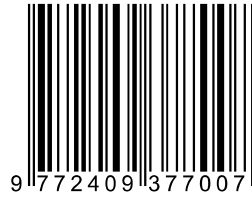


ISSN 2409-3777



ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта
імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

2 (56)
2020

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ITM НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар М.М. Дабравольскі (Тула)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А.В. Цімошчанка (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.В. Івашкевіч (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар А. М. Дворнік (Гомель)
д-р біял. навук прафесар Н. П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А. Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С. У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М. В. Акуліч (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт Г. М. Ціханчук (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А. В. Марачкаў (Магілёў)
д-р мед. навук Н. І. Сімчанка (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П. С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар А. Г. Палячонак (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар Г. М. Раганаў (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс “Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова” ўключаны ў РІНЦ
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),
ліцэнзійны дагавор № 811–12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

ЗМЕСТ

<i>ГАЛЬМАК А. М.</i> О дизъюнктном объединении тернарных подгрупп.....	4
<i>ГАЛЬМАК А. М., КУЛАЖЕНКО Ю. И., СЕЛЬКИН М. В.</i> Косые элементы в <i>l</i> -арных группах специального вида.....	13
<i>ЛОМОВЦЕВ Ф. Е., УСТИЛКО Е. В.</i> Смешанная задача для одномерного волнового уравнения при характеристической первой косої производной в нестационарном граничном режиме для гладких решений.....	21
<i>ЛЯВШУК И. А.</i> Прямая и обратная решетки тригональных кристаллов в <i>H</i> - и <i>R</i> -координатных базисах.....	37
<i>МАЛЫШЕВ В. Л., ПУСОВСКАЯ Т. И.</i> Перенос массы из внутреннего объема через систему произвольно направленных прямых капилляров при фазовом переходе жидкости в пар.....	47
<i>ИВАШКЕВИЧ И. В., ТРЕТЬЯК Е. В.</i> Спектральная эллипсометрия неоднородных полупроводниковых пленок.....	54
<i>ДЕГТЯРЕВА Е. И., ГЕРТМАН В. Д., ДОРОШЕВИЧ К. Н.</i> Инфекция, вызванная <i>Clostridium difficile</i> , у пациентов онкоурологического профиля после химиотерапии.....	61
<i>ОСИПЕНКО А. Н.</i> Плазмалогенные фосфолипиды в интактных и пораженных атеросклерозом артериях.....	70
<i>ДОРОФЕЕВ С. А.</i> Структурно-функциональное состояние орнитокомплексов еловых лесов Белорусского Поозерья.....	79
<i>САРАСЕКО Е. Г., ТИМОШКОВ В. Ф., ДЕГТЯРЕВА Е. И.</i> Ликвидация лесных пожаров на почвах различных типов.....	86

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, БИОЛОГИЯ

УДК 512.548

О ДИЗЬЮНКТНОМ ОБЪЕДИНЕНИИ ТЕРНАРНЫХ ПОДГРУПП

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук

Могилевский государственный университет продовольствия

В статье изучаются тернарные группы, то есть n -арные группы при $n = 3$, являющиеся дизъюнктным объединением двух своих тернарных подгрупп. Доказывается, что указанные тернарные подгруппы являются инвариантными в тернарной группе и определяют одну и ту же идемпотентную тернарную факторгруппу и одну и ту же конгруэнцию. Устанавливается также, что эти тернарные подгруппы не являются сопряженными в тернарной группе, при этом они полусопряжены в ней любым ее элементом. Приводятся следствия для некоторых конкретных тернарных групп.

Ключевые слова: дизъюнктное объединение, тернарная группа, тернарная факторгруппа, конгруэнция.

1. Введение

В n -арных группах при $n \geq 3$ возникают ситуации, невозможные в группах. Например, группа, в виду наличия в каждой ее подгруппе единичного элемента, не может быть объединением своих непересекающихся подгрупп. Однако при $n \geq 3$ n -арная группа может быть объединением своих непересекающихся n -арных подгрупп. В [1] имеются такие примеры для тернарных групп.

Так тернарная группа $\langle D_{2n}, \eta \rangle$, производная от диэдральной группы D_{2n} , является объединением своих непересекающихся тернарной подгруппы отражений $\langle B_n, \eta \rangle$ и тернарной подгруппы поворотов $\langle Z_n, \eta \rangle$.

Аналогично, тернарная группа $\langle S_n, \eta \rangle$, производная от симметрической группы S_n , является объединением своих непересекающихся тернарной группы $\langle A_n, \eta \rangle$, производной от знакопеременной группы A_n , и тернарной группы $\langle T_n, \eta \rangle$ всех нечетных подстановок.

Точно также, тернарная группа, производная от унимодулярной группы всех матриц порядка n над некоторым полем, определитель которых равен ± 1 , является объединением своих непересекающихся тернарных подгрупп: тернарной группы, производной от специальной линейной группы над тем же полем, и тернарной подгруппы всех матриц с определителем равным -1 .

Универсальную алгебру, являющуюся объединением своих непересекающихся подалгебр, называют дизъюнктивным объединением этих подалгебр. В данной статье изучаются тернарные группы, являющиеся дизъюнктивным объединением своих тернарных подгрупп. Приведены следствия для некоторых конкретных тернарных групп.

2. Используемые результаты

Определения и основные свойства n -арной группы, косога элемента, нейтральной последовательности, инвариантной (сопряженной, полусопряженной) n -арной подгруппы и других n -арных аналогов групповых понятий можно найти в книгах [2–4]. В книге [5] изучаются конгруэнции n -арных групп. Собственно тернарным группам посвящена книга [1].

При получении результатов о тернарных группах, являющихся дизъюнктивным объединением своих тернарных подгрупп, существенно используется следующая

Лемма 2.1. Пусть тернарная группа $\langle A, \eta \rangle$ является дизъюнктивным объединением своих тернарных подгрупп $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$:

$$A = B \cup C, B \cap C = \emptyset.$$

Тогда для любых $b \in B, c \in C$ верны равенства:

$$\begin{aligned} \eta(BBc) &= \eta(BcB) = \eta(cBB) = C, \\ \eta(CCb) &= \eta(CbC) = \eta(bCC) = B. \end{aligned}$$

Верны также равенства:

$$\begin{aligned} \eta(BBC) &= \eta(BCB) = \eta(CBB) = C, \\ \eta(CCB) &= \eta(CBC) = \eta(BCC) = B. \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем, например, равенства

$$\eta(BcB) = C, \eta(BCB) = C. \quad (2.1)$$

Пусть $c \in C, b_1$ и b_2 – произвольные элементы из B . Так как $\langle B, \eta \rangle$ – тернарная группа, то предположение $\eta(b_1cb_2) \in B$ влечет за собой $c \in B$, что противоречит условию $c \in C$. Следовательно, $\eta(b_1cb_2) \in C$ для любых $b_1, b_2 \in B$ и любого $c \in C$. Таким образом, доказаны включения

$$\eta(BcB) \subseteq C, \eta(BCB) \subseteq C. \quad (2.2)$$

Пусть теперь c и d – произвольные элементы из C . Зафиксируем $b \in B$ и рассмотрим в $\langle A, \eta \rangle$ уравнение $\eta(zcb) = d$, решение которого обозначим через e , то есть $\eta(ecb) = d$. Если предположить, что $e \in C$, то из последнего равенства, учитывая тот факт, что $\langle C, \eta \rangle$ – тернарная группа, получаем $b \in C$, что противоречит условию $b \in B$. Следовательно, $e \in B$. Таким образом, $d \in \eta(BcB)$, откуда в силу произвольного выбора $d \in C$, следует включение $C \subseteq \eta(BcB)$. Из этого включения и первого включения в (2.2) следует первое равенство в (2.1).

Так как $\eta(BcB) \subseteq \eta(BCB)$, то из доказанного первого равенства в (2.1) следует включение $C \subseteq \eta(BCB)$, откуда и из второго включения в (2.2) следует второе равенство в (2.1).

Все остальные равенства доказываются аналогично. Лемма доказана.

Замечание 2.1. Включения

$$\begin{aligned} C &\subseteq \eta(BBC), C \subseteq \eta(CBB), \\ B &\subseteq \eta(CCB), C \subseteq \eta(BCC) \end{aligned}$$

можно доказать, используя нейтральные последовательности. Например, так как $\langle C, \eta \rangle$ – тернарная подгруппа в $\langle A, \eta \rangle$, то для любого $c \in C$ косога элемент \bar{c} принадлежит C , а последовательность $\bar{c}c$ является нейтральной. Поэтому

$$B = \eta(\bar{c}cB) \subseteq \eta(CCB),$$

то есть $B \subseteq \eta(CCB)$.

Аналогично доказываются остальные включения.

Замечание 2.2. Легко проверяется, что если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, являющаяся дизъюнктивным объединением своих n -арных подгрупп $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$, $c \in C$, то имеют место включения, аналогичные включениям (2.2):

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{c B \dots B}_{n-1}) &\subseteq \eta(\underbrace{C B \dots B}_{n-1}) \subseteq C, \\ \eta(\underbrace{Bc B \dots B}_{n-2}) &\subseteq \eta(\underbrace{BC B \dots B}_{n-2}) \subseteq C, \\ &\dots\dots\dots \\ \eta(\underbrace{B \dots B c B}_{n-2}) &\subseteq \eta(\underbrace{B \dots B C B}_{n-2}) \subseteq C, \\ \eta(\underbrace{B \dots B c}_{n-1}) &\subseteq \eta(\underbrace{B \dots B C}_{n-1}) \subseteq C. \end{aligned}$$

Лемма 2.2. Пусть тернарная группа $\langle A, \eta \rangle$ является дизъюнктивным объединением своих тернарных подгрупп $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$. Тогда для любых $b \in B$, $c \in C$ верны равенства

$$\begin{aligned} \eta(BbC) &= \eta(CbB) = C, \\ \eta(CcB) &= \eta(BcC) = B. \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем, например, равенство

$$\eta(BbC) = C. \quad (2.3)$$

Так как

$$\eta(BbC) \subseteq \eta(BBC),$$

то, учитывая равенство $\eta(BBC) = C$ из леммы 2.1, получим включение

$$\eta(BbC) \subseteq C.$$

Так как для любого $b \in B$ косой элемент \bar{b} принадлежит B , а последовательность $\bar{b} b$ является нейтральной, то

$$C = \eta(\bar{b} b C) \subseteq \eta(BbC),$$

то есть

$$C \subseteq \eta(BbC).$$

Из полученных включений следует доказываемое равенство (2.3).

Все остальные равенства доказываются аналогично. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобятся два равенства о мощностях множеств.

Известно [см., например, 6; с. 33], что если B и C – непустые множества, причем C бесконечно и $\text{Card } B \leq \text{Card } C$, то

$$\text{Card } (B \times C) = \text{Card } C.$$

В частности, если B и C – бесконечные множества одинаковой мощности, то

$$\text{Card } (B \times C) = \text{Card } B = \text{Card } C.$$

Из этого равенства и из следующего двойного неравенства

$$\text{Card } B \leq \text{Card } (B \cup C) \leq \text{Card } (B \times C),$$

верного для произвольных неоднородных множеств B и C с пустым пересечением [6, с. 32], следует еще одно равенство

$$\text{Card } (B \cup C) = \text{Card } B = \text{Card } C, \quad (2.4)$$

верное для бесконечных множеств B и C одинаковой мощности, не имеющих общих элементов.

3. Основные результаты

Следующая теорема описывает строение тернарной группы, являющейся дизъюнктивным объединением двух своих тернарных подгрупп.

Теорема 3.1. Пусть тернарная группа $\langle A, \eta \rangle$ является дизъюнктивным объединением своих тернарных подгрупп $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$. Тогда:

- 1) тернарные подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ имеют одинаковую мощность;
- 2) если множество A бесконечно, то мощности тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$ и ее тернарных подгрупп $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ совпадают;
- 3) если множество A конечно, то

$$|B| = |C| = |A|/2,$$

то есть порядок тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$ является четным числом;

- 4) тернарные подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ являются инвариантными в $\langle A, \eta \rangle$;
- 5) тернарные подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ определяют одну и ту же идемпотентную тернарную факторгруппу и одну и ту же конгруэнцию:

$$\langle A/B, \eta \rangle = \langle A/C, \eta \rangle = \langle \{B, C\}, \eta \rangle, \rho_B = \rho_C;$$

- 6) тернарные подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ не являются сопряженными в $\langle A, \eta \rangle$;
- 7) тернарные подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ полусопряжены в $\langle A, \eta \rangle$ любым элементом из A .

Доказательство. 1) Так как мощность любого смежного класса тернарной группы по ее тернарной подгруппе совпадает с мощностью этой тернарной подгруппы, то, например, мощность смежного класса $\eta(xBB)$ совпадает с мощностью тернарной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$.

С другой стороны, согласно лемме 2.1, для $x \in C$ верно равенство $\eta(xBB) = C$. Поэтому мощность смежного класса $\eta(xBB)$ совпадает с мощностью тернарной подгруппы $\langle C, \eta \rangle$.

Таким образом, мощности тернарных подгрупп $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ совпадают.

2) Если множество A бесконечно, то из совпадения мощностей множеств B и C следует их бесконечность. Поэтому, согласно (2.4),

$$\text{Card}(B \cup C) = \text{Card } B = \text{Card } C,$$

а так как $A = B \cup C$, то

$$\text{Card } A = \text{Card } B = \text{Card } C.$$

3) Следует из равномощности множеств B и C и равенства $|A| = |B| + |C|$.

4) Если $x \in B$, то

$$\eta(xBB) = \eta(BxB) = \eta(BBx) = B.$$

Если же $x \notin B$, то $x \in C$. Тогда по лемме 2.1

$$\eta(xBB) = \eta(BxB) = \eta(BBx) = C.$$

Таким образом,

$$\eta(xBB) = \eta(BxB) = \eta(BBx)$$

для любого $x \in A$. Следовательно, тернарная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ инвариантна в $\langle A, \eta \rangle$.

Инвариантность $\langle C, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ доказывается аналогично.

5) Так как

$$\begin{aligned} A/B &= \{B, \eta(xBB) \mid x \in C\}, \\ A/C &= \{C, \eta(xCC) \mid x \in B\}, \end{aligned}$$

то, принимая во внимание лемму 2.1, получаем

$$A/B = \{B, C\}, A/C = \{C, B\},$$

то есть $A/B = A/C$.

Так как классы конгруэнции ρ_B (конгруэнции ρ_C) совпадают со смежными классами $\langle A, \eta \rangle$ по $\langle B, \eta \rangle$ (смежными классами $\langle A, \eta \rangle$ по $\langle C, \eta \rangle$), то из $A/B = A/C$ следует $\rho_B = \rho_C$.

Так как оба смежных класса B и C тернарной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle = \langle A/C, \eta \rangle$ являются тернарными подгруппами в $\langle A, \eta \rangle$, то B и C – идемпотенты в этой тернарной факторгруппе.

б) Так как для любого $x \in C$, с одной стороны $\eta(xCC) = C$, а с другой стороны по лемме 2.2 $\eta(CxB) = B$, то

$$\eta(xCC) \neq \eta(CxB). \quad (3.1)$$

Аналогично, для любого $x \in B$, применяя лемму 2.1, получаем $\eta(xCC) = B$, а согласно лемме 2.2, имеем $\eta(CxB) = C$, то есть и в этом случае верно неравенство (3.1). Таким образом, это неравенство верно для любого $x \in A$. Следовательно, тернарные подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ не являются сопряженными в $\langle A, \eta \rangle$.

7) Так как

$$\eta(xBB) = \eta(CCx) = C, x \in C,$$

$$\eta(xBB) = \eta(CCx) = B, x \in B,$$

то $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ полусопряжены в тернарной группе $\langle A, \eta \rangle$ любым ее элементом. Теорема доказана.

Пусть A – группа, B – ее подгруппа индекса 2, $x \notin B$, $C = xB$. Определим на A тернарную операцию η , производную от операции в группе A . Тогда $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, $\langle B, \eta \rangle$ – ее тернарная подгруппа. Несложно убедиться в том, что и $\langle C, \eta \rangle$ – тернарная подгруппа в $\langle A, \eta \rangle$. Это следует также из обратной теоремы Поста о смежных классах. Таким образом, тернарная группа $\langle A, \eta \rangle$ является дизъюнктивным объединением своих тернарных подгрупп $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$. Воспользовавшись теоремой 3.1, получим следующую теорему.

Теорема 3.2. Пусть A – группа, B – ее подгруппа индекса 2, $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, производная от группы A . Тогда:

1) тернарная группа $\langle A, \eta \rangle$ является дизъюнктивным объединением своих тернарных подгрупп $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle A \setminus B, \eta \rangle$;

2) тернарные подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle A \setminus B, \eta \rangle$ имеют одинаковую мощность;

3) если группа A бесконечна, то мощности тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$ и ее тернарных подгрупп $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle A \setminus B, \eta \rangle$ совпадают;

4) если группа A конечна, то

$$|B| = |A \setminus B| = |A|/2,$$

то есть порядок тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$ является четным числом;

5) тернарные подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle A \setminus B, \eta \rangle$ являются инвариантными в $\langle A, \eta \rangle$;

6) тернарные подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle A \setminus B, \eta \rangle$ определяют одну и ту же идемпотентную тернарную факторгруппу и одну и ту же конгруэнцию:

$$\langle A/B, \eta \rangle = \langle A/(A \setminus B), \eta \rangle, \rho_B = \rho_{A \setminus B};$$

7) тернарные подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle A \setminus B, \eta \rangle$ не являются сопряженными в $\langle A, \eta \rangle$;

8) *тернарные подгруппы* $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle A \setminus B, \eta \rangle$ *полусопряжены в* $\langle A, \eta \rangle$ *любым элементом из* A .

Замечание 3.1. Утверждение 8) теоремы 3.2 доказано в [1, предложение 10.21].

Простейшим примером, иллюстрирующим теорему 3.2, является мультипликативная двухэлементная группа $\{-1, 1\}$. В этом случае $B = \{1\}$, $A \setminus B = \{-1\}$.

Условиям теоремы 3.2 удовлетворяют также мультипликативные группа \mathbf{Q}^* всех ненулевых рациональных чисел и группа \mathbf{R}^* всех ненулевых действительных чисел. В первом случае

$$B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x > 0\}, A \setminus B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x < 0\},$$

во втором случае

$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}, A \setminus B = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}.$$

Примерами групп, удовлетворяющих условиям теоремы 3.2, могут служить и некоторые группы движений, обладающие подгруппами индекса 2. Например, группы симметрий правильных многогранников: тетраэдра, куба (октаэдра) и икосаэдра (додэкаэдра):

из 24 движений, составляющих группу \mathbf{T} симметрий тетраэдра, 12 являются вращениями и образуют в \mathbf{T} собственную подгруппу \mathbf{T}_+ , изоморфную \mathbf{A}_4 ;

из 48 движений, составляющих группу \mathbf{O} симметрий куба (октаэдра), 24 являются вращениями и образуют в \mathbf{O} собственную подгруппу \mathbf{O}_+ , изоморфную \mathbf{S}_4 ;

из 120 движений, составляющих группу \mathbf{I} симметрий икосаэдра (додэкаэдра), 60 являются вращениями и образуют в \mathbf{I} собственную подгруппу \mathbf{I}_+ , изоморфную \mathbf{A}_5 .

4. Следствия из теоремы 3.2

Применим теорему 3.2 к описанию некоторых конкретных тернарных групп.

Если в теореме 3.2 положить $A = \mathbf{S}_n$ – группа всех подстановок степени n , $B = \mathbf{A}_n$ – ее подгруппа всех четных подстановок, то $A \setminus B = \mathbf{T}_n$ – ее подмножество всех нечетных подстановок. Поэтому из теоремы 3.2 вытекает

Следствие 4.1. Пусть $\langle \mathbf{S}_n, \eta \rangle$ – тернарная группа, производная от группы \mathbf{S}_n . Тогда:

1) *тернарная группа* $\langle \mathbf{S}_n, \eta \rangle$ *является дизъюнктным объединением своих тернарных подгрупп* $\langle \mathbf{A}_n, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_n, \eta \rangle$;

2) *тернарные подгруппы* $\langle \mathbf{A}_n, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_n, \eta \rangle$ *имеют одинаковый порядок*;

3) *тернарные подгруппы* $\langle \mathbf{A}_n, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_n, \eta \rangle$ *являются инвариантными в* $\langle \mathbf{S}_n, \eta \rangle$;

4) *тернарные подгруппы* $\langle \mathbf{A}_n, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_n, \eta \rangle$ *определяют одну и ту же идемпотентную тернарную факторгруппу и одну и ту же конгруэнцию*:

$$\langle \mathbf{S}_n / \mathbf{A}_n, \eta \rangle = \langle \mathbf{S}_n / \mathbf{T}_n, \eta \rangle, \rho_{\mathbf{A}_n} = \rho_{\mathbf{T}_n};$$

5) *тернарные подгруппы* $\langle \mathbf{A}_n, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_n, \eta \rangle$ *не являются сопряженными в* $\langle \mathbf{S}_n, \eta \rangle$;

6) *тернарные подгруппы* $\langle \mathbf{A}_n, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_n, \eta \rangle$ *полусопряжены в* $\langle \mathbf{S}_n, \eta \rangle$ *любой подстановкой из* \mathbf{S}_n .

Если в теореме 3.2 положить $A = \mathbf{D}_{2n}$ – диэдральная группа, то есть полная группа преобразований симметрии правильного n -многоугольника, $B = \mathbf{Z}_n$ – ее циклическая подгруппа поворотов, то $A \setminus B = \mathbf{B}_n$ – ее подмножество отражений. Поэтому из теоремы 3.2 вытекает

Следствие 4.2. Пусть $\langle \mathbf{D}_{2n}, \eta \rangle$ – тернарная группа, производная от группы \mathbf{D}_{2n} . Тогда:

- 1) тернарная группа $\langle \mathbf{D}_{2n}, \eta \rangle$ является дизъюнктивным объединением своих тернарных подгрупп $\langle \mathbf{Z}_n, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{B}_n, \eta \rangle$;
- 2) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{Z}_n, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{B}_n, \eta \rangle$ имеют одинаковый порядок;
- 3) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{Z}_n, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{B}_n, \eta \rangle$ являются инвариантными в $\langle \mathbf{D}_{2n}, \eta \rangle$;
- 4) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{Z}_n, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{B}_n, \eta \rangle$ определяют одну и ту же идемпотентную тернарную факторгруппу и одну и ту же конгруэнцию:

$$\langle \mathbf{D}_{2n}/\mathbf{Z}_n, \eta \rangle = \langle \mathbf{D}_{2n}/\mathbf{B}_n, \eta \rangle, \rho_{\mathbf{Z}_n} = \rho_{\mathbf{B}_n};$$

- 5) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{Z}_n, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{B}_n, \eta \rangle$ не являются сопряженными в $\langle \mathbf{D}_{2n}, \eta \rangle$;
- 6) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{Z}_n, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{B}_n, \eta \rangle$ полусопряжены в $\langle \mathbf{D}_{2n}, \eta \rangle$ любым преобразованием из \mathbf{D}_{2n} .

Замечание 4.1. Утверждения 1), 3), 5) и 6) в следствиях 4.1 и 4.2 доказаны в [1].

Можно рассмотреть более общую ситуацию, заменив присутствующие в следствиях 4.1 и 4.2 группы их бесконечными аналогами. Сделаем это вначале для финитарной симметрической группы \mathbf{SF}_J , состоящей из всех биекций множества J на себя, которые имеют конечный носитель (см., например, [7]). Группа \mathbf{SF}_J является нормальной подгруппой группы \mathbf{S}_J всех биекций множества J на себя, называемых подстановками множества J . В группе \mathbf{SF}_J имеется нормальная подгруппа \mathbf{A}_J индекса 2, состоящая из всех четных подстановок, то есть биекций множества J , представимых в виде произведения четного числа транспозиций. Множество всех нечетных подстановок из \mathbf{S}_J будем обозначать символом \mathbf{T}_J . Если $J = \{1, 2, \dots, n\}$, то $\mathbf{SF}_J = \mathbf{S}_J = \mathbf{S}_n$, $\mathbf{A}_J = \mathbf{A}_n$, $\mathbf{T}_J = \mathbf{T}_n$.

Если в теореме 3.2 положить $A = \mathbf{SF}_J$, $B = \mathbf{A}_J$, то $A \setminus B = \mathbf{T}_J$. Поэтому из теоремы 3.2 вытекает

Следствие 4.3. Пусть $\langle \mathbf{SF}_J, \eta \rangle$ – тернарная группа, производная от группы \mathbf{SF}_J . Тогда:

- 1) тернарная группа $\langle \mathbf{SF}_J, \eta \rangle$ является дизъюнктивным объединением своих тернарных подгрупп $\langle \mathbf{A}_J, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_J, \eta \rangle$;
- 2) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{A}_J, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_J, \eta \rangle$ имеют одинаковую мощность;
- 3) если множество J бесконечно, то мощности тернарной группы $\langle \mathbf{SF}_J, \eta \rangle$ и ее тернарных подгрупп $\langle \mathbf{A}_J, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_J, \eta \rangle$ совпадают;
- 4) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{A}_J, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_J, \eta \rangle$ являются инвариантными в $\langle \mathbf{SF}_J, \eta \rangle$;
- 5) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{A}_J, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_J, \eta \rangle$ определяют одну и ту же идемпотентную тернарную факторгруппу и одну и ту же конгруэнцию:

$$\langle \mathbf{SF}_J/\mathbf{A}_J, \eta \rangle = \langle \mathbf{SF}_J/\mathbf{T}_J, \eta \rangle, \rho_{\mathbf{A}_J} = \rho_{\mathbf{T}_J};$$

- 6) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{A}_J, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_J, \eta \rangle$ не являются сопряженными в $\langle \mathbf{SF}_J, \eta \rangle$;
- 7) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{A}_J, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{T}_J, \eta \rangle$ полусопряжены в $\langle \mathbf{SF}_J, \eta \rangle$ любой подстановкой из \mathbf{SF}_J .

Заменим в следствии 4.2 диэдральную группу обобщенной диэдральной группой. Напомним ее определение (см., например, [8]).

Для всякой абелевой группы G множество

$$\mathbf{D}(G) = \{(g, \varepsilon) \mid g \in G, \varepsilon = \pm 1\}$$

вместе с операцией

$$(g_1, \varepsilon_1)(g_2, \varepsilon_2) = (n_1 n_2^{\varepsilon_1}, \varepsilon_1 \varepsilon_2)$$

является группой, а любая группа, изоморфная этой группе, называется обобщенной диэдральной группой.

Группа $\mathbf{D}(G)$ является объединением множеств

$$\mathbf{G}_+ = \{(g, 1) \mid g \in G\}, \mathbf{G}_- = \{(g, -1) \mid g \in G\},$$

из которых первое является подгруппой в $\mathbf{D}(G)$, изоморфной группе G , а второе состоит из инволюций.

Если в определении обобщенной диэдральной группы в качестве группы G взять циклическую группу \mathbf{Z}_n порядка n , то приходим к определению диэдральной группы \mathbf{D}_{2n} .

Если в определении обобщенной диэдральной группы в качестве группы G взять бесконечную циклическую группу \mathbf{Z} , то приходим к определению бесконечной диэдральной группы \mathbf{D}_∞ . Она имеет бесконечную циклическую подгруппу индекса 2, которую для единообразия обозначим символом \mathbf{Z}_+ . Множество всех элементов из \mathbf{D}_∞ , не принадлежащих \mathbf{Z}_+ , обозначим символом \mathbf{Z}_- . Все элементы этого множества являются инволюциями.

Если в теореме 3.2 положить $A = \mathbf{D}(G)$, $B = \mathbf{G}_+$, то $A \setminus B = \mathbf{G}_-$. Поэтому из теоремы 3.2 вытекает

Следствие 4.4. Пусть $\langle \mathbf{D}(G), \eta \rangle$ – тернарная группа, производная от группы $\mathbf{D}(G)$. Тогда:

- 1) тернарная группа $\langle \mathbf{D}(G), \eta \rangle$ является дизъюнктивным объединением своих тернарных подгрупп $\langle \mathbf{G}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{G}_-, \eta \rangle$;
- 2) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{G}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{G}_-, \eta \rangle$ имеют одинаковую мощность;
- 3) если группа G бесконечна, то мощности тернарной группы $\langle \mathbf{D}(G), \eta \rangle$ и ее тернарных подгрупп $\langle \mathbf{G}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{G}_-, \eta \rangle$ совпадают;
- 4) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{G}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{G}_-, \eta \rangle$ являются инвариантными в $\langle \mathbf{D}(G), \eta \rangle$;
- 5) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{G}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{G}_-, \eta \rangle$ определяют одну и ту же идемпотентную тернарную факторгруппу и одну и ту же конгруэнцию:

$$\langle \mathbf{D}(G)/\mathbf{G}_+, \eta \rangle = \langle \mathbf{D}(G)/\mathbf{G}_-, \eta \rangle, \rho_{\mathbf{G}_+} = \rho_{\mathbf{G}_-};$$

- 6) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{G}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{G}_-, \eta \rangle$ не являются сопряженными в $\langle \mathbf{D}(G), \eta \rangle$;

- 7) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{G}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{G}_-, \eta \rangle$ полусопряжены в $\langle \mathbf{D}(G), \eta \rangle$ любым элементом из $\mathbf{D}(G)$.

Если в теореме 3.2 положить $A = \mathbf{D}_\infty$, $B = \mathbf{Z}_+$, то $A \setminus B = \mathbf{Z}_-$. Поэтому из теоремы 3.2 вытекает

Следствие 4.5. Пусть $\langle \mathbf{D}_\infty, \eta \rangle$ – тернарная группа, производная от группы \mathbf{D}_∞ . Тогда:

- 1) тернарная группа $\langle \mathbf{D}_\infty, \eta \rangle$ является дизъюнктивным объединением своих тернарных подгрупп $\langle \mathbf{Z}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{Z}_-, \eta \rangle$;
- 2) тернарная группа $\langle \mathbf{D}_\infty, \eta \rangle$ и ее тернарные подгруппы $\langle \mathbf{Z}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{Z}_-, \eta \rangle$ имеют одинаковую мощность;
- 3) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{Z}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{Z}_-, \eta \rangle$ являются инвариантными в $\langle \mathbf{D}_\infty, \eta \rangle$;

4) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{Z}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{Z}_-, \eta \rangle$ определяют одну и ту же идемпотентную тернарную факторгруппу и одну и ту же конгруэнцию:

$$\langle \mathbf{D}_\infty / \mathbf{Z}_+, \eta \rangle = \langle \mathbf{D}_\infty / \mathbf{Z}_-, \eta \rangle, \rho_{\mathbf{Z}_+} = \rho_{\mathbf{Z}_-};$$

5) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{Z}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{Z}_-, \eta \rangle$ не являются сопряженными в $\langle \mathbf{D}_\infty, \eta \rangle$;

6) тернарные подгруппы $\langle \mathbf{Z}_+, \eta \rangle$ и $\langle \mathbf{Z}_-, \eta \rangle$ полусопряжены в $\langle \mathbf{D}_\infty, \eta \rangle$ любым элементом из \mathbf{D}_∞ .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. Тернарные группы отражений / А. М. Гальмак, Г. Н. Воробьев. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 128 с.
2. Русаков, С. А. Алгебраические n -арные системы / С. А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
3. Гальмак, А. М. n -Арные группы / А. М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – Часть 1. – 202 с.
4. Гальмак, А. М. n -Арные группы / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – Часть 2. – 324 с.
5. Гальмак, А. М. Конгруэнции полиадических групп / А. М. Гальмак. – Минск : Беларуская навука, 1999. – 182 с.
6. Мельников О. В. Общая алгебра / О. В. Мельников, В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков и др. – Москва : Наука, 1990. – Т. 1. – 592 с.
7. Супруненко Д. А. Группы подстановок / Д. А. Супруненко. – Минск : Навука і тэхніка, 1996. – 366 с.
8. Белоногов В. А. Задачник по теории групп / В. А. Белоногов. – Москва : Наука, 2000. – 239 с.

Поступила в редакцию 12.02.2020 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A.M. ON DISJUNCT JOINT OF TERNARY SUBGROUPS.

The article focuses on ternary groups, i.e. n -ary groups at $n = 3$ which are a disjunct joint of their two ternary subgroups. These ternary subgroups are proven to be invariant in the ternary group and determine the same idempotent ternary quotient group as well as the same congruence. It is also determined that these ternary subgroups are not conjugate in the ternary group, while they are semiconjugate in it by any of its element. The corollaries for certain ternary groups are given.

Keywords: disjunct join, ternary group, ternary quotient group, congruence.

УДК 512.548

КОСЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В l -АРНЫХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук

Могилевский государственный университет продовольствия

Ю. И. Кулаженко

доктор физико-математических наук

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

М. В. Селькин

доктор физико-математических наук

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

В статье изучаются косые элементы в полиадических группах специального вида, то есть в полиадических группах с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и n -арной операции η . В частности, доказана теорема, позволяющая для каждого элемента l -арной группы специального вида указать его косой элемент, выразив его через косые элементы n -арной группы, на декартовой степени которой построена указанная l -арная группа.

Ключевые слова: полиадическая операция, n -арная группа, косой элемент.

1. Введение

Полиадическим группоидом специального вида называют [1] универсальную алгебру $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ с одной l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s(n-1) + 1$, которая определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η следующим образом.

Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$. Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= ((x_{11}, x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k}, x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \end{aligned}$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)} \eta_{1, \sigma, k}(\dots \\ &\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}) \dots))). \end{aligned}$$

При $s = 1$ n -арная операция $\eta_{1, \sigma, k}$ совпадает с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$.

Частными случаями ($n = 2$) полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ являются l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на k -й декартовой степени A^k полугруппы A ,

© Гальмак А. М., 2020

© Кулаженко Ю. И., 2020

© Селькин М. В., 2020

а также две полиадические операции Э. Поста [3], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Обе операции Э. Поста являются частными случаями l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$.

В [1] было доказано, что если n -арная операция η является ассоциативной, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ также является ассоциативной, то есть, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа. В связи с этим результатом возник вопрос: *будет ли l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арной группой, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа.*

Э. Пост получил в [3] положительный ответ на этот вопрос для двух своих полиадических операций, которые были упомянуты выше. В [2] это же было сделано для l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, а затем в [4] и для операции $\eta_{s, \sigma, k}$, частными случаями которой ($n = 2$) являются и обе операции Э. Поста, а также операция $[]_{l, \sigma, k}$.

В данной статье доказывается анонсированная в [5] теорема, позволяющая для каждого элемента l -арной группы специального вида указать его косою элемент, выразив его через косые элементы n -арной группы на декартовой степени которой построена указанная l -арная группа. Приведены следствия из этой теоремы.

Предварительные сведения

Информацию, приведенную в этом разделе, можно найти в книгах [6–8].

Универсальную алгебру $\langle A, \eta \rangle$ с одной n -арной ($n \geq 2$) операцией $\eta : A^n \rightarrow A$ называют *n -арной полугруппой*, если операция η ассоциативна, то есть в A для любого $i = 1, 2, \dots, n - 1$ выполняется тождество ассоциативности

$$\eta(\eta(a_1 \dots a_n) a_{n+1} \dots a_{2n-1}) = \eta(a_1 \dots a_i \eta(a_{i+1} \dots a_{i+n}) a_{i+n+1} \dots a_{2n-1}).$$

Универсальную алгебру $\langle A, \eta \rangle$ с одной n -арной ($n \geq 2$) операцией $\eta : A^n \rightarrow A$ называют *n -арной квазигруппой*, если для всех $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо уравнение

$$\eta(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) = b, i = 1, 2, \dots, n.$$

Универсальную алгебру $\langle A, \eta \rangle$ с одной n -арной ($n \geq 2$) операцией $\eta : A^n \rightarrow A$ называют *n -арной группой*, если она является и n -арной полугруппой и n -арной квазигруппой.

Ясно, что полугруппы (квазигруппы, группы) – это n -арные полугруппы (n -арные квазигруппы, n -арные группы) при $n = 2$.

Замечание 2.1. Исторически n -арные полугруппы и n -арные квазигруппы были определены значительно позже n -арных групп. Поэтому в оригинальном определении n -арной группы, принадлежащем В. Дёрнте [9], отсутствовали n -арные полугруппы и n -арные квазигруппы. В нем говорилось об ассоциативности n -арной операции и однозначной разрешимости соответствующих уравнений.

Замечание 2.2. Э. Пост заметил [3], что: 1) требование однозначной разрешимости уравнений в определении n -арной группы В. Дёрнте можно ослабить, потребовав только их разрешимость; 2) число уравнений можно уменьшить до двух, а при $n = 3$ даже до одного. После Э. Поста и В. Дёрнте было получено большое число новых определений n -арной группы. Со многими из них можно ознакомиться по книге [8]. Приведем здесь только два определения n -арной группы, наиболее интересные на наш взгляд. В определении, принадлежащем А.Н. Скибе и В.И. Тютину

[10], требуется для любых $a, b \in A$ разрешимость в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ либо двух уравнений

$$\eta(\underbrace{xa \dots a}_{n-1}) = b, \quad \eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1}y) = b,$$

либо при $n \geq 3$ одного уравнения

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{i-1}x \underbrace{a \dots a}_{n-i}) = b.$$

А.М. Гальмак доказал [8], что n -арную группу можно определить как n -арную полугруппу $\langle A, \eta \rangle$, в которой либо для любых $a, b \in A$ в A разрешимы два уравнения

$$\eta(x_1 \dots x_{n-1}a) = b, \quad \eta(ay_1 \dots y_{n-1}) = b$$

с $n - 1$ неизвестными, либо при $n \geq 3$ для любых $a, b, c \in A$ в A разрешимо одно уравнение

$$\eta(ax_1 \dots x_{n-2}c) = b.$$

с $n - 2$ неизвестными.

Согласно Э. Посту [3], последовательность $e_1 \dots e_{s(n-1)}$, где $s \geq 1$, элементов n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется *нейтральной*, если

$$\eta(e_1 \dots e_{s(n-1)}x) = \eta(xe_1 \dots e_{s(n-1)}) = x$$

для любого $x \in A$.

Это определение обобщает на n -арный случай определение единицы группы A как элемента $e \in A$ такого, что

$$ex = xe = x$$

для любого $x \in A$. Существуют и другие обобщения единицы группы (см., например, [7]).

Согласно Э. Посту [3], последовательность β элементов n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется *обратной* к последовательности α элементов этой же n -арной группы, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными.

Одноэлементную обратную последовательность $b \in A$ для последовательности α естественно называть обратным элементом для этой последовательности.

Согласно В. Дёрнте [9], элемент b n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется *косым* элементом для элемента $a \in A$, если для любого $i = 1, 2, \dots, n$ верно

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{i-1}b \underbrace{a \dots a}_{n-i}) = a.$$

Если b косой элемент для элемента a , то употребляют обозначение $b = \bar{a}$. Таким образом, по определению

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{i-1}\bar{a} \underbrace{a \dots a}_{n-i}) = a, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Замечание 2.3. Можно показать, что:

1) для того, чтобы последовательность $e_1 \dots e_{s(n-1)}$ являлась нейтральной в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$, достаточно выполнения для некоторого $a \in A$ одного из следующих равенств

$$\eta(e_1 \dots e_{s(n-1)}a) = a, \quad \eta(ae_1 \dots e_{s(n-1)}) = a;$$

2) для того, чтобы последовательность β являлась обратной к последовательности α в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$, достаточно нейтральности одной из последовательностей $\alpha\beta, \beta\alpha$;

3) для того, чтобы элемент b n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ являлся косым для $a \in A$, достаточно выполнения равенства из определения косого элемента только для некоторого $i = 1, 2, \dots, n$;

4) для любого элемента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ его косой элемент \bar{a} является обратным для последовательности $\underbrace{a \dots a}_{n-2}$, а последовательности $\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{n-2}$ и $\underbrace{a \dots a}_{n-2} \bar{a}$ являются нейтральными.

Следующая теорема позволяет находить значения l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, не используя явно n -арную операцию $\eta_{1, \sigma, k}$, как это сделано в определении l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

Теорема 2.1 [1]. Если

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \quad (2.1)$$

Замечание 2.4. Если n -арная операция η ассоциативна, то (2.1) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}). \quad (2.2)$$

Если η – бинарная операция, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[\]_{s+1, \sigma, k}$ из [2]. При этом равенство (2.1) принимают вид

$$y_j = (x_{1j} (x_{2\sigma(j)} (\dots (x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} \dots))). \quad (2.3)$$

В правой части равенства (2.3) символ бинарной операции η , как обычно, не указан.

Если бинарная операция η ассоциативна, то (2.2) может быть переписано следующим образом

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Следующие теоремы показывают, что некоторые важнейшие свойства переносятся с n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ на l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 2.2 [1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.

Теорема 2.3 [4]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная квазигруппа.

Теорема 2.4 [4]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

3. Основной результат

Согласно теореме 2.4, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа. Укажем для каждого элемента этой l -арной группы его косой элемент.

Теорема 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ элемент $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)$, где

$$b_j = \eta \left(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}} \dots \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(j)}} \right), j = 1, \dots, k, \quad (3.1)$$

является косым для \mathbf{a} , то есть

$$\bar{\mathbf{a}} = \left(\eta \left(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(1)} \dots a_{\sigma^{l-2}(1)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(1)}} \dots \underbrace{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(1)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(1)}} \right), \dots \right. \\ \left. \dots, \eta \left(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(k)} \dots a_{\sigma^{l-2}(k)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(k)}} \dots \underbrace{a_{\sigma(k)} \dots a_{\sigma(k)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(k)}} \right) \right).$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что формула (3.1) корректна, так как число элементов в правой части этой формулы равно

$$(l-2)(n-2) = (s(n-2) - 1)(n-1) + 1.$$

Положим

$$\eta_{s, \sigma, k} \left(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{l-1} (b_1, \dots, b_k) \right) = (c_1, \dots, c_k).$$

Тогда, принимая во внимание замечание 2.4, тождественность подстановки σ^{l-1} и нейтральность последовательностей

$$a_{\sigma^{l-2}(j)} \underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}}, \\ a_{\sigma^{l-3}(j)} \underbrace{a_{\sigma^{l-3}(j)} \dots a_{\sigma^{l-3}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-3}(j)}}, \\ \dots \\ a_{\sigma(j)} \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(j)}},$$

будем иметь

$$c_j = \eta \left(a_{\sigma(j)} a_{\sigma^{l-2}(j)} \underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}} b_{\sigma^{l-1}(j)} \right) = \eta \left(a_{\sigma(j)} a_{\sigma^{l-2}(j)} \dots \underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}} b_j \right) = \\ = \eta \left(a_{\sigma(j)} a_{\sigma^{l-3}(j)} \underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}} \dots \underbrace{a_{\sigma^{l-3}(j)} \dots a_{\sigma^{l-3}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-3}(j)}} \right) = \\ = \eta \left(a_{\sigma(j)} a_{\sigma^{l-3}(j)} \dots \underbrace{a_{\sigma^{l-3}(j)} \dots a_{\sigma^{l-3}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-3}(j)}} \dots \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(j)}} \right) = \dots \\ \dots = \eta \left(a_{\sigma(j)} a_{\sigma(j)} \dots \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(j)}} \right) = a_j,$$

то есть $c_j = a_j$ для любого $j \in \{1, \dots, k\}$. Следовательно,

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{l-1}(b_1, \dots, b_k)) = \mathbf{a}.$$

Теорема доказана.

Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, то она удовлетворяет и условию $\sigma^l = \sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$. Поэтому из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа ($n \geq 3$), подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ элемент $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)$, где компоненты b_1, \dots, b_k определяются равенствами (3.1), является косым для \mathbf{a} .

В качестве подстановки σ в следствии 3.1 можно взять любой цикл σ длины $n-1$ из \mathbf{S}_k , если $n \leq k+1$. Например, цикл $\sigma = (12 \dots n-1)$.

Для $n=2$ результат, аналогичный теореме 3.1, доказан в [2].

Предложение 3.1 [2, предложение 3.6.3]. Пусть A – группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ l -арной группы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ элемент

$$\bar{\mathbf{a}} = (a_{\sigma^{l-2}(1)}^{-1} \dots a_{\sigma(1)}^{-1}, \dots, a_{\sigma^{l-2}(k)}^{-1} \dots a_{\sigma(k)}^{-1})$$

является косым для \mathbf{a} .

Замечание 3.1. Элементы

$$b_1 = \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(1)} \dots a_{\sigma^{l-2}(1)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(1)}} \dots \underbrace{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(1)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(1)}}),$$

.....

$$b_k = \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(k)} \dots a_{\sigma^{l-2}(k)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{l-2}(k)}} \dots \underbrace{a_{\sigma(k)} \dots a_{\sigma(k)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(k)}})$$

из теоремы 3.1 являются обратными в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$ соответственно для последовательностей

$$a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma^{l-2}(1)}, \dots, a_{\sigma(k)} \dots a_{\sigma^{l-2}(k)}.$$

Аналогично, элементы

$$a_{\sigma^{l-2}(1)}^{-1} \dots a_{\sigma(1)}^{-1}, \dots, a_{\sigma^{l-2}(k)}^{-1} \dots a_{\sigma(k)}^{-1}$$

из предложения 3.1 являются обратными в группе A соответственно для последовательностей (элементов)

$$a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma^{l-2}(1)}, \dots, a_{\sigma(k)} \dots a_{\sigma^{l-2}(k)}.$$

Таким образом, теорему 3.1 и предложение 3.1 можно объединить в одну теорему, включающую и случай $n \geq 3$ и случай $n=2$.

Теорема 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ элемент

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k),$$

где b_j – обратный элемент $v \in \langle A, \eta \rangle$ для последовательности

$$a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{l-2}(j)}, j = 1, \dots, k, \quad (3.2)$$

является косым для \mathbf{a} , то есть $\bar{\mathbf{a}} = (b_1, \dots, b_k)$.

Следствие 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ элемент $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)$, где b_j – обратный элемент $v \in \langle A, \eta \rangle$ для последовательности (3.2), является косым для \mathbf{a} .

Полагая в теореме 3.2 или в следствии 3.2 $s = 1$, получим

Следствие 3.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ n -арной группы $\langle A^k, \eta_{1, \sigma, k} \rangle$ элемент

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k),$$

где b_j – обратный элемент $v \in \langle A, \eta \rangle$ для последовательности

$$a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{n-2}(j)}, j = 1, \dots, k,$$

является косым для \mathbf{a} , то есть $\bar{\mathbf{a}} = (b_1, \dots, b_k)$.

Следующее следствие получается из теоремы 3.1, если в ней положить $n = 3$.

Следствие 3.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$ ($s \geq 2$). Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ из $(2s + 1)$ -арной группы $\langle A^k, \eta_{2s+1, \sigma, k} \rangle$ элемент

$$\bar{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_{\sigma^{2s-1}(1)}} \cdots \overline{a_{\sigma(1)}}), \dots, \eta(\overline{a_{\sigma^{2s-1}(k)}} \cdots \overline{a_{\sigma(k)}}))$$

является косым для \mathbf{a} .

Полагая в следствии 3.3 $n = 3$, и, учитывая тот факт, что в любой тернарной группе $\langle A, \eta \rangle$ обратная последовательность для элемента a совпадает с его косым элементом \bar{a} , получим

Следствие 3.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^3 = \sigma$. Тогда для любого элемента $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ тернарной группы $\langle A^k, \eta_{1, \sigma, k} \rangle$ элемент

$$\bar{\mathbf{a}} = (\overline{a_{\sigma(1)}}, \dots, \overline{a_{\sigma(k)}})$$

является косым для \mathbf{a} .

Следствие 3.5 может быть формально получено и из следствия 3.4, если в нем положить $s = 1$ и считать, что $\eta(a) = a$ для любого $a \in A$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Гальмак, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Гальмак, А. М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2018. – № 1(51). – С. 4–10.
5. Гальмак, А. М. Косые элементы в полиадических группах специального вида / А. М. Гальмак, Ю. И. Кулаженко, М. В. Селькин / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 186–188.
6. Русаков, С. А. Алгебраические n -арные системы / С. А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

7. *Гальмак, А. М.* *n*-Арные группы / А. М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – Часть 1. – 202 с.
8. *Гальмак, А. М.* *n*-Арные группы / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – Часть 2. – 324 с.
9. *Dörnte, W.* Untersuchungen u ber einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
10. *Тютин, В.И.* К аксиоматике *n*-арных групп / В. И. Тютин // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 8. – С. 691–693.

Поступила в редакцию 28.01.2020 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A., Kulazhenko Y., Selkin M. SKEW ELEMENTS IN *l*-ARY GROUPS OF SPECIAL FORM.

*The article deals with the study of skew elements in polyadic groups of special form, that is in polyadic groups with *l*-ary operation $\eta_{\sigma, \sigma, k}$ called polyadic operation of special form and defined on Cartesian power of A^k *n*-ary group $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$ and *n*-ary operation η . In particular, there has been proved a theorem that allows to determine a skew element for each element of *l*-ary group of special form, the skew element being formulated by means of a skew element of *n*-ary group on Cartesian power of which the given *l*-ary group is constructed.*

Keywords: polyadic operation, *n*-ary group, skew element.

УДК 517.956.32

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ГРАНИЧНОМ РЕЖИМЕ ДЛЯ ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ

Ф. Е. Ломовцев

доктор физико-математических наук
Белорусский государственный университет

Е. В. Устилко

аспирант кафедры математической кибернетики
Белорусский государственный университет

Впервые полностью изучена корректность (по Адамару) новой смешанной задачи для общего одномерного волнового уравнения с характеристической первой косою производной в нестационарном граничном режиме для решений целых высших порядков гладкости. Найдено в явном виде ее единственное и устойчивое $m \geq 2$ раз непрерывно дифференцируемое решение. Выведен ее критерий корректности (необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования на правую часть уравнения, начальные и граничные данные) для всех четных $m \geq 2$. Установлены достаточные условия ее корректности при всех целых $m \geq 2$. Работа обобщает ранее полученные результаты для классических решений ($m = 2$).

Ключевые слова: смешанная задача, нестационарное граничное условие, характеристическая косою производная, классическое решение, критерий корректности, требование гладкости, условие согласования.

Введение

В настоящей работе модификацией метода характеристик найдено в явном виде единственное и устойчивое гладкое (из множества функций целых высших порядков гладкости) решение смешанной задачи для общего одномерного волнового уравнения ($a_1 \neq a_2$) при характеристической первой косою производной в нестационарном граничном режиме. Также установлен критерий корректности (по Адамару: существование, единственность и устойчивость решения) для четных порядков и достаточные условия корректности для всех целых порядков гладкости решений этой смешанной задачи. Характеристичность первой косою производной означает ее направление по критической характеристике $x = a_1 t$ уравнения, а нестационарность – зависимость ее коэффициентов от времени. Критерий корректности включает необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования на исходные данные (правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное), которые гарантируют ее однозначную и устойчивую везде разрешимость. Таким образом, в этой работе нами получены полные и окончательные результаты исследования характеристической смешанной задачи для решений четных по-

© Ломовцев Ф. Е., 2020

© Устилко Е. В., 2020

рядков гладкости. Эти результаты обобщают результаты работ [1–3] для случая классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений аналогичной характеристической смешанной задачи для уравнения колебаний полуограниченной струны. Для простейшего уравнения ($a_1 \neq a_2$) колебаний ограниченной струны с характеристической первой косою производной на левом конце и характеристическими первыми косыми производными на обоих концах смешанные задачи изучались соответственно в статьях [4] и [5]. В этих работах вывод необходимых требований на правую часть уравнения существенно опирается на результаты метода корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости из [6]. Работы [7] и [8] посвящены явному решению и поиску критериев корректности аналогичных смешанных задач для общего одномерного волнового уравнения ($a_1 \neq a_2$), но соответственно в случаях нехарактеристических первых и вторых косых производных в нестационарных граничных условиях. Необходимые условия корректности на правую часть получены в [7] только для простейшего уравнения ($a_1 = a_2$). Характеристические смешанные задачи требуют на “единицу” большую гладкость исходных данных и на одно условие согласования больше, чем нехарактеристические смешанные задачи для полуограниченной струны. Изученная нами в настоящей работе характеристическая смешанная задача будет использоваться в качестве вспомогательной смешанной задачи при решении характеристической смешанной задачи для общего уравнения ($a_1 \neq a_2$) колебаний ограниченной струны. В зарубежной научной литературе изучались нехарактеристические смешанные задачи для одномерного волнового уравнения, но нет полных, завершенных и исчерпывающих исследований их корректности по Адамару [9–12 и др.].

Основная часть

На множестве $\dot{G}_\infty = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ ставится характеристическая смешанная задача:

$$u_{tt}(x,t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x,t) - a_1 a_2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad (2)$$

$$\left[\alpha(t)(u_t(x,t) + a_1 u_x(x,t)) + \gamma(t)u(x,t) \right]_{x=0} = \mu(t), \quad t \in (0, +\infty), \quad (3)$$

где коэффициенты α , γ – заданные функции переменной t , исходные данные f , φ , ψ , μ – заданные функции своих переменных x и t , $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ – вещественные постоянные. Частные производные соответствующих порядков от искомой функции u обозначаем нижними индексами по указанным переменным.

Символом $C^k(\Omega)$ обозначим множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset R^2$.

Определение 1. Гладким решением класса $C^m(G_\infty)$ смешанной задачи (1)–(3) на \dot{G}_∞ называется функция $u \in C^m(G_\infty)$, $G_\infty = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, $m = 2, 3, 4, \dots$, удовлетворяющая уравнению (1) в обычном смысле, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле пределов соответствующих дифференциальных выражений от ее значений $u(\dot{x}, \dot{t})$ во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ первой четверти плоскости для всех указанных в них граничных точек множества G_∞ .

Требуется найти в явном виде решения $u \in C^m(G_\infty)$, $G_\infty = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$, а также необходимые и достаточные условия на исходные данные

f, φ, ψ, μ для однозначной и устойчивой везде разрешимости характеристической смешанной задачи (1)–(3).

Перед непосредственным решением и исследованием этой задачи введем еще обозначения и сформулируем некоторые необходимые требования гладкости и согласования на исходные данные. Уравнение (1) в плоскости R^2 переменных x, t имеет два различных семейства характеристик: $x - a_1 t = C_1, x + a_2 t = C_2, \forall C_1, C_2 \in R = (-\infty, +\infty)$. Первая четверть плоскости G_∞ разбивается характеристикой $x = a_1 t$ на два множества $G_- = \{(x, t) \in G_\infty : x > a_1 t > 0\}$ и $G_+ = \{(x, t) \in G_\infty : 0 \leq x \leq a_1 t\}$.

Из самой постановки смешанной задачи (1)–(3) для гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$ вытекают очевидные необходимые требования гладкости:

$$f \in C^{m-2}(G_\infty), \varphi \in C^m(R_+), \psi \in C^{m-1}(R_+), \mu \in C^{m-1}(R_+), \quad (4)$$

где множество $R_+ = [0, +\infty)$. Из работы [6] для неоднородного уравнения (1) на \dot{G}_∞ мы будем использовать частное классическое решение F , задаваемое формулами (см. ниже общий интеграл (17)):

$$F_1(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{(x/a_1)-t} \int_{((a_2/a_1)+2)(x-a_1t)-a_2\tau}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{(x/a_1)-t}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \right], (x, t) \in G_- \quad (5)$$

$$F_2(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[\int_0^{t-(x/a_1)} \int_{a_2(t-\tau)-(a_2/a_1)x}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau + \int_{t-(x/a_1)}^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \right], (x, t) \in G_+ \quad (6)$$

Полагая $t = 0$ в граничном режиме (3) и первой производной по t от этого режима и вычисляя значения слагаемых их левых частей с помощью начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (1) при $t = 0, x = 0$ получаем для гладких решений этой задачи необходимые условия согласования граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1):

$$J_1 \equiv \alpha(0)[\psi(0) + a_1\varphi'(0)] + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \quad (7)$$

$$J_2 \equiv \alpha'(0)[\psi(0) + a_1\varphi'(0)] + \gamma'(0)\varphi(0) + \alpha(0)\langle a_2[\psi'(0) + a_1\varphi''(0)] + f(0, 0) \rangle + \gamma(0)\psi(0) = \mu'(0), \quad (8)$$

корректно определенные для исходных данных (4) при всех целых $m \geq 2$.

Модификацией известного метода характеристик из [13] доказывается

Теорема 1. Пусть в граничном режиме (3) коэффициенты $\alpha, \gamma \in C^m(R_+), m = 2, 4, 6, \dots, \gamma(t) \neq 0, t \in R_+ = [0, +\infty)$. Для того чтобы смешанная задача (1)–(3) в \dot{G}_∞ имела единственное и устойчивое по φ, ψ, μ, f решение $u \in C^m(G_\infty), m = 2, 4, 6, \dots$, необходимо и достаточно условий гладкости (4),

$$H_1(x, t) \equiv \int_0^t f(x + a_2(t - \tau), \tau) d\tau \in C^{m-1}(G_\infty), \quad (9)$$

$$H_2(x, t) \equiv \frac{a_2 + 2a_1}{a_1} \int_0^{(x/a_1)-t} f\left(\frac{a_2 + 2a_1}{a_1}(x - a_1t) - a_2\tau, \tau\right) d\tau + \\ + \int_{(x/a_1)-t}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in \tilde{N}^{m-1}(G_-), \quad (10)$$

$$H_3(x, t) \equiv -\frac{a_2}{a_1} \int_0^{t-(x/a_1)} f(a_2(t - (x/a_1) - \tau), \tau) d\tau + \\ + \int_{t-(x/a_1)}^t f(x - a_1(t - \tau), \tau) d\tau \in C^{m-1}(G_+), \quad (11)$$

все частные производные от H_2 и H_3 до порядка $m - 1$ включительно непрерывны на $x = a_1t$;

$$\mu \in C^m(R_+), \quad \alpha(t)\varphi^{(m+1)}(a_2t), \quad \alpha(t)\psi^{(m)}(a_2t), \\ \alpha(t)(\partial^m H_1(0, t) / \partial t^m) \in C(R_+), \quad (12)$$

условий согласования (7), (8) и

$$J_{q+1} \equiv \langle \alpha^{(q)}(0)[\psi(0) + a_1\varphi'(0)] + \gamma^{(q)}(0)\varphi(0) \rangle + \\ + q \langle \alpha^{(q-1)}(0) \langle a_2[\psi'(0) + a_1\varphi''(0)] + f(0, 0) \rangle + \gamma^{(q-1)}(0)\psi(0) \rangle + \\ + \sum_{i=2}^q C_q^i \left\{ \alpha^{(q-i)}(0) \left\langle a_2^i [\psi^{(i)}(0) + a_1\varphi^{(i+1)}(0)] + \sum_{j=0}^{i-1} a_2^j f^{(j; i-j-1)}(0, 0) \right\rangle + \right. \\ \left. + \gamma^{(q-i)}(0) \left\langle a_2 \frac{a_2^{i-1} - (-a_1)^{i-1}}{a_1 + a_2} [\psi^{(i-1)}(0) + a_1\varphi^{(i)}(0)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=0}^{i-2} \frac{a_2^{k+1} - (-a_1)^{k+1}}{a_1 + a_2} f^{(k; i-k-2)}(0, 0) + \right. \right. \\ \left. \left. + (-a_1)^{i-1} \psi^{(i-1)}(0) \right\rangle \right\} = \mu^{(q)}(0), \quad q = 2, 3, \dots, m-1, \quad (13)$$

$$J_{m+1} \equiv \langle \alpha^{(m)}(0)[\psi(0) + a_1\varphi'(0)] + \gamma^{(m)}(0)\varphi(0) \rangle + \\ + m \langle \alpha^{(m-1)}(0) \langle a_2[\psi'(0) + a_1\varphi''(0)] + f(0, 0) \rangle + \gamma^{(m-1)}(0)\psi(0) \rangle + \\ + \sum_{i=2}^{m-1} C_m^i \left\{ \alpha^{(m-i)}(0) a_2^i [\psi^{(i)}(0) + a_1\varphi^{(i+1)}(0)] + \right. \\ \left. + a_2^m [\alpha(0)\psi^{(m)}(0) + a_1\alpha(0)\varphi^{(m+1)}(0)] + \right. \\ \left. + \gamma^{(m-i)}(0) \left\langle a_2 \frac{a_2^{i-1} - (-a_1)^{i-1}}{a_1 + a_2} [\psi^{(i-1)}(0) + a_1\varphi^{(i)}(0)] + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=0}^{i-2} \frac{a_2^{k+1} - (-a_1)^{k+1}}{a_1 + a_2} f^{(k; i-k-2)}(0, 0) + (-a_1)^{i-1} \psi^{(i-1)}(0) \right\rangle \right\} + \\ + \sum_{i=2}^{m-1} C_m^i \alpha^{(m-i)}(0) \sum_{j=0}^{i-1} a_2^j f^{(j; i-j-1)}(0, 0) +$$

$$+\alpha(0)\sqrt{a_2^2+1} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_2} \left(\sum_{j=0}^{(m-2)/2} a_2^{2j} f^{(2j;m-2j-2)} \right) (0,0) = \mu^{(m)}(0), \quad m=2, 4, 6, \dots, \quad (14)$$

где $(\partial(\bullet)/\partial \vec{v}_2)(0,0)$ – значение производной по вектору $\vec{v}_2 = \{a_2, 1\}$ от указанной суммы частных производных порядка $m-2$ в начале координат.

Этим гладким решением смешанной задачи (1)–(3) является функция

$$u_-(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2} \left[a_1 \varphi(x+a_2t) + a_2 \varphi(x-a_1t) + \int_{x-a_1t}^{x+a_2t} \psi(s) ds + \int_0^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s,\tau) ds d\tau, \quad (x,t) \in G_-, \quad (15) \right.$$

$$u_+(x,t) = \frac{1}{a_1+a_2} \left\{ a_1 \left[\varphi(x+a_2t) - \varphi \left(a_2 \left(t - \frac{x}{a_1} \right) \right) \right] + \int_{a_2(t-x/a_1)}^{x+a_2t} \psi(s) ds \right\} +$$

$$+ F_2(x,t) + \gamma^{-1} \left(t - \frac{x}{a_1} \right) \left\{ \mu \left(t - \frac{x}{a_1} \right) - \right.$$

$$- \alpha \left(t - \frac{x}{a_1} \right) \left[a_1 \varphi' \left(a_2 \left(t - \frac{x}{a_1} \right) \right) + \psi \left(a_2 \left(t - \frac{x}{a_1} \right) \right) \right] -$$

$$\left. - \alpha \left(t - \frac{x}{a_1} \right) \int_0^{t-x/a_1} f \left(a_2(t-\tau) - \frac{a_2}{a_1}x, \tau \right) d\tau \right\},$$

Доказательство. Общий интеграл неоднородного уравнения (1) в первой четверти плоскости \dot{G}_∞ для гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$ представляет собой множество решений

$$u(x,t) = \hat{g}(x+a_2t) + \hat{h}(x-a_1t) + F(x,t), \quad (17)$$

где $\hat{g} = \hat{g}(\xi)$ и $\hat{h} = \hat{h}(\eta)$ – любые m раз непрерывно дифференцируемые функции переменных $\xi, \eta \in R$ и F – m раз непрерывно дифференцируемая функция, задаваемая формулой (5) на G и формулой (6) на G_+ . Непрерывность всех частных производных от F до порядка m включительно в G_∞ следует из требований гладкости (9)–(11) функций H_1, H_2 и H_3 в теореме 1 и того, что все частные производные от H_2 и H_3 до порядка $m-1$ включительно непрерывны на $x = a_1t$. Ниже мы увидим, что каждая функция H_1, H_2 и H_3 является соответствующей производной вдоль одного из двух семейств характеристик уравнения (1) от функции F_1 или F_2 .

По “методу погружения в решения с фиксированными значениями” из [8] множество решений (17) уравнения (1) в \dot{G}_∞ совпадает с множеством

$$u(x,t) = g(x+a_2t) + h(x-a_1t) + F(x,t), \quad (18)$$

где $g = g(y)$ и $h = h(z)$ – любые m раз непрерывно дифференцируемые функции от $y, z \in R$ вида $g(y) = \hat{g}(y) + \hat{h}(0)$ и $h(z) = \hat{h}(z) - \hat{h}(0)$. Общий интеграл (18) упрощает решение систем уравнений.

Достаточность в G_- . На множестве G_- решения ищутся как решения задачи Коши (1), (2). Подставляем (18) в начальные условия (2) и получаем систему двух уравнений

$$g(x) + h(x) + F_1(x, 0) = \varphi(x), \quad a_2 g'(x) - a_1 h'(x) + \frac{\partial F_1(x, 0)}{\partial t} = \psi(x).$$

Решаем ее, подставляем найденные функции g и h в (18) и имеем

$$u_-(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \left[a_1 \varphi(x + a_2 t) + a_2 \varphi(x - a_1 t) + \int_{x-a_1 t}^{x+a_2 t} \psi(s) ds + F_1(x, t) - \int_0^{(x/a_1)-t} \int_{((a_2/a_1)+2)(x-a_1 t)-a_2 \tau}^{x-a_1(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \right]. \quad (19)$$

Легко заметить, что после упрощения последних двух слагаемых функция (19) преобразуется в (15).

Очевидно, что условий (4) на φ и ψ достаточно для того, чтобы первые три слагаемые в функции (15) принадлежали классу $C^m(G_-)$. Находя первые частные производные от F_1 по x и t , в силу требований гладкости (9), (10) имеем равенства и включения:

$$\frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{a_1 + a_2} [H_1(x, t) - H_2(x, t)] \in C^{m-1}(G_-),$$

$$\frac{\partial F_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{a_1 + a_2} [a_2 H_1(x, t) + a_1 H_2(x, t)] \in C^{m-1}(G_-).$$

Отсюда следует, что $F_1(x, t) \in C^m(G_-)$. Из доказательства теоремы 3 в [6] следует, что функции F_1 и

$$F_0(x, t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \quad (20)$$

одновременно не только дважды, но и m раз непрерывно дифференцируемые в G_- . Поэтому интегральные требования (9) и (10) на f достаточны для того, чтобы последнее слагаемое F_0 в функции (15) было m раз непрерывно дифференцируемым в G_- .

Необходимость в G_- . Необходимость требований гладкости (4) обоснована нами выше перед формулировкой теоремы 1. Необходимость требований гладкости (9), (10) на f для m раз непрерывной дифференцируемости функции F_1 в G_- вытекают из следующих формул

$$H_1(x, t) = a_1 (\partial F_1(x, t) / \partial x) + \partial F_1(x, t) / \partial t \in C^{m-1}(G_-),$$

$$H_2(x, t) = \partial F_1(x, t) / \partial t - a_2 (\partial F_1(x, t) / \partial x) \in C^{m-1}(G_-).$$

Устойчивость в G_- . Из формулы (15) при любом $T > 0$ легко выводится непрерывная зависимость решения u_- в банаховом пространстве $E_1 = C^m(G_T^-)$ от исходных данных φ, ψ, f в произведении Z_1 банаховых пространств $C^m[0, +\infty), C^{m-1}[0, +\infty), \hat{C}^{m-2}(G_T^-)$ этих исходных данных, где множества $G_T^- = G_T \cap G_-, G_T = \{(x, t) \in G_\infty : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq t \leq T\}$, с нормами

$$\|u_-\|_{C^m(G_T^-)} = \sup_{(x,t) \in G_T^-} \sum_{0 \leq k+l \leq m} |\partial_x^k \partial_t^l u_-(x, t)|, \quad \partial_x^k \partial_t^l = \partial^{k+l} / \partial x^k \partial_t^l,$$

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{C^m[0,+\infty)} &= \sup_{0 \leq x < +\infty} \left(\sum_{k=0}^m |\varphi^{(k)}(x)| \right), \\ \|\psi\|_{C^{m-1}[0,+\infty)} &= \sup_{0 \leq x < +\infty} \left(\sum_{k=1}^{m-1} |\psi^{(k)}(x)| \right), \\ \|f\|_{\hat{C}^{m-2}(G_T^-)} &= \sup_{(x,t) \in G_T^-} \left(\sum_{0 \leq k+l \leq m-2} |\partial_x^k \partial_t^l f(x,t)| + \sum_{i=1}^2 \sum_{0 \leq k+l \leq m-1} |\partial_x^k \partial_t^l H_i(x,t)| \right). \end{aligned}$$

Для оценивания частных производных до порядка m включительно от последнего слагаемого F_0 вида (20) на G_- с указанной выше нормой $\|f\|_{\hat{C}^{m-2}(G_T^-)}$ надо воспользоваться необходимой гладкостью

$$f \in C^{m-2}(G_\infty), \int_0^t f(x + (-1)^i a_i(t - \tau), \tau) d\tau \in C^{m-1}(G_-), i = 1, 2, \quad (21)$$

для того чтобы функция $F_1 \in C^m(G_-)$, $m \geq 2$. Это следует из аналога теоремы 3 при $m = 2$ в [6], согласно которой требования (20) при $m = 2$ необходимы для функции $F_1 \in C^2(G_-)$ вида (34) при $k = (a_2 / a_1) + 2$ в теореме 3 из [6]. Более того, также как при доказательстве этой теоремы 3 устанавливается достаточность требований (21) для того, чтобы в G_- функция F_1 при $k = (a_2 / a_1) + 2$ из теоремы 3 была m раз непрерывно дифференцируемой.

Достаточность на G_+ . Решения смешанной задачи (1)–(3) на множестве G_+ ищутся, как решения задачи Пикара для уравнения (1) на G_+ с равенствами $u_+(x, t) = u_-(x, t)$, на критической характеристике $x = a_1 t$ и граничным режимом (3). На множестве G_+ формула (16) была выведена в [3].

Гладкость начальных данных $\varphi \in C^m(R_+)$, $\psi \in C^{m-1}(R_+)$ из (4), очевидно, обеспечивает m раз непрерывную дифференцируемость на G_+ первого слагаемого в формуле (16). Условие $f \in C^{m-2}(G_\infty)$ гарантирует существование и непрерывность частных производных до порядка $m - 1$ включительно от первых частных производных функции F_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2(x, t)}{\partial x} &= \frac{1}{a_1 + a_2} [H_1(x, t) - H_3(x, t)] \in C^{m-1}(G_+), \\ \frac{\partial F_2(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{a_1 + a_2} [a_2 H_1(x, t) + a_1 H_3(x, t)] \in C^{m-1}(G_+). \end{aligned}$$

Тогда, учитывая требования гладкости для функций H_1 и H_3 из (9) и (11),

вытекает, что $F_2 \in C^m(G_+)$. Непрерывность частных производных до порядка m включительно от всех оставшихся слагаемых выражения (16) следует из требований (12) благодаря гладкости коэффициентов α , $\gamma \in C^m(R_+)$, $\gamma(t) \neq 0$, $t \in R_+$. В частности, для коэффициента $\alpha \in C^m(R_+)$ непрерывность частных производных порядка m от произведения

$$\alpha \left(t - \frac{x}{a_1} \right) \int_0^{t-x/a_1} f \left(a_2(t - \tau) - \frac{a_2}{a_1} x, \tau \right) d\tau = \alpha(\tilde{t}) H_1(0, \tilde{t})$$

следует из требования (9) при $x = 0$ линейности замены $\tilde{t} = t - x / a_1$ и последнего включения из (12).

Необходимость в G_+ . Из самой постановки смешанной задачи (1)–(3) для гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$ нами уже выведены необходимые требования гладкости (4). Необходимая гладкость функции F_2 в G_+ доказывается аналогично методу корректировки пробных решений (см. теорему 2 в [6]). Поэтому если функция $F_2 \in C^m(G_+)$ – гладкое решение неоднородного уравнения (1) в G_+ , то его частные производные $\partial F_2 / \partial x, \partial F_2 / \partial t \in C^{m-1}(G_+)$ и поэтому

$$H_1(x, t) = a_1(\partial F_2(x, t) / \partial x) + \partial F_2(x, t) / \partial t \in C^{m-1}(G_+),$$

$$H_3(x, t) = \partial F_2(x, t) / \partial t - a_2(\partial F_2(x, t) / \partial x) \in C^{m-1}(G_+).$$

Общие интегралы (18) уравнения (1) должны сохранять свою гладкость при подстановке не только в уравнение (1), но и в граничный режим (3) и, в частности, при функциях $g = 0, f = 0$ и любой $h \in C^m(R_+)$. Поэтому решение $u_1(x, t) = h(a_1 t - x)$ однородного уравнения (1) должно сохранять гладкость в граничном режиме (3):

$$\left[\alpha(t) a_1 h'(a_1 t - x) - a_1 \alpha(t) h'(a_1 t - x) + \gamma(t) h(a_1 t - x) \right]_{x=0} = \gamma(t) h(a_1 t) = \mu(t).$$

Отсюда следует, что граничное данное $\mu \in C^m(R_+)$, так как функции $\gamma, h \in C^m(R_+)$.

Если частное решение $F_2 \in C^m(G_+)$ неоднородного уравнения (1) подставить в граничный режим (3), то будем иметь

$$\begin{aligned} & \left[\alpha(t) \left(\frac{\partial F_2(x, t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial F_2(x, t)}{\partial x} \right) + \gamma(t) F_2(x, t) \right]_{x=0} = \\ & = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ \alpha(t) [a_2 H_1(0, t) - a_1 H_2(0, t)] + \right. \\ & \left. + a_1 \alpha(t) [H_1(0, t) + H_2(0, t)] \right\} = \alpha(t) H_1(0, t) = \mu(t). \end{aligned}$$

По выше доказанному функции $\mu(t) \in C^m(R_+)$, $H_1(x, t) \in C^{m-1}(G_\infty)$ и значит для $\alpha \in C^m(R_+)$ непрерывно произведение $\alpha(t) (\partial^m H_1(0, t) / \partial t^m) \in C(R_+)$ в последнем требовании гладкости (12) на основании формулы Лейбница для производной порядка m от произведения двух функций.

Подставляем в (3) решения $u_2(x, t) = \varphi(x + a_2 t)$, которые получаются из (18) при функциях $g = \varphi, h = 0, f = 0$, так как $\varphi \in C^m(R_+)$ согласно необходимым условиям (4), и имеем равенства:

$$\begin{aligned} & a_2 \alpha(t) \varphi'(a_2 t) + a_1 \alpha(t) \varphi'(a_2 t) + \gamma(t) \varphi(a_2 t) = \\ & = \alpha(t) (a_1 + a_2) \varphi'(a_2 t) + \gamma(t) \varphi(a_2 t) = \mu(t) \end{aligned}$$

Тогда $\alpha(t) \varphi'(a_2 t) = [1 / (a_1 + a_2)] (\mu(t) - \gamma(t) \varphi(a_2 t)) \in C^m(R_+)$, так как коэффициент $\gamma \in C^m(R_+)$ и по уже доказанному выше исходные данные $\varphi, \mu \in C^m(R_+)$. Отсюда на основании формулы Лейбница для производной от произведения двух

функцый $\alpha(t)\varphi'(a_2t)$ мы заключаем, что произведение $\alpha(t)\varphi^{(m+1)}(a_2t) \in C(R_+)$ для второго включения из (12), потому что коэффициент $\alpha \in C^m(R_+)$.

Положив $g(y) = \int_0^y \psi(s)ds$, $h(z) = \int_{-(a_2/a_1)z}^0 \psi(s)ds$, $f = 0$ в общем интеграле (18),

ввиду (4) находим частные гладкие решения

$$u_3(x, t) = \int_{a_2t - (a_2/a_1)x}^{x+a_2t} \psi(s)ds \in C^m(G_+) \quad \forall \psi \in C^{m-1}(R_+)$$

однородного уравнения (1) и подставляем их в граничный режим (3):

$$\left\{ \alpha(t) \left[a_2\psi(x+a_2t) - a_2\psi\left(a_2t - \frac{a_2}{a_1}x\right) \right] + \right. \\ \left. + a_1\alpha(t) \left[\psi(x+a_2t) + \frac{a_2}{a_1}\psi\left(a_2t - \frac{a_2}{a_1}x\right) \right] + \right. \\ \left. + \gamma(t) \int_{a_2t - (a_2/a_1)x}^{x+a_2t} \psi(s)ds \right\} \Big|_{x=0} = (a_1 + a_2)\alpha(t)\psi(a_2t) = \mu(t) \in C^m(R_+).$$

Аналогично предыдущим двум случаям отсюда следует, что $\alpha(t)\psi^{(m)}(a_2t) \in C(R_+)$ для третьего включения из требований гладкости (12), так как функции $\alpha, \mu \in C^m(R_+)$.

Устойчивость в G_+ . При любом $T > 0$ из формулы (16) выводится непрерывная зависимость найденного решения u_+ в банаховом пространстве $E_2 = C^m(G_T^+)$ от исходных данных φ, ψ, μ, f в произведении Z_2 банаховых пространств

$C^m(G_T^+)$, $\widehat{C}^m[0, T_a]$, $\widehat{C}^{m-1}[0, T_a]$, $C^m[0, T]$, $\widehat{C}^{m-2}(G^T)$ этих данных, где множества $G_T^+ = G^T \cap G_+$, $G^T = \{(x, t) \in G_\infty : 0 \leq x + a_2t \leq T_a, 0 \leq t \leq T\}$ и постоянная $T_a = (a_1 + a_2)T$, соответственно с нормами

$$\|u_+\|_{C^m(G_T^+)} = \max_{(x,t) \in G_T^+} \sum_{0 \leq k+l \leq m} |\partial_x^k \partial_t^l u(x, t)| \\ \|\varphi\|_{\widehat{C}^m[0, T_a]} = \max_{0 \leq x \leq T_a} \left(\sum_{k=0}^m |\varphi^{(k)}(x)| + |\alpha(x/a_2)\varphi^{(m+1)}(x)| \right), \\ \|\psi\|_{\widehat{C}^{m-1}[0, T_a]} = \max_{0 \leq x \leq T_a} \left(\sum_{k=1}^{m-1} |\psi^{(k)}(x)| + |\alpha(x/a_2)\psi^{(m)}(x)| \right), \\ \|\mu\|_{C^m[0, T]} = \max_{0 \leq t \leq T} \left(\sum_{k=0}^m |\mu^{(k)}(x)| \right), \\ \|f\|_{\widehat{C}^{m-2}(G^T)} = \max_{(x,t) \in G^T} \left(\sum_{0 \leq k+l \leq m-2} |\partial_x^k \partial_t^l f(x, t)| + \sum_{i=1,3} \sum_{0 \leq k+l \leq m-1} |\partial_x^k \partial_t^l H_i(x, t)| \right) +$$

$$+\left|\alpha(t)\left[\partial^m H_1(0,t)/\partial t^m\right]\right|).$$

Достаточность в G_∞ . Функции u_- и u_+ должны быть m раз непрерывно дифференцируемыми не только соответственно на G_- и G_+ , в чем мы убедились выше, но и на критической характеристике $x = a_1 t$. Мы будем склеивать их на $x = a_1 t$ с помощью условий согласования (7), (8), (13), (14), в которых присутствуют значения входных данных f , φ , ψ , μ и соответствующих их производных в начале координат $(0, 0)$. Убедиться в достаточности условий согласования (7), (8), (13), (14) для m раз непрерывной дифференцируемости функций u_+ и u_- на $x = a_1 t$ нам поможет

Лемма 1. Пусть выполняются предположения теоремы 1. Разность функций u_- , u_+ и разность их всех частных производных до порядка m включительно на характеристике $x = a_1 t$ равна

$$\left[\frac{\partial^{k+l} u_-}{\partial x^k \partial t^l} - \frac{\partial^{k+l} u_+}{\partial x^k \partial t^l}\right]_{x=a_1 t} = \frac{(-1)^{k+l}}{a_1^k} \sum_{i=0}^q C_{k+l}^i g^{(i)}(0) [\mu^{(k+l-i)}(0) - J_{k+l-i+1}], \quad (22)$$

$$0 \leq k+l \leq q, \quad q = 1, 2, \dots, m,$$

где вспомогательная функция $g(t) = 1/\gamma(t)$.

Доказательство. Справедливость равенств (22) при $q = 1$ и $q = 2$ обоснована в [3]. Сначала докажем равенства (22) при $q = 3, 4, \dots, m-1$. Дифференцируем k раз по x и l раз по t функции u_- , u_+ и вычисляем их значения на характеристике $x = a_1 t$:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^{k+l} u_-}{\partial x^k \partial t^l}\right|_{x=a_1 t} &= \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_2^l [\psi^{(k+l-1)}((a_1 + a_2)t) + a_1 \varphi^{(k+l)}((a_1 + a_2)t)] + \right. \\ &\quad \left. + (-a_1)^l [a_2 \varphi^{(k+l)}(0) - \psi^{(k+l-1)}(0)] + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t [a_2^l f^{(k+l-1;0)}(a_1 t + a_2(t-\tau), \tau) - (-a_1)^l f^{(k+l-1;0)}(a_1 \tau, \tau)] d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{l-2} (a_2^{i+1} - (-a_1)^{i+1}) f^{(k+i;l-i-2)}(a_1 t, t) \right\}, \\ \left.\frac{\partial^{k+l} u_+}{\partial x^k \partial t^l}\right|_{x=a_1 t} &= \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ a_2^l [\psi^{(k+l-1)}((a_1 + a_2)t) + a_1 \varphi^{(k+l)}((a_1 + a_2)t)] - \right. \\ &\quad \left. - (-a_1)^{-k} a_2^{k+l} [\psi^{(k+l-1)}(0) + a_1 \varphi^{(k+l)}(0)] + \right. \\ &\quad \left. + a_2^l \int_0^t f^{(k+l-1;0)}(a_1 t + a_2(t-\tau), \tau) d\tau + \sum_{i=0}^{l-2} (a_2^{i+1} - (-a_1)^{i+1}) f^{(k+i;l-i-2)}(a_1 t, t) - \right. \\ &\quad \left. - (-a_1)^{-k} \sum_{i=0}^{k+l-2} a_2^{i+1} f^{(i;k+l-i-2)}(0, 0) + \sum_{i=0}^{l-2} (-a_1)^{i+1} f^{(k+i;l-i-2)}(0, 0) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{k-1} (-a_1)^{-i} f^{(k-i;l+i-1)}(0, 0) - (-a_1)^l \int_0^t f^{(k+l-1;0)}(a_1 \tau, \tau) d\tau \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-a_1)^{-k} \left\langle \sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^i \mathcal{G}^{(i)}(0) \left\{ \mu^{(k+l-i)}(0) - \sum_{j=0}^{k+l-i} C_{k+l-i}^j \alpha^{(k+l-i-j)}(0) \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \left[a_2^j (\psi^{(j)}(0) + a_1 \varphi^{(j+1)}(0)) + \sum_{s=0}^{j-1} a_2^{j-s-1} f^{(j-s-1;s)}(0,0) \right] \right\} \right\rangle, \quad 0 \leq k+l \leq 3, 4, \dots, m-1.
 \end{aligned}$$

Находим их разности

$$\begin{aligned}
 & \left. \left. \frac{\partial^{k+l} u_-}{\partial x^k \partial t^l} \right|_{x=a_1 t} - \frac{\partial^{k+l} u_+}{\partial x^k \partial t^l} \right|_{x=a_1 t} = \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ (-a_1)^l \left[a_2 \varphi^{(k+l)}(0) - \psi^{(k+l-1)}(0) \right] + \right. \\
 & \quad + (-a_1)^{-k} a_2^{k+l} \left[\psi^{(k+l-1)}(0) + a_1 \varphi^{(k+l)}(0) \right] + \\
 & \quad + (-a_1)^{-k} \sum_{i=0}^{k+l-2} a_2^{i+1} f^{(i;k+l-i-2)}(0,0) - \sum_{i=0}^{l-2} (-a_1)^{i+1} f^{(k+i;l-i-2)}(0,0) - \\
 & \quad - \sum_{i=0}^{k-1} (-a_1)^{-i} f^{(k-i-1;l+i-1)}(0,0) \left. \right\} - (-a_1)^{-k} \left\langle \sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^i \mathcal{G}^{(i)}(0) \left\{ \mu^{(k+l-i)}(0) - \right. \right. \\
 & \quad - \sum_{j=0}^{k+l-i} C_{k+l-i}^j \alpha^{(k+l-i-j)}(0) \left[a_2^j (\psi^{(j)}(0) + a_1 \varphi^{(j+1)}(0)) + \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{s=0}^{j-1} a_2^{j-s-1} f^{(j-s-1;s)}(0,0) \right] \right\} \right\rangle, \quad 0 \leq k+l \leq 3, 4, \dots, m-1. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Для преобразования полученного выражения (23) нам понадобятся следующие формулы. Заменой индекса суммирования $\nu = j - s - 1$ имеем равенства

$$\sum_{s=0}^{j-1} a_2^{j-s-1} f^{(j-s-1;s)}(0,0) = \sum_{\nu=0}^{j-1} a_2^{\nu} f^{(\nu;j-\nu-1)}(0,0), \quad j \geq 1. \quad (24)$$

Если из трех сумм две последние записать одной суммой, то они оказываются равными одной сумме.

$$\begin{aligned}
 & (-a_1)^{-k} \sum_{i=0}^{k+l-2} a_2^{i+1} f^{(i;k+l-i-2)}(0,0) - \sum_{i=0}^{l-2} (-a_1)^{i+1} f^{(k+i;l-i-2)}(0,0) - \\
 & - \sum_{i=0}^{k-1} (-a_1)^{-i} f^{(k-i-1;l+i-1)}(0,0) = (-a_1)^{-k} \sum_{i=0}^{k+l-2} (a_2^{i+1} - (-a_1)^{i+1}) f^{(i;k+l-i-2)}(0,0). \quad (25)
 \end{aligned}$$

В разностях (23) используем значения величин J_{q+1} для $q = 2, 3, \dots, m-1$ из (13) путем прибавления и вычитания слагаемых, которые в них отсутствуют, применяем формулы (24), (25) и приходим к следующим выражениям

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial^{k+l} u_-}{\partial x^k \partial t^l} - \frac{\partial^{k+l} u_+}{\partial x^k \partial t^l} \right]_{x=a_1 t} = \frac{(-1)^{k+l}}{a_1^k} \sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^i \mathcal{G}^{(i)}(0) \left[\mu^{(k+l-i)}(0) - J_{k+l-i+1} \right] - E_{k,l}, \\
 & \quad 0 \leq k+l \leq 3, 4, \dots, m-1,
 \end{aligned}$$

в которых постоянные

$$\begin{aligned}
E_{k,l} = & (-a_1)^{-k} \sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^i g^{(i)}(0) \left\{ \gamma^{(k+l-i)}(0) \varphi(0) + (k+l-i) \gamma^{(k+l-i-1)}(0) \psi(0) + \right. \\
& + \frac{1}{a_1 + a_2} \sum_{j=2}^{k+l-i} C_{k+l-i}^j \gamma^{(k+l-i-j)}(0) \left[a_2 (a_2^{j-1} - (-a_1)^{j-1}) (\psi^{(j-1)}(0) + a_1 \varphi^{(j)}(0)) + \right. \\
& \left. \left. + (-a_1)^{j-1} (a_1 + a_2) \psi^{(j-1)}(0) + \sum_{s=0}^{j-2} (a_2^{s+1} - (-a_1)^{s+1}) f^{(s; j-s-2)}(0, 0) \right] \right\} - \\
& - \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ (-a_1)^l \left[a_2 \varphi^{(k+l)}(0) - \psi^{(k+l-1)}(0) \right] + (-a_1)^{-k} a_2^{k+l} \left[\psi^{(k+l-1)}(0) + a_1 \varphi^{(k+l)}(0) \right] + \right. \\
& \left. + (-a_1)^{-k} \sum_{i=0}^{k+l-2} \left[a_2^{i+1} - (-a_1)^{i+1} \right] f^{(i; k+l-i-2)} \right\}.
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства равенств (22) остается показать обращение в ноль выражений (26), т. е. доказать равенства $E_{k,l} = 0$, $0 \leq k+l \leq 3, 4, \dots, m-1$. Для этого мы воспользуемся равенствами:

$$\begin{aligned}
& a_2 (a_2^{j-1} - (-a_1)^{j-1}) [\psi^{(j-1)}(0) + a_1 \varphi^{(j)}(0)] + (-a_1)^{j-1} (a_1 + a_2) \psi^{(j-1)}(0) = \\
& = (a_2^j - (-a_1)^j) \psi^{(j-1)}(0) + (a_1 a_2^j + a_2 (-a_1)^j) \varphi^{(j)}(0), \quad j = 1, 2, \dots, q, \\
& (-a_1)^l \left[a_2 \varphi^{(k+l)}(0) - \psi^{(k+l-1)}(0) \right] + (-a_1)^{-k} a_2^{k+l} \left[\psi^{(k+l-1)}(0) + a_1 \varphi^{(k+l)}(0) \right] = \\
& = (-a_1)^{-k} \left\{ \varphi^{(k+l)}(0) [a_1 a_2^{k+l} + a_2 (-a_1)^{k+l}] + \psi^{(k+l-1)}(0) [a_2^{k+l} - (-a_1)^{k+l}] \right\}. \quad (27)
\end{aligned}$$

Эти равенства выводятся приведением подобных слагаемых, содержащих значения одних и тех же производных от начальных данных φ и ψ при $x = 0$. В выражениях $E_{k,l}$ проводим перегруппировку тех слагаемых, которые имеют значения производных одинаковых порядков от начальных данных φ , ψ при $x = 0$ и правой части f при $x = 0$, $t = 0$, используем равенства (27) и получаем выражения

$$\begin{aligned}
& (-a_1)^{-k} \left\langle \varphi(0) \sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^i g^{(i)}(0) \gamma^{(k+l-i)}(0) + \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ \sum_{j=2}^{k+l-1} C_{k+l}^j \varphi^{(j)}(0) \sum_{i=0}^{k+l-j} C_{k+l-j}^i g^{(i)}(0) \times \right. \right. \\
& \times \gamma^{(k+l-j-i)}(0) (a_1 a_2^j + a_2 (-a_1)^j) + \varphi^{(k+l)}(0) \left[a_2 (-a_1)^{k+l} + a_1 a_2^{k+l} \right] (g(0) \gamma(0) - 1) \left. \right\} + \\
& + \psi(0) \sum_{i=0}^{k+l} (k+l-i) C_{k+l}^i g^{(i)}(0) \gamma^{(k+l-i-1)}(0) + \frac{1}{a_1 + a_2} \left\{ \sum_{j=2}^{k+l-1} C_{k+l}^j \psi^{(j-1)}(0) \sum_{i=0}^{k+l-j} C_{k+l-j}^i \times \right. \\
& \times g^{(i)}(0) \gamma^{(k+l-j-i)}(0) (a_2^j - (-a_1)^j) + \psi^{(k+l-1)}(0) \left[a_2^{k+l} - (-a_1)^{k+l} \right] (g(0) \gamma(0) - 1) + \\
& + \sum_{j=2}^{k+l-1} C_{k+l}^j \sum_{s=0}^{j-2} \left[a_2^{s+1} - (-a_1)^{s+1} \right] f^{(s; j-s-2)}(0, 0) \sum_{i=2}^{k+l-j} C_{k+l-j}^i g^{(i)}(0) \gamma^{(k+l-j-i)}(0) + \\
& \left. \left. + \sum_{i=0}^{k+l-2} \left[a_2^{i+1} - (-a_1)^{i+1} \right] f^{(i; j-i-2)}(0, 0) (g(0) \gamma(0) - 1) \right\} \right\rangle. \quad (28)
\end{aligned}$$

В этих выражениях согласно обозначению $g(t) = 1/\gamma(t)$ все слагаемые, содержащие множитель $g(0)\gamma(0) - 1 = 0$, очевидно равны нулю. В выражениях (28)

каждая из оставшихся сумм обращается в ноль, так как в силу формулы Лейбница производных от произведения двух функций, равного единице, верны очевидные равенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k+l-j} C_{k+l-j}^i g^{(i)}(0) \gamma^{(k+l-j-i)}(0) &= (g(t)\gamma(t))^{(k+l-j)} \Big|_{t=0} = \left(\frac{1}{\gamma(t)} \gamma(t) \right)^{(k+l-j)} \Big|_{t=0} = 0, \\ \sum_{i=0}^{k+l} C_{k+l}^i g^{(i)}(0) \gamma^{(k+l-i)}(0) &= (g(t)\gamma(t))^{(k+l)} \Big|_{t=0} = 0, \\ \sum_{i=0}^{k+l} (k+l-i) C_{k+l}^i g^{(i)}(0) \gamma^{(k+l-i-1)}(0) &= (k+l) \sum_{i=0}^{k+l-1} C_{k+l-1}^i g^{(i)}(0) \gamma^{(k+l-i-1)}(0) = \\ &= (k+l)(g(t)\gamma(t))^{(k+l-1)} \Big|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

так как в них производные порядка 1 и выше: $k+l-j \geq 1$ при $q = k+l \geq 3$.

Теперь докажем равенства (22) при $q = m$. Для более гладких функций $f \in C^{m-1}(G_\infty)$, $\varphi \in C^{m+1}(R_+)$, $\psi \in C^m(R_+)$ формула (22) при $q = m$ выводится аналогично предыдущим случаям $q < m$. Затем полученное равенство (22) при $q = m$ предельным переходом по f , φ , ψ распространяется с этих более гладких функций на функции f , φ , ψ меньшей гладкости из (4), но с дополнительной гладкостью (9)–(12). Тем самым лемма 1 доказана.

Необходимость в G_∞ . Для более гладких исходных данных $f \in C^{m-1}(G_\infty)$, $\varphi \in C^{m+1}(R_+)$, $\psi \in C^m(R_+)$ необходимость условий согласования (7), (8) (13), (14) фактически доказана в статье [14], где они выведены из постановки характеристической задачи (1)–(3) и определения ее более гладких решений $u \in C^{m+1}(G_\infty)$. Действительно, как и выше при выводе условий согласования (7) и (8) в этой статье в граничном режиме (3) и всех производных от этого режима до порядка m включительно полагали $t = 0$ и вычисляли значения слагаемых их левых частей с помощью начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (1) при $t = 0, x = 0$. Для всех производных порядков $q \leq m - 1$ условия согласования (7), (8), (13) сохраняют смысл и при необходимой гладкости исходных данных $f \in C^{m-2}(G_\infty)$, $\varphi \in C^m(R_+)$, $\psi \in C^{m-1}(R_+)$ из (4). Благодаря установленной выше необходимости $\mu \in C^m(R_+)$ условие согласования (14) при $q = m$, $m = 2, 4, 6, \dots$, получается из установленного в статье [14] равенства вида (13) при $q = m$ предельным переходом по f , φ , ψ с гладких функций $f \in C^{m-1}(G_\infty)$, $\varphi \in C^m(R_+)$, $\psi \in C^{m-1}(R_+)$ на функции f , φ , ψ необходимой гладкости из (4), но с дополнительной необходимой гладкостью (9)–(12). После этого предельного перехода в условии (14) появляется следующее произведение $\alpha(0)$ на значение производной по вектору $\vec{v}_2 = \{a_2, 1\}$ в начале координат

$$\begin{aligned} \alpha(0) \left\{ \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left(\int_0^t f(a_2(t-\tau), \tau) d\tau \right) \right\} \Big|_{t=0} &= \\ = \alpha(0) \frac{\partial}{\partial \vec{v}_2} \left(\sum_{j=0}^{(m-2)/2} a_2^{2j} f^{(2j; m-2j-2)} \right) (0, 0) \in R, \quad m = 2, 4, 6, \dots, \end{aligned} \quad (29)$$

конечность которого вытекает из интегрального требования гладкости на f в (12). Действительно, для любых более гладких функций $f \in C^m(G_\infty)$ справедливо тождество

$$\alpha(t) \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left(\int_0^t f(a_2(t-\tau), \tau) d\tau \right) = \alpha(t) \left\{ a_2^m \int_0^t f^{(m;0)}(a_2(t-\tau), \tau) d\tau + \sum_{k=0}^{m-1} a_2^k f^{(k;m-k-1)}(0, t) \right\} \in C(R_+).$$

Из этого тождества при $t=0$ для всех четных m имеем равенство (29), которое предельным переходом по f распространяется с функций $f \in C^m(G_\infty)$ на все функции $f \in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющие требованиям гладкости (9)–(12), т. е. конечность произведения (29) выполняется. В условии (14) также справедлива конечность произведений $\alpha(0)\varphi^{(m+1)}(0)$, $\alpha(0)\psi^{(m)}(0) \in R$ в силу требований (12).

Таким образом, мы доказали существование, единственность и устойчивость решения $u \in C^m(G_\infty)$, которое выражается формулой (15) на G_- и формулой (16) на G_+ . Мы также обосновали критерий корректности по Адамару смешанной задачи (1)–(3) при $m=2, 4, 6, \dots$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Если правая часть f зависит только от x или t и $f \in C^{m-2}(R_+)$ по t или x , то утверждение теоремы 1 верно без интегральных требований гладкости (9)–(11) на f .

Следствие 2. Из теоремы 1 при $\alpha \equiv 0$ получается гладкое решение и критерий корректности первой смешанной задачи в классах функций $C^m(G_\infty)$, $m=2, 4, 6, \dots$

Следствие 3. Для $f \in C^{m-1}(G_\infty)$, $\varphi \in C^{m+1}(R_+)$, $\psi \in C^m(R_+)$ справедливы достаточные условия теоремы 1 без требований гладкости (9)–(12) на f, φ, ψ при натуральных $m=2, 3, 4, \dots$

Замечания. Утверждение следствия 1 при $a_1 = a_2$ и $m=2$ имеется в [7]. Можно показать, что в (9)–(11) для $f \in C^{m-2}(G_\infty)$ требования $H_k \in C^{m-1}(\Omega_k)$ соответственно при $\Omega_1 = G_\infty$, $\Omega_2 = G_-$, $\Omega_3 = G_+$ эквивалентны требованиям $H_k \in C^{(m-1,0)}(\Omega_k)$ или $H_k \in C^{(0,m-1)}(\Omega_k)$, $k=1, 2, 3$. Здесь $C^{(m-1,0)}(\Omega_k)$ и $C^{(0,m-1)}(\Omega_k)$ – соответственно множества $m-1$ раз непрерывно дифференцируемых по x и t и непрерывных по t и x функций на подмножествах Ω_k . Аналог этого утверждения для $a_1 = a_2$ и $m=2$ также имеется в [7].

Заключение

В данной работе выведена явная формула (15), (16) единственного и устойчивого гладкого решения $m=2, 4, 6, \dots$ смешанной задачи (1)–(3) при зависящих от времени коэффициентах в граничном режиме с характеристической нестационарной первой косою производной. Для однозначной и устойчивой везде разрешимости этой характеристической смешанной задачи найдены необходимые и достаточные требования гладкости (4), (9)–(12) и $m+1$ условий согласования (7), (8), (13), (14) на правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное при всех четных $m=2, 4, 6, \dots$. Итак, изучение корректности характеристической смешанной зада-

чи (1)–(3) для этих четных m порядков гладкости решения полностью завершено. Установлены достаточные условия ее корректности при всех целых $m = 2, 3, 4, \dots$. Правильность решений (15), (16), равенств (22) и условий согласования (13), (14) проверена нами на персональном компьютере в системе компьютерной алгебры Mathematica Wolfram.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Барановская, С. Н.** Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени кривой производной в краевом условии / С. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
2. **Ломовцев, Ф. Е.** Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической кривой производной в нестационарном граничном условии / Ф. Е. Ломовцев // Весці НАН Беларусі. – 2016. – № 1. – С. 21–27.
3. **Ломовцев, Ф. Е.** Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой кривой производной в граничном условии. / Ф. Е. Ломовцев, Е. В. Устилко // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2018. – № 4(101). – С. 18–28.
4. **Шлапакова, Т. С.** Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике / Т. С. Шлапакова, Н. И. Юрчук // Вестник БГУ. Сер. 1 – 2013. – № 2. – С. 84–90.
5. **Ломовцев, Ф. Е.** Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах / Ф. Е. Ломовцев, Т. С. Точко // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 56–75.
6. **Ломовцев, Ф. Е.** Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части / Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
7. **Новиков, Е. Н.** Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02. / Е. Н. Новиков; Институт математики НАН Беларусі. – Минск, 2017. – 25 с.
8. **Ломовцев, Ф. Е.** Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных / Ф. Е. Ломовцев, В. В. Лысенко // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 3(104). – С. 5–17.
9. **Хромов, А. П.** Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала / А. П. Хромов // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 5. – С. 717–731.
10. **Mehdi Dehghan**, Analysis of a Meshless Method for the Time Fractional Diffusion-Wave Equation / Mehdi Dehghan // Numerical Algorithms Journal. – October 2016 – Vol. 73, No. 2. – Pp. 445–476.
11. **Mokrousov, I. S.** Mixed Problems for the String Vibration Equation with Nonlocal Conditions of the General Form at the Right Endpoint and with an Inhomogeneous Condition at the Left Endpoint / I. S. Mokrousov // Differential Equations. – April 2017. – Vol. 53, No. 4. – Pp. 509–515.
12. **Stefonishin, D. A.** Mixed Problems for the String Vibration Equation with Homogeneous Boundary Conditions and Nonhomogeneous Nonlocal Conditions Posed on a Finite Set of Points / D. A. Stefonishin // Differential Equations. – 2014. – Vol. 50, No. 11. – Pp. 1457–1465.
13. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва : Наука, 2004. – 798 с.
14. **Устилко, Е. В.** Условия согласования значений характеристической кривой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения / Е. В. Устилко, Ф. Е. Ломовцев // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2020. – № 1. – С. 30–37.

Поступила в редакцию 10.04.2020 г.

Контакты: lomovcev@bsu.by (Ломовцев Фёдор Егорович)
ustilko@tut.by (Устилко Екатерина Валерьевна)

Lomovtsev F., Ustilko E. MIXED PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH A CHARACTERISTIC FIRST OBLIQUE DERIVATIVE IN A NON-STATIONARY BOUNDARY MODE FOR SMOOTH SOLUTIONS.

For the first time the Hadamard correctness of the new mixed problem for general one-dimensional wave equation with a characteristic first oblique derivative in a non-stationary boundary mode for solutions of integer higher orders of smoothness has been fully studied. Its unique and stable $m \geq 2$. times continuously differentiable solution is found in the explicit form. The correctness criterion of this problem (necessary and sufficient smoothness requirements and matching conditions on the right-hand side of the equation, the initial and boundary data) is deduced for all even $m \geq 2$. Also the sufficient conditions of its correctness for all integers $m \geq 2$ have been defined. The paper generalizes the previously obtained results for the classical solutions ($m = 2$).

Keywords: mixed problem, non-stationary boundary condition, characteristic oblique derivative, classical solution, correctness criterion, smoothness requirement, matching condition.

УДК 538.9

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ РЕШЕТКИ ТРИГОНАЛЬНЫХ КРИСТАЛЛОВ В H - И R -КООРДИНАТНЫХ БАЗИСАХ

И. А. Лявшук

старший преподаватель

Гродненский государственный университет имени Я. Купалы

Целью исследования являлся анализ связи между матричными представлениями точечных групп в кристаллофизическом (КФ) и кристаллографическом (КГ) базисах. Объектом исследования являлись матричные представления операций точечной симметрии кф и кг-базисов и связи между ними. Предметом исследования – прямая и обратная тригональные решетки в H и R базисах. В основной части работы решены следующие задачи: найдено правило построения M и M^{-1} для различных взаимоустановок осей кг и кф-систем; проанализированы метрические тензоры для H и R решеток тригональных кристаллов; рассчитана матрица-генератор точечной группы для R -решетки тригонального кристалла; установлена связь между кг и кф матрицами точечных преобразований для решеток всех сингоний. Предложен универсальный метод взаимоперехода между кг и кф-системами на основе прямых и обратных метрических тензоров.

Ключевые слова: тригональная решетка ($Tr P$), точечная симметрия, кристаллофизический и кристаллографический базисы, H и R -решетки, точечные группы в кг-базисе, метрический тензор.

Введение

Тригональные решетки ($Tr P$), наряду с тетра- и гексагональными формируют группу средних сингоний. В кристаллах, относящихся к этой группе, ячейка кристалла описывается двумя параметрами и каждая из этих сингоний имеет свой определенный элемент симметрии. Этим элементом является ось вращения n -го порядка. Для $Tr P$ – это ось 3, для тетра – и гексагональных решеток – 4 и 6 соответственно. Ячейки $Tr P$ отличаются от ячеек решеток других сингоний тем, что их можно выбирать двумя способами. Один из них полностью соответствует условиям гексагональных решеток, то есть $a = b, c$ – произвольный, $\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$. Это так называемая H -установка репера Браве.

Другой хорошо известный способ выбора ячейки связан с выделением ромбоэдра, то есть параметры ячейки имеют вид $a = b = c, \alpha = \beta = \gamma$ (R -установки). В ячейках и H и R -установок требуется определить два параметра, а главное, и в первом, и во втором случае определяющим элементом симметрии является ось 3 или $\bar{3}$. Точечные группы $Tr P$ имеют вид: $\bar{3}, 3m, 32, \bar{3}m$. Группа 3 является подгруппой всех этих групп. Ось 3 – единственная ось третьего порядка и она совпадает с особым направлением кристалла. Кристаллографические координаты в этих установках измеряются в единицах базиса $(\bar{a}_j)_r$ ($j = 1, 2, 3; r = H, R$). Важным моментом в определении межатомных расстояний и для описания точечных движений в матричном представлении является необходимость перехода от кристаллографического (kg) к декартовому, кристаллофизическому (kf) базису. Этот переход, как и переходы между базисами, основан на использовании метрических тензоров решетки.

Метрические тензоры H и R -ячеек тригональных кристаллов

В кристаллографии используются две системы координат. Первая – кристаллографическая, у которой координатные оси по направлению совпадают с $\bar{3}$ расстояний вдоль соответствующих координатных осей кристаллографической системы $(xyz)_{кз}$. Вторая координатная система – кристаллофизическая, определяется декартовой системой координат. Переход от кристаллографической ($K\Gamma$) к кристаллофизической ($K\Phi$) определяется условием:

$$|xyz|_{кф} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_{кз}, \quad (1)$$

или

$$|X_j|_{кф} = |M| |X|_{кз}, \quad (2)$$

где $|M|$ – метрический тензор решетки, который зависит от взаимной ориентации кристаллографического и кристаллофизического базисов.

$|X_j|$ – матрица-столбец координат в соответствующей системе.

Рассмотрим метрические тензоры H и R -ячеек тригональных кристаллов.

Для H -установки координатных осей $x_{кз}$ имеет направление $x_{кф}$, $y_{кз}$ расположено в плоскости $(xy)_{кф}$. Ось $z_{кз}$ направлена по $z_{кф}$ (рис. 1а). Для R -установки координатных осей ось 3 или $\bar{3}$ совпадает с осью $z_{кф}$, при этом $x_{кз}$ лежит в плоскости $(xz)_{кф}$ (рис. 1 б).

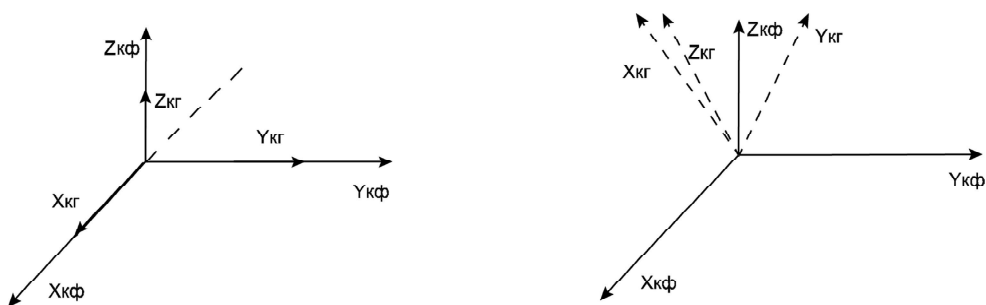


Рисунок 1 – Установки координатных осей ($K\Gamma$)-систем относительно декартовой системы координат: а) H -установка, б) R -установка

Матрица $|M|^{-1}$ – обратная матрица метрического тензора. Переход от $K\Phi$ к $K\Gamma$ -системе имеет вид:

$$|X|_{кз} = |M|^{-1} |X|_{кф}. \quad (3)$$

Метрические тензоры для этих установок координатных осей тригональных кристаллов [1]:

$|M|$ и $|M|^{-1}$ имеют вид:

$$|M|_H = \begin{vmatrix} a & -\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}, \quad |M|_H^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{\sqrt{3}}{3a} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{h}} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Очевидно, что $|M|^{-1}|M| = |M||M|^{-1} = |I|$, где $|I|$ – единичная матрица.

Для определения тензоров R -ячейки $|M|$ и $|M|^{-1}$ рассмотрим проекцию координатной системы, особое направление, когда ось 3 совпадает с осью $z_{кф}$ (рисунок 2).

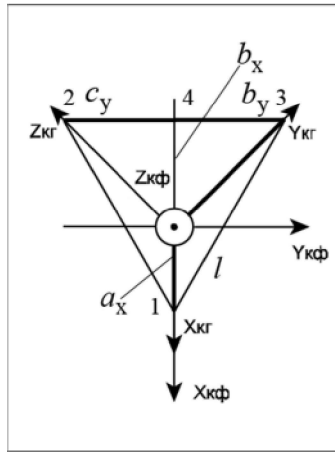


Рисунок 2 – К выводу метрического тензора для R -ячейки, когда $z_{кф}$ и ось 3 совпадают

Из рисунка 2 и в соответствии с теоремой косинусов следует:

$$l^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos \gamma = a^2 (2 - 2 \cos \gamma) = 2a^2 (1 - \cos \gamma), \quad (5)$$

так как $\alpha = \beta = \gamma$, следовательно $l^2 = 2a^2 (1 - \cos \alpha)$

$$\text{или } l^2 = 2a^2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$l = 2a \left(\sin \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$h = \frac{1}{4}; h = l \frac{\sqrt{3}}{2}; h = \sqrt{3}a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Отрезок от 1 до оси z равен $\frac{2}{3}h$.

Таким образом, $a_x = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \sin \alpha/2$. Проекция b на x от оси z до точки 4 – это $\frac{1}{3}h$. То есть $b_x = c_x = -\frac{\sqrt{3}}{3}a \sin \alpha/2$; a лежит в плоскости xz .

$$a_y = 0, b_y = \frac{l}{2}, c_y = -\frac{l}{2};$$

$b_y = a \sin \alpha/2, c_y = -a \sin \alpha/2$. Так как az, bz, cz – одинаковые, достаточно определить $a_z^2 = a^2 - a_x^2, a_z = a \left[1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha/2\right]^{1/2}$, следовательно

$$\begin{cases} a_x = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \sin \alpha/2, b_x = c_x = -\frac{\sqrt{3}}{3}a \sin \alpha/2 \\ a_y = 0, b_y = a \sin \alpha/2, c_y = -a \sin \alpha/2 \\ a_z = b_z = c_z = a \left[1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha/2\right]^{1/2} \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что $a=b=c$.

Метрический тензор $|M|_R$ имеет вид:

$$M_{R3} = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3}a \sin \alpha/2 & -\frac{\sqrt{3}}{3}a \sin \alpha/2 & -\frac{\sqrt{3}}{3}a \sin \alpha/2 \\ 0 & a \sin \alpha/2 & -a \sin \alpha/2 \\ a \left[1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha/2\right]^{1/2} & a \left[1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha/2\right]^{1/2} & a \left[1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha/2\right]^{1/2} \end{vmatrix} \quad (7)$$

Существенно важным является то, что объемы ячеек не зависят от ориентации координатных осей, следовательно детерминанты $|M|_H$ (4) и $|M|_R$ (7) должны быть одинаковыми.

$$DetM_H = a^3 (1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha)^{1/2}, \quad (8)$$

$$DetM_R = 2\sqrt{3}a^3 \sin^2 \alpha/2 \left[1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha/2\right]^{1/2} = \quad (9)$$

$$= a^3 \left[12 \sin^4 \alpha/2 - 16 \sin^6 \alpha/2\right]^{1/2},$$

С учетом того, что $2 \sin^2 \alpha/2 = 1 - \cos \alpha$, условие (11) примет вид:

$$\begin{aligned}
 DetM_R &= a^3 \left(12 \sin^4 \frac{\alpha}{2} - 16 \sin^6 \frac{\alpha}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= a^3 \left[3(1 - \cos \alpha)^2 - 2(1 - \cos \alpha)^3 \right]^{\frac{1}{2}} = \\
 &= a^3 \left(3 - 6 \cos \alpha + 3 \cos^2 \alpha - 2 + 6 \cos \alpha - 6 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= a^3 \left(1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned} \tag{10}$$

То есть $DetM_R = DetM_H$.

Обратный метрический тензор для установки 311 $z_{кф}(M_{R3})$ имеет вид:

$$(M_R^{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3a \sin \frac{\alpha}{2}} & 0 & \frac{1}{3a \left[1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right]^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\sqrt{3}}{6a \sin \frac{\alpha}{2}} & \frac{1}{2a \sin \frac{\alpha}{2}} & \frac{1}{3a \left[1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right]^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\sqrt{3}}{6a \sin \frac{\alpha}{2}} & -\frac{1}{2a \sin \frac{\alpha}{2}} & \frac{1}{3a \left[1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right]^{\frac{1}{2}}} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Матричное представление операций точечной симметрии

Матричное представление точечных групп определено матрицами косинусов углов между координатными осями декартовой системы в начальном положении и положении этих осей после выполнения точечной операции симметрии (матрица Эйлера) [2].

Симметрия в кристаллах [3] приводит к тому, что любая точка кристалла будет иметь связанную симметрией кристаллофизически тождественную или гомологичную ей точку. Кристаллографическая орбита образована совокупностью этих точек [4]. Если в кристалле имеется точка с координатами $(xyz)_{кф}$, то для построения кристаллографической орбиты (правильной системы точек) в $кф$ -базисе необходимо выполнить условие:

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_{орб} = |g| \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}_{кф}, \tag{12}$$

где $|g|$ – точечная группа в матричном представлении в $кф$ -базисе.

Если начальная точка задана в kz -базисе, то для получения кристаллографической орбиты в kz -базисе необходимо использовать выражение:

$$|X|_{kz}^{orb} = |M|^{-1} |g| |M| |X|_{kz}, \quad (13)$$

где $|X|_{kz}^{orb}$, $|X|_{kz}$ – матрицы столбцы координат kz -орбиты и координат начальной точки.

Следовательно

$$|M|^{-1} |g| |M| = |K|, \quad (14)$$

где $|K|$ – матричное представление точечной группы в kz -базисе. Матрица, определяющая принадлежность к сингониям – матрица-генератор группы 3 имеет вид (для группы 3 – (+), для группы $\bar{3}$ – (-)[5]:

$$\pm \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Следовательно поворот на 120° в H -базисе описывается матрицей:

$$(3)_{120^\circ}^{(H)} |M_H^{-1}| |g|_{120^\circ} \cdot M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & a\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & a\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & -\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \quad (16)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Для описания поворота в R -базисе на 120° введем обозначения:

$$\sin \alpha/2 = S, \left[1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha/2 \right]^{1/2} = B.$$

Таким образом поворот в R -базисе на 120° представлен:

$$(3)_{120^\circ}^{(R)} = |M_R^{-1}| |g|_{120} \cdot M = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3aS} & 0 & \frac{1}{3aB} \\ \frac{\sqrt{3}}{6aS} & \frac{1}{2aS} & \frac{1}{3aB} \\ \frac{\sqrt{3}}{6aS} & -\frac{1}{2aS} & \frac{1}{3aB} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (17)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3}aS & -\frac{\sqrt{3}}{3}aS & -\frac{\sqrt{3}}{3}aS \\ 0 & aS & -aS \\ aB & aB & aB \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

то есть группа 3 в H -базисе имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (18)$$

соответственно в R -базисе группа 3 примет вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Матрица-генератор $\bar{3}$ имеет вид: $|\bar{3}| = -|3|$.

Для получения матриц-генераторов необходимо элементы группы 3 или $\bar{3}$ умножить на элементы групп $|2_x|$, $|m_z|$. Матрицы-генераторы этих групп описываются диагональными матрицами, элементы которых имеют модуль $|g_{ij}| = 1$ или элементы $|g_{ij}|_{i \neq j} = 0$.

В матрице $|m_z|$ — $g_{11} = g_{22} = +1, g_{33} = -1$.

В матрице $|m_x|$ — $g_{11} = g_{22} = +1, g_{33} = -1$. То есть порядки групп равны: $3(3)$,

$\bar{3}(6)$, $32(6)$, $3m(6)$, $\bar{3}m(12)$.

В связи с тем, что обратная решетка существует для каждой из решеток Браве, она используется и в анализе тригональной решетки.

Стоит принять во внимание, что в тригональных и гексагональных кристаллах ячейки Браве относятся только к F -типу, следовательно “разрешены” все рефлексы независимо от значений их индексов hkl . Поэтому расположение узлов в обратной решетке соответствует точечной группе H и R -типа. Так как в обратной решетке узлы имеют целочисленные координаты, следовательно для описания симметрии обратной решетки кристалла необходимо брать матрицы точечных групп в кристаллографическом базисе [6; 7].

Таким образом, можно заключить, что при переходе от кристаллофизического базиса к кристаллографическому необходимо использовать условие (3).

Рассмотрим теорему:

Теорема 1. Элементами матричных представлений точечных групп в кристаллографическом базисе могут быть только целые числа.

Доказательство:

Пусть имеется матрица точечного преобразования в кристаллографическом базисе: $|C_{i,j}|_{i,j=1,2,3}$. Подействуем ею на узлы 100, 010, 001. Эти узлы могут переходить только в узлы решетки, координаты которых целые числа. Следовательно C_{ij} – целые числа. Если в качестве исходного узла взять узел 111, то отсюда следует, что $|C_{ij}|_{i \neq j}$ также только целые числа и т. д.

Теорема 2. Элементами матриц точечного преобразования в кг-базисе могут быть только “ ± 1 ” или “0”.

Доказательство:

Так как $\text{Det}(C_{ij}) = \pm 1$, а также радиус-вектор точки инвариантен по отношению к точечному преобразованию, то C_{ij} не могут иметь значения $|C_{ij}| \geq 2$.

Теорема 3. Если матрица точечного преобразования имеет вид $|S_{ij}|$, где S_{ij} по модулю равно 1, то такой же вид эта матрица имеет в кристаллографическом базисе.

Доказательство:

Не нарушая общности подхода, будем считать, то ось 2 и плоскость m перпендикулярны осям. Матрица $|S_{ij}|$ не встречается в триклинной сингонии. Общий вид метрических тензоров решетки $|M|$ и обратной решетки $|M^{-1}|$ имеет вид (то есть, для остальных сингоний общий вид):

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b \cos \gamma & 0 \\ 0 & b \sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}, |M^{-1}| = \begin{vmatrix} 1/a & -ctg\gamma/a & 0 \\ 0 & 1/(b \sin \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{vmatrix}, \quad (20)$$

то есть

$$\begin{aligned}
 |M^{-1}||S_{ij}||M| &= \begin{vmatrix} 1 & -\frac{ctg\gamma}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{bsin\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b\cos\gamma & 0 \\ 0 & b\sin\gamma & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -\frac{ctg\gamma}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{bsin\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_1a & S_1b\cos\gamma & 0 \\ 0 & S_2b\sin\gamma & 0 \\ 0 & 0 & S_3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{a}\cos\gamma(S_2 - S_1) & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{vmatrix}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

При заданной взаимоустановке кристаллографической и кристаллофизической систем:

$$\bar{1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{vmatrix}; 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; m \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{vmatrix}, \quad (22)$$

то есть $S_1=S_2$, следовательно $|M^{-1}||S_{ij}||M| = |S_{ij}|$.

Заклучение

При описании структуры кристалла применяются две системы координат: кристаллографическая (*кг*) и кристаллофизическая (*кф*). Кристаллографическая система строится на репере Браве, когда координатные оси совпадают по направлению с ребрами ячейки, а в качестве единичных элементов длины берутся параметры ячейки. Кристаллофизическая система – это стандартная ортогональная система с расстояниями в единицах СИ.

Рассмотрен метод перехода между *кф* и *кг*-системами. Доказано, что точечные группы для всех сингоний, кроме тригональной и гексагональной имеют одинаковый вид в *кф* и *кг*-системах.

Проанализированы гексагональные и тригональные решетки, получены матрицы генераторы точечных групп этих сингоний при *H*-типе решетки, для *R*-типа тригональной решетки направление оси *z* было выбрано по оси 3.

Рассчитаны прямой и обратный метрические тензоры тригональной решетки при этой установке координатных осей. Что позволило показать, что в этом случае операция поворота вокруг оси 3 совпадает с аналогичной для кубической решетки, когда ось 3 проходит по направлению [111].

Следует отметить, что переходы между *кг* и *кф*-системами применимы для решеток любых типов и эти переходы алгоритмизированы, что позволяет осуществлять

переход от $(xyz)_{k\alpha}$, полученных, например, методом Фурье, к $k\phi$ -системе. Таким образом, можно заключить, что только в этом случае можно определить межатомные расстояния, валентные углы и др.

Примененный в работе метод взаимоперехода между $k\alpha$ - и $k\phi$ -системами на основе прямых и обратных метрических тензоров может быть использован специалистами в области структурного анализа кристаллов, кристаллографии и кристаллофизики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Лиопо, В. А.** Точечные группы симметрии тригональных кристаллов в векторном пространстве / В. А. Лиопо // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Фізіка. Матэматыка... – 2001. – № 2(6). – С. 52–64.
2. **Ворошилов, Ю. В.** Основы кристаллографии и кристаллохимии. Рентгенография кристаллов : учебник / Ю. В. Ворошилов, В. И. Павлишин. – К. : КНТ, 2011. – 568 с.
3. **Glazer, A. M.** Crystallography: A Very Short Introduction / A. M. Glazer. – Oxford : Oxford University Press, 2016. – 140 p.
4. **Лиопо, В. А.** Матричная кристаллография : учеб. пособ. / В. А. Лиопо. // – Гродно : ГрГУ, 1998. – 78 с.
5. **Вайнштейн, В. Б.** Современная кристаллография / В. Б. Вайнштейн. – М. : Наука, 1979. – Т. 1. – 384 с.
6. **Лиопо, В. А.** Обратная решетка и обратное пространство кристалла / В. А. Лиопо [и др.] // Прогрессивные технологии и системы машиностроения : междунар. сб. науч. тр. Вып. 2(61). – Донецк : ДонНТУ, 2018. – С.46–56.
7. **Ladd, M.** Structure Determination by X-ray Crystallography / M. Ladd, R. Palmer. – Berlin : Springer, 2013. – 756 p.

Поступила в редакцию 06.02.2020 г.

Контакты: ilavshuk@grsu.by (Лявшук Ирина Александровна)

Liavshuk I. DIRECT AND REVERSE LATTICES OF TRIGONAL CRYSTALS IN H- AND R-COORDINATE BASES.

The aim of the study is to analyze the relationship between matrix representations of point groups in the crystallophysical (CF) and crystallographic (CG) bases. The object of the study is matrix representations of point symmetry operations of Cf and Cg bases and the relationship between them. The subject of the study is the direct and reverse trigonal lattices in H and R bases. In the main part of the work the following problems are solved: the rule of constructing M and M-1 for different mutual installations of Cg and Cf axe systems is found; metric tensors for H and R lattices of trigonal crystals are analyzed; a matrix-generator of point groups for R lattice in the trigonal crystal is designed; the relationship between the Cg and Cf matrices of point transformations for lattices of all singonias is established. A universal method of mutual transition between Cg and Cf systems based on direct and inverse metric tensors is proposed.

Keywords: trigonal lattice (Tr L), point symmetry, crystallophysical and crystallographic bases, H and R lattices, point groups in Cg basis, metric tensor.

УДК 532.516:669.015.23

ПЕРЕНОС МАССЫ ИЗ ВНУТРЕННЕГО ОБЪЕМА ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ ПРОИЗВОЛЬНО НАПРАВЛЕННЫХ ПРЯМЫХ КАПИЛЛЯРОВ ПРИ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ ЖИДКОСТИ В ПАР

В. Л. МАЛЫШЕВ

кандидат физико-математических наук, профессор
Могилевский государственный университет продовольствия

Т. И. ПУСОВСКАЯ

ассистент
Могилевский государственный университет продовольствия

Теоретически рассмотрен переход перегретой жидкости в газообразное состояние во внутреннем сферическом объеме. В сравнении с другими моделями проведен расчет времени осушения полости в зависимости от ее радиуса и температуры процесса.

Ключевые слова: метастабильные жидкости, моделирование пористых сред, интенсивный массоперенос, многофазные системы.

Пусть испарение из сферической полости радиуса R_0 идет через несколько капилляров различных радиусов r_i и произвольной длины l_i . Минимальный устойчивый объем оставшейся жидкости V_0 соответствует массе жидкости $m_0 = \rho V_0$ (ρ – плотность жидкости) (рис. 1 а).

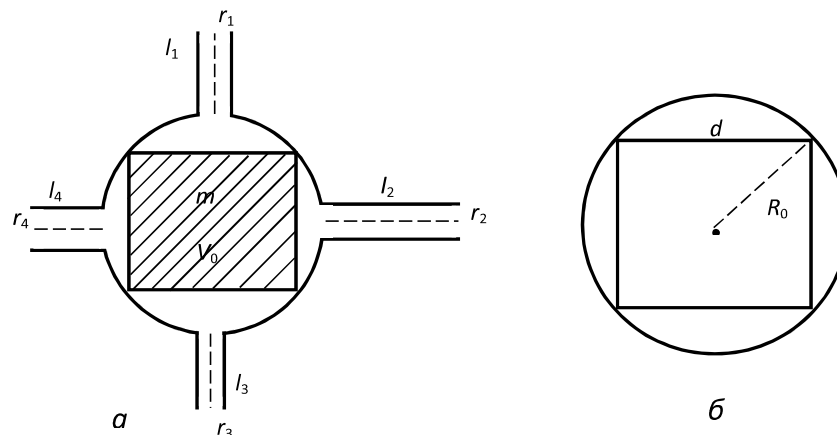


Рис. 1. Постановка задачи испарения жидкости из внутренней полости через систему прямых каналов

r_i – радиус канала; l_i – длина канала; R_0 – радиус полости;
 V_0 – объем жидкости перед фазовым превращением; m_0 – масса жидкости;
 d – диаметр плоского мениска

За эффективный минимальный объем принимается объем куба жидкости $V_0 = d^3$, где $d = \sqrt{2}R_0$, R_0 – радиус сферической полости (рис. 1 б).

Отношение минимального устойчивого объема жидкости

$$V_0 = d^3 = (\sqrt{2}R_0)^3 = 2\sqrt{2}R_0^3$$

к объему полости $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3$ составляет

$$k = \frac{V_0}{V} = \frac{3}{\sqrt{2}\pi}.$$

Полученное отношение можно рассматривать как эффективное значение параметра k , учитывающее возможные отклонения формы полости от сферической и жидкого объема от кубического.

Теоретическая часть

В момент потери устойчивости жидкого объема давление в объеме возрастет на величину парциального давления пара, образовавшегося вследствие фазового перехода [1; 2]:

$$P_{10} = \frac{m_0 RT}{\mu V}, \quad (1)$$

$$P_{10} = \frac{(\rho V_0) RT}{\mu V_0} k, \quad (2)$$

$$P_{10} = \frac{\rho RT}{\mu} k. \quad (3)$$

Здесь R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура, μ – молярная масса испаряемой жидкости.

Для этого момента полагаем давление в объеме над поверхностями жидкости равным давлению насыщенного пара P_s .

В качестве начального рассматривается момент времени, в который жидкость превратилась в пар, а общее давление в полости установилось равным:

$$P_{20} = P_s + P_{10} \quad (4)$$

$$P_{20} = P_s + \frac{\rho RT}{\mu} k. \quad (5)$$

Найдем количество вещества $v_0 = \frac{m}{\mu}$, соответствующее начальному условию:

$$P_{20} = v_0 \frac{RT}{V}, \quad (6)$$

$$P_s + \frac{\rho RT}{\mu} k = v_0 \frac{RT}{V} \Rightarrow \quad (7)$$

$$v_0 = \frac{V \left(P_s + \frac{\rho RT}{\mu} k \right)}{RT} = \frac{P_s V}{RT} + \frac{\rho V}{\mu} k. \quad (8)$$

В дальнейшем исходная величина давления

$$P_2 = \frac{m RT}{\mu V} \quad (9)$$

убывает так же, как и количество вещества v_x , по мере истечения пара через капилляры во внешнюю среду

$$P_x = v_x \frac{RT}{V}. \quad (10)$$

Процесс массопереноса завершается при значении $v_x = 0$.

Молярный расход пара через каждый капилляр составляет

$$Q_i = M_i \pi r_i^2, \quad (11)$$

где молярная плотность потока пара в вязком режиме течения ($P_x > P_0$) [3; 4].

$$M_i = \frac{r_i^2 (P_x^2 - P_0^2)}{16\eta RT l_i}, \quad (12)$$

где P_0 – атмосферное давление; η – коэффициент динамической вязкости парогазовой смеси; i – номер канала.

Полный расход пара в полости, имеющей выход в среду через несколько капилляров

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (13)$$

или

$$Q = \frac{\pi(P_x^2 - P_0^2)}{16\eta RT} \sum_{i=0}^n \frac{r_i^4}{l_i}, \quad (14)$$

где n – количество каналов.

Время осушения полости

Скорость массопереноса определяется молярным расходом пара

$$\frac{dm}{\mu dt} = Q, \quad (15)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = Q, \quad (16)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi(P_x^2 - P_0^2)}{16\eta RT} \sum_{i=0}^n \frac{r_i^4}{l_i}. \quad (17)$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dv_x}{(P_x^2 - P_0^2)} = \frac{\pi}{16\eta RT} \sum_{i=0}^n \frac{r_i^4}{l_i} dt. \quad (18)$$

Подставим значение $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3$ в (10):

$$P_x = v_x \left(\frac{RT \cdot 3}{\pi R_0^3 \cdot 4} \right), \quad (19)$$

$$P_x^2 = \left(\frac{3RT}{4\pi R_0^3} \right) v_x^2. \quad (20)$$

$$\text{Тогда } (P_x^2 - P_0^2) = b v_x^2 - P_0^2, \quad (21)$$

$$\text{где вводится } b \equiv \left(\frac{3RT}{4\pi R_0^3} \right). \quad (22)$$

Интегрируем полученное уравнение (18):

$$\int_{v_0}^0 \frac{dv}{(b^2 v^2 - P_0^2)} = \frac{\pi}{16\eta RT} \sum_{i=1}^n \frac{r_i^4}{l_i} \int_0^{t_0} dt. \quad (23)$$

Найдем интеграл в левой части уравнения (23)

$$\int_{v_0}^0 \frac{dv}{(b^2 v^2 - P_0^2)} = \int_0^{v_0} \frac{dv}{(P_0^2 - b^2 v^2)} = \frac{1}{2P_0 b} \ln \left| \frac{P_0 + b v}{P_0 - b v} \right| = \frac{1}{2P_0 b} \ln \left| \frac{P_0 + b v_0}{P_0 - b v_0} \right|. \quad (24)$$

Возвращаясь от “ b ” к исходным обозначениям из (22), запишем решение уравнения (23) в виде:

$$\frac{2\pi R_0^3}{3RTP_0} \ln \left| \frac{4\pi R_0^3 P_0 + 3RT v_0}{4\pi R_0^3 P_0 - 3RT v_0} \right| = \frac{\pi}{16\eta RT} \sum_{i=1}^n \frac{r_i^4}{l_i} t_0, \quad (25)$$

где t_0 – время удаления пара из полости.

Таким образом, установлено время массопереноса из сферической полости через систему цилиндрических каналов с момента скачкообразного превращения остаточного количества жидкости в пар до полного осушения объема. После преобразований уравнение (25) приводится к виду:

$$t_0 = \frac{32\eta R_0^3}{3P_0} \sum_{i=1}^n \frac{r_i^4}{l_i} \ln \left| \frac{4\pi R_0^3 P_0 + 3RT v_0}{4\pi R_0^3 P_0 - 3RT v_0} \right|. \quad (26)$$

Подстановка явного вида количества вещества жидкости v_0 в момент ее превращения в пар из (8) позволяет привести (26) к виду:

$$t_0 = \frac{32\eta R_0^3}{3P_0} \sum_{i=1}^n \frac{r_i^4}{l_i} \ln \left| \frac{(P_0 + P_s)\mu k + \rho RT}{(P_0 - P_s)\mu k - \rho RT} \right|. \quad (27)$$

Численные оценки

В качестве примера рассмотрен процесс испарения воды в воздушную среду. Вязкость паровоздушной газовой смеси определялась путем усреднения по парциальным давлениям компонентов [5]. Теплофизические параметры системы вода-водяной пар получены из [6; 7].

Исходные геометрические характеристики выбранной модели в размерных величинах представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Линейные характеристики модели, м.

R_0	r_{01}, r_{03}	r_{02}, r_{04}	L_1, L_3	L_2, L_4
$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$

Проведем оценку времени осушения сферического объема согласно приведенной модели.

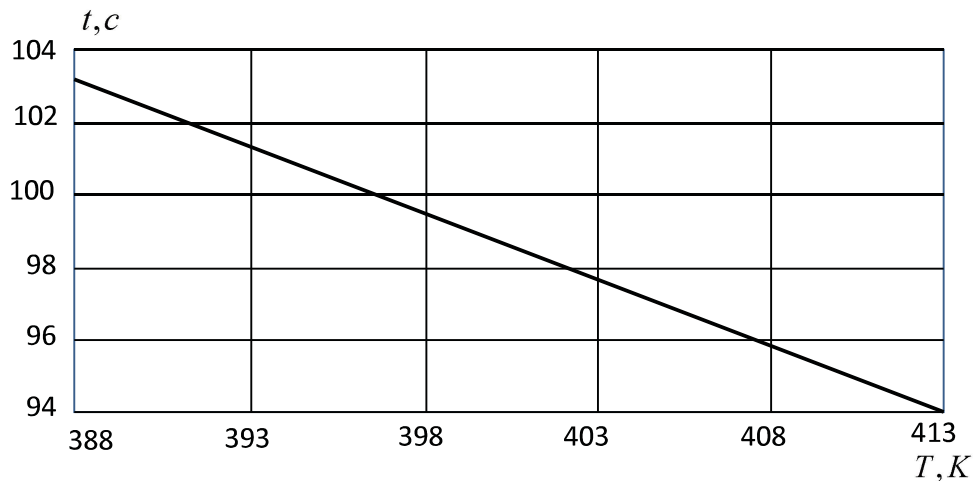
Рассматривается испарение воды из полости радиуса R_0 через систему из четырех разноуровневых взаимоперпендикулярных капилляров с момента ее скачкообразного перехода в газовую фазу.

Вскипевшая жидкость $378 \leq T \leq 413K$ испаряется в атмосферу.

Связь времени осушения системы с температурой процесса и размером полости представлена таблицей 2.

Таблица 2 – Зависимость времени испарения (с) от температуры для различных полостей

$R_0, \text{м}$	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001
413	94,107512	48,183046	20,32722	6,022881	0,75286
408	95,743471	49,020657	20,68059	6,127582	0,765948
403	97,102803	49,716635	20,97421	6,214579	0,776822
398	99,225444	50,803427	21,4327	6,350428	0,793804
393	100,81088	51,615173	21,77515	6,451897	0,806487
388	103,39047	52,935918	22,33234	6,61699	0,8271241

Рис. 2. Зависимость времени испарения от температуры из полости радиусом $R_0 = 0,005$ м

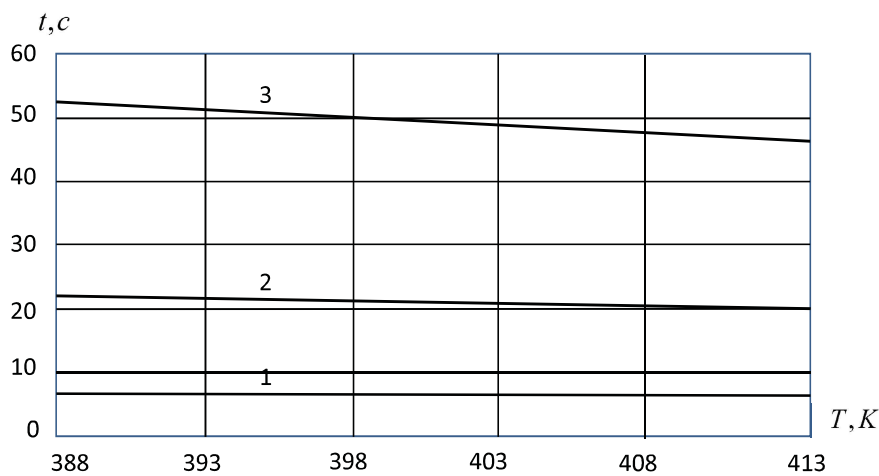


Рис. 3. Зависимость времени испарения от температуры для различных полостей

1 – $R_0 = 0,002$ м, 2 – $0,003$ м, 3 – $0,004$ м

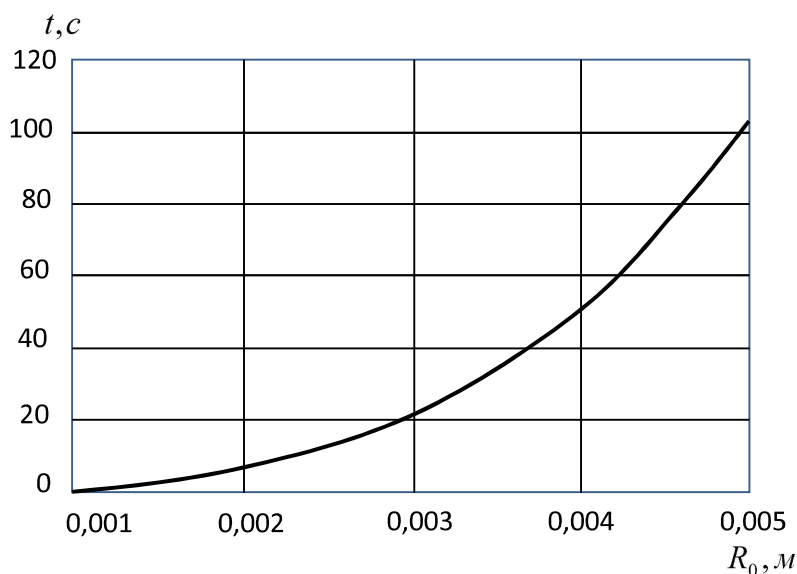


Рис.4. Зависимость времени испарения от радиуса полости R_0 при $T = 388 K$

Выводы

Исследованные различные варианты математического моделирования интенсивного массопереноса во внутренних объемах пористых материалов дали сопоставимые длительности осушения полостей (сутки и даже десятки суток) [8–10].

Установлено, что увеличение количества связей полости со средой через капилляры уменьшает устойчивость жидкой фазы. Расчет времени освобождения полости от паров жидкости после ее вскипания привел к величинам порядка секунд. Таким образом, одним из возможных путей осушения полостей без дополнительных энергозатрат является нарушение устойчивости метастабильного состояния жидкости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Матвеев, А. Н.** Молекулярная физика / А. Н. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1981. – 396 с.
2. **Малышев, В. Л.** Особенности массопереноса из полостей через систему капилляров при фазовых превращениях жидкости в пар / В. Л. Малышев // Моделирование нелинейных процессов и систем : сб. тезисов II Междунар. науч. конф. Москва, 6–10 июня 2011 г. / МГТУ “Станкин”. – Москва : Янус-К, 2011. – С. 41.
3. **Ландау, Л.** Механика сплошных сред / Л. Ландау, Е. Лифшиц – Москва : Гостехиздат, 1954. – 765 с.
4. **Malyshev, V. L.** The Effect of the Structure of Heterogeneous Media on the Evaporation of Liquids under Intensive Thermal Stimulation / V. L. Malyshev // High Temperature. – 2009. – Vol. 47, № 4. – Pp. 554–558.
5. **Гайдуков, М. Н.** К теории испарения жидкостей из капилляров при температуре, превышающей температуру кипения / М. Н. Гайдуков, Н. В. Чураев, Ю. И. Яламов // ЖТФ. – 1976. – Т. 46, № 10. – С. 2142–2147.
6. **Букалович, М. П.** Таблицы теплофизических свойств воды и водяного пара / М. П. Букалович, С. Л. Ривкин, А. А. Александров. – М. : Изд. стандартов, 1969. – 408 с.
7. **Варгафтик, Н. Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н. Б. Варгафтик. – М. : Наука, 1972. – 720 с.
8. **Малышев, В. Л.** Вязкий режим испарения жидкостей из капилляров конфузорного типа / В. Л. Малышев // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2008. – № 3. – С. 127–134.
9. **Малышев, В. Л.** Испарение метастабильной жидкости из полости через бинарную систему капилляров / В. Л. Малышев // Весці НАНБ. Серыя фізіка-тэхнічных навук. – 2014. – № 3. – С. 37–42.
10. **Малышев, В. Л.** Испарение жидкости из сферического объема через одноуровневые противоположащие капилляры в поле силы тяжести / В. Л. Малышев // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2018. – № 2(52). – С. 70–78.

Поступила в редакцию 24.10.2019 г.

Контакты: vmalyshev@tut.by (Малышев Владимир Львович)

pus-tany@yandex.ru (Пусовская Татьяна Ивановна)

Malyshev V., Pusovskaya T. MASS TRANSFER FROM INTERIOR VOLUME THROUGH THE SYSTEM OF ARBITRARILY DIRECTED STRAIGHT CAPILLARIES DURING FLUID-VAPOUR PHASE TRANSITION.

Fluid-vapour transition in internal spherical volume through arbitrarily directed straight canals is investigated theoretically. Mass transfer time is calculated.

Keywords: metastate fluids, porous media modelling, intensive mass transfer, multiphase systems.

УДК 535.32:535.51:538.975

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЭЛЛИПСОМЕТРИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПЛЕНОК

И. В. ИВАШКЕВИЧ

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Е. В. ТРЕТЬЯК

магистрант

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Представлена оптическая модель, позволяющая описать неоднородность по толщине пленок оксидов металлов на полупроводниковых подложках при их исследовании методом спектральной эллипсометрии. В спектральном диапазоне 400–1000 нм определены дисперсионные зависимости показателей преломления $n(\lambda)$ и поглощения $k(\lambda)$ пленок оксида цинка, сформированных методом ВЧ магнетронного распыления на кремниевые подложки при наклонном расположении подложки к оси магнетрона. Также установлены геометрические параметры данных пленок.

Ключевые слова: спектральная эллипсометрия, оптические характеристики, неоднородность по толщине, полупроводниковые пленки.

Введение

В связи с развитием оптоэлектроники в последние десятилетия возрос интерес к тонкопленочным покрытиям на основе прозрачных проводящих оксидов металлов (ZnO , SnO_2 , TiO_2 , In_2O_3), относящихся к классу широкозонных полупроводников [1]. Свойства и структура получаемых покрытий напрямую зависят от методов и условий их формирования. При этом часто наблюдается неравномерное распределение толщины пленки вдоль поверхности подложки.

В зависимости от сферы применения подобная неоднородность по толщине пленок воспринимается по-разному: и как нежелательное явление, служащее показателем того, что процесс формирования пленок не отлажен, и как ожидаемое – при получении наноструктурированных тонких пленок. В последнем случае специально используют скользящее угловое осаждение пленок на подложки, например, методом ВЧ магнетронного распыления. При этом во всех случаях возникает необходимость учета неоднородности по толщине получаемых пленок.

В данной работе исследуется возможность учета неоднородности по толщине полупроводниковых пленок на подложках при определении дисперсионных зависимостей их оптических характеристик (показателей преломления $n(\lambda)$ и поглощения $k(\lambda)$) методом спектральной эллипсометрии на примере пленок оксида цинка, осажденных на кремниевые подложки.

Эксперимент

Для исследования лабораторией “Интегрированные микро- и наностистемы” (БГУИР, Минск) были предоставлены два образца пленок оксида цинка на кремни-

© Ивашкевич И. В., 2020

© Третьяк Е. В., 2020

евых подложках. Исследуемые пленки ZnO формировались методом ВЧ магнетронного распыления на подложки кремния КДБ-12 из трехдюймовой мишени чистой ZnO 99,95%. Образцы крепились к металлическому столику, нормаль к которому отклонена от оси магнетрона на 20° . Расстояние между магнетроном и подложкой составило 90 мм. Столик помещался в вакуумную камеру, которая откачивалась до давления 10^{-3} Па. Затем производилась ионная очистка поверхности образцов пучком заряженных ионов аргона, ускоренных напряжением 2500 В в течение 3 минут. Давление в камере поднималось до 0,939 Па, и включался ВЧ магнетрон. В процессе напыления температура подложки поднималась до 30°C , при этом мощность разряда составила 300 Вт. Длительность процесса напыления для первого образца составила 10 минут, для второго образца – 5 минут.

Учитывая вышеуказанные условия формирования пленок, а именно наклонное расположение подложки к оси магнетрона, сформированные пленки следует считать неоднородными по толщине.

Проводились измерения спектров $\text{tg}\Psi(\lambda)$ и $\text{cos}\Delta(\lambda)$ на спектральном эллипсометре ES-2 [2] исследуемых пленок оксида цинка на кремниевых подложках при угле падения излучения 70° в спектральном диапазоне 400-1000 нм. Измерения проводились в трех различных областях (A, B, C) поверхности пленки (рисунок 1). Причем в области C плоскость падения излучения поворачивалась на 90° относительно областей A и B. При этом локальность измерений l изменялась с 2,00 мм до 5,00 мм.

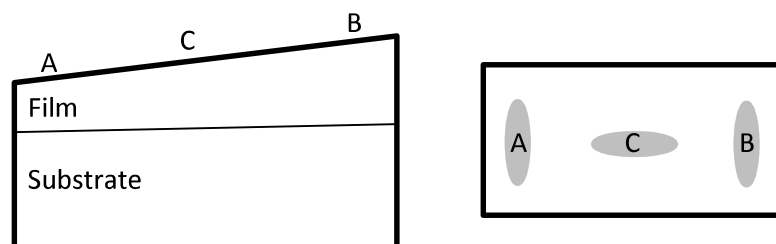


Рисунок 1 – Схематическое обозначение областей измерения спектров на исследуемых образцах

На рисунке 2 представлены измеренные спектры первого образца. Несовпадение спектров различных областей поверхности пленки говорит о том, что толщина пленки неоднородна вдоль образца.

В работе [3] исследована возможность учета подобной неоднородности по толщине данных пленок с применением программного обеспечения к спектральному эллипсометру ES-2, которое позволяет довольно простым образом определять клиновидность и толщину пленки. Было показано, что неоднородность толщины d пленки ZnO можно описать в достаточной мере некоторым параметром dd , учитывающим изменение толщины пленки в площади светового пучка. Однако в силу ряда ограничений, наложенных разработчиками на вышеуказанное программное обеспечение, таких как невозможность варьирования моделей дисперсии оптических параметров исследуемых структур, отсутствие информации о методе расчета параметра dd , остается открытым вопрос о выборе математической модели для расчета спектров $\text{tg}\Psi(\lambda)$ и $\text{cos}\Delta(\lambda)$ неоднородных по толщине пленок на подложках.

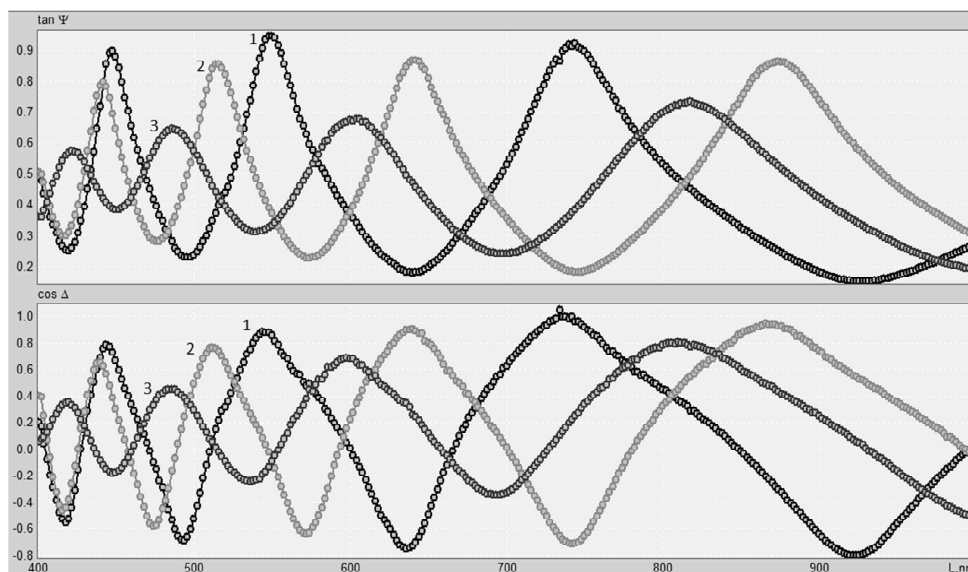


Рисунок 2 – Экспериментальные спектры $\tan\Psi(\lambda)$ и $\cos\Delta(\lambda)$ первого образца (кривые 1 – область А, 2 – область В, 3 – область С)

Оптическая модель

Для учета неоднородности по толщине исследуемых пленок использовалась модель линейного клина на полубесконечной подложке (рисунок 3). Клин пленки характеризуется средней толщиной d в пределах области освещения образца l и отклонением толщины от среднего значения в пределах апертуры пучка света Δd . При этом α – угловая толщина клина. N_0 – показатель преломления среды, N_1 и N_2 – комплексный показатель преломления пленки и полубесконечной подложки соответственно; φ_0 – угол падения излучения.

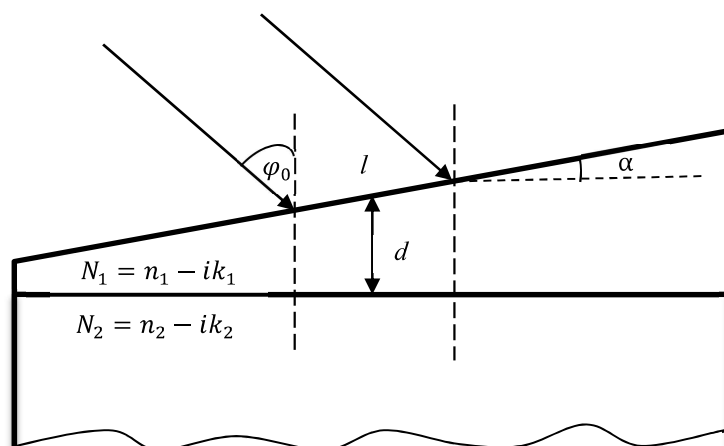


Рисунок 3 – Однослойная модель клиновидной пленки N_1 на полубесконечной подложке N_2

Для данной модели формулы коэффициентов Френеля на границах раздела воздух (0) – пленка (1), пленка (1) – подложка (2) имеют вид [4]:

$$Rp_{01} = \frac{N_1 \cdot \cos\varphi_0 - N_0 \cdot \cos\varphi_1}{N_1 \cdot \cos\varphi_0 + N_0 \cdot \cos\varphi_1}, \quad Rs_{01} = \frac{N_0 \cdot \cos\varphi_0 - N_1 \cdot \cos\varphi_1}{N_0 \cdot \cos\varphi_0 + N_1 \cdot \cos\varphi_1},$$

$$Rp_{12} = \frac{N_2 \cdot \cos\varphi_1 - N_1 \cdot \cos\varphi_2}{N_2 \cdot \cos\varphi_1 + N_1 \cdot \cos\varphi_2}, \quad Rs_{12} = \frac{N_1 \cdot \cos\varphi_1 - N_2 \cdot \cos\varphi_2}{N_1 \cdot \cos\varphi_1 + N_2 \cdot \cos\varphi_2},$$

где величина угла падения излучения φ_0 на клиновидную поверхность пленки уточнялась через угловую толщину клина α , а углы φ_1 и φ_2 – углы преломления излучения на границах раздела воздух – пленка и пленка-подложка связаны с углом φ_0 законом Снелиуса.

Тогда коэффициенты отражения Rp и Rs из основного уравнения эллипсометрии $tg\Psi e^{i\Delta} = \frac{Rp}{Rs}$ [4] для выбранной модели определяются по формулам

$$Rp = \frac{Rp_{01} + Rp_{12} \cdot \langle e^{-2i\sigma} \rangle}{1 + Rp_{01} \cdot Rp_{12} \cdot \langle e^{-2i\sigma} \rangle}, \quad Rs = \frac{Rs_{01} + Rs_{12} \cdot \langle e^{-2i\sigma} \rangle}{1 + Rs_{01} \cdot Rs_{12} \cdot \langle e^{-2i\sigma} \rangle}.$$

При этом среднее значение экспоненциального множителя, вызванного прохождением излучения через клин, равно

$$\langle e^{-2i} \rangle = \frac{\sin 2\Delta\sigma}{2\Delta\sigma} e^{-2i(\sigma)},$$

где $\langle \sigma \rangle = \frac{2\pi}{\lambda} dN_1 \cos\varphi_1$ – средняя фазовая толщина клина, $\Delta\sigma$ – отклонение фазовой толщины от среднего значения на границах светового пучка.

На рисунке 4 представлены рассчитанные спектры $tg\Psi(\lambda)$ и $\cos\Delta(\lambda)$ при угле падения 70° и толщине клина 600 нм для различных значений отклонения толщины от среднего значения Δd (кривые 1 – $\Delta d = 0$ нм, 2 – $\Delta d = 30$ нм, 3 – $\Delta d = 60$ нм, 4 – $\Delta d = 120$ нм, 5 – $\Delta d = 180$ нм). При этом дисперсию показателя преломления подложки задавали из работы [5]. Дисперсию показателя преломления пленки оксида цинка моделировали формулой Коши

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}, \quad (1)$$

а показателя поглощения – экспоненциальной убывающей зависимостью

$$k(\lambda) = k_m e^{\frac{\lambda_m - \lambda}{\lambda_1}}. \quad (2)$$

Как показывает опыт [6; 7], пленки ZnO, осаждаемые различными методами, обладают высоким коэффициентом пропускания в видимой области спектра, при этом отличаются достаточно хорошей однородностью. Из множества дисперсионных моделей модель Коши дает наилучшее описание дисперсии показателя преломления в этой области спектра. При этом для беспримесных пленок ZnO дисперсия показателя поглощения хорошо описывается экспоненциальной зависимостью. В зависимости от условий нанесения пленок коэффициенты в приведенных выше дисперсионных зависимостях будут изменяться, описывая смещение дисперсионной кривой, однако форма ее деформируется не столь значительно.

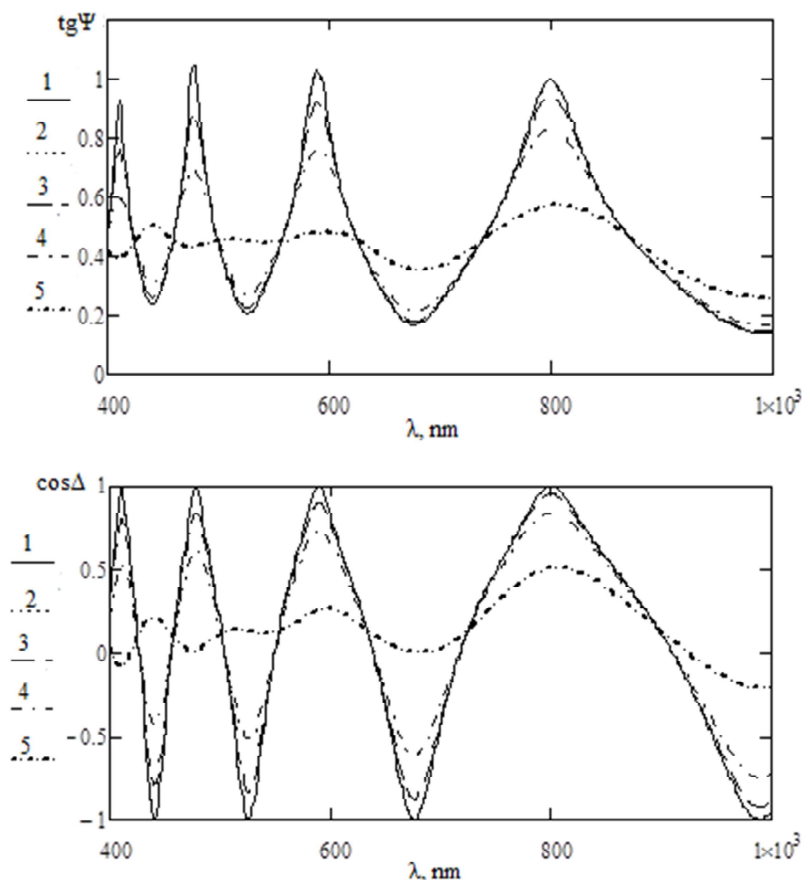


Рисунок 4 – Рассчитанные спектры $\text{tg}\Psi(\lambda)$ и $\cos\Delta(\lambda)$

Анализ полученных спектров показывает, что клиновидность пленок $\Delta d \sim 10\%$ не приводит к изменению положения экстремумов в спектрах $\text{tg}\Psi(\lambda)$ и $\cos\Delta(\lambda)$, причем на спектры $\cos\Delta(\lambda)$ она практически не оказывает никакого влияния. При больших значениях клиновидности вид обоих спектров существенно меняется и положение интерференционных экстремумов уже не несет информации о средней оптической толщине пленки.

Результаты и их обсуждение

С целью определения дисперсии оптических характеристик исследуемых неоднородных пленок оксида цинка на кремниевых подложках методом наименьших квадратов было получено решение обратной задачи спектральной эллипсометрии для указанной выше модели. При этом минимизировался функционал невязки значений экспериментальных и теоретических поляризационных углов σ в измеряемом диапазоне длин волн. Дисперсия оптических характеристик пленок моделировалась формулами (1) и (2).

Результаты решения обратной задачи спектральной эллипсометрии для двух исследуемых образцов представлены в таблицах 1–3.

В таблице 1 приведены рассчитанные параметры дисперсионных моделей комплексного показателя преломления пленок оксида цинка, которые хорошо согласуются с ранее полученными данными [3].

Таблица 1 – Рассчитанные параметры дисперсионных моделей слоя ZnO

Параметр	Значение
a	1,801
b	$2,120 \cdot 10^4 \text{ нм}^2$
c	$2,919 \cdot 10^9 \text{ нм}^4$
k_m	$1,134 \cdot 10^{-3}$
λ_m	540 нм
λ_1	80 нм

В таблицах 2 и 3 представлены рассчитанные геометрические параметры пленок оксида цинка для обоих образцов.

Таблица 2 – Геометрические параметры слоя ZnO для первого образца

Параметр	Область А	Область В	Область С
$d, \text{ нм}$	582	688	640
$\Delta d, \text{ нм}$	40	45	83
$\alpha, \text{ рад}$	$10 \cdot 10^{-6}$	$11 \cdot 10^{-6}$	$8,3 \cdot 10^{-6}$
σ	0,084	0,085	0,081

Таблица 3 – Геометрические параметры слоя ZnO для второго образца

Параметр	Область А	Область В	Область С
$d, \text{ нм}$	264	297	273
$\Delta d, \text{ нм}$	21	23	39
$\alpha, \text{ рад}$	$5,2 \cdot 10^{-6}$	$5,7 \cdot 10^{-6}$	$3,9 \cdot 10^{-6}$
σ	0,072	0,080	0,075

Анализ приведенных данных в таблицах 2 и 3 показывает, что в области С, где локальность измерений увеличивалась более чем в два раза (по сравнению с областями А и В) при практически одинаковом значении невязки σ рассчитанное значение угловой толщины пленок обоих образцов оказалось меньше на ~20%. Что объясняется, по-видимому, большей погрешностью из-за усреднения толщины пленки в пределах апертуры пучка.

Сравнение данных из таблиц 2 и 3 с подобными данными из работы [3] позволяет утверждать о лучшей сходимости полученных результатов при использовании модели линейного клина.

Выводы

В ходе исследования было установлено, что для учета неоднородности по толщине пленок оксидов металлов, возникающей из-за особенностей их формирования, можно использовать простую оптическую модель – линейный клин на полубесконечной подложке. При этом клиновидность пленки можно задать двумя параметрами: средней толщиной d пленки в пределах апертуры пучка падающего излучения и отклонением толщины от среднего значения Δd в этих же пределах.

При моделировании неоднородности по толщине отражающей системы линейным клином вносится дополнительная погрешность из-за численного интегрирования по интервалу толщины пленки, однако данная модель обладает относительной простотой и наглядностью.

В результате решения обратной задачи спектральной эллипсометрии восстановлен ход дисперсионных зависимостей показателей преломления и поглощения неоднородных по толщине пленок оксида цинка на кремниевых подложках и определены параметры клиновидности пленок.

Результаты исследования могут быть использованы для коррекции условий осаждения пленок оксида цинка (или других тонкопленочных структур, имеющих схожие дисперсионные функциональные зависимости) под скользящим углом к кремниевым подложкам методом ВЧ магнетронного распыления с требуемыми параметрами.

Работа выполнена в рамках задания 2.81 “Исследование структуры и оптических свойств материалов фотовольтаических элементов солнечной энергетики на основе перовскитов” ГПНИ “Физическое материаловедение, новые материалы и технологии”.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Вавилов, В. С.** Особенности физики широкозонных полупроводников и их практических применений / В. С. Вавилов // УФН. – 1994. – Т. 164, № 3. – С. 287–296.
2. Спектральная эллипсометрия многослойных гетероструктур ZnS/ZnSe / В. И. Ковалев [и др.] // Журнал прикладной спектроскопии. – 2002. – Т. 69, № 2. – С. 258–263.
3. **Ивашкевич, И. В.** Спектральная эллипсометрия клиновидных полупроводниковых пленок на кремниевых подложках / И. В. Ивашкевич, В. В. Филиппов // Проблемы взаимодействия излучения с веществом [Электронный ресурс] : V Международная научная конференция, посвящ. акад. Б. В. Бокутю (Гомель, 14–16 ноября 2018 г.) : материалы : в 2 ч. Ч. 2. – Электронные тестовые данные (10,6 МБ). – Гомель : ГГУ имени Ф. Скорины, 2018. – С. 104–109.
4. **Аззам, Р.** Эллипсометрия и поляризованный свет / Р. Аззам, Н. Башара. – Москва : Мир, 1981. – 583 с.
5. Учет влияния естественного поверхностного слоя при исследовании кремниевых пластин методом спектральной эллипсометрии / Н. И. Стаськов [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1. – С. 26–30.
6. **Tadatsugu, M.** Transparent conducting oxide semiconductors for transparent electrodes / M. Tadatsugu // Semiconductor Science and Technology – 2005. – V. 20 – P. 35–49.
7. **Nomoto, J.** Preparation of Al-doped ZnO transparent electrodes suitable for thin-film solar cell applications by various types of magnetron sputtering depositions / J. Nomoto, T. Hirano, T. Miyata, T. Minami // Thin Solid Films. – 2011. – V. 520. – P. 1400–1406.

Поступила в редакцию 08.06.2020 г.

Контакты: ivashkevich@msu.by (Ивашкевич Инна Викторовна)

Ivashkevich I., Tretyak E. SPECTRAL ELLIPSOmetry OF INHOMOGENEOUS SEMICONDUCTOR FILMS.

The mathematical model is presented; it describes the heterogeneity in thickness of metal oxide films on semiconductor substrates when examined by spectral ellipsometry. The dispersion dependences of the refractive index $n(\lambda)$ and absorption index $k(\lambda)$ of zinc oxide films are determined in the spectral range of 400–1000 nm. These films are formed by HF magnetron sputtering on silicon substrates with the substrate inclined to the magnetron axis. The geometric parameters of these films are also set.

Keywords: spectral ellipsometry, optical constants, irregularity in thickness, semiconductor film.

УДК [616.98:579.852.13]-02:616.6-006-085.28

ИНФЕКЦИЯ, ВЫЗВАННАЯ CLOSTRIDIUM DIFFICILE, У ПАЦИЕНТОВ ОНКОУРОЛОГИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ ПОСЛЕ ХИМИОТЕРАПИИ

Е. И. ДЕГТЯРЕВА

кандидат биологических наук, доцент

Гомельский государственный медицинский университет

В. Д. ГЕРТМАН

студент

Гомельский государственный медицинский университет

К. Н. ДОРОШЕВИЧ

студент

Гомельский государственный медицинский университет

Нами было установлено, что у 58% пациентов на фоне химиотерапевтического лечения рака предстательной железы наблюдалась диарея, ассоциированная с C. difficile. Чаще всего диарею можно наблюдать при приеме таких препаратов, как “Элегард” (вероятность возникновения диареи – 54%), “Декаптил-депо” (22%), “Нитрол” (15,5%). На развитие этой патологии у пациентов оказывает влияние возраст (средний возраст 55–75 лет), стадия заболевания (чаще у пациентов 3–4 стадии) и количество курсов химиотерапии (среднее количество курсов терапии, при которых наблюдалась диарея, – 10–15).

Ключевые слова: рак предстательной железы, C. difficile ассоциированная диарея, причины возникновения диарей, химиотерапевтические препараты.

Введение

Рак предстательной железы (РПЖ) – злокачественное новообразование, возникающее из эпителия альвеолярно-клеточных элементов предстательной железы. Данное заболевание занимает ведущее место в структуре онкоурологической патологии, во многих странах выходит на первое место среди причин смертности от онкологических заболеваний мужчин. Из года в год отмечается рост заболеваемости РПЖ, а число пациентов с запущенными стадиями заболевания не уменьшается.

Основным фактором риска развития РПЖ является возраст. Заболевание почти не встречается в возрасте до 40 лет. Увеличивает риск возникновения РПЖ наличие заболевания у ближайших родственников – отца, братьев. Считается, что вероятность заболеть РПЖ при наличии заболевания у ближайших родственников увеличивается вдвое. Имеет значение раса и географическое положение: афроамериканцы болеют чаще, значительно реже встречается заболевание в Восточной Азии. Также отмечено, что в Северной Европе частота РПЖ больше, чем в Южной. Считается, что употребление мясной пищи является фактором, способствующим развитию РПЖ, поскольку у японцев заболеваемость существенно ниже, чем у европейцев и

© Дегтярева Е. И., 2020

© Гертман В. Д., 2020

© Дорошевич К. Н., 2020

североамериканцев, а у японцев-эмигрантов в США она становится такой же, как у местных жителей.

В последние годы делаются попытки связать заболевание РПЖ с хроническими воспалительными процессами в простате. С открытием гена НРС 1 на хромосоме 1 доказана предрасположенность человека, носящего этот ген, к РПЖ. В зависимости от формы, характера расположения железистых структур в опухоли и соотношения эпителиального и соединительнотканного компонентов гистологически различают несколько видов рака. Если РПЖ возникает из железистого эпителия – это аденокарцинома, если из плоского эпителия – плоскоклеточный рак. Тубулярный рак развивается из эпителия узких каналов, выстланных кубическим или призматическим эпителием, в просвете которых может находиться секрет. Альвеолярный рак возникает за счет концевых отделов ветвящихся желез. Все перечисленное – это так называемые дифференцированные формы рака. Рак наиболее часто (90%) развивается из периферических отделов предстательной железы, в то время как доброкачественная гиперплазия предстательной железы – из центральной и транзиторной зон. В 5–25% случаев отмечено сочетание рака и гиперплазии предстательной железы.

Метастазирование рака происходит гематогенным (кости таза, позвоночник, легкие, печень), лимфогенным (в лимфатические узлы малого таза, паракаваальные, парааортальные, медиастинальные лимфатические узлы) или сочетанным путем [1, с. 4–6].

Диагностика заболевания основана на анализе клинических проявлений, оценке результатов специальных исследований с учетом анамнеза и возраста пациента. Методы ранней диагностики рака предстательной железы включают в себя исследование простатспецифического антигена (ПСА) сыворотки крови в динамике, пальцевое ректальное исследование (ПРИ), трансректальное ультразвуковое исследование простаты (ТРУЗИ) [2, с. 100].

Рак предстательной железы подразделяется на 4 основные стадии:

Стадии I и II – локализованный РПЖ, когда опухоль не выходит за пределы простаты.

Стадия III – местно-распространенный РПЖ, когда опухоль выходит за пределы простаты и прорастает в соседние органы либо метастазирует в регионарные лимфатические узлы (те, которые первыми стоят на пути оттока лимфы от органа, в данном случае – от предстательной железы).

Стадия IV – распространенный РПЖ. Характеризуется наличием метастазов в лимфатических узлах таза и/или в отдаленных органах, чаще всего в костях скелета.

При прогрессировании данного заболевания можно выделить три группы симптомов:

1. Симптомы нарушения оттока мочи из мочевого пузыря (инфравезикальной обструкции) – вялая или прерывистая струя мочи, ощущение неполного опорожнения мочевого пузыря после мочеиспускания, учащенное мочеиспускание, ноктурия (ночное мочеиспускание), императивные позывы к мочеиспусканию.

2. Симптомы, связанные непосредственно с ростом опухоли простаты – кровь в моче, сперме, эректильная дисфункция, боли внизу живота, промежности, боли в поясничной области (из-за развития уретерогидронефроза возникает расширение чашечно-лоханочной системы почки и диаметра мочеточника в результате сдавления дистального сегмента мочеточника).

3. Симптомы, связанные с метастазированием опухоли простаты – боли в костях, отек нижних конечностей (лимфостаз) при поражении паховых лимфатических узлов, потеря массы тела, анемия (снижение гемоглобина и эритроцитов), кахексия (раковое истощение) [1, с. 8].

На ранних стадиях (1 и 2 стадии заболевания) применяют хирургическое лечение, включающее в себя удаление простаты вместе с семенными пузырьками, брахитерапию, основанную на введении в опухоль зерен с радиоактивными веществами.

На более поздних стадиях (3 и 4 стадии заболевания) применяют дистанционную лучевую терапию совместно с гормональной терапией, основанной на облучении предстательной железы и находящихся рядом лимфатических узлов с терапией антагонистами гонадолиберина, а также хирургическую кастрацию [1].

Также при назначении химиотерапевтических препаратов и антибиотикотерапии онкологическим больным урологического профиля на более длительный срок может возникнуть дисбактериоз, ассоциированный *C. difficile* – спорообразующей грамположительной анаэробной палочки, которая впоследствии может стать причиной псевдомембранозного колита и *C. difficile* ассоциированной диареи.

Развитие заболевания возможно представить в виде нескольких ключевых звеньев. Вначале под воздействием ряда предрасполагающих факторов (системная антибактериальная терапия, прием цитостатиков, ингибиторов протонной помпы и блокаторов H₂-рецепторов, лучевая терапия, операции на органах брюшной полости и малого таза) нарушаются состав и видовое разнообразие микробиоты ЖКТ, теряются колонизационная резистентность и другие защитные механизмы слизистой кишечника. Затем идет колонизация *C. difficile*. Микроорганизм активно пролиферирует в просвете толстой кишки и начинает продуцировать токсины А (энтеротоксин), В (цитотоксин), бинарный, что приводит к развитию водянистой диареи и колита. В особо тяжелых случаях возможен выраженный некроз колонцитов вплоть до псевдомембранозного колита, токсического мегаколона, сепсиса и септического шока.

Несколько ключевых факторов риска предрасполагают к развитию симптомных форм КДАИ:

– системная антибактериальная терапия в ближайшие 1-3 месяца любыми антибиотиками, но наиболее часто – при применении цефалоспоринов, линкозамидов, фторхинолонов, пенициллинов, карбапенемов (следует помнить, что развитие КДАИ может совпадать с началом или продолжением антибиотикотерапии либо идти после окончания курса антибиотиков, чаще в последующий месяц, редко – через 2–3 месяца);

- длительные госпитализации в учреждения здравоохранения, интернаты;
- противоопухолевая терапия (химио-, лучевая);
- пожилой возраст и тяжелая коморбидная патология;
- иммуносупрессия любого генеза;
- длительный прием ингибиторов протонной помпы и блокаторов H₂-рецепторов;
- абдоминальные хирургические вмешательства;
- наличие у пациента активной формы воспалительного заболевания кишечника;
- вспышка КДАИ в отделениях учреждений здравоохранения.

Среди здорового населения широко распространено носительство токсигенных штаммов *C. difficile*. Доля носителей составляет до 15% здоровых взрослых, 84% новорожденных, 57% пожилых людей в домах престарелых. Распространение

C. difficile в популяции и окружающей среде обусловлено биологическими особенностями возбудителя, защищающими его от оксидативного шока, химических и физических факторов [3, с. 615–617].

C. difficile ассоциированная диарея развивается вскоре после начала применения антибиотика или через некоторое время после окончания лечения (преимущественно через 2–3 недели); чаще всего протекает относительно легко, не сопровождается выраженной дегидратацией. В большинстве случаев диарея прекращается после отмены антибиотика и обычно не требует специфической терапии. Возможно появление абдоминального болевого синдрома, но чаще болезненность со стороны кишечника ощущается лишь при его пальпации. Отмечается легкое или умеренное учащение дефекации, как правило, не приводящее к выраженным электролитным нарушениям [4, с. 133–134].

Псевдомембранозный колит – заболевание, этиологическим фактором которого является цитотоксин, продуцируемый *C. difficile*. Характерная локализация воспалительных изменений в толстом кишечнике, так как это наиболее естественная среда обитания анаэробных клостридий. Клинически данное заболевание проявляется метеоризмом, интоксикацией, болями в области живота и диареей с примесью слизи и крови, редко характерна клиника острого живота [5, с. 20].

C. difficile ассоциированная диарея возникает при приеме таких антибиотиков, как фторхинолоны, тетрациклины, клиндамицин, амоксициллин, ампициллин, а также при длительном лечении химиотерапевтическими препаратами например: “Элегард”, “Нитрол”, “Диферелин”, “Декапептил-депо”, “Трипторелин-лонг”, “Луприд-депо”.

Материалы и методы исследования. Материалы исследования – архив данных онкологических пациентов урологического профиля Гомельского областного клинического онкологического диспансера. Методы исследования – медико-статистический метод (использование программы “Statistica 2015”).

Цель исследования. Установить процент онкологических пациентов урологического профиля, получавших химиотерапевтическое лечение, на фоне которого наблюдалась диарея, ассоциированная с *C. difficile*. Определить причины возникновения диареи при приеме химиотерапевтических препаратов.

Для развития диареи, обусловленной *C. difficile*, необходимо наличие так называемых предрасполагающих факторов, одним из которых в подавляющем большинстве случаев является применение антибиотиков и химиотерапевтических препаратов. Однако диарея, обусловленная инфекцией *C. difficile*, может развиваться и в отсутствие антибиотикотерапии, при других условиях, сопровождающихся нарушением нормального микробиоценоза кишечника. В частности, предрасполагающими факторами могут быть уремия, применение цитостатических препаратов и иммунодепрессантов), кишечная непроходимость, хронические воспалительные заболевания кишечника (неспецифический язвенный колит).

К группе риска по развитию тяжелых форм нозокомиальной *C. difficile* инфекции относятся дети раннего возраста (ослабленные), а также пациенты, длительно находящиеся в стационаре и получающие химиотерапевтическое лечение.

Основная часть

Результаты исследования и их обсуждение. Проанализировав архив данных онкологических пациентов урологического профиля в период с 2014 по 2018 г., проходивших лечение на базе Гомельского областного клинического онкологиче-

ского диспансера, была составлена выборка из 100 человек, основанная на таких критериях, как вид лечения (гормональная химиотерапия, контактная и дистанционная лучевая терапия, хирургическое лечение), количество курсов химиотерапии, химиотерапевтический препарат, используемый при лечении.

В процессе исследования были составлены следующие графики, отражающие зависимость возникновения диареи, ассоциированной с *C. difficile*, от таких факторов, как возраст, стадия заболевания и количество курсов химиотерапии.

На рисунке 1 графически отражена частота встречаемости РПЖ у пациентов разного возраста.

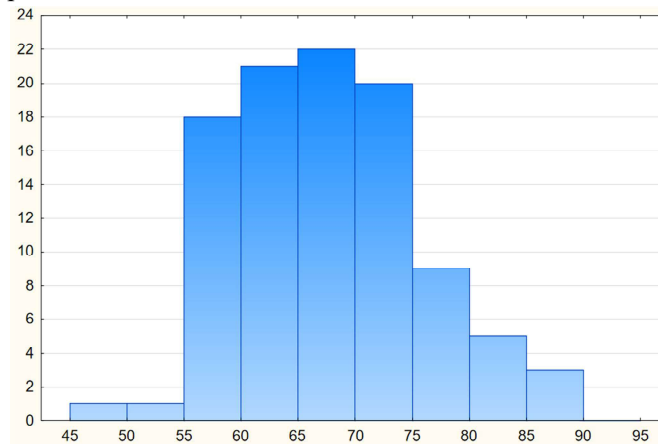


Рисунок 1 – Частота встречаемости РПЖ у пациентов различного возраста.

Ось абсцисс – возраст пациентов, ось ординат – количество пациентов в определенной возрастной группе

В процессе анализа зависимости между возрастом пациентов и возникновением рака предстательной железы была обнаружена следующая закономерность. Средний возраст данных пациентов составлял 65–70 лет (25% от общего числа обследованных), также от 60 до 65 лет (21% обследованных) и 70–75 лет (18% обследованных). Реже всего данная патология выявлялась у пациентов младше 55 лет (5% обследованных). Данная зависимость связана с развитием несовершенств гормональной регуляции у мужчин старше 60 лет. Также на возраст влияет статус питания, его качество и количество, возникновение ПОЛ (перекисное окисление липидов) – главный механизм разрушения клеток, возникновение “предела деления” (лимит Хейфлика: каждая клетка может делиться 50 раз).

Среди пациентов данной выборки 1 стадия заболевания РПЖ наблюдалась у 7% обследованных, 2 стадия – 9%, 3 стадия – 25%, 4 стадия – 59% испытуемых (рисунок 2).

Возникновение диареи, ассоциированной с *C. difficile*, напрямую зависит не только от вида терапии, но также от количества курсов данной терапии.

В данном исследовании онкологические пациенты принимали лечение в виде химиотерапии (2-4 стадия заболевания), также дистанционной и контактной лучевой терапии (1-2 стадия заболевания) (рисунок 3).

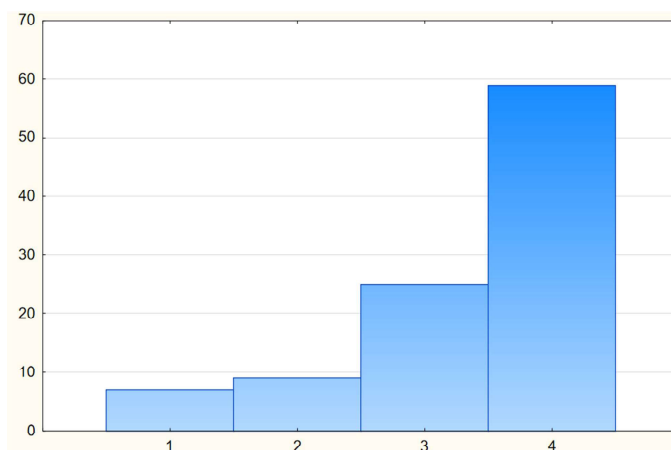


Рисунок 2 – Количественное распределение пациентов по стадиям заболевания РПЖ.

Ось абсцисс – стадия заболевания, ось ординат – количество пациентов с соответствующей стадией заболевания

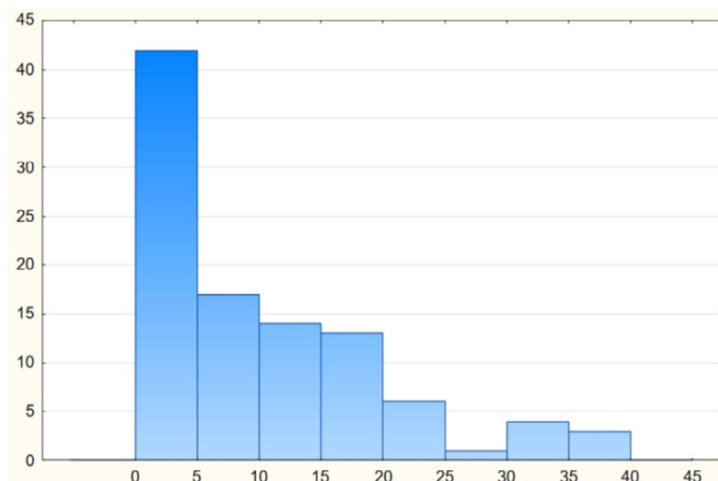


Рисунок 3 – Количественное распределение пациентов от количества курсов терапии.

Ось абсцисс – количество курсов терапии, ось ординат – количество пациентов, которые принимали терапию

До 5 курсов химиотерапии прошли 42% пациентов (1 стадия заболевания). Среди пациентов с 1-2 стадией заболевания преобладала дистанционная лучевая терапия (рисунок 3). Некоторые из обследованных отказывались от данного вида лечения и принимали химиотерапевтическое лечение. Однако у данной группы пациентов диарея, ассоциированная с *C. difficile*, не наблюдалась (рисунок 4).

От 5 до 10 курсов химиотерапии прошли 17% пациентов (2 стадия заболевания).

От 10 до 15 курсов химиотерапии прошли 14% пациентов (2-3 стадия заболевания).

От 15 до 20 курсов химиотерапии прошли 13% пациентов (3-4 стадия заболевания).

От 20 до 38 курсов химиотерапии прошли 14% пациентов (4 стадия заболевания). Большая часть пациентов данной группы скончались от основного заболевания в процессе лечения.

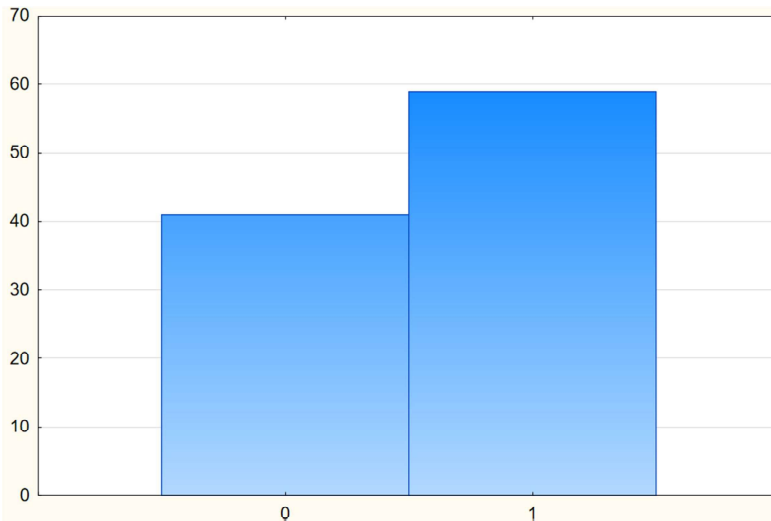


Рисунок 4 – наличие/отсутствие диареи.

Ось абсцисс – 0 – диарея отсутствовала, 1 – наличие диареи,
ось ординат: количество пациентов с наличием/отсутствием диареи

58% пациентов проходили химиотерапевтическое лечение с применением гормональных препаратов и антибиотиков в большом количестве (от 5 до 38 курсов). На фоне данной терапии у пациентов наблюдалась диарея, ассоциированная с *C. difficile*.

Зависимость между наличием/отсутствием диареи и количеством курсов терапии отражается следующим правилом: чем больше курсов химиотерапии с применением гормональных препаратов и антибиотиков, тем выше вероятность возникновения среди обследованных онкологических пациентов урологического профиля диареи, ассоциированной с *C. difficile*.

Также в ходе исследования был составлен перечень химиотерапевтических препаратов, используемых для лечения рака предстательной железы у пациентов, преимущественно находящихся на последних стадиях заболевания (3-4 стадии заболевания). Нами была составлена таблица, включающая в себя процент возникновения диареи при приеме препаратов, рекомендуемых на последних стадиях РПЖ, основные побочные эффекты, длительность и курс лечения.

Характеристика основных химиотерапевтических препаратов

Химиотерапевтический препарат	Длительность и курс лечения	Процент возникновения диарей	Основные побочные эффекты
“Луприд-депо”	1 инъекция в 4 недели, курс лечения – до 6 месяцев	3,5 %	Тошнота, рвота, диарея, анорексия, отеки, дизурия
“Элегард”	1 инъекция в 4 недели, 1 инъекция в 3 месяца, 1 инъекция в 6 месяцев	54%	Диарея, тошнота, рвота, головная боль, слабость, эритема, зуд, потливость

Окончание таблицы

Химиотерапевтический препарат	Длительность и курс лечения	Процент возникновения диареи	Основные побочные эффекты
“Декапептил-депо”	4-недельный курс, 1 инъекция в 4 недели	22%	Боль в животе, метеоризм, рвота, тошнота, запор, диарея, анафилактические реакции
“Трипторелин-лонг”	1 инъекция в 28 дней, курс лечения от 6 месяцев до 3 лет совместно с курсом лучевой терапии	2,4%	Анафилактические реакции, тошнота, рвота, запоры, боли в животе, отек Квинке, зуд, пурпура, угревая сыпь, диарея, метеоризм
“Нитрол”	Курс лечения – до недели, 1 инъекция каждый день	15,5%	Диарея, тошнота, рвота, кардиомиопатии, анафилактические реакции
“Диферелин”	Курс лечения – 4 недели, 1 инъекция каждый день	2,6%	Отек горла и языка, расстройство дыхания, тошнота, диарея, рвота, боли в животе

В процессе анализа данных таблицы можно выявить достаточно высокий процент случаев возникновения диареи при приеме таких химиотерапевтических препаратов, как “Элегард” (54%), “Нитрол” (15,5%), “Декапептил-депо” (22%). Также среди побочных эффектов, возникаемых при приеме данных препаратов, можно выделить такие, как тошнота, рвота, диарея, метеоризм и боли в животе.

Препараты на разных стадиях РПЖ:

1. “Доцетаксел” – применяется на ранних стадиях.
2. “Митоксантрон” 10 мг внутривенно в течение 21 дня в сочетании с “Преднизолоном” 10 мг ежедневно применяется только как альтернатива доцетакселу (при непереносимости).
3. “Кабазитаксел” (“Джевтана”) назначается как вторая линия лечения (“спасительная терапия”) при прогрессировании заболевания на фоне доцетаксела. Применяется в дозе 20 или 25 мг курсами через 21 день, также в комбинации с “Преднизолоном”.

Онкологические пациенты относятся к группе высокого риска развития инфекции, ассоциированной *C. difficile*, так как противоопухолевые препараты, с одной стороны, обладают некоторой антимикробной активностью, а с другой стороны, повреждают слизистую оболочку кишечника. При этом нарушается не только секреция и всасывание, что обуславливает развитие диареи, но также повреждается кишечный барьер.

Заключение

В результате проведенного исследования с использованием медико-статистического метода мы установили, что процент онкологических пациентов, у которых на фоне химиотерапевтического лечения рака предстательной железы наблюдалась диарея, ассоциированная с *C. difficile*, составляет 58%.

Данный результат связан не только с применением химиотерапевтических препаратов, таких как “Луприд-депо”, “Декапептил-депо”, “Трипторелин-лонг”, “Нитрол”,

“Диферелин”, “Элегард”, но также зависит от возраста пациента (55–75 лет), стадии заболевания (чаще диарея наблюдалась у пациентов, находящихся на 2-4 стадии заболевания) и количества курсов химиотерапии с применением вышеперечисленных препаратов (среднее количество курсов терапии, при которой наблюдалась диарея, – 10 и более, отсутствовала – до 5). Среди препаратов, на фоне которых диарея, ассоциированная с *C. difficile*, наблюдалась чаще всего, можно выделить “Элегард” (вероятность возникновения диареи – 54%), “Декаптил-депо” (22%), “Нитрол” (15,5%).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Строцкий, А. В.** Рак предстательной железы : учеб. пособие / А. В. Строцкий, Е. И. Юшко. – Минск : Минск. гос. ун-т, 2015. – 19 с.
2. **Енсебаев, Е. Ж.** Опыт лечения рака предстательной железы / Е. Ж. Енсебаев, Д. Э. Ахметов, Ж. К. Байгаскинов, А. М. Садыков, В. И. Винник, Б. Т. Абеннов // Клиническая медицина Казахстана. – 2012. – № 2(25). – С. 100–105.
3. **Abt, M. C.** Clostridium difficile colitis: pathogenesis and host defence / M. C. Abt, P. T. McKenney, E. G. Pamer // Nat. Rev. Microbiol. – 2016. – Vol. 14. – P. 609–620.
4. **Parag Butala, M. D.** Surgical aspects of fulminant Clostridium difficile Colitis / M. D. Parag Butala, M. D. Celia M. Divino // The American J. of Surgery. – 2010. – Vol. 200, iss. 1. – P. 131–135.
5. **Майданник, В. Г.** Антибиотикассоциированная диарея, связанная с Clostridium difficile / В. Г. Майданник // Здоров'я України. – 2011. – Тематичний номер. – С. 20–22.

Поступила в редакцию 13.03.2020 г.

Контакты: elena.degtyaryova@tut.by (Дегтярева Елена Ивановна)

Degtyareva E., Gertman V., Doroshevich K. CLOSTRIDIUM DIFFICILE INFECTION IN ONCOUROLOGICAL PATIENTS AFTER CHEMOTHERAPY.

It has been found out that 58% of patients under chemotherapy treatment for prostate cancer had diarrhea associated with C. difficile. Mostly diarrhea can be seen after taking medication like Elegard (the probability of diarrhea – 54%), Decaptil-depo (22%), Nithrol (15,5%). The development of this pathology is impacted by age (medium age 67–70 years), stage of disease (mostly for patients of 3-4 stage) and the amount of chemotherapy courses (medium amount of courses – 10-15).

Keywords: prostate cancer, *C. difficile* associated diarrhea, causes of diarrhea, chemotherapeutic drugs.

УДК 616-092+616.13.002.2+577.115

ПЛАЗМАЛОГЕННЫЕ ФОСФОЛИПИДЫ В ИНТАКТНЫХ И ПОРАЖЕННЫХ АТЕРОСКЛЕРОЗОМ АРТЕРИЯХ

А. Н. Осипенко

заведующий Центральной учебно-исследовательской лабораторией
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В работе представлены экспериментальные данные, указывающие на повышенное содержание в стенках атеросклеротических артерий плазмалогенных фосфолипидов. Данный рост, вероятно, способствует развитию атеросклероза благодаря тому, что плазмалогенные фосфолипиды принимают крайне активное участие в реакциях со свободными радикалами. Образующиеся при этом продукты окислительной деструкции плазмалогенных фосфолипидов могут обладать проатерогенным действием. Кроме того, в жирнокислотном составе артерий с атеросклерозом отмечается рост доли некоторых полиненасыщенных жирных кислот, что также может способствовать более активному протеканию процессов свободнорадикального окисления липидов и атерогенезу.

Ключевые слова: атеросклероз, плазмалогены, жирные кислоты, свободные радикалы, гипоксия.

Введение

В настоящее время все еще остается много вопросов, касающихся механизмов развития атеросклероза, а также причин накопления липидов в артериальных сосудах, о чем свидетельствует значительное количество теорий атерогенеза [1–3]. Кроме того, большое количество научных работ посвящено изучению атерогенной роли холестерина и липопротеинов крови, в то время как значительно меньшее внимание уделяется возможной патогенетической роли других липидов. Так, в научных публикациях практически не встречаются данные об изменении содержания плазмалогенных фосфолипидов (ПФЛ) в артериальной стенке при атеросклерозе. Тем не менее, известно, что ПФЛ в сравнении диацилглицерофосфолипидами (ДАФЛ) значительно более активно участвуют в процессах свободнорадикального окисления липидов. Это связано с тем, что первичная гидроксильная группа в глицероле ПФЛ замещена остатком жирного альдегида (ЖА) в енольной форме (алкенильным альдегидогенным радикалом), а не остатком жирной кислоты (ацильным радикалом), как в ДАФЛ. При этом взаимодействие активных форм кислорода (АФК) с ЖА протекает существенно более активно в сравнении с взаимодействием АФК с полиненасыщенными жирными кислотами (ПНЖК). Обусловлено это тем, что величина энергии, требуемой для разрыва двойной углерод-углеродной связи, соседствующей с простой эфирной связью остатка ЖА, существенно ниже значения энергии, необходимой для разрыва двойных связей в цепях ПНЖК. При взаимодействии АФК с данной связью молекулы ПФЛ подвергаются расщеплению с образованием свободных ЖА и 2-моноацилглицерофосфолипидов [4–9].

Существует мнение, согласно которому расщепление АФК на взаимодействие с остатками ЖА в молекулах ПФЛ приводит к снижению активности окисления ими

ПНЖК. При этом, в отличие от продуктов перекисного окисления ПНЖК, продукты окисления остатков ЖК не поддерживают цепные свободнорадикальные реакции. В результате наличие ПФЛ препятствует повышенному свободнорадикальному окислению ПНЖК в клеточных мембранах и росту образования оксипинов, обладающих выраженной физиологической активностью [4–9].

С другой стороны, свободнорадикальное окисление остатков ЖА в молекулах ПФЛ приводит к образованию продуктов окислительной деструкции этих фосфолипидов, которые обладают химической активностью и оказывают повреждающее воздействие на структурные компоненты клеток. Получены свидетельства провоспалительной и проатерогенной роли ряда соединений образующихся при окислении ПФЛ [4; 10–12].

Кроме того, ПФЛ являются существенным компонентом клеточных мембран и оказывают на их функциональное состояние важное специфическое влияние. Благодаря наличию остатка ЖА в их молекуле ПФЛ способствуют увеличению упорядоченности липидов в мембране и росту ее вязкости, а также повышают гидрофобность мембраны. Присутствие ПФЛ в мембранах содействует появлению в них гексагональной фазы, что, в свою очередь, способствует процессам разделения и слияния мембран [13–14]. Повышенное содержание данных фосфолипидов по сравнению с другими участками мембран имеют липидные рафты, которые играют важную роль в протекании многих мембранных процессов (например, в трансдукции сигнала через клеточную мембрану) [4].

Целью данной работы являлась оценка изменения содержания ПФЛ в составе артериальной стенки при атеросклерозе. Для этого в ходе работы была определена доля жирных альдегидов в общей сумме жирных альдегидов и жирных кислот (ЖК) в атеросклеротических брюшных аортах и интактных общих сонных артериях. Также анализировался состав ЖК во фрагментах интактных артериальных сосудов и атеросклеротических артериях, так как изучение изменения жирнокислотного состава на фоне атеросклероза может способствовать разрешению некоторых вопросов, касающихся механизмов атерогенеза.

Основная часть

Методы и материалы. Исследовались артериальные сосуды эластического типа, не имевшие признаков атеросклероза, а также эластические артерии с атеросклеротическими поражениями. Для этого из 9 тел мужчин (в возрасте 50 плюс-минус 6–7 лет) были извлечены фрагменты брюшной аорты и общей сонной артерии. Все образцы общей сонной артерии были без атеросклеротических изменений. Фрагменты брюшной аорты, напротив, имели атеросклеротические поражения различной степени. Шесть образцов – атеромы небольших размеров, существенно не сужающие просвет сосуда. Три образца имели атеросклеротические поражения, при которых отмечались крупные атеросклеротические бляшки, содержащие значительное количество атероматозных масс и существенным образом сужающие просвет сосуда.

Производные жирных кислот и жирных альдегидов артериальных сосудов получали после извлечения липидов этанолом из гомогенизированных образцов. Гомогенизацию фрагментов сосудов осуществляли до получения однородной массы. Для этого их растирали фарфоровым пестиком в ступках с толченым стеклом, добавляя небольшими количествами этанол. Далее проводили дериватизацию анализируемых

соединений в 1,5 М растворе HCl в этаноле при температуре 60°C в течение часа. Экстракцию полученных дериватов из реакционной смеси осуществляли с помощью гексана. Затем проводился анализ различных ЖА и ЖК, которые присутствовали в гексановых экстрактах в виде диэтилацеталей и этиловых эфиров соответственно. Для этого использовался метод газожидкостной хроматографии.

Для получения хроматограмм использовались газовые хроматографы ГХ–1000, ЦВЕТ–800 (Россия). Регистрация анализируемых соединений проводилась при помощи пламенно-ионизационного детектора, а их разделение осуществлялось с использованием капиллярной колонки длиной 60 м и внутренним диаметром 0,56 мм с силиконовой неподвижной фазой SE-30 (толщина пленки сорбента 0,25 мкм). При этом на первом этапе в течение 30 мин разделение осуществлялось в изотермическом режиме при температуре термостата колонок 150°C. Далее температура в несколько ступеней (со скоростью нагрева 2 и 4 град/мин) поднималась до 260°C.

В качестве газа-носителя использовался азот, расход которого при хроматографическом анализе составлял 60 см³/мин. Ввод пробы осуществлялся с делением потока газа-носителя (коэффициент деления 1:12) при температуре инжектора 280°C. Температура детектора составляла 290°C.

Идентификация этиловых эфиров жирных кислот и диэтилацеталей жирных альдегидов осуществлялась по времени их удерживания в хроматографической колонке, а также при помощи метода хромато-масс-спектрометрии. Для этого в работе использовался газовый хроматограф / масс-спектрометр Thermo Scientific DSQ II (США), оснащенный аналогичной хроматографической капиллярной колонкой. Были идентифицированы диэтилацеталь всех трех присутствующих в организме жирных альдегидов, диэтилацеталь гексадецилового альдегида (C_{16:0}), диэтилацеталь октадецилового альдегида (C_{18:0}) и диэтилацеталь октадеценового альдегида (C_{18:1}). Также были идентифицированы этиловые эфиры жирных кислот, наиболее полно отражающих жирнокислотный состав (C_{12:0}-C_{22:6}).

Изменение содержания ПФЛ оценивалось по доле жирных альдегидов в общей сумме жирных альдегидов и жирных кислот. Проводился также анализ состава жирных кислот, при котором определялось процентное содержание отдельных жирных кислот в их общей сумме. Более подробно процесс хроматографического анализа описан в статье [15].

Полученные значения представлены с использованием медианы (Me) и интерквартильного размаха в формате Me [LQ;UQ], где LQ – нижний квартиль, UQ – верхний квартиль медианы. Оценка значимости различий между двумя связанными выборками проводилась с использованием критерия Уилкоксона. Различия считались достоверными при $p < 0,05$ [16].

Результаты и их обсуждения. В атеросклеротических брюшных аортах в сравнении с интактными общими сонными артериями отмечается более высокая доля жирных альдегидов. Так, в сонных артериях доля жирных альдегидов составляет 0,22 [0,13; 0,55]% от общей суммы жирных кислот и жирных альдегидов, в то время как в брюшных аортах эта величина – 0,84 [0,56; 0,96]% ($p < 0,05$). Учитывая, что увеличение доли жирных альдегидов отражает рост содержания ПФЛ по отношению к другим липидам, содержащим жирные кислоты, можно говорить о более высоком содержании ПФЛ в атеросклеротических артериях в сравнении с интактными артериальными сосудами. При этом более высокое содержание ПФЛ в атеросклеротиче-

ских аортах отмечается на фоне характерного для атеросклероза роста содержания эфиров холестерина и триглицеридов в артериальной стенке [2; 17; 18].

Повышенное содержание ПФЛ в брюшной аорте может способствовать атерогенезу благодаря тому, что они принимают наиболее активное участие в реакциях с АФК. Образующиеся при этом продукты окислительной деструкции ПФЛ могут влиять на функциональную активность и жизнеспособность клеток, в том числе оказывая влияние на физические свойства их клеточных мембран. Приводятся данные, что взаимодействие ЖА плазмалогенных фосфолипидов с активными формами хлора, такими как гипохлорит, образующимися под действием миелопероксидазы, приводит к формированию их хлорсодержащих производных, например, хлорсодержащих свободных ЖА, которые могут принимать участие в воспалительных реакциях и являться проатерогенными молекулами [4; 12].

В качестве наиболее вероятной причины роста ПФЛ в мембранах клеток атеросклеротических артерий может выступать тканевая гипоксия, возникающая в артериальной стенке при пролиферации интимы, а также формировании бляшки вследствие снижения эффективности диффузии кислорода. Развитию гипоксии также может содействовать высокое гидродинамическое давление крови на стенку сосуда, способное вызывать снижение ее кровоснабжения через *vasa vasorum* [19–21]. При этом, главным образом, в результате повышения образования и понижения окисления лактата в тканях наблюдается снижение pH [22]. Существуют данные, что гипоксия миокарда, вызванная сокращением коронарного кровотока до 20% от нормального, приводит к снижению pH его ишемизированных участков до величины 6,94 [23]. Формирование дефицита кислорода в артериальной стенке и развивающийся в этих условиях ацидоз стимулируют переход этого элемента в активную ионизированную форму [24]. Увеличение активной фракции кальция, в свою очередь, вызовет рост активности кальций-зависимых фосфолипаз и в первую очередь фосфолипазы A_2 (ФЛ A_2) с последующим ростом гидролиза мембранных ДАФЛ, сопровождающимся образованием лизофосфолипидов и СЖК. Согласно некоторым данным при острой ишемии миокарда в межклеточной жидкости может происходить двукратное увеличение лизофосфатидилхолина [25]. Значительный рост содержания лизофосфатидилхолина указывает на преимущественное возрастание активности кальций-зависимой секреторной ФЛ A_2 , присутствующей в межклеточной среде и гидролизующей ДАФЛ наружного монослоя клеточных мембран, в котором находится основное количество мембранного фатидилхолина. При этом показано [26], что рост активности этих фосфолипаз ассоциирован с риском развития осложнений атеросклероза.

В отличие от диацилглицерофосфолипидов ПФЛ являются субстратом специфической кальций-независимой плазмалогенной ФЛ A_2 [27–28]. Следовательно, рост активной фракции кальция и повышение активности фосфолипаз, гидролизующих ДАФЛ, приведет к снижению в мембранах относительного содержания диацильных фосфолипидов в сравнении с плазмалогенными. Таким образом, повышение относительного содержания ПФЛ в брюшной аорте, наиболее вероятно, является следствием роста в условиях дефицита кислорода активности ферментов, гидролизующих ДАФЛ. В подтверждение этой точки зрения можно привести данные [29] о повышении активности ФЛ A_2 в пораженных атеросклерозом областях артерий, а также об аккумуляции СЖК вследствие увеличения активности кальций-зависи-

мых фосфолипаз при ишемии и ацидозе [30]. Кроме того, в атеросклеротических артериях отмечается увеличение содержания сфингомиелина (СМ) [17; 31–32], подобный рост также происходит в мембранах гладкомышечных клеток аорты при моделировании атеросклероза [33]. Как и в случае с ПФЛ, в распаде молекул СМ принимают участие не кальций-зависимые ФЛ А₂, а, главным образом, зависящие от присутствия ионов магния и имеющие оптимум активности при нормальном рН крови сфингомиелиназы [34]. Следовательно, повышенное содержание СМ в атеросклеротической аорте также может быть связано с увеличенным гидролизом ДАФЛ. Кроме того, стоит заметить, что рост содержания ПФЛ в атеросклеротических сосудах, а также увеличение их относительного содержания в мембранах эритроцитов у пациентов с ИБС и атеросклерозом [15], по-видимому, происходит аналогичным образом.

Следует также сказать, что повышение в стенке атеросклеротической артерии активности кальций-зависимых фосфолипаз и вызванное этим увеличение содержания лизофосфолипидов и СЖК в клетках и межклеточной жидкости должно стимулировать гибель претерпевших липидную трансформацию клеток артерий и тем самым способствовать формированию ядра внеклеточных липидных отложений атеросклеротической бляшки. При этом есть сведения [35], что клетки, накопившие много жировых вакуолей, особенно чувствительны к детергентному действию СЖК.

В предыдущей опубликованной работе [36] приводятся данные, что в организме пациентов с выраженным множественным атеросклерозом по сравнению с пациентами с существенно меньшими проявлениями атеросклероза отмечается системное изменение состава ЖК артерий, затрагивающее как неповрежденные, так и атеросклеротические сосуды. При этом результаты показывают, что жирнокислотный состав интактных общих сонных артерий и брюшных аорт с атеросклеротическими бляшками, извлеченных из одних и тех же тел, имеет высокую степень сходства, несмотря на характерное для атеросклеротических артерий [17] значительное повышение содержания свободного и этерифицированного холестерина. Тем не менее установлены достоверные различия, касающиеся содержания арахидоновой (C_{20:4}) кислоты. Доля этой полиненасыщенной жирной кислоты (ПНЖК) в стенках брюшных аорт независимо от величины атеросклеротического поражения последних достоверно выше, чем в соответствующих им по телам фрагментах интактных сонных артерий (0,55 [0,47; 1,29]% против 0,32 [0,20; 0,51]%, $p < 0,05$). В брюшных аортах в сравнении с общими сонными артериями также присутствует тенденция к росту долей полиненасыщенной эйкозатриеновой (C_{20:3}) кислоты и полиненасыщенной докозагексаеновой (C_{22:6}) кислоты. В целом сумма арахидоновой (C_{20:4}), эйкозатриеновой (C_{20:3}) и докозагексаеновой (C_{22:6}) кислот в брюшных аортах составляет 1,01 [0,84; 1,83]% от общей суммы ЖК, в то время как в общих сонных артериях этот показатель равняется 0,73 [0,40; 0,85]% ($p < 0,05$). Накопление подобных высоконенасыщенных жирных кислот в стенках артерий с атеросклерозом будет способствовать более интенсивному протеканию процессов перекисного окисления липидов (ПОЛ) в этих сосудах, а следовательно, учитывая атерогенный характер продуктов ПОЛ, и развитие атерогенеза. Это обусловлено тем, что чем больше в углеводородной цепи жирной кислоты двойных связей, тем активнее она вступает в реакции со свободными радикалами [37–39].

Повышенное содержание ЖА и ПНЖК с большим числом двойных связей в стенке атеросклеротической брюшной аорты может указывать на аккумуляцию в ней фосфатидилэтаноламина (ФЭ) и особенно плазмалогенной формы этого фосфолипида. Показано [4], что животный ФЭ содержит высокие доли арахидоновой ($C_{20:4}$) и докозагексаеновой ($C_{22:6}$) кислот, при этом подавляющая часть ПФЛ в организме представлена плазмалогенной формой ФЭ [40]. Фосфатидилэтаноламин в диацильной и особенно плазмалогенной форме, способствуя образованию в мембране локальных участков гексагональной фазы, может оказывать дестабилизирующее действие на липидный бислой [14; 41–44]. Показано, что он играет важную роль в изменении состояния сарколеммы кардиомиоцитов при ишемии миокарда. Повышение уровня цитозольного кальция и снижение уровня АТФ приводит к перемещению ФЭ с внутреннего на внешний монослой мембран кардиомиоцитов и эндотелиальных клеток [45–47]. Существующие данные говорят, о том, что этот процесс предшествует потере целостности сарколеммы. При этом длительный период ишемии, вызывая неконтролируемое трансмембранное перемещение ФЭ, является одним из важных факторов дестабилизации липидного бислоя мембраны сарколеммы и приводит к ее необратимому повреждению [45]. Следовательно, повышенное содержание ПФЛ в артериальном сосуде также может способствовать развитию атеросклероза, особенно в ишемический период, оказывая непосредственное влияние на физические свойства липидного бислоя клеточных мембран.

Заключение

В брюшных аортах с атеросклерозом различной степени тяжести в сравнении с соответствующими им по постмортальному материалу неповрежденными общими сонными артериями отмечается повышенное содержание плазмалогенных фосфолипидов по отношению к другим содержащим жирные кислоты липидам. Об этом свидетельствует более высокая доля жирных альдегидов в общей сумме жирных кислот и жирных альдегидов этих сосудов. Повышенное содержание ПФЛ в брюшной аорте может способствовать развитию атеросклероза, так как они принимают крайне активное участие в реакциях свободнорадикального окисления липидов. Образующиеся при этом продукты окислительной деструкции ПФЛ могут обладать провоспалительной и проатерогенной активностью. Эти фосфолипиды также могут стимулировать атерогенез, оказывая непосредственное влияние на физические свойства двойного липидного слоя мембран артериальных клеток.

Следует также отметить, что состав жирных кислот атеросклеротических брюшных аорт и интактных общих сонных артерий, извлеченных из одних и тех же тел, имеет очень высокую степень сходства, несмотря на присущий атеросклерозу рост содержания холестерина и его соединений с жирными кислотами в артериальной стенке. Тем не менее проведенный анализ состава ЖК показал в стенках атеросклеротических брюшных аорт повышенную долю арахидоновой ($C_{20:4}$) ПНЖК, а также тенденцию к росту содержания полиненасыщенных эйкозатриеновой ($C_{20:4}$) и докозагексаеновой ($C_{20:4}$) кислот (сумма этих ПНЖК достоверно отличалась). Данные ПНЖК содержат большое количество двойных связей в углеводородной цепи, благодаря чему принимают активное участие в процессах свободнорадикального окисления липидов с образованием проатерогенных соединений.

В целом можно сделать вывод о меньшей устойчивости липидов атеросклеротических артериальных сосудов к действию свободных радикалов в сравнении с липидами интактных артерий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Attie, A. D.** Atherosclerosis modified / A. D. Attie // *J. Circ. Res.* – 2001. – Vol. 89, № 2. – P. 102–104.
2. **Guyton, J. R.** Development of the atherosclerotic core region. Chemical and ultrastructural analysis of microdissected atherosclerotic lesions from human aorta / J. R. Guyton, K. F. Klemp // *Arterioscler. Thromb.* – 1994. – Vol. 14, № 8. – P. 1305–1314.
3. The genesis of atherosclerosis and risk factors: a review / T. J. Tegos [et al.] // *Angiology.* – 2001. – Vol. 52, № 2. – P. 89–98.
4. **Braverman, N. E.** Functions of plasmalogen lipids in health and disease / N. E. Braverman, A. B. Moser // *Biochim. Biophys. Acta.* – 2012. – Vol. 1822, № 9. – P. 1442–1452.
5. **Engelmann, B.** Plasmalogens: targets for oxidants and major lipophilic antioxidants / B. Engelmann // *Biochem. Soc. Trans.* – 2004. – Vol. 32, № Pt 1. – P. 147–150.
6. **Farooqui, A. A.** Membrane phospholipid alterations in Alzheimer's disease: deficiency of ethanolamine plasmalogens / A. A. Farooqui, S. I. Rapoport, L. A. Horrocks // *J. Neurochem. Res.* – 1997. – Vol. 22, № 4. – P. 523–527.
7. **Khan, M.** Plasmalogen deficiency in cerebral adrenoleukodystrophy and its modulation by lovastatin / M. Khan, J. Singh, I. Singh // *J. Neurochem.* – 2008. – Vol. 106, № 4. – P. 1766–1779.
8. **Hoffman-Kuczynski, B.** Studies of myo-inositol and plasmalogen metabolism in rat brain / B. Hoffman-Kuczynski, N.V. Reo // *Neurochem. Res.* – 2004. – Vol. 29, № 4. – P. 843–855.
9. Plasmalogens as endogenous antioxidants: somatic cell mutants reveal the importance of the vinyl ether / R. A. Zoeller [et al.] // *Biochem. J.* – 1999. – Vol. 338, № Pt 3. – P. 769–776.
10. Dramatic increase of alpha-hydroxyaldehydes derived from plasmalogens in the aged human brain / M. Weisser [et al.] // *Chem. Phys. Lipids.* – 1997. – Vol. 90, № 1–2. – P. 135–142.
11. **Foglia, T. A.** Oxidation of 1-O-(alk-1-enyl)-2,3-di-O-acylglycerols: models for plasmalogen oxidation / T. A. Foglia, E. Nungesser, W. N. Marmer // *Lipids.* – 1988. – Vol. 23, № 5. – P. 430–434.
12. Identification of α -chloro fatty aldehydes and unsaturated lysophosphatidylcholine molecular species in human atherosclerotic lesions / A. K. Thukkani [et al.] // *Circulation.* – 2003. – Vol. 108, № 25. – P. 3128–3133.
13. Influence of plasmalogen deficiency on membrane fluidity of human skin fibroblasts: a fluorescence anisotropy study / A. Hermetter [et al.] // *Biochim. Biophys. Acta.* – 1989. – Vol. 978, № 1. – P. 151–157.
14. **Rog, T.** The biophysical properties of ethanolamine plasmalogens revealed by atomistic molecular dynamics simulations / T. Rog, A. Koivuniemi // *Biochim. Biophys. Acta.* – 2016. – Vol. 1858, № 1. – P. 97–103.
15. **Осипенко, А. Н.** Плазмалогенные фосфолипиды при гипоксии миокарда и экспериментальной гипоксии / А. Н. Осипенко // *Атеросклероз и Дислипидемии.* – 2015. – № 1(18). – С. 30–40.
16. **Гланц, С.** Медико-биологическая статистика : пер. с англ. / С. Гланц. – М. : Практика, 1998. – 459 с.
17. **Katz, S. S.** Physical chemistry of the lipids of human atherosclerotic lesions. Demonstration of a lesion intermediate between fatty streaks and advanced plaques / S. S. Katz, G. G. Shipley, D. M. Small // *Clin. Invest.* – 1976. – Vol. 58, № 1. – P. 200–211..
18. Lipogenesis in arterial wall and vascular smooth muscular cells: regulation and abnormalities in insulin-resistance / N. Hamlat [et al.] // *Cardiovasc. Diabetol.* – 2009. – Vol. 8. – 64.
19. **Heistad, D. D.** Hyperemia of the aortic wall in atherosclerotic monkeys / D. D. Heistad, M. L. Armstrong, M. L. Marcus // *Circ. Res.* – 1981. – Vol. 48, № 5. – P. 669–675.
20. **Järvillehto, M.** Vasa vasorum hypoxia: initiation of atherosclerosis / M. Järvillehto, P. Tuohimaa // *Medical Hypotheses.* – 2009. – Vol. 73, № 1. – P. 40–41.

21. **Xu, J.** Vasa vasorum in atherosclerosis and clinical significance / J. Xu, X. Lu, G-P. Shi // *Int. J. Mol. Sci.* – 2015. – Vol. 16, № 5. – P. 11574–11608.
22. **You, S.** Accelerated RBC senescence as a novel pathologic mechanism of blood stasis syndrome in traditional East Asian medicine / S. You, B. Park, M.S. Lee // *Am. J. Transl. Res.* – 2015. – Vol. 7, № 3. – P. 422–429.
23. Transmural pH gradient in canine myocardial ischemia / R.M. Watson [et al.] // *Am. J. Physiol.* – 1984. – Vol. 246, № 2 Pt 2. – P. H232–H238.
24. Биохимия человека : в 2 т. : пер. с англ. / Р. Марри [и др.]. – М. : Мир, 1993. – Т. 2. – 414 с.
25. Lysophosphoglycerides in ischemic myocardium effluents and potentiation of their arrhythmogenic effects / D. W. Snyder [et al.] // *Am J Physiol.* – 1981. – Vol. 241, № 5. – P. H700–H707.
26. **Mallat, Z.** Lipoprotein-associated and secreted phospholipases A2 in cardiovascular disease: roles as biological effectors and biomarkers / Z. Mallat, G. Lambeau, A. Tedgui // *Circulation.* – 2010. – Vol. 122, № 21. – P. 2183–2200.
27. **Farooqui, A. A.** Plasmalogens, phospholipases A2 and signal transduction / A. A. Farooqui, H. C. Yang, L. A. Horrocks // *Brain Res. Rev.* – 1995. – Vol. 21, № 2. – P. 152–161.
28. **Yang, H. C.** Plasmalogen-selective phospholipase A2 and its role in signal transduction / H. C. Yang, A. A. Farooqui, L. A. Horrocks // *J. Lipid Mediat. Cell Signal.* – 1996. – Vol. 14, № 1–3. – P. 9–13.
29. **Братусь, В. В.** Воспаление и проатерогенные нарушения обмена липопротеинов: взаимосвязь и причинно-следственная зависимость / В. В. Братусь, Т. В. Талаева // *Украинский ревматологический журнал.* – 2002. – Т. 7, № 1. – С. 13–22.
30. **Зенков, Н. К.** Окислительный стресс: Биохимический и патофизиологический аспекты / Н. К. Зенков, В. З. Ланкин, Е. Б. Меньшикова. – М. : МАИК “Наука/Интерпериодика”, 2001. – 343 с.
31. **Мясников, А. Л.** Атеросклероз (происхождение, клинические формы, лечение) / А. Л. Мясников. – М. : Медгиз, 1960. – 444 с.
32. Selective reduction in the sphingomyelin content of atherogenic lipoproteins inhibits their retention in murine aortas and the subsequent development of atherosclerosis / Y. Fan [et al.] // *Arterioscler. Thromb. Vasc. Biol.* – 2010. – Vol. 30, № 11. – P. 2114–2120.
33. **Chen, M.** Atherosclerosis alters the composition, structure and function of arterial smooth muscle cell plasma membranes / M. Chen, R. P. Mason, T. N. Tulenko // *Biochim. Biophys. Acta.* – 1995. – Vol. 1272, № 2. – P. 101–112.
34. **Goñi, F. M.** Sphingomyelinases: enzymology and membrane activity / F. M. Goñi, A. Alonso // *FEBS Lett.* – 2002. – Vol. 531, № 1. – P. 38–46.
35. **Зайчик, А. Ш.** Основы общей патологии. Часть 1. Основы общей патофизиологии / А. Ш. Зайчик, Л. П. Чурилов. – СПб. : ЭЛБИ, 1999. – 624 с.
36. **Osipenko, A. N.** Fatty acid metabolism disorder as a factor in atherogenesis / A. N. Osipenko // *Rom. J. Diabetes Nutr. Metab. Dis.* – 2018. – Vol. 25, № 3. – P. 243–252.
37. **Болдырев, А. А.** Биомембранология : учебное пособие / А. А. Болдырев, Е. И. Кяйвяряйнен, В. А. Илюха. – Петрозаводск : Изд-во Кар НЦ РАН, 2006. – 226 с.
38. **Климов, А. Н.** Липиды, липопротеиды и атеросклероз / А. Н. Климов, Н. Г. Никольчева. – СПб. : Питер Пресс, 1995. – 304 с.
39. Свободнорадикальное окисление и старение / В. Х. Хавинсон [и др.]. – СПб. : Наука, 2003. – 327 с.
40. Homeostasis of phospholipids – The level of phosphatidylethanolamine tightly adapts to changes in ethanolamine plasmalogens / F. Dorninger [et al.] // *Biochim. Biophys. Acta.* – 2015. – Vol. 1851, № 2. – P. 117–128.
41. Полиморфные превращения неозвученных водных дисперсий фосфатидилэтаноламинов с простой и сложной эфирной связью / В. В. Чупин [и др.] // *Биоорг. химия.* – 1981. – Т. 7, № 5. – С. 773–778.
42. **Furt, F.** Importance of lipid metabolism for intracellular and mitochondrial membrane fusion/fission processes / F. Furt, P. Moreau // *Int. J. Biochem. Cell. Biol.* – 2009. – Vol. 41, № 10. – P. 1828–1836.

43. **Glaser, P. E.** Plasmeneylethanolamine facilitates rapid membrane fusion: a stopped-flow kinetic investigation correlating the propensity of a major plasma membrane constituent to adopt an HII phase with its ability to promote membrane fusion / P. E. Glaser, R. W. Gross // *Biochemistry*. – 1994. – Vol. 33, № 19. – P. 5805–5812.
44. **Gibellini, F.** The Kennedy pathway-De novo synthesis of phosphatidylethanolamine and phosphatidylcholine / F. Gibellini, T. K. Smith // *IUBMB Life*. – 2010. – Vol. 62, № 6. – P. 414–428.
45. Loss of asymmetric distribution of sarcolemmal phosphatidylethanolamine during simulated ischemia in the isolated neonatal rat cardiomyocyte / R. J. Musters [et al.] // *Circ. Res.* – 1993. – Vol. 73, № 3. – P. 514–523.
46. Potent cardioprotection from ischemia-reperfusion injury by a 2-domain fusion protein comprising Annexin V and Kunitz protease inhibitor / C. H. Yeh [et al.] // *J. Thromb. Haemost.* – 2013. – Vol. 11, № 8. – P. 1454–1463.
47. Redistribution of phosphatidylethanolamine and phosphatidylserine precedes reperfusion-induced apoptosis / N. Maulik [et al.] // *Am. J. Physiol.* – 1998. – Vol. 274, № 1 Pt 2. – P. H242–H248.

Поступила в редакцию 12.06.2020 г.

Контакты: alosipenko@yandex.ru (Осипенко Александр Николаевич)

Osipenko A. PLASMALOGENS IN INTACT AND ATHEROSCLEROTIC ARTERIES.

The article presents experimental data indicating the increased content of plasmalogens in the walls of atherosclerotic arteries. This increase probably contributes to atherogenesis due to the fact that plasmalogens take an extremely active part in reactions with free radicals. The resulting products of oxidative degradation of plasmalogens may have a proatherogenic effect. In addition, there is an increase in the proportion of some polyunsaturated fatty acids in the fatty acid composition of arteries with atherosclerosis, which may also cause more active free-radical lipid oxidation and atherogenesis.

Keywords: atherosclerosis, plasmalogens, fatty acids, free radicals, hypoxia.

УДК 598.2:591.5:582.475:630(476.5)

СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ ОРНИТОКОМПЛЕКСОВ ЕЛОВЫХ ЛЕСОВ БЕЛОРУССКОГО ПООЗЕРЬЯ

С. А. Дорюфеев

кандидат биологических наук, доцент

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

Статья посвящена выявлению эколого-географических особенностей лесной орнитофауны (видовой структуры и пространственного распределения птиц, закономерностей формирования орнитокомплексов) в соответствии с типологическими группами еловых насаждений на территории Белорусского Поозерья.

Ключевые слова: гнездование, орнитокомплекс, еловые леса, плотность населения, типологическая группа.

Введение

В структуре лесного фонда северо-восточной Беларуси еловые леса занимают более 17% лесопокрытой площади [1]. Кроме того, ель повсеместно встречается в виде мозаичных вкраплений среди других насаждений, что указывает на широкое распространение этой породы в прошлом, когда еловые леса занимали большие площади и безраздельно господствовали. Экологическая связь с лиственными породами, под пологом которых формируются еловые насаждения, отражает процесс смены елью временных насаждений.

Преобладают в регионе южно-таежные еловые леса с подлеском из жимолости и можжевельника, подростом из ели, серой ольхи и хорошо развитым кустарничково-моховым покровом, произрастающие на песчаных и супесчаных почвах. На более богатых почвах произрастают широколиственно-еловые (кислично-зеленомошные) леса с богатым подлеском и примесью неморальных видов в покрове [2].

Густые остроконечные кроны и радиальное симметричное ветвление являются важными факторами, привлекающими на гнездование птиц, 47 видов из которых в регионе гнездится на ели. В более разреженных насаждениях большинство гнезд располагается в подлеске и подросте.

Цель исследования – установить структуру населения, закономерности пространственного распределения птиц и формирования орнитокомплексов в еловых лесах северо-восточной Беларуси.

Материал и методы исследования

Исследования пространственного распределения дендрофильных птиц и эколого-географической дифференциации орнитоценозов еловых лесов проводились в период с 2002 по 2019 г. на территории 12 районов Витебской области. Учетные работы осуществлялись как стационарно, так и экспедиционно по поймам рек Дрисса, Ловать, Оболь, Овсянка, Свольна, озерно-лесных ландшафтах верховий р. Дрисса. Для учетов численности птиц в еловых насаждениях различной типо-

логии, структуры и возраста применяли маршрутный и точечный методы, а также картирование жилых гнезд на учетных площадках в 1–3 км² [3]. Численность определяли в гнездовой период в каждом из биотопов с 4-5-кратной повторностью во время максимально активных вокализаций птиц с 5 до 9 часов утра. Вследствие значительной дробности еловых насаждений близкие по условиям произрастания и внутренней структуре типы, имеющие значительное сходство орнитокомплексов, были объединены в типологические группы.

Основная часть

Еловые леса сильнее сосновых трансформируют метеорологические факторы и создают под пологом совершенно иные условия обитания для населяющих их видов птиц [4]. Весной снег в ельниках тает медленнее и лежит на 8–12 дней дольше, чем в сосняках и мелколиственных насаждениях. С этим связано более позднее начало гнездования птиц в ельниках по сравнению с насаждениями из других пород. Разность в сроках откладки первого яйца у лесного конька, пеночки-трещотки, зяблика, певчего дрозда, зарянки в ельниках по сравнению с сосновыми и лиственными лесами может достигать 9–15 дней. Запоздывание гнездования птиц в еловых насаждениях обусловлено особенностями их микроклимата и, прежде всего, сроками наступления благоприятных температур, оттаивания и просыхания почвы.

На распределение птиц в еловых лесах прямое и косвенное влияние оказывает движение воздушных масс. Лес окончательно гасит скорость ветра с подветренной стороны на расстоянии, в 20 раз превышающем его высоту [5]. Это обстоятельство вместе с комплексом других факторов имеет немаловажное значение в горизонтальном распределении гнезд и мест кормежки дендрофильных птиц. Ветер оказывает механическое воздействие на гнезда, производит охлаждение их и окружающей обстановки, участвует в формировании крон. Поэтому подавляющее большинство видов в еловых лесах гнездится на земле, в подросте и подлеске.

При сильных ветрах в еловых древостоях наблюдается выворачивание деревьев, имеющее массовый характер в кисличниках и черничниках, произрастающих на тяжелых суглинках. Вывороченные ветром деревья – характерная особенность микро рельефа ельников, объясняющаяся поверхностной корневой системой ели.

Выворотни имеют высокую заселенность птицами. По нашим данным, в них гнездятся: белобровик, черный дрозд, зарянка, крапивник, серая и малая мухоловка, певчий дрозд, филин. В выворотнях устраивают порхалища и собирают зимой гастролиты рябчики и глухари.

Для орнитофауны еловых лесов характерен ряд общих закономерностей и специфических черт смены орнитокомплексов в сукцессионном ряду насаждений [6]. С увеличением возраста и усложнением структуры еловых насаждений число гнездящихся видов птиц изменяется с 8 на однолетних до 29 на пятилетних и 44 на пятнадцати-двадцатилетних зарастающих вырубках, а их суммарная плотность составляет 0,98, 1,65 и 3,15 пар/га соответственно.

Всего на территории региона произрастает 11 типов еловых лесов различных возрастных категорий, в 8 наиболее распространенных из них были проведены учеты численности. За годы исследований зарегистрировано 60 гнездящихся видов птиц со средней плотностью 5,32 пары на 1 га. Наибольшая типологическая разница в числе гнездящихся видов характерна для кустарничково-долгомошных

ельников (14), мшистых (12), а наименьшая – для кислично-снытевых (1). Папоротниковый и снытевый ельники, как хвойные насаждения со сложной структурой, имеют наибольшие показатели числа гнездящихся видов и их плотности (табл.).

Среди вариантов одного типа еловых насаждений минимальные показатели плотности приходится на 30–40-летние ельники со слабо развитой ярусностью и подлеском, высокой сомкнутостью крон (0,9–1). С увеличением возраста насаждений и улучшением освещенности в результате самоизреживания древостоев происходит активное развитие напочвенного покрова и подлеска. Самая высокая плотность гнездящихся птиц отмечена в спелых ельниках (60–80 лет) с хорошо выраженной ярусностью, сомкнутостью крон 0,4–0,5 и имеющих в значительном количестве дуллистые лиственные деревья (16,0–18,0 пар/га) [7].

В структуре орнитокомплексов основных типологических групп ельников доля многочисленных и обычных видов составляет 31,4–39,8% средней плотности гнездящихся птиц, малочисленных – 42,9–56,8%, редких – 8,8–17,3%. На первом месте по плотности во всех типах насаждений стоят зяблик и пеночка-трещотка.

Опушечный эффект в еловых лесах хорошо выражен и значительно сильнее проявляется в сложных по структуре насаждениях, слабее – в простых [5]. В краевой зоне ельника кисличного в возрасте 45–50 лет общая плотность гнездящихся птиц составляла 10,4 пар/га, тогда как в более глубоких участках – 4,56 пар/га. На краю старого ельника кисличного (Веречская дача, Городокский район) 26 июня 2006 г. было учтено 19,5 пар/га. В старой осине были обнаружены сразу три жилых дупла – пестрого дятла, вертишейки и скворца.

Средняя плотность птиц в еловых насаждениях в 1,5 раза выше, чем в сосняках, что указывает на более благоприятные условия обитания [8].

Экологический анализ орнитофауны еловых лесов показывает, что во всех восьми типах насаждений гнездится 26 видов птиц, пространственное распределение которых тесно связано с произрастанием ели (чиж, московка, клёст-еловик, малая мухоловка, кедровка, рябчик, желтоголовый королек и др.). Зоогеографическая группа таежных видов включает небольшое число представителей – зеленую пеночку, выюрка, длиннохвостую неясыть, что объясняется близостью границ их ареалов.

Структура населения и численность птиц, гнездящихся в еловых насаждениях (пар на 1 га)

Типологические группы Виды птиц	Мшистые			Кислично-снытевые		Папоротниковые	Кустарничково-долгомошные	
	брусничный	зеленомошный	орляковый	кисличный	снытевый		черничный	долгомошный
Рябчик	0,01	0,01	+	0,01	0,02	0,01	0,02	+
Клинтух	–	+	–	+	+	–	0,01	–
Вяхирь	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,01	0,02	–
Обыкновенная горлица	+	+	+	0,01	+	+	0,01	–
Черныш	–	–	–	–	–	0,01	–	0,01

Продолжение таблицы

Типологические группы Виды птиц	Мшистые			Кислично-снытевые		Папоротниковые	Кустарничково-долгомошные	
	брусничный	зеленомошный	орляковый	кисличный	снытевый		черничный	долгомошный
Вальдшнеп	–	–	–	0,02	0,03	0,02	0,01	–
Тетеревятник	+	+	–	–	+	+	+	+
Перепелятник	–	+	+	+	0,01	+	+	+
Обыкновенный канюк	–	+	–	+	+	+	+	–
Малый подорлик	–	–	–	+	+	–	+	–
Черный коршун	+	+	–	+	–	–	+	–
Осоед	–	–	–	+	+	–	+	–
Филин	+	–	–	–	+	–	–	+
Мохноногий сыч	+	+	–	0,01	+	+	0,01	+
Воробьиный сычик	+	+	–	+	+	–	0,01	+
Серая неясыть	+	+	–	+	+	+	+	–
Длиннохвостая неясыть	–	–	–	–	–	+	–	+
Черный дятел	+	0,01	–	0,02	+	+	+	+
Пестрый дятел	0,02	0,04	0,03	0,04	0,06	0,06	0,04	0,02
Белоспинный дятел	–	–	–	+	+	+	–	–
Малый дятел	–	0,01	–	+	0,02	0,01	–	–
Зеленый дятел	–	+	–	–	+	+	–	–
Седой дятел	–	+	+	–	+	+	+	–
Трехпалый дятел	+	0,01	+	0,01	–	–	+	+
Вертишейка	–	0,02	0,03	+	+	0,01	0,01	–
Ворон	+	+	–	+	–	–	+	+
Сойка	0,01	0,02	0,03	0,02	0,04	0,02	0,03	–
Кедровка	+	+	+	0,02	0,01	0,01	0,01	+
Чиж	0,10	0,10	0,12	0,15	0,09	0,12	0,09	0,02
Снегирь	0,02	0,04	0,03	0,03	0,06	0,02	0,03	0,02
Клёст-еловик	0,02	0,02	0,01	0,02	0,03	0,01	0,03	0,03
Зяблик	0,70	0,95	1,17	1,06	1,24	1,02	0,98	0,60
Вьюрок	–	+	–	+	+	–	–	–
Лесной конек	0,38	0,30	0,27	0,24	0,18	0,16	0,28	0,20
Обыкновенная пищуха	0,06	0,09	0,09	0,10	0,12	0,10	0,11	0,05
Поползень	0,06	0,06	0,07	0,08	0,09	0,08	0,07	0,04
Большая синица	0,08	0,10	0,09	0,10	0,12	0,12	0,12	0,05
Московка	0,10	0,08	0,09	0,08	0,05	0,04	0,07	0,03
Хохлатая синица	0,06	0,03	0,03	0,04	0,04	0,01	0,05	0,02
Буроголовая гаичка	0,10	0,12	0,18	0,17	0,24	0,23	0,22	0,15

Окончание таблицы

Типологические группы Виды птиц	Мшистые			Кислично-снытевые		Папоротниковые	Кустарничково-долгомошные	
	брусничный	зеленомошный	орляковый	кисличный	снытевый		черничный	долгомошный
Длиннохвостая синица	0,02	+	–	0,04	0,08	–	0,03	+
Серая мухоловка	0,22	0,15	0,18	0,24	0,21	0,16	0,19	0,16
Мухоловка-пеструшка	0,04	0,08	0,09	0,10	0,21	0,12	0,11	0,08
Малая мухоловка	0,02	0,05	0,06	0,08	0,12	0,10	0,08	0,06
Желтоголовый королек	0,14	0,18	0,15	0,17	0,20	0,15	0,16	0,18
Пеночка-весничка	0,22	0,25	0,23	0,31	0,49	0,34	0,21	0,30
Пеночка-трещотка	0,54	0,85	0,96	0,92	1,01	1,24	1,04	0,60
Пеночка-теньковка	0,18	0,15	0,18	0,24	0,27	0,12	0,22	0,16
Зеленая пеночка	–	–	+	+	0,01	–	0,01	–
Зеленая пересмешка	–	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,02	–
Садовая славка	–	+	0,03	0,08	0,12	0,10	0,05	–
Черноголовая славка	0,08	0,10	0,15	0,22	0,36	0,32	0,18	0,03
Деряба	0,08	0,05	0,06	0,04	0,01	–	0,05	0,04
Белобровик	0,10	0,15	0,18	0,22	0,28	0,29	0,18	0,15
Певчий дрозд	0,16	0,20	0,22	0,29	0,42	0,28	0,21	0,25
Черный дрозд	–	0,02	0,02	0,03	0,07	0,04	0,03	–
Обыкновенная горихвостка	0,08	0,10	0,06	0,10	0,12	0,08	0,06	0,05
Зарянка	0,10	0,15	0,18	0,20	0,26	0,23	0,18	0,12
Лесная завирушка	0,04	0,05	0,06	0,05	0,08	0,06	0,03	–
Крапивник	0,20	0,25	0,26	0,29	0,36	0,41	0,21	0,26
Число видов птиц	42	52	40	54	55	48	53	39
Плотность на га	3,95	4,82	5,35	5,90	7,19	6,15	5,48	3,68

Максимальное число типов еловых насаждений населяют виды птиц, характерные для смешанного и широколиственного лесов (5–8). Высокая заселенность ельников данными видами связана не только с их эвритопностью, но и с некоторым сходством во внутренней структуре и микроклимате древостоев зонального типа.

Потеря таежным орнитокомплексом своей прежней высокой физиономичности полностью связана с сокращением площади еловых лесов, омоложением современных насаждений, их разобщенностью и дробностью. Очевидно, что таежные виды на гнездовании чаще встречаются в глухих сомкнутокронных ельниках. Виды широколиственного леса, наоборот, более многочисленны в светлых разреженных насаждениях.

В типах насаждений, где подлесок и подрост развиты слабо (долгомощный и брусничный ельники), в этом ярусе гнездится наибольшее число видов (7–11), плотность которых по сравнению с насаждениями, где подрост и подлесок развиты хорошо, минимальна (3,68–3,95 пары на га).

Экологическая дифференциация птиц при распределении по местам гнездования и добычи корма значительно сильнее выражена в сложных по структуре насаждениях. Так, максимальное число видов, гнездящихся на земле и в приземном ярусе, отмечено в снытевом ельнике – 12, а минимальное – в зеленомошном – 9. В кисличном, снытевом и зеленомошном типах, имеющих значительную примесь листовенных пород, пригодных для сооружения дупел, отмечено больше всего дуплогнездников.

Разнотипность гнездовых точек у массовых видов птиц резче проявляется в более сложных ельниках. Так, зяблик и певчий дрозд, обычно гнездящиеся в подлеске и подросте на высоте 1,5–4,0 м, в чистых ельниках гнездятся на нижних ветвях старых елей (околоствольный тип) на высоте 3,0–6,0 м и на расстоянии до 2,0 м от ствола (61,0 и 43,5% гнезд соответственно). Кроме того, певчий дрозд устраивает гнезда приствольного типа на высоте 7,0–10,0 м и на сухих боковых ветвях у ствола (38,0%).

Для ельников характерна высокая заселенность птицами ветровальных деревьев, выворотней и куч валежника. Отмечена явная приуроченность гнезд пеночки-трещотки к скоплениям опавших сучьев, а крапивника – к кучам валежника (61,0%). Гнезда крапивника отмечены и на высоте до 2 м – за отставшей корой и в ветвях поваленных ветром деревьев. Серая и малая мухоловки, обычно гнездящиеся в трещинах и нишах стволов, в старых полуразрушенных дуплах синиц, в ельниках часто гнездятся в выворотнях.

Гнездовой материал по данным анализа 96 гнезд сойки, зяблика, снегиря, серой и малой мухоловок, пеночки-трещотки, певчего дрозда лесной завирушки и крапивника от 44,0 до 81,5% по весу состоит из специфических для еловых лесов видов растений (сухие ветви ели, зеленые мхи, лишайники).

В группе еловых лесов отмечено доминирование видов, которые добывают корм в подлеске и подросте, на земле либо в кронах деревьев. В гнездовом биотопе добывает корм 57 из 60 учтенных видов. Преобладают виды, в рационе которых доминирует животная пища – 49 (из них 35 – насекомоядные), смешанная – 7 видов, исключительно растительная – 4.

Питание гнездящихся в еловых лесах птиц отличается от такового в сосновых. Биотопическая приуроченность и различия в питании отдельных пар, гнездящихся в одном биотопе, также выражены отчетливо. Встречаемость узкоспециализированных форм насекомых-вредителей среди кормовых объектов у отдельных видов достигает 84,47% (желна), специфических для ельников растительных кормов – 90,63% (клёст-еловик). У большинства же видов она редко превышает 10–15%.

В приспевающих и спелых еловых насаждениях с целью их эксплуатации, а также содействия естественному возобновлению (кисличный, зеленомошный) проводятся коридорные рубки. На просеках шириной 10 м наблюдается усиленное разрастание елового подлеска, что привлекает сюда дендрофильных птиц. На таком участке ельника кисличного в возрасте 50 лет в Городокском лесничестве до реконструкции учтено 12 видов птиц, суммарная плотность которых составляла 6,9 пар/га, а через 5 лет после реконструкции – 19 видов с общей плотностью 11,5 пар/га.

Заклучение

В еловых лесах северо-восточной Беларуси отчетливо выражены специфические для данного типа насаждений условия, которые определяются внутренней структурой древостоев с присущими им орнитокомплексами, различающимися по плотности гнездящихся птиц: наиболее высокие показатели соответствуют сложным по структуре еловым насаждениям – кисличному (5,90 пар/га), папоротниковому (6,15) и снытевому (7,19) типам.

Число видов максимально для тех типов еловых насаждений, которые отличаются большой дробностью, разнообразием внутренней структуры и широким распространением (кисличный, снытевый, черничный, зеленомошный). Во всех 8 охваченных учетами типах еловых лесов из 60 отмеченных видов гнездится 26 (43,33%), из которых 9 – типично таежные. Разница в числе гнездящихся видов в пределах одной типологической группы составляет 8-10, максимальная между типами – 16 (долгомошный-снытевый).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лесной фонд [Электронный ресурс] / Витебское ГПЛХО. – Режим доступа: <https://vitebsk.mh.by/lesnoy-fond-0>. – Дата доступа: 02.06.2020.
2. **Долбик, М. С.** Ландшафтная структура орнитофауны Белоруссии / М. С. Долбик. – Минск : Наука и техника, 1974. – 312 с.
3. **Бибби, К.** Методы полевых экспедиционных исследований. Исследования и учеты птиц / К. Бибби, М. Джонс, С. Мардсен. – М. : Союз охраны птиц, 2000. – 186 с.
4. **Никифоров, М. Е.** Формирование и структура орнитофауны Беларуси / М. Е. Никифоров. – Минск : Беларус. наука, 2008. – 297 с.
5. **Корі́, Г.** Diversity and structure of avian communities in extensive lowland pine forests in relation to the distance from the forest edge / G. Kopyj // Biosystems Diversity. – 2018. – № 3. – P. 206–212.
6. **Абрамова, И. В.** Сукцессия населения птиц в ходе восстановительной смены еловых лесов в юго-западной части Беларуси / И. В. Абрамова // Журнал Белорусского государственного университета. География. Геология. – 2017. – № 2. – С. 31–39.
7. **Дорофеев, С. А.** Структура населения птиц еловых лесов Белорусского Поозерья / С. А. Дорофеев // Экологическая культура и охрана окружающей среды: II Дорофеевские чтения: матер. Междунар. науч.-практ. конф. / ВГУ имени П. М. Машерова ; отв. ред. И. М. Прищепа. – Витебск : ВГУ имени П. М. Машерова, 2016. – С. 190–192.
8. **Шемякина, О. А.** Структура населения птиц основных типов местообитаний под Псковом / О. А. Шемякина // Рус. орнитол. журн. – 2001. – № 155. – С. 694–705.

Поступила в редакцию 15.07.2020 г.

Контакты: +375 29 210-93-84 (Дорофеев Сергей Анатольевич)

Dorofeyev S. STRUCTURAL AND SPATIAL DISTRIBUTION OF ORNITHOCOMPLEXES IN SPRUCE FORESTS OF BELARUSIAN LAKELAND.

The article highlights ecological and faunistic features of forest ornithofauna (species composition, spatial distribution, ways of formation) in different types of spruce forests of the Belarusian Lakeland.

Keywords: nesting, ornithocomplex, spruce forests, density, typological group.

УДК 574.9; 58.036; 58.056; 630; 614.841.2; 614.8.01

ЛИКВИДАЦИЯ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ НА ПОЧВАХ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Е. Г. САРАСЕКО

кандидат биологических наук, доцент

Университет гражданской защиты Министерства по чрезвычайным ситуациям
Республики Беларусь

В. Ф. ТИМОШКОВ

старший преподаватель

Университет гражданской защиты Министерства по чрезвычайным ситуациям
Республики Беларусь

Е. И. ДЕГТЯРЕВА

кандидат биологических наук, доцент

Гомельский государственный медицинский университет

Фронтальное пожаротушение дает возможность не только сократить время на проведение боевого развертывания, но и усилить меры безопасности при тушении лесных пожаров (тушение с дороги), а также изменять расход объема воды из ствола, увеличивать по расстоянию линию фронта тушения лесного пожара, обеспечивать работу стволов на глубину тушения от 5 до 40 м при наличии двух спасателей-пожарных. Применение фронтального пожаротушения позволяет дополнить разделы “Способы тушения пожаров в лесах, тушение всей линии фронта” и “Приемы тушения пожаров в лесах, прокладка заградительных полос” при изложении курсантам дисциплины “Тактика проведения аварийно-спасательных работ”.

Ключевые слова: лес, лесные пожары, экономический ущерб, лесные горючие материалы, противопожарные организационно-технические мероприятия, фронтальное пожаротушение, препарат “Метафосил”.

Введение

Леса – это истощаемый, но возобновляемый природный ресурс, поэтому главная задача современности – рациональное использование и охрана лесов [1]. Динамика изменения лесного покрытия Республики Беларусь за 1994–2018 гг. представлена в таблице 1 [2]. В 2001 г. общая лесная площадь Беларуси занимала 9247,5 тыс. га. Покрыто лесами было 7851,1 тыс. га. При этом лесистость выросла до 37,8% [3]. По состоянию на 2010 и 2018 гг. показатель лесистости возрос до 39,0–39,8%. Естественный растительный покров нашей страны отличается разнообразием, которое обусловлено размещением территории в переходной полосе от евразийской хвойно-лесной к европейской широколиственно-лесной зоне. В составе естественной растительности Беларуси преобладают леса, которые чередуются с луговыми и водно-болотными сообществами. Леса занимают около 2/5 территории страны. Сравнительно мало крупных лесных массивов (два крупнейших – Беловежская и Налибокская пущи), но нет и безлесных районов. Наиболее лесистый район страны – Лельчицкий (62% его площади покрыто лесами), наименее лесистый – Несвижский (10%).

© Сарасеко Е. Г., 2020

© Тимошков В.Ф., 2020

© Дегтярева Е. И., 2020

Таблица 1 – Динамика изменения лесного покрытия Республики Беларусь за 1994–2018 гг.

Наименование показателя	Единица измерения	Показатель по состоянию на			
		1994 г.	2001 г.	2010 г.	2018 г.
1. Общая площадь земель лесного фонда	тыс. га	8676,1	9247,5	9416,6	9582,0
1.1 Лесные земли	тыс. га	7775,9	8275,7	8598,2	8724,1
	%	89,6	89,4	91,3	91,0
1.2 Покрытые лесом земли (всего)	тыс. га	7371,7	7850,6	8002,4	8260,9
	%	85,0	85,0	85,0	86,2
Спелые и перестойные	тыс. га	350,1	623,0	804,4	1215,4
	%	4,7	7,9	10,1	14,7
2. Лесистость	%	35,5	37,8	38,5	39,8
3. Общий запас насаждений – всего	млн. м ³	1093,2	1339,9	1566,1	1796,0
4. Общее среднее изменение запаса	млн. м ³	24,9	28,2	30,2	32,7
5. Средний запас насаждений	м ³ /га	148,0	171,0	196,0	217,0
5.1 Спелых и перестойных	м ³ /га	213,0	220,0	244,0	267,0
6. Средний возраст	лет	44	48	52	56

Самая лесистая область Республики Беларусь – Гомельская (45,1%), остальные регионы значительно уступают ей: леса занимают по 37,4% площади Минской и Витебской областей, 36% Могилевской области, 34,3% Гродненской области и 34,1% Брестской области. Самые распространенные породы деревьев в лесах Беларуси – сосна (50,2%), береза (20,8%), ель (10%), черная ольха (8,2%), дуб (3,3%), серая ольха (2,3%), осина (2,1%). Более 70% всех лесных культур существует в форме смешанных из двух и более пород [4].

На территории нашей страны лесные и торфяные пожары представляют собой неконтролируемый процесс горения, являющийся бедствием для населения, экономики и природной среды. В зависимости от того, где распространяется огонь, пожары делят на низовые, верховые и подземные. Низовой пожар распространяется по земле, охватывая нижние ярусы растительности леса. Верховые пожары возникают при длительном отсутствии осадков и высокой температуре воздуха летом. Подземные лесные пожары возникают при масштабном распространении низовых и верховых возгораний, они малозаметны, вследствие чего представляют дополнительную опасность и крайне плохо поддаются тушению. Основная причина возгораний – несоблюдение правил пожарной безопасности во время работы и отдыха. Некоторый процент возгораний приходится на разряды молнии во время грозных дождей [5]. Лесные пожары, разрушая лесные сообщества, вызывают заболачивание площадей, ветровал, бурелом, ухудшение санитарного состояния поврежденных огнем и соседних насаждений. Вследствие этого усиливаются эрозионные процессы, ухудшается гидрологический режим, снижаются водоохранные и водорегулирующие функции леса. Изменяется ход лесовозобновительных процессов, весьма часто происходит нежелательная для лесного хозяйства смена пород. Задымление атмосферы ухудшает фотосинтез, в результате чего снижается продуктивность растений, замедляется вызревание сельскохозяйственных растений. Помимо этого, дым от лесных пожаров затрудняет передвижение транспорта, ухудшает самочувствие людей. Лесные пожары вызывают дисбаланс в углеродных циклах, активизируя

выброс чрезмерного количества углерода в атмосферу [6]. А это, в свою очередь, приводит к потеплению климата, возрастанию парниковых эффектов в мировом сообществе. Опасность лесных пожаров для людей связана с наличием опасных факторов пожара. В первую очередь это высокая температура при тушении пожара, дым, снижение концентрации кислорода в воздухе и отравление токсичными продуктами горения. Наряду с указанными поражающими факторами при тушении пожаров на загрязненных радионуклидами территориях добавляется радиационный фактор [5]. Поэтому, учитывая высокую опасность радиации для человека, в решении проблемы защиты работников лесной промышленности, а значит, и сотрудников МЧС, ликвидирующих лесной пожар, от воздействия ионизирующих излучений при их работе на радиоактивно загрязненной местности важное место отводится строгому соблюдению основных принципов и норм радиационной безопасности:

- не превышать допустимые пределы доз облучения;
- исключать всякое необоснованное облучение;
- поддерживать на возможно низком уровне индивидуальные дозы облучения и число облучаемых лиц.

В связи с вышеуказанными проблемами основу современного законодательства в области охраны окружающей среды и природопользования на территории РБ составляет ряд нормативных документов, наиболее важные из которых представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Нормативные экологические документы Республики Беларусь

Конституция Республики Беларусь	Законы Республики Беларусь	Кодексы Республики Беларусь
–	“Об охране окружающей среды”; “О налоге за пользование природными ресурсами (экологический налог)”; “О государственной экологической экспертизе”; “Об особо охраняемых территориях и объектах”; “Об охране и использовании животного мира”; “Об охране атмосферного воздуха”; “О радиационной безопасности населения”	Кодекс Республики Беларусь о недрах; Кодекс Республики Беларусь о земле; Лесной кодекс Республики Беларусь

Расчет предельно допустимой продолжительности работы (T_d) в зонах с плотностью загрязнения почв цезием-137 15 Ки/км² и более для персонала специализированных подразделений проводится по формуле

$$T_d = E / H - H_0,$$

где:

E – допустимый предел годовой эффективной дозы внешнего облучения работников, отнесенных к категории “персонал” (5 мЗв/год);

H – мощность эквивалентной дозы гамма-излучения на рабочем месте, мкЗв/ч;

H_0 – мощность эквивалентной дозы от природных источников излучения в данной местности до аварии. При неизвестном значении мощности дозы оно принимается равным 0,095 мкЗв / ч.

При выполнении работ в зонах радиоактивного загрязнения необходимо учитывать все виды лучевого воздействия на работающих:

- внешнего облучения всего организма;
- контактного облучения кожных покровов;

– внутреннего облучения за счет поступления радионуклидов через органы дыхания и с продуктами питания [7].

По данным Национального статистического комитета, лесной пожар, как один из наиболее распространенных опасных техногенно-природных процессов, наносит довольно значительный экономический ущерб нашей стране [8]. При этом прямой ущерб лесному хозяйству выражается в повреждении деревьев, живого напочвенного покрова, лесной фауны, почвы, материальных ценностей. Прямой ущерб достаточно легко оценивается и рассчитывается в денежном выражении. В связи с этим к прямому ущербу причисляют затраты труда на борьбу с пожаром и восстановительные работы, включая расчистку площадей горельников от захламленности, лесовосстановительные работы, восстановление поврежденных лесных строений и оборудования. Косвенный ущерб трудно поддается материальной оценке, но зачастую он во много раз превышает размеры прямого ущерба от пожара [6].

Известно, что огонь стихия, но его возникновение возможно лишь при сочетании определенных условий. Такими условиями являются: наличие горючих материалов; условия (преимущественно климатические и гидрологические), способствующие возгоранию горючих веществ; источник возгорания. Комплекс данных условий называется триадой возгорания. При отсутствии одного из условий пожар становится невозможным. В лесу в изобилии имеются горючие материалы и кислород воздуха. Источник высокой температуры (огня), который может вызвать горение, попадает извне. Это оставленный без присмотра и разведенный вне установленного места костер, горящий окурок или спичка, искры из выхлопных труб различных механизмов, выжигание остатков прошлогодней растительности и горючего хлама и т. д. Процесс горения последовательно проходит следующие фазы:

- предварительный нагрев и подсушивание с выделением водяных паров (120°C);
- высыхание, горение с выделением водяных паров, горючих веществ (кислот, смол) – 260°C;
- воспламенение газов (315–425°C): пламенное горение с выделением дыма, углекислого газа, водяных паров и несгоревших газов (650–1095°C);
- обугливание и горение углей до полного сгорания горючих материалов.

Пожарную опасность по лесорастительным условиям лесных участков определяют тип леса, структура насаждения, породный состав и возраст, категория лесных площадей, вырубок и другие характеристики лесного фонда. Для оценки участков лесного фонда по степени опасности возникновения в них пожаров инструкцией по устройству лесного фонда предусмотрена следующая шкала (табл. 3) [9].

Лесные горючие материалы по условиям загорания можно разделить на две основные группы:

- легковоспламеняющиеся и быстрогорящие материалы – сухая трава, отмершие листья, хвоя, мелкие ветки, сучья, некоторые кустарники, самосев и др. Эти горючие материалы обеспечивают быстрое распространение огня и служат воспламенителями для медленно воспламеняющихся материалов;
- медленно воспламеняющиеся лесные горючие материалы – валежник, пни, нижние слои лесной подстилки, кустарники и деревья. Эта группа горючих материалов при горении выделяет большое количество тепла и способствует развитию пожара [9].

Таблица 3 – Шкала оценки пожарной опасности в лесах

Класс пожарной опасности	Объект загорания (характерные типы леса и типы вырубок, насаждения, безлесные территории)	Наиболее вероятные виды пожаров, условия и продолжительность периода их возможного возникновения и распространения
I (очень высокая)	Хвойные молодняки всех типов. Сосняки лишайниковые, вересковые. Мелиорированные сосняки багульниковые, сфагновые и осоково-сфагновые. Сплошные вырубки из под сосняков лишайниковых, вересковых, брусничных, мшистых, черничных, кисличных. Сильно пораженные насаждения (участки бурелома, ветровала, интенсивных выборочных рубок, захламленных гарей) всех типов леса	В течение всего пожароопасного сезона возможны низовые пожары, а на участках с наличием древостоя – верховые. На вейниковых и других травяных типах вырубках по суходолу особенно значительна пожарная опасность весной, а в некоторых районах и осенью
II (высокая)	Сосняки брусничные и мшистые с сосновым подростом или густым можжевельниковым подлеском	Низовые пожары возможны в течение всего пожароопасного сезона. Верховые – в периоды пожарных максимумов
III (средняя)	Сосняки брусничные, мшистые, орляковые, кисличные. Ельники брусничные, орляковые, мшистые и кисличные. Ольшаники и березники на осушенных торфяниках	Низовые и верховые пожары возможны в период летнего пожарного максимума, а в кедровниках, кроме того, в периоды весеннего, и особенно осеннего максимумов
IV (низкая)	Ельники папоротниковые, снытевые, черничные, крапивные. Сосняки долгомошные, осоковые, осоково-сфагновые, сфагновые, багульниковые. Сосняки и насаждения лиственных пород травяных и осоково-травяных типов леса. Дубравы, ясенники, кленовники, липняки, грабняки всех типов леса. Березники, осинники, сероольшанники всех типов леса, кроме долгомошных. Сплошные вырубки (захламленные) снытевых и других типов леса по серым и мокрым местам	Возникновение пожаров (в первую очередь низовых) возможно в травяных типах леса и на таволговых вырубках в периоды весеннего и осеннего пожарных максимумов, в остальных типах леса и на долгомошниковых вырубках – в период летнего максимума
V (очень низкая)	Ельники долгомошные, приручейно-травяные, осоковые, осоково-сфагновые, сфагновые. Березняки, осинники, сероольшанники долгомошные. Черноольшанники всех типов леса	Возникновение пожара возможно только при особо неблагоприятных условиях (длительная засуха)

Послепожарные изменения, возникающие в лесах, зависят от многих факторов (типа почвы; характера пожара; его интенсивности; степени повреждения лесной растительности и почвы; состава древостоя; его возраста; лесотипологической характеристики; почвенно-гидрологического режима; особенностей прилегающих к горельнику участков леса), поэтому необходимо указать преобладающие типы почв на территории нашей страны:

- дерново-подзолистые;
- дерновые карбонатные;

- пойменные (аллювиальные);
- торфяно-болотные [1; 6].

Большая часть торфяно-болотных почв была осушена более 30–40 лет назад. Сегодня они представлены сложными природно-техногенными комплексами, в которых торфяные почвы чередуются с возникшими ареалами антропогенно-преобразованных почв разной степени трансформации (вплоть до песчаных). В результате этого формируются агроторфяно-минеральные низинные почвы [10]. Данное обстоятельство необходимо учитывать в случае примыкания к лесу полосок сельскохозяйственных земель с данным типом почвы. Выработанные торфяники и сельскохозяйственные земли на месте когда-то осушенных болот – наиболее пожароопасные площади. Из-за постоянного воздействия на торф температуры, влажности, биологических особенностей растений он постепенно разлагается. Чем выше степень разложения, тем больше вероятность возникновения пожароопасной ситуации на торфяных почвах, так как такой торф имеет меньшую влажность, большую среднюю плотность и теплоемкость.

Обсуждение. Пожароопасность в лесу возрастает по мере накопления отмирающего органического вещества (древесный отпад, хвое-лиственной опад, увеличение толщины лесной подстилки, ее оторфованности), при засухе, понижении уровня грунтовых вод. Проанализируем, как повышение температуры атмосферного воздуха сказывается на возникновении пожароопасной ситуации в лесах.

С 1989 г. в нашей республике начался самый продолжительный период потепления за все время инструментальных наблюдений за температурой воздуха на протяжении последних почти 130 лет. За период с 1989 по 2015 г. среднегодовая температура воздуха в Беларуси на 1,3°C превысила климатическую норму, принятую Всемирной метеорологической организацией [11].

В таблице 4 [12] можно проследить тенденцию возрастания лесных пожаров на территории Беларуси. По сравнению с 2011 г. количество лесных пожаров в 2015 г. увеличилось в 2,8 раза. При этом площадь лесных земель, пройденная пожарами в 2015 г. по сравнению с 2011 г., возросла в 91,3 раза. Площадь нелесных земель, пройденная пожарами в 2015 г., по сравнению с 2011 г., увеличилась в 768,0 раз. Общая площадь, пройденная лесными пожарами в экстремальном 2015 г. по сравнению с 2011 г., увеличилась в 108,6 раз. При этом особый вред территории республики могут наносить и трансграничные пожары, что особо стало ощутимо в экстремально пожароопасном 2015 г. Наибольшее количество трансграничных пожаров в этот период возникло в Полесском государственном радиационно-экологическом заповеднике (ПГРЭЗ) и на территории лесохозяйственных предприятий Минлесхоза.

Таблица 4 – Лесные пожары и площадь, пройденная лесными пожарами в Республике Беларусь

Событие	Период (год)						
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Количество лесных пожаров (единиц)	433	544	272	687	1 219	319	153
Общая площадь, пройденная лесными пожарами (всего, га)	156	189	73	359	16 949	251	107

Окончание таблицы 4

Событие	Период (год)						
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
в том числе:							
площадь лесных земель, пройденная пожарами	152	176	72	345	13 877	187	100
площадь нелесных земель, пройденная пожарами	4	13	1	14	3 072	64	6
повреждено древесины на корню (куб. м)	4 197	7 675	1 572	13 735	398 496	4 052	3 201

В лесном фонде (по итогам пожароопасного сезона 2015 г.) было отмечено 1042 случая на площади 6414 га (наибольшие площади, поврежденные огнем, были зафиксированы в Гомельской области – 4522 га). Площадь трансграничных пожаров, пришедших с территории Украины, составила 3699 га. В лесах, относящихся к лесному фонду Министерства по чрезвычайным ситуациям (на территории ППРЭС), площадь пожаров составила более 10 тысяч га (62% от общей площади лесных пожаров в Беларуси) [13].

В борьбе с лесными пожарами необходимо развивать и пополнять комплекс организационно-технических и профилактических мероприятий по предупреждению возникновения и распространения пожаров [5]. Известно, что обнаружение лесных пожаров осуществляется четырьмя основными способами: путем наблюдения со специально оборудованных пожарных вышек, мачт и других сооружений; путем наземного наблюдения; путем авиационного наблюдения с помощью специальных приборов; путем анализа информации из космоса [4]. С вопросами организации подготовительных и последующих мероприятий, направленных на тушение и ликвидацию пожаров, взаимодействия и управления, привлекаемых к тушению пожаров сил и средств можно ознакомиться в справочном руководстве по ликвидации лесных и торфяных пожаров [9]. В данном пособии среди организационных причин, способствующих распространению лесных пожаров, выделяют следующие моменты:

- несвоевременное обнаружение лесных пожаров (20% пожаров обнаруживают в конце дня или на следующий день);
- несвоевременное начало тушения (к тушению 15% пожаров приступают в конце дня или на следующий день);
- недостаточное количество сил и средств, направляемых на тушение;
- непрофессиональное руководство организацией тушения [9].

Основная часть

Результаты. Нами предлагается для освоения и внедрения в работу сотрудниками МЧС новый способ ликвидации лесных пожаров, который приемлем для торфяно-болотных и дерново-подзолистых почв Республики Беларусь, на которых произрастает лес с древесно-кустарниковой растительностью различной высоты и склонностью к пожарной опасности, исходя из схемы развития лесного пожара (рис. 1).

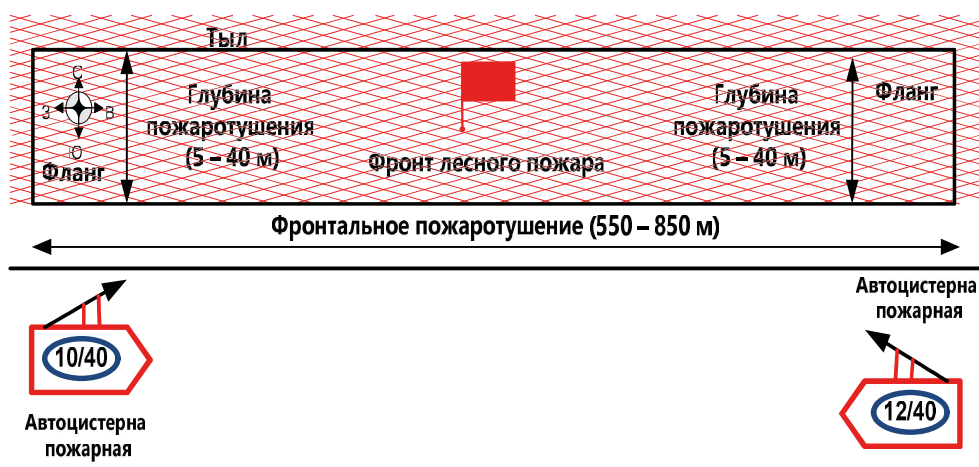


Рисунок 1 – Схема фронтального пожаротушения

Все начинается со сбора информации о пожаре, то есть качественной разведки. Она организовывается совместно с работниками предприятий и организаций, обладающих знанием особенностей технической территории. Качественный сбор информации о пожаре в лесу помогает установить: параметры лесного возгорания, влияние его на степень и направление развития; участки возможной угрозы хвойным молоднякам, складам лесоматериалов, торфоразработкам и т. д.; возможные ландшафтные препятствия, способствующие остановке огня (дороги, просеки, реки, канавы, поляны и т. д.); способы применения механизированных средств для локализации и ликвидации; варианты привлечения естественных водоисточников для организации пожаротушения. В условиях угрозы распространения пожаров в лесах необходимо в первую очередь сосредоточить силы и средства со стороны жилого и производственного сектора, сельскохозяйственных земель, торфяных, открытых полей добычи, лесного массива и сельскохозяйственных земель.

Приемы тушения лесных пожаров рекомендуем рассмотреть по рис. 2.

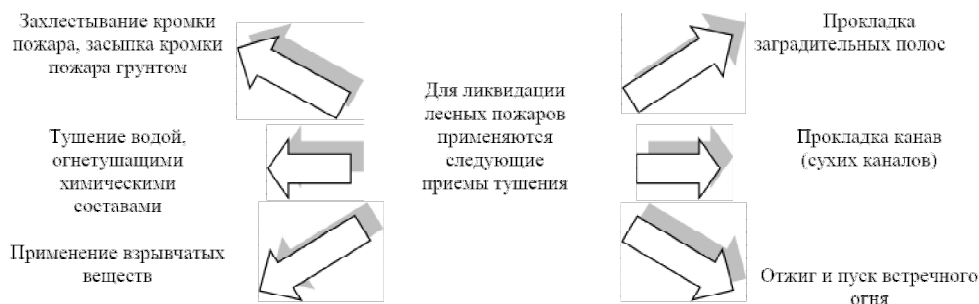


Рисунок 2 – Приемы тушения лесных пожаров

Анализ изучения борьбы с лесными пожарами отображает такое немаловажное значение, как фактор времени. Обнаружить возгорание в лесу и принять решение о его ликвидации необходимо очень быстро, иначе параметры пожара будут увеличиваться на значительной площади. Затем решается вопрос о качественной организации локализации и ликвидации пожара. Исходя из того что горение происходит

в лесу, наиболее сложным и трудоемким является именно процесс локализации. Локализацию возможно проводить в два этапа. Первый этап включает остановку распространения пожара путем воздействия на его горящую лесную, второй этап – создание заградительных полос и канав. Тактически данная работа организована с фронта, тыла и флангов пожара. Для полностью локализованного лесного пожара характерно наличие заградительных полос [14]. С учетом новой пожарной аварийно-спасательной техники у нас появилась возможность совершенствования способов и приемов тушения лесных пожаров (рис. 3).



Рисунок 3 – Аварийно-спасательная техника МЧС Республики Беларусь:
а – лафетный ствол, б – автоцистерна пожарная

Так, при локализации на первом этапе остановка распространения пожара путем непосредственного воздействия на его горящую кромку возможна при организации фронтального пожаротушения. Процесс фронтального пожаротушения осуществляется с помощью пожарной аварийно-спасательной техники тяжелого класса (от 8000 л воды). Подача огнетушащего вещества в движении осуществляется из лафетных стволов производительностью 20 л/с и более по воде [15].

В зависимости от тактико-технических характеристик автоцистерн возможно рассмотрение различных общих значений, предоставленных в табл. 5.

Таблица 5 – Влияние различных видов ПАСТ на расход лафетного ствола, время работы, скорость движения и площадь фронтального пожаротушения

Общие значения	ПАСТ (8000 л воды)	ПАСТ (10000 л воды)	ПАСТ (12000 л воды)
Расход лафетного ствола (по воде)	20	20	20
Время работы (мин.)	6,6	8,3	10
Скорость движения (км/ч)	5	5	5
Фронтальное пожаротушение (м)	547,8	688,9	830

Положительные аспекты фронтального пожаротушения отображены на рис. 4. В 2010 г. в Клепиковском районе Рязанской области (Российская Федерация) применение фронтального пожаротушения обеспечило качественную локализацию лесных пожаров и в дальнейшем ликвидацию массовых возгораний. Осуществляя возможность маневрирования лафетным стволом, верховые пожары можно успешно

свести к низовым пожарам с последующей их ликвидацией. То есть приведенные нами проектные обоснования позволяют дополнить разделы “Способы тушения пожаров в лесах, тушение всей линии фронта” и “Приемы тушения пожаров в лесах, прокладка заградительных полос” при изложении курсантам дисциплины “Тактика проведения аварийно-спасательных работ”.

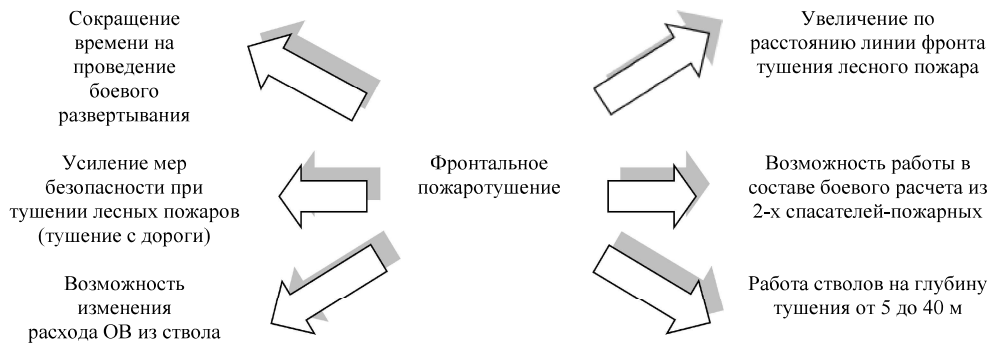


Рисунок 4 – Положительные аспекты фронтального пожаротушения

Надо также отметить, что для успешных действий, направленных на предупреждение и ликвидацию лесных пожаров, на территории Республики Беларусь продолжает осуществляться активная агитационная работа среди населения. В качестве примера предлагаем рассмотреть разработанные службой МЧС рекомендации “Что предпринять при лесном пожаре?”:

- если вы обнаружили начинающийся пожар, постарайтесь затушить его сами;
- заливайте огонь водой из ближайшего водоема, засыпайте землей;
- используйте для тушения ветки от деревьев, мокрую одежду;
- наносите скользящие удары по кромке огня сбоку в сторону очага пожара;
- ветви, ткань переворачивайте, чтобы они не загорелись;
- потушив, убедитесь, что огонь не разгорится снова;
- если пожар достаточно сильный, покиньте место пожара;
- идите навстречу ветру перпендикулярно кромке пожара по просекам, дорогам, берегам ручьев и рек;
- при сильном задымлении закройте рот и нос мокрой повязкой;
- если увидели, что горит торфяное болото, обойдите стороной, двигаясь против ветра;
- внимательно осматривайте дорогу перед собой (огнь уходит под землю, образуя пустоты);
- сообщите о пожаре в службу спасения (101), лесничество, лесхоз [16].

В соответствии со статьей 42 Лесного кодекса Республики Беларусь граждане, пребывающие на территории лесного фонда, обязаны:

- соблюдать правила пожарной безопасности в лесах, а в случаях возникновения лесного пожара – обеспечивать оповещение государственной лесной охраны и оказывать содействие в его тушении;
- не допускать поломку, порубку деревьев и кустарников, повреждение лесных культур, загрязнение лесов;
- соблюдать другие требования лесного законодательства и законодательства об охране окружающей среды [17].

При этом наказания за наиболее распространенные нарушения в лесу прописаны следующие:

- нарушение правил пожарной безопасности в лесах или на торфяниках, посещение леса в пожароопасный сезон, если введен запрет, влечет за собой наложение штрафа до 25 базовых величин;

- нарушение требований пожарной безопасности в лесах или на торфяниках, повлекшее уничтожение или повреждение леса либо торфяников, влечет наложение штрафа в размере от 25 до 50 базовых величин;

- разжигание костров в запрещенных местах – предупреждение или штраф до 12 базовых величин;

- выжигание сухой растительности, трав на корню, а также стерни и пожнивных остатков на полях либо непринятие мер по ликвидации палов влекут наложение штрафа в размере от 10 до 40 базовых величин [18].

Государство и административные органы должны воспитать в каждом человеке понимание личной ответственности за сохранение и улучшение экологических условий окружающей среды. В качестве предложений рационализации профессиональной деятельности сотрудников МЧС для улучшения работы по предотвращению и ликвидации лесных пожаров мы рекомендуем:

- создавать больше мобильных противопожарных групп, состоящих, например, из курсантов, отслеживающих возможные возгорания леса в засушливые периоды года во время прохождения практики;

- основные силы инженеров-спасателей направить на предупреждение и тушение травяных палов, а для этого необходимо усилить информационную пропаганду (радио, телевидение, интернет, листовки, плакаты, памятки работникам лесного хозяйства, тренинги, учебные обучающие видеофильмы) о вреде скопившейся сухой травы на осушенных торфяных участках, прилегающих к лесу;

- отработать механизмы взаимодействия заинтересованных организаций и служб (пожарная охрана, отдел по делам гражданской обороны и чрезвычайным ситуациям, лесхоз, сельскохозяйственные организации, администрация района) для создания систем раннего обнаружения и быстрого реагирования в случае возникновения пожаров;

- определить конкретные задачи, роль, значение и ответственность управленческих и местных органов власти, отвечающих за состояние окружающей среды;

- прививать в семье и детских дошкольных учреждениях с юных лет ответственное поведение и любовь к природе, окружающей среде.

Кроме этого, для рационализации профессиональной деятельности белорусских инженеров-спасателей и для улучшения их качества работы при ликвидации лесных пожаров и их последствий предлагаем к рассмотрению и внедрению в пожарные аварийно-спасательные части нового огнезащитного химического состава “Метафосил”, который также эффективен в зоне радиоактивного загрязнения лесной местности [19]. “Метафосил” был разработан сотрудниками Института леса НАН Беларуси, НИИ физико-химических проблем и НИИ прикладных физических проблем Белорусского государственного университета. Препарат предназначен для прокладки профилактических атмосфероустойчивых, длительнодействующих (до 40 суток) огнегасящих полос, заградительных полос непосредственно перед кромкой пожара, опорных полос для отжига при борьбе с верховыми пожарами,

окарауливания пожаров и для их непосредственного тушения. Выпускается состав на Гомельском химическом заводе согласно ТУ РБ 05568284.004-96 (Состав огнезащитный химический “Метафосил”) [20–21].

Заклучение

Таким образом, консолидирование экологических, экономических проблем, возникающих при лесных пожарах в контексте с проблемами организационно-технического и профилактического плана по предупреждению возникновения и распространения пожаров, позволили сформировать новые способы пожаротушения и дать рекомендации по рационализации профессиональной деятельности сотрудников МЧС Республики Беларусь и повышению ответственности каждого гражданина при нахождении в лесу. С практической точки зрения применение фронтального пожаротушения позволяет дополнить разделы “Способы тушения пожаров в лесах, тушение всей линии фронта” и “Приемы тушения пожаров в лесах, прокладка заградительных полос” при изложении курсантам дисциплины “Тактика проведения аварийно-спасательных работ”.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Родькин, О. И.* Охрана окружающей среды / О. И. Родькин, В. Н. Копица. – Минск : Беларусь, 2010. – 166 с.
2. Лесной фонд [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mlh.by/our-main-activites/forestry/forests/>. – Дата доступа: 23.10.2018.
3. Лесные ресурсы Беларуси [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://studbooks.net/992391/ekologiya/lesnye_resursy_belarusi. – Дата доступа: 03.03.2017.
4. Выявление пожара на ранней стадии [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://forestfireddetection.com/>. – Дата доступа: 03.03.2017.
5. Лесные пожары в Беларуси: материальный ущерб и опасные факторы пожара [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://elib.belstu.by/handle/123456789/22767>. – Дата доступа: 04.11.2019.
6. Основы лесного хозяйства. Рубки главного пользования, уход за лесом и охрана леса от пожаров : учебное пособие для студентов направления 250300 “Технология и оборудование лесозаготовительного и деревообрабатывающего производств” и специальности 120303 “Городской кадастр” / А. Н. Мартынов [и др.]. – СПб. : СПбГЛТА, 2006. – 102 с.
7. *Рак, В. А.* Проблемы обеспечения радиационной безопасности персонала при проведении работ в лесных экосистемах / В. А. Рак, Г. А. Чернушевич, В. В. Перетрухин // Обеспечение безопасности жизнедеятельности: проблемы и перспективы : сб. матер. III Междунар. научно-практ. конф. курсантов, студентов и слушателей, Минск, 26 мая 2006 г. / редкол.: А. П. Герасимчик, В. Б. Альгин, Н. Н. Архипец [и др.]. – Минск : Командно-инженерный институт, 2006. – 389 с.
8. Экологический портал. Классы лесных пожаров [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://portaleco.ru/lesovodstvo-hozjajstvo-v-lesah-povvezhdennyh-pozharami/klassy-lesnyh-pozharov.html>. – Дата доступа: 22.02.2017.
9. Справочное руководство по ликвидации лесных и торфяных пожаров / сост.: А. М. Сегодник [и др.]. – Гродно : Гродненское областное управление МЧС Республики Беларусь, 2012. – 160 с.
10. Рекомендации по оптимизации структуры посевных площадей в сельскохозяйственных организациях с высоким удельным весом торфяных почв, загрязненных радионуклидами / Е. Г. Сарасеко [и др.]. – Гомель : Институт радиологии, 2011. – 38 с.
11. Агроклиматическое зонирование территории Беларуси с учетом изменения климата в рамках разработки национальной стратегии адаптации сельского хозяйства к изменению климата в Республике Беларусь / В. Мельник, В. Яцухно, Н. Денисов, Л. Николаева, М. Фалолеева [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.minpriroda.gov.by/uploads/files/Agroklimaticheskoe-zonirovanie-Respubliki-Belarus.pdf>. – Дата доступа: 09.01.2019.

12. Национальный статистический центр Республики Беларусь. Официальная статистика: Лесные пожары и площадь, пройденная лесными пожарами [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.belstat.gov.by/ofitsialnaya-statistika/realny-sector-ekonomiki/selskoe-hozyaistvo/osnovnyye-pokazateli-za-period-s-__-po-____gody_6/lesnye-pozhary/. – Дата доступа: 04.01.2019.
13. **Гордей, Н. В.** Ландшафтные пожары на территории Беларуси / Н. В. Гордей // Современные проблемы ландшафтоведения и геоэкологии : сб. матер. VI Междунар. науч. конф. (к 110-летию со дня рождения профессора В. А. Дементьева), Минск, 13–16 нояб. 2018 г. / редкол.: А. Н. Витченко [и др.]. – Минск : БГУ, 2018. – С. 119–122.
14. **Тимошков, В. Ф.** Тенденциозная локализация ландшафтных пожаров с использованием сухих каналов / В. Ф. Тимошков // Наука и образование сегодня. – 2018. – № 3. – С. 17–18.
15. **Тимошков, В. Ф.** Применение автомобильных пожарных цистерн тяжелого класса (от 8000 л воды) при тушении пожаров в сельских населенных пунктах / В. Ф. Тимошков, Ю. С. Рубцов // Чрезвычайные ситуации: образование и наука. – 2015. – № 1. – С. 78–82.
16. Более 25 лесных пожаров ликвидировали в Беларуси за сутки [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.belta.by/society/view/bolee-25-lesnyh-pozharov-likvidirovali-v-belarusi-za-sutki-345363-2019/>. – Дата доступа: 04.11.2019.
17. Опасность лесных пожаров [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://sch1.minsk.edu.by/main.aspx?guid=6383>. – Дата доступа: 04.11.2019.
18. Профилактика лесных пожаров [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://peleng.by/news/useful-info/20.html>. – Дата доступа: 04.11.2019.
19. Атмосферостойчивый химический состав для предупреждения и тушения лесных пожаров “Метафосил” [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.fhp.bsu.by/razrabotka?id=166:metafosil&catid=50>. – Дата доступа: 05.11.2019.
20. Около трети загрязненного лесного фонда удалось восстановить в Беларуси после аварии на ЧАЭС [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.belta.by/special/society/view/okolo-treti-zagryaznennogo-lesnogo-fonda-udalos-vosstanovit-v-belarusi-posle-avarii-na-chaes-190162-2016/>. – Дата доступа: 05.11.2019.
21. В Гомеле начали производство огнезащитного состава “Метафосил” [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.ng.ru/cis/2010-08-06/6_belorussia.html. – Дата доступа: 05.11.2019.

Поступила в редакцию 13.03.2020 г.

Контакты: elena.degtyaryova@tut.by (Дегтярева Елена Ивановна)

elen_saraseko@tut.by (Сарасеко Елена Григорьевна)

Saraseko E., Timoshkov V., Degtyareva E. ELIMINATION OF WILD FIRES ON THE SOILS OF DIFFERENT TYPES.

Frontal firefighting allows not only to reduce the time of combat deployment, but also to strengthen security measures taken when extinguishing wild fires, to change the water consumption in the nozzle, to increase the front line of extinguishing a wild fire and to enable the work of hoses in the range of 5 to 40 m when two firemen are available. The application of frontal firefighting allows to supplement the section “Ways of combating wild fires, extinguishing along the whole frontline” and the section “Methods of combating wild fires, creating protective strips” on the soils of different types with the multilayer structure of the phytocenosis.

Keywords: forest, wild fires, economic damage, combustible forest materials, organizational and technical fire measures, frontal firefighting, rationalization of professional activities, drug “Metaphosil”.