состояния наноспутника БГУ CubeVel-1 на момент времени эпохи по известным значениям времени запуска, наклонению орбиты, продолжительности активного участка траектории выведения. На основе предсказанного вектора состояния $\mathbf{X}(t_e) = (T_e, i_e, u_e, \Omega_e) = (95.2 \text{ мин}, 97.5^\circ, 323^\circ, 160.2^\circ)$ наноспутника CubeVel-1 на момент времени эпохи $t_e = 3220 \text{ с}$ для времени запуска 29 октября 2018 г. 00:43:14 UTC проведено численное моделирование параметров наведения антенны и доплеровского сдвига частоты для первых пролетов над наземной станцией приема БГУ, что позволило после запуска первыми в мире декодировать телеметрию.

Ключевые слова: определение орбиты наноспутника, возмущенное круговое движение, наземная станция приема, радиосигналы телеметрии, доплеровский сдвиг частоты, орбитальные параметры.

Введение

При разработке университетами собственных образовательных космических аппаратов (КА) актуальной является проблема предполетной оценки их орбитальных параметров. Это необходимо как для планирования работы спутника в первые сутки полета, так и для его поиска, идентификации (при групповом запуске), проведения первоначальных сеансов радиосвязи. Существует много примеров запуска университетских образовательных КА, когда КА аппарат был утерян после запуска [1; 2]. Обычно университетские сверхмалые космические аппараты (СМКА) разрабатывают по стандарту Cubesat [3; 4]. Из анализа усредненных орбитальных параметров в формате TLE было показано [5; 6], что существуют две характерные орбиты СМКА стандарта Cubesat, связанные с двумя способами их запуска. Первый способ – это запуск с международной космической станции (МКС). Вто-

рой способ – это попутный запуск на солнечно-синхронную орбиту в группировке из нескольких таких же Cubesat обычно вместе с основной полезной нагрузкой запуска со спутником дистанционного зондирования. Обычно провайдер запуска предоставляет информацию в виде Интерфейсного контрольного документа для попутного запуска спутника и ракетносителя (Interface control document for piggyback satellite and Launch Vehicle). Этот документ содержит информацию о параметрах запуска ракетносителя, отделения спутника от ракетносителя, профиле полета ракетносителя.

В первые часы после запуска сверхмалого космического аппарата очень важно принять и декодировать сигнал его маяка для проверки работы его бортовых систем, оценки работоспособности, принятия оперативных решений по управлению. Эти задачи можно решить, спрогнозировав интервалы времени и параметры пролета СМКА над университетской наземной станцией приема. Обычно для прогнозирования движения СМКА используется модель SGP4 [7]. Модель SGP4 использует двухлинейные элементы (TLE – two-line elements) в качестве начальных данных для прогнозирования орбиты [7; 8]. Эти TLE в настоящее время предоставляются Североамериканским Командованием воздушно-космической обороны (NORAD – the North American Aerospace Defense Command). Но в первые часы после запуска СМКА в базе данных системы NORAD отсутствует информация по его орбитальным параметрам. А так как связь между низкоорбитальным СМКА и наземной станцией ограничена несколькими минутами 5-6 раз в день, то для успешной работы в первые дни полета для поиска СМКА, приема его телеметрии необходимо подключить как можно больше радиолюбительских станций по всему миру. Поэтому предварительная оценка и публикация предполагаемых орбитальных параметров запускаемого спутника является необходимым условием для его успешного поиска и осуществления устойчивой радиосвязи. Еще одна решаемая задача в первые дни полета это идентификация спутника при его групповом запуске. После запуска первые TLE космических аппаратов группового запуска предоставляются системой NORAD без имени КА, вместо которого вставляют неопределенное имя OBJECT A, OBJECT B и т.д. После осуществления разработчиками КА устойчивой радиосвязи с ним, приема и декодирования телеметрии и подтверждения этой информации в TLE файле появляется имя КА, и он идентифицируется в международных каталогах.

Университетский наноспутник БГУ CubeBel-1 запускался с китайского космодрома Цзюцюань (Jiuquan Satellite Launch Center) попутным запуском двухступечатым ракетносителем Long March 2C [9-10]. Координаты космодрома Цзюцюань широта $40^{\circ}58'03''$ С.Ш., долгота $100^{\circ}16'43''$ В.Д. (Latitude: $40^{\circ}58'03''$ N; Longitude: $100^{\circ}16'43''$ E) [11]. Предполагаемая солнечно-синхронная орбита имела наклонение $i = 97,5^{\circ}$, период обращения $T = 95$ мин., высота орбиты $H = 520$ км. Планируемое время запуска 29 октября 2018 г., 00:40:00 UTC. Перед запуском университетского наноспутника БГУ BSUSat-1 была поставлена задача на основании анализа запусков с китайского космодрома Цзюцюань с помощью двухступечатых ракетносителей Long March 2C и 2D на солнечно-синхронную орбиту оценить предполагаемые орбитальные параметры, провести прогнозирование первых пролетов наноспутника над университетской наземной станцией приема (НСП), создать начальный TLE файл и опубликовать его в Internete для возможности приема международной сетью станций приема “Satnogs” и радиолюбителями по всему

миру. Этот анализ даст возможность оперативно изменить TLE файл при изменении времени запуска, решить задачу идентификации наноспутника в групповом запуске из 8 спутников.

Теоретическая модель

Для прогнозирования первых пролетов наноспутника над университетской НСП необходимо определить его вектор состояния на момент времени эпохи t_e . В работе рассматривается методика определения вектора состояния запускаемого наноспутника в модели возмущенного кругового движения на момент времени эпохи [5; 6; 12]

$$\mathbf{X}(t_e) = (T_e, i_e, u_e, \Omega_e), \quad (1)$$

где T_e – период обращения, i_e – наклонение орбиты к плоскости экватора; u_e – аргумент широты и Ω_e – долгота восходящего узла в момент времени t_e .

При прогнозировании в модели возмущенного кругового движения для момента времени t_k два орбитальных параметра СМКА период обращения T и наклонение орбиты i остаются неизменными

$$T(t_k) = T_e, i(t_k) = i_e, \quad (2)$$

а два других орбитальных параметра СМКА аргумент широты u и долгота восходящего узла Ω испытывают вековые возмущения, связанные с нецентральной частью силы тяготения Земли (учитывалась только вторая зональная гармоника в разложении для потенциала силы тяготения) [12; 13]:

$$\Omega(t_k) = \Omega_e - \frac{3}{2} J_2 n \left(\frac{R_E}{R} \right)^2 \cos i (t_k - t_e), \quad (3)$$

$$u(t_k) = u_e + \frac{3}{4} J_2 n \left(\frac{R_E}{R} \right)^2 (8 \cos^2 i_e - 2) (t_k - t_e). \quad (4)$$

$R = (\mu T^2(t_k) / 4\pi^2)^{1/3}$ – радиус орбиты спутника; $R_E = 6378.137$ км – средний экваториальный радиус Земли; $\mu = 398600,5$ км³/с² – гравитационный параметр Земли; $n = 2\pi/T(t_k)$ – угловая скорость спутника (среднее движение); $J_2 = 0.0010826267$ – вторая зональная гармоника.

Если известно планируемое наклонение солнечно-синхронной орбиты i , то период этой орбиты можно оценить по формуле [14]

$$T = 2\pi R_E \left(\frac{R_E}{\mu} \right)^{1/2} \left(-\frac{K_0 T_s}{2\pi} \cos i \right)^{3/7}, \quad (5)$$

где $K_0 = \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{\mu}{R_E^3} \right)^{1/2} = 2.012788 \cdot 10^{-8}$ рад/с; $T_s = 31558149.504$ с – звездный год.

Как показано в [14], для оценки долготы восходящего узла Ω орбиты на момент времени запуска t_0 СМКА необходима информация о широте φ_0 и долготе λ_0 точки выведения, среднем звездном времени на дату запуска θ_0 , продолжительности активного участка траектории выведения τ_a

$$\Omega = \omega_E (t_0 + \tau_a) + \lambda_0 + \theta_0 - \Delta\lambda, \quad (6)$$

где $\omega_E = 7.2921159 \cdot 10^{-5}$ рад/с угловая скорость вращения Земли; $\Delta\lambda = \arcsin\left(\frac{tg\varphi_0}{tgi}\right)$.

В процессе выведения КА на орбиту отработавшие ступени либо ускорители первой и второй ступеней ракетносителя должны падать в специально выделенные для этих целей районы, где они не могут нанести какого-либо вреда [15]. Трассы пролета ракетносителей с близкими значениями продолжительности активного участка траектории выведения τ_a после запуска в первые минуты должны совпадать.

Следовательно, в первые минуты полета после отделения КА от ракетносителя трасы самих КА также должны совпадать. Поэтому предполагается, что значения аргумента широты u_{new} КА новых запусков на солнечно-синхронную орбиту с близкими значениями наклонений орбиты и схожими ракетносителями в моменты времени $t_0 + \tau_a + \Delta t$ должны совпадать со значениями предыдущих запусков u_{old}

$$u_{new}(t_0^{new} + \tau_a^{new} + \Delta t) = u_{old}(t_0^{old} + \tau_a^{old} + \Delta t), \quad (7)$$

где t_0^{new} , t_0^{old} – моменты времени предыдущего и последующего запусков; τ_a^{old} , τ_a^{new} – продолжительности активного участка траектории выведения для предыдущего и последующего запусков; Δt – интервал в несколько минут.

Таким образом, для оценки вектора состояния (1) на момент времени эпохи $t_e = t_0 + \tau_a + \Delta t$ по известным значениям времени запуска t_0 , наклонению орбиты i_e , продолжительности активного участка траектории выведения τ_a по формулам (5) и (6) необходимо найти период обращения T_e и долготу восходящего узла Ω_e . Затем, проанализировав предыдущие запуски КА с целевого космодрома схожими ракетносителями, найти оценку аргумента широты u_e . После того как вектор состояния $\mathbf{X}(t_e) = (T_e, i_e, u_e, \Omega_e)$ полностью определен, используя модель возмущенного кругового движения СМКА [5–6; 12] необходимо спрогнозировать угол места el , азимут az_i и доплеровский сдвиг частоты Δf_{calc} радиосигналов телеметрии на интервалах пролета наноспутника над университетской НСП (на интервалах где $el > 0$). Таким образом, задача численного моделирования параметров первых пролетов наноспутника над университетской НСП будет решена.

Результаты моделирования

Для анализа орбитальных параметров КА, запущенных с помощью двухступенчатых ракетносителей Long March 2С и 2D с китайского космодрома Цзюцюань, были выбраны 5 запусков [16] за период с января по октябрь 2018 г. на солнечно-синхронные орбиты с наклонениями i равными 97,3°; 98°; 98,27°; 98,28°, как показано в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры запусков КА двухступечатыми ракетносителями Long March 2C и 2D с китайского космодрома Цзюцюань за период с января по октябрь 2018 г.

Дата и время запуска (UTC)	Ракетноситель	τ_a , с	Название спутника (страна)	Номер NORAD / COSPAR	i , °
13 январь, 07:10:10	Long March 2D	550	LKW-3 (Китай)	43146 / 2018-006A	97,33
2 февраль 07:51:04	Long March 2D	550	Fengmaniu-1 (Китай) NuSat-5 (Аргентина) Zhangheng-1 (Китай) NuSat-4 (Аргентина) GOMX-4B (Дания) GOMX-4A (Дания) Shaonian Xing (Китай)	43192 / 2018-015A 43193U 2018-015B 43194U 2018-015C 43195U 2018-015D 43196U 2018-015E 43197U 2018-015F 43199U 2018-015H	97,33 97,20 97,33 97,33 97,32 97,32 97,31
17 март 07:10:04.842	Long March 2D	550	LKW-4 (Китай)	43236 / 2018-025A	97,33
2 июнь 04:13:04	Long March-2D	550	Гаофэнь-6 (Китай) Лоцзя-1 (Китай)	43484 / 2018-048A 43485 / 2018-048B	98.05 98.05
9 октябрь, 02:43:03.812	Long March 2C	566	Яогань-32-01A (Китай) Яогань-32-01B (Китай)	43642 / 2018-077A 43643 / 2018-077B	98,27 98,28

Ракетносители Long March 2C и 2D имеют близкие значения продолжительности активного участка траектории выведения. Вначале орбитальные параметры из TLE файлов КА за первые 25 дней полета усреднялись, чтобы избежать больших ошибок при дальнейшем моделировании. Это связано с большим разбросом орбитальных параметров в первые дни полета, полученных из TLE файлов, относительно их истинного значения.

Используя TLE файлы и SGP модель, проводилось моделирование аргумента широты u на 10 мин. интервале от момента времени запуска плюс 10 мин. На рис. 1а представлены графики отклонения аргумента широты u спутников группового запуска из 7 спутников 2 февраля 2018 г относительно первого спутника в запуске Fengmaniu-1. Как видно из рис. 1а, отклонения аргумента широты u спутников из одного группового запуска за время моделирования отличаются менее чем на 0.2° , что позволяет для прогнозирования последующих запусков рассматривать параметры только одного из спутников группировки. На рис. 1б представлены графики отклонения аргумента широты u спутников для 4 различных по времени в 2018 г. запусков КА с помощью двухступечатых ракетносителей Long March 2C и 2D с китайского космодрома Цзюцюань относительно запуска 13.01.2018 г. спутника LKW-3. Как показано на рис. 1б, значения аргумента широты u спутников с близкими значениями наклона орбиты (запуски 13.01, 02.02, 17.03) за время моделирования отличаются менее чем на 0.5° , в то время максимальные отклонения значений аргумента широты u спутников с разностью между наклонами 0.72° (запуск 02.06) и 0.95° (запуск 09.10) достигают 2.5° и 4.5° .

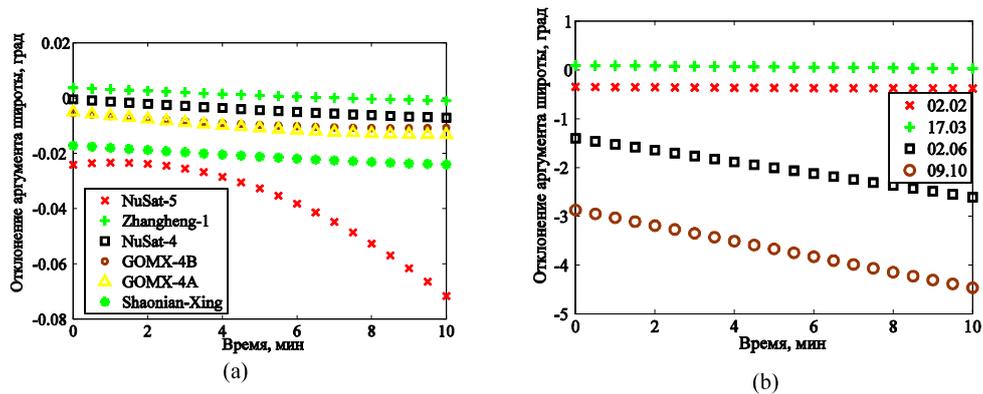


Рисунок 1 – Отклонения аргумента широты (Delta u) от времени: (а) для каждого КА из группового запуска из 7 спутников 2 февраля 2018 г. относительно первого спутника в запуске Fengmaniu-1; (б) для КА 4 различных по времени в 2018 г. запусков относительно запуска 13.01.2018 г. спутника LKW-3

Для проверки методики расчета начального вектора состояния проводилось моделирование вектора состояния СМКА GOMX-4A запуска 2 февраля 2018 г. по анализу предыдущего запуска 13 января 2018 г. КА LKW-3 (время запуска $\tau_a^{LKW3} = 07:10:00$ UTC = 25800 с, продолжительность активного участка $\tau_a^{LKW3} = 550$ с). Исходные данные для моделирования были время запуска $t_0^{GOMX4A} = 2$ февраля 07:51:04 UTC = 28260 с, планируемое наклонение орбиты $i = 97.3^\circ$, продолжительность активного участка $\tau_a^{GOMX4A} = 550$ с. Планируемое наклонение солнечно-синхронной орбиты i СМКА GOMX-4A позволило по формуле (5) получить оценку периода этой орбиты $T = 94.2$ мин. Оценка долготы восходящего узла $\Omega = 165.4^\circ$ орбиты на момент времени запуска t_0 СМКА была получена по формуле (6) по данным о широте $\varphi_0 = 40^\circ 58' 03''$ N и долготе $\lambda_0 = 100^\circ 16' 43''$ E космодрома Цзюцюань, наклонении солнечно-синхронной орбиты i и продолжительности активного участка траектории выведения τ_a^{GOMX4A} .

По данным запуска 13 января 2018 г. КА LKW-3 на момент времени $t_0^{LKW3} + \tau_a^{LKW3} + 60 = 26410$ с, используя усредненные орбитальные параметры, был проведен расчет аргумента широты $u = 160.2^\circ$, который согласно (7) равен аргументу широты u СМКА GOMX-4A на момент времени эпохи $t_e = \mathbf{X}(t_e) = (T_e, i_e, u_e, \Omega_e) = 28870$ с. Таким образом был оценен вектор состояния для модели возмущенного кругового движения СМКА GOMX-4A на момент времени эпохи t_e $\mathbf{X}(t_e) = (T_e, i_e, u_e, \Omega_e) = (94.23 \text{ мин}, 97.3^\circ, 165.4^\circ, 160.2^\circ)$. На интервале от t_e до $t_e + 6$ ч, используя модель возмущенного кругового движения, были численно смоделированы параметры первых пролетов наноспутника над университетской НСП Минск (широта $\varphi = 53^\circ 54' 27''$ СШ, долгота $\lambda = 27^\circ 33' 52''$ ВД, высота $H = 0.23$ км). Первый пролет на интервале от 10:58:00 до 11:05:25 UTC с максимальным углом места 5° был неудачным для приема телеметрии.

Смоделированные параметры (угол места, азимут, доплеровский сдвиг частоты радиосигналов телеметрии) второго пролета на интервале от 12:31:00 до 12:42:00 UTC с максимальным углом места 49° показаны на рис. 2а. Проведена оценка точности прогнозирования угла места, азимута и доплеровского сдвига

частоты радиосигналов телеметрии СМКА GOMX-4A по модели кругового возмущенного движения на этом интервале приема в сравнении с моделью SGP 4 и начальными данными в формате TLE, как представлено на рис. 2, б. Показано, что абсолютные ошибки прогнозирования угла места и азимута не превосходили 2° и 5° соответственно, абсолютная ошибка прогнозирования доплеровского сдвига частоты радиосигналов телеметрии не превосходила 600 Гц, что при соответствующей настройке приемника является достаточным для успешного приема радиосигналов телеметрии и их декодирования.

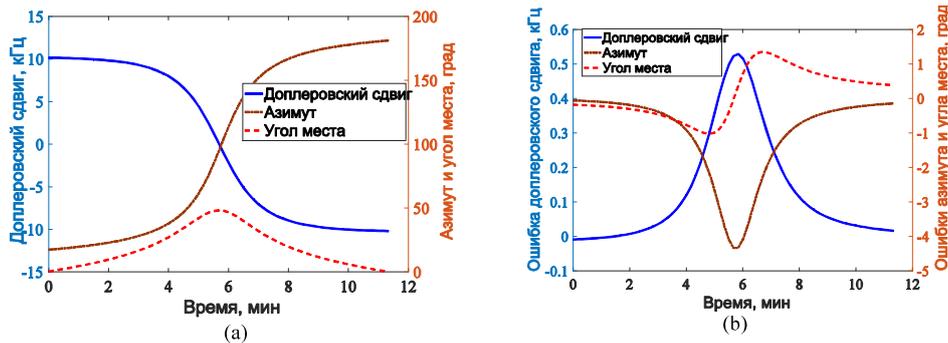


Рисунок 2 – Смоделированные параметры второго пролета СМКА GOMX-4A над университетской НСП Минск от времени: (а) угол места, азимут, доплеровский сдвиг частоты радиосигналов телеметрии; (б) абсолютные ошибки прогнозирования угла места, азимута, доплеровского сдвига частоты радиосигналов телеметрии

Также, используя данные предыдущего запуска 13 января 2018 г. КА LKW-3 (время запуска $t_0^{LKW3} = 07:10:00$ UTC = 25800 с, продолжительность активного участка $\tau_a^{LKW3} = 550$ с) и исходные данные для моделирования запуска наноспутника БГУ CubeBel-1, было время запуска $\tau_a^{CubeBel} = 29$ октября 2018 г. 00:40:00 UTC = 2400 с, планируемое наклонение орбиты $i = 97.5^\circ$, продолжительность активного участка $\tau_a^{CubeBel} = 566$ с. Планируемое наклонение солнечно-синхронной орбиты i CubeBel-1 позволило по формуле (5) получить оценку периода этой орбиты $T = 95.2$ мин. Оценка долготы восходящего узла $\Omega = 322.4^\circ$ орбиты на момент времени запуска t_0 СМКА была получена по формуле (6) и по данным запуска 13 января 2018 г. КА LKW-3 получена оценка аргумента широты $u = 160.2^\circ$ на момент времени эпохи $t_e = t_0^{CubeBel} + \tau_a^{CubeBel} + 60 = 3026$ с. Таким образом был оценен вектор состояния $\mathbf{X}(t_e) = (T_e, i_e, u_e, \Omega_e) = (95.2 \text{ мин.}, 97.5^\circ, 322.4^\circ, 160.2^\circ)$ для модели возмущенного кругового движения наноспутника CubeBel-1 на момент времени эпохи t_e , сгенерирован начальный TLE файл и опубликован в Интернете на сайтах радиолюбительского сообщества [17].

CubeBel-1

1 99995U 18992D 18302.03574537 .00001954 00000-0 81824-4 0 1233

2 99995 97.5255 321.9463 0003881 127.0729 37.5224 15.14680732 13

После получения точного запуска время $t_0^{CubeBel} = 29$ октября 2018 г. 00:43:14 UTC = 2594 с наноспутника БГУ CubeBel-1 вектор состояния был уточнен $t_0^{CubeBel} + \tau_a^{CubeBel} + 60 = (95.2 \text{ мин.}, 97.5^\circ, 323^\circ, 160.2^\circ)$ для модели возмущенного кругового движения наноспутника CubeBel-1 на момент времени эпохи

$t_e = t_0^{CubeBel} + \tau_a^{CubeBel} + 60 = 3220$ с. На основе вектора состояния также был уточнен начальный TLE файл. На интервале от t_e до $t_e + 6$ ч, используя модель возмущенного кругового движения, были численно смоделированы параметры первых пролетов наноспутника CubeBel-1 над университетской НСП Минск. Первый пролет на интервале от 03:51:00 до 03:58:00 UTC с максимальным углом места 5° был неудачным для приема телеметрии.

Проведена оценка точности прогнозирования угла места, азимута и доплеровского сдвига частоты радиосигналов телеметрии СМКА CubeBel-1 на интервале второго пролета от 05:24:00 до 05:35:00 UTC (с максимальным углом места 50°) по модели кругового возмущенного движения на этом интервале приема в сравнении с моделью SGP 4 и начальными данными в формате TLE. Показано, что абсолютные ошибки прогнозирования угла места и азимута не превосходили 2° и 3° соответственно, абсолютная ошибка прогнозирования доплеровского сдвига частоты радиосигналов телеметрии не превосходила 350 Гц, что при соответствующей настройке приемника является достаточным для успешного приема радиосигналов телеметрии и их декодирования. Это позволило в первые сутки после запуска 29 октября 2018 г. успешно принять телеметрию наноспутника десяткам радиолюбителей с 5 континентов, а университетской наземной станции БГУ первой в мире декодировать телеметрию CubeBel-1. Также на третьи сутки полета CubeBel-1 был идентифицирован в международных каталогах и появился в базе данных спутников стандарта Cubesat на сайте CelesTrak.

Заключение

Таким образом, разработана методика определения вектора состояния запускаемого спутника в модели возмущенного кругового движения на момент времени эпохи. Согласно этой методике первоначально по известным значениям времени запуска t_0 , наклонению орбиты i_e , продолжительности активного участка траектории выведения τ_a оцениваются период обращения T_e и долгота восходящего узла Ω_e спутника. Затем по результатам анализа истории запусков с целевого космодрома схожими по параметрам ракетносителями по начальным TLE файлам космических аппаратов численно прогнозируются орбитальные параметры в первые минуты после запуска и рассчитывается аргумент широты на момент времени эпохи запускаемого спутника. Данная методика тестировалась для расчета начального вектора состояния и численного моделирования параметров первых пролетов над университетской НСП Минск СМКА GOMX-4A запуска 2 февраля 2018 г. по анализу предыдущего запуска 13 января 2018 г. КА LKW-3. Получено, что в сравнении с расчетами в модели SGP абсолютные ошибки прогнозирования угла места и азимута не превосходили 2° и 5° соответственно, абсолютная ошибка прогнозирования доплеровского сдвига частоты радиосигналов телеметрии не превосходила 600 Гц, что при соответствующей настройке приемника является достаточным для успешного приема радиосигналов телеметрии и их декодирования.

Проведено предполетное прогнозирование орбитальных параметров наноспутника CubeBel-1 Белорусского государственного университета на основе численного анализа истории 5 запусков в 2018 г. космических аппаратов на солнечно-синхронную орбиту (наклонение $i = 97,5^\circ$, высота орбиты $H = 520$ км) с китайского космодрома Цзюцюань двухступенчатыми ракетносителями Long March 2C

и 2D. На основе полученного вектор состояния $X(t_e) = (T_e, i_e, u_e, \Omega_e) = (95.2 \text{ мин}, 97.5^\circ, 322.4^\circ, 160.2^\circ)$ наноспутника CubeBel-1 на момент времени эпохи для планируемого времени запуска 29 октября 2018 г. 00:40:00 UTC в модели возмущенного кругового движения за три дня до запуска сгенерирован начальный TLE-файл и опубликован в Интернете на сайтах радиолюбительского сообщества. После получения точного времени запуска 29 октября 2018 г. 00:43:14 UTC вектор состояния наноспутника БГУ CubeBel-1 на момент времени эпохи $t_e = 3220 \text{ с}$ был уточнен $X(t_e) = (T_e, i_e, u_e, \Omega_e) = (95.2 \text{ мин}, 97.5^\circ, 323^\circ, 160.2^\circ)$ и проведено численное моделирование параметров наведения антенны и доплеровского сдвига частоты для первых пролетов наноспутника над университетской станции приема. Это позволило устойчиво принимать в первый день после запуска телеметрию наноспутника CubeBel-1 международной сетью станций приема “Satnogs” и радиолюбителями по всему миру, а университетской наземной станции БГУ первой декодировать телеметрию CubeBel-1.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Villela, T.* Towards the Thousandth CubeSat: A Statistical Overview / T. Villela, C. A. Costa, A. M. Brandão, F. T. Bueno, R. Leonardi // International Journal of Aerospace Engineering. – 2019. – Vol. 2019. – P. 1–13. doi: 10.1155/2019/5063145.
2. *Swartwout, M.* The first one hundred CubeSats: a statistical look / M. Swartwout // Journal of Small Satellites. – 2013. – Vol. 2, №2. – P. 213–233.
3. *Bouwmeester, J.* Survey of worldwide pico- and nanosatellite missions, distributions and subsystem technology / J. Bouwmeester, J. Guo // Acta Astronautica. – 2010. – Vol. 67. – P. 854–862. doi:10.1016/j.actastro.2010.06.004.
4. *Saetchnikov, V.* BSUSat-1 – Research educational lab - one year in orbit / V. Saetchnikov, S. Semenovich, A. Spiridonov, E. Tchernihavskaia, V. Cherny, I. Stetsko, S. Vasilenko, D. Buchinsky // Proceedings of IEEE International Workshop on Metrology for AeroSpace. – 2020. – P.111–116.
5. *Spiridonov, A. A.* Determination of the orbit of unknown ultra-small spacecraft based on the circular perturbed motion model and Doppler frequency shift measurements / A. A. Spiridonov, A. G. Kesik, V. A. Saetchnikov, V. E. Cherny, D. V. Ushakov // Moscow University Physics Bulletin. – 2020. – Vol. 75, № 5. – P. 488–495. doi: 10.3103/S0027134920050203.
6. *Spiridonov, A. A.* Small Satellite Orbit Determination Methods Based on the Doppler Measurements by Belarusian State University Ground Station / A. A. Spiridonov, V. A. Saetchnikov, D. V. Ushakov, V. E. Cherny and A. G. Kesik // IEEE Journal on Miniaturization for Air and Space Systems. – 2021. – Vol. 2, № 2. – P. 59–66. doi: 10.1109/JMASS.2020.3047456.
7. *Vallado, D. A.* Revisiting Spacetrack Report #3. / D. A. Vallado, P. Crawford, R. Hujsak, T. S. Kelso // in AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Keystone. – 2006. – P. 1–88. doi:10.2514/6.2006-6753.
8. *Wang, R.* Propagation errors analysis of TLE data / R. Wang, J. Liu, Q. Zhang // Advances in Space Research. – 2009. – Vol. 43. – P. 1065–1069. doi: 10.1016/j.asr.2008.11.017.
9. LM-2C USER’S MANUAL. Available online: <https://vdocuments.site/chinas-long-march-2c-users-manual.html> (accessed on 2 March 2021).
10. *Блинов, В. Н.* Ракеты-носители. Проекты и реальность: справ. пособие / В. Н. Блинов, Н. Н. Иванов, Ю. Н. Сеченов, В. В. Шалай. – Омск : Ом ЛГУ, 2011. – Кн. 2 : Зарубежные ракеты-носители. – 400 с.
11. *Железняков, А. Б.* Опыт освоения космоса Китайской Народной Республикой / А. Б. Железняков, В. В. Кораблев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Серия: Наука и образование. – 2012. – Vol. 2, № 2. – P. 13–21.
12. *Capderou, M.* Satellites Orbits and Missions / M. Capderou. – France : Springer-Verlag, 2005. – 564 p.
13. *Vallado, D.* Fundamentals of Astrodynamics and Applications / D. Vallado. – Hawthorne : Microcosm Press, 2013. – 1106 p.

14. *Авдеевский, В. С.* Основы теории полета космических аппаратов / В. С. Авдеевский, Б. М. Антонов [и др.]. – М. : Машиностроение, 1972. – 608 с.

15. *Лысенко, Л. Н.* Теоретические основы баллистико-навигационного обеспечения космических полетов / Л. Н. Лысенко, В. В. Бетанов, Ф. В. Звягин ; под общ. ред. Л. Н. Лысенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 518 с.

16. Long March 2D launches latest Ludikancha Weixing satellite. [Online]. Available: <https://www.nasaspaceflight.com/2018/01/long-march-2d-ludikancha-weixing-satellite-1/> [Accessed October 2018].

17. Сайт радиолюбительского сообщества Майка Рупрехта. <https://www.dk3wn.info/wp/digital>.

Поступила в редакцию 24.05.2021 г.

Контакты: sansan@tut.by

(Спиридонов Александр Александрович)

ushakovdv@bsu.by

(Ушаков Дмитрий Владимирович)

eu1xx@n1.by

(Черный Владимир Евгеньевич)

Saetchnikov@bsu.by

(Саечников Владимир Алексеевич)

Spiridonov A., Ushakov D., Cherny V., Sayechnikov V. PREDICTION OF THE FIRST PASSES OF THE CUBEDEL-1 NANOSATELLITE OVER THE UNIVERSITY GROUND STATION.

A pre-flight prediction of the orbital parameters of the nanosatellite CubeDel-1 of the Belarusian State University was carried out on the basis of a numerical analysis of the history of 5 spacecraft launches into a sun-synchronous orbit from the Jiuquan Satellite Launch Center (China) in 2018 by two-stage Long March 2C and 2D launch vehicles. In the model of perturbed circular motion, the state vector of the CubeDel-1 nanosatellite at the epoch time is determined from the known values of the launch time, the orbit inclination, and the time interval of the active launch trajectory. Based on the predicted state vector $\mathbf{X}(t_e) = (T_e, i_e, u_e, \Omega_e) = (95.2 \text{ min}, 97.5^\circ, 323^\circ, 160.2^\circ)$ of the nanosatellite CubeDel-1 at the epoch time $t_e = 3220 \text{ s}$ for the launch time of October 29, 2018, 00:43:14 UTC, numerical modeling of the antenna tracking parameters and the Doppler frequency shift for the first passes over the university ground receiving station was performed, which made it possible to be the first in the world to decode telemetry after launch.

Keywords: orbit determination of the nanosatellite, perturbed circular motion, ground station, radio telemetry signals, Doppler frequency shift, orbital parameters.

УДК 51-73:796.01

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ В БИОМЕХАНИКЕ СПОРТА**М. А. Киркор**

кандидат технических наук, доцент, ректор

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

А. Е. Покатилов

старший преподаватель кафедры

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук, профессор

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

В статье изучаются возможные методы и подходы к исследованию пространственного движения биомеханической системой, моделирующей опорно-двигательный аппарат спортсмена. Рассмотрены как особенности моделирования в биомеханике спорта, так и основные положения методов моделирования структуры человеческого тела в смежных областях науки, техники, промышленности и индустрии развлечений, в которых в явном или неявном виде разрабатываются способы получения координат пространственного движения человека. В работе сделан упор на использование сферической системы координат, и показано, что дополнительно к сферическим координатам, необходимо учитывать и угловое положение звеньев, для которых анатомически возможна их ротация относительно проксимальных суставов. Показаны способы разработки механико-математических моделей в области кинематики пространственного движения спортсмена.

Ключевые слова: биомеханическая система, рывок штанги, механико-математическая модель, сферическая система координат, полюс, тяжелая атлетика.

Введение

Одним из важнейших этапов биомеханического анализа целенаправленного движения спортсмена является получение обобщенных координат биомеханической системы во время выполнения спортивного упражнения. Именно этот этап и дает возможность по результатам измерений в натурном эксперименте провести вычислительный эксперимент и количественно оценить технику как упражнения в целом, так и конкретного спортсмена в частности, то есть на основании объективных данных.

Несмотря на многообразие существующих методов получения координат человеческого тела во время выполнения спортивного упражнения, разработанных для этого методик и программно-аппаратного обеспечения, не все они доступны рядовому исследователю. Это связано как со стоимостью, так и спецификой применяемого оборудования и методов работы с ним. Кроме стоимости, проблема заключается в необходимости наличия специалистов в разных областях биомеханики, программирования, компьютерной техники, видеозаписи и наличия подходящих помещений.

С другой стороны, существуют методы, доступные для широкого применения, как в исследовательских, так и в учебно-тренировочных целях. На сегодняшний день стало нормой использовать видеокамеры, фирменные и собственной разработки компьютерные программы, и сами компьютеры, для выполнения натурного

и вычислительного эксперимента [1]. По всем 3-м указанным компонентам имеется широкий выбор по характеристикам. При этом дополнительно возникают следующие проблемы:

- необходимость разработки методов и методик проведения натурного эксперимента;
- необходимость разработки механико-математических моделей целенаправленного движения спортсмена на кинематическом и динамическом уровнях.
- необходимость разработки методов проведения вычислительного эксперимента, а проведение контроля точности, достоверности и адекватности полученных результатов.

Прежде всего, необходимо осмыслить тот факт, что даже в тех видах спорта и конкретных упражнениях, где спортсмен совершает плоско-параллельное движение, то есть движение в одной плоскости, это движение из-за пространственного характера опорно-двигательного аппарата, все же полностью плоским не является. По крайней мере, во многих случаях. В качестве примера можно привести выполнение рывка штанги в тяжелой атлетике.

Отметим, что в различных областях науки, промышленности, индустрии развлечения и пр., в которых в тех или иных целях используется механическое движение человека, существует определенная и уже устоявшаяся терминология. Это относится к биомеханике, медицине, технике, робототехнике и пр.

Таким образом, констатируем: во всех областях человеческой деятельности, имеющих дело с движением человека, устанавливаются термины и определения, касающиеся конкретной области. Но эти же термины и определения полностью подходят и для применения при исследовании локомоций в биомеханике.

Так рисунок 1 соответствует национальному стандарту РФ ГОСТ Р EN 1005-1-2008 “Безопасность машин. Физические возможности человека. Часть 1. Термины и определения”.

Такие же обозначения плоскостей, связанных с положением человеческого тела в пространстве, существуют и в медицине.

На рисунке 2 показана правая система координат, применяемая в робототехнике. На рисунке 3 дано обозначение вращательных движений по ГОСТу 30097-93 “Роботы промышленные. Системы координат и направления движений”. Данный стандарт, как и ранее указанный в области безопасности, является международным и распространяется на Республику Беларусь.

На рисунке 1 имеется поперечная или горизонтальная плоскость. В литературе она имеет еще одно название – аксиальная плоскость, которое тоже уместно использовать в данной работе.

Отметим следующий момент по рисункам 2 и 3 – эти схемы примем как принципиальные, на которых показаны возможные направления и виды движе-

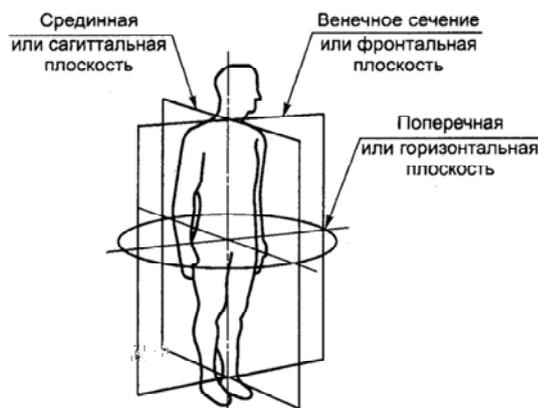


Рисунок 1 – Плоскости по национальному стандарту РФ ГОСТ Р EN 1005-1-2008

ния сложной системы. Поэтому при исследовании локомоций биомеханической системы (БМС), которой является опорно-двигательный аппарат человека, обозначение координатных осей примем в более привычном виде, что будет показано на дальнейших рисунках.

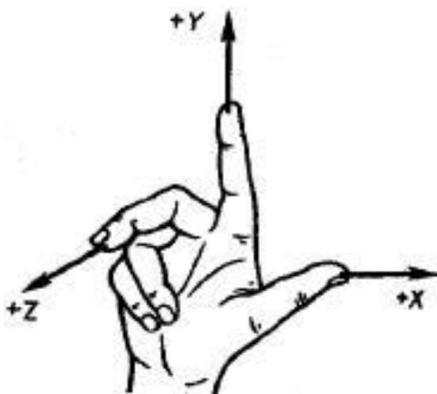


Рисунок 2 – Правая система координат

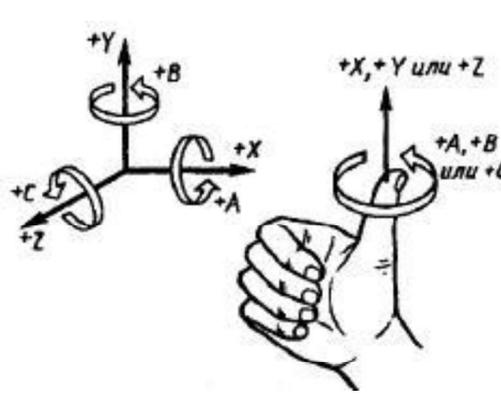


Рисунок 3 – Обозначения вращательных движений

Таким образом, констатируем, что:

- в общем случае анатомически движение человека описывается пространственным движением в 3-х плоскостях: аксиальной, фронтальной и сагиттальной (рис. 1);
- в робототехнике есть общепринятые правила, термины и определения для систем координат и направления движений (рис. 2 и рис. 3). Так как основой робототехники является воспроизведение некоторых функций человека, то данные правила можно принять за основу и при биомеханическом анализе локомоций спортсмена.

Следующим важным моментом разработки общих принципов биомеханического анализа, является выбор кинематических параметров, описывающих пространственное движение звеньев биомеханической системы. Все виды самых сложных локомоций биомеханической системы являются следствием простых вращательных движений звеньев в проксимальных суставах. В биомеханике это случай движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Для его описания в литературе предложены такие параметры, как

- параметры Родрига-Гамильтона;
- параметры Кейли-Клейна;
- углы Эйлера-Крылова;
- направляющие косинусы.

В каждом случае имеются как положительные стороны, так и проблемные моменты, в условиях применения параметров для решения конкретных задач.

В данной работе не ставится цель дать полный обзор методов описания пространственного движения и анализа их достоинства и недостатков. Мы используем лишь один из наиболее рациональных с нашей точки зрения, способ для исследования техники тяжелоатлетических упражнений. Для этого выберем один из способов задания координат. Предварительный анализ задачи показал перспективность использования сферической системы координат, представленной на рисунке 4 [2].

В сферической системе координат положение каждой точки в пространстве определяется 3-мя числами (ℓ, θ, φ) . Здесь ℓ – расстояние от точки до начала координат (радиальное расстояние), угол θ называется зенитным, полярным или наклоном, а угол φ – азимутальным или аксиальным.

Для задач биомеханики радиальное расстояние ℓ – это длина звена БМС (кость) [3].

В физике и математике обозначение сферических координат отличается. В этой работе за основу взято обозначение, применяемое в физике согласно соглашению по ГОСТ Р ИСО 8000-2-2019 “Качество данных”.

Для тройки чисел (ℓ, θ, φ) , определяющих положение точки М в сферической системе координат, в общем случае имеем:

$\ell \geq 0$ – расстояние от начала координат до заданной точки М. Для биомеханического анализа имеем $\ell > 0$, т. е. всегда выполняется условие, что $\ell \neq 0$, и $\ell = \text{const}$, так как это размеры звена, сегмента и пр. (кость и т. д.) биомеханической системы.

$0 \leq \theta \leq 180^\circ$ – угол между осью Z и отрезком, соединяющим начало координат и точку М.

$0 \leq \varphi \leq 360^\circ$ – угол между осью x и проекцией отрезка, соединяющим начало координат с точкой М, на плоскость OXY.

Угловые кинематические характеристики пространственного движения

БМС. Наиболее удобным и доступным способом получения исходных данных при биомеханическом анализе является метод оптической регистрации параметров движения биомеханической системы. Полученные данные являются исходными для кинематических расчетов, а в дальнейшем и для расчетов на динамическом уровне. В этом случае для последующего определения угловых скоростей и ускорений звеньев тела используют численные методы дифференцирования.

В случае описания пространственного движения с использованием сферической системы координат мы имеем для каждого звена изменение 2-х углов: полярного θ и азимутального φ .

Отметим также, что анатомия человеческого тела такова, что движения некоторых костей осуществляются за счет их ротации вокруг собственной оси, показанных на рисунке 5. Например, предплечье может иметь пронацию (поворот внутрь), или супинацию (поворот наружу). Это вращение звена БМС вокруг продольной оси. Обозначим данный угол как α .

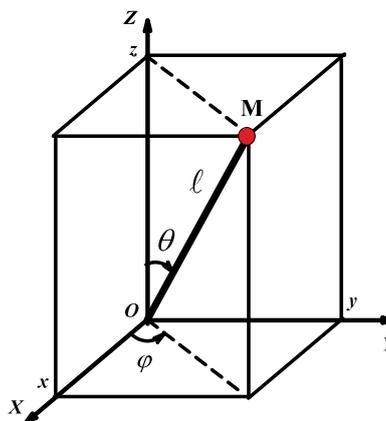


Рисунок 4 – Сферические и декартовы координаты точки М

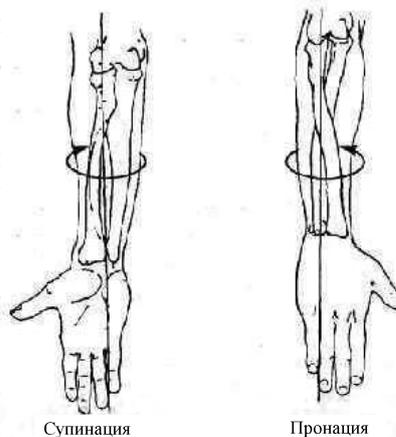


Рисунок 5 – Ротация звена

Таким образом, в наиболее общем случае получим 3 угла для описания углового положения звена БМС в пространстве: полярный θ , азимутальный φ , и угол ротации α .

Моделирование пространственной БМС. Одними из важнейших точек БМС являются суставы человеческого тела, по схеме рисунка 6 это соответствующие кинематические пары. Начнем рассмотрение положения суставов биомеханической системы с определения их координат относительно полюса Π . Движение звеньев относительно этого полюса – это реализация регионального движения по терминологии робототехники, в классической же механике такое движение получило название как относительное [4]. На рисунке 7 показана схема БМС как сумма векторов. На рисунках 6 и 7 в качестве полюса Π принята точка в начале стопы.

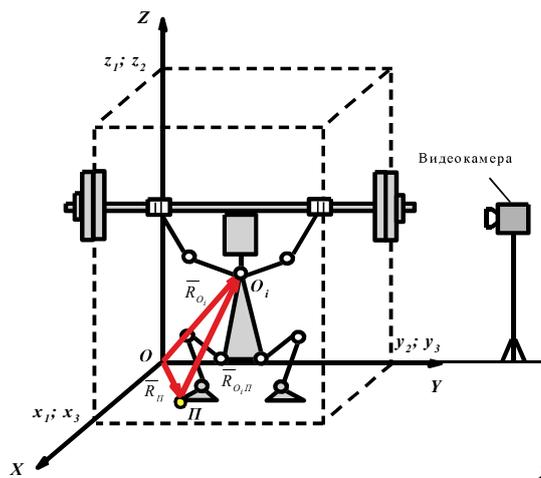


Рисунок 6 – Видеосъемка одной камерой в тяжелой атлетике

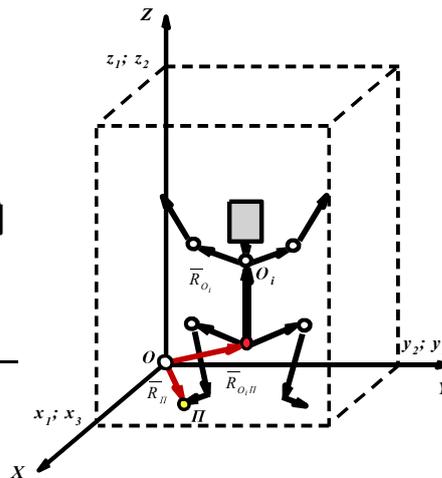


Рисунок 7 – БМС как сумма векторов в пространственной системе координат

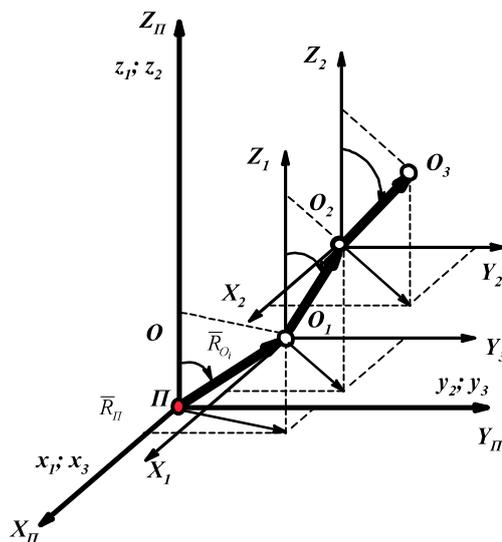


Рисунок 8 – Кинематическая цепь БМС

На рисунке 8 показана пространственная кинематическая схема, входящая составной частью в кинематическую схему БМС для которой полюс Π совпадает с началом координат O неподвижной координатной системы.

Координаты суставов БМС. Начнем рассмотрение положения суставов биомеханической системы с определения их координат относительно полюса Π по рисунку 8. Здесь кинематическая цепь и положение любой кинематической пары (сустава) определяются как сумма векторов, в качестве которых выступают сами звенья (кости). Движение звеньев относительно этого полюса Π – это реализация регионального или как принято в классической механике относительного движения.

При исследовании используем как сферическую систему координат, так и декартовую прямоугольную. При этом алгоритм получения уравнений выглядит следующим образом:

- вывод уравнений для каждого звена трехзвенной модели БМС, представляющую собой кинематическую цепь [5];
- сворачивание полученной системы уравнений по одноименным параметрам и получение уравнения координат относительно полюса P в общем виде с использованием рекуррентных соотношений;
- определение сферических координат каждого звена относительно полюса;
- вывод уравнений для определения сферических координат суставов относительно полюса в общем виде;
- запись в общем виде уравнения координат суставов в абсолютной (неподвижной) декартовой координатной системе с использованием сферических координат каждого звена и координат полюса;
- вывод уравнений для определения сферических координат суставов в абсолютной (неподвижной) декартовой координатной системе.

Координаты суставов для каждого звена биомеханической системы по рисунку 8 определяются как:

$$X_{PO_1} = L_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1, \quad (1)$$

$$Y_{PO_1} = L_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1, \quad (2)$$

$$Z_{PO_1} = L_1 \cos \theta_1, \quad (3)$$

$$X_{PO_2} = L_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1 + L_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2, \quad (4)$$

$$Y_{PO_2} = L_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2, \quad (5)$$

$$Z_{PO_2} = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2, \quad (6)$$

$$X_{PO_3} = L_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1 + L_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 + L_3 \sin \theta_3 \cos \varphi_3, \quad (7)$$

$$Y_{PO_3} = L_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 + L_3 \sin \theta_3 \sin \varphi_3, \quad (8)$$

$$Z_{PO_3} = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3. \quad (9)$$

Сворачиваем систему уравнений (1)–(9) по одноименным параметрам и в общем виде в проекциях на декартовую прямоугольную систему координат имеем:

$$X_{PO_i} = \sum_{k=1}^i L_k \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad (10)$$

$$Y_{PO_i} = \sum_{k=1}^i L_k \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad (11)$$

$$Z_{PO_i} = \sum_{k=1}^i L_k \cos \theta_k. \quad (12)$$

Определяем сферические координаты относительно полюса для каждого сустава. Используя уравнения (10)–(12), запишем

$$R_{\Pi O_i} = \sqrt{X_{\Pi O_i}^2 + Y_{\Pi O_i}^2 + Z_{\Pi O_i}^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{k=1}^i L_k \sin \theta_k \cos \varphi_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^i L_k \sin \theta_k \sin \varphi_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^i L_k \cos \theta_k\right)^2}, \quad (13)$$

$$\theta_{\Pi} = \arccos \frac{Z_{\Pi O_i}}{R_{\Pi O_i}} = \arccos \frac{\sum_{k=1}^i L_k \cos \theta_k}{R_{\Pi O_i}}, \quad (14)$$

$$\varphi_{\Pi} = \arccos \frac{R_{\Pi O_i} \sin \theta_{\Pi}}{X_{\Pi O_i}} = \arccos \frac{R_{\Pi O_i} \sin \theta_{\Pi}}{\sum_{k=1}^i L_k \sin \theta_k \cos \varphi_k} \text{ или} \quad (15)$$

$$\varphi_{\Pi} = \arcsin \frac{R_{\Pi O_i} \sin \theta_{\Pi}}{Y_{\Pi O_i}} = \arcsin \frac{R_{\Pi O_i} \sin \theta_{\Pi}}{\sum_{k=1}^i L_k \sin \theta_k \sin \varphi_k}. \quad (16)$$

Здесь радиальное расстояние $R_{\Pi O_i}$ является величиной переменной $R_{\Pi O_i} = \text{var}$.

Полученные выражения (13)–(16) определяют положение суставов БМС в сферической системе координат относительно полюса Π .

Положение БМС в абсолютной системе координат. Сферические координаты полюса Π относительно абсолютной системы координат имеем в виде R_{Π} , θ_{Π} , φ_{Π} . В этом случае положение полюса Π , радиальное расстояние до которого в неподвижной системе координат описывается параметром R_{Π} , является величиной переменной $R_{\Pi} = \text{var}$, как и углы: $\theta_{\Pi} = \text{var}$, $\varphi_{\Pi} = \text{var}$.

В декартовой системе координат для полюса Π имеем:

$$X_{\Pi} = R_{\Pi} \sin \theta_{\Pi} \cos \varphi_{\Pi}, \quad (17)$$

$$Y_{\Pi} = R_{\Pi} \sin \theta_{\Pi} \sin \varphi_{\Pi}, \quad (18)$$

$$Z_{\Pi} = R_{\Pi} \cos \theta_{\Pi}. \quad (19)$$

Тогда абсолютные координаты для суставов с учетом системы уравнений (10)–(12) и (17)–(19) запишем в общем виде как

$$X_{O_i} = X_{\Pi} + X_{\Pi O_i} = R_{\Pi} \sin \theta_{\Pi} \cos \varphi_{\Pi} + \sum_{k=1}^i L_k \sin \theta_k \cos \varphi_k,$$

$$Y_{O_i} = Y_{\Pi} + Y_{\Pi O_i} = R_{\Pi} \sin \theta_{\Pi} \sin \varphi_{\Pi} + \sum_{k=1}^i L_k \sin \theta_k \sin \varphi_k,$$

$$Z_{O_i} = Z_{\Pi} + Z_{\Pi O_i} = R_{\Pi} \cos \theta_{\Pi} + \sum_{k=1}^i L_k \cos \theta_k.$$

Сферические координаты каждого сустава относительно начала координат абсолютной координатной системы O имеем в виде R_{O_i} , θ_{O_i} , φ_{O_i} . Имеем

$$R_{O_i} = R_{\Pi} + R_{\Pi O_i} = \sqrt{\left(X_{\Pi} + X_{\Pi O_i}\right)^2 + \left(Y_{\Pi} + Y_{\Pi O_i}\right)^2 + \left(Z_{\Pi} + Z_{\Pi O_i}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(R_{\Pi} \sin \theta_{\Pi} \cos \varphi_{\Pi} + \sum_{k=1}^i L_k \sin \theta_k \cos \varphi_k\right)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{k=1}^i R_{\Pi} \sin \theta_{\Pi} \sin \varphi_{\Pi} + \sum_{k=1}^i L_k \sin \theta_k \sin \varphi_k \right)^2 + \\
& \quad + \left(R_{\Pi} \cos \theta_{\Pi} + \sum_{k=1}^i L_k \cos \theta_k \right)^2 \Big]^{1/2} \\
\theta_{O_i} &= \arccos \frac{Z_{O_i}}{R_{O_i}} = \arccos \frac{R_{\Pi} \cos \theta_{\Pi} + \sum_{k=1}^i L_k \cos \theta_k}{R_{O_i}}, \\
\varphi_{O_i} &= \arccos \frac{R_{O_i} \sin \theta_{O_i}}{X_{O_i}} = \arccos \frac{R_{O_i} \sin \theta_{O_i}}{R_{\Pi} \sin \theta_{\Pi} \cos \varphi_{\Pi} + \sum_{k=1}^i L_k \sin \theta_k \cos \varphi_k} \quad \text{или} \\
\varphi_{O_i} &= \arcsin \frac{R_{O_i} \sin \theta_{O_i}}{Y_{O_i}} = \arcsin \frac{R_{O_i} \sin \theta_{O_i}}{R_{\Pi} \sin \theta_{\Pi} \sin \varphi_{\Pi} + \sum_{k=1}^i L_k \sin \theta_k \sin \varphi_k}.
\end{aligned}$$

Отметим, что полярный угол θ и азимутальный угол φ являются переменными относительно любой системы координат. Радиальное расстояние тоже величина переменная во всех координатных системах, если только в качестве этого параметра не выступает само звено БМС (кость).

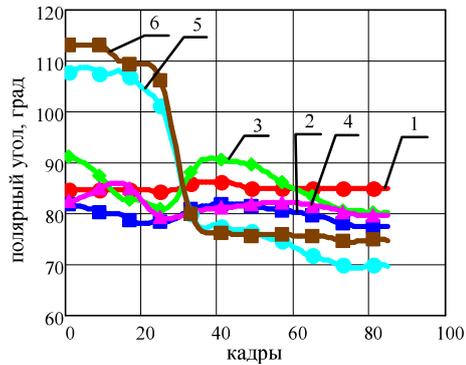
Вычислительный эксперимент и его обсуждение. Исходными данными для проведения вычислительного эксперимента являются результаты расшифровки видеосъемки рывка штанги в тяжелой атлетике [4]. Для исследования выполнялся рывок с тремя весами: 70 кг, 100 кг и 140 кг. Один из моментов натурального эксперимента показан на рисунках 9 а)-д).



Рисунок 9 – Рывок. Вес штанги 140 кг

Результатом анализа видеокладов спортивных упражнений являются траекторные положения суставов тела спортсмена в соответствии с рисунками 6–8.

На рисунке 10 показано изменение полярного угла в соответствии с обозначениями по рисункам 4 и 8. Таким же образом на рисунке 11 представлено изменение азимутального угла во время спортивного упражнения при рывке штанги 140 кг. Расчеты выполнены в MathCad 15.0.



1 – стопа; 2 – голень, 3 – бедро; 4 – туловище; 5 – плечо; 6 – предплечье

Рисунок 10 – Изменение полярного угла.
Рывок штанги 140 кг

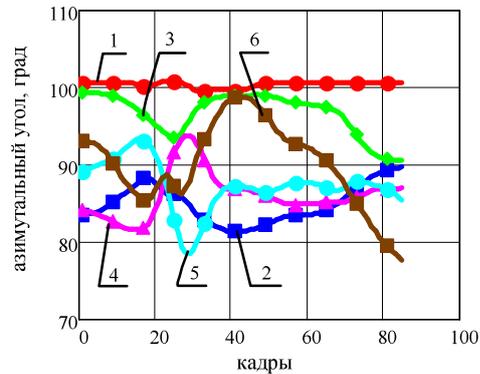


Рисунок 11 – Изменение азимутального угла.
Рывок штанги 140 кг

На рисунке 12 показано изменение полярного угла при рывке штанги весом 70 кг. А на рисунке 13 показано изменение второй угловой координаты звеньев – азимутального угла.

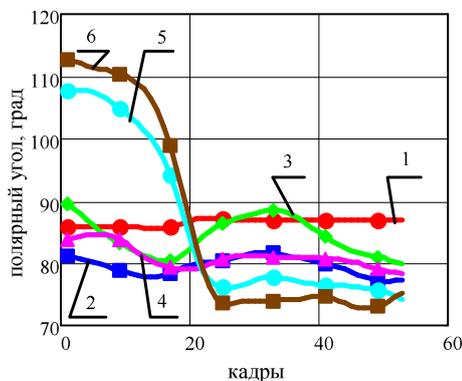


Рисунок 12 – Рывок штанги 70 кг.
Полярный угол

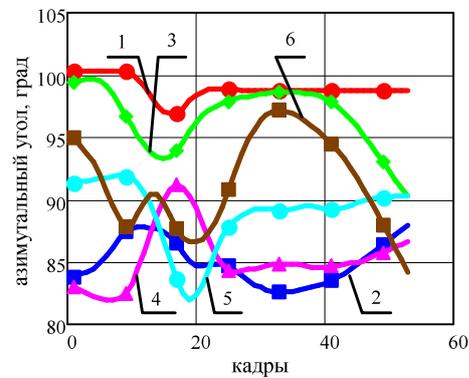


Рисунок 13 – Рывок штанги 70 кг.
Азимутальный угол

Для сравнительного анализа на рисунке 14 представлено изменение полярных углов звеньев БМС при рывке штанги весом в 100 кг. А на рисунке 15 для этого же веса показано изменение азимутального угла каждого звена. В качестве биомеханической системы при моделировании движения принята шестизвенная БМС. Нумерация графиков по рисункам 12-15 соответствует расшифрованным обозначениям по рисункам 10 и 11.

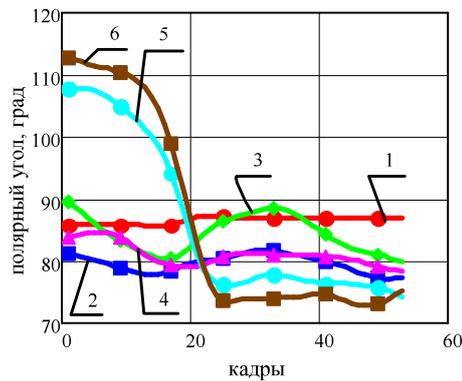


Рисунок 14 – Рывок штанги 100 кг.
Полярный угол

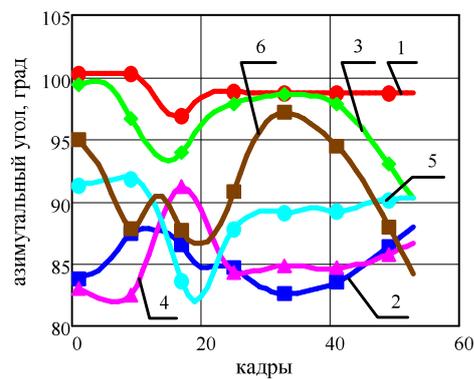


Рисунок 15 – Рывок штанги 100 кг.
Азимутальный угол

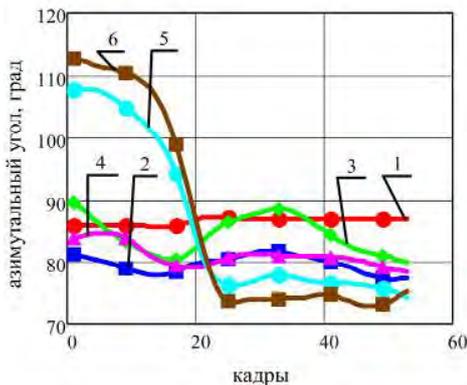
Во-первых, укажем, что сферические координаты по рисункам 10-15 даны в подвижной системе координат, расположенной в каждом проксимальном суставе. В этом случае радиальным расстоянием является длина l соответствующего звена БМС (кость).

Во-вторых, сравнительный анализ рисунков 10, 12, 14 и рисунков 11, 13, 15 между собой показывает, что изменение углового положения стопы, голени, бедра, туловища, плеча и предплечья, незначительно отличаясь в цифрах, фактически полностью совпадает по характеру изменения. Это означает стабильность техники выполнения рывка независимо от веса штанги.

Тем не менее, отметим тот факт, что при неизменной технике спортивного упражнения, время на ее реализацию, то есть время выполнения рывка, зависит от веса снаряда, и с его увеличением, также увеличивается.

На рисунке 16 показано изменение углового положения суставов БМС относительно полюса II , неизменно связанного с биосистемой, по азимутальному углу φ (относительная система координат). Расшифровка нумераций звеньев приведена рядом с графиками.

На рисунке 17 представлено угловое положение φ полюса II биомеханической системы относительно начала координат $OXYZ$ (абсолютная система координат).



1 – голенисто́п; 2 – коленный сустав; 3 – тазобедренный сустав; 4 – плечевой сустав;
5 – локтевой сустав; 6 – кисть

Рисунок 16 – Положение суставов O_i относительно полюса II по углу φ

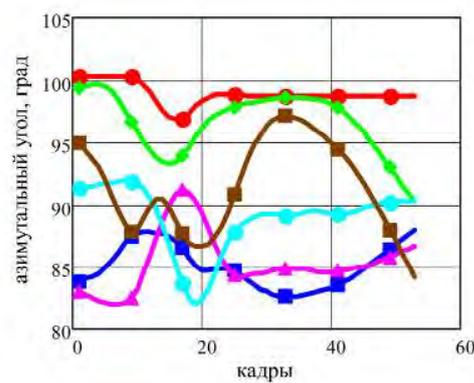


Рисунок 17 – Положение полюса II в абсолютной системе координат по углу φ

Анализ и сравнение изменения азимутальных углов φ_i для полюса P в относительной и абсолютной системах координат по рисункам 16 и 17 позволил выявить следующую проблему: если угловое положение суставов относительно координатной системы, связанной с полюсом P , изменяется плавно, непрерывно (частный случай, зависит от спортивного упражнения), то угловое положение полюса по азимутальному углу φ описывается кусочно-непрерывной функцией. Связано это с механико-математическими моделями по уравнениям (14)–(16) и с изменением полярного угла θ . Если последний становится равным нулю, то на следующем кадре радиальное расстояние (звено l) может оказаться в любом октанте и соответственно его положению изменится и азимутальный угол φ . Данная ситуация отражена на рисунке 17. Выходом из нее является разработка и использование специального алгоритма проведения вычислительного эксперимента, учитывающего данный момент.

Заключение

Показано, что при разработке механико-математических моделей движения на уровне кинематики для БМС необходимо использовать сразу две координатные системы: прямоугольную декартовую и сферическую. При этом дополнительно учитывают угловую координату относительно собственной оси каждого звена (кости), совершающего ротационное движение относительно проксимального сустава.

Исследованы случаи описания движения БМС относительно подвижной и неподвижной (абсолютной) координатных систем. Важным положением в исследовании пространственного движения БМС является выбор полюса. Показано, что полюс должен быть неизменно связан с БМС и в качестве такой точки может выступать как стопа, так и бедра спортсмена. При этом в зависимости от техники выполнения спортивного упражнения и принятой за полюс точки, последняя может быть подвижной, неподвижной, совмещенной с началом неподвижной (абсолютной) системы координат. Это влияет на систему получаемых уравнений кинематики.

Для всех вышеописанных случаев получены математические модели координат суставов тела спортсмена. При этом на примере трехзвенника представлена методика разработки уравнений для системы с любым числом звеньев и любым числом степеней свободы. И показано как формируются системы кинематических уравнений в общем виде, пригодном для автоматизированных расчетов на компьютере.

Проведен вычислительный эксперимент для рывка штанги в тяжелой атлетике и показаны проблемы использования сферической системы координат при описании пространственного движения спортсмена. Предложены пути их решения при переходе полярного и азимутального углов через нулевые значения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Покатилов, А. Е.* Проблемы исследования механики движения опорно-двигательного аппарата человека / А. Е. Покатилов, М. А. Киркор // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1(30). – С. 59–67.
2. *Бронштейн, И. Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
3. *Покатилов, А. Е.* Моделирование пространственного движения биомеханических систем в сферической системе координат / А. Е. Покатилов, Т. Д. Симанкова // Научные и методические аспекты математической подготовки в университетах технического профиля: материалы

Междунар. науч. пр. конф., ноябрь 2020 г., Гомель / Учреждение образования “Белорусский государственный университет транспорта”. – Гомель : БелГУТ, 2020. – С. 106–109.

4. **Покатилов, А. Е.** Кинематика пространственного движения на примере биомеханического анализа рывка в тяжелой атлетике / А. Е. Покатилов, Ю. В. Воронович // Биомеханика двигательных действий и биомеханический контроль в спорте: материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-практической конференции, 29–30 октября 2020 г., Москва / Рос. гос. акад. физ. культуры, спорта и туризма, Моск. гос. акад. физ. культуры ; под общ. ред. А. Н. Фураева, А. А. Шалманова, В. П. Губы. – М. : ООО “Анта Пресс”, 2020. – С. 94–99.

5. **Артоболевский, И. И.** Теория механизмов и машин : учеб. для вузов / И. И. Артоболевский. – М. : Наука, 1988. – 640 с.

Поступила в редакцию 18.05.2021 г.

Контакты: halm54@mail.ru

(Киркор Максим Александрович, Покатилов Алексей Евгеньевич,
Гальмак Александр Михайлович)

Kirkor M., Pokatilov A., Galmak A. INVESTIGATION OF MOVEMENT IN SPORTS BIOMECHANICS.

The article examines possible methods and approaches to the study of spatial movement by a biomechanical system that simulates the musculoskeletal system of an athlete. The article considers the features of modelling in the biomechanics of sports, and the main provisions of the methods for modelling the structure of the human body in related fields of science, technology, industry and the entertainment industry, in which methods for obtaining the coordinates of the spatial movement of a person are explicitly or implicitly developed. The paper focuses on the use of a spherical coordinate system, and it is shown that in addition to spherical coordinates, it is necessary to take into account the angular position of the links, for which their rotation is anatomically possible relative to the proximal joints. The methods of the development of mechanical and mathematical models in the field of kinematics of spatial movement of athletes are shown.

Keywords: biomechanical system, barbell jerk, mechanical and mathematical model, spherical coordinate system, pole, weightlifting.

УДК 612.81

ИЗУЧЕНИЕ АНАЛЬГЕТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА ПЛАЦЕБО-ПРЕПАРАТОВ ПРИ ОЦЕНКЕ ОСТРОЙ БОЛИ У СПОРТСМЕНОВ РАЗНЫХ СПЕЦИАЛИЗАЦИЙ

Н. О. Мартусевич

кандидат биологических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. А. Кирейцев

студент второй степени высшего образования

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Целью исследования явилось изучение влияния плацебо-препаратов на оценку острой боли спортсменами, специализирующимися в разных видах спорта. Обнаружено достоверное различие ($p < 0,05$) между показателями исходной ноцицептивной чувствительности и оценкой болевых ощущений после приема капсул-плацебо по данным случайной цветовой дискретной шкалы на первый электростимул.

Ключевые слова: плацебо-препараты, боль, спорт.

Введение

Ежедневная изнурительная борьба с болью нередко становится частью жизни спортсмена. Эта боль является следствием перенесенных травм, нередко многочисленных, а также профессиональных заболеваний. Даже в отсутствие этих факторов, колоссальные физические и психоэмоциональные нагрузки, которым подвергается спортсмен, негативно сказываются на работе внутренних органов и систем, что может стать причиной появления хронической боли. Отличительной особенностью боли является отсутствие эффектов адаптации (в эксперименте) и довольно стабильные величины порогов. В обыденной жизни обычно наблюдается привыкание к многократным ноцицептивным стимулам [1; 2]. Боль всегда субъективна. Текущее психоэмоциональное состояние оказывает существенное влияние на восприятие одного и того же болевого раздражения. Неуверенность в себе, страх усиливают боль. Гнев и ярость, напротив, снижают болевую чувствительность. Восприятие боли зависит не только от условий или обстоятельств, при которых произошло повреждение, но и от социального положения, индивидуального жизненного опыта, семейного воспитания и этнического происхождения [3; 4; 5]. Несомненную роль в восприятии болевых раздражителей влияет и уровень физической активности человека. Однако анализ литературы показал, что большинство исследований посвящено изучению методов психокоррекции хронического болевого синдрома у спортсменов (гипноз, аутотренинг и др.) [4]. Вероятно, популярность этих исследований объясняется необходимостью поиска альтернативы фармакологическим методам обезболивания, применение которых ограничено в связи с ежегодным ужесточением процедуры допинг-контроля.

Нет сомнений в том, что болевые ощущения могут негативно повлиять на физическое и психоэмоциональное состояние спортсмена, и, как следствие, на результативность его работы. Наше исследование ставит перед собой цель опровер-

гнуть или подтвердить возможность манипуляции ноцицептивной чувствительностью спортсменов посредством перорального приема плацебо-препаратов.

Основная часть

Исследование проводилось с использованием электростимулятора малой мощности. Электрический болевой стимул был выбран из-за ряда преимуществ перед кинетическими и температурными стимулами. Электростимуляция не вызывает нарушения целостности кожных покровов и гиперемии, вероятность возникновения которых велика при использовании альтернативных методик болевой стимуляции. Интенсивность болевого стимула была одинакова для всех обследуемых. Электростимуляция позволяет избежать влияния упругости кожи и процента подкожной жировой клетчатки на качество сенсорного восприятия стимула обследуемым и тем самым обеспечить воздействие непосредственно на нервную ткань в отличие от температурных или кинетических стимулов, где различные комбинации параметров кожи оказывают значительное влияние на оценку болевых ощущений обследуемым [6]. Однако при всех преимуществах данной методики ноцицептивной стимуляции главным ее недостатком является чрезмерный характер воздействия. Механические и температурные стимулы являются привычными раздражителями для организма человека. К действию электрических стимулов организм не адаптирован в ходе эволюции. Как результат организм и спортсмена, и обычного человека в равной степени оказывается не готов к этому воздействию. Так после первого стимула испытуемые часто затрудняются дать качественную оценку боли и только после повторной стимуляции готовы интерпретировать свои ощущения. Мы считаем, что подобная реакция на первый стимул обусловлена экзотичностью раздражителя и отсутствием готовых адаптационных механизмов ответа на него.

Эксперимент был организован посредством двойного слепого метода в течение месяца (два дня в неделю). В первый экспериментальный день проводились замеры исходной болевой чувствительности испытуемых путем двух последовательных электростимуляций. Определение ноцицептивной чувствительности после приема плацебо-препаратов проводилось аналогичным способом. Воздействие переменным током оказывалось на медиальную поверхность предплечья ведущей руки, сила тока составляла $0,7 \pm 0,1$ мА через разряжение конденсатора по замкнутой дуге (рис. 1).

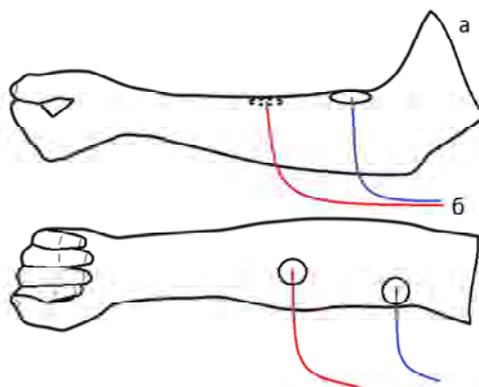


Рис. 1. Схема расположения контактов электростимулятора: а – вид сбоку, б – вид сверху

После каждой стимуляции спортсмен должен был отметить уровень своих болевых ощущений на трех шкалах: линейной визуальной аналоговой шкале (лВАШ) в виде отрезка прямой линии длиной 100 мм; монотонной цветовой дискретной шкале (мЦДШ), которая представляла собой монотонное последовательное возрастание интенсивности серого цвета при закрашивании отдельно расположенных цветовых полей от белого цвета к черному и случайной цветовой дискретной шкале (сЦДШ), которая представляла собой случайно расположенные в ряду закрашенные прямоугольники из мЦДШ (рис. 2), [1; 7].

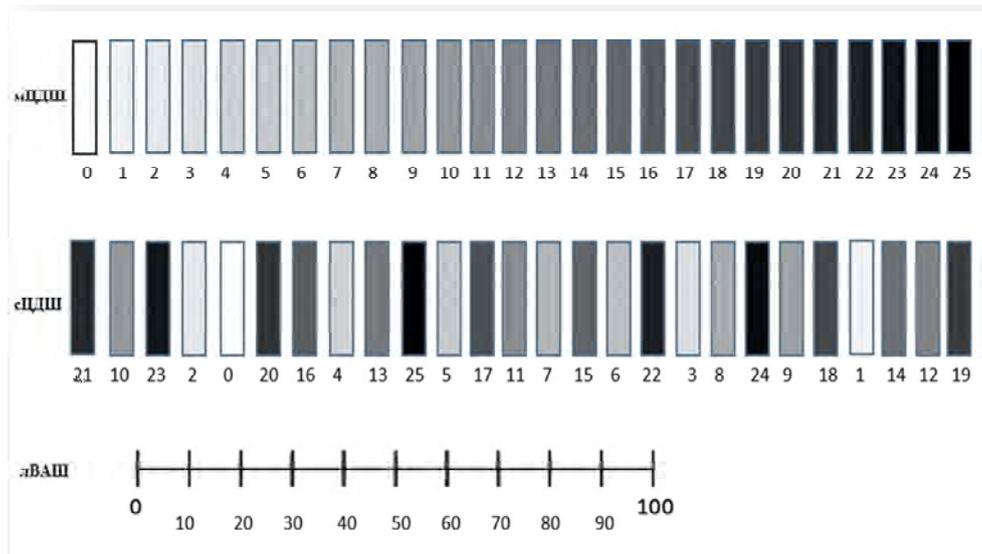


Рис 2. Визуальные шкалы: мЦДШ – монотонная цветовой дискретная шкала, сЦДШ – случайная цветовой дискретная шкала, лВАШ – линейная визуальная аналоговая шкала

Данные шкалы были выбраны по нескольким причинам:

- дают возможность обследуемому соотносить свои болевые ощущения с объективно существующим параметром;
- исследователь получает результат в течение короткого промежутка времени;
- являются простыми для понимания;
- могут быть использованы многократно [1; 7].

Отдельно стоит выделить сЦДШ, так как она исключает визуальное “чувство шкалы” испытуемых, вследствие чего данные полученные с ее помощью носят более интроспективный характер.

После завершения исследования исходной ноцицептивной чувствительности, обследуемый перорально принимал плацебо-препарат (желто-белая капсула, наполненная крахмалом), после чего просматривал видеоматериал, задача которого заключалась в обосновании физиологического механизма эффекта, ожидаемого от приема препарата. Плацебо-препарат первого экспериментального дня (капсула X) представлялся в видеоматериале для обследуемых как “капсула X”, действие которой заключалось в повышении порога болевой чувствительности и, как следствие, увеличении интенсивности болевых ощущений. После просмотра видеоматериала на протяжении 2,27 минут испытуемый ожидал рекомендованные для начала проявления эффекта препарата 5 минут, после чего снова

проводился замер его ноцицептивной чувствительности. На следующий день исходный уровень ноцицептивной чувствительности не замерялся, а эксперимент начинался с перорального приема испытуемым капсулы с крахмалом в белой оболочке, после чего он направлялся в кабинет, где просматривал видеоматериал, задачей которого являлось физиологическое обоснование анальгетического эффекта плацебо-препарата (капсула Y), длительностью 2 минуты, после чего ожидал рекомендованные для проявления эффекта препарата 5 минут с последующей электростимуляцией.

Параметры плацебо-препаратов основываются на методических рекомендациях, представленных в литературе. Утверждается, что пероральный способ приема плацебо в эффективности уступает только инъекционному. Также, чем выразительнее вкус препарата, тем эффект более значителен [8]. Цвет капсулы имеет не меньшее значение, так для седативных препаратов используются холодные тона, а для стимуляторов теплые.

Анализ полученных эмпирических данных осуществлялся программой Statistica 6.1. Целью статистического анализа было выявить достоверность различий между исходной болевой чувствительностью и показаниями обследуемых после приема капсул с плацебо по t-критерию Стьюдента для связанных выборок данных.

В результате статистического анализа данных 36 обследуемых было обнаружено достоверное различие ($p < 0,05$) между показателями исходной ноцицептивной чувствительности и значениями болевой чувствительности после приема обеих капсул-плацебо по данным случайной цветовой дискретной шкалы (сЦДШ), причем только на первый электростимул (таблица 1). Достоверных различий по лВАШ и мЦДШ выявлено не было.

Влияние приема плацебо-препаратов на оценку острой боли по данным визуальных аналоговых шкал

Сравниваемые показатели (группы сравнения)	Капсула X		Капсула Y	
	Значение t	p	Значение t	p
1 стимул мЦДШ	-0,97	0,33	0,63	0,53
2 стимул мЦДШ	0,98	0,32	1,53	0,13
1 стимул сЦДШ	-2,26*	0,02*	2,10*	0,04*
2 стимул сЦДШ	0,27	0,78	0,27	0,78
1 стимул лВАШ	-1,23	0,22	1,28	0,2
2 стимул лВАШ	0,33	0,74	1,53	0,13

*– $p < 0,05$

Таким образом, без применения медицинских препаратов нам удалось увеличить субъективное восприятие острой боли на 21% и снизить ее на 36% по отношению к исходному уровню ноцицептивной чувствительности (рис. 3). Был проведен анализ нормы распределения данных в выборках (рис. 4–6).

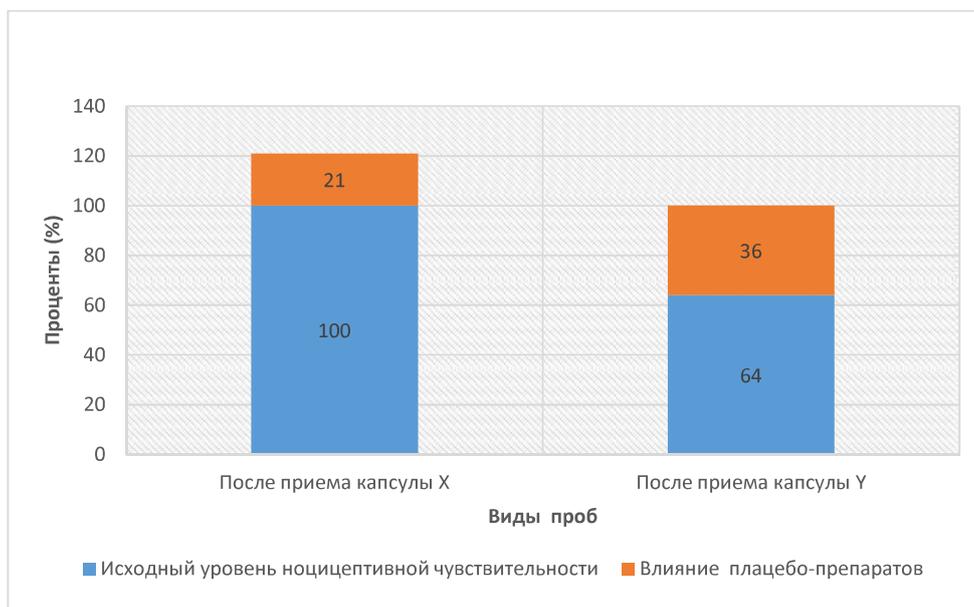


Рис. 3. Влияние плацебо-препаратов на исходный уровень ноцицептивной чувствительности

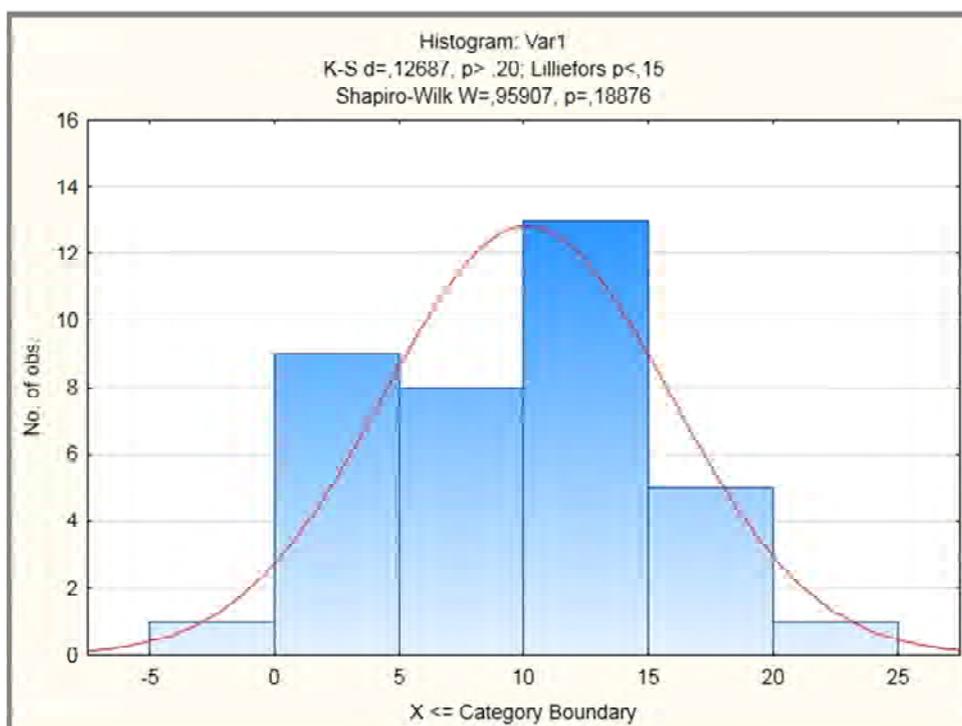


Рис. 4. Гистограмма распределения данных в выборке по сЦДШ без плацебо-препаратов

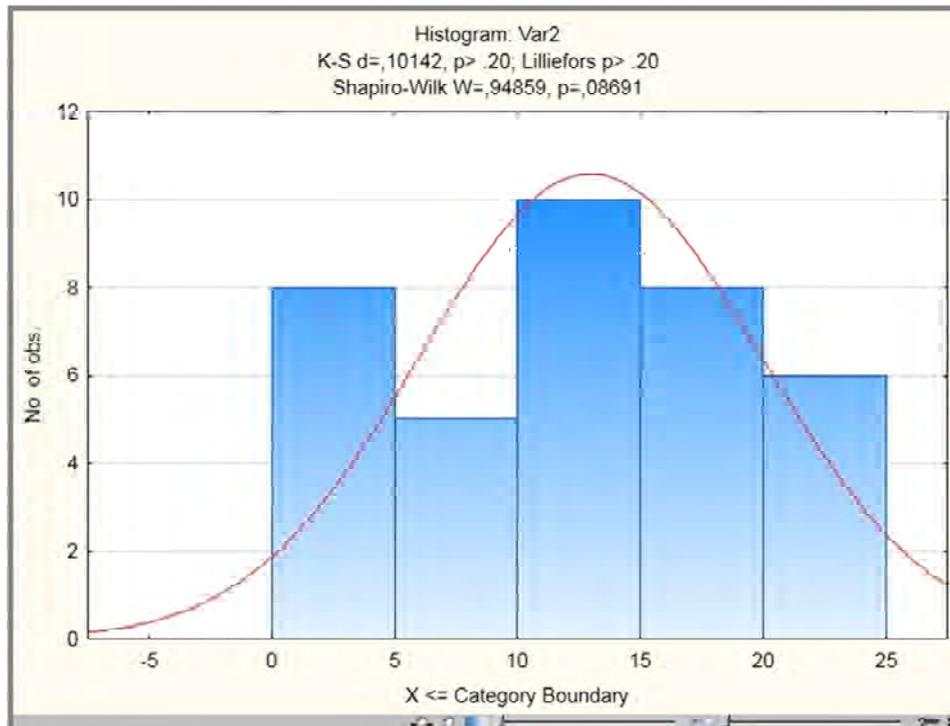


Рис. 5. Гистограмма распределения данных в выборке по сЦДШ после приема капсулы X

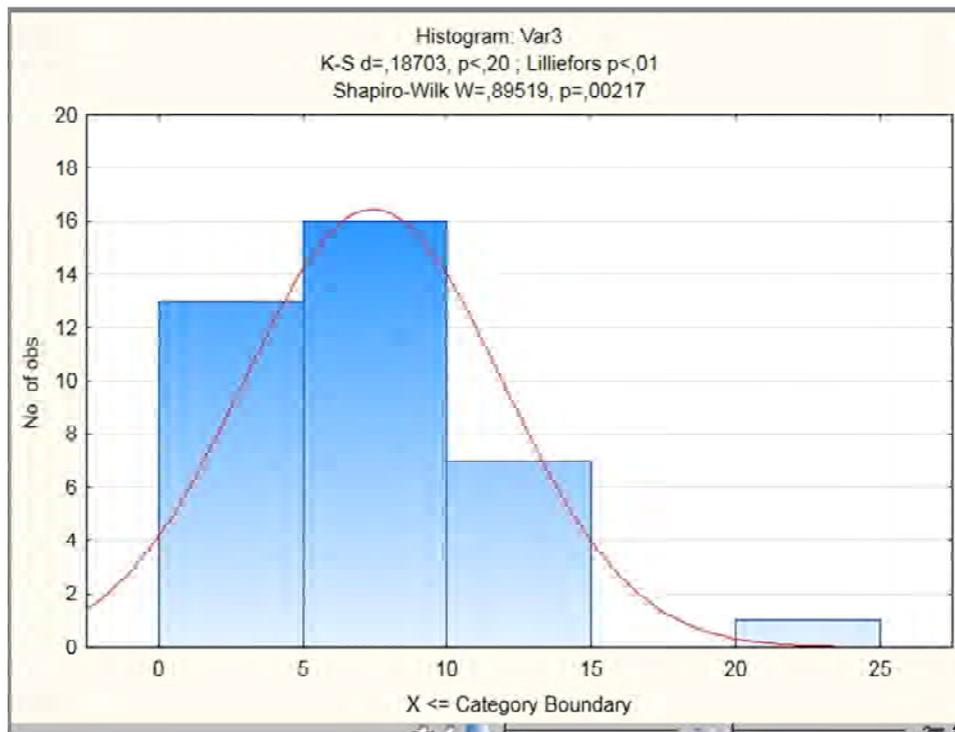


Рис. 6. Гистограмма распределения данных в выборке по сЦДШ после приема капсулы Y

Заклучение

Анализ данных, полученных в ходе исследования ($n = 36$), свидетельствует о результативности применения плацебо-препаратов для манипуляции болевым восприятием (ноцицептивной чувствительностью) спортсменов возрастной группы 18–21 года.

Однако тот факт, что достоверные различия были выявлены только в рамках одной шкалы (сЦДШ) и только на первый стимул заставляет трактовать полученные результаты с осторожностью. Выявленное различие не подтверждено лВАШ и мЦДШ. Кроме того, как было сказано ранее, воздействие электрическим током является экстремальным для обследуемого, что негативно сказывается на уровне осознанности испытуемым болевых ощущений. Вследствие чего велика вероятность указания не действительного болевого ощущения, а желаемого.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Марочков, А. В.** Оценка эффективности применения цветовой дискретной шкалы для измерения болевой чувствительности / А. В. Марочков, Д. А. Якимов // Вестник интенсивной терапии. – 2007. – № 2. – С. 23–27.
2. **Мелзак, Р.** Загадка боли / Р. Мелзак. – М. : Медицина, 1981. – 232 с.
3. **Никода, Н. А.** Современное состояние науки о боли. Острые и хронические болевые синдромы (Информация о X Всемирном конгрессе по боли) / Н. А. Никода, В. В. Осипова // Анестезиология и реаниматология. – 2003. – № 5. – С. 4–49.
4. **Решетняк, В.К.** Возрастные и половые различия восприятия боли / В. К. Решетняк, М. Л. Кукушкин // Клиническая геронтология. – 2003. – Т. 9. – № 6. – С. 34–38.
5. **Kerr, M.** The way we think about pain could change how much we actually suffer / M. Kerr, [Электронный ресурс] The Guardian – 2021. – Режим доступа: <https://www.theguardian.com/lifeandstyle/2021/jan/23/analgesic-culture-can-reframing-pain-make-it-go-away>. – Дата доступа: 01.02.2021.
6. **Price, R. C.** The role of excess subcutaneous fat in pain and sensory sensitivity in obesity / R.C. Price [Электронный ресурс] European journal of pain – 2013. – Режим доступа: <https://www.researchgate.net/publication/236193083>. – Дата доступа: 20.02.2021.
7. **Марочков, А. В.** Оценка эффективности применения двух различных визуальных шкал для количественного измерения острой боли / А. В. Марочков, Д. А. Якимов // Анестезиология и реаниматология. – 2008. – № 4. – С. 50–52.
8. **Конечный, Р.** Психология в медицине / Р. Конечный, М. Боухал. – Прага : Авиценум, 1983. – 405 с.

Поступила в редакцию 18.03.2021 г.

Контакты: martusevich@msu.by

(Мартусевич Нагалья Олеговна, Кирейцев Антон Александрович)

Martusevich N., Kireitsev A. STUDYING THE ANALGESIC EFFECT OF PLACEBO MEDICATION WHILE ASSESSING ACUTE PAIN IN ATHLETES OF DIFFERENT SPORT SPECIALIZATIONS.

The purpose of the research is to study the impact of placebo drugs on the assessment of acute pain in athletes specializing in different sports. A significant difference ($p < 0.05$) has been found between the indicators of initial nociceptive sensitivity and the assessment of pain after taking placebo capsules as indicated by the data of a random colour discrete scale resulting from the first low-power current discharge.

Keywords: placebo drugs, pain, sports.

УДК 616-097

КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ ИММУННОГО СТАТУСА ДЕТЕЙ С ЧАСТЫМИ РЕСПИРАТОРНЫМИ ИНФЕКЦИЯМИ

О. В. Поворова

старший преподаватель

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Н. Д. Титова

доктор медицинских наук, доцент, профессор

Белорусская медицинская академия последипломного образования

В. А. Ливинская

кандидат математических наук, доцент

Белорусско-Российский университет

Предложен метод оценки общего состояния иммунитета у детей с повторными респираторными инфекциями с использованием функции желательности математического аппарата теории нечетких множеств. Данный метод позволяет определить в изучаемой популяции долю объектов исследований с показателями иммунного статуса вне пределов референсных значений. Экономическим преимуществом предложенного метода оценки состояния иммунного статуса является использование основных клинико-лабораторных показателей иммунитета, изучение которых возможно в любой специализированной лаборатории более простыми иммунологическими тестами первого уровня.

Ключевые слова: содержание сывороточных иммуноглобулинов, содержание субпопуляций лимфоцитов, часто болеющие респираторными заболеваниями дети 1–16 лет.

Введение

Интерпретация лабораторных показателей проводится согласно их допустимых “нормальных” значений. Формализация границ норм подразумевает состояние здоровья без отклонений, однако у часто болеющих детей ряд показателей находится в пределах референсных значений (РЗ), а другие – выходят за пределы диапазона РЗ. Возникают количественные вопросы – насколько лабораторный показатель отличается от РЗ, насколько показатели из пограничных областей отличаются от состояний “гарантированной” нормы и “гарантированной” патологии. Неравнозначность показателей в рамках достаточно широкого диапазона РЗ является основным проблемным моментом в количественной оценке значений в зоне между “гарантированными” нормой и патологией. Значения результатов, близких к границам, норм не исключают возможных ошибок измерения, поэтому у здоровых детей с приближенными значениями к внутренним границам РЗ не гарантирует норму, а близкие значения к внешним границам РЗ не гарантирует патологию у больных. Таким образом, существует достаточно широкая область между “гарантированными” нормой и патологией. Для того, чтобы решить проблему переходной зоны, предлагается диапазон РЗ описывать функцией желательности (принадлежности) [1].

Функция желательности математического аппарата теории нечетких множеств позволяет учитывать особенности отклонений лабораторных показателей от

нормы (возрастные, половые, региональные, инструментальные и др.), переводя абсолютные значения показателей в относительные. Функция желательности в области гарантированной нормы принимает значение 1, в области гарантированной патологии – 0. По мере удаления значения исследуемого показателя от области гарантированной нормы, равномерно уменьшается значение функции желательности от 1 до 0. Для характеристики медико-биологических факторов чаще всего применяются шесть простейших форм функций желательности (рисунок 1). Для показателей иммунного статуса соответствует функция желательности типа 3, а также тип 2 для IgE, циркулирующих иммунных комплексов, у которых диапазон РЗ от нуля и выше.

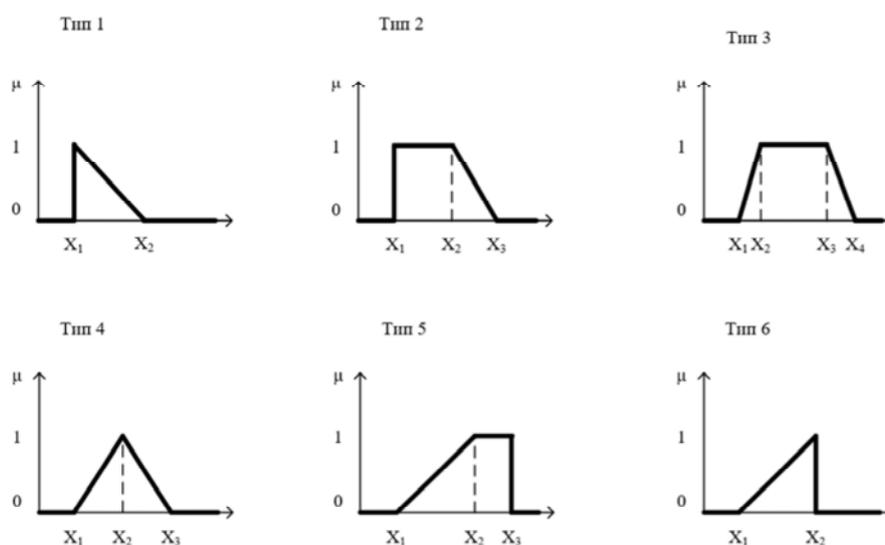


Рисунок 1 – Типы функций желательности [2]

Цель исследования – провести комплексную оценку состояния иммунного статуса у детей с частыми респираторными инфекциями в зависимости от нозологии.

Материалы и методы исследований

Объект исследования – дети ($n = 98$) 1–16 лет Минской области, часто болеющие острыми респираторными заболеваниями, здоровые на момент обследования. Оценка состояния иммунного статуса проводилась в двух группах: группа 1 (ГР1, $n = 29$) – дети, страдающие хроническими аллергическими заболеваниями (бронхиальная астма, аллергический ринит); группа 2 (ГР2, $n = 69$) – дети, перенесшие более шести эпизодов острых респираторных инфекций. Среди детей второй группы выделены отдельно две подгруппы: ГР2.1 – дети, имеющие в анамнезе за последний год пневмонии помимо острых респираторных инфекций ($n = 14$), ГР2.2 – дети с острыми респираторными заболеваниями ($n = 55$).

Предмет исследования – содержание лейкоцитов и лимфоцитов в периферической крови, содержание показателей клеточного иммунитета $CD3^+$, $CD3^+CD4^+$, $CD3^+CD8^+$, $CD3^+CD19^+$ и гуморального иммунитета IgG, IgA, IgM. Методы исследований: иммуноферментный анализ (Hitachi 912), метод проточной цитометрии (Beckman Coulter's Navios). Анализ показателей иммунитета проводился в

клинико-диагностической лаборатории УЗ “Минская областная детская клиническая больница” (УЗ “МОДКБ”). В качестве интервалов референсных значений (P3) изучаемых предметов исследования приняты показатели лаборатории УЗ “МОДКБ”, приведенные в таблице 1. Для каждого показателя иммунитета с учетом возрастных норм ребенка рассчитывали функцию желательности (принадлежности) математического аппарата теории нечетких множеств. В лаборатории УЗ “МОЛДЦ” нормирование показателей гуморального иммунитета не имеет возрастных различий, показатели клеточного иммунитета нормируются в двух возрастных группах детей 1–6 и 7–16 лет. Поэтому мы изучали состояние иммунитета у детей данных двух возрастных групп, а также 1–16 лет.

Таблица 1 – Интервалы референсных значений (P3)

	1–16 лет	
лимфоциты	%	20-50
	$\times 10^9/\text{л}$	1,3-3,7
IgA	г/л	0,7-4,0
IgM	г/л	♂ 0,32-2,14
		♀ 0,4-2,5
IgG	г/л	6,8-14,45

	1–6 лет		7–16 лет	
	%	$\times 10^9/\text{л}$	%	$\times 10^9/\text{л}$
лейкоциты		5,0-12,0		4,0-9,0
CD3+	54-75	1,7-5,0	58-80	1,1-2,3
CD3+CD4+	30-49	1,0-3,3	31-50	0,59-1,4
CD3+CD8+	15-30	0,51-1,65	18-35	0,35-1,01
CD3-CD19+	15-34	0,555-2,0	10-25	0,405-0,715

Функции желательности всех изучаемых предметов исследования имеют трапециевидную форму (тип 3 рисунка 1) с четырьмя опорными точками: x_2 и x_3 – нижний и верхний уровни P3, x_1 и x_2 – минимальное и максимальное значение показателя в возрастной группе. Между опорными точками x_1 - x_2 , x_2 - x_3 и x_3 - x_4 рассчитывали отрезки на оси абсцисс графика. Длина отрезка x_1 - x_2 равна разности между минимальным значением в выборке и нижней границей нормы. Длина отрезка x_2 - x_3 равна разности между высшим и нижним значением нормы. Длина отрезка x_3 - x_4 равна разности между максимальным значением в выборке и максимальной границей нормы. Два отрезка x_1 - x_2 и x_3 - x_4 характеризуют переходные зоны между нормой и патологией, в которых функция желательности падает по мере удаления от области гарантированной нормы. В рамках такого подхода к оценке показателей иммунитета есть возможность проанализировать их в переходной зоне, иметь свободу действия в определении группы риска развития иммунозависимых/иммунообусловленных заболеваний при использовании аппарата аналитической геометрии для нахождения ординаты точки по известной абсциссе и двум известным точкам, лежащим на ней.

При помощи мультипликативной свертки агрегировали [3] рассчитанные функции желательности показателей иммунитета в частные критерии Г1 (содержание лейкоцитов, лимфоцитов), Г2 (содержание сывороточных иммуноглобулинов) и Г3 (содержание субпопуляций лимфоцитов). Рассчитанные значения Г1, Г2,

ГЗ агрегировали в глобальный критерий D (иммунный статус), характеризующий состояние иммунной системы в целом. Функции желательности имеют значения от нуля до единицы, поэтому чем больше показателей имеют значение вне диапазона РЗ, тем ближе к нулю значение агрегированного частного/глобального критерия, тем выше процент отклонения от возрастных норм.

Статистический анализ проводили с помощью пакета прикладных программ "Statistica 8.0". Данные представлены в виде медианы, верхнего и нижнего квартилей. Распределение глобальных критериев не подчиняются никаким стандартным законам, поэтому статистическая достоверность различий оценивалась с помощью непараметрического метода Манна-Уитни (Z), однофакторного дисперсионного анализа (F). Критический уровень значимости был принят $p < 0,05$.

Результаты исследований

Значения клинико-лабораторных показателей иммунного статуса у детей 1–16 лет с повторными респираторными заболеваниями представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Показатели иммунитета у детей 1–16 лет с частыми респираторными заболеваниями, Me [25%–75%]

		ГР1 (n = 29)	ГР2.1 (n = 14)	ГР2.2 (n = 55)	ГР2 (n = 69)
лейкоциты	$\times 10^9/\text{л}$	8,11 [6,35-9,96]	8,17 [6,98-9,67]	7, 8 [6,85-9,89]	8,0 [6,86-9,67]
	%	50,0 [39,0-57,0]	49,0 [46,0-53,0]	45,0 [36,0-52,0]	47,0 [36,0-52,0]
лимфоциты	$\times 10^9/\text{л}$	3,56 [3,29-4,62]	3,795 [2,582-4,765]	3,46 [2,64-4,27]	3,498 [2,64-4,35]
	%	23,1 [20,9-24,9]	24,3 [22,2-39,9]	25,0 [22,8-27,9]	24,85 [22,8-27,9]
IgA	г/л	0,99 [0,75-1,4]	0,79 [0,61-1,12]	0,86 [0,28-1,29]	0,86 [0,38-1,25]
IgM	г/л	0,94 [0,71-1,25]	1,145 [0,85-1,38]	0,91 [0,7-1,28]	0,95 [0,72-1,28]
IgG	г/л	9,39 [8,29-11,86]	9,69 [8,13-12,57]	9,66 [7,35-12,0]	9,66 [7,88-12,0]
CD3+	%	71,8 [66,8-74,5]	76,6 [74,0-78,9]	70,1 [63,4-73,0]	70,65 [63,8-75,5]
	$\times 10^9/\text{л}$	2,318 [2,204-3,596]	3,187 [2,036-3,354]	2,563 [1,973-2,993]	2,575 [2,009-3,187]
CD3+CD4+	%	41,4 [38,5-44,1]	38,1 [32,5-50,0]	36,5 [31,8-42,8]	37,75 [31,9-42,9]
	$\times 10^9/\text{л}$	1,368 [1,255-2,416]	1,29 [1,24-1,859]	1,258 [0,992-1,918]	1,283 [1,017-1,859]
CD3+CD8+	%	23,1 [20,9-24,9]	24,3 [22,2-39,9]	25,0 [22,8-27,9]	24,85 [22,8-27,9]
	$\times 10^9/\text{л}$	0,79 [0,612-1,082]	0,835 [0,627-1,736]	0,909 [0,814-1,219]	0,908 [0,799-1,219]
CD3- CD19+	%	21,0 [13,7-22,2]	13,8 [12,3-17,0]	17,8 [14,0-25,3]	17,35 [13,7-23,5]
	$\times 10^9/\text{л}$	0,722 [0,494-0,933]	0,535 [0,199-0,639]	0,685 [0,469-1,131]	0,646 [0,401-1,105]

Статистически значимые отличия определены по содержанию CD3+ Т-общих лимфоцитов между ГР2.1 и ГР2.2 ($Z = 2,7833$ $p = 0,0054$), при этом медианное значение содержания клеток в 1,2 раза выше в группе детей с пневмониями. Содержание цитотоксических Т-лимфоцитов CD3+CD8+ в 1,2 раза ниже в ГР1 по сравнению с ГР2 ($Z = -1,9766$ $p = 0,0481$). Содержание Т-хелперных CD3+CD4+ лимфоцитов в группе детей с аллергическими заболеваниями достоверно выше по сравнению с ГР2 ($Z = 2,0017$ $p = 0,0453$) и ГР2.2 ($Z = 2,1053$ $p = 0,0353$). По остальным пяти изучаемым показателям иммунитета не выявлено статистически значимых различий у детей в исследуемых группах. Таким образом, у детей ГР2.2 показатели уровня Т-общих лимфоцитов, цитотоксических Т-лимфоцитов, а также В-лимфоцитов были ниже по сравнению с ГР1.

Мы предлагаем интегрированный показатель состояния иммунитета анализировать при помощи функции желательности, позволяющей рассчитывать относительный показатель отклонения от нормы с учетом не только возрастных осо-

бенностей РЗ клиничко-лабораторных показателей, но и региональных внутригрупповых особенностей. На рисунке 2 представлены результаты анализа иммунного статуса у детей 1–16 лет исследуемых групп.

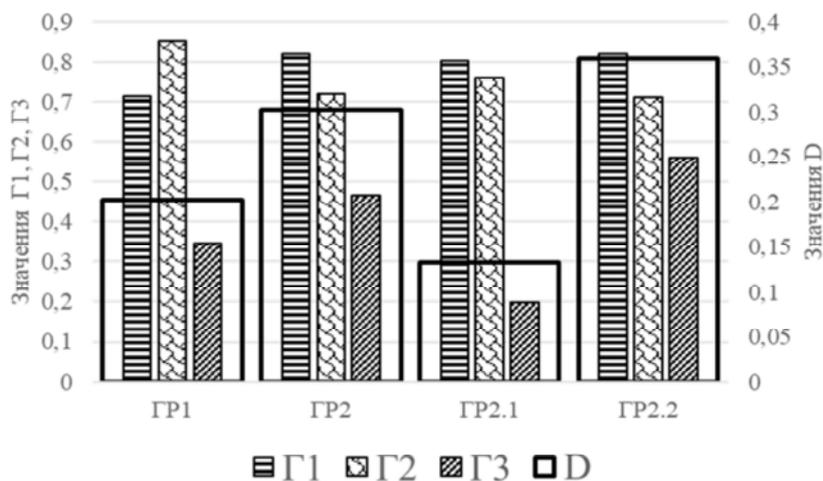


Рисунок 2 – Значения глобального критерия “иммунный статус” (D), частных критериев “лейкоциты/лимфоциты” (Г1), “иммуноглобулины” (Г2), “субпопуляции лимфоцитов” (Г3) в исследуемых группах

Как видно из рисунка 2, самое высокое значение глобального критерия, характеризующего в целом состояние иммунитета, определено у детей ГР2.2 с частыми респираторными заболеваниями ($D = 0,3595$ или 64,05% детей имеют отклонения от нормы), превышая показатель глобального критерия в 1,3 и 1,4 раза у детей с хроническими аллергическими заболеваниями и острыми пневмониями в анамнезе. У детей ГР2.2 определены самые высокие значения по частным критериям “лейкоциты/лимфоциты” и “субпопуляции лимфоцитов”, самые низкие значения частного критерия “иммуноглобулины”. Таким образом, отклонения от возрастных норм иммунного статуса определено у 79,8% детей ГР1, 69,75% ГР2, 86,75% ГР2.1, 64,05% ГР2.2.

Значения глобального/частных критериев в зависимости от возраста представлено в таблице 3.

Таблица 3 – Количественная оценка (ср. арифметическая) особенностей функций принадлежности к норме

		D	Г1	Г2	Г3
ГР1	1–6 лет	0,209	0,729	0,919	0,388
	7–16 лет	0,195	0,699	0,783	0,305
ГР2	1–6 лет	0,239	0,787	0,693	0,461
	7–16 лет	0,366	0,854	0,746	0,474
ГР2.1	1–6 лет	0,179	0,685	0,818	0,276
	7–16 лет	0,086	0,920	0,704	0,121
ГР2.2	1–6 лет	0,260	0,809	0,666	0,528
	7–16 лет	0,459	0,832	0,760	0,591

Как видно из данных таблицы 3, у детей 7–16 лет с хроническими аллергическими заболеваниями и повторными пневмониями в анамнезе интегральный показатель состояния иммунитета ниже в 1,1 и 2,1 раза по сравнению с детьми более младшей возрастной группой; у детей 7–16 лет ГР2.2 выше в 1,8 раз по сравнению с детьми 1–6 лет. Самый высокий показатель глобального критерия “иммунный статус” определен у детей 7–16 лет ГР2.2, самый низкий – у детей 7–16 лет ГР2.1. Таким образом, доля детей с отклонениями от нормы значительно выше в ГР1 и ГР2.1 по сравнению с ГР2.2, поэтому предложенный диагностический алгоритм может иметь практическое значение для определения предикторов развития иммунопатологических состояний.

Для выявления влияния фактора “возраст” на величину глобального/частных критериев иммунного статуса был проведен однофакторный дисперсионный анализ, результаты которого показали статистически значимое влияние ($F = 2,6756$ $p = 0,0490$) данного фактора только на агрегированный показатель ГЗ. Таким образом, определены статистически значимые отличия только по значениям частного критерия “субпопуляции лимфоцитов” между двумя возрастными группами 1-6 и 7–16 лет. Самый низкий показатель частного критерия ГЗ определен у детей ГР2.1, самый высокий – у детей ГР2.2 (таблица 2). Агрегированный показатель содержания субпопуляций лимфоцитов ГЗ вне диапазона РЗ имеют дети 1–6 и 7–16 лет, соответственно, у 72,37% и 87,88% в ГР2.1, 47,16% и 40,88% в ГР2.2, 53,87% и 52,63% в ГР2, 69,51% в ГР1. Среди показателей клеточного иммунитета статистически значимая разница между двумя возрастными группами определена только по функции желательности CD3+ Т-общих лимфоцитов ($F = 2,6914$ $p = 0,0135$) и CD3-CD19+ В-лимфоцитов ($F = 2,1747$ $p = 0,0428$), значения медиан и Q1-Q3 которых представлены на рисунке 3.

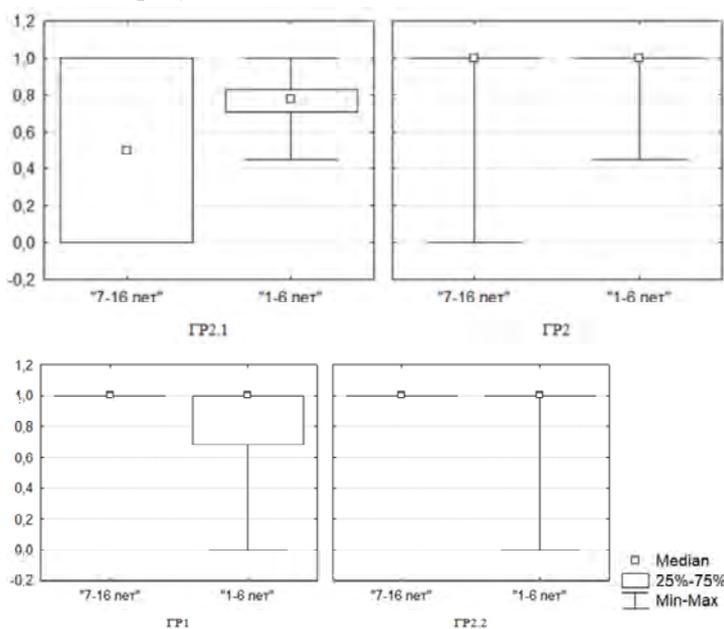
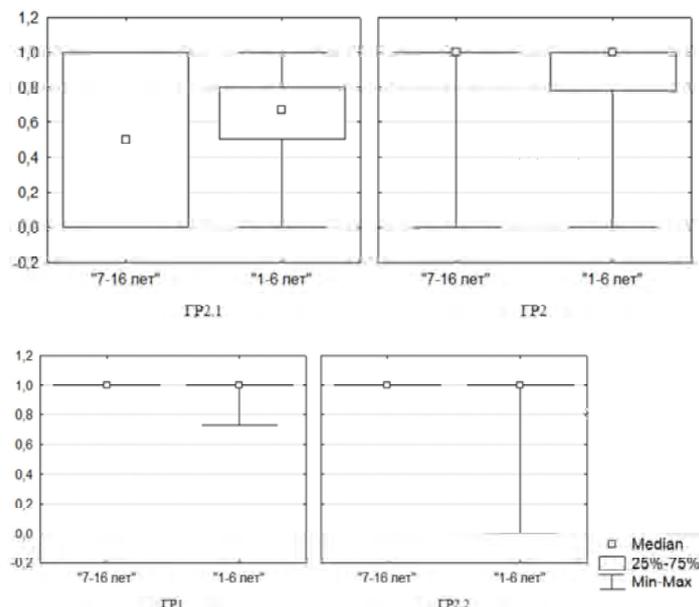


Рисунок 3 – Диаграммы размаха функции желательности CD3+ лимфоцитов у детей двух возрастных групп в зависимости от нозологии респираторных заболеваний; Ме [25%–75%]



Окончание рисунка 3 – Диаграммы размаха функции желательности CD3-CD19+ (Б) лимфоцитов у детей двух возрастных групп в зависимости от нозологии респираторных заболеваний; Me [25%–75%]

Медианные значения функций желательности Т-общих и В-лимфоцитов равны единице у детей ГР2, ГР1, ГР2.2, поэтому при изучаемых нозологиях более 50% детей имеют содержание данных клеток в пределах диапазона РЗ. У детей 7–16 лет с пневмониями в анамнезе медиана функции желательности CD3+ и CD3-CD19+ лимфоцитов в два раза меньше с размахом квартилей медианы от нуля до единицы. У 1–6-летних детей ГР2.1 функции желательности анализируемых лимфоцитов составили, соответственно, 0,8 и 0,7. Все дети с аллергическим анамнезом ГР1 и часто болеющие респираторными инфекциями ГР2.2 в возрасте 7–16 лет имеют значения Т-общих и В-лимфоцитов в пределах РЗ. Таким образом, у детей с пневмониями в анамнезе в год обследования определена наибольшая доля детей с отклонениями от норм по содержанию данных иммунных клеток в возрасте 7–16 лет.

Повторные респираторные инфекции являются одной из основных причин формирования хронической патологии [4; 5], иммунодефицитных состояний [6; 7]. В нашем исследовании наиболее критическим состоянием здоровья являются нозологии ГР1 и ГР2.1, поэтому среднеарифметический показатель значений их глобальных критериев ($D=0,167$) рассматриваются нами как крайне выраженные изменения иммунного статуса. Дети ГР2 имели больше шести эпизодов в год респираторных заболеваний, при этом среди них были дети с пневмониями в год обследования, поэтому изменения иммунного статуса характеризуются нами как выраженные отклонения от нормы ($D = 0,303$). Ряд исследователей считает, что причиной повторных респираторных заболеваний является дисбаланс иммунной системы без признаков иммунной недостаточности [8], поэтому состояние иммунитета детей ГР2.2 оцениваются нами как умеренные изменения иммунного статуса ($D = 0,36$). Самое высокое значение глобального критерия определено у детей

7 лет ГР2 ($D = 0,667$) и оценивается нами как верхний рубеж удовлетворительного состояния иммунного статуса. На основании проанализированных закономерностей нами разработана шкала интерпретации значений глобального критерия иммунного статуса D :

(1 уровень) 0-0,17 – крайне выраженные изменения (или отклонения от нормы) иммунного статуса;

(2 уровень) 0,18-0,3 – выраженные изменения (или отклонения от нормы) иммунного статуса;

(3 уровень) 0,31-0,36 – умеренные изменения (отклонения) иммунного статуса;

(4 уровень) 0,37-0,67 – удовлетворительные показатели иммунного статуса;

(5 уровень) 0,68-1 – близкие к нормальным показатели иммунного статуса.

Метод расчета интегрального показателя иммунитета может иметь широкое практическое применение для прогнозирования вероятности развития иммунозависимых/иммунообусловленных заболеваний у детей с повторными респираторными заболеваниями. В данном диагностическом алгоритме расчета общего состояния иммунного статуса используются наиболее часто определяемые составляющие иммунитета, которые возможно определять более экономически выгодными иммунологическими реакциями первого уровня. Проведение исследований методами иммунологических реакций второго уровня имеют научную значимость, однако более трудоемки, экономически высокочувствительны, что ставит под вопрос целесообразность их массового использования в широкой врачебной практике. Мы рекомендуем у детей с частыми респираторными заболеваниями назначение проведения иммунологических реакций второго уровня методом проточной цитометрии с изучением содержания расширенного спектра субпопуляций лимфоцитов при расчетном значении глобального критерия $D < 0,37$.

Заключение

Разработан диагностический алгоритм оценки общего состояния иммунитета у детей с повторными респираторными инфекциями при использовании функции желательности математического аппарата теории нечетких множеств. Данный метод позволяет определить в изучаемой популяции долю объектов исследований с показателями иммунного статуса вне пределов референсных значений. Преимуществом данного метода является унифицированность из-за перевода различных абсолютных показателей в единую относительную систему.

На основании комплексной оценки иммунитета детей с различными респираторными заболеваниями разработана шкала интерпретации значений глобального критерия иммунного статуса, позволяющая принять управленческое решение в назначении дальнейшего лабораторного исследования, проведения иммунокорректирующей/иммуномодулирующей терапии. Выявление закономерностей в содержании клинико-лабораторных показателей на момент клинически здорового состояния детей с частыми респираторными инфекциями позволит использовать их в роли прогностических факторов риска развития патологических состояний, в первую очередь формирования хронических воспалительных заболеваний дыхательных путей.

Экономическим преимуществом предложенного метода оценки состояния иммунного статуса является использование основных клинико-лабораторных показателей иммунитета, изучение которых возможно в любой специализированной лаборатории более простыми иммунологическими тестами первого уровня.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Орловский, С. А.** Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 208 с.
2. Интегральная оценка влияния производственных и непроизводственных условий на состояние здоровья работающих во вредных и опасных условиях труда: новые методические подходы. Инструкция по применению : утв. М-вом здравоохранения Респ. Беларусь 14.10.2004, № 76-0904. – Минск, 2014. – 57 с.
3. **Поворова, О. В.** Возрастные особенности иммунного статуса детей с частыми респираторными заболеваниями / О. В. Поворова, В. А. Ливинская, Т. И. Чегерова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. – 2021. – № 1. – С. 103–114.
4. **Farne, H. A.** Immune mechanisms of respiratory viral infections in asthma / H. A. Farne, S. L. Johnston // Current Opinion in Immunology. – 2017. – Vol. 48. – P. 31–37. <https://doi.org/10.1016/j.coi.2017.07.017>.
5. **Lloyd, C. M.** Development of allergic immunity in early life / C. M. Lloyd, S. Saglani // Immunol Rev. – 2017. – Vol. 278. – P. 101–115. <https://doi.org/10.1111/imr.12562>.
6. **Perez, E. E.** Diagnosis and management of specific antibody deficiency / E. E. Perez, M. Ballou // Immunol Allergy Clin N Am. – 2020. – Vol. 40, № 3. – P. 499–510. doi: 10.1016/j.iac.2020.03.005. Epub 2020 Jun 9.
7. **El-Bohy, M.** Humoral immune deficiencies of childhood / M. El-Bohy, P. Poowuttikul, E. Secord // Pediatr Clin N Am. – 2019. – Vol. 66. – P. 897–903. <https://doi.org/10.1016/j.pcl.2019.06.010>.
8. **Brodin, P.** New approaches to the study of immune responses in humans / P. Brodin // Human Genetics. – 2020. – Vol. 139. – P. 795–799. <https://doi.org/10.1007/s00439-020-02129-3>.

Поступила в редакцию 03.05.2021 г.

Контакты: povorov@mail.ru

(Поворова Оксана Викторовна)

nadytitova@mail.ru

(Титова Надежда Дмитриевна)

viktoria.livinskaya@mail.ru

(Ливинская Виктория Александровна)

Povorova O., Titova N., Livinskaya V. COMPREHENSIVE ASSESSMENT OF THE IMMUNE STATUS OF CHILDREN WITH FREQUENT RESPIRATORY INFECTIONS.

The method for assessing the general state of immunity in children with recurrent respiratory infections using the desirability function of the mathematical apparatus of fuzzy set theory is proposed. This method helps to determine the proportion of research objects with immune status indicators outside the reference values in the studied population. The economic advantage of the proposed method of assessing the state of the immune status is the use of basic clinical and laboratory indicators of immunity, the study of which is possible in any specialized laboratory with simpler immunological tests of the first level.

Keywords: content of serum immunoglobulins, content of lymphocyte subpopulations, children from 1 to 16 years old suffering from respiratory diseases.

УДК 577.121:595.78:633

ЗАВИСИМОСТЬ УРОВНЯ МЕТАБОЛИЗМА ДЕНДРОФИЛЬНЫХ ЧЕШУЕКРЫЛЫХ ОТ ВИДА КОРМОВОГО РАСТЕНИЯ

С. И. Денисова

кандидат биологических наук, доцент

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

С. М. Седловская

кандидат биологических наук, доцент

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

В статье приведены данные по определению активности в организме гусениц и куколок ферментов амилазы, аспаргатаминотрансферазы, γ -глутамилтрансферазы, которые характеризуют процессы пищеварения и уровень метаболизма дендрофильных чешуекрылых различного систематического положения и трофической специализации в зависимости от биохимического состава растений.

Ключевые слова: ферменты, амилаза, аспаргатаминотрансфераза, γ -глутамилтрансфераза, метаболизм, дендрофильные чешуекрылые, трофическая специализация, кормовое растение.

Введение

Переход насекомого на новое кормовое растение будет сопровождаться сдвигом ферментативной деятельности кишечника, а, следовательно, отражаться на росте и развитии насекомого. Ход процессов пищеварения находится в прямой зависимости от активности ферментов. Ферменты активны при определенных значениях рН кишечного сока, называемых оптимальными [1]. Оптимумы рН для гидролитических ферментов насекомых формировались, в первую очередь, под воздействием кислотности растительных соков. Это привело к возникновению соответствия оптимального для кишечных ферментов значения концентрации водородных ионов с рН листа кормовых растений [2]. Но кислотность растительных соков находится в зависимости от физиологического возраста листа, влияют на нее и внешние факторы. Противоречие между изменчивостью рН корма и устойчивыми оптимальными значениями рН кишечника разрешается приобретением кишечной средой в процессе эволюции свойств буферности [2]. Однако буферность кишечной среды даже у полифагов может поддерживать гомеостатическое состояние только при незначительных колебаниях рН корма. Резкие отклонения этого показателя от оптимума не позволяют насекомым эффективно утилизировать пищу [2–4].

Таким образом, ферментативная активность содержимого средней кишки определяется оптимальными значениями кислотности кишечного сока, которая, в свою очередь, в известных пределах зависит от кислотности растительных соков кормового растения.

Ряд исследователей [1; 5] установили, что повышенная щелочность сока в средней кишке насекомых благоприятствует углеводному пищеварению, пониженная – белковому. В соответствии с этим насекомых-фитофагов по типу питания делят на две группы: фитофаги с углеводным и белковым типами питания [6].

В исследованиях по усвоению разных компонентов корма С. С. Ижевским [2] показано, что для фитофагов с углеводным типом питания характерно совпадение рН кишечной среды с оптимальными значениями рН для карбогидраз при одновременном несовпадении с оптимальными значениями рН для пептидаз. Вот почему углеводы листа расщепляются и усваиваются этой группой насекомых значительно полнее, чем белки.

Кислотность пищи влияет не только на рН среды пищеварительной системы гусениц, но и на рН гемолимфы [7–9]. Гемолимфа насекомых имеет обычно кислую реакцию [9], рН гемолимфы у одних групп чешуекрылых понижается, у других повышается к моменту окукливания [8; 9].

Цель работы – изучение влияния химического состава кормовых растений на активность ферментов белковых и углеводных обменов у дендрофильных чешуекрылых разной трофической специализации на разных кормовых растениях.

Исследования по теме проводили на базе биологического стационара “Щитовка” ВГУ имени П.М. Машерова в 2016–2020 гг. Материалом для работы служили лунка серебристая (*Phalera bucephala* L.), зеленая дубовая листовертка (*Tortrix viridis* L.), совка-лишайница (*Moma alpium* Osbreck.), зимняя пяденица (*Operophtera brumata* L.), малый ночной павлиний глаз (*Eudia pavonia* L.). Кормовыми растениями являлись дуб черешчатый (*Qerqu srobur* L.), береза повислая (*Betula pendula* Roth.), яблоня обыкновенная (*Malus palustris* L.), рябина (*Sorbus aucuparia* L.), черемуха обыкновенная (*Padus racemosa* G.).

Содержание белка в гемолимфе гусениц, куколок, грены определяли рефрактометрическим путем [10], количество общих липидов – по методу Сокслета.

Гомогенат гусениц и куколок получали, используя в качестве экстрагирующего вещества физраствор. Гомогенат центрифугировали 10 мин при 30 тыс. оборотов в минуту, добавляли 2 капли этилового спирта и еще 5 мин центрифугировали. Надосадочную жидкость подвергали анализу с помощью тест-систем фирмы Roche на спектрометре “Рефлотрон-4”. Количество повторностей 3, по 10 гусениц в каждой повторности.

Основная часть

Изучение содержания ферментов амилазы, аспаргатаминотрансферазы и γ -глутамилтрансферазы в гомогенате гусениц и куколок полифага – лунки серебристой, которая выкармливалась на разных кормовых растениях показало, что количество фермента амилазы уменьшается в ряду дуб → береза → яблоня → рябина → черемуха в 1,5 раза (таблица 1).

Таблица 1 – Биохимические показатели гомогената гусениц, куколок лунки серебристой на разных кормовых растениях

Кормовое растение	Амилаза АМ γ L, Е/л	Аспаргатаминотрансфераза ALT (GPT), Е/л	γ -Глутамилтрансфераза GGT, Е/л
Гусеница			
Дуб	52,11 \pm 3,12	30,10 \pm 0,31	–
Береза	50,71 \pm 5,26	29,70 \pm 0,55	–
Яблоня	37,53 \pm 6,33	26,86 \pm 0,71	–
Рябина	34,61 \pm 3,94	25,93 \pm 0,61	–

Окончание таблицы 1

Кормовое растение	Амилаза АМγL, Е/л	Аспартаминотрансфераза ALT (GPT), Е/л	γ-Глутамилтрансфераза GGT, Е/л
Черемуха	30,12±0,93	25,32±0,39	–
Куколка			
Дуб	–	120,63±11,21	90,42±3,09
Береза	–	121,81±12,10	90,56±5,36
Яблоня	–	117,65±9,23	76,49±4,18
Рябина	–	110,76±6,20	70,13±4,50
Черемуха	–	106,93±5,25	66,03±1,22

Следовательно, активность процессов пищеварения действительно уменьшается в зависимости от химизма различных кормовых растений. Лист дуба содержит самое большое количество белковых и углеводных соединений по сравнению с листом березы, яблони, рябины и черемухи, самое большое количество витаминов группы В и А, самое низкое содержание вторичных метаболитов – фенолов и таннинов. Все эти факторы характеризуют лист дуба как наиболее оптимальный с точки зрения кормовых качеств.

Амилазы у куколок лунки серебристой не обнаружено. Активность аспартаминотрансферазы у гусениц лунки серебристой самая высокая при питании листом дуба. Аспартаминотрансфераза – фермент синтеза аспарагиновой кислоты. Он играет важную роль в обмене аминокислот, осуществляет связь через α-кетоглутаровую кислоту между белками, углеводами и жировыми обменами. Чем выше активность аспартаминотрансферазы, тем интенсивнее идут процессы обмена веществ в организме насекомого [11].

Следовательно, более высокий уровень активности аспартаминотрансферазы у гусениц лунки серебристой на дубе указывает на более высокий уровень обмена веществ у насекомого на этом кормовом растении. Активность аспартаминотрансферазы у куколок выше, чем у гусениц. Куколки лунки серебристой зимуют и накапливают в 3 раза больше жиров и углеводов, чем гусеницы, возможно, поэтому они содержат большее количество фермента, участвующего в синтезе этих веществ. Таким образом, высокое содержание белковых, углеводных и минеральных соединений в листьях дуба способствует более интенсивному накоплению этих веществ в гусеницах и куколках и более высокой активности аспартаминотрансферазы в организме лунки серебристой именно на дубе кормовом растении. Но следует отметить, что на других кормовых растениях самые низкие значения данного фермента наблюдаются при питании гусениц листом черемухи.

Фермент γ-глутамилтрансфераза у гусениц не обнаружен, а у куколок этот фермент имеется (таблица 1). γ-Глутамилтрансфераза служит для создания фонда определенных аминокислот в виде их γ-глутамилтрансферазных производных, которые необходимы организму гусениц в период зарождения тканей, в период линьки. У куколок лунки серебристой на дубе активность γ-глутамилтрансферазына 30,0% выше, чем на черемухе, на 20,0% выше, чем на яблоне и рябине. Таким образом, важный фермент белкового обмена – γ-глутамилтрансфераза наибольшую активность в организме лунки серебристой проявляет при питании листом

дуба, что указывает на оптимальность биохимического состава корма для развития данного насекомого.

Значения фермента углеводного обмена – амилазы в организме полифага зимней пяденицы приведены в таблице 2. При сравнении активности амилазы у полифага – лунки серебристой и полифага – зимней пяденицы выявлена более высокая активность амилазы у гусениц зимней пяденицы примерно на 50,0% на всех кормовых растениях.

Таблица 2 – Биохимические показатели гомогената гусениц, куколок зимней пяденицы в зависимости от кормового растения

Кормовое растение	Амилаза АМγL, Е/л	Аспартаминотрансфераза ALT (GPT), Е/л	γ-Глутамилтрансфераза GGT, Е/л
Гусеница			
Дуб	99,48±4,15	30,41±0,31	–
Береза	96,91±7,62	30,10±0,29	–
Яблоня	90,71±4,12	27,70±0,45	–
Рябина	84,03±4,25	26,86±0,21	–
Черемуха	75,25±4,17	25,43±0,29	–
Куколка			
Дуб	–	130,53±10,41	60,25±0,33
Береза	–	132,39±3,93	60,20±0,64
Яблоня	–	77,95±4,37	52,10±0,75
Рябина	–	64,17±2,19	30,10±0,49
Черемуха	–	59,65±2,32	27,81±0,81

Анализ активности амилазы в гомогенате гусениц зимней пяденицы на разных кормовых растениях показал, что на дубе активность амилазы самая высокая, на черемухе – самая низкая. По мере ухудшения биохимического состава кормовых растений активность амилазы также ухудшается, что указывает на несомненную зависимость всех обменных процессов в организме насекомых от химизма кормовых растений. Различия в значении активности амилазы у двух полифагов – лунки серебристой и зимней пяденицы указывает на видовую специфичность обмена веществ у этих насекомых.

Аспартаминотрансфераза у зимней пяденицы обнаружена в гомогенате как гусениц, так и куколок. Активность этого фермента у гусениц зимней пяденицы практически не отличается от активности у лунки серебристой. Активность аспартаминотрансферазы у куколок зимней пяденицы выше, чем у лунки серебристой. Но изменение активности аспартаминотрансферазы в зависимости от кормового растения у зимней пяденицы протекает по-другому при сравнении с лункой серебристой. Активность аспартаминотрансферазы в ряду кормовых растений от дуба к черемухе уменьшается в 2 раза у зимней пяденицы, а у лунки серебристой – только на 10,0%. Установленный факт также свидетельствует о влиянии систематического положения на протекание одних и тех же обменных процессов в организме насекомых, так как кормовые растения одни и те же и исследования проводились в одно и то же время.

γ-Глутамилтрансфераза обнаружена только у куколок зимней пяденицы. Активность данного фермента у куколок зимней пяденицы меньше, чем у куколок

лунки серебристой приблизительно на 30,0%, но изменение значений активности фермента в зависимости от кормового растения происходит закономерно, как и у лунки серебристой. Количество фермента γ -глутамилтрансферазы самое высокое при питании листом дуба и самое низкое при питании листом черемухи. Уменьшение количества фермента в ряду растений дуб \rightarrow береза \rightarrow яблоня \rightarrow рябина \rightarrow черемуха достигает 50,0%.

Таким образом, установлено, что активность изученных ферментов у полифагов – лунки серебристой и зимней пяденицы зависит как от биохимического состава кормовых растений, так и от систематического положения дендрофильных чешуекрылых.

Олигофаг – совка лишайница на тех же кормовых растениях, что и полифаги проявляет ту же закономерность изменения активности ферментов амилазы, аспартаминотрансферазы, γ -глутамилтрансферазы, а именно, активность ферментов уменьшается в ряду кормовых растений (дуб \rightarrow береза \rightarrow яблоня \rightarrow рябина \rightarrow черемуха) от дуба к черемухе (таблица 3). Но есть и отличия: активность амилазы меньше на 20,0%, активность аспартаминотрансферазы у гусениц больше почти в два раза, а активность γ -глутамилтрансферазы занимает по активности промежуточное положение между лункой серебристой и зимней пяденицей. Выявленные отличия характеризуют индивидуальные особенности обмена веществ совки-лишайницы. Итак, олигофаг – совка-лишайница имеет количественные отличия в содержании изученных ферментов от полифагов, но повторяет ту же закономерность уменьшения активности ферментов в ряду кормовых растений от дуба к черемухе что и полифаги.

Таблица 3 – Биохимические показатели гомогената гусениц, куколок совки-лишайницы в зависимости от кормового растения

Кормовое растение	Амилаза АМγL, Е/л	Аспартаминотрансфераза ALT (GPT), Е/л	γ -Глутамилтрансфераза GGT, Е/л
Гусеница			
Дуб	41,21±1,12	76,18±2,35	–
Береза	42,61±1,33	78,43±2,45	–
Яблоня	32,71±1,23	76,25±2,12	–
Рябина	25,15±1,32	70,86±1,82	–
Черемуха	22,25±1,44	65,35±1,62	–
Куколка			
Дуб	–	120,41±9,21	82,12±2,36
Береза	–	119,71±8,23	80,13±2,50
Яблоня	–	116,22±9,25	75,49±2,18
Рябина	–	117,65±6,18	70,50±1,18
Черемуха	–	114,35±7,25	71,32±1,24

Олигофаг – малый ночной павлиний глаз, как нами установлено, проявляет пищевую избирательность к растениям семейства Розоцветные. Это подтверждают и данные об активности ферментов у гусениц и куколок малого ночного павлиньего глаза (таблица 4).

Таблица 4 – Биохимические показатели гомогената гусениц, куколок малого ночного павлиньего глаза в зависимости от кормового растения

Кормовое растение	Амилаза АМγL, Е/л	Аспаратаминотрансфераза ALT (GPT), Е/л	γ-Глутамилтрансфераза GGT, Е/л
Гусеница			
Дуб	33,71±1,26	55,84±1,50	–
Береза	32,13±1,94	58,43±1,45	–
Яблоня	41,20±1,26	73,86±1,53	–
Рябина	44,64±1,35	68,75±1,48	–
Черемуха	54,11±1,14	78,25±1,43	–
Куколка			
Дуб	–	75,14±2,24	98,76±2,53
Береза	–	71,80±1,75	92,91±2,43
Яблоня	–	80,50±1,36	105,37±2,52
Рябина	–	82,11±1,79	110,25±2,46
Черемуха	–	92,03±0,89	116,76±2,25

Оптимальным кормовым растением для малого ночного павлиньего глаза является черемуха. Активность амилазы на черемухе в 1,5 раза выше, чем на дубе. Активность аспаратаминотрансферазы у гусениц выше на 30,0%, у куколок на 30,0% на черемухе, по сравнению с питанием листом дуба. Активность γ-глутамилтрансферазы на черемухе в 2 раза превышает активность этого фермента по сравнению с лункой серебристой, в 4 раза, по сравнению с зимней пяденицей и в 2 раза, по сравнению с совкой-лишайницей.

Итак, для полифагов и олигофага – совки-лишайницы оптимальным кормовым растением является дуб черешчатый, а для олигофага – малого ночного павлиньего глаза черемуха обыкновенная. По количественному содержанию амилазы малый ночной павлиньих глаз отличается от зимней пяденицы меньшим содержанием этого фермента, с лункой серебристой и совкой-лишайницей наблюдается сходство в содержании этого фермента. По количественному содержанию аспаратаминотрансферазы малый ночной павлиньих глаз отличается от полифагов – зимней пяденицы и лунки серебристой, и олигофага – совки-лишайницы большим содержанием этого фермента у гусениц и меньшим у куколок. γ-Глутамилтрансфераза превышает по содержанию на всех кормовых растениях все другие виды дендрофильных чешуекрылых примерно на 30%.

Полученные данные указывают на высокую степень видоспецифичности олигофага – малого ночного павлиньего глаза, хорошо развивающуюся на кормовых растениях, которые пессимальны для других видов чешуекрылых.

Монофаг – зеленая дубовая листовертка имеет довольно высокую активность ферментов амилазы, аспаратаминотрансферазы, γ-глутамилтрансферазы сопоставимую с активностью этих ферментов на дубе у полифагов – лунки серебристой и зимней пяденицы и олигофага – совки-лишайницы (таблица 5). Активность аспаратаминотрансферазы зеленой дубовой листовертки у гусениц и куколок примерно одинакова.

Таблица 5 – Биохимические показатели гомогената гусениц, куколок зеленой дубовой листовертки в зависимости от кормового растения

Кормовое растение	Амилаза АМγL, Е/л	Аспаргатаминотрансфераза ALT (GPT), Е/л	γ-Глутамилтрансфераза GGT, Е/л
Гусеница			
Дуб	45,21±1,23	78,43±1,53	–
Куколка			
Дуб	–	77,81±1,45	82,11±1,75

Она сходна с активностью этого фермента у олигофага совки-лишайницы, но превышает содержание аспаргатаминотрансферазы у гусениц полифагов почти в 2 раза, а у куколок наоборот, активность аспаргатаминотрансферазы в 1,5 раза выше, чем у куколок полифагов. Содержание γ-глутамилтрансферазы также высоко: на дубе лунка серебристая имеет сходное с зеленой дубовой листоверткой количество этого фермента, совка-лишайница – такое же количество фермента, а зимняя пяденица – меньше на 20,0%.

Таким образом, монофаг – зеленая дубовая листовертка имеет высокие показатели активности ферментов амилазы, аспаргатаминотрансферазы и γ-глутамилтрансферазы, сходные с активностью чешуекрылых – полифагов лунки серебристой и зимней пяденицы.

Заключение

Изучение содержания ферментов в гомогенате гусениц и куколок дендрофильных чешуекрылых показало, что у полифагов – лунки серебристой и зимней пяденицы, которые выкармливались на разных кормовых растениях, наибольшую активность ферменты амилаза, аспаргатаминотрансфераза и γ-глутамилтрансфераза проявляют при питании листом дуба, что указывает на оптимальность биохимического состава корма для развития.

Олигофаг – совка-лишайница имеет количественные отличия в содержании изученных ферментов от полифагов, но повторяет ту же закономерность уменьшения активности ферментов в ряду кормовых растений от дуба к черемухе, что и полифаги. Олигофаг – малый ночной павлиний глаз проявляет пищевую избирательность к растениям семейства Розоцветные. Оптимальным кормовым растением для малого ночного павлиньего глаза является черемуха, что указывает на высокую степень видоспецифичности малого ночного павлиньего глаза, хорошо развивающегося на кормовых растениях, которые пессимальны для других видов чешуекрылых.

Монофаг – зеленая дубовая листовертка имеет довольно высокую активность ферментов амилазы, аспаргатаминотрансферазы, γ-глутамилтрансферазы, сопоставимую с активностью этих ферментов на дубе у полифагов – лунки серебристой и зимней пяденицы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Уголев, А. М. Физиология мембранного пищеварения / А. М. Уголев, Н. Н. Иезуитова, Н. М. Тимофеева // Физиология пищеварения. – Л., 1974. – С. 542–570.
2. Ижевский, С. С. Функциональные особенности ферментных систем кишечника насекомых-фитофагов / С. С. Ижевский // Вопросы экологической физиологии беспозвоночных. – М.: Наука, 1974. – С. 156–175.

3. *Харборн, Дж.* Введение в экологическую биохимию / Дж. Харборн. – М. : Мир, 1985. – 31 с.
4. *Chinnery, I. A.* Carbohydrases of the midgut of the leather beetle *Dermestes maculatus* / I. A. Chinnery // *J. Insect. Physiol.*, 1971. – V. 17, N 1. – P. 47–61.
5. *Матросова, Е. М.* Регуляция выделения соляной кислоты / Е. М. Матросова // Физиология пищеварения. – Л., 1974. – С. 246–268.
6. *Эдельман, Н. М.* Влияние режима питания на обмен веществ непарного шелкопряда и зимней пяденицы / Н. М. Эдельман // Тр. ВИЗРа, 1954. – Вып. 6. – С. 75–91.
7. *Кузнецов, Н. Я.* Основы физиологии насекомых / Н. Я. Кузнецов. – М. : Изд-во АН СССР, 1948. – Т. 1. – 380 с.
8. *Шовен, Р.* Физиология насекомых / Р. Шовен. – М. : Мир, 1953. – 494 с.
9. *Тыщенко, В. П.* Основы физиологии насекомых : в 2 ч. / В. П. Тыщенко. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1976. – Ч. 1 : Физиология метаболических систем. – 363 с.
10. *Филиппович, Ю. Б.* Практикум по общей биохимии / Ю. Б. Филиппович, Т. А. Егорова, Г. А. Севастьянов. – М. : Просвещение, 1985. – 318 с.
11. *Санкина, Т. М.* Биохимия насекомых / Т. М. Санкина, Т. А. Егорова, Ю. Б. Филиппович. – В сб. статей МГПИ им. В. И. Ленина. – М., 1975. – Вып. 18. – С. 177–186.

Поступила в редакцию 24.05.2021 г.

Контакты: sedlovskaya@gmail.com

(Денисова Светлана Ивановна, Седловская Светлана Михайловна)

Denisova S., Sedlovskaya S. THE DEPENDENCE OF DENDROPHILOUS LEPIDOPTERA METABOLISM RATE ON FORAGE PLANT SPECIES.

*The article contains the information about the enzymatic activity of amylase, aspartate aminotransferase, γ -glutamyltransferase in the organisms of larva and pupa. The activity of these enzymes can characterize the digestion processes and metabolism rate of *Dendrophilous Lepidoptera* species of various systematic position and trophic specialization depending on the biochemical composition of forage plants.*

Keywords: enzymes, amylase, aspartate aminotransferase, γ -glutamyltransferase, metabolism, *Dendrophilous Lepidoptera*, trophic specialization, forage plant.

ДЛЯ ЗАЎВАГ

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў
на англійскую мову
Я.В. Рубанавы

Тэхнічныя рэдактары: *А.Л. Пазнякоў, Л.І. Будкова*
Камп'ютарны набор і вёрстка *А.Л. Пазнякоў*
Карэктары: *Г.В. Карпянкова, І.Г. Каржова*

Падпісана да друку 03.08.2021 г.
Фармат 70x108¹/₁₆. Папера афсетная. Гарнітура Times New Roman.
Ум.-друк. арк. 11,38. Ул.-выд. арк. 12,0. Тыраж 100 экз. Заказ № 3422.

Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А.А. Куляшова”, 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства
“Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля”
ЛП № 02330/23 ад 30.12.2013 г.
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў