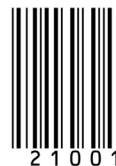


ISSN 2409-3777



9 772409 377007

2 1 0 0 1

ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта

імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

1 (57)
2021

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.В. Марчанка (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар М.М. Дабравольскі (Тула)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.В. Івашкевіч (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.М. Сідарэнка (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А.В. Цімошчанка (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар А.М. Дворнік (Гомель)
д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт Г.М. Ціханчук (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт А.А. Анціпенка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс "Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А.А. Куляшова" ўключаны ў РІНЦ
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),
ліцэнзійны дагавор № 811-12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

**MOGILEV STATE
A. KULESHOV UNIVERSITY
BULLETIN**

THEORETICAL-SCIENTIFIC JOURNAL

Founded in December 1998

Series B. NATURAL SCIENCES
(Mathematics, Physics, Biology)

Published twice per year

**1 (57)
2021**

Editorial Board:

Lavrinovich D.S., Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor,
Vishnevsky M.I., Deputy Chief Editor, Doctor of Philosophical Sciences, Professor
Riyer Y.G., Deputy Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor
Chebotarevsky B.D., Chairman of the Editorial Committee (Series B), Ph.D., Associate
Professor
Budkova L.I., Executive Secretary of the Editorial Board

Mathematics, Physics:

Lebedev V.I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Yerovenko V.A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Bernik V.I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Laptinsky V.N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of
the Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus
(Mogilev)
Dobrovolsky N.M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Tula)
Sotsky A.B., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Galmak A.M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Turtsevich A.S., Doctor of Technical Sciences (Minsk)
Timoschenko E.V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Ivashkevich I.V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)

Biology:

Dvornik A.M., Doctor of Biological Sciences, Professor (Gomel)
Maksimova N.P., Doctor of Biological Sciences, Professor (Minsk)
Naumov A.D., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Minsk)
Lazarevich S.V., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Gorky)
Akulich N.V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Tihonchuk G.N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Marochkov A.V., Doctor of Medical Sciences, Professor (Mogilev)
Simchenko N.I., Doctor of Medical Sciences (Mogilev)
Lopuh P.S., Doctor of Geographical Sciences, Professor (Minsk)
Poliachenok O.G., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)
Roganov G.N., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)

Theoretical-scientific journal
"Mogilev State A. Kuleshov University Bulletin"
is included in the bibliographic database
"Russian Science Citation Index"
License agreement № 811-12/2014

The editorial board address:
212022, Mogilev, Kosmonavtov Str., 1,
room 223, tel. (80222) 28-31-51

З М Е С Т

МОЖЕЙ Н. П. Тензоры Риччи инвариантных связностей на нередуктивных пространствах.....	7
БУДЬКО А. Е. О порядке следования команд в программах полных древовидных машин тьюринга	19
ЧЕТЫРКИНА З. Н. О максимальных порядках групп изометрических и гомотетических движений в метрических пространствах, допускающих вещественную, комплексную и гиперкомплексные алгебраические структуры	27
ГАЛЬМАК А. М. Порождающие множества l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$	35
ЛОМОВЦЕВ Ф. Е., СПЕСИВЦЕВА К. А. Согласование характеристических вторых производных граничного режима с начальными условиями и одномерным волновым уравнением	53
ГУСЕВА Е. В. Диофантовы приближения с приводимыми многочленами.....	63
МОРОЗОВ Н. П., МАРЧЕНКО И. В. Алгоритм вычисления коэффициентов устойчивости в случае кратного или сложного фокуса.....	70
КЕМЕШ О. Н., ПАНТЕЛЕЕВА Ж. И., ТИТОВА А. В. Точные оценки меры малых значений целочисленных полиномов.....	81
ЮРЕВИЧ В. А. Динамика отражения света низкоразмерным квазикристаллом из квантовых точек с двухфотонным поглощением	87
СЕДАКОВА В. А., КЛЕБАНОВА Н. А., СЕДАКОВ Е. В., КЛЕБАНОВ А. В. Анализ метаболического профиля различных видов пищевых волокон в динамике	93
ПОВОРОВА О. В., ЛИВИНСКАЯ В. А., ЧЕГЕРОВА Т. И. Возрастные особенности иммунного статуса детей с частыми респираторными заболеваниями	103
БОЙКО В. И., ЛЕНИВКО С. М., ТИХОНЧУК Г. Н. Анатомическое строение коры однолетних стеблей некоторых представителей семейства маслинные (<i>Oleaceae</i> L.)	115

C O N T E N T S

MOZHEY N. P. Ricci tensors of invariant connections on non-reductive spaces.....	7
BUDKO A. E. On the order of following commands in programs of full tree-type turing machines	19
CHETYRKINA Z. N. Maximum orders of groups of isometric and homothetic motions in metric spaces allowing real, complex and hypercomplex algebraic structures.....	27
GAL'MAK A. M. On sets of generators of l -ary semigroup $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$	35
LOMOVTSEV F. E., SPESIVTSEVA K. A. Matching characteristic second derivatives of the boundary mode with initial conditions and one-dimensional wave equation	53
GUSEVA E. V. Diophantine approximation with reducible polynomials	63
MOROZOV N. P., MARCHENKO I. V. Algorithm for calculating the stability coefficients in the case of multiple or complex focus.....	70
KEMESH O. N., PANTELEYEVA ZH. I., TITOVA A. V. Exact estimates of the measure of small values of integer polynomials.....	81
YUREVICH V. A. Dynamics of light reflection by a low-dimensional quasicrystal from quantum dots with two-photon absorption.....	87
SEDAKOVA V. A., KLEBANOVA N. A., SEDAkov E. V., KLEBANOV A. V. Analysis of the metabolic profile of various species of food fibers in dynamics	93
POVOROVA O. V., LIVINSKAYA V. A., CHEGEROVA T. I. Age-related characteristics of the immune status of children with frequent respiratory diseases...	103
BOYKO V. I., LENIVKO S. M., TIKHONCHUK G. N. Anatomical structure of the crust of one-year steals of some representatives of the oleaceae family (<i>Oleaceae L.</i>).....	115

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 514.76

ТЕНЗОРЫ РИЧЧИ ИНВАРИАНТНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА НЕРЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н. П. Можей

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

В работе указан объект исследования – структуры на однородных пространствах. В общем случае задача исследования многообразий различных типов является достаточно сложной, поэтому естественно рассматривать ее в более узком классе нередуктивных пространств. Определены основные понятия: изотропно-точная пара, (инвариантная) аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, редуктивное пространство. Если однородное пространство является редуктивным, то оно всегда допускает инвариантную связность; в данной работе же изучаются трехмерные нередуктивные однородные пространства, допускающие инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны. Для всех трехмерных нередуктивных однородных пространств указанного типа найдены и выписаны в явном виде тензоры Риччи инвариантных аффинных связностей.

Ключевые слова: аффинная связность, тензор Риччи, тензор кривизны, редуктивное пространство, группа преобразований.

Введение

Гладкое многообразие обобщает кривые и поверхности трехмерного евклидова пространства, рассматриваемые локально в классической дифференциальной геометрии и глобально в аналитической геометрии. Тензор Риччи задает один из способов измерения кривизны многообразия (степени отличия геометрии многообразия от геометрии плоского пространства), также в общей теории относительности тензор кривизны Риччи служит ключевым компонентом уравнений Эйнштейна. Кривизна Риччи появляется и в уравнении потока Риччи, в котором зависящая от времени метрика деформируется пропорционально кривизне Риччи (со знаком минус). Поток Риччи ввел Р. Гамильтон, он же получил глубокие результаты в теории трехмерных многообразий. В работах, связанных с доказательством гипотезы Пуанкаре, потоки Риччи использовались как важное техническое средство, было получено много результатов о существовании и свойствах таких потоков (см., например, [1]). Поток Риччи задается через тензор Риччи. Если кривизна связности нулевая, то тензор Риччи также нулевой. Целью данной работы является описание тензоров Риччи инвариантных связностей на трехмерных нередуктивных пространствах, допускающих аффинные связности только ненулевой кривизны (с описанием таких пространств можно ознакомиться в работе [2], в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов; при изложении сохранены обозначения, введенные ранее).

Основная часть

Пусть $(\bar{G}, M)$ – трехмерное однородное пространство, где $\bar{G}$ – группа Ли на многообразии M . Зафиксируем произвольную точку $o \in M$ и обозначим через $G = \bar{G}_o$ стабилизатор точки o . Поставим в соответствие $(\bar{G}, M)$ пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли, где $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе G . Изотропный $\mathfrak{g}$ -модуль $\mathfrak{m}$ – это $\mathfrak{g}$ -модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ такой, что $x \cdot (y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$. Соответствующее представление $\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ является изотропным представлением пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется изотропно-точной, если ее изотропное представление – инъекция.

Между инвариантными аффинными связностями на $(\bar{G}, M)$ и линейными отображениями $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такими, что $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$ и отображение Λ является $\mathfrak{g}$ -инвариантным, существует взаимно-однозначное соответствие (см. [3]). Будем называть такие отображения (инвариантными) аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Если возможна хотя бы одна связность на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, то такая пара является изотропно-точной (см. [4]). Тензоры кручения $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют соответственно вид $T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m$, $R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$, а тензор Риччи имеет вид $\text{Ric}(y_m, z_m) = \text{tr}\{x_m \mapsto R(x_m, y_m)z_m\}$ для всех $x, y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Того, что пара является изотропно-точной, не достаточно для существования инвариантных связностей (см., например, [5]). Однородное пространство $\bar{G}/G$ редуктивно, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ для $\bar{G}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для G и $\text{ad}(G)$ -инвариантного подпространства $\mathfrak{m}$, т. е. если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $\text{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Второе условие влечет $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и наоборот, если G связна. Этот класс однородных пространств ввел в рассмотрение П. К. Рашевский [6], у редуктивных пространств при параллельном переносе сохраняются тензор кривизны и тензор кручения. Если $\bar{G}/G$ редуктивно, то оно всегда допускает инвариантную связность [4]. Все трехмерные нередуктивные пространства, допускающие аффинные связности, кривизна которых не может быть нулевой, приведены в [2]. Найдем тензоры Риччи инвариантных связностей на таких пространствах.

Будем определять пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ таблицей умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ будем обозначать базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Полагаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается $e_1, \dots, e_{n-3}$. Пусть $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для ссылки на пару будем использовать обозначение $d.n.m$, где d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, соответствующие приведенным в [2]. Поскольку ограничение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{m}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$, будем выписывать ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$ (поскольку $\Lambda|_{\mathfrak{g}} = \lambda$), тензор кривизны R будем описывать его значениями $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

В работе [2] получен следующий результат:

Теорема 1. Любая нередуктивная пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, допускающая инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны, эквивалентна одной и только одной из следующих пар:

4.21.24(25).	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	u_2	0
e_2	0	0	e_4	0	0	u_1	e_2
e_3	$-e_3$	$-e_4$	0	0	0	0	u_2
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_4+u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	αe_4
u_2	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$\alpha e_3+\delta e_4-u_2$
u_3	0	$-e_2$	$-u_2$	$-e_4-u_1$	$-\alpha e_4$	$-\alpha e_3-\delta e_4+u_2$	0

$, \alpha < -1/4, \delta = 0, 1,$

3.20.22.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$(1/2)e_3$	u_1	0	$(1/2)u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(1/2)e_3$	0	0	0	e_3	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	0	$-u_1$	$-e_3$	$-2u_1$	0	e_3-u_3
u_3	$-(1/2)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3+u_3$	0

$,$

3.20.27.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(4/5)e_2$	$(3/5)e_3$	u_1	$(1/5)u_2$	$(2/5)u_3$
e_2	$-(4/5)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$-(3/5)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-(1/5)u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	e_3
u_3	$-(2/5)u_3$	0	$-u_1$	0	$-e_3$	0

$,$

3.25.25(26).	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_2	0	u_1	e_1
e_2	0	0	0	0	0	u_1
e_3	e_2	0	0	0	0	$-e_3+u_2$
u_1	0	0	0	0	0	$\alpha e_2+(1+\beta)u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	0	$\delta e_2+\alpha e_3+\beta u_2$
u_3	$-e_1$	$-u_1$	e_3-u_2	$-\alpha e_2-(1+\beta)u_1$	$-\delta e_2-\alpha e_3-\beta u_2$	0

$, \alpha < -(\beta+1)^2/4, \delta = 0, 1,$

2.13.7.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	u_2
e_2	0	0	0	0	e_2+u_1
u_1	0	0	0	0	αu_1
u_2	$-u_1$	0	0	0	$(1-\alpha)e_1+e_2+\alpha u_2$
u_3	$-u_2$	$-e_2-u_1$	$-\alpha u_1$	$(\alpha-1)e_1-e_2-\alpha u_2$	0

$, \alpha \neq 3/2,$

2.13.8.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	u_2
e_2	0	0	0	0	e_2+u_1
u_1	0	0	0	0	αu_1
u_2	$-u_1$	0	0	0	$\beta e_1+\alpha u_2$
u_3	$-u_2$	$-e_2-u_1$	$-\alpha u_1$	$-\beta e_1-\alpha u_2$	0

$, \beta \neq 1/4 - \alpha/2,$

2.20.3,2.20.8.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	e_1+u_1	0
e_2	0	0	0	δe_1+e_2	u_1
u_1	0	0	0	$2u_1$	0
u_2	$-e_1-u_1$	$-\delta e_1-e_2$	$-2u_1$	0	e_2-u_3
u_3	0	$-u_1$	0	$-e_2+u_3$	0

$, \delta = 0, 1,$

2.20.6.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	0
e_2	0	0	0	e_1	u_1
u_1	0	0	0	0	0
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0	e_2
u_3	0	$-u_1$	0	$-e_2$	0

2.20.12, 2.20.14.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	$-2e_1$
e_2	0	0	0	δe_1	$-e_2 + u_1$
u_1	0	0	0	0	$-3u_1$
u_2	$-u_1$	$-\delta e_1$	0	0	$e_2 - u_2$
u_3	$2e_1$	$e_2 - u_1$	$3u_1$	$u_2 - e_2$	0

2.20.9.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	0	$u_1 + (\alpha + 1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$2\alpha u_1$
u_2	$-u_1$	0	0	0	$e_1 + \alpha u_2$
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1 - (\alpha + 1)e_2$	$-2\alpha u_1$	$-e_1 - \alpha u_2$	0

2.20.22.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	0	u_1	αe_1
e_2	0	0	0	e_1	$u_1 + (\alpha + 1)e_2$
u_1	0	0	0	0	$(\alpha - 1)u_1$
u_2	$-u_1$	$-e_1$	0	0	$-u_2$
u_3	$-\alpha e_1$	$-u_1 - (\alpha + 1)e_2$	$(1 - \alpha)u_1$	u_2	0

1.5.21.	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_1	u_1
u_1	0	0	u_1	$-e_1$
u_2	$-e_1$	$-u_1$	0	0
u_3	$-u_1$	e_1	0	0

Доказательство теоремы приведено в [2].

Используя приведенную локальную классификацию трехмерных нередуцируемых однородных пространств, не допускающих связностей нулевой кривизны, найдем тензоры Риччи связностей указанного вида.

Теорема 2. Пусть $(\bar{g}, g)$ – трехмерное нередуцируемое однородное пространство, допускающее инвариантные связности только ненулевой кривизны (приведенное в теореме 1). Тензоры Риччи инвариантных связностей на $(\bar{g}, g)$ имеют вид, приведенный в таблице (здесь и далее $p_{ij}, q_{ij}, r_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i, j = \overline{1, 3}$)):

Пара	Тензор Риччи
4.21.24, 4.21.25	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}^2 - 2\alpha + 2p_{1,3} \end{pmatrix}$
3.20.27	нулевой
3.20.22	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 4p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.25.25, 3.25.26	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta p_{1,3} + 2p_{1,3}^2 - 2\alpha - 2p_{1,3} \end{pmatrix}$

Окончание таблицы

Пара	Тензор Риччи
2.13.7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha p_{1,3} + 2p_{1,3}^2 + 2p_{1,3} - 3/4 + 1/2\alpha \end{pmatrix}$
2.13.8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha p_{1,3} + 2p_{1,3}^2 + 2p_{1,3} + 1/4 - \beta - 1/2\alpha \end{pmatrix}$
2.20.3($\delta=0$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 2p_{1,2} & 2p_{1,2}p_{1,3} - 2p_{1,3} - r_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1} & 2p_{1,3}^2 \end{pmatrix}$
2.20.8($\delta=1$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 2p_{1,2} + 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} - 2p_{1,3} - r_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1} & 2p_{1,3}^2 \end{pmatrix}$
2.20.6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 + 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} & 2p_{1,3}^2 \end{pmatrix}$
2.20.9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 & \alpha q_{1,1} + 2p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & -2\alpha p_{1,2} - \alpha q_{1,1} + 2p_{1,2}p_{1,3} & -2\alpha p_{1,3} + 2p_{1,3}^2 + 2p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.20.22	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 + 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} - q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + 2p_{1,2} + q_{1,1} & 2p_{1,3}^2 + 4p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.20.12($\delta=1$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 + 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} - q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + 2p_{1,2} + q_{1,1} & 2p_{1,3}^2 + 4p_{1,3} \end{pmatrix}$
2.20.14($\delta=-1$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} - q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + 2p_{1,2} + q_{1,1} & 2p_{1,3}^2 + 4p_{1,3} \end{pmatrix}$
1.5.21	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,2}p_{2,3} - p_{2,3}q_{1,1} + p_{2,3}q_{2,2} \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1} + 2p_{1,2}q_{2,2} - 2p_{1,2} & 2p_{1,2}q_{2,3} - p_{2,3}q_{1,2} \\ -p_{1,2}p_{2,3} + p_{2,3}q_{1,1} - p_{2,3}q_{2,2} & B & A \end{pmatrix},$ $A = p_{1,2}r_{2,3} + p_{1,3}^2 + p_{1,3}q_{2,3} + p_{2,3}q_{1,3} - p_{2,3}r_{1,2} - q_{1,1}r_{2,3} + q_{2,2}r_{2,3} + q_{2,3}r_{1,1} - q_{2,3}r_{2,2} - r_{2,3} + 1,$ $B = p_{1,2}p_{1,3} + p_{1,2}q_{2,3} - p_{1,2}r_{1,1} + p_{1,2}r_{2,2} + p_{2,3}q_{1,2}$

Доказательство. Для каждой пары, приведенной в теореме 1, выпишем инвариантные связности и найдем тензоры Риччи. Например, в случаях 4.21.24 и 4.21.25 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & r_{1,1} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} + 1 \end{pmatrix}.$$

В случае 4.21.24 тензор кривизны принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3} + 2q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\alpha \geq -1/4$ уравнение $p_{1,3}^2 + p_{1,3} - \alpha = 0$ имеет решение, т.е. если $p_{1,3}$ – корень этого уравнения, а $q_{1,3} = 0$, то тензор кривизны нулевой. Если $\alpha < -1/4$, то при любых значениях параметров $p_{1,3}, q_{1,3} \in \mathbb{R}$ тензор кривизны не может оказаться нулевым. Тогда тензор Риччи $Ric(y, z) = tr\{x \mapsto R(x, y)z\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3}^2 - 2\alpha + 2p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, в случае 4.21.25 тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3} + 2q_{1,3} - 1 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + p_{1,3} - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор ненулевой при $\alpha < -1/4$. Тогда тензор Риччи совпадает с выписанным в случае 4.21.24.

В случае 3.20.27 аффинная связность и тензор кривизны (соответственно) имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

очевидно, что тензор кривизны ненулевой, а тензор Риччи нулевой.

В случае 3.20.22 аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & q_{1,1} + p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{1,1} + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

а тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 - 2p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2} - p_{1,2}^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кривизны ненулевой при любых значениях параметра $p_{1,2}$. Получаем тензор Риччи

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 4p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аффинная связность в случаях 3.25.25 и 3.25.26 принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix},$$

тензор кривизны в случаях 3.25.25 и 3.25.26 ($\delta = 0, 1$ соответственно) –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^2 - \alpha - p_{1,3} - p_{1,3}\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2q_{1,3}p_{1,3} - \delta - \beta q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 - \alpha - p_{1,3} - p_{1,3}\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\alpha < -(\beta + 1)^2 / 4$ тензор кривизны ненулевой, тогда тензоры Риччи в случаях 3.25.25 и 3.25.26 совпадают и имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta p_{1,3} + 2p_{1,3}^2 - 2\alpha - 2p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

В случаях 2.13.7 и 2.13.8 аффинная связность –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 1/2 + p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1} + 1/2 & r_{1,2} + q_{1,3} \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} + 1 \end{pmatrix},$$

тензор кривизны в случае 2.13.7 –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^2 + p_{1,3} - \alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & -\alpha p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3/4 + \alpha/2 & 3q_{1,3}/2 + q_{1,3}p_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} - 1 - \alpha q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} - 3/4 + p_{1,3}^2 + \alpha/2 - \alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\alpha \neq 3/2$ тензор кривизны ненулевой, а тензор Риччи –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha p_{1,3} + 2p_{1,3}^2 + 2p_{1,3} - 3/4 + 1/2\alpha \end{pmatrix},$$

в случае 2.13.8 тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^2 + p_{1,3} - \alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & -\alpha p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/4 - \beta - \alpha/2 & 3q_{1,3}/2 + q_{1,3}p_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} - \alpha q_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{1,3} + 1/4 + p_{1,3}^2 - \beta - \alpha/2 - \alpha p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при $\beta \neq 1/4 - \alpha/2$ тензор кривизны ненулевой, тогда тензор Риччи –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha p_{1,3} + 2p_{1,3}^2 + 2p_{1,3} + 1/4 - \beta - 1/2\alpha \end{pmatrix}.$$

Аналогично получаем аффинную связность в случаях 2.20.3 ($\delta = 0$) и 2.20.8 ($\delta = 1$) –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{1,1} + p_{1,2} + 1 & p_{1,3} \\ 0 & \delta & q_{1,1} + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix}, \delta = 0, 1,$$

2.20.6 –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{1,1} + p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 1 & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix},$$

2.20.9 ($\delta = 0$), 2.20.22 ($\delta = 1$) –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{1,1} + p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & \delta & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1} + \alpha & 0 \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1} + p_{1,3} + \alpha + 1 \end{pmatrix}, \delta = 0, 1,$$

2.20.12 ($\delta = 1$), 2.20.14 ($\delta = -1$) –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{1,1} + p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & \delta & q_{1,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{1,1} - 2 & 0 \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1} + p_{1,3} - 1 \end{pmatrix}, \delta = \pm 1.$$

Тензоры кривизны, соответственно, в случаях 2.20.3 ($\delta = 0$) и 2.20.8 ($\delta = 1$) принимают вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 - p_{1,2} + \delta p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3} - p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} r_{1,1} & q_{1,3}p_{1,2} - r_{1,2}p_{1,2} - \delta r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} - 1 \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1} & p_{1,3}^2 \\ 0 & p_{1,2} - p_{1,2}^2 - \delta p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix}, \delta = 0, 1,$$

в случае 2.20.6 –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 + p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,3}p_{1,2} - r_{1,2}p_{1,2} - r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} - 1 \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}^2 \\ 0 & -p_{1,2}^2 - p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3} \end{pmatrix},$$

2.20.9 –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\alpha p_{1,2} + p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}^2 - \alpha p_{1,3} + p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha q_{1,1} & q_{1,3}p_{1,2} - r_{1,2}p_{1,2} - 1 & q_{1,3}p_{1,3} + q_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} - \alpha q_{1,1} - \alpha p_{1,2} & p_{1,3}^2 - \alpha p_{1,3} + p_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2}^2 & -p_{1,2}p_{1,3} - \alpha q_{1,1} \end{pmatrix},$$

2.20.12 ($\delta = -1$), 2.20.14 ($\delta = -1$) –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 + \delta p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} + p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}^2 + 2p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} q_{1,1} & -q_{1,2} + q_{1,3}p_{1,2} - r_{1,2}p_{1,2} - \delta r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} - 1 \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} + q_{1,1} + p_{1,2} & p_{1,3}^2 + 2p_{1,3} \\ 0 & -p_{1,2}^2 - \delta p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3} + q_{1,1} \end{pmatrix}, \delta = \pm 1,$$

2.20.22 –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 + p_{1,3} & p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & p_{1,2}\alpha + p_{1,2}p_{1,3} + q_{1,2} & p_{1,3}^2 + p_{1,3}\alpha + p_{1,3} + q_{1,3} \\ 0 & q_{1,1} + p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 1 & q_{1,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & q_{1,2}\alpha + q_{1,3}p_{1,2} - r_{1,2}p_{1,2} - r_{1,3} & q_{1,3}p_{1,3} + q_{1,3}\alpha + q_{1,3} - r_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & p_{1,2}p_{1,3} & p_{1,3}^2 + p_{1,3} \\ 0 & -1 - p_{1,2}^2 - p_{1,3} & -p_{1,2}p_{1,3} \end{pmatrix},$$

Тогда тензоры Риччи в случаях 2.20.3 ($\delta = 0$), 2.20.8 ($\delta = 1$) имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 2p_{1,2} & 2p_{1,2}p_{1,3} - 2p_{1,3} - r_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1} & 2p_{1,3}^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 2p_{1,2} + 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} - 2p_{1,3} - r_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + r_{1,1} & 2p_{1,3}^2 \end{pmatrix},$$

в случае 2.20.6 –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 + 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} & 2p_{1,3}^2 \end{pmatrix},$$

2.20.9 –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 & \alpha q_{1,1} + 2p_{1,2}p_{1,3} \\ 0 & -2\alpha p_{1,2} - \alpha q_{1,1} + 2p_{1,2}p_{1,3} & -2\alpha p_{1,3} + 2p_{1,3}^2 + 2p_{1,3} \end{pmatrix},$$

2.20.22 –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 + 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} - q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + 2p_{1,2} + q_{1,1} & 2p_{1,3}^2 + 4p_{1,3} \end{pmatrix},$$

2.20.12 ($\delta = 1$), 2.20.14 ($\delta = -1$) –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 + 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} - q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + 2p_{1,2} + q_{1,1} & 2p_{1,3}^2 + 4p_{1,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_{1,2}^2 - 2p_{1,3} & 2p_{1,2}p_{1,3} - q_{1,1} \\ 0 & 2p_{1,2}p_{1,3} + 2p_{1,2} + q_{1,1} & 2p_{1,3}^2 + 4p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Аффинная связность в случае 1.5.21 –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & p_{1,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ 0 & 0 & q_{1,1} - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ 0 & p_{1,2} & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix},$$

тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}q_{2,2}-q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2} & p_{1,2}q_{2,3}-2p_{1,3}-q_{1,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & p_{2,3}q_{1,1}-2p_{2,3}-q_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -p_{1,2}p_{2,3} & p_{1,2}r_{2,2}+p_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}p_{1,2} & p_{1,2}r_{2,3}+p_{1,3}^2-r_{1,2}p_{2,3}+1 \\ 0 & 2p_{1,2}p_{2,3} & p_{2,3}r_{1,1}+2p_{2,3}p_{1,3}-r_{2,2}p_{2,3} \\ 0 & 0 & -p_{1,2}p_{2,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -q_{1,2}p_{2,3} & q_{1,1}r_{1,2}+q_{1,2}r_{2,2}+q_{1,3}p_{1,2}-r_{1,1}q_{1,2}-r_{1,2}q_{2,2} & q_{1,2}r_{2,3}+q_{1,3}p_{1,3}-r_{1,2}q_{2,3}+r_{1,3} \\ -q_{2,2}p_{2,3}+p_{2,3}q_{1,1} & p_{1,2}q_{2,3}+q_{1,2}p_{2,3} & q_{2,2}r_{2,3}+q_{2,3}r_{1,1}+q_{2,3}p_{1,3}+ \\ + p_{2,3}q_{1,3}-r_{2,2}q_{2,3}-r_{2,3}q_{1,1}+r_{2,3} \\ 0 & q_{1,1}p_{1,2}-p_{1,2}-p_{1,2}q_{2,2} & -p_{1,2}q_{2,3} \end{pmatrix},$$

тогда тензор Риччи –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,2}p_{2,3}-p_{2,3}q_{1,1}+p_{2,3}q_{2,2} \\ 0 & -2p_{1,2}q_{1,1}+2p_{1,2}q_{2,2}-2p_{1,2} & 2p_{1,2}q_{2,3}-p_{2,3}q_{1,2} \\ -p_{1,2}p_{2,3}+p_{2,3}q_{1,1}-p_{2,3}q_{2,2} & B & A \end{pmatrix},$$

$$A = p_{1,2}r_{2,3} + p_{1,3}^2 + p_{1,3}q_{2,3} + p_{2,3}q_{1,3} - p_{2,3}r_{1,2} - q_{1,1}r_{2,3} + q_{2,2}r_{2,3} + q_{2,3}r_{1,1} - q_{2,3}r_{2,2} - r_{2,3} + 1,$$

$$B = p_{1,2}p_{1,3} + p_{1,2}q_{2,3} - p_{1,2}r_{1,1} + p_{1,2}r_{2,2} + p_{2,3}q_{1,2}.$$

Таким образом тензоры Риччи имеют вид, приведенный в теореме.

Заключение

В работе для всех трехмерных нередуцированных однородных пространств (допускающих инвариантные аффинные связности только ненулевой кривизны) найдены и выписаны в явном виде тензоры Риччи указанных связностей. Полученные результаты могут быть применены в работах по дифференциальной геометрии, дифференциальным уравнениям, топологии, в теории представлений, а также в других разделах современной математики и в теоретической физике. Изложенные в работе методы могут быть применены для анализа физических моделей, а приведенные алгоритмы могут быть компьютеризованы и использованы для решения аналогичных задач в больших размерностях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Chow, B.** Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 110: The Ricci flow: an introduction / B. Chow, D. Knopf. – Providence: American Mathematical Society, 2004. – 325 p.
2. **Можей, Н. П.** Связности ненулевой кривизны на трехмерных нередуцированных пространствах / Н. П. Можей // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т. 17, вып. 4. – С. 381–393.
3. **Nomizu, K.** Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. J. Math. – 1954. – V. 76, № 1. – С. 33–65.

4. *Kobayashi, S.* Foundations of differential geometry / S. Kobayashi, K. Nomizu. – New York : John Wiley and Sons, 1963. – Т. 1; 1969. – Т. 2.

5. *Можей, Н. П.* Трёхмерные однородные пространства, не допускающие инвариантных связностей / Н. П. Можей // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. – Т. 16, № 4. – С. 413–421.

6. *Рашиевский, П. К.* Симметрические пространства аффинной связности с кручением / П. К. Рашиевский // Труды семин. по векторн. и тенз. анализу. – 1969. – № 8. – С. 82–92.

Поступила в редакцию 26.10.2020 г.

Контакты: mozheynatalya@mail.ru (Можей Наталья Павловна)

Mozhey N.P. RICCI TENSORS OF INVARIANT CONNECTIONS ON NON-REDUCTIVE SPACES

The object of the research is pointed out as structures on homogeneous spaces. In general, the purpose of the research of manifolds of various types is rather complicated; therefore, it is natural to consider it in a narrower class of non-reductive spaces. The basic notions, such as isotropically-faithful pair, (invariant) affine connection, curvature tensor, torsion tensor, Ricci tensor, reductive space are defined. If a homogeneous space is reductive, then the space admits an invariant connection. In the article the authors study three-dimensional non-reductive homogeneous spaces which admit invariant affine connections of nonzero curvature only. For all three-dimensional non-reductive homogeneous spaces of this type, Ricci tensors of invariant affine connections are found and made explicit.

Keywords: affine connection, Ricci tensor, curvature tensor, reductive space, transformation group.

УДК 510.522

О ПОРЯДКЕ СЛЕДОВАНИЯ КОМАНД В ПРОГРАММАХ ПОЛНЫХ ДРЕВОВИДНЫХ МАШИН ТЬЮРИНГА

А. Е. Будько

кандидат физико-математических наук, доцент

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

В статье рассматривается нахождение оптимального порядка следования команд в программах машин Тьюринга с внешним алфавитом $\{0,1\}$. Под оптимальным понимается такой порядок, при котором время отыскания команд в программе будет наименьшим. Определено, каким образом машина отыскивает в программе команду, которую она должна выполнять. Для полных древовидных машин Тьюринга указан оптимальный порядок следования команд и найдено минимальное время их отыскания.

Ключевые слова: машина Тьюринга, команда, программа, порядок следования команд, время отыскания команд.

Введение

Исследование машин Тьюринга проводится по различным направлениям: исследование сложности вычислений на машинах [1], исследование сложности универсальных машин [2], разработка программного обеспечения анимации работы машины [3], методы построения программ машин [4]. В настоящей работе рассматривается нахождение оптимального порядка следования команд в программах машин.

Будем рассматривать машины Тьюринга с одной лентой, одной головкой и с внешним алфавитом $\{0,1\}$. За один такт головка каждой такой машины обозревает ячейку, записывает туда символ и сдвигается влево (Л) или вправо (П) к соседней ячейке или остается на месте (С), переходит в новое внутреннее состояние или остается в том же.

Пусть программа машины Тьюринга задана списком команд вида $q_i a_i \rightarrow a_k D q_j$, где q_i, q_j – внутренние состояния машины, $a_i, a_k \in \{0,1\}$, $D \in \{Л, П, С\}$. В каждой строке списка находится ровно одна команда. Команда вида $q_i a_i \rightarrow a_k D q_0$ называется конечной. Будем считать, что машина следующим образом отыскивает в списке команду, которую она должна выполнить в данный момент:

1. Пусть в начальный момент головка обозревает символ a_r . Тогда машина, начиная с первой команды списка, сравнивает $q_i a_r$ с левыми частями команд до тех пор, пока не найдет команду с левой частью $q_i a_r$, которую она и будет выполнять.

2. Пусть в момент после выполнения команды $q_i a_i \rightarrow a_k D q_j$ ($q_j \neq q_0$) головка обозревает символ a_c . Тогда, начиная с команды, следующей за выполненной, машина сравнивает $q_j a_c$ с левыми частями команд списка до тех пор, пока не найдет команду с левой частью $q_j a_c$, которую она и будет выполнять.

3. Сравнение производится в том порядке, в котором команды следуют в списке. При этом, если после сравнения с левой частью последней команды списка нужная команда не найдена, сравнение продолжается, начиная с первой команды списка.

4. Сравнение любого $q_j a_k$ с левой частью любой команды списка проводится за одинаковое время: за одну единицу времени.

В настоящей работе рассматривается нахождение такого порядка следования команд в программе, заданной списком, при котором время отыскания команд было бы наименьшим. При этом под наименьшим будем понимать наименьшее среднее время отыскания как отношение суммы времени отыскания по всем начальным конфигурациям к числу этих конфигураций. Порядок следования команд, соответствующий наименьшему среднему времени их отыскания, назовем оптимальным.

Кроме задания программы в виде списка команд будем использовать еще и представление программы в виде ориентированного графа. В этом графе внутренним состояниям машины Тьюринга будут соответствовать вершины, а дуги будут определять команды. В [5] введена классификация $L_0, L_1, L_2, \dots$ машин Тьюринга в зависимости от структуры графа, задающего программу машины. В данной работе рассматриваются машины класса L_0 . Их программы, заданные графами, удовлетворяют следующим требованиям:

1. Из каждой неконечной вершины исходят ровно две дуги.
2. Граф является связным и не содержит циклов.
3. В каждую неконечную вершину, отличную от начальной, входит ровно одна дуга. В начальную вершину не входит ни одна дуга.

Предварительные сведения

Будем считать, что для каждого пути графа из начальной вершины в конечную имеется начальная конфигурация, при работе над которой выполняются все команды, определяемые дугами данного пути.

Лемма 1 [6]. При оптимальном порядке команды любого пути из начальной вершины в конечную следуют в порядке, определяемом дугами этого пути.

Машину Тьюринга назовем полной древовидной, если ее программа, заданная графом, такова, что все пути из начальной вершины в конечную имеют одинаковую длину.

Пусть в программе полной древовидной машины M , заданной графом, длина каждого пути из начальной вершины в конечную равна k . Тогда, очевидно, количество таких путей в графе равно 2^k . Обозначим эти пути через $H_1, H_2, H_3, \dots, H_{2^k}$ в порядке их перечисления сверху вниз. При такой нумерации, например, пути H_1 и H_2 будут отличаться только дугами, входящими в конечную вершину. Так как для каждого пути из начальной вершины в конечную имеется соответствующая ему начальная конфигурация, то различных начальных конфигураций для машины M имеется 2^k . Обозначим эти конфигурации через $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2^k}$ соответственно путям $H_1, H_2, H_3, \dots, H_{2^k}$.

Два пути назовем соседними по i -му ($1 \leq i \leq k$) ярусу, если они отличаются, начиная только с i -ой дуги. Например, пути H_1 и H_2 являются соседними по k -му ярусу, а пути H_1 и H_3 – соседними по $(k-1)$ -му ярусу.

Следующий порядок следования команд в программе полной древовидной машины, заданной списком команд, назовем стандартным:

- 1) вначале следуют команды произвольно выбранного пути в порядке, определяемом дугами этого пути;
- 2) затем следует команда пути, соседнего с выбранным по k -му ярусу, которая не входит в список команд ранее выбранного пути;

3) затем следуют команды пути, соседнего с последним выбранным по максимально наибольшему ярусу, которые не вошли в список команд ранее выбранных путей. Если таких путей несколько, то выбираем любой из них и т. д.

Лемма 2 [7]. Если программа полной древовидной машины Тьюринга задана списком команд, то при стандартном порядке их следования среди первых t команд количество конечных команд v удовлетворяет условию:

- 1) $v = \frac{1}{2}(t + 2)$, если t равно количеству всех команд машины M ;
- 2) $v \leq \frac{1}{2}(t + 1)$, если t меньше количества всех команд машины M .

Следствие 1 [7]. Если программа полной древовидной машины Тьюринга задана списком команд, то при стандартном порядке их следования среди последних r команд количество конечных команд h удовлетворяет условию $h \geq \frac{1}{2}(r + 1)$.

Основная часть

Теорема 1. Пусть в программе полной древовидной машины, заданной графом, длина каждого пути из начальной вершины в конечную равна k . Тогда:

- 1) минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $2^{k-1} \cdot (2^{k+1} + k - 2)$;
- 2) оптимальным порядком следования команд в программе, заданной списком, является стандартный. **Доказательство** теоремы проведем по принципу математической индукции относительно k .

1. $k = 1$. В этом случае программа машины состоит из двух команд, и различных порядков следования этих команд будет два. Различных начальных конфигураций будет тоже две: $q_1 0$ и $q_1 1$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для каждого порядка следования команд сумма времени отыскания команд будет равна 3. Следовательно, каждый из этих порядков является оптимальным, а указанная сумма времени – минимальной.

2. Пусть для $k = s$ доказываемое утверждение выполняется. Рассмотрим машину M , программа которой в виде графа такова, что длина каждого пути из начальной вершины в конечную равна $k = s + 1$.

Программу машины M можно разбить на программы трех машин M_0 , M_1 и M_2 . Программа машины M_0 определяется командами дуг, выходящими из вершины 1, программы машин M_1 и M_2 – командами дуг поддеревьев, начальными вершинами у которых являются концы соответственно верхней и нижней дуг, выходящих из вершины 1. Очевидно, программы машин M_1 и M_2 , заданные графами, таковы, что длина каждого пути из их начальных вершин в конечную равна s . Тогда в каждом таком графе будет по $2^{s+1} - 2$ дуг и соответственно в каждой из машин M_1 и M_2 будет по $2^{s+1} - 2$ команд.

Для машины M имеется 2^{s+1} начальных конфигураций. Начальные конфигурации машины M , соответствующие работе машины M_1 , обозначим через $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2^s}$, соответствующие работе машины M_2 – через

$$P_{2^s+1}, P_{2^s+2}, P_{2^s+3}, \dots, P_{2^{s+1}}.$$

Возможны следующие случаи следования команд в программе машины M , заданной списком.

Случай 1. Первой следует команда верхней дуги, выходящей из вершины 1.

Случай 1.1. За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1, следуют все команды машины M_1 .

Для машины M начальными являются конфигурации $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2^s}, P_{2^s+1}, P_{2^s+2}, P_{2^s+3}, \dots, P_{2^{s+1}}$.

Определим время отыскания команд при работе над 2^s начальными конфигурациями $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2^s}$. При работе над каждой из этих конфигураций вначале выполняется команда верхней дуги, выходящей из вершины 1, и затем начинает работать машина M_1 . Время отыскания первой выполняемой команды равно 1, так как эта команда в списке следует первой. По всем 2^s начальным конфигурациям это время будет равно $1 \cdot 2^s = 2^s$.

Программа машины M_1 , заданная графом, такова, что длина каждого пути из начальной вершины в конечную равна s . Поэтому по индуктивному предположению минимальное время отыскания команд при их порядке следования, описанном в условии теоремы 1, для машины M_1 равно $2^{s-1} \cdot (2^{s+1} + s - 2)$. Тогда время отыскания команд при работе машины M над начальными конфигурациями $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2^s}$ будет равно $2^s + 2^{s-1} \cdot (2^{s+1} + s - 2)$.

Определим время отыскания команд при работе машины M над 2^s начальными конфигурациями $P_{2^s+1}, P_{2^s+2}, P_{2^s+3}, \dots, P_{2^{s+1}}$.

Случай 1.1.1. После команды верхней дуги, выходящей из вершины 1, и всех команд машины M_1 следует команда нижней дуги, выходящей из вершины 1.

При работе над каждой из конфигураций $P_{2^s+1}, P_{2^s+2}, P_{2^s+3}, \dots, P_{2^{s+1}}$ первой выполняется команда нижней дуги, выходящей из вершины 1, и затем начинает работать машина M_2 . Первая выполняемая команда в списке команд машины M находится на 2^{s+1} -ом месте, так как из условия случая 1 следует, что первой в списке следует команда верхней дуги, выходящей из вершины 1, затем $-(2^{s+1} - 2)$ команд машины M_1 и после этого – выполняемая команда. Поэтому время отыскания первой выполняемой команды при работе над одной конфигурацией будет равно 2^{s+1} . По всем 2^s начальным конфигурациям $P_{2^s+1}, P_{2^s+2}, P_{2^s+3}, \dots, P_{2^{s+1}}$ это время будет равно $2^{s+1} \cdot 2^s$.

В программе машины M_2 , заданной графом, длина каждого пути из начальной вершины в конечную равна s . Поэтому по индуктивному предположению минимальное время отыскания команд при стандартном порядке их следования для этой машины M_2 равно $2^{s-1} (2^{s+1} + s - 2)$. Тогда время отыскания команд при работе над конфигурациями $P_{2^s+1}, P_{2^s+2}, P_{2^s+3}, \dots, P_{2^{s+1}}$ будет равно $2^{s+1} \cdot 2^s + 2^{s-1} (2^{s+1} + s - 2)$.

Общее время отыскания команд при работе машины M будет равно

$$\begin{aligned} 2^s + 2^{s-1} \cdot (2^{s+1} + s - 2) + 2^{s+1} \cdot 2^s + 2^{s-1} \cdot (2^{s+1} + s - 2) &= 2^s(1 + 2^{s+1}) + \\ + 2 \cdot 2^{s-1} \cdot (2^{s+1} + s - 2) &= 2^s(1 + 2^{s+1}) + 2^s \cdot (2^{s+1} + s - 2) = \\ = 2^s \cdot (2 \cdot 2^{s+1} + s - 1) &= 2^s \cdot (2^{s+2} + s - 1) = \\ = 2^{k-1} \cdot (2^{k+1} + k - 2), &\text{ так как } k = s + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, время отыскания команд в случае 1.1.1 соответствует утверждению 1) теоремы 1, а порядок следования команд – стандартный.

Случай 1.1.2. После команды верхней дуги, выходящей из вершины 1, и всех команд машины M_1 следует одна из команд машины M_2 . В этом случае порядок следования команд оптимальным не является. Действительно, конфигурациям $P_{2^s+2}, P_{2^s+2}, P_{2^s+3}, \dots, P_{2^{s+1}}$ соответствуют пути $H_{2^s+1}, H_{2^s+2}, H_{2^s+3}, \dots, H_{2^{s+1}}$. Для каждого из этих путей в силу леммы 1 при оптимальном порядке следования команд первой должна следовать команда нижней дуги, выходящей из вершины 1.

В нашем же случае первой следует одна из команд машины M_2 . Поэтому в случае 1.1.2 порядок следования команд оптимальным не является.

Случай 1.2. За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1, следует команда нижней дуги.

Случай 1.2.1. За командами верхней и нижней дуг, выходящих из вершины 1, следуют все команды машины M_1 .

При работе над каждой из 2^s конфигураций $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2^s}$ первой выполняется команда верхней дуги, выходящей из вершины 1, и затем начинает работать машина M_1 . В отличие от случая 1.1 в рассматриваемом случае время отыскания команд для машины M_1 увеличится на 2^s , так как на втором месте в списке появилась команда нижней дуги, выходящей из вершины 1, которая при работе над 2^s конфигурациями $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2^s}$ не выполняется. Поэтому время отыскания команд при работе над конфигурациями $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2^s}$ будет равно $2^s + 2^{s-1}(2^{s+1} + s - 2) + 2^s$.

Определим время отыскания команд при работе над 2^s начальными конфигурациями $P_{2^{s+1}}, P_{2^{s+2}}, P_{2^{s+3}}, \dots, P_{2^{s+1}}$. При работе над каждой из этих конфигураций вначале выполняется команда нижней дуги, выходящей из вершины 1, и затем начинает работать машина M_2 .

В рассматриваемом случае команды машины M_2 находятся на тех же местах в списке, что и в случае 1.1.1. Кроме того, и в рассматриваемом случае и в случае 1.1.1 команда нижней дуги, выходящей из вершины 1, в списке находится до команд машины M_2 . Поэтому при работе над 2^s начальными конфигурациями $P_{2^{s+1}}, P_{2^{s+2}}, P_{2^{s+3}}, \dots, P_{2^{s+1}}$ время отыскания команд будет таким же, как и в случае 1.1.

Следовательно, в случае 1.2.1 время отыскания команд будет на 2^s больше, чем в случае 1.1.1.

Случай 1.2.2. За командами верхней и нижней дуг, выходящих из вершины 1, следуют все команды машины M_2 .

В рассматриваемом случае время отыскания команд при работе машины M_2 будет таким же, как и время отыскания команд при работе машины M_1 в случае 1.2.1. Действительно, в рассматриваемом случае до команд машины M_2 следуют команды верхней и нижней дуг, выходящих из вершины 1, точно так же, как и в случае 1.2.1 до команд машины M_1 следуют эти же команды верхней и нижней дуг, выходящих из вершины 1. Аналогично, в случае 1.2.2 время отыскания команд при работе машины M_1 будет таким же, как и время отыскания команд при работе машины M_2 в случае 1.2.1. Следовательно, время отыскания команд в случае 1.2.2 будет таким же, как и в случае 1.2.1.

Случай 1.2.3. За командами верхней и нижней дуг, выходящих из вершины 1, “вперемежку” следуют команды машин M_1, M_2 . Пусть, например, первой из команд машин M_1 и M_2 следует команда машины M_1 .

Наименьшее время отыскания команд будет достигаться, очевидно, только в том случае, если и команды машины M_1 (без учета команд машины M_2) и команды машины M_2 (без учета команд машины M_1) будут следовать в стандартном порядке.

Случай 1.2.3.1. В списке команд машин M_1 и M_2 последней следует команда машины M_2 . Число команд машины M_2 , следующих до последней команды машины M_1 , обозначим через t ($t \geq 1$). Это значит, что все команды машины M_2 , кроме t первых, следуют после команд машины M_1 . Число команд машины M_1 , следующих за t командами машины M_2 , обозначим через r ($r \geq 1$).

Если $t < s$, то время отыскания команд при работе машины M_2 над конфигурациями $P_{2^s+1}, P_{2^s+2}, P_{2^s+3}, \dots, P_{2^{s+1}}$ будет таким, же как и в случае 1.1.1. Действительно, при работе машины M_2 над каждой из этих конфигураций выполняется ровно s команд. Среди команд машины M_1 находится только t ($t < s$) команд машины M_2 . Поэтому при работе машины M_2 должны просматриваться все команды машины M_1 . Вместе с тем, по сравнению со случаем 1.1.1 время отыскания команд при работе машины M_1 увеличивается, так как машина M_1 , кроме своих команд, должна просматривать еще t команд машины M_2 и команду нижней дуги, выходящей из вершины 1.

Пусть $t \geq s$. Число конечных команд среди t команд машины M_2 обозначим через v . Тогда, очевидно, время отыскания команд при работе машины M_2 над соответствующими v начальными конфигурациями будет на $v r$ меньше, чем в случае 1.1.1. Действительно, при работе над каждой из этих конфигураций машина M_2 в отличие от случая 1.1.1 не просматривает r команд машины M_1 .

Число конечных команд среди r команд машины M_1 обозначим через h . Очевидно, время отыскания команд при работе машины M_1 над соответствующими h начальными конфигурациями будет на $h(t+1)$ больше, чем в случае 1.1.1. Действительно, при работе над каждой из этих конфигураций машина M_2 в отличие от случая 1.1.1 просматривает еще t команд машины M_2 и плюс команду нижней дуги, выходящей из вершины 1.

Таким образом, при $t \geq s$ время отыскания команд машины M_2 , по сравнению со случаем 1.1.1, будет на $v r$ меньше, а машины M_1 — на $h(t+1)$ больше. Покажем, что $h(t+1) > v r$. Для этого рассмотрим разность $h(t+1) - v r$. Из следствия 1 получаем, что $r \leq 2h - 1$. Тогда

$$h(t+1) - v r \geq h(t+1) - v(2h-1) = h(t+1-2v) + v.$$

В силу леммы 2 имеем $v \leq \frac{1}{2}(t+1)$. Следовательно,

$$h(t+1-2v) + v \geq h(t+1-2\frac{1}{2}(t+1)) + v = v > 0.$$

Случай 1.2.3.2. В списке команд машин M_1 и M_2 последней следует команда машины M_1 . Здесь t, v, r, h имеют тот же смысл, что и в случае 1.2.3.1. Из условия рассматриваемого случая следует, что все команды машины M_2 следуют до последней команды машины M_1 . Поэтому

$$t = 2^{s+1} - 2, v = 2^s.$$

Если $t < s$, то рассмотрение такое же, как и в случае 1.2.3.1. Пусть $t \geq s$. Покажем, что $h(t+1) - v r \geq 0$, то есть время отыскания команд в этом случае будет больше, чем в случае 1.1.1.

$$\text{Имеем } h(t+1) - v r = h(2^{s+1} - 2 + 1) - 2^s r.$$

Из следствия 1 получаем, что $h \geq \frac{1}{2}(r+1)$. Тогда

$$\begin{aligned} h(2^{s+1} - 1) - 2^s r &\geq \frac{1}{2}(r+1)(2^{s+1} - 1) - 2^s r = (r+1)(2^s - \frac{1}{2}) - 2^s r = \\ &= r(2^s - \frac{1}{2}) + (2^s - \frac{1}{2}) - 2^s r = (2^s - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}(2^{s+1} - r - 1). \end{aligned}$$

Так как $r \leq 2^{s+1} - 2$, то $\frac{1}{2}(2^{s+1} - r - 1) \geq \frac{1}{2}(2^{s+1} - 2^{s+1} + 2 - 1) = \frac{1}{2} > 0$.

Таким образом, $h(t+1) - v r > 0$.

Случай 1.3. За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1, следуют все команды машины M_2 . Тогда команда нижней дуги, выходящей из вершины 1, сле-

дует после команд машины M_2 . А это не соответствует оптимальному порядку следования команд, указанному в лемме 1.

Случай 1.4. За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1, “перебежку” следуют команды машин M_1 и M_2 . Этот случай рассматривается аналогично случаю 1.2.3.

Случай 2. Первой следует команда нижней дуги, выходящей из вершины 1. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1.

Случай 3. Первой следует одна из команд машины M_1 или машины M_2 . В силу леммы 1 такой порядок следования команд оптимальным не является.

Теорема 1 доказана.

Пусть n – число внутренних состояний программы машины, исключая конечное.

Замечание 1. Так как $n = 2^k - 1$, то $k = \log_2(n + 1)$, и тогда формула из пункта 2.1 теоремы 1 примет вид

$$\frac{1}{2}(n + 1) \cdot (2n + \log_2(n + 1)) = n^2 + \frac{1}{2}(n + 1) \cdot \log_2(n + 1) + n.$$

Следствие 2. Для полной древовидной машины с n внутренними состояниями минимальное среднее время отыскания команд по всем начальным конфигурациям равно

$$n + \frac{1}{2} \log_2(n + 1).$$

Доказательство. Всего имеется 2^k начальных конфигураций, и минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $2^{k-1} \cdot (2^{k+1} + k - 2)$. Поэтому минимальное среднее время отыскания команд по всем начальным конфигурациям равно

$$\frac{2^{k-1} \cdot (2^{k+1} + k - 2)}{2^k} = \frac{2^{2k} + 2^{k-1}k - 2^k}{2^k} = 2^k + \frac{1}{2}k - 1.$$

Так как $n = 2^k - 1$, то $k = \log_2(n + 1)$.

Тогда $2^k + \frac{1}{2}k - 1 = n + 1 + \frac{1}{2} \log_2(n + 1) - 1 = n + \frac{1}{2} \log_2(n + 1)$.

Следствие 2 доказано.

Заключение

Таким образом, для полных древовидных машин Тьюринга доказано, что стандартный порядок следования команд является оптимальным. Кроме того, найдено минимальное время отыскания команд. Очевидно, полученные результаты остаются в силе, если головка машины за один такт будет выполнять не три, а два действия: записывать в обозреваемую ячейку символ или выполнять сдвиг головки и переходить в новое внутреннее состояние или оставаться в том же. Такая машина является машиной Поста [8].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Слисенко, О. А.* Сложностные задачи теории вычислений / О. А. Слисенко // Успехи математических наук. – 1981. – Т. 36, вып. 6 (222). – С. 21–103.
2. *Минский, М.* Вычисления и автоматы / М. Минский. – М.: Мир, 1971. – 281 с.
3. *Ясюкович, Э. И.* Разработка алгоритма и программного обеспечения детерминированной машины Тьюринга / Э. И. Ясюкович // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Природозн. науки (матем., фізика, біологія). – 2017. – № 2. – С. 1–22.

4. Мальцев, А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1986. – 368 с.
5. Будько, А. Е. О двух классах машин Тьюринга / А. Е. Будько // Доклады АН БССР. – 1985. – № 9. – С. 792–793.
6. Будько, А. Е. О некоторых свойствах оптимального порядка следования команд в программах машин Тьюринга / А. Е. Будько // Нанопроектирование, технология, компьютерное моделирование (НПТКМ-2019) : материалы 18-го Междунар. симпозиума по новым приложениям высоких технологий, технологий, посвящ. памяти В. А. Пальмова, Брест, сентябрь 2019. – Брест : БрГУ, 2019. – С. 16–18.
7. Будько, А. Е. Об отдельных свойствах древовидных программ машин Тьюринга / А. Е. Будько // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов VIII Междунар. науч.-практ. конф., 18 окт. 2019 г. / под общ. ред. А. А. Козинского. – Брест : БрГУ, 2019. – С. 61–64.
8. Post, E. L. Finite combinatory processes – formulation 1 / E. L. Post // J. Symbolic Logic. – 1936. – № 3. – P. 103–105.

Поступила в редакцию 02.10.2020 г.

Контакты: budzko@brsu.brest.by (Будько Александр Евгеньевич)

Budko A.E. ON THE ORDER OF FOLLOWING COMMANDS IN PROGRAMS OF FULL TREE-TYPE TURING MACHINES

The article deals with finding the optimal order of following commands in programs of Turing machines with external alphabet $\{0,1\}$. Optimal order is understood as the order in which command retrieval time is the shortest. The article defines the way the machine retrieves a command in the program to be executed. For full tree-type Turing machines the optimal order of following commands is shown and the minimal command retrieval time is established.

Keywords: Turing machine, command, program, order of following commands, command retrieval time.

УДК 514.757

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПОРЯДКАХ ГРУПП ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ И ГОМОТЕТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ВЕЩЕСТВЕННУЮ, КОМПЛЕКСНУЮ И ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

*к 100-летию со дня рождения профессора-геометра
Василия Ивановича Ведерникова*

З. Н. Четыркина

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

В работе рассматривается 18 типов подвижных метрических пространств, несущих в метриках сразу четыре алгебраические структуры: D-действительных, C-комплексных чисел, H-кватернионов, O-октионов. В каждом случае находится максимальный порядок группы движений, сохраняющей в метрике исходную алгебраическую структуру. Среди всех этих пространств выделяются те, которые допускают еще и группу гомотетий.

Ключевые слова: изометрические движения, изометрии, движения, гомотетические движения, гомотетии метрического пространства, группы движений, группы гомотетий, их порядки в метрическом пространстве.

В 1854 г. Риман, вступая в профессорскую коллегия Геттингенского Университета, выступил перед Ученым Советом с традиционной лекцией о новых научных идеях. Он фактически заявил всему миру, что существует бесконечно много геометрий, которые миру придется изучать.

Суть его идеи такова: если для дифференцируемого многообразия M_n размерности n в любой его точке $x(x^1, \dots, x^n)$ рассмотреть касательное пространство $\{(x, dx)\}$ и для каждого линейного элемента (x, dx) указать его длину $ds : ds = L(x, dx)$ как дифференцируемую функцию от этого линейного элемента, однородную первой степени от координат вектора $dx(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$, касательного к нашему многообразию в точке x его, то мы естественно получаем метрическое пространство со своей геометрией.

Более 150 лет геометры бороздят этот безбрежный океан геометрических пространств вдоль и поперек, выбирая для своих исследований пространства по душе.

Риман и Софус Ли первые начали бороздить евклидовы и псевдоевклидовы пространства E_n с метрикой $ds^2 = e_1 dx^1{}^2 + e_2 dx^2{}^2 + \dots + e_n dx^n{}^2$, $e_i = \pm 1$, $i = 1, n$ по группам движений (таких преобразований непрерывно-дифференцируемых, при которых ds^2 переходит в ds^2). Риман обнаружил, что пространство E_n допускает

полную группу движений C_r порядка $r = \frac{n(n+1)}{2}$. И еще в E_n действует оператор $x^1 p_1 + x^2 p_2 + \dots + x^n p_n$ гомотетического движения (при нем ds^2 переходит в ωds^2 , где $\omega = \text{const}$), и пространство допускает полную группу гомотетий P_{r+1} порядка $r + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Риман поначалу рассматривал метрики вида $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$. Здесь по i и j предполагается суммирование $i, j = 1, \dots, n$. Пространства с такой метрикой стали называться римановыми и обозначаться V_n .

Рандерс решил рассматривать метрики вида $ds = \sqrt{g_{ij}(x)dx^i dx^j} + b_i(x)dx^i$.

Слагаемым $b_i(x)dx^i = dt$ он выделяет время, которое не может обратиться. Эти пространства стали обозначаться V_n^R и называться пространствами Рандерса.

Мне в 1966 году, отправляясь от идей Софуса Ли, изложенных в статье Б. Л. Лаптева [2], удалось доказать, что группа P_r с базисными операторами $X_v = \xi_v^i(x)p_i$, $p_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $v = 1, \dots, r$ будет группой гомотетий в пространстве с метрикой $ds = L(x, dx)$ тогда и только тогда, когда выполняется система дифференциальных уравнений

$$\mathfrak{I}_{\xi_v}(L(x, dx)) = c_v L(x, dx),$$

где c_v – гомотетические постоянные. Если все гомотетические постоянные равны нулю, то получаем группу изометрий C_r .

Здесь производная Ли от метрики ds определяется по формуле

$$\mathfrak{I}_{\xi_v}(L(x, dx)) = \xi_v^i(x) \frac{\partial L(x, dx)}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_v^i(x)}{\partial x^k} dx^k \frac{\partial L(x, dx)}{\partial dx^i}.$$

Если рассматривать пространства V_n , то группа P_r с базисными операторами $X_v = \xi_v^i(x)p_i$, $p_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $v = 1, \dots, r$ будет группой гомотетий в пространстве с метрикой $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$ тогда и только тогда, когда выполняется система дифференциальных уравнений

$$\mathfrak{I}_{\xi_v}(ds^2) = \xi_v^i(x) \frac{\partial ds^2}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi_v^i(x)}{\partial x^k} dx^k \frac{\partial ds^2}{\partial dx^i} = 2c_v ds^2,$$

c_v – гомотетические постоянные [4].

До начала двадцатого века геометры оперировали вещественными числами, а потом стали появляться новые алгебры в большом многообразии.

Римановыми пространствами с алгебрами занимались Ш. Эрмит, А. П. Широков (Казань), Г. И. Кручкович (Москва), А. И. Земцова (Минск).

Ближайшие обобщения комплексных чисел C – это кватернионы H и октионы O , их называют гиперкомплексными числами [3].

Беглая характеристика их свойств представлена в таблице.

	C	H	O
Вид числа	$z = x_0 e_0 + x_1 e_1,$ $e_0 = 1, e_1^2 = -1$	$K = x_0 e_0 + x_1 e_1 +$ $+x_2 e_2 + x_3 e_3,$ $e_0 = 1, e_j^2 = -1,$ $j = 1, 2, 3.$	$O = x_0 e_0 + x_1 e_1 +$ $+x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 +$ $+x_5 e_5 + x_6 e_6 + x_7 e_7,$ $e_0 = 1, e_j^2 = -1,$ $j = 1, \dots, 7$

Окончание таблицы

	C	H	O
Сопряженные числа	$z^* = x_0 e_0 - x_1 e_1$	$K^* = x_0 e_0 - x_1 e_1 -$ $-x_2 e_2 - x_3 e_3$	$O^* = x_0 e_0 - x_1 e_1 -$ $-x_2 e_2 - x_3 e_3 - x_4 e_4 -$ $-x_5 e_5 - x_6 e_6 - x_7 e_7$
Свойства	1. $ z ^2 = zz^* = x_0^2 + x_1^2$; 2. $ \tilde{z}z ^2 = \tilde{z} ^2 z ^2$ $\forall z, \tilde{z} \in C$	1. $ k ^2 = kk^* = x_0^2 + x_1^2 +$ $+x_2^2 + x_3^2$; 2. $ \tilde{k}k ^2 = \tilde{k} ^2 k ^2$ $\forall k, \tilde{k} \in H$	1. $ o ^2 = oo^* = x_0^2 + x_1^2 +$ $+x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2$; 2. $ \tilde{o}o ^2 = \tilde{o} ^2 o ^2$ $\forall o, \tilde{o} \in O$

В алгебре кватернионов H e_1, e_2, e_3 ведут себя как взаимно ортогональные орты, а их попарные произведения подобны векторному произведению в евклидовом E_3 , поэтому все автоморфизмы в H описываются группой O_3 (трехмерной). Вектор e_0 сохраняется при всех этих автоморфизмах.

В алгебре октионов O векторы $e_1, e_2, \dots, e_7$ ведут себя так же, как взаимно-ортогональные орты, но только здесь мы вместо группы O_7 имеем 14-членную группу автоморфизмов. Вектор e_0 здесь тоже сохраняется при всех автоморфизмах [3].

Рассмотрим евклидову метрику в алгебре вещественных чисел D

$$ds^2 = dx^1{}^2 + dx^2{}^2 + \dots + dx^{N^2}{}^2. \quad (1)$$

Она допускает $\frac{N(N-1)}{2}$ операторов движения

$$x^k p_l - x^l p_k, \quad k \neq l, \quad \overline{k}, 1 = 1, \dots, N, \quad (a)$$

сохраняющих исходную точку в касательных пространствах (x, dx) . Каждый оператор (a) осуществляет замену в (1) dx^{k^2} на dx^{l^2} и наоборот.

Теперь метрику (1) мы представим в виде

$$ds^2 = dx^1{}^2 + dx^2{}^2 + \dots + dx^{m_1^2}{}^2 + dz^1 dz^{1*} + dz^2 dz^{2*} + \dots + dz^{m_2^2} dz^{m_2^2*} + dk^1 dk^{1*} + \dots + dk^{m_3^2} dk^{m_3^2*} + do^1 do^{1*} + do^2 do^{2*} + \dots + do^{m_4^2} do^{m_4^2*}. \quad (2)$$

Размерность нашего пространства $N = m_1 + 2m_2 + 4m_3 + 8m_4$. Наше пространство в точке x можно образно представить в виде цветка. В нем из точки x исходят

$dx^1, dx^2, \dots, dx^{m_1}$ — одномерные тычинки,
 $dz^1, dz^2, \dots, dz^{m_2}$ — двумерные лепестки,
 $dk^1, dk^2, \dots, dk^{m_3}$ — четырехмерные лепестки,
 $do^1, do^2, \dots, do^{m_4}$ — восьмимерные лепестки.

Нас сначала интересует стационарная группа изометрий, сохраняющая этот цветок.

В касательном подпространстве E_{m_1} одномерные тычинки $dx^1, \dots, dx^{m_1}$ можно как угодно менять местами (это фактически означает, что в сумме $dx^1{}^2 + dx^2{}^2 + \dots + dx^{m_1^2}{}^2$ слагаемые можно как угодно менять местами).

Здесь операторы движения (a) таковы $x^k p_l - x^l p_k, \quad k, l = 1, \dots, m_1$. Их будет

$$l_{01} = \frac{m_1(m_1-1)}{2}.$$

Следующий слой в цветке двумерных лепестков $dz^1, dz^2, \dots, dz^{m_2}$. Любую пару этих лепестков можно менять местами с произволом $\frac{m_2(m_2-1)}{2}$. Но сколько операторов (а) надо применить, чтобы, например, dz^1 поменять местами с dz^2 ?

Если представить $dz^1 = dx^{01}e_0 + dx^{11}e_1$, $dz^2 = dx^{02}e_0 + dx^{12}e_1$, то очевидно dz^1 поменяется местами с dz^2 тогда и только тогда, когда поменяются местами dx^{01} с dx^{02} и dx^{11} с dx^{12} , фактически будут задействованы два оператора (а). Следовательно, в E_{2m_2} работают

$$l_{02} = \frac{2m_2(m_2-1)}{2} = m_2(m_2-1) \text{ операторов движения (а).}$$

В подпространстве E_{4m_3} четырехмерные лепестки $dk^1, \dots, dk^{m_3}$ переходят один в другой с помощью четырех операторов (а), и эти лепестки можно как угодно тащить друг с другом. В итоге здесь мы имеем операторов движения (а)

$$l_{03}^a = \frac{4m_3(m_3-1)}{2}.$$

А теперь заметим, что в каждом лепестке dk^j , $j=1, \dots, m_3$ работает трехчленная группа движений. Тогда при всевозможных заменах этих лепестков местами получаем дополнительно столько движений $l_{03}^b = \frac{3m_3(m_3+1)}{2}$.

$$\text{Итак, в } E_{4m_3} \text{ имеем движений } l_{03} = l_{03}^a + l_{03}^b = \frac{7m_3^2}{2} - \frac{m_3}{2}.$$

Обратимся, наконец, к подпространству E_{8m_4} . В нем имеются восьмимерные лепестки $do^1, do^2, \dots, do^{m_4}$, которые можно менять местами с произволом $\frac{m_4(m_4-1)}{2}$. При каждой замене действует 8 операторов (а), поэтому при всех заменах мы имеем движений

$$l_{04}^a = \frac{8m_4(m_4-1)}{2}.$$

А в каждом лепестке do^k действует 14-членная группа движений, поэтому в E_{8m_4} получаем дополнительно столько движений

$$l_{04}^b = \frac{14m_4(m_4+1)}{2}.$$

А всего в E_{8m_4} будет действовать группа движений порядка

$$l_{04} = l_{04}^a + l_{04}^b = 11m_4^2 + 3m_4.$$

А теперь найдем все движения цветка:

$$r_0 = l_{01} + l_{02} + l_{03} + l_{04} = \frac{m_1(m_1-1)}{2} + m_2(m_2-1) + \frac{7m_3^2}{2} - \frac{m_3}{2} + 11m_4^2 + 3m_4.$$

Всю картину движений цветка в точке x можно разнести в любую другую точку всего пространства E_N с помощью N операторов сдвигов: $p_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i=1, \dots, N$.

Поэтому полная группа изометрических движений имеет размерность

$$r = r_0 + N = \frac{m_1(m_1+1)}{2} + m_2(m_2+1) + \frac{7m_3(m_3+1)}{2} + 11m_4(m_4+1). \quad (3)$$

Итак, справедлива

Теорема 1. В евклидовом пространстве $E_N(2)$, несущем в себе вещественную алгебру D порядка m_1 , комплексную C порядка m_2 , алгебру кватернионов H порядка m_3 и алгебру октонионов O порядка m_4 , имеем полную группу G_r изометрических движений порядка (3) и полную группу гомотетических движений P_{r+1} порядка $r+1$ (оператор гомотетии здесь таков $x^1 p_1 + x^2 p_2 + \dots + x^N p_N$), сохраняющих исходную алгебраическую структуру.

Замечание. Теорема 1 легко обобщается на пространства (4), (5), (6).

$$ds = \sqrt{dx^{1^2} + \dots + dx^{m_1^2}} + \sqrt{dz^1 dz^{1*} + \dots + dz^{m_2} dz^{m_2*}} + \sqrt{dk^1 dk^{1*} + \dots + dk^{m_3} dk^{m_3*}} + \sqrt{do^1 do^{1*} + \dots + do^{m_4} do^{m_4*}}, \quad (4)$$

$$ds^2 = e_{11} dx^{1^2} + \dots + e_{1m_1} dx^{m_1^2} + e_{21} dz^1 dz^{1*} + \dots + e_{2m_2} dz^{m_2} dz^{m_2*} + e_{31} dk^1 dk^{1*} + e_{3m_3} dk^{m_3} dk^{m_3*} + e_{41} do^1 do^{1*} + \dots + e_{4m_4} do^{m_4} do^{m_4*}, \quad (5)$$

$$ds = \sqrt{e_{11} dx^{1^2} + \dots + e_{1m_1} dx^{m_1^2}} + \sqrt{e_{21} dz^1 dz^{1*} + \dots + e_{2m_2} dz^{m_2} dz^{m_2*}} + \sqrt{e_{31} dk^1 dk^{1*} + \dots + e_{3m_3} dk^{m_3} dk^{m_3*}} + \sqrt{e_{41} do^1 do^{1*} + \dots + e_{4m_4} do^{m_4} do^{m_4*}}, \quad (6)$$

$$e_{\alpha j} = \pm 1, \quad \alpha = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{1, m_\alpha}.$$

Рассмотрим теперь метрику

$$ds = [e_{11} dx^{1^2} + \dots + e_{1m_1} dx^{m_1^2} + e_{21} dz^1 dz^{1*} + \dots + e_{2m_2} dz^{m_2} dz^{m_2*} + e_{31} dk^1 dk^{1*} + \dots + e_{3m_3} dk^{m_3} dk^{m_3*} + e_{41} do^1 do^{1*} + \dots + e_{4m_4} do^{m_4} do^{m_4*}]^{\frac{1}{2}} + [\tilde{e}_{11} \tilde{dx}^{1^2} + \dots + \tilde{e}_{1m_1} \tilde{dx}^{m_1^2} + \tilde{e}_{21} \tilde{dz}^1 \tilde{dz}^{1*} + \dots + \tilde{e}_{2m_2} \tilde{dz}^{m_2} \tilde{dz}^{m_2*} + \tilde{e}_{31} \tilde{dk}^1 \tilde{dk}^{1*} + \dots + \tilde{e}_{3m_3} \tilde{dk}^{m_3} \tilde{dk}^{m_3*} + \tilde{e}_{41} \tilde{do}^1 \tilde{do}^{1*} + \dots + \tilde{e}_{4m_4} \tilde{do}^{m_4} \tilde{do}^{m_4*}]^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Обобщая теорему 1 на случай метрики (7), приходим к тому, что справедлива

Теорема 2. Пространство с метрикой (7) допускает группу изометрий G_r порядка

$$r = \frac{m_1(m_1+1)}{2} + m_2(m_2+1) + \frac{7m_3(m_3+1)}{2} + 11m_4(m_4+1) + \frac{n_1(n_1+1)}{2} + n_2(n_2+1) + \frac{7n_3(n_3+1)}{2} + 11n_4(n_4+1) \quad (8)$$

и группу гомотетий P_{r+1} , сохраняющих в нем все четыре алгебраические структуры.

Обратимся теперь к пространствам Римана V_n второй лакуарности в терминологии И. П. Егорова [1] с метрикой вида

$$ds^2 = F(x^1) [2dx^1 dx^2 + e_3 dx^{3^2} + \dots + e_n dx^{n^2}]. \quad (9)$$

При

$$F(x^1) = (x^1)^b; \frac{e^{-2\alpha \arctg x^1}}{1+x^1{}^2}; e^{2x^1}; \frac{e^{\alpha/x^1}}{x^1{}^2}; \frac{(x^1-1)^{\alpha-1}}{(x^1+1)^{\alpha+1}}, \forall \alpha, b \in D, b \neq 0 \quad (10)$$

метрика (9) имеет порядок полной группы изометрий $r_{2\max} = \frac{n(n-1)}{2} + 1$, оператор гомотетии: $Y = 2x^2p_2 + x^3p_3 + \dots + x^n p_n$ работает при любых значениях $F(x^1) \neq 0$

А теперь введем в метрику (9) сразу четыре алгебры

$$ds^2 = F(x^1)[2dx^1dx^2 + e_3dx^{3^2} + \dots + e_{m_1}dx^{m_1^2} + e_{21}dz^1dz^{1*} + \dots + e_{2m_2}dz^{m_2}dz^{m_2*} + \quad (s) \\ + e_{31}dk^1dk^{1*} + \dots + e_{3m_3}dk^{m_3}dk^{m_3*} + e_{41}do^1do^{1*} + \dots + e_{4m_4}do^{m_4}do^{m_4*}].$$

Так как в (s) “тычинки” не взаимодействуют с “лепестками”, то здесь группа изометрий имеет порядок

$$r_{2\max} = \frac{m_1(m_1-1)}{2} + 1 + m_2(m_2+1) + \frac{7}{2}m_3(m_3+1) + 11m_4(m_4+1). \quad (11)$$

Итак, справедлива следующая

Теорема 3. *Пространство с метрикой (s) при любом специальном виде функции $F(x^1)$ (10), несущее в касательном подпространстве E_{m_1} – алгебру D , в E_{2m_2} – алгебру C , в E_{4m_3} – алгебру H , в E_{8m_4} – алгебру O , допускает полную группу изометрических движений G_r порядка (11) и полную группу гомотетий P_{r+1} , сохраняющих эти алгебраические структуры в метрике (s).*

Заметим, что теорема 3 относительно полных групп изометрий G_r обобщается на пространства Рандерса [6; 7] с метриками вида $ds = \sqrt{ds_1^2} + du$.

1 случай.

$$ds_1^2 = (x^1)^b \{2dx^1dx^2 + e_3dx^{3^2} + \dots + e_{m_1}dx^{m_1^2} + e_{21}dz^1dz^{1*} + \dots + e_{2m_2}dz^{m_2}dz^{m_2*} + \\ + e_{31}dk^1dk^{1*} + \dots + e_{3m_3}dk^{m_3}dk^{m_3*} + e_{41}do^1do^{1*} + \dots + e_{4m_4}do^{m_4}do^{m_4*}\}, du = \frac{dx^1}{x^1}, \forall b \neq 0.$$

2 случай.

$$ds_1^2 = \left(\frac{e^{-2\alpha \arctg x^1}}{1+x^1{}^2} \right) \{2dx^1dx^2 + e_3dx^{3^2} + \dots + e_{m_1}dx^{m_1^2} + e_{21}dz^1dz^{1*} + \dots + e_{2m_2}dz^{m_2}dz^{m_2*} + \\ + e_{31}dk^1dk^{1*} + \dots + e_{3m_3}dk^{m_3}dk^{m_3*} + e_{41}do^1do^{1*} + \dots + e_{4m_4}do^{m_4}do^{m_4*}\}, du = \frac{dx^1}{1+x^1{}^2}, \forall \alpha \in D$$

3 случай.

$$ds_1^2 = e^{2x^1} \{2dx^1dx^2 + e_3dx^{3^2} + \dots + e_{m_1}dx^{m_1^2} + e_{21}dz^1dz^{1*} + \dots + e_{2m_2}dz^{m_2}dz^{m_2*} + \\ + e_{31}dk^1dk^{1*} + \dots + e_{3m_3}dk^{m_3}dk^{m_3*} + e_{41}do^1do^{1*} + \dots + e_{4m_4}do^{m_4}do^{m_4*}\}, du = dx^1.$$

4 случай.

$$ds_1^2 = e^{\frac{\alpha}{x^1}} / x^1{}^2 \cdot \{2dx^1dx^2 + e_3dx^{3^2} + \dots + e_{m_1}dx^{m_1^2} + e_{21}dz^1dz^{1*} + \dots + e_{2m_2}dz^{m_2}dz^{m_2*} + \\ + e_{31}dk^1dk^{1*} + \dots + e_{3m_3}dk^{m_3}dk^{m_3*} + e_{41}do^1do^{1*} + \dots + e_{4m_4}do^{m_4}do^{m_4*}\}, du = \frac{dx^1}{x^1{}^2}, \forall \alpha \in D$$

5 случай.

$$ds_1^2 = \frac{(x^1 - 1)^{\alpha-1}}{(x^1 + 1)^{\alpha+1}} \{2dx^1 dx^2 + e_3 dx^3^2 + \dots + e_{m_1} dx^{m_1^2} + e_{21} dz^1 dz^{1*} + \dots + e_{2m_2} dz^{m_2} dz^{m_2*} +$$

$$+ e_{31} dk^1 dk^{1*} + \dots + e_{3m_3} dk^{m_3} dk^{m_3*} + e_{41} do^1 do^{1*} + \dots + e_{4m_4} do^{m_4} do^{m_4*}\}, \quad du = \frac{dx^1}{(x^1 - 1)}, \forall \alpha \in D.$$

А для пространств Рандерса

1 случай.

$$ds_1^2 = e_{11} dx^{1^2} + \dots + e_{1m_1} dx^{m_1^2} + e_{21} dz^1 dz^{1*} + \dots + e_{2m_2} dz^{m_2} dz^{m_2*} + e_{31} dk^1 dk^{1*} +$$

$$+ \dots + e_{3m_3} dk^{m_3} dk^{m_3*} + e_{41} do^1 do^{1*} + \dots + e_{4m_4} do^{m_4} do^{m_4*}, \quad du = dx^n. \quad (12)$$

2 случай.

$$ds_1^2 = e^{2x^n} (e_{11} dx^{1^2} + \dots + e_{1m_1} dx^{m_1^2} + e_{21} dz^1 dz^{1*} + \dots + e_{2m_2} dz^{m_2} dz^{m_2*} + e_{31} dk^1 dk^{1*} +$$

$$ds_1^2 = e^{2x^n} (e_{11} dx^{1^2} + \dots + e_{1m_1} dx^{m_1^2} + e_{21} dz^1 dz^{1*} + \dots + e_{2m_2} dz^{m_2} dz^{m_2*} + e_{31} dk^1 dk^{1*} +$$

$$+ \dots + e_{3m_3} dk^{m_3} dk^{m_3*} + e_{41} do^1 do^{1*} + \dots + e_{4m_4} do^{m_4} do^{m_4*}), \quad du = dx^n. \quad (13)$$

3 случай.

$$ds_1^2 = \left(\frac{1}{x^{n^2}} \right) \{e_{11} dx^{1^2} + \dots + e_{1m_1} dx^{m_1^2} + e_{21} dz^1 dz^{1*} + \dots + e_{2m_2} dz^{m_2} dz^{m_2*} + e_{31} dk^1 dk^{1*} +$$

$$+ \dots + e_{3m_3} dk^{m_3} dk^{m_3*} + e_{41} do^1 do^{1*} + \dots + e_{4m_4} do^{m_4} do^{m_4*} + dx^{n^2}\}, \quad du = \frac{dx^n}{x^n}, \quad (14)$$

(здесь $n = 1 + m_1 + 2m_2 + 4m_3 + 8m_4$) справедлива следующая

Теорема 4. В пространствах Рандерса (12), (13), (14), несущих в себе в касательных подпространствах E_{m_1+1} вещественную алгебру D , в E_{2m_2} – комплексную алгебру C , в E_{4m_3} – алгебру кватернионов H , в E_{8m_4} – алгебру октонионов O , допускается группа G_r изометрических движений порядка

$$r = 1 + \frac{m_1(m_1 + 1)}{2} + m_2(m_2 + 1) + \frac{7}{2}m_3(m_3 + 1) + 11m_4(m_4 + 1),$$

сохраняющих эти алгебраические структуры.

Группа гомотетических движений P_{r+1} порядка $r+1$ допускается только пространством случая 1 с метрикой (12).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Егоров, И. П.** Автоморфизмы в обобщенных пространствах / И. П. Егоров // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геометрии. – М., 1978. – Т. 10. – С. 147–191.
2. **Лаптев, Б. Л.** Производная Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления / Б. Л. Лаптев // Известия физ.-мат. общества. – Казань, 1938. – № 10. – С. 3–38.
3. **Розенфельд, Б. А.** Геометрия групп Ли / Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский. – М.: МЦНМО, 2003. – 557 с.: ил., табл.
4. **Четыркина, З. Н.** Гомотетии и движения в двумерных финслеровых пространствах / З. Н. Четыркина // Волжск. матем. сб. – 1966. – Вып. 5. – С. 366–373.
5. **Четыркина, З. Н.** Гомотетически подвижные трехмерные пространства Рандерса / З. Н. Четыркина // Весці АН БССР. Серія фіз.-мат. навук. – 1981. – № 1. – С. 43–51.
6. **Четыркина, З. Н.** Пространства Рандерса первой лакуарности и максимально подвижные финслеровы пространства / З. Н. Четыркина // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1984. – № 11. – С. 53–56.
7. **Четыркина, З. Н.** Максимально гомотетически подвижные финслеровы пространства / З. Н. Четыркина // Весці АН БССР. Серія фіз.-мат. навук. – 1985. – № 1. – С. 35–38.

Поступила в редакцию 12.11.2020 г.

Контакты: kafvm@bsuir.by (Четыркина Зинаида Никандровна)

Chetyrkina Z.N. MAXIMUM ORDERS OF GROUPS OF ISOMETRIC AND HOMOTHETIC MOTIONS IN METRIC SPACES ALLOWING REAL, COMPLEX AND HYPERCOMPLEX ALGEBRAIC STRUCTURES

The paper considers 18 types of movable metric spaces that carry four algebraic structures in metrics at once: D -real, C -complex numbers, H -quaternions, O -octonions. In each case, the maximum order of a group of motions that preserves the original algebraic structure in the metric is found. Among all these spaces, there are those that also admit a group of homotheties.

Keywords: isometric motions, isometries, motions, homothetic motions, homotheties of a metric space, groups of motions, groups of homotheties, their orders in a metric space.

УДК 512.548

ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА l -АРНОЙ ПОЛУГРУППЫ $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук, профессор

Могилевский государственный университет продовольствия

В статье устанавливается связь между порождающими множествами полугруппы A и порождающими множествами l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ с l -арной операцией $[]_{l, \sigma, k}$, которая определяется на k -ой декартовой степени произвольного группоида A для любого целого $l \geq 2$ и любой подстановки σ из множества S_k всех подстановок множества $\{1, 2, \dots, k\}$.

Ключевые слова: полугруппа, l -арная полугруппа, порождающее множество.

1. Введение

Пусть A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k . Определим на A^k вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \dots, x_k y_{\sigma(k)}),$$

а затем l -арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \dots)).$$

Понятно, что операция $[]_{2, \sigma, k}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

Операции $\overset{\sigma}{\circ}$ и $[]_{l, \sigma, k}$ для произвольного группоида впервые были определены в [1].

Если $\sigma = (12 \dots k)$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \circ (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \dots, x_{k-1} y_k, x_k y_1)$$

из [2, определение 2.2.3], а операция $[]_{l, \sigma, k}$ – с операцией $[]_{l, k}$ из того же определения. Операции $\circ$ и $[]_{l, k}$ впервые были определены в [3], где также впервые была определена и операция $[]_{l, \sigma, k}$ для случая полугруппы A . Заметим также, что операция $[]_{n, n-1}$ аналогична n -арной операции, которую Э. Пост определил в [4] на множестве всех n -арных подстановок.

Данная статья посвящена изучению порождающих множеств l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ по известному порождающему множеству полугруппы A .

2. Предварительные сведения

Следующая теорема позволяет находить значения l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, не используя явно операцию $\overset{\sigma}{\circ}$.

Теорема 2.1. [2; 3]. Пусть A – полугруппа,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l.$$

Тогда

$$[x_1 x_2 \dots x_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, 2, \dots, k.$$

Если в универсальной алгебре $\langle A, [] \rangle$ с одной l -арной операцией $[]: A^l \rightarrow A$ для любого $i = 1, \dots, l-1$ выполняется тождество ассоциативности

$$[[a_1 \dots a_l] a_{l+1} \dots a_{2l-1}] = [a_1 \dots a_i [a_{i+1} \dots a_{i+l}] a_{i+l+1} \dots a_{2l-1}],$$

то такую универсальную алгебру называют l -арной полугруппой, а l -арную операцию $[]$ – ассоциативной.

Теорема 2.2. [2; 3]. Если A – полугруппа, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа.

Теорема 2.3. [2; 3]. Если A – группа, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Теорема 2.4. [1]. Если полугруппа A содержит более одного элемента, σ – нетождественная подстановка из S_k , то в l -арном группоиде $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ нет единиц.

Для l -арной полугруппы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ этот результат был доказан ранее в [2].

Согласно соответствующему определению для произвольных универсальных алгебр, l -арная подполугруппа $\langle B, [] \rangle$ l -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ называется порожденной множеством $M \subseteq A$, если она совпадает с пересечением всех l -арных подполугрупп $\langle C, [] \rangle$ из $\langle A, [] \rangle$ таких, что $M \subseteq C$. Множество M в этом случае называют порождающим.

Порождающее множество l -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ называют неприводимым или базисом, если любое его собственное подмножество не порождает $\langle A, [] \rangle$. Если порождающее множество l -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ конечно, то $\langle A, [] \rangle$ называют конечно порожденной. Если порождающее множество l -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ состоит из n элементов, то $\langle A, [] \rangle$ называют n -порожденной.

Известно, что подполугруппа B полугруппы A порождается множеством $M \subseteq A$ тогда и только тогда, когда каждый элемент b из B либо совпадает с некоторым элементом из M , либо является произведением элементов из M , то есть

$$b = m_1 \dots m_r, m_i \in M, r = 1, 2, \dots$$

Аналогичное утверждение справедливо для многоместного аналога полугруппы.

Предложение 2.1. l -Арная подполугруппа $\langle B, [] \rangle$ l -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ порождается множеством $M \subseteq A$ тогда и только тогда, когда каждый элемент b из B либо совпадает с некоторым элементом из M , либо может быть представлен в виде

$$b = [m_1 \dots m_{r(l-1)+1}], m_i \in M, r = 1, 2, \dots$$

Замечание 2.1. Если в порождающем множестве M l -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ имеется элемент c , который с помощью l -арной операции $[]$ выражается через другие элементы множества M , то есть

$$c = [m_1 \dots m_{r(l-1)+1}], m_i \in M, m_i \neq c$$

для некоторого $r = 1, 2, \dots$, то этот элемент можно удалить из порождающего множества. В этом случае l -арная полугруппа $\langle A, [\] \rangle$ порождается множеством $M \setminus \{c\}$.

В [5] был получен положительный ответ на вопрос: *можно ли, зная порождающее множество полугруппы A с единицей, построить порождающее множество l -арной полугруппы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$?*

Для подмножества M полугруппы A с единицей 1, натурального $k \geq 1$ и любого $j = 1, 2, \dots, k$ положим

$$U_j(M) = \{(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \mid a \in M\},$$

$$U(M) = \bigcup_{j=1}^k U_j(M).$$

Замечание 2.2. Ясно, что если $1 \in M$, то $e \in U_j(M)$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$, откуда $e \in U(M)$. Если же $1 \notin M$, то $e \notin U(M)$.

Следующая теорема дает положительный ответ на сформулированный выше вопрос.

Теорема 2.5. [5]. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M , подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U(M) \cup \{e\}$.

При доказательстве этой теоремы существенно использовалась следующая лемма, в формулировке которой присутствует обозначение $e = (\underbrace{1, \dots, 1}_k)$.

Согласно теореме 2.4, указанный элемент e не является единицей l -арной полугруппы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$.

Лемма 2.1. [5]. Пусть A – полугруппа с единицей 1, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k), \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k) \in A^k.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} 1) & [\underbrace{\mathbf{b} e \dots e \mathbf{c}}_{l-2}]_{l, \sigma, k} = (b_1 c_1, \dots, b_k c_k); \\ 2) & \mathbf{b} = [(\underbrace{b_1, 1, \dots, 1}_{k-1}) \underbrace{e \dots e}_{l-2} (1, \underbrace{b_2, 1, \dots, 1}_{k-2}) \underbrace{e \dots e}_{l-2} \dots \\ & \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-2}, b_{k-1}, 1) \underbrace{e \dots e}_{l-2} (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, b_k)]_{l, \sigma, k}. \end{aligned}$$

3. Порождающие множества полугруппы A

В связи с теоремой 2.5 представляет интерес следующий вопрос.

Вопрос 3.1. *Можно ли, зная порождающее множество l -арной полугруппы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$, построить порождающее множество полугруппы A ?*

Для любого подмножества M декартовой степени A^k полугруппы A с единицей 1 и любого $j = 1, 2, \dots, k$ положим:

$$V_j(\mathbf{M}) = \{(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \mid \exists (a_1, \dots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \dots, a_k) \in \mathbf{M}\};$$

$$V_j(\mathbf{M}) = \{a \in A \mid \exists (a_1, \dots, a_{j-1}, a, a_{j+1}, \dots, a_k) \in \mathbf{M}\};$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{M}) = \bigcup_{j=1}^k V_j(\mathbf{M}), \quad V(\mathbf{M}) = \bigcup_{j=1}^k V_j(\mathbf{M}).$$

Замечание 3.1. Для попадания элемента a во множество $V_j(\mathbf{M})$ достаточно наличия в $\mathbf{M}$ одного элемента с j -ой компонентой равной a . Таких элементов в $\mathbf{M}$ может быть более одного.

Аналогичное замечание имеет место и для множества $\mathbf{V}_j(\mathbf{M})$.

Замечание 3.2. Легко проверяется, что:

1) в общем случае $\mathbf{V}_j(\mathbf{M})$ не является подмножеством в $\mathbf{M}$, так как $\mathbf{M}$ может не содержать элементов вида

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j});$$

$$2) V_j(\mathbf{M}) = \{a \in A \mid (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in \mathbf{V}_j(\mathbf{M})\};$$

3) если $\mathbf{e} \in \mathbf{M}$, то $\mathbf{e} \in V_j(\mathbf{M})$ и $1 \in V_j(\mathbf{M})$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$;

4) если $(a_1, \dots, a_{j-1}, 1, a_{j+1}, \dots, a_k) \in \mathbf{M}$ для некоторого $j = 1, 2, \dots, k$, то $\mathbf{e} \in \mathbf{V}_j(\mathbf{M})$, $1 \in V_j(\mathbf{M})$;

5) если для любого элемента $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{M}$ все компоненты $a_1, \dots, a_k$ отличны от 1, то $\mathbf{e} \notin \mathbf{V}_j(\mathbf{M})$, $1 \notin V_j(\mathbf{M})$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Следующая теорема дает положительный ответ на вопрос 3.1 и является в некотором роде обратной для теоремы 2.5.

Теорема 3.1. Пусть A – полугруппа с единицей 1, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Если l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $\mathbf{M} \subseteq A^k$, то полугруппа A порождается множеством $V(\mathbf{M})$.

Доказательство. Для произвольного элемента $a \in A$ положим $\mathbf{a} = (a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1})$.

Так как $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $\mathbf{M}$, то по предложению 2.1 либо $\mathbf{a} \in \mathbf{M}$, либо

$$\mathbf{a} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{r(l-1)+1}]_{l, \sigma, k} \quad (3.1)$$

для некоторого $r = 1, 2, \dots$ и некоторых

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}) \in \mathbf{M}, i = 1, \dots, r(l-1) + 1.$$

Тогда, согласно определению множества $V_j(\mathbf{M})$, либо $a \in V_1(\mathbf{M})$, либо

$$x_{ij} \in V_j(\mathbf{M}) \subseteq V(\mathbf{M}), j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2)$$

Приравняв первые компоненты в левой и правой частях равенства (3.1), а также применим определение операции $[\]_{l, \sigma, k}$ и тождественность подстановки σ^{l-1} .

В результате получим

$$\begin{aligned}
 a &= x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)}x_{l\sigma^{l-1}(1)} \\
 &\quad x_{(l+1)\sigma^l(1)}x_{(l+2)\sigma^{l+1}(1)} \dots x_{(2(l-1))\sigma^{2(l-1)-1}(1)}x_{(2(l-1)+1)\sigma^{2(l-1)}(1)} \\
 &\quad \dots \\
 &\quad x_{((r-1)(l-1)+2)\sigma^{(r-1)(l-1)+1}(1)}x_{((r-1)(l-1)+3)\sigma^{(r-1)(l-1)+2}(1)} \dots \\
 &\quad \dots x_{(r(l-1))\sigma^{r(l-1)-1}(1)}x_{(r(l-1)+1)\sigma^{r(l-1)}(1)} = \\
 &= x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)}x_{l1}x_{(l+1)\sigma(1)}x_{(l+2)\sigma^2(1)} \dots x_{(2(l-1))\sigma^{l-2}(1)}x_{(2(l-1)+1)1} \\
 &\quad \dots \\
 &\quad x_{((r-1)(l-1)+2)\sigma(1)}x_{((r-1)(l-1)+3)\sigma^2(1)} \dots x_{(r(l-1))\sigma^{l-2}(1)}x_{(r(l-1)+1)1},
 \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned}
 a &= x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)}x_{l1}x_{(l+1)\sigma(1)}x_{(l+2)\sigma^2(1)} \dots x_{(2(l-1))\sigma^{l-2}(1)}x_{(2(l-1)+1)1} \\
 &\quad \dots \\
 &\quad x_{((r-1)(l-1)+2)\sigma(1)}x_{((r-1)(l-1)+3)\sigma^2(1)} \dots x_{(r(l-1))\sigma^{l-2}(1)}x_{(r(l-1)+1)1}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, либо $a \in V_1(\mathbf{M}) \subseteq V(\mathbf{M})$, либо, ввиду (3.2), a совпадает с произведением элементов из $V(\mathbf{M})$. Следовательно, множество $V(\mathbf{M})$ порождает подгруппу A . Теорема доказана.

Замечание 3.3. В доказательстве теоремы 3.1 можно вместо элемента $(a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1})$

использовать любой из элементов

$$(\underbrace{a, \dots, a}_k), (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}), j = 2, \dots, k.$$

Представляет интерес следующее

Предложение 3.1. Пусть A – полугруппа с единицей 1, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Если l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $\mathbf{M} \subseteq A^k$, то она порождается множеством $V(\mathbf{M}) \cup \{e\}$.

Доказательство. Так как l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $\mathbf{M}$, то по предложению 2.1 любой элемент $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ либо принадлежит множеству $\mathbf{M}$, либо может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_{r(l-1)+1}]_{l, \sigma, k} \quad (3.3)$$

для некоторого $r = 1, 2, \dots$ и некоторых

$$\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}) \in \mathbf{M}, i = 1, \dots, r(l-1) + 1.$$

Если $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbf{M}$, то согласно утверждению 2) леммы 2.1,

$$\mathbf{a} = [\underbrace{\mathbf{a}_1 e \dots e}_{l-2} \underbrace{\mathbf{a}_2 e \dots e}_{l-2} \dots \underbrace{e \dots e}_{l-2} \mathbf{a}_k]_{l, \sigma, k},$$

где

$$\mathbf{a}_j = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_j, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in V_j(\mathbf{M}), j = 2, \dots, k.$$

Если верно (3.3), где $\mathbf{v}_i \in \mathbf{M}$, то каждый элемент $\mathbf{v}_i$, согласно утверждению 2) леммы 2.1, может быть представлен в виде

$$\mathbf{v}_i = [\underbrace{\mathbf{v}_{i1} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \underbrace{\mathbf{v}_{i2} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \dots \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-2} \mathbf{v}_{ik}]_{l, \sigma, k}, i = 1, \dots, r(l-1)+1, \quad (3.4)$$

где

$$\mathbf{v}_{ij} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, \mathbf{v}_{ij}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in \mathbf{V}_j(\mathbf{M}), j = 2, \dots, k.$$

Подставляя в (3.3) вместо $\mathbf{v}_i$ их правые части из (3.4), видим, что элемент $\mathbf{a}$ может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{r(l-1)+1}]_{l, \sigma, k}$$

для некоторого натурального t и некоторых

$$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r(l-1)+1} \in \mathbf{V}(\mathbf{M}) \cup \{\mathbf{e}\}.$$

Таким образом, и в случае $\mathbf{a} \in \mathbf{M}$, и в случае (3.3) элемент $\mathbf{a}$ выражается с помощью l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$ через элементы множества $\mathbf{V}(\mathbf{M}) \cup \{\mathbf{e}\}$. Следовательно, по предложению 2.1 l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $\mathbf{V}(\mathbf{M}) \cup \{\mathbf{e}\}$. Предложение доказано.

4. Неприводимые порождающие множества l -арной полугруппы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$

В [5] на декартовом квадрате циклической группы $A = \{1, a\}$ с порождающим множеством $M = \{a\}$ построена (пример 2.1) тернарная группа $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$, которая порождается не только множеством $\mathbf{U}(M) \cup \{\mathbf{e}\}$, как это гарантирует теорема 2.5, но также каждым из множеств $\mathbf{U}_1(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ и $\mathbf{U}_2(M) \cup \{\mathbf{e}\}$, которые, как показано в примере 2.1 из [5], являются неприводимыми. В связи с этим возникают два вопроса.

Вопрос 4.1. В каких случаях l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ из теоремы 2.5 порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ для некоторого $j = 1, 2, \dots, k$?

Вопрос 4.2. Если l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ из теоремы 2.5 порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ для некоторого $j = 1, 2, \dots, k$, то будет ли это множество неприводимым в случае неприводимости множества M ?

Лемма 4.1. Пусть A – полугруппа с единицей 1, σ – подстановка из S_k , которая разлагается в произведение независимых циклов, среди которых имеется цикл $(n_1 \dots n_m)$ длины $m \leq l$. Тогда для любых $a \in A$, $i, j \in \{n_1 \dots n_m\}$ существует такое $r \in \{1, \dots, m\}$, что

$$[\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{m-r} \underbrace{(1, \dots, 1)}_{i-1}, a, \underbrace{(1, \dots, 1)}_{k-i} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-m+r-1}]_{l, \sigma, k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}).$$

Доказательство. Так как $l \geq m$, то левая часть равенства из условия леммы корректна. А так как $i \in \{n_1, \dots, n_m\}$, то множество

$$\{\sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^m(i) = i\}$$

совпадает с множеством $\{n_1, \dots, n_m\}$. Поэтому для любого $j \in \{n_1, \dots, n_m\}$ существует такое $r \in \{1, \dots, m\}$, что $j = \sigma^r(i)$, откуда

$$i = \sigma^{m-r}(j). \quad (4.1)$$

Положим

$$[\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{m-r} \underbrace{(1, \dots, 1)}_{i-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-m+r-1}]_{l, \sigma, k} = (c_1, \dots, c_k), \quad (4.2)$$

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i}) = (b_1, \dots, b_k). \quad (4.3)$$

Тогда, применяя к левой части равенства (4.2) определение операции $[\]_{l, \sigma, k}$, получим

$$c_s = \underbrace{1 \dots 1}_{m-r} b_{\sigma^{m-r}(s)} \underbrace{1 \dots 1}_{l-m+r-1} = b_{\sigma^{m-r}(s)}, s = 1, 2, \dots, k,$$

то есть

$$c_s = b_{\sigma^{m-r}(s)}, s = 1, 2, \dots, k. \quad (4.4)$$

Кроме того, из того же определения следует, что среди компонент $c_1, \dots, c_k$ только одна компонента равна a , а остальные $k-1$ компонент равны 1.

Так как согласно (4.1), $i = \sigma^{m-r}(j)$, то из (4.3) и (4.4) вытекает $c_j = b_{\sigma^{m-r}(j)} = b_i = a$, а для остальных $k-1$ компонент с индексами $s \neq j$ имеем $c_s = 1$. Следовательно, верно равенство из условия леммы. Лемма доказана.

Замечание 4.1. Из равенства $j = \sigma^r(i)$ или равносильного ему равенства (4.1) следует, что $i = j$ тогда и только тогда, когда $r = m$. Поэтому, если в лемме 4.1 положить $i = j$ или $r = m$, то получим очевидное равенство

$$[(\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1}]_{l, \sigma, k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i}).$$

Замечание 4.2. Лемма 4.1 включает и тривиальный случай $a = 1$.

Считая в лемме 4.1 σ циклом длины k , получим

Следствие 4.1. Пусть A – полугруппа с единицей 1, σ – цикл длины k из S_k , $k \leq l$. Тогда для любых $a \in A$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, существует такое $r \in \{1, 2, \dots, k\}$, что

$$[\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k-r} \underbrace{(1, \dots, 1)}_{i-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-k+r-1}]_{l, \sigma, k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}).$$

Положим в лемме 4.1 $\sigma = (12 \dots k)$, $l = k+1$, $i = 1$. Тогда ввиду (4.1), $1 = \sigma^{k-r}(j)$. А так как для $\sigma = (12 \dots k)$ верно

$$\sigma^{k-j+1}(j) = 1, j = 2, \dots, k,$$

то

$$\sigma^{k-j+1}(j) = \sigma^{k-r}(j),$$

откуда $r = j-1$. Поэтому верно

Следствие 4.2. Пусть A – полугруппа с единицей 1 , $a \in A$. Тогда

$$[\underbrace{e \dots e}_{k-j+1}(a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \underbrace{e \dots e}_{j-1}]_{k+1, (12 \dots k), k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j})$$

для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Полагая в следствии 4.2 вначале $j = 1$, а затем $j = k$ получим следующие два следствия, которые могут быть получены и как следствия определения операции $[\]_{l, \sigma, k}$.

Следствие 4.3. Если A – полугруппа с единицей 1 , $a \in A$, то

$$[\underbrace{e \dots e}_k(a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1})]_{k+1, (12 \dots k), k} = (a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}).$$

Следствие 4.4. Если A – полугруппа с единицей 1 , $a \in A$, то

$$[e(a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \underbrace{e \dots e}_{k-1}]_{k+1, (12 \dots k), k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, a).$$

Теорема 4.1. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M , подстановка σ из S_k разлагается в произведение q независимых циклов, включая циклы длины один, и удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, где $l \geq \max\{m_1, \dots, m_q\}$, $m_1, \dots, m_q$ – длины циклов из указанного разложения; $X_1, \dots, X_q$ – σ -орбиты, соответствующие этим циклам. Тогда для любых $i_1 \in X_1, \dots, i_q \in X_q$ l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством

$$U_{i_1}(M) \cup \dots \cup U_{i_q}(M) \cup \{e\}.$$

Если полугруппа A – n -порожденная, то l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является: $(q(n-1)+1)$ -порожденной, если $1 \in M$; $(qn+1)$ -порожденной, если $1 \notin M$.

Доказательство. Пусть u – произвольный элемент множества $\bigcup_{j=1}^k U_j(M) \cup \{e\}$,

отличный от e , то есть

$$u = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}), a \in M, a \neq 1 \quad (4.5)$$

для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Ясно, что при этом $j \in X_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \{1, \dots, q\}$.

Тогда по лемме 4.1 для любого $i_\alpha \in X_\alpha$ существует такое $r \in \{1, \dots, m_\alpha\}$, что

$$[\underbrace{e \dots e}_{m_\alpha-r}(\underbrace{1, \dots, 1}_{i_\alpha-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i_\alpha}) \underbrace{e \dots e}_{l-m_\alpha+r-1}]_{l, \sigma, k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}), \quad (4.6)$$

где

$$(\underbrace{1, \dots, 1}_{i_\alpha-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i_\alpha}) \in U_{i_\alpha}(M).$$

Из (4.5) и (4.6) следует

$$u = [\underbrace{e \dots e}_{m_\alpha-r}(\underbrace{1, \dots, 1}_{i_\alpha-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i_\alpha}) \underbrace{e \dots e}_{l-m_\alpha+r-1}]_{l, \sigma, k}. \quad (4.7)$$

Таким образом, всякий элемент $\mathbf{u}$ множества $\bigcup_{j=1}^k \mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ отличный от $\mathbf{e}$, может быть представлен в виде (4.7) для некоторого $\alpha \in \{1, \dots, q\}$.

Пусть теперь $\mathbf{a}$ – произвольный элемент множества A^k . По теореме 2.4 он либо совпадает с некоторым элементом множества $\bigcup_{j=1}^k \mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$, либо может быть представлен в виде

$$\mathbf{a} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{t(l-1)+1}]_{l, \sigma, k}, \quad (4.8)$$

где все элементы под знаком l -арной операции принадлежат этому же множеству.

Если $\mathbf{a} \in \bigcup_{j=1}^k \mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{e}$, то по доказанному выше, элемент $\mathbf{a}$ может быть представлен в виде (4.7) для некоторого $\alpha = 1, \dots, q$.

Если же верно (4.8), то, заменяя в правой части этого равенства каждый элемент под знаком l -арной операции, отличный от $\mathbf{e}$, его представлением вида (4.7), получим

$$\mathbf{a} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_{r(l-1)+1}]_{l, \sigma, k}$$

для некоторых

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r(l-1)+1} \in \mathbf{U}_{i_1}(M) \cup \dots \cup \mathbf{U}_{i_q}(M) \cup \{\mathbf{e}\}.$$

Следовательно, по предложению 2.1 l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $\mathbf{U}_{i_1}(M) \cup \dots \cup \mathbf{U}_{i_q}(M) \cup \{\mathbf{e}\}$. Если множество M содержит n элементов, то это множество содержит: $q(n-1)+1$ элементов, если $1 \in M$; $(qn+1)$ элементов, если $1 \notin M$. Теорема доказана.

Замечание 4.3. Если в доказательстве теоремы 4.1 j принадлежит одноэлементной орбите X_α , то есть $X_\alpha = \{j\}$, то $i_\alpha = j$, $r = t = 1$. Поэтому в этом случае, с одной стороны, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_{i_\alpha}(M)$, а с другой стороны, согласно (4.6) элемент $\mathbf{u}$ может быть представлен в виде

$$[(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1}]_{l, \sigma, k}.$$

Ответ на вопрос 4.1 содержится в следующем следствии из теоремы 4.1.

Следствие 4.5. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M , σ – цикл длины k из S_k , k делит $l-1$. Тогда l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Если полугруппа A – n -порожденная, то l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является: n -порожденной, если $1 \in M$; $(n+1)$ -порожденной, если $1 \notin M$.

Полагая в следствии 4.5 $\sigma = (12 \dots k)$, $l = k+1$, получим

Следствие 4.6. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M . Тогда $(k+1)$ -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ порождается множеством $\mathbf{U}_j(M) \cup \{\mathbf{e}\}$ для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. В частности она порождается любым из множеств

$$\{(a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \mid a \in M\} \cup \{e\}, \{(\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, a) \mid a \in M\} \cup \{e\}.$$

Если полугруппа A – n -порожденная, то l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является: n -порожденной, если $1 \in M$; $(n+1)$ -порожденной, если $1 \notin M$.

Полагая в следствии 4.6 $k = 2$, получим

Следствие 4.7. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M . Тогда тернарная полугруппа $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$ порождается любым из множеств

$$\{(a, 1) \mid a \in M\} \cup \{(1, 1)\}, \{(1, a) \mid a \in M\} \cup \{(1, 1)\}.$$

Если полугруппа A – n -порожденная, то тернарная полугруппа $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$ является: n -порожденной, если $1 \in M$; $(n+1)$ -порожденной, если $1 \notin M$.

Если в теореме 4.1 в качестве полугруппы с единицей взять моногенную полугруппу с единицей, то получим

Следствие 4.8. Пусть A – моногенная полугруппа с единицей 1 и порождающим элементом a , подстановка σ из S_k разлагается в произведение q независимых циклов, включая циклы длины один, и удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, где $l \geq \max\{t_1, \dots, t_q\}$, $t_1, \dots, t_q$ – длины циклов из указанного разложения; $X_1, \dots, X_q$ – σ -орбиты, соответствующие этим циклам. Тогда для любых $i_1 \in X_1, \dots, i_q \in X_q$ l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается $(q+1)$ -элементным множеством

$$\{(\underbrace{1, \dots, 1}_{i_1-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i_1}), \dots, (\underbrace{1, \dots, 1}_{i_q-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-i_q}), (\underbrace{1, \dots, 1}_k)\}.$$

Следствие 4.9. Пусть A – моногенная полугруппа с единицей 1 и порождающим элементом a , σ – цикл длины k из S_k , k делит $l-1$. Тогда l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается любым из следующих k двухэлементных множеств

$$\{(a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}), (\underbrace{1, \dots, 1}_k)\},$$

.....

$$\{(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}), (\underbrace{1, \dots, 1}_k)\},$$

.....

$$\{(a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}), (\underbrace{1, \dots, 1}_k)\}.$$

Следствие 4.10. Пусть A – моногенная полугруппа с единицей 1 и порождающим элементом a . Тогда $(k+1)$ -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ порождается любым из k двухэлементных множеств из следствия 4.9.

Следствие 4.11. Пусть A – моногенная полугруппа с единицей 1 и порождающим элементом a . Тогда тернарная полугруппа $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$ порождается любым из следующих двухэлементных множеств

$$\{(a, 1), (1, 1)\}, \{(1, a), (1, 1)\}.$$

Приведем пример, иллюстрирующий применение теоремы 4.1.

$$\begin{aligned} &\{(a, 1, 1, 1, 1, 1), (1, a, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, a, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}, \\ &\{(a, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, a, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, a, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}, \\ &\{(a, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, a), (1, 1, 1, 1, a, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}, \\ &\{(1, 1, 1, a, 1, 1), (1, a, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, a, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}, \\ &\{(1, 1, 1, a, 1, 1), (1, 1, a, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, a, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}, \\ &\{(1, 1, 1, a, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, a), (1, 1, 1, 1, a, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\}. \end{aligned}$$
$$X_1 = \{1, 4\}, X_2 = \{2, 3, 6\}, X_3 = \{5\}.$$

Пример 4.2. Циклическая группа A порядка 6, порожденная элементом a , порождается как полугруппа также двухэлементным неприводимым множеством $M = \{a^2, a^3\}$, не содержащим единицу 1. Тогда по следствию 4.5 тернарная полугруппа $\langle A^2, [\]_{(3), (2,2)} \rangle$ порядка 36 порождается множеством $U_1(M) \cup \{e\}$, где

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= [(a^3, 1)(a^2, 1)(a^3, 1)]_{3, (12), 2}, \mathbf{v} = [(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)]_{3, (12), 2}, \\ \mathbf{w} &= [(a^2, 1)\mathbf{u}\mathbf{v}]_{3, (12), 2}.\end{aligned}$$

$$\mathbf{e} = [(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^3, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)(a^2, 1)]_{3, (12), 2}.$$

Следовательно, тернарная полугруппа $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$ порождается множеством $U_1(M)$, а множество $U_1(M) \cup \{e\}$ не является неприводимым. Ясно, что множество $U_1(M)$ является неприводимым.

Лемма 4.2. Пусть A – полугруппа с единицей 1, σ – цикл длины k из S_k , $l = rk + 1$, $r \geq 1$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$,

$$a_i = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l, \quad (4.9)$$

$$[a_1 a_2 \dots a_l]_{l, \sigma, k} = (b_1, \dots, b_k).$$

Тогда

$$b_j = a_1 a_{k+1} a_{2k+1} \dots a_{rk+1},$$

$$b_s = a_{m_s+1} a_{k+m_s+1} a_{2k+m_s+1} \dots a_{(r-1)k+m_s+1}$$

для любого $s = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, k$, где m_s однозначно определяется из условия $\sigma^{m_s}(s) = j$.

Доказательство. Положив

$$a_i = (a_{i1} = 1, \dots, a_{i(j-1)} = 1, a_{ij} = a_i, a_{i(j+1)} = 1, \dots, a_{ik} = 1), i = 1, 2, \dots, l$$

и применив определение операции $[\]_{l, \sigma, k}$, получим для любого $s = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} b_s &= a_{1s} a_{2\sigma(s)} \dots a_{k\sigma^{k-1}(s)} a_{(k+1)\sigma^k(s)} \\ & a_{(k+2)\sigma^{k+1}(s)} \dots a_{(2k)\sigma^{2k-1}(s)} a_{(2k+1)\sigma^{2k}(s)} \\ & \dots \dots \dots \\ & a_{((r-1)k+2)\sigma^{(r-1)k+1}(s)} \dots a_{(rk)\sigma^{rk-1}(s)} a_{(rk+1)\sigma^{rk}(s)}, \end{aligned}$$

откуда, ввиду тождественности подстановки σ^k , следует

$$\begin{aligned} b_s &= a_{1s} a_{2\sigma(s)} \dots a_{k\sigma^{k-1}(s)} a_{(k+1)s} \\ & a_{(k+2)\sigma(s)} \dots a_{(2k)\sigma^{k-1}(s)} a_{(2k+1)s} \\ & \dots \dots \dots \\ & a_{((r-1)k+2)\sigma(s)} \dots a_{(rk)\sigma^{k-1}(s)} a_{(rk+1)s}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Так как $\sigma(j) \neq j, \dots, \sigma^{k-1}(j) \neq j$, то при $s = j$, ввиду (4.9), в правой части равенства (4.10) все сомножители, отличные от элементов

$$a_{1j} = a_1, a_{(k+1)j} = a_{k+1}, a_{(2k+1)j} = a_{2k+1}, \dots, a_{(rk+1)j} = a_{rk+1},$$

равны 1. Следовательно,

$$b_j = a_1 a_{k+1} a_{2k+1} \dots a_{rk+1}.$$

Если $s = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, k$, то найдется такое $m_s = 1, 2, \dots, k-1$, что $\sigma^{m_s}(s) = j$. Поэтому в правой части равенства (4.10) все сомножители, отличные от элементов

где $v_i \in V$, что

$$u = [v_1 \dots v_{t(l-1)+1}]_{l, \sigma, k} = [v_1 \dots v_l v_{l+1} \dots v_{2(l-1)+1} \dots v_{(t-1)(l-1)+2} \dots v_{t(l-1)+1}]_{l, \sigma, k}.$$

Из последнего равенства, применяя к его правой части t раз лемму 4.2, получим

$$u = v_1 v_{k+1} v_{2k+1} \dots v_{tk+1}.$$

Полученное представление элемента u в виде произведения элементов множества V позволяет удалить этот элемент из порождающего множества M , что противоречит неприводимости этого множества. Теорема доказана.

Полагая в теореме 4.2 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 4.13. Пусть полугруппа A порождается неприводимым множеством M , содержащим её единицу 1. Тогда для любого $j = 1, 2, \dots, k$ $(k+1)$ -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ порождается неприводимым множеством $U_j(M)$, содержащим e .

Полагая в следствии 4.13 $k = 2$, получим

Следствие 4.14. Пусть полугруппа A порождается неприводимым множеством M , содержащим её единицу 1. Тогда тернарная полугруппа $\langle A^2, [\]_{3, (12), 2} \rangle$ порождается любым из неприводимых множеств $U_1(M)$, $U_2(M)$, содержащих e .

Пример 4.3. Так как мультипликативная полугруппа $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел порождается неприводимым множеством $\mathbb{P} \cup \{1\}$, состоящим из единицы и всех простых чисел, то по теореме 4.2 l -арная полугруппа $\langle \mathbb{N}^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$, где σ – цикл длины k из S_k , k делит $l-1$, порождается неприводимым множеством

$$U_j(\mathbb{P} \cup \{1\}) = \{(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, p, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}) \mid p \in \mathbb{P} \cup \{1\}\}$$

для любого $j = 1, 2, \dots, k$. В частности, она порождается неприводимым множеством

$$U_1(\mathbb{P} \cup \{1\}) = \{(p, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \mid p \in \mathbb{P} \cup \{1\}\}.$$

Замечание 4.4. Пример 2.1 из [5] показывает, что если полугруппа A порождается неприводимым множеством M , не содержащим её единицу, σ – цикл длины k из S_k , k делит $l-1$, то для любого $j = 1, 2, \dots, k$ множество $U_j(M)$ может даже не быть порождающим для l -арной полугруппы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$. Не является порождающим для неё и множество $U(M)$. При этом порождающее множество $U_j(M) \cup \{e\}$ не является неприводимым.

Не является неприводимым и порождающее множество $U_1(M) \cup \{e\}$ из примера 4.2.

Таким образом, наличие единицы в порождающем множестве M полугруппы A является существенным требованием в условии теоремы 4.2.

Замечание 4.5. Пример 4.2 показывает также, что l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ может порождаться неприводимым множеством $U_j(M)$ и тогда, когда неприводимое множество M , порождающее полугруппу A , не содержит единицу этой полугруппы.

В следующей теореме, устанавливающей связь между неприводимостью порождающего множества M и неприводимостью порождающего множества $U_j(M)$, наличие единицы в M , в отличие от теоремы 4.2, не обязательно.

Теорема 4.3. Пусть полугруппа A с единицей порождается неприводимым множеством M , σ – цикл длины k из S_k , k делит $l-1$. Если l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M)$ для некоторого $j = 1, 2, \dots, k$, то оно является неприводимым.

Доказательство теоремы 4.3 совпадает с доказательством теоремы 4.2, начиная с его второго абзаца.

Замечание 4.6. Теперь мы видим, что неприводимость множества $U_1(M)$ из примера 4.2 является следствием теоремы 4.3.

Приведем еще один интересный пример.

Пример 4.4. Известно (см., например, [6]), что для любого порождающего множества M симметрической группы S_n и любого преобразования α из симметрической полугруппы F_n , у которого множество $\{\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(n)\}$ состоит из $n-1$ элементов, множество $M \cup \{\alpha\}$ является порождающим для симметрической полугруппы F_n . В качестве преобразования α можно взять, например, преобразование

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Так как симметрическая группа S_n порождается [7] двухэлементным множеством

$$\{\alpha_1 = (12 \dots n), \alpha_2 = (12)\},$$

то симметрическая полугруппа F_n порождается трехэлементным множеством

$$M_1 = \{\alpha_1 = (12 \dots n), \alpha_2 = (12), \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}\}.$$

Тогда по следствию 4.5 l -арная полугруппа $\langle F_n^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где σ – цикл длины k из S_k , k делит $l-1$, является k -порожденной, так как порождается k -элементным множеством

$$U_1(M_1) \cup \{e\} = \{(\alpha_1, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-1}), (\alpha_2, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-1}), (\alpha, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-1}), (\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_k)\},$$

где ε – тождественное преобразование множества $\{1, 2, \dots, n\}$, $e = (\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_k)$.

Так как симметрическая группа S_n порождается [7] $(n-1)$ -элементным множеством

$$\{\beta_1 = (12), \beta_2 = (23), \dots, \beta_{n-1} = (n-1 \ n)\},$$

то симметрическая полугруппа F_n порождается n -элементным множеством

$$M_2 = \{\beta_1 = (12), \beta_2 = (23), \dots, \beta_{n-1} = (n-1 \ n), \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}\}.$$

Тогда по следствию 4.5 l -арная полугруппа $\langle F_n^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где σ – цикл длины k из S_k , k делит $l-1$, является $(n+1)$ -порожденной, так как порождается $(n+1)$ -элементным множеством

$$U_1(M_2) \cup \{e\} = \{(\beta_1, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-1}), \dots, (\beta_{n-1}, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-1}), (\alpha, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-1}), (\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_k)\}.$$

Так как симметрическая группа S_n порождается [7] $(n-1)$ -элементным множеством

$$\{\gamma_1 = (1n), \gamma_2 = (2n), \dots, \gamma_{n-1} = (n-1n)\},$$

то симметрическая полугруппа F_n порождается n -элементным множеством

$$M_3 = \{\gamma_1 = (1n), \gamma_2 = (2n), \dots, \gamma_{n-1} = (n-1n), \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}\}.$$

Тогда по следствию 4.5 l -арная полугруппа $\langle F_n^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, где σ – цикл длины k из S_k , k делит $l-1$, является $(n+1)$ -порожденной, так как порождается $(n+1)$ -элементным множеством

$$U_1(M_3) \cup \{e\} = \{(\underbrace{\gamma_1, \varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-1}), \dots, (\underbrace{\gamma_{n-1}, \varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-1}), (\underbrace{\alpha, \varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-1}), (\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_k)\}.$$

Покажем, что порождающее множество $U(M_1) \cup \{e\}$ из примера 4.4 может не быть неприводимым, а удаление из этого множества элемента e делает порождающим множество $U(M_1)$.

Пример 4.5. Определим на декартовом квадрате F_3^2 симметрической полугруппы F_3 с помощью цикла (12) из S_2 7-арную операцию $[]_{7, (12), 2}$. По следствию 4.5 7-арная полугруппа $\langle F_3^2, []_{7, (12), 2} \rangle$ порождается 4-элементным множеством $U_1(M) \cup \{e\}$, где

$$U_1(M_1) \cup \{e\} = \{((123), \varepsilon), ((12), \varepsilon), \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \varepsilon\right), (\varepsilon, \varepsilon)\},$$

ε – тождественное преобразование множества $\{1, 2, 3\}$, $e = (\varepsilon, \varepsilon)$.

Положим

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = ((12), \varepsilon) \in U_1(M_1), a_2 = a_4 = a_6 = ((123), \varepsilon) \in U_1(M_1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & [a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7]_{7, (12), 2} = \\ & = [((12), \varepsilon)((123), \varepsilon)((12), \varepsilon)((123), \varepsilon)((12), \varepsilon)((123), \varepsilon)((12), \varepsilon)]_{7, (12), 2} \\ & = ((12)^4, (123)^3) = (\varepsilon, \varepsilon) = e. \end{aligned}$$

Следовательно, элемент e можно удалить из порождающего множества $U_1(M_1) \cup \{e\}$, так как он выражается через элементы $((12), \varepsilon)$ и $((123), \varepsilon)$ множества

$$U_1(M_1) = \{((123), \varepsilon), ((12), \varepsilon), \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \varepsilon\right)\},$$

которое становится порождающим.

Пример 4.5 может быть получен как следствие следующего предложения.

Предложение 4.1. Пусть полугруппа A с единицей 1 порождается множеством M , σ – цикл длины k из S_k , $l = rk + 1$, $r \geq 1$, множество M содержит такие элементы c и d , что $c^{r+1} = d^r = 1$. Тогда l -арная полугруппа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M)$ для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Если порождающее множество M неприводимо, то неприводимо и порождающее множество $U_j(M)$.

Доказательство. По следствию 4.5 l -арная полугруппа $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ порождается множеством $U_j(M) \cup \{e\}$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$. Определим элементы

$$a_i \in U_j(M), i = 1, 2, \dots, l$$

следующим образом:

$$a_1 = a_{k+1} = a_{2k+1} = \dots = a_{rk+1} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, c, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}),$$

остальные элементы имеют вид $(\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, d, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j})$. Тогда по лемме 4.2

$$[a_1 a_2 \dots a_l]_{l, \sigma, k} = (b_1, \dots, b_k),$$

где $b_j = c^{r+1} = 1$, $b_s = d^r = 1$ для любого $s = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, k$, то есть

$$[a_1 a_2 \dots a_l]_{l, \sigma, k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_k) = e.$$

Следовательно, элемент e можно удалить из порождающего множества $U_j(M) \cup \{e\}$, так как он выражается через элементы множества $U_j(M)$, которое становится порождающим.

Если порождающее множество M неприводимо, то по теореме 4.3 неприводимым является и порождающее множество $U_j(M)$. Предложение доказано.

Полагая в предложении 4.1 $A = F_n$, n – нечетное, $r = n$, $c = (12)$, $d = (12 \dots n)$ и, учитывая, что симметрическая полугруппа F_n порождается неприводимым множеством

$$M = \{c = (12), d = (12 \dots n), \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}\},$$

получим

Следствие 4.15. Если n – нечетное, σ – цикл длины k из S_k , то $(nk+1)$ -арная полугруппа $\langle F_n^k, [\]_{nk+1, \sigma, k} \rangle$ порождается неприводимым трехэлементным множеством

$$U_j(M) = \{(\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{j-1}, (12), \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-j}), (\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{j-1}, (12 \dots n), \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-j}),$$

$$(\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{j-1}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}, \underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_{k-j})\}$$

для любого $j = 1, 2, \dots, k$.

Пример 4.5 получается из следствия 4.15, если в нем положить $k = 2$, $n = 3$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. Об операции $[\]_{l, \sigma, k}$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. Сер. В. Природна. навукі (матем., фізика, біялогія). – 2010. – № 1(35). – С. 34–38.
2. Гальмак, А. М. Многочестные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

3. Гальмак, А. М. Многместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
4. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. Гальмак, А. М. Порождающие множества l -арной полугруппы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 1. – С. 54–59.
6. Ляпин, Е. С. Полугруппы / Е. С. Ляпин. – М. : Физматгиз, 1960. – 592 с.
7. Коксетер, Г. С. М. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп / Г. С. М. Коксетер, У. О. Дж. Мозер. – М. : Наука, 1980. – 240 с.

Поступила в редакцию 11.01.2021 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A.M. ON SETS OF GENERATORS OF l -ARY SEMIGROUP $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$

The article highlights the relations between the sets of generators in the semigroup A and the set of generators in the polyadic semigroup $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ with l -ary operation $[\]_{l, \sigma, k}$, that is defined on Cartesian power A^k of the semigroup A for the arbitrary integer and arbitrary substitution σ from the set S_k of all substitutions of the set $\{1, 2, \dots, k\}$.

Keywords: semigroup, l -ary semigroup, set of generators.

УДК 517.956.32

СОГЛАСОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГРАНИЧНОГО РЕЖИМА С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ОДНОМЕРНЫМ ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

Ф. Е. Ломовцев

доктор физико-математических наук
Белорусский государственный университет

К. А. Спесивцева

аспирант
Белорусский государственный университет

Методом математической индукции выведены достаточные условия согласования характеристических вторых частных производных при зависящих от времени коэффициентах в граничном режиме с начальными условиями и уравнением колебаний полуграниченной струны в пространствах высокой гладкости. Этих условий согласования требует гладкая склейка классического решения начально-граничной задачи для одномерного волнового уравнения на его критической характеристике в пространствах высокой гладкости. Характеристичность этих вторых частных производных в граничном режиме означает, что в каждый момент времени они направлены вдоль критической характеристики уравнения.

Ключевые слова: начально-граничная задача, волновое уравнение, характеристические вторые производные, требование гладкости, условие согласования.

Введение

Настоящая работа посвящена выводу некоторых достаточных условий согласования характеристических вторых производных при зависящих от времени коэффициентах в граничном режиме с начальными условиями и общим одномерным волновым уравнением в пространствах решений всех целых высших и завышенных на единицу порядков гладкости. Эти условия согласования вместе с требованиями гладкости на исходные данные (правую часть уравнения, начальные и граничные данные) обеспечивают гладкость решения рассматриваемой начально-граничной (смешанной) задачи на критической характеристике уравнения. Можно убедиться в том, что одномерным волновым уравнением (1) моделируется процесс распространения двух волн, движущихся во взаимно противоположных направлениях вдоль струны со скоростями a_1 и a_2 так же, как это сделано для простейшего уравнения колебаний струны при $a_1 = a_2 = a$ в [1, с. 57–58]. Понятие характеристических вторых производных в граничном режиме было введено в статье [2] и означает, что в каждый момент времени t они направлены вдоль критической характеристики $x = a_1 t$ одномерного волнового уравнения. В этой же статье найдены необходимые и достаточные условия согласования (и гладкости исходных данных), но нехарактеристических первых и вторых производных в граничном режиме с начальными условиями и данным уравнением в пространстве классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений. То же только нехарактеристическим первым и нехарактеристическим (факторизованным) вторым производным граничных режимов в пространстве классических решений посвящены работы [3, 4]. В статье [5] установ-

лены необходимые и достаточные условия согласования (и гладкости исходных данных) характеристической первой косої производной в граничном режиме с начальными условиями и простейшим уравнением колебаний полуограниченной струны (1) при $a_1 = a_2 = a$ в пространстве классических решений. Эти результаты обобщены на уравнение (1) при $a_1 \neq a_2$ в [6]. Как свидетельствует работа [7], для ограниченной струны с ростом времени увеличивается гладкость исходных данных начально-граничных задач при характеристических первых косої производных в граничных режимах. Для характеристических первых частных производных в граничном режиме условия согласования найдены в [8].

Поэтому в дальнейшем выведенные в настоящей работе достаточные условия согласования будут нами ослаблены до минимально достаточных (необходимых) и применены для установления критерия корректности по Адамару вспомогательной характеристической начально-граничной задачи для данного волнового уравнения на полупрямой в пространствах высших порядков гладкости с уже известным, единственным и устойчивым решением из [9]. Затем согласно “методу вспомогательных смешанных задач для волнового уравнения на полупрямой” из [10], который успешно применялся в [3], мы воспользуемся найденными условиями согласования для нахождения единственного и устойчивого по исходным данным классического решения аналогичной начально-граничной задачи для волнового уравнения на ограниченном отрезке при нестационарных характеристических вторых производных в двух граничных режимах.

Впервые корректные начально-граничные задачи для уравнения колебаний струны при зависящих от времени коэффициентах в локальных граничных режимах появились в [11; 12]. Теперь решают такие задачи для этого уравнения и при зависящих от времени коэффициентах в нелокальных граничных режимах Бицадзе-Самарского [13; 14]. Авторам настоящей статьи не известны зарубежные работы по решению в явном виде и поиску критериев корректности в смысле Адамара аналогичных начально-граничных задач для уравнения колебаний струны при зависящих от времени вторых производных в граничных режимах.

Основная часть

Формулировка задачи нахождения и вывод достаточных условий согласования

В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ ставится начально-граничная задача:

$$u_{tt}(x, t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x, t) - a_1 a_2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x, t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad (2)$$

$$\Gamma(t)u \equiv [\zeta(t)u_{tt} + \xi(t)u_{xt} + \theta(t)u_{xx} + \alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0} = \mu(t), \quad (3)$$

$$t \in (0, +\infty),$$

где нижними индексами у функции u мы обозначаем её частные производные соответствующих порядков по указанным в индексах переменным, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ –

вещественные постоянные, коэффициенты $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma$ – заданные функции переменной t и исходные данные f, φ, ψ, μ – заданные функции своих переменных x и t .

Уравнение (1) имеет характеристики $x - a_1 t = C_1, \quad x + a_2 t = C_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Кроме того, характеристика $x = a_1 t$ является критической для уравнения (1) [2]. Эта критическая характеристика делит первую четверть плоскости $G_\infty = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$ на два множества. Далее под $C^k(\Omega)$ будем понимать множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Определение 1. Классическим m раз непрерывно дифференцируемым решением начально-граничной задачи (1) – (3) называется функция $u \in C^m(G_\infty)$, где $m = 2, 3, 4, \dots$, удовлетворяющая уравнению (1) в обычном смысле, а начальным (2) и граничному (3) условиям в смысле пределов соответствующих выражений от ее значений $u(\dot{x}, \dot{t})$ во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ для всех указанных в них граничных точек x и t .

В работах [2; 15] введены и использованы, соответственно, понятия характеристических первых частных производных (первой кривой производной) и характеристических вторых частных производных в граничном режиме (3) для волнового уравнения (1).

Определение 2. В граничном режиме (3) первые и вторые частные производные называются характеристическими, если, соответственно, $a_1 \alpha(t) = \beta(t)$ и $a_1^2 \zeta(t) - a_1 \xi(t) + \theta(t) = 0$ для $t \geq 0$, т. е. они направлены вдоль критической характеристики $x = a_1 t$ для $t \geq 0$.

При поиске классических решений начально-граничных задач для уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических вторых производных во множестве классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений оказывается, что требуются условия согласования вспомогательной задачи (1) – (3) для уравнения колебаний полуограниченной струны во множестве решений с гладкостью более высокого порядка $u \in C^m(G_\infty)$, $m \geq 2$ [7].

Найдем некоторые достаточные условия согласования граничного режима (3), в котором первые производные являются нехарактеристическими, а вторые производные – характеристическими, с начальными условиями (2) и волновым уравнением (1) для ее решений с завышенной на единицу гладкостью $u \in C^{m+1}(G_\infty)$. Для решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ задачи (1) – (3) очевидны следующие требования гладкости:

$$f \in C^{m-1}(G_\infty), \quad \varphi \in C^{m+1}[0, +\infty[, \quad \psi \in C^m[0, +\infty[, \quad \mu \in C^{m-1}[0, +\infty[. \quad (4)$$

Чтобы получить первое условие согласования граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1) в равенстве (3), полагаем $t = 0$ и используем правую часть уравнения, начальные данные и характеристичность вторых производных

$$Y_1 \equiv \zeta(0) \left[f(0, 0) + (a_2 - a_1) \psi^{(1)}(0) + a_1 (a_2 - a_1) \varphi^{(2)}(0) \right] + \\ + \xi(0) [\psi^{(1)}(0) + a_1 \varphi^{(2)}(0)] + \alpha(0) \psi(0) + \beta(0) \varphi^{(1)}(0) + \gamma(0) \varphi(0) = \mu(0). \quad (5)$$

Для нахождения второго условия согласования дифференцируем равенство (3) один раз по t , вычисляем значения производных от решения u при $x=0$, $t=0$ с помощью начальных условий (2), уравнения (1) и характеристичности вторых производных и получаем

$$\begin{aligned} Y_2 \equiv & (\zeta^{(1)}(0) + \alpha(0)) [f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi^{(1)}(0) + a_2 a_1 \varphi^{(2)}(0)] + \\ & + a_2 [(a_2 - a_1)\zeta(0) + \xi(0)] \psi^{(2)}(0) + a_1 a_2 [(a_2 - a_1)\zeta(0) + \xi(0)] \varphi^{(3)}(0) + \\ & + [\xi^{(1)}(0) + \beta(0)] \psi^{(1)}(0) + a_1 \xi^{(1)}(0) \varphi^{(2)}(0) - a_1^2 \zeta^{(1)}(0) \varphi^{(2)}(0) + [\alpha^{(1)}(0) + \gamma(0)] \psi(0) + \\ & + \beta^{(1)}(0) \varphi^{(1)}(0) + \gamma^{(1)}(0) \varphi(0) + \zeta(0) [f^{(0,1)}(0,0) + (a_2 - a_1)f^{(1,0)}(0,0)] + \\ & + \xi(0)f^{(1,0)}(0,0) = \mu^{(1)}(0). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и далее справа сверху над коэффициентами ζ , ξ , θ , α , β , γ , начальными φ , ψ и граничным μ данными задачи цифрой в круглых скобках обозначаем порядок производной по x или t . Аналогичным образом мы обозначаем в круглых скобках через запятую, соответственно, порядки частных производных по x и t от правой части f .

Справедливо следующее

Утверждение 1. Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты имеют гладкость порядка m : $\zeta, \xi, \theta, \alpha, \beta, \gamma \in C^m[0, +\infty[$, первые производные берутся не вдоль: $a_1 \alpha(t) \neq \beta(t)$, $t \in [0, +\infty[$, а вторые производные – вдоль критической характеристики уравнения (1): $a_1^2 \zeta(t) - a_1 \xi(t) + \theta(t) \equiv 0$, $t \in [0, +\infty[$. Если начально-граничная задача (1)–(3) имеет решение $u \in C^{m+1}(G_\infty)$, то для правой части $f \in C^{m-1}(G_\infty)$, начальных $\varphi \in C^{m+1}[0, +\infty[$, $\psi \in C^m[0, +\infty[$ и граничного $\mu \in C^{m-1}[0, +\infty[$ данных верны условия согласования

$$Y_{k+1} \equiv \sum_{i=0}^k Z_{ik} = \mu^{(k)}(0), \quad k \in [0, m-1], \quad m \geq 2, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{0k} \equiv & \zeta^{(k)}(0) [f(0,0) + (a_2 - a_1)\{\psi^{(1)}(0) + a_1 \varphi^{(2)}(0)\}] + \\ & + \xi^{(k)}(0) [\psi^{(1)}(0) + a_1 \varphi^{(2)}(0)] + \alpha^{(k)}(0) \psi(0) + \beta^{(k)}(0) \varphi^{(1)}(0) + \gamma^{(k)}(0) \varphi(0), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} Z_{1k} \equiv & k \{ \zeta^{(k-1)}(0) [f^{(0,1)}(0,0) + (a_2 - a_1)f^{(1,0)}(0,0) + a_2(a_2 - a_1)\{\psi^{(2)}(0) + \\ & + a_1 \varphi^{(3)}(0)\}] + \xi^{(k-1)}(0) [f^{(1,0)}(0,0) + a_2\{\psi^{(2)}(0) + a_1 \varphi^{(3)}(0)\}] + \\ & + \alpha^{(k-1)}(0) [f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi^{(1)}(0) + a_1 a_2 \varphi^{(2)}(0)] + \\ & + \beta^{(k-1)}(0) \psi^{(1)}(0) + \gamma^{(k-1)}(0) \psi(0) \}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
Z_{ik} \equiv & \frac{k!}{i!(k-i)!} \left\langle \zeta^{(k-i)}(0) \left\{ \sum_{s=1}^{i+1} \rho_{s-1} f^{(s-1, i-s+1)}(0, 0) - a_1^2 \sum_{s=1}^{i-1} \rho_{s-1} f^{(s+1, i-s-1)}(0, 0) + \right. \right. \\
& + [\eta_{i+1} - a_1^2 \eta_{i-1}] \varphi^{(i+2)}(0) + [\rho_{i+1} - a_1^2 \rho_{i-1}] \psi^{(i+1)}(0) \left. \right\} + \\
& + \xi^{(k-i)}(0) \left\{ \sum_{s=1}^i \rho_{s-1} f^{(s, j-s)}(0, 0) + a_1 \sum_{s=1}^{i-1} \rho_{s-1} f^{(s+1, i-s-1)}(0, 0) + \right. \\
& + [\eta_i + a_1 \eta_{i-1}] \varphi^{(i+2)}(0) + [\rho_i + a_1 \rho_{i-1}] \psi^{(i+1)}(0) \left. \right\} + \alpha^{(k-i)}(0) \sum_{s=1}^i \rho_{s-1} f^{(s-1, i-s)}(0, 0) + \\
& + \beta^{(k-i)}(0) \sum_{s=1}^{i-1} \rho_{s-1} f^{(s, i-s-1)}(0, 0) + [\eta_i \alpha^{(k-i)}(0) + \eta_{i-1} \beta^{(k-i)}(0)] \varphi^{(i+1)}(0) + \\
& + [\rho_i \alpha^{(k-i)}(0) + \rho_{i-1} \beta^{(k-i)}(0)] \psi^{(i+1)}(0) + \gamma^{(k-i)}(0) \left\{ \sum_{s=1}^{i-1} \rho_{s-1} f^{(s-1, i-s-1)}(0, 0) + \right. \\
& \left. + \eta_{i-1} \varphi^{(i)}(0) + \rho_{i-1} \psi^{(i-1)}(0) \right\} \left. \right\rangle, \quad i \in [2, k], \quad k \in [2, m-1], \quad (10)
\end{aligned}$$

и коэффициенты ρ_j и η_j выражаются рекуррентно

$$\begin{aligned}
\rho_j &= (a_2 - a_1) \rho_{j-1} + a_1 a_2 \rho_{j-2}, \quad j \geq 2, \quad \rho_0 = 1, \quad \rho_1 = a_2 - a_1, \\
\eta_j &= (a_2 - a_1) \eta_{j-1} + a_1 a_2 \eta_{j-2}, \quad j \geq 2, \quad \eta_0 = 0, \quad \eta_1 = a_1 a_2. \quad (11)
\end{aligned}$$

Доказательство. Сначала докажем методом математической индукции вспомогательную формулу значений производных по переменной t порядка q при $t=0$ от значений частных производных по x порядка n при $x=0$ от решения $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ уравнения (1):

$$u^{(n,q)} \Big|_{x=0, t=0} = \sum_{s=1}^{q-1} \rho_{s-1} f^{(n+s-1, q-s-1)}(0, 0) + [\rho_{q-1} u^{(n+q-1, 1)} + \eta_{q-1} u^{(n+q, 0)}] \Big|_{x=0, t=0} \quad (12)$$

для всех $n \geq 0$, $q \geq 2$ и $n+q \leq m+1$, где коэффициенты ρ_j и η_j задаются рекуррентными равенствами (11). Здесь и в дальнейшем под записью $u^{(n,q)}$ понимается частная производная от функции $u(x, t)$ порядка n по x и порядка q по t , под записями $\varphi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$ – производные, соответственно, от функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ порядка n по x и под записью $f^{(n,q)}$ – производная от функции $f(x, t)$ порядка n по x и порядка q по t .

Для обоснования формул (12) сначала из уравнения (1) выводим тождество

$$u_{tt}(x, t) = f(x, t) + (a_2 - a_1) u_{xt}(x, t) + a_1 a_2 u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in G_\infty. \quad (13)$$

Затем это равенство (13) продифференцируем $\nu \geq 0$ раз по переменной x и $q-2$ раза по переменной t , положим $x=0$, $t=0$ и получим следующее семейство соотношений:

$$\begin{aligned}
u^{(\nu, q)} \Big|_{x=0, t=0} &= \left[\left[f + (a_2 - a_1)u_{xt} + a_1 a_2 u_{xx} \right]^{(\nu, 0)} \right]^{(0, q-2)} \Big|_{x=0, t=0} = \\
&= f^{(\nu, q-2)}(0, 0) + (a_2 - a_1)u^{(\nu+1, q-1)} \Big|_{x=0, t=0} + a_1 a_2 u^{(\nu+2, q-2)} \Big|_{x=0, t=0}
\end{aligned} \quad (14)$$

для всех $\nu \geq 0$, $q \geq 2$ и $\nu + q \leq m+1$. Формулы (14) имеют рекуррентный вид по параметру q , где q указывает на то, сколько раз решение u продифференцировано по переменной t .

На первом шаге математической индукции для того, чтобы показать справедливость формул (12) при первом значении параметра $q=2$ из равенства (14) с $0 \leq \nu \leq m-1$, находим значения его слагаемых при $x=0$, $t=0$ и для $\nu \in [0, m-1]$ имеем соотношения

$$u^{(\nu, 2)} \Big|_{x=0, t=0} = f^{(\nu, 0)}(0, 0) + (a_2 - a_1)u^{(\nu+1, 1)} \Big|_{x=0, t=0} + a_1 a_2 u^{(\nu+2, 0)} \Big|_{x=0, t=0}. \quad (15)$$

Равенства (15) совпадают с равенствами (12) при $n=\nu$, $q=2$ согласно значениям коэффициентов ρ_0 , ρ_1 , η_1 из (11).

На втором шаге математической индукции надо показать, что из справедливости формул значений производных $u^{(n, p)} \Big|_{x=0, t=0}$ вида (12) всех порядков $n \geq 0$, $p \geq 2$, $n + p \leq m+1$ вытекает справедливость формул такого же вида (12) для $u^{(n, p+1)} \Big|_{x=0, t=0}$ всех порядков $n \geq 0$, $p \geq 1$, $n + p \leq m$. Для этого воспользуемся полученными выше из уравнения (1) при $q=p+1$ рекуррентными соотношениями (14) для всех $\nu \geq 0$, $p \geq 1$, $\nu + p \leq m$:

$$u^{(\nu, p+1)} \Big|_{x=0, t=0} = f^{(\nu, p-1)}(0, 0) + (a_2 - a_1)u^{(\nu+1, p)} \Big|_{x=0, t=0} + a_1 a_2 u^{(\nu+2, p-1)} \Big|_{x=0, t=0}. \quad (16)$$

Используя здесь по предположению индукции формулы (12), соответственно, для $u^{(\nu+1, p)}$ при $n=\nu+1$, $q=p$ и $u^{(\nu+2, p-1)}$ при $n=\nu+2$, $q=p-1$, преобразуем равенства (16)

$$\begin{aligned}
u^{(\nu, p+1)} \Big|_{x=0, t=0} &= f^{(\nu, p-1)}(0, 0) + (a_2 - a_1) \left[\sum_{s=1}^{p-1} \rho_{s-1} f^{(\nu+s, p-s-1)}(0, 0) + \right. \\
&+ \rho_{p-1} u^{(\nu+p, 1)} \Big|_{x=0, t=0} + \eta_{p-1} u^{(\nu+p+1, 0)} \Big|_{x=0, t=0} \Big] + a_1 a_2 \left[\sum_{s=1}^{p-2} \rho_{s-1} f^{(\nu+s+1, p-s-2)}(0, 0) + \right. \\
&\left. + \rho_{p-2} u^{(\nu+p, 1)} \Big|_{x=0, t=0} + \eta_{p-2} u^{(\nu+p+1, 0)} \Big|_{x=0, t=0} \right].
\end{aligned} \quad (17)$$

В правой части этого равенства (17) приводим подобные слагаемые, содержащие значения производных $u^{(\nu+p, 1)}$ и $u^{(\nu+p+1, 0)}$ при $x=0$, $t=0$, и находим

$$\begin{aligned}
u^{(\nu, p+1)} \Big|_{x=0, t=0} &= f^{(\nu, p-1)}(0, 0) + (a_2 - a_1) \sum_{s=1}^{p-1} \rho_{s-1} f^{(\nu+s, p-s-1)}(0, 0) + \\
&+ a_1 a_2 \sum_{s=1}^{p-2} \rho_{s-1} f^{(\nu+s+1, p-s-2)}(0, 0) + [(a_2 - a_1) \rho_{p-1} + a_1 a_2 \rho_{p-2}] u^{(\nu+p, 1)} \Big|_{x=0, t=0} + \\
&+ [(a_2 - a_1) \eta_{p-1} + a_1 a_2 \eta_{p-2}] u^{(\nu+p+1, 0)} \Big|_{x=0, t=0}. \quad (18)
\end{aligned}$$

Заменой индекса суммирования $s = l - 1$ выводится равенство

$$\sum_{s=1}^{p-2} \rho_{s-1} f^{(\nu+s+1, p-s-2)}(0, 0) = \sum_{l=2}^{p-1} \rho_{l-2} f^{(\nu+l, p-l-1)}(0, 0).$$

Поэтому в силу (11) найденное представление (18) можно преобразовать таким образом:

$$\begin{aligned}
u^{(\nu, p+1)} \Big|_{x=0, t=0} &= f^{(\nu, p-1)}(0, 0) + (a_2 - a_1) \sum_{s=1}^{p-1} \rho_{s-1} f^{(\nu+s, p-s-1)}(0, 0) + \\
&+ a_1 a_2 \sum_{s=2}^{p-1} \rho_{s-2} f^{(\nu+s, p-s-1)}(0, 0) + \rho_p u^{(\nu+p, 1)} \Big|_{x=0, t=0} + \eta_p u^{(\nu+p+1, 0)} \Big|_{x=0, t=0}. \quad (19)
\end{aligned}$$

В правой части равенства (19) разбиение первой суммы на слагаемые

$$\sum_{s=1}^{p-1} \rho_{s-1} f^{(\nu+s, p-s-1)}(0, 0) = \rho_1 f^{(\nu+1, p-2)}(0, 0) + \sum_{s=2}^{p-1} \rho_{s-1} f^{(\nu+s, p-s-1)}(0, 0)$$

позволяет привести подобные слагаемые, содержащие значения производных $f^{(\nu+s, p-s-1)}$ при $x=0, t=0$, и для всех $\nu \geq 0, p \geq 1, \nu + p \leq m$ иметь выражения

$$\begin{aligned}
u^{(\nu, p+1)} \Big|_{x=0, t=0} &= f^{(\nu, p-1)}(0, 0) + (a_2 - a_1) \rho_0 f^{(\nu+1, p-2)}(0, 0) + \sum_{s=2}^{p-1} [a_1 a_2 \rho_{s-2} + \\
&+ (a_2 - a_1) \rho_{s-1}] f^{(\nu+s, p-s-1)}(0, 0) + \{\rho_p u^{(\nu+p, 1)} + \eta_p u^{(\nu+p+1, 0)}\} \Big|_{x=0, t=0}. \quad (20)
\end{aligned}$$

Отсюда согласно соотношениям (11) для $\nu \geq 0, p \geq 1, \nu + p \leq m$ приходим к равенствам

$$u^{(\nu, p+1)} \Big|_{x=0, t=0} = \sum_{s=1}^p \rho_{s-1} f^{(\nu+s-1, p-s)}(0, 0) + \{\rho_p u^{(\nu+p, 1)} + \eta_p u^{(\nu+p+1, 0)}\} \Big|_{x=0, t=0}. \quad (21)$$

Таким образом, в результате приведенной выше цепочки справедливых преобразований (16) – (21) получаем, что формулы значения частных производных по переменной t порядка $p+1$ при $t=0$ от значений частных производных по x по-

рядка $n = \nu$ при $x = 0$ от решения $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ уравнения (1) имеют вид (12), где вместо q участвует $p+1$. Это завершает доказательство вспомогательных равенств (12) методом математической индукции.

Теперь остается установить связь между значениями производных от решения $u^{(n,q)}|_{x=0,t=0}$ исходной задачи с начальными условиями (2) и уравнением (1). Вывод этой связи для $u^{(n,q)}|_{x=0,t=0}$ при $n \geq 0$, $q \geq 2$, $n+q \leq m+1$ опирается на начальные условия (2). Дифференцируем их n раз по x , полагаем $x = 0$, $t = 0$ и для $0 \leq n \leq m$ имеем равенства

$$u^{(n,0)}|_{x=0,t=0} = [u|_{t=0}]^{(n,0)}|_{x=0} = \varphi^{(n)}(0), u^{(n,1)}|_{x=0,t=0} = [u_t|_{t=0}]^{(n,0)}|_{x=0} = \psi^{(n)}(0). \quad (22)$$

Для получения окончательного явного выражения для значений производных $u^{(n,q)}$ от решения $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ задачи (1) – (3) при $x = 0$, $t = 0$ еще преобразовываем соотношения (12) с учетом начальных данных (22) и приходим к формулам

$$u^{(n,q)}|_{x=0,t=0} = \sum_{s=1}^{q-1} \rho_{s-1} f^{(n+s-1, q-s-1)}(0,0) + \rho_{q-1} \psi^{(n+q-1)}(0) + \eta_{q-1} \varphi^{(n+q)}(0), \quad (23)$$

где $n \geq 0$, $q \geq 2$, $n+q \leq m+1$, а коэффициенты ρ_j и η_j выражаются соотношениями (11).

Условия согласования (7) при $k = 0, 1$ видов (5) и (6) установлены нами выше перед формулировкой утверждения 1. Выведем условия согласования (7) для $k = \overline{2, m-1}$. Аналогично выводу этих двух первых условий согласования продифференцируем k раз граничный режим (3) по t и положим $t = 0$. С этой целью применим формулу Лейбница производной по t любого целого порядка k от произведения достаточно гладких функций g и h :

$$(gh)^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i g^{(k-i)} h^{(i)}, \quad C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}.$$

В результате дифференцирования k раз граничного режима (3) по t с помощью формулы Лейбница ввиду характеристичности вторых производных при $t = 0$ получаем равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^k C_k^i \left\{ \zeta^{(k-i)}(t) [u^{(0,i+2)} - a_1^2 u^{(2,i)}] + \xi^{(k-i)}(t) [u^{(1,i+1)} + a_1 u^{(2,i)}] + \right. \\ & \left. + \alpha^{(k-i)}(t) u^{(0,i+1)} + \beta^{(k-i)}(t) u^{(1,i)} + \gamma^{(k-i)}(t) u^{(0,i)} \right\} |_{x=0,t=0} = \mu^{(k)}(0), 2 \leq k \leq m-1. \end{aligned} \quad (24)$$

Для завершения доказательства справедливости условий согласования (7) для $2 \leq k \leq m-1$ следует в сумме (24) к значениям производных $u^{(n,q)}|_{x=0,t=0}$ для $n \geq 0$,

$q = 0, 1$ применять равенства (22), а для $n \geq 0$, $q \geq 2$ – равенства (23). Представления (22) и (23) указывают на то, что в сумме (24) слагаемое, соответствующее индексу $i = 0$, задается выражением Z_{0k} из (8) и слагаемое, соответствующее индексу $i = 1$, – выражением Z_{1k} из (9). Благодаря (23) слагаемые Z_{ik} , соответствующие индексам $2 \leq i \leq k$, равны (10).

Замечание. Условия согласования (7) при $k = 0$ и $k = 1$ совпадают с полученными перед формулировкой нашего утверждения 1 условиями согласования (5) и (6).

Заключение

В работе получены условия согласования значений μ граничного режима (3) с характеристическими нестационарными вторыми частными производными со значениями начальных данных φ , ψ и правой части f одномерного волнового уравнения в пространствах $C^{m+1}(G_\infty)$, $m \geq 2$, решений высокой гладкости. Эти условия являются достаточными для $m \geq 2$ раз непрерывной дифференцируемости решения начально-граничной задачи (1) – (3) на критической характеристике уравнения. Достаточные условия согласования (7) при $k = 0$ и $k = 1$ являются частными случаями найденных условий согласования в [9].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва : Наука, 2004. – 798 с.
2. Ломовцев, Ф. Е. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных / Ф. Е. Ломовцев, В. В. Лысенко // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 3(104). – С. 5–17.
3. Новиков, Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02. / Е. Н. Новиков ; Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2017. – 25 с.
4. Моисеев, Е. И. Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной факторизованной второй косой производной в граничном условии / Е. И. Моисеев, Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 459, № 5. – С. 544–549.
5. Ломовцев, Ф. Е. Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуграниченной струны с первой характеристической косой производной в нестационарном граничном условии / Ф. Е. Ломовцев // Весці НАН Беларусі. – 2016. – № 1. – С. 21–27.
6. Ломовцев, Ф. Е. Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуграниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии. / Ф. Е. Ломовцев, Е. В. Устилко // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2018. – № 4(101). – С. 18–28.
7. Ломовцев, Ф. Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах / Ф. Е. Ломовцев, Т. С. Точко // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальна тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 56–75.
8. Устилко, Е. В. Условия согласования значений характеристической косой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения. / Е. В. Устилко, Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2020. – № 1. – С. 30–37.
9. Спесивцева, К. А. Критерий корректности начально-краевой задачи для общего волнового уравнения при характеристических вторых производных в нестационарном граничном условии / К. А. Спесивцева, Ф. Е. Ломовцев // XIX Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям

(Еругинские чтения-2019): матер. Междунар. науч. конф., Могилев / Белорусско-Российский университет, 14–17 мая 2019 г. в 2 ч. – Минск : ИМ НАН Беларуси. – 2019. – Ч. 2. – С. 34–36.

10. Ломовцев, Ф. Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуграниченной струны / Ф. Е. Ломовцев // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: матер. Междунар. матем. конф. Минск / БГУ. 7–10 дек. 2015 г. в 2 ч. / ред. С. Г. Красовский. – Минск : ИМ НАН Беларуси. – 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.

11. Ломовцев, Ф. Е. О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка с переменной областью определения операторных коэффициентов / Ф. Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 5. – С. 873–886.

12. Ломовцев, Ф. Е. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения гладких и разрывных операторных коэффициентов: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук (01.01.02) / Ф. Е. Ломовцев; Белорусский государственный университет. – Минск, 2003. – 40 с.

13. Кожанов, А. И. О разрешимости краевых задач с нелокальным условием Бицадзе-Самарского для линейных гиперболических уравнений. / А. И. Кожанов // Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 432, № 6. – С. 738–740.

14. Mokrousov, I. S. Mixed Problems for the String Vibration Equation with Nonlocal Conditions of the General Form at the Right Endpoint and with an Inhomogeneous Condition at the Left Endpoint / I. S. Mokrousov // Differential Equations. – April 2017. – Vol. 53, No. 4. – Pp. 509–515.

15. Барановская, С. Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени кривой производной в краевом условии / С. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.

Поступила в редакцию 29.09.2020 г.

Контакты: lomovcev@bsu.by (Ломовцев Федор Егорович)

ksenia.spesivtseva@gmail.com (Спесивцева Ксения Андреевна)

Lomovtsev F.E., Spesivtseva K.A. MATCHING CHARACTERISTIC SECOND DERIVATIVES OF THE BOUNDARY MODE WITH INITIAL CONDITIONS AND ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION

Sufficient matching conditions of characteristic second partial derivatives for time-dependent coefficients in the boundary mode with initial conditions and the oscillation equation of a semi-bounded string are derived by mathematical induction in spaces of high smoothness. These matching conditions require smooth gluing of the classical solution of the initial boundary-value problem for this one-dimensional wave equation on its critical characteristic in spaces of high smoothness. The characteristic of these second partial derivatives in the boundary mode means that at each point in time they are directed along critical characteristics of the equation.

Keywords: mixed problem, non-stationary boundary condition, characteristic oblique derivative, classical solution, correctness criterion, smoothness requirement, matching condition.

УДК 511.42

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ С ПРИВОДИМЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Е. В. Гусева

аспирант

Институт математики Национальной академии наук Беларуси

Первой теоремой в теории диофантовых приближений явилась теорема Дирихле 1842 года. До недавнего времени основное внимание уделялось приближениям неприводимых многочленов, поскольку хорошо известен инструментарий для их изучения. В ряде задач требовалось осуществить переход от произведений неприводимых многочленов (т.е., исходных приводимых многочленов) к оценке значений одного или нескольких из них. Однако такой переход можно было осуществить не во всех задачах диофантовых приближений. В данной работе предложен новый метод получения результатов о приближениях нуля значениями приводимых многочленов. Причем результат зависит от количества неприводимых многочленов в разложении. Таким образом, получено усиление леммы Берника и Додсона, изложенной в их монографии "Metric Diophantine approximation on manifolds" (Кембридж, 1999 г.)

Статья относится к метрической теории диофантовых приближений. Основным результатом является аналог теоремы Спринджук для случая приводимых многочленов. Доказательство основано на рассмотрении некоторого делителя исходного приводимого полинома в различных случаях, описывающих соотношение между малостью данного неприводимого многочлена, его степенью и высотой.

Ключевые слова: диофантовы приближения, приводимые полиномы, теорема Спринджук, теорема Дирихле.

В этой статье исследуется классическая задача теории диофантовых приближений о разрешимости неравенств

$$|P(x)| < \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad (1)$$

в целочисленных полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2)$$

В (2) натуральное число n называется степенью полинома $n = \deg P$, а $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ – высотой $P(x)$. Корни полинома $P(x)$, действительные или комплексные, будем обозначать $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Если $(a_n, \dots, a_1, a_0) = 1$ и $P(x)$ – неприводимый полином, то будем называть его минимальным полиномом для $\alpha = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$. Уже при $n=1$ задача о разрешимости (1) имеет давнюю и глубокую историю. Для $\varepsilon_1 = Q^{-1}$, $Q \in \mathbb{N}$ и $Q > 1$. Перепишем (1) в виде

$$|qx - p| < Q^{-1}, \quad (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \quad (3)$$

или

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-1} Q^{-1}, \quad 1 \leq q \leq Q. \quad (4)$$

Еще в 1842 году Дирихле [1] доказал, что неравенства (3) и (4) разрешимы для любых $x \in \mathbb{R}$ и Q при подходящих $1 \leq q \leq Q$ и $p \in \mathbb{Z}$. Решения неравенства (3)

точные, и если $\left|x - \frac{p}{q}\right| < 2^{-1} q^{-1} Q^{-1}$, то $\frac{p}{q}$ совпадает с подходящей дробью разложения числа x в цепную дробь [2]. Неравенство $\left|x - \frac{p}{q}\right| < 3^{-1} q^{-1} Q^{-1}$ при $\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ вообще неразрешимо при $Q > Q_0$.

Теорема 1 Гурвица [2; 3]. Неравенство

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}qQ}$$

имеет для всех x бесконечное число решений в рациональных числах $\frac{p}{q}$. Если же

$x = \beta$ и $Q > Q_0(\varepsilon)$, то для всех $\frac{p}{q}$ верно неравенство

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{(\sqrt{5} + \varepsilon)qQ}.$$

Одним из самых плодотворных подходов для изучения неравенств (3) и (4) стал метрический подход. Обозначим через μB меру Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$, $c_1 = c_1(n), c_2, \dots$ – величины, зависящие от n и ε , но не зависящие от H и Q . Определим символ Виноградова $\ll$ следующим образом. Выражение $A \ll B$ равносильно выражению $A < cB$, где c – величина, зависящая от n . Пусть $\#A$ – количество элементов счетного множества A . Пусть $\Psi(x)$, $x > 0$, – монотонно убывающая функция.

Теорема 2 Хинчина [4]. Обозначим через $B_1 \subset \mathbb{R}$ множество действительных чисел из некоторого интервала $I = [a, b]$, для которых неравенство

$$|qx - p| < \Psi(q)$$

имеет бесконечное число решений в целых числах p, q . Тогда

$$\mu B_1 = \begin{cases} 0, & \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ \mu I = b - a, & \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty. \end{cases}$$

Теорема Хинчина была обобщена Малером [5] с многочленов первой степени на многочлены произвольной степени. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1} \Psi(H) \quad (5)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Малер предположил, что при $\Psi(H) = H^{-1-\varepsilon_2}$ справедливо равенство $\mu \mathcal{L}_n(\Psi) = 0$.

До 1964 года в ряде работ [6; 7; 8; 9] были получены продвижения в решении гипотезы Малера, пока Спринджук [10; 11] не доказал ее в полях действительных, комплексных и p -адических чисел.

В работах [12; 13] было получено обобщение результатов Хинчина-Малера-Спринджук.

Теорема 3. *Справедливы равенства*

$$\mu\mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu I, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases} \quad (6)$$

Сходимость в неравенствах (6) была доказана Берником [13], а расходимость – Бересневичем [12]. В монографии [14] показано, как в неравенствах (6) переходить от приводимых многочленов $P(x)$ к неприводимым.

В данной работе рассматриваются неравенства (1), (5) в полиномах $P(x)$ из класса

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}.$$

В этом случае методами [14] нельзя перейти от приводимых многочленов к неприводимым. В данной работе предлагается новый метод, позволяющий осуществить такой переход и доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Неравенство $|P(x)| < Q^{-(n-1)-\varepsilon}$ в приводимых многочленах $P(x) = t_1(x) \cdot t_2(x)$ выполняется только для $x \in B_2$, где $\mu B_2 < Q^{-\varepsilon_3}$, $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon$.*

Вначале приведем несколько лемм.

Лемма 1 [11]. *Пусть α_1 – ближайший к x корень полинома $P(x)$. Тогда*

$$|x - \alpha_1| < \begin{cases} n |P(x)| |P'(x)|^{-1}, \\ 2^n |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1}. \end{cases}$$

Лемма 2 [11]. *Если $P(x) = t_1(x) \dots t_k(x)$, то*

$$c_1 \prod_{i=1}^k H(t_i) < H(P) < c_2 \prod_{i=1}^k H(t_i).$$

Лемма 3. *Если I и J – два интервала, а для всех $x \in I \subset J$ верно $|P(x)| < Q^{-\tau}$ и $\mu I \geq \frac{1}{2} \mu J$, то для всех $x \in J$ справедливо неравенство*

$$|P(x)| < c_3 Q^{-\tau}.$$

Данное неравенство легко доказывается с помощью интерполяционной формулы Лагранжа. Лемма, аналогичная лемме 3, доказана в [15].

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{R}_n(Q)$ – множество приводимых полиномов $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ степени n и высоты Q . Тогда имеет место оценка*

$$\#\mathcal{R}_n(Q) \ll Q^n.$$

Доказательство. Докажем эту оценку для приводимых полиномов, которые являются произведением двух полиномов, то есть имеют вид $P(x) = t_1(x) \cdot t_2(x)$. Из леммы 2 заключаем, что при $\deg(t_1(x)) = n_1$, $H(t_1(x)) = Q^\lambda$, $\deg(t_2(x)) = n_2 = n - n_1$, $H(t_2(x)) < c_4 Q^{1-\lambda}$. Тогда количество полиномов $t_1(x)$ и $t_2(x)$ можно оценить следующим образом:

$$\#t_1(x) \ll Q^{\lambda(n_1+1)}, \quad \#t_2(x) \ll Q^{(1-\lambda)(n-n_1+1)}.$$

Значит, количество приводимых полиномов вида $P(x) = t_1(x) \cdot t_2(x)$ оценивается как

$$\#\mathcal{R}_n(Q) \ll Q^{\lambda(n_1+1)} \cdot Q^{(1-\lambda)(n-n_1+1)} = Q^{\lambda(n_1+1)+(1-\lambda)(n-n_1+1)}.$$

Определим функцию $f(\lambda, n_1) = \lambda(n_1 + 1) + (1 - \lambda)(n - n_1 + 1)$ и найдем ее максимум в прямоугольнике:

$$D = \begin{cases} 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 1 \leq n_1 \leq n - 1. \end{cases}$$

Для этого находим первые и вторые частные производные.

$$f'_{\lambda} = 2n_1 - n. \quad f'_{\lambda} = 0 \quad \text{при} \quad n_1 = \frac{n}{2}.$$

$$f'_{n_1} = 2\lambda - 1. \quad f'_{n_1} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$f''_{\lambda n_1} = f''_{n_1 \lambda} = 2.$$

Точка $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ – точка, подозрительная на экстремум.

$$f''_{\lambda\lambda} = 0; \quad f''_{n_1 n_1} = 0; \quad f''_{\lambda n_1} = 2; \quad f''_{\lambda\lambda} \cdot f''_{n_1 n_1} - (f''_{\lambda n_1})^2 = -4 < 0.$$

Следовательно, в точке M_0 функция $f(\lambda, n_1)$ не достигает ни минимума, ни максимума, и максимум функции достигается в некоторой точке на границе прямоугольника D .

Простые вычисления приводят к выводу о величине $\max f(\lambda, n_1)$:

$$f(0; 1) = n, \quad f(0; n-1) = 2, \quad f(1; 1) = 2, \quad f(1; n-1) = n.$$

Значит, $\max f(\lambda, n_1) = n$, и лемма 4 доказана.

Лемма 5. Если $P(x)$ разлагается на произведение трёх неприводимых полиномов, то $\#R_n(Q) \ll Q^{n-1}$.

Доказательство. Рассмотрим приводимые полиномы, являющиеся произведением трех полиномов, то есть имеющие вид $P(x) = t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot t_3(x)$. По лемме 2, снова имеем:

$$\begin{aligned} \deg(t_1(x)) &= n_1, & \deg(t_2(x)) &= n_2, & \deg(t_3(x)) &= n_3 = n - n_1 - n_2, \\ H(t_1(x)) &= Q^{\lambda_1}, & H(t_2(x)) &< c_5 Q^{\lambda_2}, & H(t_3(x)) &\leq c_6 Q^{1-\lambda_1-\lambda_2}. \end{aligned}$$

Тогда количество полиномов $t_1(x), t_2(x), t_3(x)$ можно оценить как

$$\#t_1(x) \ll Q^{\lambda_1(n_1+1)}; \quad \#t_2(x) \ll Q^{\lambda_2(n_2+1)}; \quad \#t_3(x) \ll Q^{(1-\lambda_1-\lambda_2)(n-n_1-n_2+1)}.$$

Для количества приводимых полиномов вида $P(x) = t_1(x) \cdot t_2(x) \cdot t_3(x)$ справедлива оценка:

$$\#R_n(Q) \ll Q^{\lambda_1(n_1+1)} \cdot Q^{\lambda_2(n_2+1)} \cdot Q^{(1-\lambda_1-\lambda_2)(n-n_1-n_2+1)} = Q^{\lambda_1(n_1+1)+\lambda_2(n_2+1)+(1-\lambda_1-\lambda_2)(n-n_1-n_2+1)}.$$

Введем функцию $f(\lambda_1, n_1, \lambda_2, n_2) = \lambda_1(n_1 + 1) + \lambda_2(n_2 + 1) + (1 - \lambda_1 - \lambda_2)(n - n_1 - n_2 + 1)$ и найдем ее максимум.

Для этого находим частные производные:

$$\begin{aligned} f'_{\lambda_1} &= -n + 2n_1 + n_2, & f'_{n_1} &= 2\lambda_1 - 1 + \lambda_2, \\ f'_{\lambda_2} &= -n + n_1 + 2n_2, & f'_{n_2} &= \lambda_1 + 2\lambda_2 - 1. \end{aligned}$$

Приравняем их к нулю. Решая полученную систему уравнений, находим точку, подозрительную на экстремум: $M_0\left(\frac{1}{3}, \frac{n}{3}, \frac{1}{3}, \frac{n}{3}\right)$.

Найдем частные производные второго порядка и составим из них гессиан:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 9 > 0.$$

Достаточным условием существования экстремума в точке является знакоопределенность гессиана, а именно:

- если гессиан положительно определен, то M_0 – точка локального минимума функции $f(\lambda_1, n_1, \lambda_2, n_2)$,
- если гессиан отрицательно определен, то M_0 – точка локального максимума функции $f(\lambda_1, n_1, \lambda_2, n_2)$,
- если гессиан не является знакоопределенным (принимает как положительные, так и отрицательные значения) и невырожден, то M_0 – седловая точка функции $f(\lambda_1, n_1, \lambda_2, n_2)$.

Поскольку гессиан положительно определен, M_0 является точкой локального минимума. Таким образом, максимум функции достигается в одной из вершин области D :

$$D = \{0 \leq \lambda_1 \leq 1; 0 \leq \lambda_2 \leq 1 - \lambda_1; 1 \leq n_1 \leq n - 2; 1 \leq n_2 \leq n - n_1 - 1\}.$$

Найдем значения функции в 16 таких вершинах. Ниже приведены значения четырех функций f .

$$\begin{aligned} f(0; 1; 1 - \lambda_1; n - n_1 - 1) &= n - 1; & f(0; n - 2; 1 - \lambda_1; n - n_1 - 1) &= 2; \\ f(1; 1; 1 - \lambda_1; n - n_1 - 1) &= 2; & f(1; n - 2; 1 - \lambda_1; n - n_1 - 1) &= n - 1. \end{aligned}$$

Рассмотрев все 16 вершин, находим $\max f(\lambda_1, n_1, \lambda_2, n_2) = n - 1$, что доказывает лемму 5.

Далее будем считать, что μB тех $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < Q^{-n-\varepsilon_4}$$

верно хотя бы для одного неприводимого полинома $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, не превосходит $c_7 Q^{-\varepsilon_5}$, $0 < \varepsilon_5 \leq \varepsilon$. Данное утверждение доказано в [16].

Сделаем индуктивное предположение. Если в доказательстве возникнет неравенство

$$|t_j(x)| < H(t_j)^{-s}, \quad s > \deg t_j + \varepsilon_6, \quad (7)$$

то все x , удовлетворяющие (7), могут быть покрыты системой интервалов с суммарной мерой, меньшей $Q^{-\varepsilon_7}$, $0 < \varepsilon_7 < \varepsilon_6$.

Итак, на некотором интервале $\sigma(R)$ и $R(x) = t_1(x) \cdot t_2(x)$ выполняется неравенство

$$|R(x)| < c_8 Q^{-(n-1)-\varepsilon_8}. \quad (8)$$

$\sigma(R)$ – множество решений (8). Пусть $\deg t_1 = n_1$, $H(t_1) = Q^\lambda$. Тогда $\deg t_2 = n - n_1$ и по лемме 2 справедливо $H(t_2) < c_9 Q^{1-\lambda}$. Определим $a \in \mathbb{R}$ таким образом, что неравенство

$$|t_1(x)| < Q^{-a} \quad (9)$$

выполняется на некотором интервале $I_1 \subset \sigma(R)$, $\mu I_1 > \frac{1}{2} \sigma(R)$, но уже неравенство

$$|t_1(x)| < Q^{-a-\varepsilon_9} \quad (10)$$

верно лишь на интервале $I_2 \subset \sigma(R)$, $\mu I_2 \leq \frac{1}{2} \mu \sigma(R)$. Из (9) и леммы 2 следует, что при некотором c_{10} для всех $x \in \sigma(R)$ верно неравенство

$$|t_1(x)| < c_{10} Q^{-a} \ll Q_1^{-\frac{a}{\lambda}}, \quad Q_1 = Q^\lambda. \quad (11)$$

Из (8) и (10) следует неравенство

$$|t_1(x)| > Q^{-a-\varepsilon_9}, \quad x \in \sigma(R) \setminus I_2, \quad \mu \sigma(R \setminus I_2) \geq \frac{1}{2} \mu \sigma(R),$$

и поэтому для $x \in \sigma(P) \setminus I_2$ мы имеем

$$|t_2(x)| \ll Q^{-(n-1)-\varepsilon+a+\varepsilon_{10}}, \quad \varepsilon_{10} < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда по лемме 2 для всех $x \in \sigma(P)$ верно неравенство

$$|t_2(x)| < Q^{-(n-1)-\frac{\varepsilon}{2}-\varepsilon_9} = Q^{-\frac{(n-1)+\frac{\varepsilon}{2}}{1-\lambda}}, \quad Q_2 = Q^{1-\lambda}. \quad (12)$$

Если теперь $\frac{a}{\lambda} > n_1 + \varepsilon_{10}$, то по индуктивному предположению все x из интервалов $\sigma(R)$ могут быть покрыты интервалами с суммарной мерой $Q^{-\varepsilon_{11}}$, что доказывает искомое утверждение. Аналогично при

$$\frac{n-1-a-\varepsilon_{10}}{1-\lambda} \geq n - n_1 + \varepsilon_{11}$$

все x из интервалов $\sigma(P)$ могут быть покрыты интервалами с суммарной мерой $\ll Q^{-\varepsilon_{12}}$. Следовательно, осталось доказать теорему для a , λ , n_1 , удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{cases} \frac{a}{\lambda} < n_1 + \varepsilon_{10}, \\ \frac{n-1-a-\varepsilon}{1-\lambda} < n - n_1 + \varepsilon_{11}. \end{cases} \quad (13)$$

Покажем, что система (13) несовместна. В самом деле из первого неравенства в (13) имеем

$$a < \lambda n_1 + \varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_{13} = \lambda \varepsilon. \quad (14)$$

Если выполняется второе неравенство в (13)

$$n-1-a < (1-\lambda)(n-n_1) + \varepsilon_{11}(1-\lambda),$$

то с учетом (14) получаем неравенство

$$n-1-\lambda n_1 < (1-\lambda)(n-n_1) \quad (15)$$

в области $D: \{0 \leq \lambda \leq 1, 1 \leq n_1 \leq n-1\}$.

Неравенство (15) противоречиво, что доказывает теорему.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Dirichlet, L. G. P.* Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen / L. G. P. Dirichlet // Werke I. – 1842. – P. 633–638.
2. *Касселс, Дж. В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – Москва : Изд-во Иностран. литер., 1961. – 213 с.

3. **Шмидт, В.** Диофантовы приближения / В. Шмидт. – М. : Мир. 1983. – 228 с.
4. **Khinchine, A.** Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khinchine // Mathematische Annalen. – 1924. – Vol. 92. – P. 115–125.
5. **Mahler, K.** Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106. – P. 131–139.
6. **Кубилюс, И. П.** О применении метода акад. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел / И. П. Кубилюс // ДАН СССР. – 1949. – Т. 67. – С. 783–786.
7. **LeVeque, W. J.** Note on S-numbers / W. J. LeVeque // Proc. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 4. – P. 189–190.
8. **Schmidt, W.** Bounds for certain sums; a remark on a conjecture of Mahler / W. Schmidt // Trans. Amer. Math. Soc. – 1961. – Vol. 101, no. 2. – P. 200–210.
9. **Volkman, B.** Zur metrischen Theorie der S-Zahlen, II / B. Volkman // J. reine und angew. Math. – 1963. – Vol. 213, no. 1–2. – P. 58–65.
10. **Спринджук, В. Г.** Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 379–436.
11. **Спринджук, В. Г.** Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 181 с.
12. **Beresnevich, V.** On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999. – Vol. 50, no. 2. – P. 97–112.
13. **Bernik, V. I.** The exact order of approximating zero by values of integral polynomials / V. I. Bernik // Acta Arith. – 1989. – Vol. 53, no. 1. – P. 17–28.
14. **Bernik, V. I.** Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson // Cambridge Tracts in Mathematics. – 1999. – no. 137, 172 p.
15. **Берник, В. И.** Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – Т. 44, № 1. – С. 24–45.
16. **Bernik, V. I.** Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals / V. I. Bernik, F. Götze // Izvestiya: Mathematics. – 2015. – Vol. 79, no. 1. – P. 18–39.

Поступила в редакцию 15.07.2020 г.

Контакты: elena.guseva.96@yandex.by (Гусева Елена Васильевна)

Guseva E.V. DIOPHANTINE APPROXIMATION WITH REDUCIBLE POLYNOMIALS

The first theorem in the theory of Diophantine approximation was Dirichlet's approximation theorem of 1842. Until recently, the focus of the research has been on approximation of irreducible polynomials due to a large array of the available tools and methods. In a number of problems, a transition from products of irreducible polynomials (i.e. the original reducible polynomials) to bounds for one or more of them was necessary. However, such a transition could not be realized in every problem in Diophantine approximation. This paper introduces a new approach to studying approximation of zero by values of reducible polynomials. Moreover, the result depends on the number of irreducible polynomials in the decomposition. Thus, the authors have obtained an improvement of the lemma by Bernik and Dodson (see their monograph "Metric Diophantine Approximation on Manifolds", Cambridge, 1999).

The article relates to the metric theory of Diophantine approximation. The main result is an analogue of Sprindzuk's theorem for the case of reducible polynomials. The proof is based on considering a divisor of the original reducible polynomial in a number of different cases defined by the relationship between an upper bound on its value, its degree and height.

Keywords: Diophantine approximation, reducible polynomials, Sprindzuk's theorem, Dirichlet's theorem.

УДК 517.2

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ УСТОЙЧИВОСТИ В СЛУЧАЕ КРАТНОГО ИЛИ СЛОЖНОГО ФОКУСА

Н. П. Морозов

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

И. В. Марченко

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В работе описана процедура вычисления коэффициентов устойчивости (ляпуновских величин) в случае кратного или сложного фокуса, основанная на специальном представлении полиномиальных систем [1; 2]. Для полиномиальных систем третьей степени получены основные соотношения для вычисления ляпуновских величин. Для квадратичной системы найдены значения трех ляпуновских величин, причем за счет выбора структуры коэффициентов им придан удобный для исследования вид.

Ключевые слова: квадратичная система, ляпуновские величины, состояния равновесия.

В работе [2] доказано, что система

$$\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

с непрерывно дифференцируемыми правыми частями, для которой $O(0;0)$ является состоянием равновесия, представима в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + x\bar{\sigma}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y\bar{\sigma}(x, y) \end{cases}. \quad (2)$$

Если $P(x, y) = \sum_{m=1}^n P_k(x, y)$, $Q(x, y) = \sum_{m=1}^n Q_k(x, y)$ многочлены степени n , представленные в виде многочленов Тейлора

$$P_k(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k C_k^m a_{k-m, m} x^{k-m} y^m, \quad (3)$$

$$Q_k(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k C_k^m b_{k-m, m} x^{k-m} y^m, \quad (4)$$

$$a_{k-m, m} = \frac{\partial^k P(0,0)}{\partial x^{k-m} \partial y^m}, \quad b_{k-m, m} = \frac{\partial^k Q(0,0)}{\partial x^{k-m} \partial y^m}, \quad (5)$$

то гамильтониан $H(x, y)$ (см. [1]) в системе (2) выражается через $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ следующим образом:

$$H(x, y) = \sum_{k=1}^n h_{k+1}(x, y), \quad h_{k+1}(x, y) = \frac{yP_k(x, y) - xQ_k(x, y)}{(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} (a_{0k} y^{k+1} - b_{k0} x^{k+1} + \sum_{m=1}^k C_k^{m-1} \frac{\mu_{k-m, m-1}}{m} x^{k-m+1} y^m),$$

а величина $\bar{\sigma}(x, y)$ выражается через дивергенцию системы (1) соотношениями

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(x, y) &= \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_{k-1}(x, y), \quad \bar{\sigma}_{k-1}(x, y) = \frac{1}{k+1} \left(\frac{\partial P_k(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_k(x, y)}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{k}{(k+1)!} \sum_{m=1}^k C_{k-1}^{m-1} \sigma_{k-m, m-1} x^{k-m} y^{m-1} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mu_{k-m, m-1} = m a_{k-m+1, m-1} - (k-m+1) b_{k-m, m} \quad (7)$$

$$\sigma_{k-m, m-1} = a_{k-m+1, m-1} + b_{k-m, m}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, k}. \quad (8)$$

Гамильтониан $H(x, y)$ будем называть естественным гамильтонианом системы (1). Он однозначно определяется по правым частям системы (1). В [1; 2] также показано, что вид системы (2) инвариантен относительно невырожденных линейных преобразований $x = \alpha u + \beta v$, $y = \gamma u + \delta v$, а именно система приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \bar{H}}{\partial v} + u \sigma(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v) \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \bar{H}}{\partial u} + v \sigma(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta = (\alpha\delta - \beta\gamma)$, $\bar{H} = H(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$. Учитывая это свойство, преобразуем систему (2) так, чтобы квадратичная часть гамильтониана оказалась равной $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Это возможно при условии $D = \frac{1}{4}\mu_{00}^2 + a_{01}b_{10} < 0$ с помощью линейного невырожденного преобразования [1; 2].

$$x = \alpha u + k \left(\frac{\mu_{00}}{2} \alpha + a_{01} \gamma \right) v, \quad y = \gamma u + k \left(b_{10} \alpha - \frac{\mu_{00}}{2} \gamma \right) v$$

с определителем преобразования

$$\Delta = -2kh_2(\alpha, \gamma) = k(b_{10} \alpha^2 - \mu_{00} \alpha \gamma - a_{01} \gamma^2) \neq 0$$

при произвольных α, γ и $k = -\frac{1}{\sqrt{|D|}}$. При этом будем иметь

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \bar{H}}{\partial v} (u, v) + u \bar{\sigma}(u, v),$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \bar{H}}{\partial u} (u, v) + u \bar{\sigma}(u, v),$$

$$\bar{a}_{02} = \frac{6h_3(\beta, \delta)}{h_2(\alpha, \gamma)}, \quad \bar{\mu}_{01} = 6 \frac{(a \frac{\partial h_3(\beta, \delta)}{\partial x} + \gamma \frac{\partial h_3(\beta, \delta)}{\partial y})}{h_2(\alpha, \gamma)}, \quad \bar{\mu}_{10} = 3 \frac{(\beta \frac{\partial h_3(\alpha, \gamma)}{\partial x} + \delta \frac{\partial h_3(\alpha, \gamma)}{\partial y})}{h_2(\alpha, \gamma)},$$

$\bar{b}_{20} = -\frac{3h_3(\alpha, \gamma)}{h_2(\alpha, \gamma)}$, $\beta = k \left(\frac{\mu_{00}}{2} \alpha + a_{01} \gamma \right)$, $\delta = k \left(b_{10} \alpha - \frac{\mu_{00}}{2} \gamma \right)$, α, γ произвольны, $\bar{\sigma}(u, v) = \sigma(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$.

В связи с этим будем считать, что система (2) изначально имеет нужный вид, т.е. $h_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$. В рассматриваемом случае состояние равновесия $O(0,0)$ для гамильтоновой системы является центром, а естественный гамильтониан в области центра является положительно определенной функцией Ляпунова. Производная естественного гамильтониана в силу система (2) имеет вид

$$\frac{dH}{dt} = \bar{\sigma}(x, y) \left(x \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \right). \quad (10)$$

Положим $V(x, y) = x \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$ и обозначим

$$D = \{(x, y) | V(x, y) > 0\}, \Gamma_D = \{(x, y) | V(x, y) = 0, (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

Между H и V имеет место связь $V(x, y) = \sum_{k=1}^n (k+1) h_{k+1}(x, y)$.

Область центра гамильтоновой системы расположена в области D и состояния равновесия системы (2) и гамильтоновой системы, отличные от $O(0,0)$ (если такие существуют), расположены на границе области D , т.е. на кривых $V(x, y) = 0$.

Учитывая, что

$$\rho^2 \dot{\varphi} = -\left(x \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)\right),$$

то с учетом (10) в области D система (2) равносильна одному уравнению

$$\frac{dH}{d\varphi} = -\rho^2 \bar{\sigma}(x, y). \quad (11)$$

Положим

$$\frac{1}{2} R^2 = H = \sum_{k=1}^n \rho^{k+1} h_{k+1}(\cos \varphi, \sin \varphi), \quad (12)$$

где

$$h_{k+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) = \frac{1}{(k+1)!} \left(a_{0k} \sin^{k+1} \varphi + \sum_{m=0}^{k-1} C_k^m \frac{\mu_{k-m-1, m}}{m+1} \cos^{k-m} \varphi \sin^{m+1} \varphi - b_{k0} \cos^{k+1} \varphi \right),$$

в частности,

$$h_3(\cos \varphi, \sin \varphi) = \frac{1}{6} (a_{02} \sin^3 \varphi + \mu_{10} \cos^2 \varphi \sin \varphi + \mu_{01} \cos \varphi \sin^2 \varphi - b_{20} \cos^3 \varphi),$$

$$h_4(\cos \varphi, \sin \varphi) = \frac{1}{24} \left(a_{03} \sin^4 \varphi + \mu_{20} \cos^3 \varphi \sin \varphi + \frac{3}{2} \mu_{11} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \mu_{02} \cos \varphi \sin^3 \varphi - b_{30} \cos^4 \varphi \right), \quad 2h_2(\cos \varphi, \sin \varphi) = 1.$$

Пусть $\rho = \rho(\varphi, \varphi_0, \rho_0)$, $\rho(\varphi_0, \varphi_0, \rho_0) = \rho_0$ полярные уравнения траекторий системы (2) вблизи состояния равновесия $O(0,0)$. Рассмотрим отображение Пуанкаре луча $\varphi = \varphi_0$ в себя $p(\varphi_0, \rho_0) = \rho_0 - \rho(2\pi, \varphi_0, \rho_0)$. Положим

$$R(\rho, \varphi) = \sqrt{2H(\rho, \varphi)}, R(\varphi, \varphi_0, R_0) = R(\rho(\varphi, \varphi_0, \rho_0), \varphi),$$

где $R(\varphi_0, \varphi_0, R_0) = R(\rho(\varphi_0, \varphi_0, \rho_0), \varphi_0) = R(\rho_0, \varphi_0) = R_0$ и

$$P(\varphi_0, R_0) = R_0 - R(2\pi, \varphi_0, R_0). \quad (13)$$

Имеет место следующее соотношение:

$$p(\varphi_0, \rho_0) = P(\varphi_0, R_0)a(\varphi_0, \rho_0),$$

где $a(\varphi_0, \rho_0) > 0$ при достаточно малых ρ_0 и $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$.

Действительно, обозначим для сокращения записей

$$\rho_1 = \rho(2\pi, \varphi_0, \rho_0), R_1 = R(2\pi, \varphi_0, \rho_0).$$

Из (13) находим

$$\begin{aligned} R_0^2 - R_1^2 &= \sum_{k=1}^n (\rho_0^{k+1} - \rho_1^{k+1}) d_{k+1} = (\rho_0 - \rho_1) \sum_{k=1}^n s_k d_{k+1} = \\ &= (\rho_0 - \rho_1) B(\varphi_0, \rho_0), \end{aligned}$$

$$B(\varphi_0, \rho_0) = \sum_{k=1}^n s_k d_{k+1}, d_{k+1} = h_{k+1}(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0),$$

$$s_k = \sum_{i=0}^k \rho_0^{k-i} \rho_1^i, k = \overline{1, n}.$$

При достаточно малых ρ_0 знак $B(\varphi_0, \rho_0)$ определяется знаком первого слагаемого $s_1 d_2 = \rho_0 + \rho_1 > 0$, то $B(\varphi_0, \rho_0) > 0$ при достаточно малых ρ_0 и $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$p(\varphi_0, \rho_0) = P(\varphi_0, R_0)a(\varphi_0, \rho_0), \text{ где } a(\varphi_0, \rho_0) = \frac{R_1 + R_0}{B(\varphi_0, \rho_0)} > 0.$$

Описание алгоритма отыскания $P(\varphi_0, R_0)$ ($n=3$)

В области D (и в области центра гамильтоновой системы) уравнение

$$\frac{1}{2} R^2 = \sum_{k=1}^n \rho^{k+1} h_{k+1}(\cos \varphi, \sin \varphi) \quad (14)$$

при каждом φ разрешимо относительно ρ , так как

$$V(x, y) = \rho \frac{\partial H}{\partial \rho} (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) > 0.$$

Будем искать ρ в виде ряда $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} r_k (\cos \varphi, \sin \varphi) R^k$, где r_k – неизвестные многочлены.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= r_1^2 R^2 + 2r_1 r_2 R^3 + (2r_1 r_3 + r_2^2) R^4 + 2(r_1 r_4 + r_2 r_3) R^5 + \\ &+ (2(r_1 r_5 + r_2 r_4) + r_3^2) R^6 + (2(r_1 r_6 + r_2 r_5 + r_3 r_4) R^7 + \end{aligned}$$

$$+(2(r_1r_7 + r_2r_6 + r_3r_5) + r_4^2)R^8 + 2(r_1r_8 + r_2r_7 + r_3r_6 + r_5r_4)R^9 + +(2(r_1r_9 + r_2r_8 + r_3r_7 + r_4r_6) + r_5^2)R^{10},$$

$$\begin{aligned} \rho^3 = & r_1^3 R^3 + 3r_1^2r_2 R^4 + 3(r_1^2r_3 + r_1r_2^2)R^5 + (3r_1^2r_4 + 6r_1r_2r_3 + r_2^3)R^6 + \\ & +(3r_1^2r_5 + 6r_1r_2r_4 + 3r_1r_3^2 + 3r_2^2r_3)R^7 + (3r_1^2r_6 + 6r_1r_2r_5 + 6r_1r_3r_4 + 3r_4r_2^2 + \\ & 3r_3^2r_2)R^8 + (3r_1^2r_7 + 6r_1r_2r_6 + 6r_1r_3r_5 + 6r_2r_3r_4 + 3r_5r_2^2 + 3r_4^2r_1)R^9 + +(3r_1^2r_8 + \\ & 6r_1r_2r_7 + 6r_1r_3r_6 + 6r_2r_3r_5 + 6r_1r_4r_5 + 3r_4r_3^2 + 3r_6r_2^2 + 3r_4^2r_2)R^{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^4 = & r_1^4 R^4 + 4r_1^3r_2 R^5 + (4r_1^3r_3 + 6r_1^2r_2^2)R^6 + (4r_1^3r_4 + 12r_1^2r_2r_3 + \\ & + 4r_1r_2^3)R^7 + (4r_1^3r_5 + 6r_1^2r_2^2 + 12r_1^2r_2r_4 + 12r_2^2r_1r_3 + r_2^4)R^8 + 4(r_1^3r_6 + \\ & + 3r_1^2r_2r_5 + 3r_1^2r_3r_4 + 3r_2^2r_1r_4 + 3r_3^2r_1r_2 + r_3r_2^3)R^9 + (4r_1^3r_7 + 6r_1^2r_4^2 + \\ & + 12r_1^2r_2r_6 + 12r_1^2r_3r_5 + 12r_2^2r_1r_5 + 24r_2r_3r_4 + 4r_3^3 + 4r_2^3r_4 + 6r_2^2r_3^2)R^{10}. \end{aligned}$$

Подставив ρ , ρ^2 , ρ^3 , ρ^4 в (14), получим для определения коэффициентов r_k тождественное равенство (для системы с многочленами третьей степени в правых частях)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}R^2 \equiv & h_2r_1^2 R^2 + (2h_2r_1r_2 + h_3r_1^3)R^3 + (h_2(2r_1r_3 + r_2^2) + 3h_3r_1^2r_2 + h_4r_1^4)R^4 + \\ & +(2h_2(r_1r_4 + r_2r_3) + 3h_3(r_1^2r_3 + r_1r_2^2) + 4h_4r_1^3r_2)R^5 + (h_2(2(r_1r_5 + r_2r_4) + r_3^2) + \\ & h_3(3r_1^2r_4 + 6r_1r_2r_3 + r_2^3) + h_4(4r_1^3r_3 + 6r_1^2r_2^2))R^6 + +(2h_2(r_1r_6 + r_2r_5 + r_3r_4) + \\ & 3h_3(r_1^2r_5 + 2r_1r_2r_4 + r_1r_3^2 + r_2^2r_3) + 4h_4(r_1^3r_4 + 3r_1^2r_2r_3 + r_1r_2^3))R^7 + (h_2(2 \cdot \\ & (r_1r_7 + r_2r_6 + r_3r_5) + r_4^2) + 3h_3(r_1^2r_6 + 2r_1r_2r_5 + 2r_1r_3r_4 + r_4r_2^2 + r_3^2r_2) + \\ & h_4(4r_1^3r_5 + 6r_1^2r_3^2 + 12r_1^2r_2r_4 + 12r_2^2r_1r_3 + r_2^4))R^8 + (2h_2(r_1r_8 + r_2r_7 + r_3r_6 + \\ & r_5r_4) + 3h_3(r_1^2r_7 + 2r_1r_2r_6 + 2r_1r_3r_5 + 2r_2r_3r_4 + r_5r_2^2 + r_4^2r_1) + 4h_4(r_1^3r_6 + \\ & 3r_1^2r_2r_5 + 3r_1^2r_3r_4 + 3r_2^2r_1r_4 + 3r_3^2r_1r_2 + r_3r_2^3))R^9 + (h_2(2(r_1r_9 + r_2r_8 + r_3r_7 + \\ & r_4r_6) + r_5^2) + 3h_3(r_1^2r_8 + 2r_1r_2r_7 + 2r_1r_3r_6 + 2r_2r_3r_5 + 2r_1r_4r_5 + r_4r_3^2 + r_6r_2^2 + \\ & r_4^2r_2) + h_4(4r_1^3r_7 + 6r_1^2r_4^2 + 12r_1^2r_2r_6 + 12r_1^2r_3r_5 + 12r_2^2r_1r_5 + 24r_2r_3r_4 + 4r_3^3 + \\ & 4r_2^3r_4 + 6r_2^2r_3^2))R^{10} + \dots \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при R^2 в левой и правой частях этого равенства и положив равными нулю коэффициенты при остальных степенях R , получим для определения коэффициентов r_k систему

$$h_2r_1^2 = \frac{1}{2},$$

$$2r_2 + h_3 = 0,$$

$$2r_3 + r_2^2 + 3h_3r_2 + h_4 = 0,$$

$$(2(r_4 + r_2r_3) + 3h_3(r_3 + r_2^2) + 4h_4r_2 = 0,$$

$$(2(r_5 + r_2r_4) + r_3^2) + h_3(3r_4 + 6r_2r_3 + r_2^3) + h_4(4r_3 + 6r_2^2) = 0,$$

$$(2(r_6 + r_2r_5 + r_3r_4) + 3h_3(r_5 + 2r_2r_4 + r_3^2 + r_2^2r_3) + 4h_4(r_4 + 3r_2r_3 + r_2^3) = 0,$$

$$2(r_7 + r_2 r_6 + r_3 r_5) + r_4^2 + 3h_3(r_6 + 2r_2 r_5 + 2r_3 r_4 + r_4 r_2^2 + r_3^2 r_2) + h_4(4r_5 + 6r_3^2 + 12r_2 r_4 + 12r_2^2 r_3 + r_2^4) = 0,$$

$$2(r_8 + r_2 r_7 + r_3 r_6 + r_5 r_4) + 3h_3(r_7 + 2r_2 r_6 + 2r_3 r_5 + 2r_2 r_3 r_4 + r_5 r_2^2 + r_4^2) + 4h_4(r_6 + 3r_2 r_5 + 3r_3 r_4 + 3r_2^2 r_4 + 3r_3^2 r_2 + r_3 r_2^3) = 0,$$

$$2(r_9 + r_2 r_8 + r_3 r_7 + r_4 r_6) + r_5^2 + 3h_3(r_8 + 2r_2 r_7 + 2r_3 r_6 + 2r_2 r_3 r_5 + 2r_4 r_5 + r_4 r_3^2 + r_6 r_2^2 + r_4^2 r_2) + h_4(4r_7 + 6r_4^2 + 12r_2 r_6 + 12r_3 r_5 + 12r_2^2 r_5 + 24r_2 r_3 r_4 + 4r_3^3 + 4r_2^3 r_4 + 6r_2^2 r_3^2) = 0, \dots$$

Из этой системы последовательно находим

$$h_2 = \frac{1}{2}, r_1 = 1,$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} h_3$$

$$r_3 = \frac{5}{8} h_3^2 - \frac{1}{2} h_4,$$

$$r_4 = -h_3^3 + \frac{3}{2} h_3 h_4,$$

$$r_5 = \frac{231}{128} h_3^4 - \frac{63}{16} h_4 h_3^2 + \frac{7}{8} h_4^2,$$

$$r_6 = -\frac{7}{2} h_3^5 + 10 h_4 h_3^3 - 5 h_4^2 h_3,$$

$$r_7 = \frac{7293}{1024} h_3^6 - \frac{6435}{256} h_4 h_3^4 + \frac{1287}{64} h_4^2 h_3^2 - \frac{33}{16} h_4^3,$$

$$r_8 = \frac{1}{2} (-30 h_3^7 + 128 h_3^5 h_4 - 140 h_3^3 h_4^2 + 35 h_3 h_4^3),$$

$$r_9 = \frac{143}{32768} (7429 h_3^8 - 36176 h_3^6 h_4 + 51680 h_3^4 h_4^2 - 21760 h_3^2 h_4^3 + 1280 h_4^4), \dots$$

Преобразуем теперь к новым переменным уравнение (11). Учитывая, что $2H = R^2$, уравнение (12) принимает вид

$$-R \frac{dR}{d\varphi} = \sigma_0 \rho^2 + \sigma_1 \rho^3 + \sigma_2 \rho^4,$$

$$\text{где } \sigma_0 = \frac{\sigma_{00}}{2}, \sigma_1 = \frac{1}{3} (\sigma_{10} \cos \varphi + \sigma_{01} \sin \varphi),$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{8} (\sigma_{20} \cos^2 \varphi + 2\sigma_{11} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{02} \sin^2 \varphi).$$

Подставив $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} r_k (\cos \varphi, \sin \varphi) R^k$, получим уравнение

$$-\frac{dR}{d\varphi} = a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^3 + a_4 R^4 + a_5 R^5 + a_6 R^6 + a_7 R^7 + a_8 R^8 + a_9 R^9 + \dots,$$

где

$$a_1 = \sigma_0,$$

$$a_2 = -h_3 \sigma_0 + \sigma_1,$$

$$a_3 = \sigma_0 \left(\frac{3}{2} h_3^2 - h_4 \right) - \frac{3}{2} \sigma_1 h_3 + \sigma_2,$$

$$a_4 = \sigma_0 \left(-\frac{21}{8} h_3^3 + \frac{7}{2} h_3 h_4 \right) + 3 \sigma_1 \left(\frac{7}{8} h_3^2 - \frac{1}{2} h_4 \right) - 2 h_3 \sigma_2,$$

$$a_5 = \sigma_0 (5 h_3^4 - 10 h_4 h_3^2 + 2 h_4^2) + \sigma_1 (-5 h_3^3 + 6 h_3 h_4) + \sigma_2 (4 h_3^2 - 2 h_4),$$

$$a_6 = \sigma_0 \left(-\frac{1287}{128} h_3^5 + \frac{429}{16} h_4 h_3^3 - \frac{99}{8} h_4^2 h_3 \right) + \sigma_1 \left(\left(\frac{1287}{128} h_3^4 - \frac{297}{16} h_4 h_3^2 + \frac{27}{8} h_4^2 \right) \right) + \sigma_2 \left(-\frac{33}{4} h_3^3 + 9 h_3 h_4 \right),$$

$$a_7 = \sigma_0 (21 h_3^6 - 70 h_4 h_3^4 + \frac{105}{2} h_4^2 h_3^2 - 5 h_4^3) + \sigma_1 \left(-21 h_3^5 + \frac{105}{2} h_4 h_3^3 - \frac{45}{2} h_4^2 h_3 \right) + \sigma_2 \left(\frac{35}{2} h_3^4 - 30 h_4 h_3^2 + 5 h_4^2 \right),$$

$$a_8 = -\frac{143}{1024} \left(\sigma_0 (323 h_3^7 - 1292 h_3^5 h_4 + 1360 h_3^3 h_4^2 - 320 h_3 h_4^3) + \sigma_1 (-323 h_3^6 + 1020 h_3^4 h_4 - 720 h_3^2 h_4^2 + 64 h_4^3) + \sigma_2 (272 h_3^5 - 640 h_3^3 h_4 + 256 h_3 h_4^2) \right),$$

$$a_9 = \sigma_0 (99 h_3^8 - 462 h_3^6 h_4 + 630 h_3^4 h_4^2 - 252 h_3^2 h_4^3 + 14 h_4^4) + \sigma_1 (-99 h_3^7 + 378 h_3^5 h_4 - 378 h_3^3 h_4^2 + 84 h_3 h_4^3) + \sigma_2 (84 h_3^6 - 252 h_3^4 h_4 + 168 h_3^2 h_4^2 - 14 h_4^3),$$

...

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$R(\varphi, R_0) = b_1 R_0 + b_2 R_0^2 + b_3 R_0^3 + b_4 R_0^4 + b_5 R_0^5 + b_6 R_0^6 + b_7 R_0^7 + b_8 R_0^8 + b_9 R_0^9 + \dots$$

при условии $R(0, R_0) = R_0$. Отсюда следует $b_1(0) = 1$, $b_k(0) = 0$, для $k > 1$.

$$\begin{aligned} -\frac{dR}{d\varphi} = & a_1 b_1 R_0 + (a_2 b_1^2 + a_1 b_2) R_0^2 + (a_3 b_1^3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_1 b_3) R_0^3 + (a_4 b_1^4 + \\ & + 3a_3 b_1^2 b_2 + a_2 (2b_3 b_1 + b_2^2) + a_1 b_4) R_0^4 + (a_5 b_1^5 + 4a_4 b_1^3 b_2 + 3a_3 (b_1^2 b_3 + \\ & + b_1 b_2^2) + 2a_2 (b_4 b_1 + b_3 b_2) + a_1 b_5) R_0^5 + (a_6 b_1^6 + 5a_5 b_1^4 b_2 + a_4 (2b_1^2 (2b_3 b_1 + \\ & + b_2^2) + 4b_2^2 b_1^2) + a_3 (3b_1^2 b_4 + 6b_1 b_2 b_3 + b_2^3) + a_2 (2(b_5 b_1 + b_4 b_2) + b_3^2) + \\ & + a_1 b_6) R_0^6 + (a_7 b_1^7 + 6a_6 b_1^5 b_2 + 5a_5 (b_3 b_1^4 + 2b_2^2 b_1^3) + 4a_4 ((b_4 b_1^3 + 3b_1^2 b_3 b_2 + \\ & + b_1 b_2^3) + a_3 (3b_3 b_2^2 + 3b_1 b_3^2 + 6b_1 b_2 b_4 + 3b_1^2 b_5) + 2a_2 (b_6 b_1 + b_5 b_2 + \\ & + b_4 b_3) + a_1 b_7) R_0^7 + \dots \end{aligned}$$

Для отыскания b_k получим систему

$$-\frac{db_1}{d\varphi} = a_1 b_1, \quad a_1 = \sigma_0, \quad b_1(0) = 1, \quad b_1(\varphi) = e^{-\frac{\sigma_0 \varphi}{2}},$$

$$-\frac{db_2}{d\varphi} = a_2 b_1^2 + a_1 b_2,$$

$$-\frac{db_3}{d\varphi} = a_3 b_1^3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_1 b_3,$$

$$\begin{aligned}
-\frac{db_4}{d\varphi} &= a_4 b_1^4 + 3a_3 b_1^2 b_2 + a_2 (2b_3 b_1 + b_2^2) + a_1 b_4, \\
-\frac{db_5}{d\varphi} &= a_5 b_1^5 + 4a_4 b_1^3 b_2 + 3a_3 (b_1^2 b_3 + b_1 b_2^2) + 2a_2 (b_4 b_1 + b_3 b_2) + a_1 b_5, \\
-\frac{db_6}{d\varphi} &= a_6 b_1^6 + 5a_5 b_1^4 b_2 + a_4 (4b_1^3 b_3 + 6b_2^2 b_1^2) + a_3 (3b_1^2 b_4 + 6b_1 b_2 b_3 + b_2^3) + \\
&+ a_2 (2(b_5 b_1 + b_4 b_2) + b_3^2) + a_1 b_6, \\
-\frac{db_7}{d\varphi} &= a_7 b_1^7 + 6a_6 b_1^5 b_2 + 5a_5 (b_3 b_1^4 + 2b_2^2 b_1^3) + 4a_4 (b_4 b_1^3 + 3b_1^2 b_3 b_2 + b_1 b_2^3) + \\
&+ a_3 (3b_3 b_2^2 + 3b_1 b_3^2 + 6b_1 b_2 b_4 + 3b_1^2 b_5) + 2a_2 (b_6 b_1 + b_5 b_2 + b_4 b_3) + a_1 b_7, \\
-\frac{db_8}{d\varphi} &= a_8 b_1^8 + 7a_7 b_1^6 b_2 + 3a_6 (5b_2^2 b_1^4 + 2b_3 b_1^5) + 5a_5 ((b_4 b_1^4 + 4b_1^3 b_3 b_2 + \\
&+ 2b_1^2 b_2^3) + a_4 (b_4^4 + 12b_1 b_3 b_2^2 + 6b_1^2 b_3^2 + 12b_1^2 b_2 b_4 + 4b_1^3 b_5) + 3a_3 (b_6 b_1^2 + \\
&+ 2b_1 b_5 b_2 + 2b_1 b_4 b_3 + b_2^2 b_4 + b_2 b_3^2) + a_2 (2b_6 b_2 + b_4^2 + 2b_5 b_3 + 2b_7 b_1) + \\
&+ a_1 b_8, \\
-\frac{db_9}{d\varphi} &= a_9 b_1^9 + 8a_8 b_1^7 b_2 + 7a_7 (3b_2^2 b_1^5 + b_3 b_1^6) + 2a_6 ((3b_4 b_1^5 + 15b_1^4 b_3 b_2 + \\
&+ 10b_1^3 b_2^3) + 5a_5 (b_1 b_4^4 + 6b_1^2 b_3 b_2^2 + 2b_1^3 b_3^2 + 4b_1^3 b_2 b_4 + b_1^4 b_5) + 4a_4 (b_6 b_1^3 + \\
&+ b_2^3 b_3 + 3b_1 b_3^2 b_2 + 3b_1 b_4 b_2^2 + 3b_1^2 b_4 b_3 + 3b_2 b_1^2 b_5) + a_3 (6b_6 b_2 b_1 + b_3^3 + \\
&+ 6b_2 b_3 b_4 + 3b_1 b_4^2 + 3b_5 b_2^2 + 6b_1 b_3 b_5 + 3b_7 b_1^2) + 2a_2 (b_6 b_3 + b_4 b_5 + b_2 b_7 + \\
&+ b_8 b_1) + a_1 b_9, \\
-\frac{db_{10}}{d\varphi} &= a_{10} b_1^{10} + 9a_9 b_1^8 b_2 + 4a_8 (7b_2^2 b_1^6 + 2b_3 b_1^7) + 7a_7 (b_4 b_1^6 + 6b_1^5 b_3 b_2 + \\
&+ 5b_1^4 b_2^3) + 3a_6 (5b_1^2 b_4^2 + 20b_1^3 b_3 b_2^2 + 5b_1^4 b_3^2 + 10b_1^4 b_2 b_4 + 2b_1^5 b_5) + a_5 (5b_6 b_1^4 + \\
&+ b_2^5 + 20b_1 b_2^3 b_3 + 20b_1^3 b_5 b_2 + 20b_1^3 b_4 b_3 + 30b_1^2 b_2^2 b_4 + 30b_1^2 b_2 b_3^2) + \\
&+ 2a_4 (6b_6 b_2 b_1^2 + 3b_2^2 b_3^2 + 2b_1 b_3^3 + 2b_2^2 b_4 + 12b_1 b_2 b_3 b_4 + 3b_1^2 b_4^2 + 6b_1 b_2^2 b_5 + \\
&+ 6b_1^2 b_3 b_5 + 2b_7 b_1^3) + 3a_3 (b_6 b_2^2 + 2b_6 b_3 b_1 + b_3^2 b_4 + b_2 b_4^2 + 2b_2 b_3 b_5 + \\
&+ 2b_1 b_4 b_5 + 2b_1 b_7 b_2 + b_1^2 b_8) + a_2 (2b_6 b_4 + b_5^2 + 2b_7 b_3 + 2b_8 b_2 + 2b_1 b_9) + \\
&+ a_1 b_{10}.
\end{aligned}$$

Подставляя сюда $a_k(\varphi)$, из этой системы последовательно находим $b_i(\varphi)$.

$$\begin{aligned}
-\frac{db_1}{d\varphi} &= \sigma_0 b_1, \quad a_1 = \sigma_0, \\
-\frac{db_2}{d\varphi} &= (-h_3 \sigma_0 + \sigma_1) b_1^2 + \sigma_0 b_2, \\
-\frac{db_3}{d\varphi} &= \left(\sigma_0 \left(\frac{3}{2} h_3^2 - h_4 \right) - \frac{3}{2} \sigma_1 h_3 + \sigma_2 \right) b_1^3 + 2(-h_3 \sigma_0 + \sigma_1) b_1 b_2 + \sigma_0, \\
-\frac{db_4}{d\varphi} &= \left(\sigma_0 \left(-\frac{21}{8} h_3^3 + \frac{7}{2} h_3 h_4 \right) + 3\sigma_1 \left(\frac{7}{8} h_3^2 - \frac{1}{2} h_4 \right) - 2h_3 \sigma_2 \right) b_1^4 + 3 \left(\sigma_0 \left(\frac{3}{2} h_3^2 - h_4 \right) - \right. \\
&\left. - \frac{3}{2} \sigma_1 h_3 + \sigma_2 \right) b_1^2 b_2 + (-h_3 \sigma_0 + \sigma_1) (2b_3 b_1 + b_2^2) + \sigma_0 b_4, \\
-\frac{db_5}{d\varphi} &= \left(\sigma_0 (5h_3^4 - 10h_4 h_3^2 + 2h_4^2) + \sigma_1 (-5h_3^3 + 6h_3 h_4) + \sigma_2 (4h_3^2 - 2h_4) \right) b_1^5 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4(\sigma_0(-\frac{21}{8}h_3^3 + \frac{7}{2}h_3h_4) + 3\sigma_1(\frac{7}{8}h_3^2 - \frac{1}{2}h_4) - 2h_3\sigma_2)b_1^3b_2 + 3(\sigma_0(\frac{3}{2}h_3^2 - h_4) - \\
& - \frac{3}{2}\sigma_1h_3 + \sigma_2)(b_1^2b_3 + b_1b_2^2) + 2(-h_3\sigma_0 + \sigma_1)(b_4b_1 + b_3b_2) + \sigma_0b_5, \\
& - \frac{db_6}{d\varphi} = (\sigma_0(-\frac{1287}{128}h_3^5 + \frac{429}{16}h_4h_3^3 - \frac{99}{8}h_4^2h_3) + \sigma_1((\frac{1287}{128}h_3^4 - \frac{297}{16}h_4h_3^2 + \frac{27}{8}h_4^2)) + \\
& + \sigma_2(-\frac{33}{4}h_3^3 + 9h_3h_4))b_1^6 + 5(\sigma_0(5h_3^4 - 10h_4h_3^2 + 2h_4^2) + \sigma_1(5h_3^3 + 6h_3h_4) + \\
& + \sigma_2(4h_3^2 - 2h_4))b_1^4b_2 + (\sigma_0(-\frac{21}{8}h_3^3 + \frac{7}{2}h_3h_4) + 3\sigma_1(\frac{7}{8}h_3^2 - \frac{1}{2}h_4) - \\
& - 2h_3\sigma_2)(2b_1^2(2b_3b_1 + b_2^2) + 4b_2^2b_1^2) + (\sigma_0(\frac{3}{2}h_3^2 - h_4) - \frac{3}{2}\sigma_1h_3 + \sigma_2)(3b_1^2b_4 + \\
& + 4b_1b_2b_3 + b_2^3) + (-h_3\sigma_0 + \sigma_1)(2(b_5b_1 + b_4b_2) + b_3^2) + \sigma_0b_6, \\
& - \frac{db_7}{d\varphi} = (\sigma_0(21h_3^6 - 70h_4h_3^4 + \frac{105}{2}h_4^2h_3^2 - 5h_4^3) + \sigma_1(-21h_3^5 + \frac{105}{2}h_4h_3^3 - \\
& - \frac{45}{2}h_4^2h_3) + \sigma_2(\frac{35}{2}h_3^4 - 30h_4h_3^2 + 5h_4^2))b_1^7 + 6(\sigma_0(-\frac{1287}{128}h_3^5 + \frac{429}{16}h_4h_3^3 - \frac{99}{8}h_4^2h_3) + \\
& + \sigma_1((\frac{1287}{128}h_3^4 - \frac{297}{16}h_4h_3^2 + \frac{27}{8}h_4^2)) + \sigma_2(-\frac{33}{4}h_3^3 + 9h_3h_4))b_1^5b_2 + 5(\sigma_0(5h_3^4 - \\
& - 10h_4h_3^2 + 2h_4^2) + \sigma_1(5h_3^3 + 6h_3h_4) + \sigma_2(4h_3^2 - 2h_4))(b_3b_1^4 + 2b_2^2b_1^3) + \\
& + 4(\sigma_0(-\frac{21}{8}h_3^3 + \frac{7}{2}h_3h_4) + 3\sigma_1(\frac{7}{8}h_3^2 - \frac{1}{2}h_4) - 2h_3\sigma_2)((b_4b_1^3 + 3b_1^2b_3b_2 + b_1b_2^3) + \\
& + (\sigma_0(\frac{3}{2}h_3^2 - h_4) - \frac{3}{2}\sigma_1h_3 + \sigma_2)(3b_3b_2^2 + 3b_1b_3^2 + 6b_1b_2b_4 + 3b_1^2b_5) + \\
& + 2(-h_3\sigma_0 + \sigma_1)(b_6b_1 + b_5b_2 + b_4b_3) + \sigma_0b_7.
\end{aligned}$$

В данном исследовании мы ограничились седьмой степенью R_0 . Этого достаточно, чтобы найти три ляпуновские величины для квадратичной системы.

Вернемся теперь к преобразованию Пуанкаре (13) при $\varphi_0 = 0$

$$P(R_0) = P(0, R_0) = R_0 - R(2\pi, R_0).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
P(R_0) = (1 - e^{-\pi\sigma_{00}})R_0 - (b_2(2\pi)R_0^2 + b_3(2\pi)R_0^3 + b_4(2\pi)R_0^4 + b_5(2\pi)R_0^5 + \\
+ b_6(2\pi)R_0^6 + b_7(2\pi)R_0^7 + b_8(2\pi)R_0^8 + b_9(2\pi)R_0^9 + \dots). \quad (15)
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что, как и в теореме Ляпунова, коэффициенты при четных степенях R_0 $b_{2k}(2\pi) = 0$. Тогда

$$P(R_0) = (1 - e^{-\pi\sigma_{00}}) - (b_3(2\pi)R_0^3 + b_5(2\pi)R_0^5 + b_7(2\pi)R_0^7 + b_9(2\pi)R_0^9 + \dots) \quad (16)$$

Обозначим $L_k = -b_{2k+1}(2\pi)$, $k = 1, 2, \dots$ и будем в дальнейшем называть L_k k -ой ляпуновской величиной (или коэффициентом устойчивости).

Отсюда видим, что при достаточно малых значениях R_0 знак $P(R_0)$ определяется знаком σ_{00} или первого ненулевого коэффициента L_k .

Теорема (Ляпунов, [3]). Если $\sigma_{00} < 0$, то состояние равновесия $O(0;0)$ – устойчивый фокус, если $\sigma_{00} > 0$, то – неустойчивый фокус; если $\sigma_{00} = 0$ и первый ненулевой коэффициент $L_k < 0$, то состояние равновесия $O(0;0)$ – устойчивый фокус, если $L_k > 0$, то – неустойчивый фокус; если $\sigma_{00} = 0$ и все коэффициенты $L_k = 0$, то состояние равновесия $O(0;0)$ – центр.

Случай квадратичной системы

С целью иллюстрации предложенного в данной работе метода рассмотрим квадратичную систему, предполагая, что квадратичная часть гамильтониана приведена к каноническому виду

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{2}a_{02}y^2 + \frac{1}{6}(\mu_{10}x^2 + 2\mu_{01}xy) + x(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)) \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{2}b_{20}x^2 - \frac{1}{6}(2\mu_{10}xy + \mu_{01}y^2) + y(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)) \end{cases} \quad (17)$$

Для придания ляпуновским величинам удобного для дальнейших исследований вида введем следующие представления для коэффициентов системы

$$b_{20} = \gamma \cos \beta, \quad a_{02} = \gamma \sin \beta, \quad \mu_{01} = 3b_{20} + \lambda \sin \alpha, \quad \mu_{10} = -3a_{02} + \lambda \cos \alpha, \quad \sigma_{10} = r \cos \theta, \quad \sigma_{01} = r \sin \theta.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - \frac{\gamma}{2}\rho^2 \sin(2\varphi - \beta) + \frac{\rho^2}{6}\lambda(\sin \alpha \sin 2\varphi + \cos \alpha \cos^2 \varphi) + x(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{\rho}{3}r(\cos(\varphi - \theta))), \\ \dot{y} &= -x + \frac{\gamma}{2}\rho^2 \cos(2\varphi + \beta) - \frac{\rho^2}{6}\lambda(\cos \alpha \sin 2\varphi + \sin \alpha \sin^2 \varphi) + y(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{\rho}{3}r(\cos(\varphi - \theta))). \end{aligned}$$

Результаты вычислений приведены в следующей теореме.

Теорема. 1) $\sigma_{00} = 0$, $L_1 = -\frac{\pi}{24}r\lambda \sin(\theta + \alpha)$;

2) $\sigma_{00} = 0$, $L_1 = 0$ (при $\lambda = 0$), $L_2 = -\frac{\pi}{216}\gamma r^3 \cos(\beta - 3\theta)$;

3) $\sigma_{00} = 0$, $L_1 = 0$ (при $\lambda = 0$), $L_2 = 0$ (при $\theta = \frac{\beta}{3} + \frac{2k-1}{6}\pi$, $k \in \{0; \pm 1; \pm 2; 3\}$);
 $L_n = 0$ при $n \geq 6$ – центр;

4) $\sigma_{00} = 0$, $L_1 = 0$ (при $\theta = -\alpha$),

$$L_2 = -\frac{\pi}{6912}r(8r^2 + 14r\lambda + 5\lambda^2)(4\gamma \cos(3\alpha + \beta) + \lambda \sin 4\alpha);$$

5) $\sigma_{00} = 0$, $L_1 = 0$ (при $\theta = -\alpha$), $L_2 = 0$ (при $4\gamma \cos(3\alpha + \beta) + \lambda \sin 4\alpha = 0$)
 $L_n = 0$ при $n \geq 6$ – центр.

6) $\sigma_{00} = 0$, $L_1 = 0$ (при $\theta = -\alpha$), $L_2 = 0$ (при $r = -\frac{5}{4}\lambda$),

$$L_3 = -\frac{25\pi\gamma\lambda^3}{65536}(4\gamma \cos(3\alpha + \beta) + \lambda \sin 4\alpha)(2\gamma + \lambda \sin(\alpha - \beta)).$$

7) $\sigma_{00} = 0$, $L_1 = 0$ (при $\theta = -\alpha$), $L_2 = 0$ (при $r = -\frac{5}{4}\lambda$), $L_3 = 0$,

(при $2\gamma + \lambda \sin(\alpha - \beta) = 0$) $L_n = 0$ при $n \geq 6$ – центр.

8) $\sigma_{00} = 0$, $L_1 = 0$ (при $\theta = -\alpha$), $L_2 = 0$ (при $r = -\frac{1}{2}\lambda$), $L_3 = 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Морозов, Н. П.** О приведении полиномиальных систем к специальному виду / Н. П. Морозов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2011. – № 2(38). – С. 43–49.
2. **Морозов, Н. П.** Приведение автономных систем на плоскости к специальному виду. Естественный гамильтониан системы / Н. П. Морозов // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2016. – № 1(47). – С. 32–42.
3. **Баутин, Н. Н.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – Москва : Наука, 1978. – 496 с.

Поступила в редакцию 04.01.2021 г.

Контакты: marchenko@msu.by (Марченко Ирина Васильевна)

Morozov N.P., Marchenko I.V. ALGORITHM FOR CALCULATING THE STABILITY COEFFICIENTS IN THE CASE OF MULTIPLE OR COMPLEX FOCUS

The paper describes the procedure for calculating stability coefficients (Lyapunov values) in the case of multiple or complex focus, based on a special representation of polynomial systems [1; 2]. For polynomial systems of the third degree, the basic relations for calculating the Lyapunov values are obtained. For a quadratic system, the values of three Lyapunov quantities have been found, and due to the choice of the structure of the coefficients, they have been given a form convenient for research.

Keywords: quadratic system, Lyapunov values, equilibrium states.

УДК 511.42

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ МЕРЫ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОЛИНОМОВ

О. Н. Кемеш

кандидат физико-математических наук,
Белорусский государственный аграрный технический университет

Ж. И. Пантелеева

аспирант

Институт математики НАН Беларуси

А. В. Титова

аспирант

Институт математики НАН Беларуси

Существует много различных оценок сверху для меры множества действительных чисел x или комплексных чисел z , для которых выполняются неравенства $|P(x)| < \varepsilon_1$, $|P(z)| < \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Приведем оценку для действительных x . Пусть α_1 – ближайший к x корень полинома $P(x)$ с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Корни упорядочены следующим образом $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|$.

Тогда

$$|x - \alpha_1| < c_1(n) \min_{1 \leq j \leq n} \left(\varepsilon_1 |P'(\alpha_1)|^{-1} |\alpha_1 - \alpha_2| \dots |\alpha_1 - \alpha_j| \right)^{1/j} = c_1(n) \cdot t(\varepsilon_1, P). \quad (1)$$

В.Г. Спринджук нашел условия, при которых для $j=1,2$ верны оценки снизу $|x - \alpha_1|$, противоположные (1). В данной статье мы указываем условия на x и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, при которых справедливы неравенства

$$c_2(n) \cdot t(\varepsilon_1, P) < |x - \alpha_1| < c_3(n) \cdot t(\varepsilon_1, P), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Аналогичный результат доказан также и в случае комплексных чисел.

Ключевые слова: диофантовы приближения, мера Лебега, верхние и нижние оценки, целочисленные полиномы.

Для целочисленного полинома $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $t \in \mathbb{R}$ или $t \in \mathbb{C}$

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

обозначим через n -степень $P(t)$ и $H = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ – высоту $P(t)$. Далее $Q > 1$ – натуральное число. В диофантовых приближениях одной из основных задач является исследование множества $\mathcal{L}_n(\varepsilon, Q)$ таких t действительных или комплексных, для которых при $\varepsilon = \varepsilon(Q)$ разрешимо неравенство

$$|P(t)| < \varepsilon$$

хотя бы при одном полиноме из класса $\mathcal{P}_n(Q) = \{P(t) \in \mathbb{Z}[t] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}$.

© Кемеш О. Н., Пантелеева Ж. И., Титова А. В., 2021

Нетривиальными являются уже вопросы об ограниченности множества $\mathcal{L}_n(\varepsilon, Q)$ при $t \in \mathbb{C}$, а также о соотношении диаметра $\mathcal{L}_n(\varepsilon, H)$ и $\mu_2 \mathcal{L}_n(\varepsilon, H)$, где $\mu_2 B$ – мера Лебега измеримого множества $B \in \mathbb{C} [1; 2]$. Многие из указанных проблем были решены при доказательстве проблемы Малера [3]. Сам Малер доказал, что при $w > 4n$ неравенство

$$|P(x)| < H^{-w} \quad (2)$$

имеет бесконечное число решений только для x из множества B_1 нулевой меры μ_1 Лебега на прямой. Его результаты улучшали последовательно Кубилюс [4], Левек [5], Шмидт [6], Каш и Фолькман [7]. Наконец, в 1964 году Спринджук [1; 2; 8; 9; 10] решил проблемы Малера, усилив неравенство (2) до $w > n$ в действительном и до $w > \frac{n-1}{2}$ в комплексном случае. Обозначим через $S(\alpha_j)$ множество действительных или комплексных чисел z , удовлетворяющих неравенству

$$\min_{1 \leq k \leq n} |z - \alpha_k| = |z - \alpha_j|. \quad (3)$$

В (3) величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни $P(z)$, действительные или комплексные, и α_1 – ближайший к z корень, корни упорядочены следующим образом: $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|$. При доказательстве проблемы Малера Спринджук показал, что многие проблемы метрической теории чисел сводятся к рассмотрению полиномов с лидирующим старшим коэффициентом, $|a_n| \gg H$. Корни таких полиномов ограничены, $|\alpha_i| \ll 1$. В дальнейшем будем рассматривать только данный класс полиномов.

Лемма 1. Пусть $x \in S(\alpha_1)$. Тогда

$$|x - \alpha_1| < n |P(x)| |P'(x)|^{-1}, \quad (4)$$

$$|x - \alpha_1| \leq 2^{n-1} |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1}, \quad (5)$$

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1} \min_{2 \leq j \leq n} \left(\frac{|P(x)(\alpha_1 - \alpha_2) \cdots (\alpha_1 - \alpha_j)|}{P'(\alpha_1)} \right)^{1/j}, \quad 2 \leq j \leq n. \quad (6)$$

Лемма 2 [2]. Если полином удовлетворяет условию $|a_n| > dH$, $d > 0$, $H = H(P)$, то

$$\max_i |\alpha_i| \leq \frac{n}{d}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Дискриминантом многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называется число $D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$. Очевидно, что если $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i \leq n$, то $D(P) \in \mathbb{Z}$, и если $D(P) \neq 0$, то $1 \leq |D(P)|$.

Лемма 3 [2]. Пусть $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ $x \in S(\alpha_1)$ – вещественное или комплексное число, $|P(x)| < H^{-w}$, $w > 0$. Тогда

$$|x - \alpha_1| < c_4 H^{-\frac{1+2w-n}{3}} |D(P)|^{\frac{1}{6}}, \quad (n \geq 3), \text{ если } x - \text{действительное число}, \quad (8)$$

$$|z - \alpha_1| < c_5 |\operatorname{Im} z|^{-n} H^{-\frac{5+4w-n}{6}} |D(P)|^{\frac{1}{12}}, \quad (n \geq 4), \text{ если } z - \text{комплексное число}. \quad (9)$$

Неравенства (5) и (6) при $j=2$ доказаны в [2; 11], а оценка (6) при любом j доказана в [12]. Неравенство (4) следует из тождества

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - \alpha_i)}$$

и неравенства $|x - \alpha_1| \leq |x - \alpha_j|$, $2 \leq j \leq n$.

Согласно лемме 1 для $|x - \alpha_1|$ имеем $n+1$ оценку сверху. Наилучшая из них является точной. При $j=1$ и $j=2$ (это доказал Спринджук) [2, лемма 6]. В данной работе мы находим для $|x - \alpha_1|$ оценку снизу и она с точностью до величины $c(n)$ совпадает с одной из оценок сверху. Тем самым получаем точную оценку для меры $|x - \alpha_1|$.

В дальнейшем через $c_1 = c_1(n), c_2, \dots$ обозначаем величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q .

Теорема. Пусть $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, $\alpha_1 \in S(\alpha_1)$ – вещественный корень, $2 \leq j \leq n$, $|P(x)| < H^{-w}$, где

$$w > \frac{3(n-1)}{j(j+1)} - \frac{3}{2} + \frac{n}{2}, \text{ если } x - \text{действительное число},$$

$$w > \frac{3(n-1)}{2j(j+1)} - \frac{5}{4} + \frac{n}{4}, \text{ если } z - \text{комплексное число}.$$

Тогда имеем

$$|x - \alpha_1| > \begin{cases} c_6 \cdot \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}, & \text{если } |x - \alpha_1| \leq 2|\alpha_1 - \alpha_2|, \\ c_7 \left(\frac{|P(x)(\alpha_1 - \alpha_2) \cdots (\alpha_1 - \alpha_j)|}{P'(\alpha_1)} \right)^{\frac{1}{j}}, & \text{если } |x - \alpha_1| > 2|\alpha_1 - \alpha_j|, \end{cases} \quad (10)$$

для упорядоченных корней многочлена $|\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_3| < \dots < |\alpha_1 - \alpha_j|$. Если $z \in \mathbb{C}$, то в (10) x надо заменить на z .

Доказательство.

Пусть $|x - \alpha_1| \leq 2|\alpha_1 - \alpha_2|$, тогда

$$|x - \alpha_i| \leq |x - \alpha_1| + |\alpha_1 - \alpha_i| \leq 2|\alpha_1 - \alpha_2| + |\alpha_1 - \alpha_2| \leq 3|\alpha_1 - \alpha_2|. \quad (11)$$

Из (11) имеем

$$\frac{P(x)}{|x - \alpha_1|} = H \prod_{i=2}^n |x - \alpha_i| \leq 3^{n-1} H \prod_{i=2}^n |\alpha_1 - \alpha_i| = 3^{n-1} |P'(\alpha_1)|,$$

откуда

$$|x - \alpha_1| > c_8 \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}.$$

Перейдем ко второму неравенству в (10). Будем считать, что $2 \leq j \leq n$ и $|x - \alpha_1| > 2|\alpha_1 - \alpha_j|$, где x – действительное число, тогда при $H > c(n)$ должны выполняться неравенства

$$|x - \alpha_1| \leq 2|\alpha_1 - \alpha_i|, \quad (i = j+1, \dots, n).$$

Действительно пусть

$$|x - \alpha_1| > |\alpha_1 - \alpha_{j+1}|,$$

тогда

$$|\alpha_k - \alpha_s| < \frac{1}{2}|x - \alpha_1|, \quad 1 \leq k < s \leq j \quad (12)$$

и

$$|\alpha_k - \alpha_{j+1}| < |\alpha_1 - \alpha_k| + |\alpha_1 - \alpha_{j+1}| < \frac{3}{2}|x - \alpha_1|, \quad 1 \leq k \leq j. \quad (13)$$

Из неравенств (12) и (13) будет следовать

$$\max_{1 \leq k < s \leq j+1} |\alpha_k - \alpha_s| < \frac{3}{2}|x - \alpha_1|.$$

Воспользовавшись леммой 3, имеем

$$|x - \alpha_1| < c_9 \cdot H^{-\frac{3+2w-n}{3}} |D(P)|^{-\frac{1}{6}}.$$

Следовательно,

$$\prod_{1 \leq i < s \leq j+1} |\alpha_i - \alpha_s| < c_{10} H^{-\frac{3+2w-n}{3} \cdot \frac{j(j+1)}{2}}.$$

Из свойств дискриминанта имеем

$$1 \leq |D(P)| < H^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 < c_{11} H^{2n-2} \prod_{1 \leq i < s \leq j+1} (\alpha_i - \alpha_s)^2 \leq c_{12} H^{2n-2 - \frac{3+2w-n}{3} \cdot \frac{j(j+1)}{2}},$$

что противоречиво для $w > \frac{3(n-1)}{j(j+1)} - \frac{3}{2} + \frac{n}{2}$ при условии $H > c_{12}$.

Если z – комплексное число и $|z - \alpha_1| > |\alpha_1 - \alpha_{j+1}|$,

то аналогично

$$\max_{1 \leq k < s \leq j+1} |\alpha_k - \alpha_s| < \frac{3}{2}|z - \alpha_1|$$

и по лемме 3 имеем

$$|z - \alpha_1| < c_{13} |\operatorname{Im} z|^{-n} H^{-\frac{5+4w-n}{6}} |D(P)|^{-\frac{1}{12}}.$$

Следовательно,

$$\prod_{1 \leq i < s \leq j+1} |\alpha_i - \alpha_s| < c_{14} |\operatorname{Im} z|^{-n \frac{j(j+1)}{2}} H^{-\frac{5+4w-n}{6} \cdot \frac{j(j+1)}{2}}.$$

По свойству дискриминанта

$$\begin{aligned} 1 \leq |D(P)| &< H^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 < c_{15} H^{2n-2} \prod_{1 \leq i < s \leq j+1} (\alpha_i - \alpha_s)^2 \prod_{1 \leq i < s \leq j+1} (\overline{\alpha_i} - \overline{\alpha_s})^2 \leq \\ &\leq c_{16} H^{2n-2} \prod_{1 \leq i < s \leq j+1} (\alpha_i - \alpha_s)^4 < c_{17} |\operatorname{Im} z|^{-n \frac{j(j+1)}{2}} H^{2n-2 - \frac{5+4w-n}{3} j(j+1)}, \end{aligned}$$

что противоречиво для $w > \frac{3(n-1)}{2j(j+1)} - \frac{5}{4} + \frac{n}{4}$ при условии $H > c_{17}$.

Следовательно, как в действительном, так и в комплексном случае верны неравенства

$$|x - \alpha_1| \leq |\alpha_1 - \alpha_i|, \quad (i = j+1, \dots, n). \quad (14)$$

Из условий (14) следует

$$|x - \alpha_i| \leq |x - \alpha_1| + |\alpha_1 - \alpha_i| \leq 2|\alpha_1 - \alpha_i|, \quad (i = j+1, \dots, n). \quad (15)$$

Учитывая неравенство $|x - \alpha_1| > 2|\alpha_1 - \alpha_j|$,

то

$$|x - \alpha_i| \leq |x - \alpha_1| + |\alpha_1 - \alpha_i| \leq 2|\alpha_1 - \alpha_i|, \quad (i = j+1, \dots, n). \quad (16)$$

Используя (15), получим

$$|x - \alpha_j| < |x - \alpha_1| + |\alpha_1 - \alpha_j| < \frac{3}{2}|x - \alpha_1|.$$

Воспользовавшись неравенствами (16), имеем

$$\prod_{i=j+1}^n |x - \alpha_i| \leq 2^{n-j-1} \prod_{i=j+1}^n |\alpha_1 - \alpha_i|, \quad (17)$$

Учитывая (17), получаем оценку

$$\begin{aligned} |P(x)| &\leq 2^{n-j-1} |x - \alpha_1| \cdot \dots \cdot |x - \alpha_j| \cdot \frac{|P'(\alpha_1)|}{|\alpha_1 - \alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_1 - \alpha_j|} < \\ &< 2^{n-j-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^j \cdot |x - \alpha_1|^j \cdot \frac{|P'(\alpha_1)|}{|\alpha_1 - \alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_1 - \alpha_j|}, \end{aligned}$$

из которой следует

$$|x - \alpha_1|^j > c_{18} \cdot \frac{|P(x)(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\alpha_1 - \alpha_j)|}{P'(\alpha_1)}$$

или

$$|x - \alpha_1| > c_{19} \left(\frac{|P(x)(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\alpha_1 - \alpha_j)|}{P'(\alpha_1)} \right)^{\frac{1}{j}}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Спринджук, В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 379–436.
2. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 181 с.
3. Mahler, K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106. – P. 131–139.
4. Кубилюс, И. П. О применении метода акад. Виноградова к решению одной задачи метрической теории чисел / И. П. Кубилюс // ДАН СССР. – 1949. – Т. 67. – С. 783–786.
5. LeVeque, W. J. Note on S-numbers / W. J. LeVeque // Proc. Amer. Math. Soc. – 1953. – Vol. 4. – P. 189–190.
6. Schmidt, W. A metrical theorem in Diophantine approximation / W. Schmidt // Can. J. Math. – 1960. – Vol. 12. – P. 619–631.
7. Kasch, F. Zur Mahlerschen Vermutung über S-Zahlen / F. Kasch, B. Volkmann // Math. Ann. – 1958. – Vol. 136 – P. 442–453.
8. Спринджук, В. Г. О мере множества S-чисел в p -адическом поле / В. Г. Спринджук // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151, № 6. – С. 1292.
9. Спринджук, В. Г. О гипотезе Малера / В. Г. Спринджук // ДАН СССР. – 1964. – Т. 154, № 4. – С. 783–786.
10. Спринджук, В. Г. Еще о гипотезе Малера / В. Г. Спринджук // ДАН СССР. – 1964. – Т. 155, № 1. – С. 54–56.
11. Bernik, V. I. Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson // Cambridge Tracts in Mathematics. – 1999. – no. 137, 172 p.
12. Берник, В. И. Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – Т. 44, № 1. – С. 24–45.

Поступила в редакцию 04.01.2021 г.

Контакты: oksana.kemesh@tut.by (Кемеш Оксана Николаевна)

janna-85@mail.ru (Пантелеева Жанна Ивановна)

anastasia.titova111@gmail.com (Титова Анастасия Владимировна)

Kemesh O.N., Panteleyeva Zh.I., Titova A.V. EXACT ESTIMATES OF THE MEASURE OF SMALL VALUES OF INTEGER POLYNOMIALS

There are many different upper bounds for the measure of the set of real numbers x or complex numbers z , for which the inequalities $|P(x)| < \varepsilon_1$, $|P(z)| < \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, are satisfied. The authors give an estimate for the real numbers x . Let α_1 be the root of the polynomial $P(x)$ lying the closest to x , where $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ are all roots of this polynomial.

The roots are ordered as follows $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|$.

Then

$$|x - \alpha_1| < c_1(n) \min_{1 \leq j \leq n} \left(\varepsilon_1 |P'(\alpha_1)|^{-1} |\alpha_1 - \alpha_2| \dots |\alpha_1 - \alpha_j| \right)^{1/j} = c_1(n) \cdot t(\varepsilon_1, P) \quad (1)$$

V. G. Sprindzuk found the conditions under which lower bounds for $|x - \alpha_1|$ that are opposite to (1) hold for $j=1, 2$. In the article the authors specify conditions on x and $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ under which the following inequalities are satisfied:

$$c_2(n) \cdot t(\varepsilon_1, P) < |x - \alpha_1| < c_3(n) \cdot t(\varepsilon_1, P), \quad 1 \leq j \leq n.$$

A similar result is also proved in the case of complex numbers.

Keywords: Diophantine approximation, Lebesgue measure, upper and lower bounds, integer polynomials.

УДК 535.87 + 621.375

ДИНАМИКА ОТРАЖЕНИЯ СВЕТА НИЗКОРАЗМЕРНЫМ КВАЗИКРИСТАЛЛОМ ИЗ КВАНТОВЫХ ТОЧЕК С ДВУХФОТОННЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ

В. А. Юревич

доктор физико-математических наук

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В приближении однородного поля анализируется эффект трансформации сверхкоротких оптических импульсов, отражаемых планарным тонким слоем суперкристалла из квантовых точек в предположении двухфотонного резонанса поглощения. При моделировании коллективного процесса отражения использованы параметры полупроводниковых кванторазмерных структур. Дана соответствующая физической ситуации формулировка теоремы площадей.

Ключевые слова: квазикристалл из квантовых точек, когерентное взаимодействие, двухквантовый резонанс, нелинейная перестройка частоты.

Введение

В ходе решения ряда прикладных задач оптики для разработки интегрально-оптических устройств или диагностики физических свойств вещества в низкоразмерном формате особо стимулируется исследование реакции на зондирующее извне импульсное световое поле тонкослойных объектов с высокой плотностью активных центров, известных как квазидвумерные суперкристаллы [1]. Для их получения разработана технология синтеза особых материалов, среди которых диалкогениды переходных металлов ($MoSe_2$, WSe_2 и др.), n -слойные фосфорены и полупроводниковые слоистые структуры, образованные квантовыми точками, или органические полимеры. В особенности интересны полупроводниковые квазикристаллы с кванторазмерными эффектами в структуре [2]. В этих средах нелинейный отклик на когерентное излучение особо выражен в спектральной области, соответствующей экситонным переходам. Например, экспериментально наблюдалось, что предельно тонкий слой $MoSe_2$ в области экситонного резонанса является идеальным зеркалом с гистерезисными свойствами, имеющим практически атомную толщину [3].

В работе, положенной в основу настоящей статьи, ставилась задача анализа модели резонансного отражения квазикристаллического слоя в случае относительно высокой плотности дипольных центров (мета-атомов или экситонов) при условии двухквантового резонанса. Для нелинейного отражения низкоразмерного слоя с резонансной поляризацией наряду с нерезонансными составляющими, определяющими френелево отражение, характерно наличие особых нелинейных компонентов, получивших название сверхизлучательных [4]. Их роль в формировании отражаемого сигнала рассматривается при изучении разнообразного круга физических явлений, таких как оптическая бистабильность, самопульсации света, солитонный режим прохождения сверхкоротких импульсов света или развитие динамического хаоса. Практический интерес к подобным объектам пониженной размерности, способным эффективно преобразовать внешний оптический сигнал, об-

условлен возможностями их применения в элементной базе нанофотоники. Ранее в литературе в основном анализировались решения подобных нелинейных задач для пропускания тонкого слоя из активных дипольных частиц при однофотонном резонансе, когда частоты оптического поля извне и основного перехода в энергетической структуре близки по значению ($\omega \approx \omega_{21}$).

Исходная расчетная модель

Естественно интересным представляется рассмотреть ситуацию, когда в условиях двухквантового резонанса в отраженном суперкристаллом световом пучке присутствуют сверхизлучательные компоненты удвоенной частоты. При отражении света тонким активным слоем тогда возникает возможность эффекта преобразования частоты. Вывод аналогов уравнений Блоха для материального отклика, описываемого поляризованностью с квазистационарной комплексной амплитудой $\rho(t)$ и резонансной вариацией населенности $n(t)$ для случая двухфотонного поглощения, в литературе известен относительно давно (см., например, [5]). В рассматриваемой модификации, однако, учитывается типичное для высокой концентрации дипольных центров в полупроводниковом квазикристалле диполь-дипольное взаимодействие. Выражение эффективного поля, действующего на активные диполи, тогда включает локальную поправку Лоренца. Основываясь на этих представлениях, используемую далее модифицированную систему кинетических уравнений запишем в виде:

$$E(t) = E_i(t) - \alpha_{12} N_0 \frac{\omega}{c} \left(\rho - i \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\alpha_{12}} n \right) (1 - i\gamma) E(t), \quad E_r(t) = \alpha_{12} N_0 \frac{\omega}{c} \left(\rho - i \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\alpha_{12}} n \right) E(t),$$

$$\frac{d\rho}{dt} = i \left(\Delta\omega + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\hbar} \varepsilon_0 |E|^2 \right) \rho + \frac{\alpha_{12}}{\hbar} \varepsilon_0 (n+1) |E|^2 - \frac{\rho}{T_2},$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n}{T_1} - \frac{\alpha_{12} \varepsilon_0}{4\hbar} (\rho |E^*|^2 + \rho^* |E|^2).$$

где для связи квазистационарных напряженностей внешнего (E_i), действующего (E) и отраженного (E_r) световых полей с частотой ω аналогично [6] использованы соотношения граничных условий в уравнениях Максвелла. В продольном направлении внутри слоя, таким образом, плосковолновое поле с амплитудой E предполагается однородным. Амплитуда отраженного поля E_r в схеме расчета (1) представляется сверхизлучательными компонентами. Коэффициентами системы (1) описываются следующие физические параметры: N_0 – поверхностная концентрация дипольных центров, $\Delta\omega = 2\omega - \omega_{12}$ – отстройка частоты от центра спектральной линии резонанса, T_1 – время обратимости разности населенностей, T_2 – время фазовой релаксации диполей (обычно $T_2 \ll T_1$), γ – нормирующий коэффициент в локальной поправке Лоренца. Значение α_{12} имеет размерность поляризуемости и пропорционально вероятности двухфотонного перехода [5]. Различием (дефектом) поляризуемостей диполей в основном и возбужденном состоянии α_1, α_2 определяется эффект Штарка – далее введен параметр, характеризующий штарковское смещение частоты перехода в поле когерентного излучения: $\beta = (\alpha_2 - \alpha_1)/2\alpha_{12}$.

Расчет приближенной схемы

Очевидно, что решения нелинейной динамической системы (1), устанавливающей баланс энергии полей $E_r(t)$ и $E(t)$ при резонансном двухфотонном поглощении, существенно зависят от функции напряженности приложенного поля $E_i(t)$.

Тем не менее, решение задачи расчета баланса полей при импульсном взаимодействии светового поля с квантовым ансамблем диполей, образующих низкоразмерный суперкристалл, может иметь полуаналитическое представление при любом виде импульсного поля $E(t)$. Для этого аналогично работе [5] следует допустить когерентный характер взаимодействия (то есть, длительность импульсов светового поля $E_i(t)$ считается пренебрежимо малой по сравнению с T_2), а также значимость точного резонанса ($\Delta\omega = 0$), то есть отсутствие вызванной дефектом частоты фазовой модуляции. В системе (1) целесообразно масштабировать переменные таким образом: $\tau = t/T_2$, $e(\tau) = \alpha_{12} T_2 E(t)/\hbar$ (аналогично нормированы E_r и E_i) и применить комплексное представление $\rho(\tau) = R(\tau) + iS(\tau)$. Тогда для импульсов субпикосекундной длительности материальные уравнения нелинейной системы (1) запишутся в виде:

$$\frac{dR}{d\tau} = \beta |e|^2 S + (n+1)|e|^2, \quad \frac{dS}{d\tau} = -\beta |e|^2 R, \quad \frac{dn}{d\tau} = -R|e|^2. \quad (2)$$

Из двух последних уравнений системы (2) определяется связь вариации населенности с реактивной составляющей поляризованности: $S = \beta n$. С учетом очевидных начальных условий $\rho(\tau = 0) = 0, n(\tau = 0) = 0$ формулируется соотношение: $R^2 + (1 + \beta^2) n^2 + 2n = 0$. В связи с этой формулировкой для записи решений (2) удобно ввести угол фазы поворота переменных отклика квазикристалла в поле импульса:

$$\psi(\tau) = \sqrt{1 + \beta^2} \int_{-\infty}^{\tau} |e(\tau)|^2 d\tau.$$

Решения для переменных R , S и n тогда записываются как функции угла вращения:

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} \sin \psi, \quad S = \frac{\beta}{1 + \beta^2} (\cos \psi - 1), \quad n = \frac{1}{1 + \beta^2} (\cos \psi - 1). \quad (3)$$

При определении нормированной энергии светового импульса $U_R(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} |e_r(\tau)|^2 d\tau$, отраженного слоем суперкристалла, кроме согласования переменных поля и отклика среды, характеризуемого (3), необходимо воспользоваться представленным в схеме (1) выражением для связи между амплитудами внешнего и действующего полей. С учетом решений (3) нетрудно получить следующие соотношения:

$$|e(\tau)|^2 = \frac{e_i^2(\tau)}{1 + 2\kappa[R + \gamma(S - \beta n)] + \kappa^2(1 + \gamma^2)[R^2 + (S - \beta n)^2]}, \quad (4)$$

$$|e_r(\tau)|^2 = \kappa^2 [R^2 + (S - \beta n)^2] |e(\tau)|^2,$$

где $\kappa = \alpha_{12} N_0 \omega / c$ показатель ненасыщенного двухфотонного поглощения.

Величиной угла $\psi(\tau)$ описывается поворот материальных переменных внутри квазикристалла за время действия импульса. Значение $\psi(\tau = \infty)$ пропорционально полной энергии поля импульса, действующего на активные диполи – это учитывается в дальнейших представлениях. Последовательно интегрируя соотношения (4), запишем уравнения связи нормированных величин энергий действующего и отраженного импульса с энергией внешнего сигнала $U_i = \int_{-\infty}^{\infty} |e_i(\tau)|^2 d\tau$:

$$U_i = \frac{\psi}{\sqrt{1+\beta^2}} + \frac{2\kappa}{1+\beta^2}(1-\cos\psi) + \frac{1+\gamma^2}{2\sqrt{(1+\beta^2)^3}}\kappa^2\left(\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi\right),$$

$$U_R = \frac{\kappa^2}{2\sqrt{(1+\beta^2)^3}}\left(\psi - \frac{1}{2}\sin 2\psi\right). \quad (5)$$

Первое соотношение из схемы расчета (5) представляет уравнение относительно ψ и, в сущности, выражает аналог теоремы площадей применительно к случаю двухфотонного резонанса в присутствии фазовых эффектов, связанных с эффектом Штарка и значимостью диполь-дипольного взаимодействия. При небольших значениях $\sqrt{1+\beta^2}$ $U_i - \psi = \kappa\psi^2/\sqrt{1+\beta^2}$, что соответствует обычному двухфотонному поглощению в среде [3] (в отсутствие диполь-дипольного взаимодействия).

Зависимости энергий действующего и отраженного импульсов от U_i на основе (5) можно определить параметрическим расчетом (при проведении вычислений следует полагать угол ψ ($\tau = \infty$) неотрицательным линейно нарастающим аргументом).

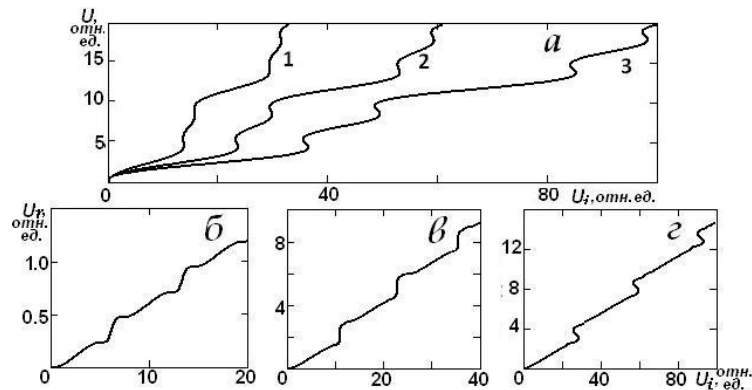


Рисунок 1 – Зависимость энергии импульса, действующего на активные центры (а), энергии отраженного импульса (б – в) от энергии импульса возбуждения: $\kappa = 0.5$ (кривая 1, рис., а, рис., б), 0.8 (кривая 2, рис., а, рис., в), 1.2 (кривая 3, рис., а, рис., в), $\beta = 0.1$, $\gamma = 1.58$

На рисунке 1 иллюстрированы типичные кривые зависимостей, рассчитанные для коэффициентов системы (1), в оценке величин которых в основном исходили из данных работ [4; 5] при том, что для значений концентрации активных центров, дефекта поляризуемости и частоты предполагались величины соответственно: $N_0 \sim (2.0 \dots 5.0) \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$, $\alpha_2 - \alpha_1 \sim (3.0 \dots 7.0) \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$, $\omega \approx 4 \cdot 10^{14} \text{ рад/с}$.

Для избранных параметров энергия импульса, действующего на атомы поля (с удвоенной частотой) “квазилинейно”, зависит от энергии входного сигнала. Таков же характер зависимости отраженного сигнала. В отражении и пропускании основную роль, естественно, должны сыграть френелевы составляющие [4]. Влияние нелинейных сверхизлучательных компонентов проявляется в существовании особых модуляционных неоднородностей в виде локальных повышений крутизны хода кривых на шкале U_i (рис. 1). Модуляционные составляющие зависимости периодичны, их наличие объясняется перестройкой частоты резонанса вследствие нелинейных фазовых эффектов. Период следования локальных повышений крутизны хода кривых возрастает при увеличении характеристики двухфотонного поглощения κ (рис. 1, а). Следует отметить возможность возникновения неодно-

значности зависимостей – выше определенного уровня κ на кривых могут проявляться бистабильные переключения зависимости (кривая 3 на рис. 1, а, кривые на рисунках 1, в, г). В этом случае происходит взаимное усиление модуляционных следствий фазовых эффектов, при незначительной вариации энергии входного сигнала энергия импульса поля удвоенной частоты изменяется скачком.

Особенности динамики отражения импульсов

Рассматривается физическая ситуация при нормальном падении на планарный квазикристалл ультракороткого импульса длительностью порядка периода осцилляций Раби, то есть значительно меньших времени фазовой релаксации. При моделировании трансформации внешних сигналов, основанной на численном решении системы уравнений (1), предполагалось, что нормированная огибающая падающего импульса описывается функцией:

$$e_i(\tau) = e_0 \operatorname{sech}\left(\frac{\tau - \tau_0}{\Delta\tau}\right),$$

где e_0 и $\Delta\tau$ – амплитуда и нормированная длительность импульса, τ_0 – нормированный сдвиг импульса на временной шкале.

Численное интегрирование уравнений (1) проводилось методом Рунге-Кутты для условий возбуждения квазикристалла приведенным внешним полем $e_i(\tau)$ для начальных условий $\rho(\tau = 0) = 0$, $n(\tau = 0) = 0$. Условия означают предположение об отсутствии поляризованности на удвоенной частоте при том, что образующий квазикристалл некоррелированный дипольный ансамбль первоначально находится в основном состоянии. На рисунке 2 приведены результаты расчета временной зависимости нормированной мощности отраженного излучения $|e_r(\tau)|^2$. Диапазон изменения пиковой мощности импульсов в реальном устройстве мог примерно соответствовать величинам в пределах $(10 \dots 50) \cdot 10^5 \text{ Вт/см}^2$.

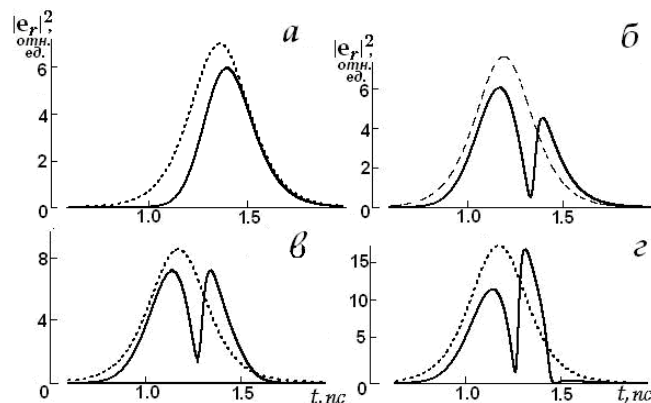


Рисунок 2 – Зависимость формы отраженного импульса от пиковой амплитуды импульса возбуждения: $e_0 = 25$ (а, б), 32 (б), 40 (в), $\kappa = 1.2$, $\beta = 0$ (а), 0.1 (б–г), $\gamma = 0$ (а), 1.58 (б–г), $T_2 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ с}$

На фрагментах рисунка 2 форма типичная форма отраженного сигнала (сплошная линия) иллюстрирована на фоне входного импульса (пунктирная линия), приведенного в собственном масштабе. Численное решение показало, что в случае отсутствия фазовых эффектов форма отраженного импульса накалики повторяет форму «входного» ультракороткого импульса (рис. 2, а). Динамическое нарушение резонанса, вызванное высокочастотным эффектом Штарка и действенностью поля

Лоренца, приводит к нелинейным вариациям двухфотонного поглощения и связанного с ним отражения. Их следствием может быть обусловлено эффективное расщепление отраженного импульса. Соотношение пиковых мощностей в обоих компонентах преобразованного удвоенного сигнала для данного уровня ненасыщенного поглощения k зависит от пиковой амплитуды импульса «входного» поля e_0 (рис. 2, б–г). «Контраст» расщепления определяется величиной k .

Заключение

В настоящей работе рассмотрены эффекты, которые могут проявиться в динамическом процессе отражения ультракороткого оптического импульса низкоразмерным суперкристаллом квантовых точек в условиях двухфотонного резонанса. Принципиальным моментом проведенного анализа был учет безынерционных по отношению к световому полю эффектов смещения резонанса – дрейфу частоты оптического резонанса из-за высокочастотного эффекта Штарка и диполь-дипольного взаимодействия, присущего суперкристаллам из квантовых точек с типичной для них высокой плотностью дипольных частиц и значительными электрическими моментами активных центров. Следствия резонансных фазовых эффектов способны привести к проявлению вынужденной обратимой динамической релаксации поляризованности в планарном слое квазикристалла на временах, много меньших времен необратимой релаксации среды. В результате этого в среде квазикристалла формируется нелинейный отклик, характеризуемый внутренней неустойчивостью и способный обусловить эффективную модуляцию сигналов внешнего излучения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Quantum-dot supercrystals for future nanophotonics / A. S. Baimuratov [et al.] // Scientific Reports. – 2013. – Vol. 3. (1727).
2. **Мак, К. Ф.** Photonics and optoelectronics of 2D semiconductor transition metal dichalcogenides / K. F. Mak, J. Shan // Nature Photonics. – 2016. – Vol. 10. – P. 216–226.
3. Realization of an Electrically Tunable Narrow-Bandwidth Atomically Thin Mirror Using Monolayer MoSe_2 / P. Back [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2018. – V. 120. – P. 037401-11.
4. **Башаров, А. М.** О двухфотонном взаимодействии когерентного излучения с тонкой пленкой резонансных атомов / А. М. Башаров, А. И. Маймистов, С. О. Елютин // ЖЭТФ. – 1999. – Т. 115, вып. 1. – С. 30–42.
5. **Беленов, Э. М.** Когерентные эффекты при распространении УКИ света в среде с двухфотонным резонансным поглощением / Э. М. Беленов, И. А. Полуэктов // ЖЭТФ. – 1969. – Т. 39, вып. 4. – С. 1407–1411.

Поступила в редакцию 30.06.2020 г.

Контакты: va_yurevich@mail.ru (Юревич Владимир Антонович)

Yurevich V.A. DYNAMICS OF LIGHT REFLECTION BY A LOW-DIMENSIONAL QUASICRYSTAL FROM QUANTUM DOTS WITH TWO-PHOTON ABSORPTION

In the average field approximation the effect of the transformation of ultrashort optical pulses reflected by a planar thin layer of a quantum dot supercrystal under the assumption of a two-photon absorption resonance is analysed. In the course of the modelling of the collective reflection process the parameters of semiconductor quantum-dimensional structures are used. The formulation of the area theorem corresponding to the physical situation is given.

Keywords: quasicrystal of quantum dots, coherent interaction, two-quantum resonance, non-linear frequency retuning.

УДК 577.11

АНАЛИЗ МЕТАБОЛИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ПИЩЕВЫХ ВОЛОКОН В ДИНАМИКЕ

В. А. Седакова

кандидат технических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Н. А. Клебанова

кандидат химических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Е. В. Седаков

кандидат технических наук

Могилевский государственный университет продовольствия

А. В. Клебанов

кандидат химических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В статье рассматривается связь химического состава пищевых волокон различного происхождения и их метаболический профиль, образующийся под действием кишечной микрофлоры. Проведено определение физико-химических свойств образцов пищевых волокон, а также качественного и количественного состава короткоцепочечных жирных кислот – как продуктов метаболизма пищевых волокон.

Ключевые слова: пищевые волокна, пектин, клетчатка, гетерополисахариды, короткоцепочечные жирные кислоты, метаболиты микрофлоры.

Введение

На сегодняшний день существуют исследования, посвященные применению пищевых волокон как в качестве биологически активных добавок, так и в виде физиологически функциональных продуктов питания [1–4]. Большинство авторов [1–5] указывают, что потребление пищевых волокон способствует улучшению характеристик кишечной микрофлоры как у здоровых людей, так и у людей с различными функциональными расстройствами желудочно-кишечного тракта [5].

Единого мнения среди ученых о метаболизме пищевых волокон до сих пор не существует. Некоторые ученые [1–9] считают, что гетерополисахариды не используются нормальной и патогенной микрофлорой организма в качестве питательного субстрата. Другие [10–12] наоборот, утверждают, что некоторые гетерополисахариды, в частности, пектин, метаболизируются кишечными бактериями в ободочном отделе, а также в рубце желудка жвачных животных. Существует мнение [13], что короткоцепочечные жирные кислоты (КЦЖК) являются метаболитами сахаро- и протеолитической микрофлоры и образуются при ферментации гомо- и гетерополисахаридов соответствующими бактериями. Следует отметить, что в многочисленных публикациях М. Ардатской М. с соавторами [13–15] раскрыта роль короткоцепочечных жирных кислот (КЦЖК) как диагностических маркеров благополучия кишечной микрофлоры.

© Седакова В. А., Клебанова Н. А., Седаков Е. В., Клебанов А. В., 2021

О механизмах того или иного процесса можно судить по кинетическим закономерностям его протекания, поэтому с *целью* изучения метаболического профиля различных видов пищевых волокон (клетчатки яблочной и льняной, пектина цитрусового и яблочного) проведен анализ качественного и количественного состава КЦЖК в фекалиях экспериментальных животных в динамике.

Материалы и методы. Объектами исследования были образцы клетчатки и пектина:

- клетчатка льна (РБ) – промышленный образец фирмы «НЭОФАРМ», представляет собой сухой однородный порошок бежевого цвета без посторонних примесей (качество подтверждено удостоверением качества № 11/01-01-14);
- клетчатка яблочная (РБ) – промышленный образец фирмы “Акила” – представляет собой порошок коричневого цвета (ТУ ВУ 190476010.001-2005);
- пектин яблочный (Китай) – промышленный образец, тонкодисперсный порошок светло-бежевого цвета без посторонних примесей;
- цитрусовый пектин марки НМ SS – промышленный образец фирмы Каргилл (Германия), представляет собой тонкодисперсный порошок светло-бежевого цвета без посторонних примесей (качество подтверждено сертификатом анализа).

Кормление экспериментальных животных пищевыми волокнами осуществлялось в течение 4 недель в количестве 100% от рекомендуемой физиологической нормы. Через каждые 7 дней отбирали образцы фекалий для определения качественного и количественного состава КЦЖК. В контрольной группе животных также определяли абсолютное содержание КЦЖК через 7, 14 и 21 день. При этом изменений в качественном и количественном содержании КЦЖК в фекалиях экспериментальных животных в этой группе зарегистрировано не было. Поэтому для контрольных значений в дальнейшем эксперименте использовали содержание КЦЖК в фекалиях животных 1-й группы:

Пропионовая кислота (C_3)	3,259±1,134 мг/г
Масляная кислота (C_4)	0,425±0,215 мг/г
Изовалериановая кислота (iC_5)	0,098±0,027 мг/г
Валериановая кислота (C_5)	0,291±0,103 мг/г
Капроновая кислота (C_6)	0,112±0,034 мг/г.

Остальные значения сравнивали с этими контрольными цифрами.

Фекалии экспериментальных животных были предоставлены сотрудниками лаборатории физиологии питания и спорта ГНУ “Институт физиологии НАН Беларуси”.

Определение КЦЖК проводили в соответствии с ранее опубликованной методикой [16].

Статистический анализ полученных результатов проводился с использованием программы STATISTICA 6.0 (StatSoft). С целью проверки статистической нулевой гипотезы об однородности групп исследования использовались непараметрические методы: при сравнении двух групп – *U*-критерий Манна-Уитни, более двух групп – *H*-критерий Краскала-Уоллиса ($p < 0,05$).

Результаты и их обсуждение

Результаты определения химического состава образцов льняной и яблочной клетчатки и физико-химические свойства образцов яблочного и цитрусового пектина приведены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1 – Основные компоненты образцов клетчатки

Показатель, %	Клетчатка льна (РБ)	Клетчатка яблочная (РБ)	Источник методики
Влажность	7,48	7,24	ОСТ 18 – 62 -72
Зольность:			
Общая	6,88	1,94	ОСТ 18 – 62 -72
Нерастворимая в HCl	0,28	-	ОСТ 18 – 62 72
«Сырая» клетчатка	20,98	22,50	ГОСТ 13496.2-91
Пектиновые вещества:			
1. Водорастворимый	1,77	0,34	Патент RU 2434532
2. Протопектин	15,79	6,85	Патент RU 2434532
Органические кислоты:			
1. Уксусная	0,01	-	ГОСТ 23638-90
2. Масляная	0,09	0,38	ГОСТ 23637
3. Молочная	1,08	1,56	ГОСТ 23637
Сахар общий:			
1. Фотоколориметрический метод	6,33	33,41	ГОСТ 5903 – 89
2. Перманганатный метод (метод Бертрана)	4,29	27,38	ГОСТ 5903 – 89
Редуцирующие вещества	2,14	13,69	ГОСТ 5903 – 89
«Сырой» жир	19,63	6,23	ГОСТ 10857-64

Из представленных в таблице 1 данных видно, что влажность обоих образцов клетчатки составляла около 7,5%, количество минеральных веществ в клетчатке яблочной 1,94%, а клетчатке льна – 6,88%, в том числе нерастворимых в 10%-ной соляной кислоте 0,28%. Суммарное содержание целлюлозы и гемицеллюлозы (сырая клетчатка) составляло 20,98% в клетчатке льна и 22,50% – в яблочной клетчатке. Пектиновых веществ обнаружено больше в льняной клетчатке 1,77% – растворимого и 15,79% – протопектина. В яблочной клетчатке обнаружено всего 0,34% – растворимого и 6,86% – протопектина. Общее количество сахаров, определенное фотоколориметрическим методом в обоих образцах соизмеримо (от 34 до 36%). «Сырого» жира значительно больше в льняной клетчатке 19,63%, чем в яблочной 6,23%.

Таблица 2 – Состав и физико-химические показатели качества образцов пектина

Параметр	Яблочный пектин (Китай)	Цитрусовый пектин (Германия)	Ссылка на методику
Влажность, %	6,02	9,02	Определение влажности (ОСТ 18-62-72)
Зольность, %	2,43	2,12	Определение зольности исследуемого пектина (ОСТ 18-62-72)

Окончание таблицы 2

Параметр	Яблочный пектин (Китай)	Цитрусовый пектин (Германия)	Ссылка на методику
<i>Минеральные вещества, нерастворимые в 10%-ной HCl, %</i>	-	-	Определение зольности исследуемого пектина (ОСТ 18-62-72)
<i>Пектовая кислота, % (гравиметрический метод)</i>	85,22	60,98	Определение содержания пектина по пектату кальция (ОСТ 18-62-72)
<i>Содержание чистого пектина, % (титриметрический метод)</i>	31,72	20,65	Определение содержания пектина в исходном образце пектина (ОСТ 18-62-72)
<i>Спирторастворимые балластные вещества, %</i>	25,82	49,9	Определение количества балластных веществ (ОСТ 18-62-72)
<i>Количество сахаров, %</i>	27,20	12,23	Фотоколориметрический ускоренный метод определения массовой доли общего сахара (ГОСТ 5903-89)
<i>Количество сахаров, %</i>	29,69	17,40	Перманганотометрический метод определения массовой доли общего сахара (ГОСТ 5903 – 89)
<i>Количество свободных карбоксильных групп</i>	3,06	4,93	Определение содержания свободных карбоксильных групп (ОСТ 18-62-72)
<i>Количество метоксилированных карбоксильных групп</i>	7,08	4,48	Определение содержания метоксилированных карбоксильных групп (ОСТ 18-62-72)
<i>Степень метоксилирования, %</i>	69,82	47,61	Определение степени метоксилирования (ОСТ 18-62-72)
<i>pH 1%-ного раствора</i>	3,55	3,10	Определение pH 1%-ного раствора пектина (ОСТ 18-62-72)

Оба образца пектина характеризуются небольшой влажностью от 6,02% до 9,02%. Содержание минеральных веществ в образцах находилось на одном уровне: от 2,12% до 2,43%. Причем минеральных веществ, нерастворимых в 10% соляной кислоте, не обнаружено ни в одном из образцов. По содержанию пектовой кислоты и пектина выделялся яблочный пектин 85,22% (пектовой кислоты) и 31,72% (пектина). Общее количество сахаров в образцах пектина изменялось в широком диапазоне: от 12,23% до 27,20%. По физико-химическим показателям качества образец яблочного пектина относился к высокометоксилированным пектинам: его степень метоксилирования – 69,82%. Образец цитрусового пектина относился к среднеметоксилированным: его степень метоксилирования составила 47,61%.

Общее содержание гетерополисахаридов в исследованных образцах пищевых волокон представлено в таблице 3.

Таблица 3 – Общее содержание гетерополисахаридов в образцах пищевых волокон

Параметр	Образец пищевых волокон			
	клетчатка льна (РБ)	клетчатка яблочная (РБ)	пектин яблочный (Китай)	пектин цитрусовый (Германия)
<i>Общее содержание гетерополисахаридов, %</i>	38,54	29,69	31,72	20,65
<i>В том числе: растворимый пектин, %</i>	1,77	0,34	31,72	20,65
<i>Протопектин, %</i>	15,79	6,85	-	-

Из представленных данных видно, что в клетчатке льна общее содержание гетерополисахаридов самое большое (38,54%), причем всего 1,77% (или 4,6% от общего содержания гетерополисахаридов) составляет растворимый пектин, а остальные 36,77% (95,4%) представлены нерастворимыми фракциями пищевых волокон (протопектином, гемицеллюлозой и целлюлозой). В яблочной клетчатке на долю растворимой фракции пищевых волокон приходится всего 1,15% (от общего содержания гетерополисахаридов), а остальная часть представлена нерастворимыми фракциями. При сравнении образцов яблочного и цитрусового пектина видно, что в образце яблочного пектина содержится больше чистого пектина, чем в цитрусовом (31,72% против 20,65%). В образцах пектина содержится только растворимая фракция пектиновых веществ. Уксусная, масляная и молочная кислоты обнаружены в образце льняной клетчатки, в образце яблочной – масляная и молочная. В образцах пектина органических кислот не обнаружено.

Метаболический профиль пищевых волокон анализировали по содержанию в фекалиях пропионовой (C_3), масляной (C_4) и изовалериановой (iC_5) кислот.

Среди наиболее важных функций пропионовой кислоты в кишечнике следует отметить антибактериальный эффект и блокировку адгезии патогенов к эпителию. Следовательно, повышение уровня пропионовой кислоты способствует повышению сопротивляемости организма к бактериальным инфекциям и действию различных патогенов. Динамика изменения уровня пропионовой кислоты в фекалиях экспериментальных животных в зависимости от вида пищевого волокна, используемого в качестве добавки к рациону, представлена на рисунке 1.

В ходе исследования установлено, что яблочная и льняная клетчатка оказывают противоположное действие на накопление пропионовой кислоты в фекалиях экспериментальных животных. При введении в рацион питания животных яблочной клетчатки отклонения уровня пропионовой кислоты находятся в отрицательной области: зафиксировано –25% через 7 дней (статистически недостоверно). Далее отклонение уровня пропионовой кислоты проходит через максимум: на 21 день зафиксировано достоверное отклонение –75%, которое далее начинает уменьшаться: к окончанию эксперимента зафиксировано достоверное отклонение –55%. Введение в рацион питания экспериментальных животных льняной клетчатки приводит к положительным отклонениям уровня пропионовой кислоты по сравнению с контролем. При этом динамика изменения уровня пропионовой кислоты также проходит через максимум: через 21 день уровень C_3 в фекалиях достоверно увеличивается на +90%, а к 28 дню – немного снижается до +80% (статистически

достоверно). Кормление экспериментальных животных пектином цитрусовым в течение 4 недель также приводит к положительным отклонениям уровня пропионовой кислоты в фекалиях: на 7 день зарегистрировано достоверное отклонение +25%, которое непрерывно увеличивается и к окончанию эксперимента на 28 день достигает +70%. Динамика изменения уровня пропионовой кислоты в фекалиях экспериментальных животных при кормлении их добавкой яблочного пектина сходна с динамикой, зафиксированной для яблочной клетчатки. В данном случае отклонения уровня пропионовой кислоты также находятся в отрицательной области и проходят через минимум –70% (2,3 неделя), а к 4 неделе устанавливаются на уровне –30% (не достоверно).

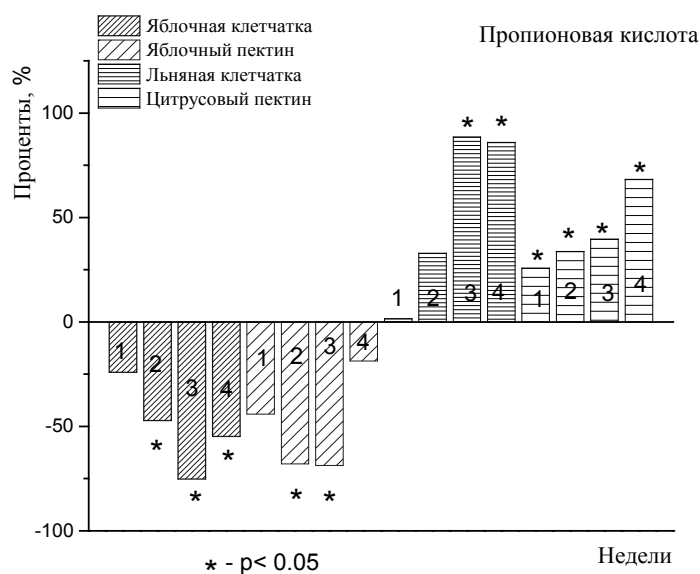


Рисунок 1 – Динамика изменения уровня пропионовой кислоты в фекалиях экспериментальных животных при введении в рацион льняной клетчатки, яблочной клетчатки, цитрусового и яблочного пектина

По степени отклонения уровня пропионовой кислоты в фекалиях экспериментальных животных, зарегистрированных к 28 дню эксперимента, изученные субстраты можно расположить в ряд:

яблочная клетчатка (–55%) < яблочный пектин (–20%) < цитрусовый пектин (+75%) < льняная клетчатка (+90%).

Таким образом, полученные данные позволяют сказать, что введение в рацион экспериментальных животных цитрусового пектина и льняной клетчатки в обоих случаях способствует стимулированию кишечной микрофлоры к выработке дополнительного количества пропионовой кислоты, а введение яблочной клетчатки и яблочного пектина вызывает обратный эффект. Причем для всех видов добавок, за исключением цитрусового пектина, максимальное отклонение уровня пропионовой кислоты, как положительное, так и отрицательное, было зарегистрировано к 21 дню потребления волокон экспериментальными животными. В дальнейшем отмечалась тенденция к снижению уровня пропионовой кислоты в фекалиях животных.

Особое место среди метаболитов кишечной микрофлоры благодаря своим функциям занимает масляная кислота: она ответственна за энергообеспечение эпителия, регулирует пролиферацию и дифференцировку эпителия, способствует усилению местного иммунитета и др. Динамика изменения уровня масляной кислоты в фекалиях экспериментальных животных в зависимости от вводимых в рацион пищевых волокон представлена на рисунке 2.

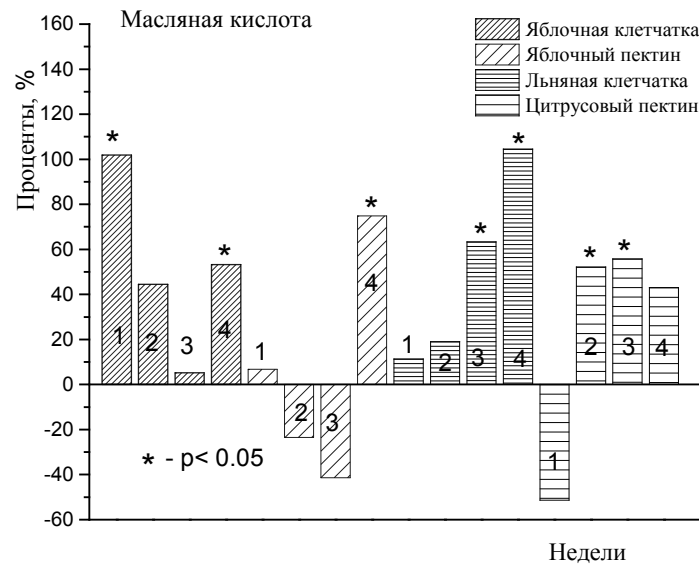


Рисунок 2 – Динамика изменения уровня масляной кислоты в фекалиях экспериментальных животных при введении в рацион льняной клетчатки, яблочной клетчатки, цитрусового и яблочного пектина

В ходе исследования установлено, что динамика изменения уровня масляной кислоты в фекалиях экспериментальных животных для яблочной и льняной клетчатки имеет существенные отличия. Для льняной клетчатки, введенной в рацион животных, происходит непрерывное увеличение положительного отклонения уровня масляной кислоты в фекалиях на протяжении всего эксперимента: от +10% (1 неделя) до +107% (4 недели). В то время как для яблочной клетчатки динамика отклонения уровня масляной кислоты в фекалиях хотя и лежит в положительной области, но проходит через минимум (3 недели). Причем к 7 дню зарегистрировано достоверное положительное отклонение уровня масляной кислоты на уровне +105%, которое далее снижается до +5% (статистически недостоверно) к 21 дню и несколько возрастает к 28 дню +50%. Аналогичный вид носит динамика изменения отклонения уровня масляной кислоты в фекалиях экспериментальных животных, получавших добавку яблочного пектина: если в начале эксперимента было зафиксировано незначительное положительное отклонение уровня масляной кислоты в фекалиях, то уже к 14 дню отклонение уровня C_4 переходит в отрицательную область, достигая минимума на 21 день эксперимента, а к окончанию эксперимента на 28 день вновь переходит в положительную область и достоверно составляет +75%. Анализ динамики изменения уровня масляной кислоты в фекалиях животных, получавших добавку цитрусового пектина, показал, что происходит повыше-

ние продукции масляной кислоты кишечной микрофлорой (зафиксированы достоверные положительные отклонения на 2, 3 и 4 неделе эксперимента).

По степени отклонения уровня масляной кислоты, зарегистрированных к 28 дню эксперимента, изученные субстраты можно расположить в ряд:

яблочная клетчатка (+55%) < яблочный пектин (+75%) < льняная клетчатка (+105%) < цитрусовый пектин (+275%).

Таким образом, такие пищевые волокна, как клетчатка льна, пектин яблочный и клетчатка яблочная способствуют достоверному повышению уровня масляной кислоты в фекалиях экспериментальных животных к окончанию эксперимента (4 неделя), что согласуется с экспериментальными данными, полученными ранее *in vitro* [17].

В литературных источниках содержится сравнительно мало информации о метаболизме и функциях изовалериановой кислоты. Однако известно, что изокислоты продуцируются кишечной микрофлорой в результате ее протеолитической активности из остатков белковой пищи в отличие от неразветвленных кислот которые образуются из полисахаридов. Следовательно, по изменению в динамике уровня изовалериановой кислоты можно судить о протеолитической активности микрофлоры. На рисунке 3 представлена динамика изменения изовалериановой кислоты в фекалиях экспериментальных животных в зависимости от вида пищевой добавки к рациону.

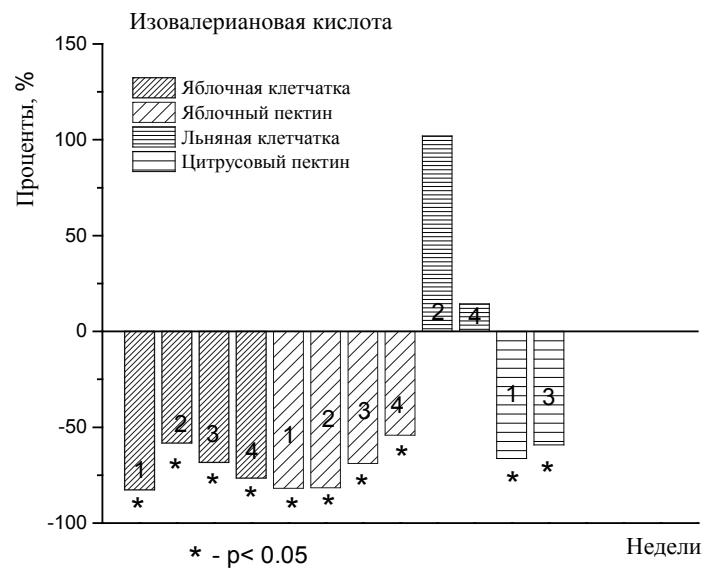


Рисунок 3 – Динамика изменения уровня изовалериановой кислоты в фекалиях экспериментальных животных при введении в рацион льняной клетчатки, яблочной клетчатки, цитрусового и яблочного пектина

В ходе исследования установлено, что кормление экспериментальных животных цитрусовым и яблочным пектином, а также яблочной клетчаткой приводит к достоверному снижению выработки изовалериановой кислоты кишечной микрофлорой животных. Статистически достоверных отклонений уровня изовалериановой кислоты в фекалиях животных, получавших в качестве добавки к рациону льняную клетчатку, не обнаружено.

Таким образом, полученные данные показывают, что введение в рацион цитрусового и яблочного пектина, клетчатки яблочной способствует снижению протеолитической активности микрофлоры, вследствие преобладания гликолитических процессов распада гетерополисахаридов.

Заключение

В результате проведенных исследований определены физико-химические свойства образцов пищевых волокон, а также качественный и количественный состав КЦЖК – продуктов их метаболизма в фекалиях экспериментальных животных в динамике.

Проведенные эксперименты позволяют заключить, что пищевые волокна, содержащие в своем составе полисахаридные компоненты, являются субстратом для кишечной микрофлоры и способствуют уменьшению протеолитической активности вследствие преобладания гликолитических процессов распада. Анализ метаболического профиля пищевых волокон показывает определенное сходство в динамике изменения уровней пропионовой и масляной кислот при использовании в качестве добавки к пищевому рациону яблочных пектина и клетчатки. Это позволяет предположить, что, несмотря на различия в химическом составе, они оказывают сходное действие на кишечную микрофлору, обусловленное, по-видимому, общим происхождением. Цитрусовый пектин и льняная клетчатка обладают пребиотическим действием, что подтверждается динамикой накопления пропионовой и масляной кислот в фекалиях экспериментальных животных в течение 4 недель кормления их соответствующими добавками.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Попова, Т. С.** Нутрицевтики, пребиотики и пробиотики в энтеральном питании / Т. С. Попова, Л. У. Шрамко, Д. Д. Меньшиков [и др.] // *Врач*. – 2001. – № 3. – С. 13–16.
2. **Шендеров, Б. А.** Медицинская микробная экология и функциональное питание / Б. А. Шендеров. – М. : ГРАНТЬ, 1998. – Т. 1 : Микрофлора человека и животных и ее функции. – 704 с.
3. **O'Keefe, S.J.D.** Products of the colonic microbiota mediate the effects of diet on colon cancer risk / S.J.D O'Keefe et al // *Journal of Nutrition*. – 2009. – V. 139. – P. 2044–2048.
4. **Sivieri, K.** Probiotics and intestinal microbiota: implication in colon cancer prevention / K. Sivieri et al. // *Lactic acid bacteria – R And D for food, health and livestock purposes*. – 2013. – P. 217–242.
5. **Плащина, И. Г.** Гуммиарабик: функциональные свойства и области применения / И. Г. Плащина, М. А. Булатов, М. Ю. Игнатов, Д. М. Хаддад // *Пищевая промышленность*. – 2002. – № 6. – С. 54–55.
6. **Arakawa, S.** Enhancing effect of carageenan on the induction of rat colonic tumors by 1,2-dimethylhydrazine and its relation to β -glucuronidase activities in feces and other tissue / S. Arakawa, M. Ito, M. Okumura et al. // *J.Nutr. Sci., Vitaminol (Tokio)*. – 1986. – Vol. 32. – № 5. – P. 481–485.
7. **Glauert, B. H.** Enhancement of 1,2-dimethylhydrazine-induced colon carcinogenesis in mice by dietary agar / B. H. Glauert, M. R. Bennick, C. N. Sander // *Food Cosmet. Toxicol.* – 1981. – Vol. 19. – № 3. – P. 281–286.
8. **Harris, P. J.** Dietary fibers may protect or enhance carcinogenesis / P. J. Harris, L. R. Ferguson // *Mutat. Res.* – 1999. – Vol. 443, № 1-2. – P. 95–110.
9. **Jacobs, L. R.** Relationship between colonic luminal pH, cell proliferation and colon carcinogenesis 1,2-dimethylhydrazine-treated rats fed high fiber diets / L. R. Jacobs, J. R. Lupton // *Cancer res.* – 1986. – Vol. 46, № 4. – P. 1727–1734.
10. **Ардатская, М. Д.** Метаболические эффекты пищевых волокон / М. Д. Ардатская // *Российский журнал гастроэнтерологии, гепатологии, колопроктологии. Приложение № 14 «Материалы XVI сессии Академической школы-семинара имени А. М. Уголева «Современные проблемы физиологии и патологии пищеварения»*. – 2001. – Т. 11. – № 4. – С. 91–102.

11. *Нечаев, А. П.* Пищевые добавки / А. П. Нечаев, А. А. Кочеткова, А. Н. Зайцев. – Москва : Колос, 2001.
12. *Sivieri, K.* Probiotics and intestinal microbiota: implication in colon cancer prevention / K. Sivieri et.al. // Lactic acid bacteria – R And D for food, health and livestock purposes. – 2013. – P. 217–242.
13. *Ардатская, М. Д.* Клиническое значение короткоцепочечных жирных кислот при патологии желудочно-кишечного тракта : автореф. дис. ... д. м. н. / М. Д. Ардатская. – Москва, 2003. – 46 с.
14. *Ардатская, М. Д.* Летучие жирные кислоты и их диагностическое и прогностическое значение в гастроэнтерологической клинике / М. Д. Ардатская, О. Н. Минушкин, Н. И. Прихно и др. // Российский журнал гастроэнтерологии, гепатологии, колопроктологии. – 2000. – № 5. – С. 63–70.
15. *Ардатская, М. Д.* Синдром избыточного бактериального роста / М. Д. Ардатская. – М. : Форте принт, 2011. – 56 с.
16. *Седакова, В. А.* Определение короткоцепочечных жирных кислот в биологических объектах методом газожидкостной хроматографии / В. А. Седакова, А. В. Клебанов, А. Н. Осипенко, Н. А. Клебанова // Вестник фармации. – 2013. – № 3(61). – С. 37–42.
17. *Седакова, В. А.* Влияние бифидо- и лактобактерий на образование отдельных короткоцепочечных жирных кислот при ферментации пищевых волокон / В. А. Седакова, Н. А. Клебанова, С. В. Мороз, А. В. Клебанов / Сборник научных трудов “Здоровье и окружающая среда”. – Вып. 28. – 2018. – С. 176–181.

Поступила в редакцию 24.06.2020 г.

Контакты: sedakova@msu.by (Седакова Валентина Антоновна)

Sedakova V.A., Klebanova N.A., Sedakov E.V., Klebanov A.V. ANALYSIS OF THE METABOLIC PROFILE OF VARIOUS SPECIES OF FOOD FIBERS IN DYNAMICS

The article discusses the relationship of the chemical composition of dietary fiber of various origins and their metabolic profile formed under the influence of intestinal microflora. The chemical composition of dietary fiber is determined, namely, the composition of heteropolysaccharides, and the composition of short-chain fatty acids is defined as metabolic products of dietary fiber.

Keywords: dietary fiber, pectin, heteropolysaccharides, short chain fatty acids, microflora metabolites.

УДК 616-097

ВОЗРАСТНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ИММУННОГО СТАТУСА ДЕТЕЙ С ЧАСТЫМИ РЕСПИРАТОРНЫМИ ЗАБОЛЕВАНИЯМИ

О. В. Поворова

старший преподаватель

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В. А. Ливинская

кандидат физико-математических наук

Белорусско-Российский университет (Могилев, Беларусь)

Т. И. Чегерова

кандидат технических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Для количественной оценки иммунного статуса на популяционном уровне использовался математический аппарат теории нечетких множеств, в частности, функции принадлежности. По значениям глобального критерия, характеризующего в целом состояние и функционирование иммунной системы, определены статистически значимые различия по возрастным группам 1–2, 3–6, 7, 8–16 лет среди детей Могилевской области с частыми респираторными заболеваниями. Определены диагностически значимые параметры изменений клеточного и гуморального звеньев иммунитета у детей с повторными респираторными инфекциями для критических возрастных групп.

Ключевые слова: содержание сывороточных иммуноглобулинов, содержание субпопуляций лимфоцитов, часто болеющие респираторными заболеваниями дети 1–16 лет.

Введение

Термин “иммунный статус” характеризует состояние иммунной системы и представляет собой совокупность количественных показателей ее компонентов в определенный момент времени. В развитии иммунной системы выделяют определенные возрастные критические периоды, предопределяющие ее реактивность и подверженность всего организма факторам среды [1]. Клинические признаки инфекционного процесса различны в зависимости от особенностей онтогенеза и зрелости иммунной системы. Частые респираторные заболевания в развитии последующего инфекционного процесса могут быть как причиной иммунологической недостаточности, так и следствием ее [2]. Часто болеющие респираторными инфекциями дети имеют различные изменения показателей как клеточного, так и гуморального звеньев иммунитета в виде повышения/снижения уровней отдельных субпопуляций лимфоцитов при нормальных уровнях других, изменения содержания иммуноглобулинов в сыворотке крови [3; 4; 5]. Гомеостаз организма подразумевает подвижное равновесие, которое достигается повышением функциональной активности одних составляющих при пониженных значениях других. Так, например, при подавлении клеточного иммунитета возрастает роль факторов гуморального иммунитета и наоборот. Основным направлением выявления причин заболеваний у часто болеющих респираторными инфекциями

ми детей является определение классов и субклассов иммуноглобулинов [6; 7]. Исследования с комплексной характеристикой иммунного статуса детского населения не многочисленны [8; 9; 10], основной причиной чему является сложность интерпретации данных клинических анализов из-за различий нормирования показателей по возрастному показателю. Определение диагностически значимых параметров изменений клеточного и гуморального звеньев иммунитета у детей с повторными респираторными инфекциями для разных возрастных групп позволит определить критические периоды в развитии иммунозависимой заболеваемости.

Цель исследования – определить критические возрастные периоды у детей с частыми острыми респираторными заболеваниями и дать комплексную оценку состояния их иммунного статуса.

Материалы и методы исследований

Объект исследования – 512 детей в возрасте 1–16 лет Могилевской области, часто болеющие острыми респираторными заболеваниями и здоровые на момент обследования. Предмет исследования – показатели иммунного статуса. Анализ показателей клеточного и гуморального иммунитета проводился в отделе клинической иммунологии УЗ “Могилевский областной лечебно-диагностический центр”. Содержание сывороточных иммуноглобулинов IgG, IgA, IgM определяли методом твердофазного иммуноферментного анализа (Tespа, Австрия) с наборами реагентов на основе моноклональных антител (“Вектор-Бест”, Новосибирск). Показатели клеточного иммунитета CD3+, CD3+CD4+, CD3+CD8+, CD3-CD19+ определяли методом проточной цитометрии (Beckman Coulter’s Navios). В качестве интервалов референсных значений (РЗ) приняты показатели, приведенные в Таблице 1.

Таблица 1 – Интервалы референсных значений (РЗ)

1. Иммунокомпетентные клетки								
				1–6 лет	7-16 лет			
лейкоциты		абс/*10 ⁹ л		5,0-12,0	4,0-9,0			
лимфоциты		%		34-48	18-40			
		абс/*10 ⁹ л		2,5-6,0	1,2-3,5			
CD3+		%		62-69	60-80			
		абс/*10 ⁹ л		1,82-3,01	1,0-2,4			
CD3+CD4+		%		30-40	33-50			
		абс/*10 ⁹ л		1,02-1,84	0,6-1,7			
CD3+CD8+		%		25-32	16-39			
		абс/*10 ⁹ л		0,81-1,52	0,3-1,0			
CD3-CD19+		%		21-28	5-22			
		абс/*10 ⁹ л		0,74-1,33	0,04-0,4			
2. Гуморальные факторы защиты								
		1 год	2 года	3-5 лет	6-9 лет	10-13 лет		14-16 лет
IgG	мг/мл	3,0–10,0	3,5-10,0	5,0-13,0	6,0-13,0	7,0-14,0		8,0-18,0
IgM	мг/мл	0,3–1,0	0,4-1,4	0,4-1,8	0,4-1,6	0,4-1,5		0,6-2,8
		1 год	2-3 года	4-5 лет	6-7 лет	8-10 лет	11-13 лет	14-16 лет
IgA	мг/мл	0,1-1,31	0,19-2,2	0,48-3,45	0,41-2,97	0,51-2,97	0,44-3,95	0,9-4,5

Как видно из данных Таблицы 1, интервалы РЗ показателей клеточного и гуморального иммунитета различаются по возрастным группам. Для количественной оценки иммунного статуса на популяционном уровне, включающем показатели каждого индивидуума с широким разбросом значений в пределах и вне диапазона РЗ, использовался математический аппарат теории нечетких множеств, в частности, функции принадлежности, или как ее еще называют функция желательности [11; 12]. Данный инструмент позволяет переводить абсолютные значения показателей в относительные, учитывающие возрастные особенности отклонений от нормы [13]. С учетом особенностей возрастных норм для каждого из 9 указанных показателей иммунного статуса в шестнадцати возрастных группах были построены частные функции желательности к различным состояниям (Рисунок 1).

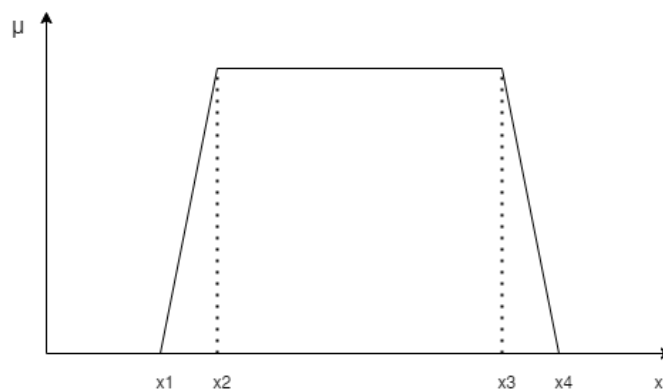


Рисунок 1 – Функция желательности показателей иммунитета с опорными точками: x_1 – минимальное и x_4 – максимальное значения показателя в выборке; x_2 – нижний уровень и x_3 – верхний уровень показателя РЗ

Функция желательности принимает значение 1 в области гарантированной нормы, 0 – в области гарантированной патологии. Значение функции желательности равномерно уменьшается от 1 до 0 по мере удаления значения показателя от области гарантированной нормы. За основу при построении функций желательности, за область гарантированной нормы брались существующие нормативные диапазоны РЗ лаборатории УЗ “МОЛДЦ” (Таблица 1), для расчета ширины переходной зоны в каждом конкретном случае использовались минимальные и максимальные значения показателя в выборке. Опорные точки функции желательности показателей иммунного статуса в выборке каждой возрастной группы, отмеченные на Рисунке 1: x_1 – минимальное и x_4 – максимальное значения показателя в выборке; x_2 – нижний уровень и x_3 – верхний уровень РЗ.

Все изучаемые показатели были разделены на три группы, учитывающие этапность проведения лабораторного анализа (общий анализ крови, иммунологические реакции 1-го и 2-го уровней). В первой группе анализировалось содержание лейкоцитов, лимфоцитов; во второй группе – содержание сывороточных иммуноглобулинов; в третьей группе – содержание субпопуляций лимфоцитов.

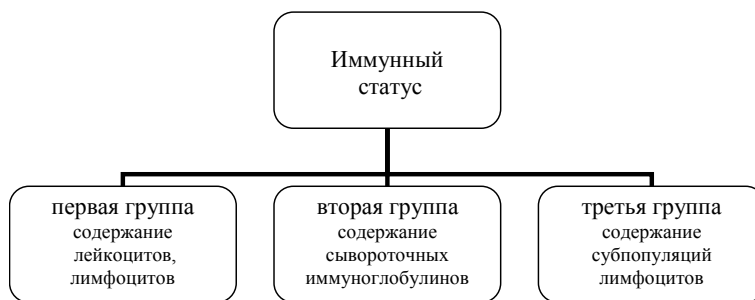


Рисунок 2 – Группировка показателей по этапам проведения лабораторного анализа

Для каждого индивидуума значения изучаемых показателей были оценены с помощью соответствующих функций желательности. Далее для каждой выделенной группы показателей – первой, второй и третьей рассчитывался агрегированный частный критерий, соответственно Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 . Агрегирование производится традиционно с помощью аддитивной, мультипликативной или максиминной свертки [14]. Для целей нашего исследования наиболее подходящей оказалась мультипликативная свертка вида [15]:

$$\Gamma_j = \mu_1^{\alpha_1} \cdot \mu_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \mu_n^{\alpha_n}, (j = 1, 2, 3),$$

где Γ_j – значение частного критерия одной из выделенных групп показателей “иммунного статуса”;

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ – функции желательности исследуемых показателей $x_1, x_2, \dots, x_n$;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ – коэффициенты относительной важности отдельных показателей в общей оценке.

В виду объективной значимости показателей $x_1, x_2, \dots, x_n$ и отсутствия между ними предпочтений (нецелесообразно выделять наиболее и наименее важные показатели иммунитета, так как иммунный гомеостаз зависит от всех), были приняты значения коэффициентов относительной важности α_i равными 1 (единице).

Таким образом, для каждой из выделенных групп показателей иммунитета получены частные оценки $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, которые принимают значения от 0 до 1, и характеризуют степень желательности к норме каждой составляющей иммунного статуса.

Затем эти значения по вышеприведенной формуле также агрегировались в глобальный критерий иммунного статуса D:

$$D = \Gamma_1^{\alpha_1} \cdot \Gamma_2^{\alpha_2} \cdot \Gamma_3^{\alpha_3}.$$

Значение критерия D, которое характеризует состояние иммунной системы в целом, также принимает значение от 0 до 1. Чем больше показателей иммунного статуса имеют значения вне диапазона PЗ, чем более удален каждый показатель от PЗ, тем ближе к нулю значение функции желательности исследуемых частных групп и глобального критерия в целом, характеризующего иммунный статус ребенка.

Полученные значения частных и глобального критериев иммунного статуса сравнивались в выделенных возрастных группах. Статистическая достоверность различий оценивалась с помощью дисперсионного анализа (F), непараметрических методов Краскела-Уоллиса (H), Манна-Уитни (Z), медианного теста (χ^2), кри-

статистический уровень значимости принят 0,05. Статистический анализ проводили с помощью пакета прикладных программ “Statistica 8.0”.

Результаты исследований

Для выявления влияния фактора “возраст” на величину глобального критерия иммунного статуса D был проведен однофакторный дисперсионный анализ, результаты которого показали статистически значимое влияние ($F = 5,39$ $p = 0,0000$) этого фактора. Непараметрический критерий Краскела-Уоллиса также выявил статистически достоверные различия глобального критерия D у детей разного возраста исследуемого диапазона 1–16 лет ($H = 41,29$ $p = 0,0003$).

На Рисунке 3 представлены средние значения глобального критерия иммунного статуса часто болеющих детей респираторными заболеваниями для разных возрастных групп. Как видно из Рисунка 3, дети 1–6 лет имеют схожее значение функции желательности, отличающееся более низким значением по сравнению с детьми более старшего возраста. Самое высокое значение приближенности к нормам глобального критерия определено у детей 7 лет, поэтому часто болеющим респираторными заболеваниями детям рекомендуется начинать обучение в школе с семи лет, а не с шести, т. к. по состоянию иммунитета они не готовы в шесть лет к дополнительным учебным нагрузкам. У детей внутри возрастных групп 1–6 лет и 8–16 лет не выявлены статистически значимые различия по уровню глобального критерия дисперсионным анализом. У детей 6 и 7 лет определены статистически значимые отличия с помощью однофакторного дисперсионного анализа ($F = 21,52$ $p = 0,0000$).

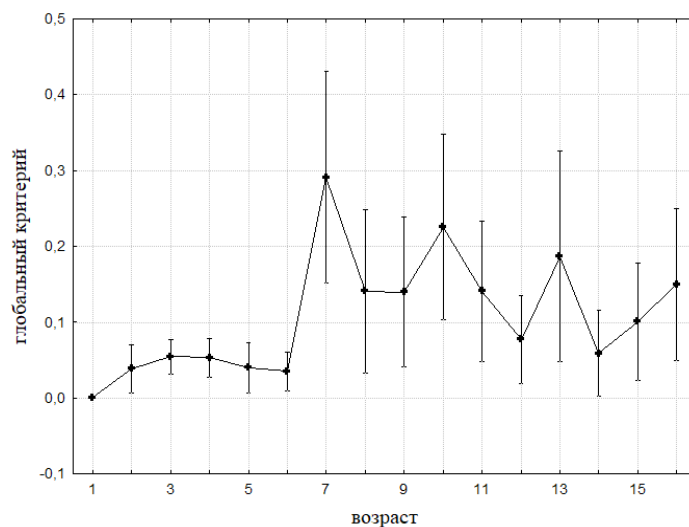


Рисунок 3 – Средние значения и 95 % доверительные интервалы глобального критерия D “иммунный статус” в зависимости от возраста

Статистически значимые отличия выявлены между возрастными группами 1–2, 3–6, 7, 8–16 лет ($H = 27,33$ $p = 0,0000$; $\chi^2 = 25,65$ $p = 0,0000$). В результате попарного сравнения возрастных групп по значению глобального критерия иммунного статуса определены статистически значимые отличия между группами детей 1–2 года и 3–6 лет ($Z = -4,11$ $p = 0,0000$), между группами детей 3–6 и 7 лет ($Z = 3,30$

$p = 0,0009$), между группами 7 и 8–16-летних ($Z = 2,12$ $p = 0,0341$). Таким образом, определены четыре возрастные группы детей, отличающиеся по уровню глобального критерия иммунного статуса: 1–2 года, 3–6 лет, 7 лет, 8–16 лет.

На Рисунке 4 представлены диаграммы размаха глобального критерия иммунного статуса по каждому году жизни и в четырех выделенных возрастных группах. Самое низкое значение этого показателя у детей 1–2 лет (Рисунок 4 Б), модальное и медианное значение равно 0, максимальное составляет 0,3. Все дети возрастной группы 1–2 года имеют показатель глобального иммунного статуса D с отклонением от нормы более 70%. В возрастных группах 3–6 и 8–16 лет медиана глобального критерия D близка к нулю, что свидетельствует о том, что половина детей данных возрастных групп имеет показатель глобального критерия иммунного статуса с отклонением от нормы около 100%. Если рассматривать каждый возрастной период (Рисунок 4 А), то видно, что только дети 7 и 10 лет имеют размах глобального критерия иммунного статуса выше значения 0,37, что соответствует нижней границе допустимых значений [13]. У детей остальных возрастов этот показатель ниже 0,37. Для того чтобы определить, какие иммунологические параметры в каждой возрастной группе выполняют роль предикторов, были проанализированы частные критерии Г1, Г2, Г3.

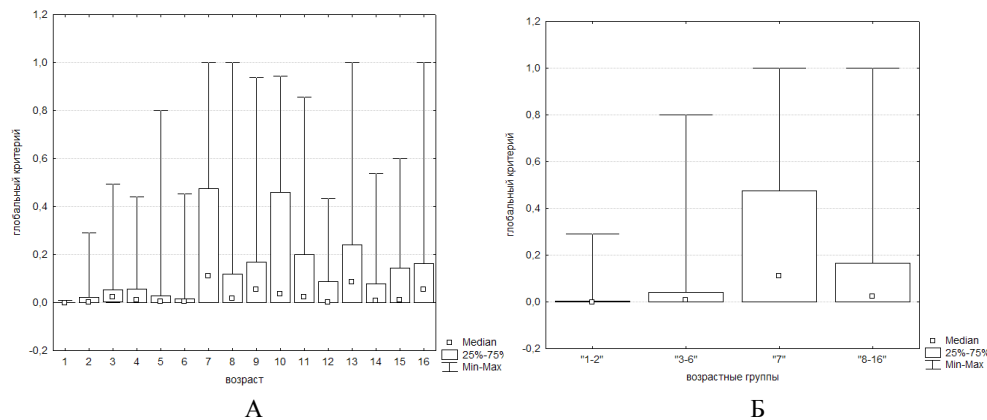


Рисунок 4 – Диаграмма размаха (Ме, интервал между 25-м и 75-м процентилями) для глобального критерия D “иммунный статус” у детей в зависимости от возраста (А) и в возрастных группах (Б) 1–2 года, 3–6 лет, 7 лет, 8–16 лет

На Рисунке 5 показаны диаграммы размаха частного критерия Г1 “лейкоциты/лимфоциты” в каждом из шестнадцати рассматриваемых возрастов и четырех возрастных групп. Третьи квантили (или 75% перцентили) для детей возрастов 3–9, 11–13, 16 лет рассматриваемого частного критерия близки к единице как максимальному значению, что свидетельствует о том, что значения показателей состояния организма детей данной группы максимально приближены к норме и не являются причиной снижения глобального критерия иммунного статуса. В возрастной группе 1–2 года медиана значения частного критерия клеток крови и ее верхний квартиль составляет 0,7 и 0,85 соответственно. Самые низкие значения медиан частного критерия Г1 определены у детей 1, 2, 8, 9, 11, 15 лет, поэтому глобальный критерий D будет ниже у данных возрастных групп. Выявлено статистически значимое различие между четырьмя возрастными группами ($H = 8,06$ $p = 0,0448$) по частному критерию Г1.

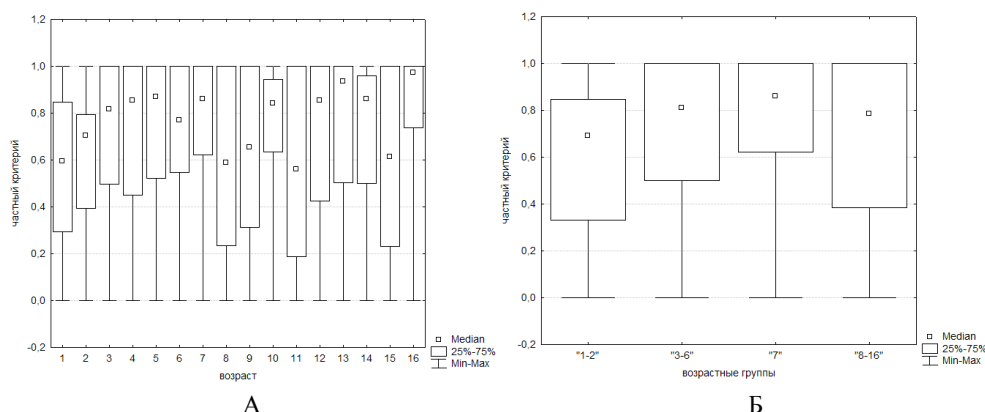


Рисунок 5 – Диаграмма размаха частного критерия Г1 у детей в зависимости от возраста (А) и в возрастных группах (Б); Ме [25–75%]

При изучении значений функций желательности лейкоцитов и лимфоцитов в разных возрастных группах статистически достоверные различия были зафиксированы только по лимфоцитам ($F = 1,76$ $p = 0,0368$). Можно сделать вывод, что у детей с частыми респираторными заболеваниями значения содержания лимфоцитов более показательны, чем содержание лейкоцитов.

Особенностью нормирования сывороточных иммуноглобулинов является не только разница в возрастных периодах, но и то, что уровень содержания IgG на порядок больше, чем IgM и IgA, что делает невозможным единую количественную оценку их абсолютных показателей. В результате построения частного критерия Г2 значения показателей преобразуются в безразмерную шкалу для единой характеристики состояния гуморального иммунитета. Одним из спорных вопросов клинической иммунологии является значимость показателей состояния гуморального иммунитета в периодах между заболеваниями. Вне диапазона референсных значений определено содержание IgM у 15,4%, IgA – 16,0%, IgG – 20,1% детей всей изучаемой популяции. Как минимум один из трех изучаемых сывороточных белков находится за пределами РЗ у 40,2% детей. Как видно из Рисунка 6, дети всех возрастов (за исключением 14-летних) и четырех возрастных групп имеют медиану и/или Q3 на уровне максимального значения частного критерия “иммуноглобулины”.

Дети двух, трех, семи лет имеют значения функций желательности иммуноглобулинов, максимально приближенные к норме. Между возрастными группами 1–2, 3–6, 7, 8–16 лет определены статистически значимые отличия по частному критерию Г2 ($H = 36,43$ $p = 0,0000$). В результате попарного сравнения четырех возрастных групп статистически значимые отличия определены только между группами 7 и 8–16 лет по частному критерию Г2 ($Z = 2,77$ $p = 0,0056$). Таким образом, по частному критерию “иммуноглобулины” определены статистически значимые отличия по четырем изучаемым возрастным группам.

Среди представителей анализируемой популяции у 92,2% ($n = 472$) содержание субпопуляций лимфоцитов находится вне диапазона РЗ: у 79,9% ($n = 409$) детей по содержанию цитотоксических CD8+ Т-лимфоцитов; 79,7% ($n = 408$) – хелперных CD4+ Т-лимфоцитов; 46,9% ($n = 240$) – общих CD3+ Т-лимфоцитов; 53,5% ($n = 274$) – CD19+ В-лимфоцитов. Для определения разницы по содержанию иммунокомпетентных клеток в зависимости от возраста проанализировано распределение частного критерия “субпопуляции лимфоцитов” Г3 и представлено на Рисунке 6.

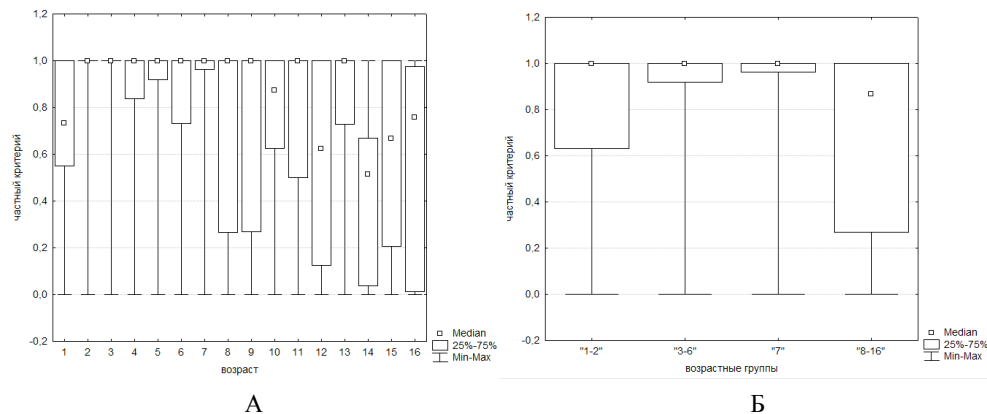


Рисунок 6 – Диаграмма размаха частного критерия Г2 у детей в зависимости от возраста (А) и в возрастных группах (Б); Ме [25–75%]

Как видно из Рисунка 7, для всех возрастов и четырех возрастных групп медиана частного критерия Г3 ниже значения 0,37, соответствующего границе допустимых значений [13]. Это указывает на нарушение условий саморегуляции гомеостаза организма, поэтому наиболее значимым является контроль за показателями клеточного иммунитета у детей в периодах между заболеваниями. Выявлены статистически значимые различия для функций желательности у шестнадцати групп детей по всем показателям клеточного иммунитета: CD3 ($F = 16,50$ $p = 0,0000$); CD4 ($F = 1,97$ $p = 0,0158$); CD8 ($F = 1,71$ $p = 0,0464$); CD19 ($F = 95,88$ $p = 0,0000$). Между четырьмя анализируемыми возрастными группами определены статистически значимые отличия по функциям желательности CD3 ($H = 231,7$ $p = 0,0000$); CD8 ($H = 15,9$ $p = 0,0012$); CD19 ($H = 409,9$ $p = 0,0012$). По значениям функции желательности CD4 статистически значимая разница не выявлена. Между возрастными группами 1–2, 3–6, 7, 8–16 лет также имеются статистически значимые отличия по частному критерию Г3 ($H = 95,75$ $p = 0,0000$). Таким образом, между четырьмя выделенными возрастными группами определена статистически значимая разница по частному критерию “субпопуляции лимфоцитов”.

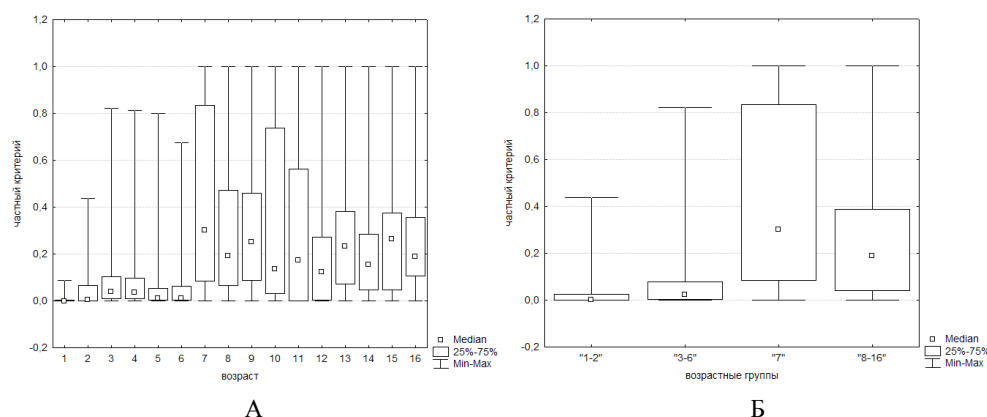


Рисунок 7 – Диаграмма размаха частного критерия Г3 у детей в зависимости от возраста (А) и в возрастных группах (Б); Ме [25–75%]

Средние значения функций желательности каждого оцениваемого показателя, частных и глобального критерия для каждого возраста и выделенных возрастных групп приведены в Таблице 2. Определена доля детей в каждом возрасте с отклонениями от нормы по содержанию определяемых показателей. Она составила:

- для лейкоцитов от 3,7 до 14% детей ($\mu_{\text{ЛЦ}}$: min = 0,86 у 12-летних, max = 0,96 у 11-летних);
- для лимфоцитов от 15,4 до 41,7% детей ($\mu_{\text{ЛФ}}$: min = 0,58 у 11-летних, max = 0,85 у 16-летних);
- для IgG от 4,2 до 31% детей (μ_{IgG} : min = 0,69 у 14-летних, max = 0,96 у 2-летних);
- для IgA до 36,8% детей (μ_{IgA} : min = 0,63 у 14-летних, max = 1 у 2-х и 13-летних);
- для IgM от 3,8 до 19,6% детей (μ_{IgM} : min = 0,8 у 16-летних, max = 0,962 у 4-хлетних);
- для CD3 до 71,8% детей (μ_{CD3} : min = 0,28 у 1-летних, max = 1 у 15-летних);
- для CD4 от 38,3 до 71% детей (μ_{CD4} : min = 0,29 у 1-летних, max = 0,62 у 10-летних);
- для CD8 от 38,2 до 77,1% детей (μ_{CD8} : min = 0,23 у 1-летних, max = 0,62 у 13-летних);
- для CD19 до 67% детей (μ_{CD19} : min = 0,33 у 1-летних, max = 1 у 7–8, 10, 12–16-летних).

Таблица 2 – Количественная оценка возрастных особенностей функций желательности к норме

возраст	n	D	Γ_1	$\mu_{\text{ЛЦ}}$	$\mu_{\text{ЛФ}}$	Γ_2	μ_{IgG}	μ_{IgA}	μ_{IgM}	Γ_3	μ_{CD3}	μ_{CD4}	μ_{CD8}	μ_{CD19}
1. Среднее значение для каждого возраста														
1	20	0,003	0,562	0,885	0,654	0,677	0,890	0,950	0,832	0,009	0,282	0,290	0,229	0,330
2	24	0,037	0,621	0,867	0,695	0,889	0,958	1	0,903	0,068	0,413	0,582	0,499	0,424
3	68	0,064	0,720	0,938	0,753	0,877	0,928	0,967	0,952	0,102	0,613	0,609	0,495	0,440
4	60	0,052	0,719	0,908	0,789	0,823	0,951	0,901	0,962	0,087	0,717	0,498	0,437	0,418
5	53	0,033	0,712	0,902	0,781	0,812	0,924	0,919	0,948	0,057	0,680	0,524	0,431	0,338
6	48	0,041	0,713	0,884	0,791	0,795	0,899	0,930	0,942	0,073	0,585	0,485	0,455	0,400
7	29	0,261	0,745	0,905	0,798	0,846	0,931	0,946	0,917	0,415	0,948	0,599	0,599	1
8	25	0,120	0,560	0,928	0,605	0,702	0,900	0,896	0,900	0,305	0,931	0,583	0,465	1
9	22	0,137	0,608	0,909	0,699	0,744	0,853	0,934	0,920	0,302	0,898	0,567	0,553	0,955
10	28	0,200	0,720	0,914	0,795	0,743	0,940	0,925	0,878	0,374	0,920	0,617	0,536	1
11	27	0,136	0,556	0,963	0,583	0,735	0,830	0,951	0,886	0,334	0,926	0,526	0,582	0,963
12	22	0,094	0,694	0,860	0,757	0,580	0,760	0,883	0,858	0,234	0,943	0,398	0,583	1
13	20	0,200	0,738	0,929	0,759	0,814	0,891	1	0,923	0,333	0,900	0,558	0,618	1
14	20	0,061	0,722	0,950	0,772	0,423	0,690	0,632	0,828	0,200	0,950	0,438	0,436	1
15	20	0,119	0,584	0,890	0,665	0,592	0,721	0,850	0,900	0,344	1	0,535	0,518	1
16	26	0,134	0,807	0,957	0,846	0,585	0,811	0,782	0,804	0,283	0,962	0,498	0,508	1
2. Среднее значение для возрастных групп														
"1-2"	44	0,019	0,594	0,875	0,676	0,793	0,927	0,977	0,871	0,041	0,353	0,449	0,376	0,382
"3-6"	229	0,049	0,716	0,910	0,777	0,830	0,927	0,931	0,952	0,082	0,650	0,534	0,457	0,402
"7"	29	0,261	0,745	0,905	0,798	0,846	0,931	0,946	0,917	0,415	0,948	0,599	0,599	1
"8-16"	210	0,134	0,665	0,924	0,719	0,662	0,828	0,876	0,876	0,304	0,936	0,528	0,533	0,990

Анализ частных и глобального критериев, характеризующих состояние иммунного статуса детей в четырех возрастных группах и в целом по популяции, представлен на Рисунке 8.

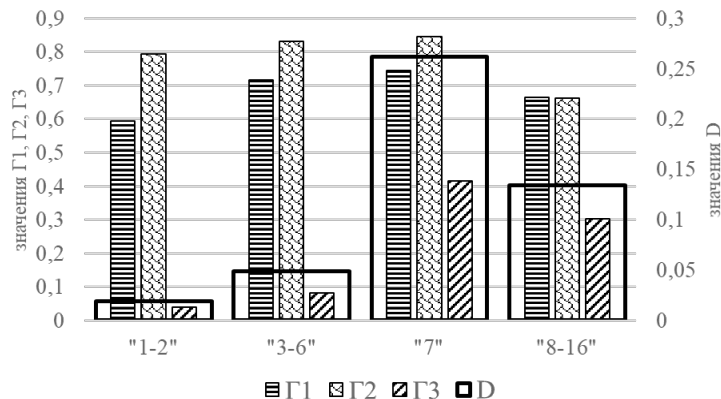


Рисунок 8 – Значения глобального критерия “иммунный статус” (D), частных критериев “лейкоциты/лимфоциты” (Г1), “иммуноглобулины” (Г2), “субпопуляции лимфоцитов” (Г3) в разных возрастных группах

Из четырех возрастных групп наибольшее приближение показателя глобального критерия к норме у детей семи лет, а наименьшее у 1–2-летних: значение глобального критерия “иммунный статус” составило 0,26 и 0,02 соответственно, что свидетельствует о том, что 73,9% 7-летних и 98,1% 1–2-летних имеют показатели состояния иммунитета вне диапазона РЗ. У 1–2-летних детей имеют отклонения от нормы 40,6% по значениям Г1, 20,7% – Г2, 95,9% – Г3. У 3–6-летних доля детей со значениями показателей состояния иммунитета вне РЗ, определенная частным критерием Г1, составила 28,4%, Г2 – 17%, Г3 – 91,8%. Доля семилетних детей со значениями показателей иммунитета вне диапазона РЗ по частному критерию Г1 составила 25,5%, по Г2 – 15,4%, по Г3 – 91,8%. Среди возрастной группы 8–16 лет доля детей имеют отклонения от нормы у 33,5% по частному критерию “лейкоциты/лимфоциты”, 33,8% – по критерию “иммуноглобулины”, 69,6% – по критерию “субпопуляции лимфоцитов”.

Анализируя выделенные возрастные группы, выявлено, что в группе 7-летних приближена к норме по трем частным критериям Г1, Г2, Г3 большая доля детей, чем для других возрастов. Наиболее удалены от нормы дети 1–2 лет по значениям частных критериев “лейкоциты/лимфоциты”, “субпопуляции лимфоцитов” и дети 8–16 лет по частному критерию “иммуноглобулины”.

Для установления соответствия между вербальными оценками частных критериев показателей иммунитета и полученными оценками функции желательности показателей, предлагается следующее деление шкалы желательности на пять интервалов [13; 14]:

- (0-0,2) – “очень плохо”, чрезвычайно высокий уровень отклонения от РЗ;
- (0,2-0,37) – “плохо”, высокий уровень отклонения от РЗ;
- (0,37-0,63) – “удовлетворительно”, средний уровень отклонения от РЗ;
- (0,63-0,8) – “хорошо”, низкий уровень отклонения от РЗ;
- (0,8-1) – “очень хорошо”, отклонения от диапазона РЗ отсутствуют.

Иллюстрация вербальной оценки состояния общего гомеостаза организма для различных возрастных групп часто болеющих детей Могилевской области, характеризующегося частными критериями, представлена в Таблице 3, согласно которой:

- дети 1-2 лет имеют средний уровень отклонения от нормы по показателям “лейкоциты/лимфоциты” и чрезвычайно высокий – по “субпопуляциям лимфоцитов”;
- дети 3–6 лет имеют чрезвычайно высокий уровень отклонения от РЗ по “субпопуляциям лимфоцитов”;
- дети семи лет – средний уровень отклонения от нормы по содержанию “субпопуляций лимфоцитов”;
- дети 8–16 лет – высокий уровень отклонения от РЗ содержания “субпопуляций лимфоцитов”.

Таблица 3 – Вербальная оценка возрастных особенностей частных критериев иммунитета детей Могилевской области с частыми респираторными заболеваниями

	1-2 года	3-6 лет	7 лет	8-16 лет
значимые отклонения от диапазона РЗ отсутствуют	Г2	Г2	Г2	
низкий уровень отклонения от РЗ		Г1	Г1	Г1, Г2
средний уровень отклонения от РЗ	Г1		Г3	
высокий уровень отклонения от РЗ				Г3
чрезвычайно высокий уровень отклонения от РЗ	Г3	Г3		

Заключение

Свойство саморегуляции систем организма определяется наличием определенных приспособительных реакций, совокупностью прямых и обратных связей. На нарушение условий саморегуляции иммунного гомеостаза указывают значения глобального критерия, рассчитанного по значениям функций желательностей, построенных для каждого частного показателя иммунитета. Одной из основных характеристик состояния здоровья являются количественные показатели составляющих компонентов тканей внутренней среды. Значения частного критерия “субпопуляции лимфоцитов” значительно ниже значения частного критерия “иммуноглобулины”, что свидетельствует о значимости факторов гуморального иммунитета в выравнивании динамического равновесия у детей с частыми респираторными заболеваниями в условиях подавления клеточного иммунитета.

По значениям глобального критерия, характеризующего в целом состояние и функционирование иммунной системы, определены статистически значимые различия по возрастным группам 1–2, 3–6, 7, 8–16 лет среди детей с частыми респираторными заболеваниями.

Рассчитанные значения глобальных критериев рекомендуется применять для принятия следующих решений:

- при значениях диапазона 0,37–0,63 – проводить иммунокорректирующие мероприятия;
- ниже 0,37 – проводить дополнительные обследования, назначать иммуномодулирующую тактику ведения данной группы детей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Беляева, Л. М.* Возрастные особенности иммунитета у детей и место индукторов интерферонов в педиатрической практике / Л. М. Беляева, Н. В. Микульчик, С. М. Король. – Минск : ДокторДизайн, 2014. – 36 с.
2. *Picard, C.* Primary Immunodeficiency Diseases: an Update on the Classification from the International Union of Immunological Societies Expert Committee for Primary Immunodeficiency 2015 / C. Picard, W. Al-Herz, A. Bousfiha, et al. // *J Clin Immunol.* – 2015. – Vol. 35, № 8. – P. 696–726. doi: 10.1007/s10875-015-0201-1.
3. *Jyonouchi, S.* Immunodeficiencies Associated with Abnormal Newborn Screening for T Cell and B Cell Lymphopenia / S. Jyonouchi, A. M. Jongco, J. Puck, K. E. Sullivan // *J Clin Immunol.* – 2017. – Vol. 37, № 4. – P. 363–374. doi: 10.1007/s10875-017-0388-4.
4. *Brodin, P.* Human immune system variation / P. Brodin, M.M. Davis // *Nat Rev Immunol.* – 2017. – Vol. 17, № 1. – P. 21–29. doi:10.1038/nri.2016.125.
5. *El-Bohy, M.* Humoral immune deficiencies of childhood / M. El-Bohy, P. Poowuttikul, E. Secord // *Pediatr Clin N Am.* – 2019. – Vol. 66. – P. 897–903. <https://doi.org/10.1016/j.pcl.2019.06.010>.
6. *Perez, E. E.* Diagnosis and management of specific antibody deficiency / E. E. Perez, M. Ballow // *Immunol Allergy Clin North Am.* – 2020. – Vol. 40, № 3. – P. 499–510. doi: 10.1016/j.iac.2020.03.005.
7. Интерпретация иммунограммы при воспалительных процессах: учеб. пособие / сост. А. А. Корженевский. – Уфа: Изд-во ФГБОУ ВО БГМУ Минздрава России, 2017. – 115 с.
8. *Feleszko, W.* Immunity-targeted approaches to the management of chronic and recurrent upper respiratory tract disorders in children / W. Feleszko, R. Marengo, A. S. Vieira // *Clin Otolaryngol.* – 2019. – Vol. 44, № 4. – P. 502–510. doi: 10.1111/coa.13335.
9. *Мамаджанова, Г. С.* Некоторые клинико-иммунологические аспекты у часто болеющих детей с гипотрофией / Г. С. Мамаджанова, З. К. Умарова, М. Д. Едгорова и др. // *Вестник Авиценны.* – 2017. – Т. 19, № 2. – С. 219–225.
10. *Клюева, С. Н.* Комплексный анализ корреляционных взаимосвязей между показателями гуморального и клеточного иммунитета у лиц, вакцинированных против чумы / С. Н. Клюева, С. А. Бугоркова, А. Ю. Гончарова и др. // *Инфекция и иммунитет.* – 2019. – Т. 9, № 1. – С. 135–146.
11. *Гветадзе, Р. Ш.* Разработка экспертной оценки качества стоматологической помощи / Р. Ш. Гветадзе, С. Н. Андреева, В. Г. Бутова, Т. И. Чегерова // *Стоматология.* – 2021. – Т. 100, № 1. – С. 73–79.
12. *Прокопович, А. С.* Многокритериальная оценка результатов клинико-лабораторных исследований / А. С. Прокопович, Т. И. Чегерова, Е. В. Воробей и др. // *Клиническая лабораторная диагностика.* – 2004. – № 9. – С. 22–23.
13. *Королева, С. В.* Аспекты использования функции желательности в медико-биологическом эксперименте / С. В. Королева // *Современные проблемы науки и образования.* – 2011. – № 6. <http://science-education.ru/ru/article/view?id=5270>.
14. *Чегерова, Т. И.* Интегральная оценка влияния производственных и непроизводственных условий на состояние здоровья работающих во вредных и опасных условиях труда: новые методические подходы. Инструкция по применению, регистр. № 76-0904, 14.10.2004. – 57 с.
15. *Чегерова, Т. И.* Особенности использования нечеткой логики в многокритериальной оценке качества / Т. И. Чегерова // *Проблемы устойчивого развития регионов республики Беларусь и сопредельных стран : сб. материалов IX Международной науч.-практ. интернет конференции, 1 июня – 30 сентября 2020 г., г. Могилев / под ред. Н. В. Маковской.* – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2020. – С. 58–65.

Поступила в редакцию 28.12.2020 г.

Контакты: povorov@mail.ru (Поворова Оксана Викторовна)

Povorova O.V., Livinskaya V.A., Chegerova T.I. AGE-RELATED CHARACTERISTICS OF THE IMMUNE STATUS OF CHILDREN WITH FREQUENT RESPIRATORY DISEASES

To quantify the immune status at the population level, the authors use the mathematical apparatus of fuzzy set theory, in particular, the membership function. According to the values of the global criterion that characterizes the overall state and functioning of the immune system, statistically significant differences are determined in the groups of children aged 1–2, 3–6, 7, 8–16 living in the Mogilev region and having frequent respiratory diseases. Diagnostically significant parameters of the changes in cellular and humoral immunity of the children with recurrent respiratory infections for critical age groups are defined.

Keywords: content of serum immunoglobulins, content of lymphocyte subpopulations, 1 to 16-year old children suffering from respiratory diseases.

УДК 581.844

АНАТОМИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ КОРЫ ОДНОЛЕТНИХ СТЕБЛЕЙ НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ СЕМЕЙСТВА МАСЛИННЫЕ (OLEACEAE L.)

В. И. Бойко

доцент

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

С. М. Ленивко

доцент

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

Г. Н. Тихончук

доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Проведено изучение внутренней структуры коры однолетнего стебля 6 видов кустарниковых покрытосеменных растений, относящихся к семейству Маслинные. Описана топография тканей коры на поперечном срезе, сделан их сравнительно-анатомический анализ, выявлены диагностические признаки. Для всех исследованных видов (за исключением жасмина самбак и форзиции гибридной) характерной чертой является наличие гомогенной первичной коры и отсутствие механических элементов в составе вторичной флоэмы.

Ключевые слова: кора, анатомическое строение, диагностические признаки, сирень, маслина, форзиция, жасмин, бирючина.

Введение

Комплексное использование растительных ресурсов должно быть основано на знании не только полезности сырья, но и его структуры, обуславливающей технологию переработки, а также сферу применения. Покрытосеменные широко используются как витаминоносные растения для получения лекарственных препаратов и в целях озеленения парков, приусадебных участков и др.

Изучение анатомической структуры коры древесных и кустарниковых растений имеет большое значение в целях диагностики и уточнения границ таксонов, для решения вопросов филогении, а также для проведения научной и криминалистической экспертизы, так как ее гистологический состав значительно богаче состава древесины и обладает большим набором диагностических признаков.

Значительная часть исследований посвящена не коре в целом, как комплексу тканей, а ее отдельным слагающим. Следовательно, основными направлениями в области изучения коры, следует считать: а) структурный анализ коры как единого комплекса; б) вовлечение в исследование как можно большего числа видов; в) анализ анатомического строения коры целых таксонов, что даст дополнительную информацию для целей систематики и филогении.

Целью нашего исследования является выявление топографии и структуры тканей коры однолетних стеблей некоторых представителей семейства маслинные (*Oleaceae*).

Задачами было: провести сравнительно-анатомический анализ структуры однолетних стеблей, выявление диагностических признаков.

© Бойко В. И., Ленивко С. М., Тихончук Г. Н., 2021

Для проведения исследований мы использовали кору однолетнего стебля Сирени обыкновенной (*Syringa vulgaris* L.), Бирючины обыкновенной (*Ligustrum vulgare* L.), Жасмина самбак (*Jasminum sambac* L.), Маслины европейской (*Olea europaea* L.), Форзиции гибридной (*Forsythia hybridum* Hort.), Форзиции средней (*Forsythia intermedia* Zab.).

Сбор полевого материала проводился на территории г. Бреста в отделе агроэкологии Центра экологии учреждения образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина».

Объекты исследования собирались нами в сентябре-марте 2016 – 2019 года, т.е. в период, когда камбий находится в неактивном состоянии. Мы выбирали растения, произрастающие в оптимальных для их жизнедеятельности условиях. Образцы фиксировали в 96% спирте и выдерживали в смеси спирта и глицерина (1:1). Из последних готовили микрообразцы, которые использовали для получения срезов, а их окрашивали регрессивным способом, помещая в сафранин и нильский синий. После окраски срезы проводили через растворы спиртов разных концентраций (50%, 75% и 96% спирт). На следующем этапе они обрабатывались карболксиолом и ксилолом, после чего помещались в канадский бальзам [1].

Основная часть

Сирень обыкновенная. Однолетний стебель покрыт слоем эпидермы, ткань представлена одним слоем клеток. Последние имеют овальную форму, их радиальный размер составляет до 12 мкм, а тангентальный – около 17 мкм.

Субэпидермально располагается перидерма, ширина которой на поперечном срезе достигает 90 мкм. Ткань типичная, представлена феллодермой, феллогеном и феллемой. Клетки феллемы имеют прямоугольную форму в поперечнике. Радиальный размер их составляет 10–12 мкм, а тангентальный – 12–14 мкм. Высота клеток на продольном срезе колеблется около 15–18 мкм. Клетки имеют слегка волнистые стенки. В радиальном ряду поперечного среза находится 3–4 клетки пробки [2].

Под перидермой располагается первичная кора. Ткань имеет ширину на поперечном срезе 100–110 мкм. Она гомогенная, состоит из клеток диаметром до 20 мкм.

Глубже от первичной коры располагается гомогенное кольцо механических элементов, которое состоит из септированных волокон. Длина их составляет 250–350 мкм, а диаметр их равен 10–12 мкм.

Ко внутри от механического кольца располагается вторичная флоэма. Ширина ткани на поперечном срезе примерно равна 60 мкм. Ткань представлена проводящими и запасующими элементами. Механические элементы отсутствуют.

Проводящие элементы сложены ситовидными трубками с клетками-спутницами. На поперечном срезе членики ситовидных трубок имеют диаметр 9–12 мкм, а высота члеников достигает 45–85 мкм. Поперечная стенка располагается перпендикулярно по отношению к продольным.

Запасующие элементы представлены вертикальной и горизонтальной паренхимой. Клетки вертикальной паренхимы имеют диаметр 12–14 мкм, а горизонтальная ткань представлена лучами. Они однорядные (реже двурядные) и достигают высоты в 250–400 мкм. Слоистость лучей составляет 13–28 клеток, а ширина – 12–18 мкм.

Бирючина обыкновенная. Однолетний стебель покрыт слоем эпидермы. Ткань представлена одним слоем клеток. Последние имеют овальную форму, их радиальный размер составляет до 13 мкм, а тангентальный – около 16 мкм.

Субэпидермально располагается перидерма, ширина которой на поперечном срезе достигает 67 мкм. Ткань типичная, представлена феллодермой, феллогеном и феллемой. Радиальный размер клеток перидермы составляет 14–16 мкм, а тангентальный – 15–18 мкм.

Под перидермой располагается первичная кора, которая имеет ширину на поперечном срезе 120–135 мкм. Коровая паренхима гомогенная, сложена тонкостенными клетками диаметром около 17–18 мкм.

Глубже от первичной коры располагается кольцо механических элементов, диаметр клеток которого равен 5–7 мкм, а длина – 18–350 мкм. Ширина кольца на поперечном срезе составляет 14 мкм.

Ко внутри от механического кольца располагается вторичная флоэма. Ширина ткани на поперечном срезе достигает 78 мкм. Флоэма представлена проводящими и запасными элементами, механические элементы отсутствуют.

Проводящие элементы флоэмы представлены ситовидными трубками, их поперечник имеет диаметр 7–9 мкм, а высота члеников достигает порядка 30–40 мкм.

Запасные элементы флоэмы представлены вертикальной и горизонтальной паренхимой. Клетки вертикальной паренхимы имеют диаметр 10–12 мкм. Горизонтальная – представлена лучами. Лучи однорядные и достигают высоты 250–450 мкм. Реже встречаются двухрядные лучи, слойность которых составляет 15–20 клеток, а ширина достигает 10–18 мкм.

Жасмин самбак. Однолетний стебель покрыт слоем эпидермы. Клетки ткани имеют овальную форму, их радиальный размер составляет до 8 мкм, а тангентальный – 6–7 мкм. В эпидерме встречаются игольчатые трихомы, заполненные воздухом, их размер достигает 205 мкм.

Под эпидермой располагается колленхима шириной на поперечном срезе до 27 мкм, ткань представлена 2–4 слоями клеток. Радиальный размер их составляет 6–10 мкм, а тангентальный – 9–12 мкм. Клетки имеют округлую форму в поперечнике.

Ко внутри от колленхимы располагается первичная кора. Ширина ткани на поперечном срезе находится в пределах 45–50 мкм. Она гетерогенная, состоит из мелких клеток диаметром до 8 мкм и крупных – до 20 мкм.

Глубже от первичной коры располагается кольцо механических элементов, которое состоит из септированных волокон. Длина волокон колеблется в пределах 210–330 мкм, а диаметр их равен 10–12 мкм.

Ко внутри от механического кольца располагается вторичная флоэма. Ширина ткани на поперечном срезе составляет примерно 62 мкм. Ткань состоит из проводящих, запасных и механических элементов.

Проводящие элементы представлены ситовидными трубками. На поперечном срезе членики ситовидных трубок имеют диаметр 8–12 мкм и высоту – 35–42 мкм. Поперечная стенка располагается перпендикулярно по отношению к продольной.

Запасные элементы образованы вертикальной и горизонтальной паренхимой.

Клетки вертикальной паренхимы имеют диаметр поперечника 10–12 мкм, а горизонтальная паренхима представлена однорядными лучами, которые достигают высоты в 280–450 мкм. Реже встречаются двухрядные, их слойность составляет 15–20 клеток, а ширина достигает 12–22 мкм.

Маслина европейская. Однолетний стебель покрыт однослойной эпидермой. Тангентальный размер клеток составляет от 20 до 27 мкм, а радиальный – 15–18 мкм, поперечник клеток овальной формы, их наружные тангентальные стенки вытянуты к периферии стебля. Наиболее утолщены наружные тангентальные стенки, которые покрыты слоем кутикулы толщиной до 2–3 мкм.

Клетки эпидермы образуют редкие трихомы в виде волосков длиной до 40–50 мкм. Последние заполнены воздухом, т.е. являются кроющими. Субэпидермально располагается перидерма, ширина которой на поперечном срезе достигает до 160 мкм. Ткань типичная, представлена феллемой, феллогеном и феллодермой. Клетки пробки имеют форму от квадратной до прямоугольной. Они тонкостенные, заполнены воздухом. В радиальном ряду поперечного среза однолетнего стебля располагается 6–7 клеток пробки. Их тангентальный размер составляет от 25 до 50 мкм, а радиальный – от 25 до 40 мкм. В периферических слоях клетки феллемы более крупные. Феллоген и феллодерма типичные [3, 4].

Ко внутри от перидермы располагается первичная кора. Ткань имеет ширину на поперечном срезе до 200 мкм. Она гомогенна, состоит из мелких клеток овальной формы, их размеры ближе к перидерме уменьшаются. Диаметр поперечника клеток составляет от 30–60 мкм. Кристаллы не обнаружены.

Глубже от первичной коры располагается кольцо механических элементов, которое представлено группами волокон. Оно гетерогенное, т.е. представлено волокнами и склереидами. Ширина кольца на поперечном срезе составляет до 30 мкм.

Волокна имеют в поперечнике пяти-, либо шестиугольную форму. Их концы заострены, а тангентальный размер поперечника колеблется от 17 до 25 мкм, радиальный – от 9 до 20 мкм.

Ко внутри от механического кольца располагается вторичная флоэма. Ширина ткани на поперечном срезе достигает 50 мкм. Ткань представлена проводящими и запасующими элементами, механические структуры отсутствуют.

Проводящие элементы – ситовидные трубки, которые в поперечниках имеют четырех-, пятиугольную форму. На поперечном срезе они уложены радиальными рядами. Их тангентальный размер составляет 11–20 мкм, а радиальный – от 12 до 16 мкм. Длина члеников ситовидных трубок достигает до 40 мкм.

Лучи в основном гомогенные, однорядные, их ширина составляет 12–20 мкм, высота – 450–600 мкм, а слойность – 8–14 клеток.

Форзиция гибридная. Однолетний стебель покрыт однослойной эпидермой. Клетки имеют овальную форму, их радиальный размер составляет до 14 мкм, а тангентальный – 14–18 мкм. Наиболее утолщены наружные тангентальные стенки, которые покрыты слоем кутикулы толщиной до 6 мкм.

Субэпидермально располагается перидерма, ширина ткани на поперечном срезе достигает 72 мкм. Ткань типичная, представлена клетками прямоугольной формы. Радиальный размер клеток пробки составляет до 25 мкм, а тангентальный – до 30 мкм.

Ко внутри от перидермы располагается первичная кора, она имеет ширину на поперечном срезе 140–145 мкм. Ткань гетерогенная, состоит из мелких клеток диаметром 13–15 мкм и крупных – 20–25 мкм.

Глубже от первичной коры располагается кольцо механических элементов. Длина волокон составляет 200–290 мкм, а диаметр их равен 8–12 мкм.

Ко внутри от механического кольца располагается вторичная флоэма. Ширина ткани на поперечном срезе достигает 50 мкм. Ткань представлена проводящими,

запасающими и механическими элементами. Проводящие элементы – ситовидные трубки, на их поперечном срезе членики ситовидных трубок имеют диаметр 7–10 мкм, а высота члеников достигает порядка 30–40 мкм. Поперечная стенка располагается перпендикулярно по отношению к продольным. Запасающие элементы представлены вертикальной и горизонтальной паренхимой. Клетки вертикальной паренхимы имеют диаметр 10–12 мкм. Горизонтальная паренхима представлена однорядными лучами, которые достигают размеров в 310–480 мкм. Реже встречаются двухрядные лучи, их слойность составляет 13–18 клеток, а ширина – 12–24 мкм.

Форзизия средняя. Однолетний стебель покрыт слоем эпидермы. Ткань представлена одним слоем клеток. Последние имеют прямоугольную и квадратную форму в поперечнике, причем их радиальные стенки волнистые и имеют размер от 23 до 26 мкм, а тангентальные – от 17 до 23 мкм. Наиболее утолщены наружные тангентальные оболочки, которые покрыты слоем кутикулы, достигающим толщины до 7 мкм.

Субэпидермально располагается перидерма, ширина ткани на поперечном срезе равна 100 мкм. Ткань типичная, представлена феллогеном, феллодермой и феллемой. В феллеме в радиальном ряду на поперечном срезе однолетнего стебля располагается от 3 до 4 клеток пробки. Клетки заполнены воздухом. Тангентальные стенки слегка вытянуты к периферии стебля, а радиальные – волнистые [5]. Феллодерма представлена одним слоем живых клеток, имеющих овальную форму, радиальный размер их достигает до 16 мкм, а тангентальный – 15–19 мкм. Под феллогеном располагается 3–4 слоя феллодермы, тангентальный размер клеток которой составляет от 28 до 37 мкм, а радиальный – до 18 мкм.

Ко внутри от перидермы располагается первичная кора. Ткань имеет ширину на поперечном срезе около 240 мкм. Она гомогенная, состоит из мелких клеток овальной формы с тангентальным размером от 46 до 56 мкм и радиальным – около 40 мкм. Кристаллы оксалата кальция в ткани не обнаружены.

Глубже от первичной коры располагается гомогенное кольцо механических элементов, которое представлено группами волокон, поперечник которых имеет пяти-, либо шестиугольную форму. Радиальный размер клеток составляет от 19 до 23 мкм, а тангентальный – от 16 до 38 мкм. Клеточные стенки сильно утолщены. Длина волокон составляет около 250–500 мкм, а диаметр просвета их – около 8 мкм. Группы волокон разделены клетками первичной коры.

Ко внутри от механического кольца располагается вторичная флоэма. Ширина ткани на поперечном срезе достигает 40 мкм. Ткань представлена проводящими и запасными элементами, механические волокна отсутствуют.

Проводящие элементы представлены ситовидными трубками, которые в поперечнике имеют четырех- и пятиугольную форму. На поперечном срезе они уложены радиальными рядами. Их тангентальный размер составляет 23 мкм, а радиальный – до 25 мкм. Длина члеников ситовидных трубок составляет около 72 мкм.

В паренхиме, прилегающей к волокнам, имеются призматические кристаллы оксалата кальция. Запасающие элементы представлены горизонтальной паренхимой, которая представлена сердцевинными лучами. Лучи однорядные и достигают высоты 460–620 мкм. Слойность лучей составляет 6–10 клеток, а ширина – 15–17 мкм.

Заключение

Таким образом, исследована анатомическая структура коры однолетнего стебля 6 растений, относящихся к семейству Маслинные. Кора всех исследованных видов сложена тканями как первичного (эпидерма, первичная кора, кольцо первичных механических элементов), так и вторичного происхождения (перидерма, вторичная флоэма). Общими признаками, характерными для изученных растений, является наличие у большинства представителей гомогенной первичной коры и отсутствие во вторичной флоэме механических элементов (за исключением жасмина самбак и форзиции средней).

Сходство анатомических признаков коры наблюдается у исследуемых представителей: они обладают однослойной эпидермой (в которой у большинства отсутствуют трихомы), субэпидермальным заложением перидермы, в радиальном ряду поперечного среза насчитывается менее 3 клеток феллемы, колленхима отсутствует, первичная кора гомогенная. Не происходит склерификация клеток паренхимы, отсутствуют механические волокна во флоэме.

Не смотря на большое сходство в анатомическом строении, у них присутствуют различия: наличие трихом в эпидерме (жасмин самбак, бирючина обыкновенная, маслина европейская); гетерогенной первичной коры и волокон во вторичной флоэме (жасмин самбак, форзиция гибридная), наличие кристаллов во вторичной флоэме (сирени обыкновенной в виде друз и форзиции средней призматической формы).

Анализ внутреннего строения коры 1-летнего стебля исследованных видов позволил выявить диагностические признаки (таблица).

Диагностические признаки коры однолетнего стебля

Признак	Сирень обыкновенная	Бирючина обыкновенная	Жасмин самбак	Маслина европейская	Форзиция гибридная	Форзиция средняя
Эпидерма однослойная	+	+	+	+	+	+
Эпидерма двухслойная	-	-	-	-	-	-
Наличие трихом	-	+	+	+	-	-
Отсутствие трихом	+	-	-	-	+	+
Перидерма субэпидермальная	+	+	-	+	+	+
В радиальном ряду 1-летнего стебля менее 3 клеток феллемы	-	+	-	-	+	-
В радиальном ряду 1-летнего стебля 3 и более клеток феллемы	+	-	-	+	-	+
Колленхима есть	-	-	+	-	-	-
Первичная кора гомогенная	+	+	-	+	-	+
Флоэма без механических элементов	+	+	-	+	-	+

Диагностическое значение имеют следующие признаки однолетнего стебля: наличие или отсутствие трихом, их тип; толщина слоя кутикулы; наличие или отсутствие колленхимы; структура первичной коры, кольца механических элементов, феллемы и древесины; форма и место заложения кристаллов оксалата кальция.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Прозина, Н. М.** Ботаническая микротехника / М. Н. Прозина. – Москва : Высшая школа, 1960. – 260 с.
2. **Тропец, С. А.** Анатомическое строение однолетнего стебля бирючины обыкновенной (*Ligustrum vulgare* L.) и сирени обыкновенной (*Syringa vulgaris* L.) / С. А. Тропец, В. И. Бойко // Актуальные вопросы современной науки : сб. статей по мат. XVI междунар. научно-практ. конф. / под ред. А. Р. Халикова. – Уфа : Дендра, 2018. Ч. 1. – С. 20–24.
3. **Тропец, С. А.** Анатомическое строение однолетнего стебля маслины европейской (*Olea europaea* L.) / С. А. Тропец, В. И. Бойко // Инновации в науке и практике : сб. статей по мат. VIII междунар. научно-практ. конф. / под ред. А. Р. Халикова. – Барнаул : Дендра, 2018. – Ч. 1. – С. 68–71.
4. **Тропец, С. А.** Анатомическое строение вегетативных органов маслины европейской (*Olea europaea* L.) / С. А. Тропец, В. И. Бойко // Инновации в науке и практике : сб. статей по мат. X междунар. научно-практ. конф. / под ред. А. Р. Халикова. – Барнаул : Дендра, 2018. – Ч. 1. – С. 39–45.
5. **Тропец, С. А.** Анатомическое строение вегетативных органов форзиции средней (*Forsythia intermedia* L.) / С. А. Тропец, В. И. Бойко // Инновации в науке и практике : сб. статей по мат. XVI междунар. научно-практ. конф. / под ред. А. Р. Халикова. – Барнаул : Дендра. – Ч. 2(3). – С. 9–13.

Поступила в редакцию 02.10.2020 г.

Контакты: tikhonchuk@msu.by (Тихончук Галина Николаевна)

Boyko V.I., Lenivko S.M., Tikhonchuk G.N. ANATOMICAL STRUCTURE OF THE CRUST OF ONE-YEAR STEALS OF SOME REPRESENTATIVES OF THE OLEACEAE FAMILY

The study of the internal structure of the bark of an annual stem of 6 species of shrubby angiosperms belonging to the Oleaceae family is carried out. The topography of the cortical tissues on a cross section is described, their comparative anatomical analysis is made, diagnostic signs are revealed. The presence of a homogeneous primary bark and the absence of mechanical elements in the secondary phloem is characteristic of all the studied species (with the exception of Sambac Jasmine and Hybrid Forsythia).

Keywords: bark, anatomical structure, diagnostic signs, lilac, olive, forsythia, jasmine, privet.

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў
на англійскую мову
Я.В. Рубанавы

Тэхнічныя рэдактары: *А.Л. Пазнякоў, Л.І. Будкова*
Камп'ютарны набор і вёрстка *С.А. Кірыльчык*
Карэктары: *І.Г. Каржова, Г.В. Карпянкова, І.І. Талкачова*

Падпісана да друку 24.02.2021 г.
Фармат 70х108^{1/16}. Папера афсетная. Гарнітура Times New Roman.
Ум.-друк. арк. 10,7. Ул.-выд. арк. 11,6. Тыраж 100 экз. Заказ № 1117.

Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А.А. Куляшова”, 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства
“Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля”
ЛП № 02330/23 ад 30.12.2013 г.
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў