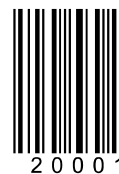
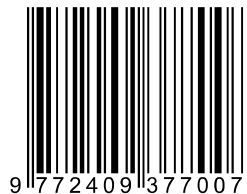


ISSN 2409-3777



9 772409 377007

2 0 0 0 1

ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага

ўніверсітэта

імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ

(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

1 (55)
2020

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар М.М. Дабравольскі (Тула)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А.В. Цімошчанка (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І.В. Івашкевіч (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт Г.М. Ціханчук (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)

*Навукова-метадычны часопіс “Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова” ўключаны ў РІНЦ
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),
ліцэнзійны дагавор № 811–12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

ЗМЕСТ

БЕРНИК В. И., САКОВИЧ Н. В., ГУСЕВА А. В. Связь меры резонансных множеств с величиной правой части диофантовых неравенств.....	4
МОЖЕЙ Н. П. Эквивалентные связности на симметрических пространствах неразрешимых групп Ли	12
ЗАЕРКО Д. В., ЛИПНИЦКИЙ В. А. Алгоритм шумофильтрации вертикальной проекции символьной строки.....	21
ЯСЮКОВИЧ Э. И. Имитационное моделирование курсового движения и вертикальной динамики легкового автомобиля	35
КИРКОР М. А., ПОКАТИЛОВ А. Е., ГАЛЬМАК А. М. Математическое описание синтеза целенаправленного движения спортсмена	44
ДОРОНИН А. К., ЛИПНИЦКИЙ В. А. Построение модели машинного обучения для задачи классификации степени критичности CVE-уязвимостей.....	51
ТРОХИМЧУК П. П. Основные проблемы моделирования излучения Вавилова-Черенкова и ударных процессов в релаксационной оптике	64
TIMOSHCHENKO E. V., YUREVICH Yu. V. Modeling of nutation oscillations in light radiation reflected by thin resonant layer	73
НОСКОВА М. С. Эволюция физической картины мира	80
БОЙКО В. И., ТИХОНЧУК Г. Н., ШЕВЧУК Д. И. Анатомия надземных вегетативных органов некоторых представителей семейства буковые (<i>Fagaceae</i> Dumort.)	89
АКУЛИЧ Н. В., СЯХОВИЧ В. Э., СОРОКА А. В., ДОРОНЬКИНА А. С., БЕЛЯЕВ С. А. Определение гликогемоглобина эритроцитов при хранении крови методом проточной цитометрии	96
ТИХОНЧУК Г. Н. От житейской и научной экопсихологии к экологическому сознанию в системе образования	103
КРОТОВ В.М. Ученый, наставник, коллега	107

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 511.42

СВЯЗЬ МЕРЫ РЕЗОНАНСНЫХ МНОЖЕСТВ С ВЕЛИЧИНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

В. И. БЕРНИК

доктор физико-математических наук, профессор

Институт математики НАН Беларуси

Н. В. САКОВИЧ

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

А. В. ГУСЕВА

преподаватель

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

Задача о мере Лебега множества $L_n(w)$ действительных чисел $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство $|P(x)| < P(H)^{-w}$ имеет бесконечно много решений в полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени n и высоты $H = H(P)$, берет свое начало с работы А.Я. Хинчина 1926 г. [1]. Его результаты обобщались и усиливались в статьях К. Малера, Б. Фолькмана, В.Г. Спринджужа. В настоящее время неравенство $|P(x)| < P(H)^{-w}$ изучается в несколько другом виде: в правой части ставится величина Q^{-w} , $w > n$ при $Q \in \mathbb{N}$ и $H(P) \leq Q$. Таким неравенствам удовлетворяют точки, в которых в задачах механики возникают резонансные явления. Эффективные оценки по Q и w в таких неравенствах получены Н. Бударинной и О'Доннелом [2; 3; 4].

Для многочленов первой и второй степени решена задача о мере множества действительных чисел, в которой эти многочлены по модулю не превосходят заданной границы. Эти результаты улучшают недавние теоремы Н. Бударинной и Х. О'Доннелла.

Ключевые слова: корень многочлена, алгебраические числа, система диофантовых неравенств, порядок приближения, покрытие множества.

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

многочлен с целыми коэффициентами степени $\deg P = n$, высоты $H = H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$, $I \subset \mathbb{R}$ интервал с мерой Лебега μI , $\#B$ количество элементов множества B . Будем использовать символ Виноградова $\ll$. Выражение $S \ll K$ означает, что $S < cK$ и c не зависит от величин S и K .

Пусть $\Psi(x)$ монотонно убывающая функция, заданная на $\mathbb{R}^+$. Обозначим через $L_n(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

© Берник В.И., 2020

© Сакович Н.В., 2020

© Гусева А.В., 2020

$$|P(x)| < \Psi(H)H^{-n+1} \quad (2)$$

имеет бесконечно много решений в многочленах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ вида (1).

В работах [5; 6] доказано, что

$$\mu L_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu I, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases} \quad (3)$$

Отметим частные случаи равенства (3), которые были доказаны значительно раньше. При $n = 1$ равенство (2) – знаменитая теорема Хинчина о приближении действительных чисел рациональными. Если $\Psi(H) = H^{-\nu}$, $\nu > 1$, то первое равенство в (2) доказал В.Г. Спринджук [7], решив тем самым проблему Малера [8]. Интересно обобщение задачи на немонотонные функции $\Psi(x)$ [9], на распределение сопряженных алгебраических чисел [10] и на приближение нуля значениями линейных комбинаций невырожденных функций [11; 12].

Придадим задаче (2) несколько другой вид. Возьмем достаточно большое число Q введем класс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}.$$

Используя принцип ящиков Дирихле [7; 13], для любого $x \in I$ найдется $c_1 = c_1(n, x)$ и полином $|P(x)| < c_1 Q^{-n}$, такой что

$$|P(x)| < c_1 Q^{-n}.$$

Однако уже при $w > n$ можно доказать [5; 7], что мера множества $M_n(w)$, решений неравенств

$$|P(x)| < Q^{-w}, P(x) \in \mathcal{P}_n(Q) \quad (4)$$

стремится к нулю при $Q \rightarrow \infty$. О скорости стремления величины $\mu M_n(Q)$ к нулю известно, что

$$\mu M_n(Q) < c_2(n) Q^{\frac{w-n}{n}}. \quad (5)$$

В настоящей работе мы улучшаем результат (5) для $n \leq 3$. Основной результат сформулируем в виде трех теорем. Для упрощения будем считать, что $I \subset [0, 1]$.

Теорема 1. При $w > 1$ справедливо неравенство $\mu M_1(w) < LQ^{-w+1}$.

Доказательство. При фиксированных $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ множество $M_1(w)$ есть множество решений неравенства

$$|qx - p| < Q^{-w}, \quad 1 \leq q \leq Q. \quad (6)$$

Количество целых p , удовлетворяющих (6), не превосходит $q + 1$. Неравенство (6) можно переписать в виде

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-1} Q^{-w}. \quad (7)$$

Решения неравенства (7) – это интервалы $\left[\frac{p}{q} - q^{-1} Q^{-w}, \frac{p}{q} + q^{-1} Q^{-w} \right]$, мера каждого из которых не превосходит $2q^{-1} Q^{-w}$.

Просуммируем эту величину по p и q :

$$2 \sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{0 \leq p \leq q} q^{-1} Q^{-w} < 4 \sum_{1 \leq q \leq Q} Q^{-w} = 4Q^{-w+1}.$$

При доказательстве следующих теорем будут использованы три леммы.

Лемма 1 [5; 7]. Пусть выполняется неравенство (4) и α_1 – корень $P(x)$, ближайший к x . Тогда

$$|x - \alpha_1| < n |P(x)| |P'(x)|^{-1} \leq n Q^{-w} |P'(x)|^{-1}; \quad (8)$$

$$|x - \alpha_2| \leq 2^{n-1} Q^{-w} |P'(\alpha_1)|^{-1}. \quad (9)$$

Лемма 2 [14]. Пусть $P(x), T(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ и не имеют общих корней. Если на некотором интервале J длины $\mu J = Q^{-\eta}, \eta > 0$ выполняется неравенство

$$\max(|P(x)|, |T(x)|) < Q^{-\tau}, \quad \tau > 0,$$

то при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ верно неравенство

$$\tau + 1 + 2 \max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta.$$

Лемма 3 [7]. Если $P(x) = t_1(x) \dots t_k(x)$, то справедливы неравенства

$$c_2 H(t_1) \dots H(t_k) < H(p) < c_3 H(t_1) \dots H(t_k).$$

В работе [7] В.Г. Спринджук показал, в неравенстве (4) можно считать, что старший коэффициент полиномов $P(x)$ удовлетворяет неравенству $|a_n| > c_4 H(P)$ и что все корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ полиномов $P(x)$ удовлетворяют неравенству

$$|\alpha_j| < c_5, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (10)$$

Теорема 2. При $w > 2$ верно неравенство

$$\mu M_2(w) < \begin{cases} c_6 Q^{-w+2}, & 2 < w < 3 \\ c_6 Q^{-\frac{w-1}{2}}, & w > 3 \end{cases}$$

Доказательство. Из неравенств (4) и (9) имеем

$$|x - \alpha_1| < 2Q^{-w} |P'(\alpha_1)|^{-1} = 2Q^{-w} |D(P)|^{-\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

где $D(P) = a_1^2 + 4a_0a_2$ – дискриминант полинома $P(x) \in \mathcal{P}_2(Q)$. Будем различать два случая:

а) $D(P) \neq 0$,

б) $D(P) = 0$.

Рассмотрим первый случай. Из неравенства (11) следует, что

$$\mu M_2(w) \leq 2Q^{-w} \sum_{|a_j| \leq a, |k| \leq 2} |a_1^2 - 4a_0a_2|^{-\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Зафиксируем в неравенстве (12) коэффициенты a_1, a_2 многочлена $P_2(x)$. Выражение $|a_1^2 - 4a_0a_2|$ при изменяющемся коэффициенте a_0 может принять наименьшее значение $b \neq 0$, $b < 2a_2$ только при одном a_0' . При других значениях $a_0' + 1, a_0' + 2, \dots, a_0' + k_1; a_0' - 1, a_0' - 2, \dots, a_0' - k_2$ значения $|a_1^2 + 4a_0a_2|$ будут удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} |a_1^2 - 4(a_0' + j)a_2| &> 2ja_2, \quad 1 \leq j < k_1 \leq Q, \\ |a_1^2 - 4(a_0' - j)a_2| &> 2ja_2, \quad 1 \leq j \leq k_2 \leq Q. \end{aligned} \quad (13)$$

Из неравенств (12) и (13) следует:

$$\mu M_2(w) < 2Q^{-w} \left(\sum_{a_1, a_2} 1 + 2 \sum_{1 \leq k \leq Q} k^{-\frac{1}{2}} a_2^{-\frac{1}{2}} \right). \quad (14)$$

Воспользуемся неравенством

$$\sum_{1 \leq k \leq Q} k^{-\frac{1}{2}} < 2Q^{\frac{1}{2}},$$

получающимся при замене суммы определенным интегралом. Тогда (14) можно переписать в виде

$$\mu M_2(w) < 4Q^{-w+2} + 8Q^{-w} a_2^{-\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая неравенство $|a_2| > c_4 H$, получаем

$$\mu M_2(w) < c_6 Q^{-w+2}.$$

Тем самым первая оценка теоремы доказана.

Рассмотрим второй случай, когда $D(P) = 0$. Равенство $D(P) = 0$ означает, что полином $P(x)$ имеет кратный корень. Поэтому неравенство (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} |P(x)| &= |ax - b|^2 < Q^{-w}, \\ |ax - b| &< Q^{-\frac{w}{2}}, \quad |a| < Q^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим через M_2 меру тех $x \in I$, для которых неравенство (15) разрешимо хотя бы для одного полинома $P(x) \in \mathcal{P}_2(Q)$ с условием $D(P) = 0$. При фиксированных a и b мера решений неравенства (15) не превосходит $2Q^{-\frac{w}{2}}|a|^{-1}$. Последовательно имеем

$$\sum_{1 \leq a \leq Q^{\frac{1}{2}}} \sum_{1 \leq b \leq q} 2ba^{-1}Q^{-\frac{w}{2}} < \sum_{1 < a < Q^{\frac{1}{2}}} 4aQ^{-\frac{w}{2}} < 4Q^{-\frac{w}{2}}.$$

Из неравенства (11) с учетом последней оценки получаем, что

$$\mu M_2(w) < c_6 Q^{-\frac{w-1}{2}}, \quad w > 3.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. При $w > 3$ справедливо неравенство

$$\mu M_3(w) \ll \begin{cases} Q^{-\frac{w-3}{2}}, & 3 < w \leq 5 \\ Q^{-\frac{w-2}{3}}, & w > 5 \end{cases}.$$

Доказательство. Поделим интервал I на интервалы J длины $\mu J = Q^{-w_1+u}$, при некотором $w_1 > 2$, выбор которого будет сделан ниже. Величина u связана с производной многочлена $P(x)$ и определяется из неравенства

$$Q^{-u} < |P'(x)| < Q^{-n+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \quad (16)$$

С помощью неравенства (16) весь диапазон значений $P'(x)$ можно разбить на $c_7 \varepsilon^{-1}$ интервалов. Возьмем один из интервалов J_1 , на котором выполняется неравенство (16).

Если в какой-то точке $x \in J_1$ выполнится неравенство $|P(x)| < Q^{-w}$, то для ближайшего к x корня α_1 полином $P(x)$ по лемме 1 верно неравенство

$$|x - \alpha_1| < n |P(x)| |P'(x)|^{-1} \leq n Q^{-w+n} \quad (17)$$

Рассмотрим все полиномы $P(x) \in \mathcal{P}_3(Q)$, для которых выполняется (17) хотя бы для одной точки $x \in J_1$. Обозначим через $P_1(x), \dots, P_\ell(x)$, $\ell = Q^\theta$ все полиномы $P(x) \in \mathcal{P}_3(Q)$, для которых выполняются неравенства (17). Разложим все полиномы $P_j(x)$, $1 \leq j \leq \ell$, на интервале J_1 в ряд Тейлора в корне $\alpha_1 = \alpha_{1j}$. Получим

$$P_j(x) = P(\alpha_{1j}) + P'(\alpha_{1j})(x - \alpha_{1j}) + \frac{1}{2} P''(\alpha_{1j})(x - \alpha_{1j})^2 + \frac{1}{6} P'''(\alpha_{1j})(x - \alpha_{1j})^3$$

Из оценок

$$|P'(\alpha_{1j})| \ll Q^{-n+\varepsilon}, |x - \alpha_{1j}| \ll Q^{-w_1+n},$$

$$|P''(\alpha_{1j})| \ll Q, |x - \alpha_{1j}|^2 \ll Q^{-2w_1+2n}$$

следует, что для всех точек $x \in J_1$ верно неравенство

$$|P_j(x)| \ll Q^{-w_1+\varepsilon} \quad (18)$$

при условиях

$$w_1 \geq 2n+1, \quad q < \theta < 1 + \varepsilon. \quad (19)$$

С учетом теоремы 2

$$\mu M_3(w) \ll \begin{cases} Q^{-w_1+2+\varepsilon}, & 2 < w_1 \leq 3 \\ Q^{\frac{w_1-1+\varepsilon}{2}}, & w_1 > 3 \end{cases} \quad (20)$$

Из второго неравенства (19) следует, что $\ell \ll Q^{1+\varepsilon}$.

Так как справедливо неравенство

$$\#\{J \subset I\} \ll Q^{-w_2-u},$$

а множество решений неравенства $|P(x)| < Q^{-w}$ по лемме оценивается величиной $\ll Q^{-w+u}$, то мера множества тех $x \in I$, для которых справедливы неравенства $|P(x)| < Q^{-w}$ и (19), не превосходит

$$\mu B_2 \ll Q^{-w+n+w_1+n+\varepsilon+1} = Q^{-w+w_1+1+\varepsilon}. \quad (21)$$

Так как $\theta > 1$, то по принципу ящиков Дирихле среди ℓ полиномов $P_j(x)$ найдется

s_8 полиномов, у которых старшие коэффициенты a_3 совпадают.

Рассмотрим два таких полинома

$$P_1(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

$$P_2(x) = a_3 x^3 + a_2' x^2 + a_1' x + a_0'.$$

Их разность $R(x) = P_2(x) - P_1(x)$ на всем интервале J_1 удовлетворяет неравенствам

$$|R(x)| = |b_2 x^2 + b_1 x + b_0| \ll Q^{-w_1+\varepsilon}, \quad (22)$$

$$b_j \leq 2Q, \quad b_0 = a_0' - a_0, \quad b_1 = a_1' - a_1, \quad b_2 = a_2' - a_2$$

Применим к неравенству (22) теорему 2.

Получим (20). Оптимизируем неравенства (20) и (21) по w_1 . При $2 < w < 3$ величину w_1 найдем из равенства

$$-w_1 + 2 + \varepsilon = -w + w_1 + 1 + \varepsilon,$$

$$w_1 = \frac{w+1}{2},$$

$$-w_1 + 2 + \varepsilon \equiv -\frac{w-3}{2}, \quad 3 < w < 5.$$

При $w_1 > 3$ величину w_1 найдем из равенства

$$-\frac{w_1 - 1}{2} = -w + w_1 + 1 + \varepsilon,$$

$$w_1 = \frac{w - 1 - \varepsilon}{2},$$

$$-\frac{w_1 - 1}{2} = -\frac{w - 2}{3}, \quad w > 5,$$

что и доказывает теорему 3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Khintchine, A. J.* Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen / A. J. Khintchine // Math. Zeitschr. – 1926. – Vol. 24. – P. 706–714.
2. *Bernik, V. I.* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics / V. I. Bernik, N. V. Budarina, H. O'Donnell // 2013. Vol. 280, Suppl. 2. – P. 31–43.
3. *Бударина, Н. В.* Зависимость количества алгебраических чисел на интервалах единичной длины от расположения интервала / Н. В. Бударина, Х. О. Доннелл, Н. В. Шамукова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. – № 1(45). – 2015. – С. 37–43.
4. *Бударина, Н. В.* Теорема Хинчина и приближение нуля значения целочисленных многочленов в разных метриках / Н. В. Бударина, Х. Диккинсон, В. И. Берник // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 413, № 2. – С. 151–153.
5. *Берник, В. И.* О точном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53. – С. 17–28.
6. *Бересневич, В. В.* Точный порядок приближения действительных чисел алгебраическими / В. В. Бересневич // Доклады Российской Академии Наук. – 1999. – Т. 366, № 5. – С. 583–586.
7. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 184 с.
8. *Mahler, K.* Über das Mass der Menge aller S-Zahlen / Mathematische Annalen. 106 – 1932 – P. 131–139.
9. *Beresnevich, V. V.* On a theorem of V. Bernik in the metric theory of Diophantine approximation / V. V. Beresnevich // Acta Arith. – 2005. – 117/1. – P. 71–80.
10. *Бересневич, В. В.* О распределении значений результатов целочисленных многочленов / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гетце // Доклады НАН Беларуси. – 2010. – 5 (54). – С. 21.
11. *Bernik, V. I.* Khintchine-type theorems on manifolds the convergence case for standard and multiplicative versions / V. I. Bernik, D. Kleinbock, G. A. Margulis // Internet. Math. Res. Notices. – 2001. – P. 453–486.
12. *Kleinbock, D. Y.* Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds / D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis // Ann. Math. – 1998. – 148. – P. 339–360.
13. *Шмидт, В. М.* Диофантовы приближения / В. М. Шмидт. – М. : Мир, 1989. – 224 с.

Поступила в редакцию 07.10.2019 г.

Контакты: +375 222 63 43 44 (Сакович Наталья Владимировна)

Bernik V., Sakovich N., Guseva A. CONNECTION OF RESONANCE SET MEASURE WITH THE VALUE OF RIGHT-HAND SIDE OF DIOPHANTINE INEQUALITY.

The problem of Lebesgue's measure $L_n(w)$ of a set of real numbers $x \in \mathbb{R}$, for which the inequality $|P(x)| < P(H)^{-w}$ has an infinite number of solutions in polynomials $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ of n degree and $H = H(P)$ height, comes from the work of A.J. Khinchin of 1926 [1]. His results were summarized and amplified in the articles by K. Mahler, B. Folkman, V.G. Sprinjuk. Currently, the inequality $|P(x)| < P(H)^{-w}$ is studied in a slightly different form: in the right-hand side Q^{-w} , $w > n$ with $Q \in \mathbb{N}$ and $H(P) \leq Q$. Such inequalities are satisfied by the points at which resonance phenomena arise in the tasks of mechanics. Effective estimates on Q and w in such inequalities have been obtained by N. Budarina and O'Donnell [2; 3; 4].

For the first and second degree polynomials the problem of a measure of a set of real numbers is solved when the polynomials modulo do not exceed a given boundary. These results improve the recent theorems of N. Budarina and H. O'Donnell.

Keywords: polynomial root, algebraic numbers, diophantine inequality system, approximation order, set coverage.

УДК 514.765.1

ЭКВИАФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

Н. П. МОЖЕЙ

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

В работе исследуется задача описания эквиваффинных связностей на гладком многообразии. В общем случае эта проблема является довольно сложной. Поэтому естественно рассмотреть эту проблему в более узком классе многообразий, например, в классе симметрических однородных пространств. Цель работы – описание всех инвариантных эквиваффинных связностей на трехмерных симметрических однородных пространствах вместе с тензорами кручения и тензорами Риччи. Рассмотрены пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований с неразрешимым стабилизатором. В статье для трехмерных симметрических однородных пространств определено, при каких условиях связность является эквиваффинной (локально эквиваффинной). Также выписаны в явном виде сами эквиваффинные (локально эквиваффинные) связности, тензоры кручения, тензоры Риччи.

Ключевые слова: эквиваффинная связность, группа преобразований, симметрическое пространство, тензор кручения, тензор Риччи.

Введение

Цель работы – описать все эквиваффинные связности на симметрических однородных пространствах размерности 3. Случай аффинных связностей известен [1]. Аффинная связность является эквиваффинной, если допускает параллельную форму объема [2]. Для трехмерных симметрических однородных пространств определим, при каких условиях связность является эквиваффинной (локально эквиваффинной), также выпишем в явном виде сами связности, тензоры кручения и тензоры Риччи.

Симметрическое пространство – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении [3]. Геодезическая симметрия относительно любой точки такого пространства есть автоморфизм, заданная аффинная связность переходит в себя. Примерами симметрических пространств могут служить пространства постоянной кривизны, классические области в комплексном аффинном пространстве и т. д. Симметрические римановы пространства впервые исследовал П.А. Широков [4]. Трехмерные симметрические однородные пространства с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором изучались в работе [1].

Эквиваффинные пространства, т. е. пространства аффинной связности, в которых объем n -мерного параллелепипеда является инвариантным при параллельном переносе, также играют большую роль в теории геодезических отображений. Й. Микеш и В.Е. Березовский [5; 6] описали основные уравнения теории геодезических отображений для случая геодезических отображений эквиваффинных многообразий на псевдоримановы пространства. Эти результаты были отправной точкой для М.Г. Иствуда и В.С. Матвеева [7] в исследовании геодезических отображений многообразий с проективной связностью. В [8] показано, что любое пространство аффинной связности

локально проективно эквивалентно пространству с эквивалентной связностью. Этот результат также действителен “в целом” [9]. В [10] показано, что произвольное пространство проективной связности допускает “в целом” геодезическое отображение на некоторое пространство с эквивалентной связностью. Эквивалентные связности на трехмерных римановых и псевдоримановых однородных пространствах изучались в работе [11]. В данной работе изучаются эквивалентные (локально эквивалентные) связности на симметрических однородных пространствах.

Основные определения. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации пар групп Ли $\bar{G}/G$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (см., например, [12]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве $T_x M$ – это фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x + \mathfrak{g}) = (Ads)(x) + \mathfrak{g}$ для всех $s \in G$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_x M = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ следующим образом:

$$x.(y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}, \text{ для всех } x \in \bar{\mathfrak{g}}, y \in \bar{\mathfrak{g}}.$$

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$ и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$ -инвариантным. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [13; 14]. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [15]) с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Симметрическое пространство есть тройка $(\bar{G}, G, \sigma)$, состоящая из связной группы Ли $\bar{G}$, замкнутой подгруппы G и инволютивного автоморфизма σ такого, что $\sigma(g) = s_o g s_o^{-1}$ для $g \in \bar{G}$ где s_o – симметрия для M в o . Поскольку $M = \bar{G}/G$ редуктивно (а $\bar{G}$, транзитивна), все симметрические пространства являются изотропно-точными. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и -1 , а $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Пусть $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для -1 . Разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ называется *каноническим разложением* для $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$. Если $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ – каноническое разложение симметрической алгебры Ли $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \sigma)$, то $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G , то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензоры кручения $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m, \quad R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]).$$

Будем говорить, что Λ имеет *нулевое кручение* или является *связностью без кручения*, если $T = 0$. В этом случае имеет место первое тождество Бьянки:

$$R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{m}.$$

Определим тензор Риччи $Ric \in \text{InvT}_2(\mathfrak{m})$:

$$Ric(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}.$$

Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиваффинной*, если $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$).

Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиваффинна [2]. Действительно, по определению,

$$Ric(y, z) - Ric(z, y) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z - R(x, z)y\}.$$

С учетом первого тождества Бьянки получаем

$$Ric(y, z) - Ric(z, y) = \text{tr}\{x \mapsto -R(y, z)x\} = -\text{tr}R(y, z).$$

Поскольку $\text{tr}(AB - BA) = 0$, имеем

$$Ric(y, z) - Ric(z, y) = -\text{tr}(\Lambda(y)\Lambda(z) - \Lambda(z)\Lambda(y)) + \text{tr}\Lambda([y, z]) = \text{tr}\Lambda([y, z]).$$

Поскольку $\text{tr}(AB - BA) = 0$, имеем

$$Ric(y, z) - Ric(z, y) = -\text{tr}(\Lambda(y)\Lambda(z) - \Lambda(z)\Lambda(y)) + \text{tr}\Lambda([y, z]) = \text{tr}\Lambda([y, z]).$$

Следовательно, тензор Ric симметрический тогда и только тогда, когда $\text{tr}\Lambda([y, z]) = 0$ для всех $y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Под *эквиваффинной* связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Основная часть

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1, \dots, e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, где d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, соответствующие приведенным в [1]. Поскольку ограничение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\bar{\mathfrak{g}}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Выпишем ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, запишем тензор кривизны R его значениями $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$. Будем говорить, что связность *нулевая*, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$.

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$.

Теорема 1 [1]. Любое трехмерное симметрическое тривиальное однородное пространство $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такое, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, локально имеет вид $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{g}$ (подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$) сопряжена только одной из следующих подалгебр:

$$\begin{aligned}
& 3.3. \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}; 3.4. \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \\ & y \\ & z \end{bmatrix}; 3.5. \begin{bmatrix} & y & x \\ -y & & z \\ -x & & -z \end{bmatrix}; \\
& 4.1. \begin{bmatrix} x & z \\ u & y \end{bmatrix}; 4.2. \begin{bmatrix} \lambda x + y & z \\ u & \lambda x - y \\ & x \end{bmatrix}; 4.3. \begin{bmatrix} x + y & z \\ u & x & z \\ & u & x - y \end{bmatrix}; 4.5. \begin{bmatrix} x & z & y \\ -z & x & u \\ -y & -u & x \end{bmatrix}; \\
& 5.1. \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \\ & z \end{bmatrix}; 5.2. \begin{bmatrix} x & u & v \\ z & -x & u \end{bmatrix}; 5.3. \begin{bmatrix} u & v \\ x & y \\ z & -x \end{bmatrix}; \\
& 6.1. \begin{bmatrix} x & z & w \\ u & y & v \end{bmatrix}; 6.2. \begin{bmatrix} \lambda x + y & z & w \\ u & \lambda x - y & v \\ & x \end{bmatrix}; 6.3. \begin{bmatrix} v & w \\ x & z \\ y & u \end{bmatrix}; 6.4. \begin{bmatrix} x & v & w \\ \lambda x + y & z \\ u & \lambda x - y \end{bmatrix}; \\
& 7.1. \begin{bmatrix} x & u & t \\ v & y & w \\ & z \end{bmatrix}; 7.2. \begin{bmatrix} x & w & t \\ y & u \\ v & z \end{bmatrix}; 8.1. \begin{bmatrix} x & z & v \\ w & y - x & u \\ t & s & -y \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Также при $\dim \mathfrak{g} = 9$ подалгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Здесь подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметра λ , не сопряжены друг другу; предполагается, что параметры пробегает все $\mathbb{R}$, также предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$. Базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [1].

Теорема 2 [1]. Любое трехмерное симметрическое нетривиальное однородное пространство $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, такое, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы локально эквивалентно одному и только одному из следующих пространств:

3.4.2	$ \begin{array}{c cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & -e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & e_3 & 0 \end{array} $	,	3.4.3	$ \begin{array}{c cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & -e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array} $	,
3.5.2	$ \begin{array}{c cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & -e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array} $	,	3.5.3	$ \begin{array}{c cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & -e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & e_1 & e_3 & 0 \end{array} $	,

5.2.2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0	
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0	
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0	
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	e_4+u_1	
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_5+u_2	
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-u_1$	
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	$-u_2$	
u_3	0	0	0	$-e_4-u_1$	$-e_5-u_2$	u_1	u_2	0	
5.2.3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3	
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0	
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0	
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0	
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	u_1	
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	u_2	
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_4$	
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	$-e_5$	
u_3	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_4	e_5	0	
6.1.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	e_5
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	e_6
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_5$	$-e_6$	0
6.1.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_5$
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_6$
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_5	e_6	0

Замечание. В случае 5.2.2 базис $\mathfrak{m}$ в каноническом разложении имеет вид $\{u_1 + e_4, u_2 + e_5, u_3\}$, в остальных случаях – стандартный базис $\{u_1, u_2, u_3\}$. Далее используется базис канонического разложения. Если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, не накладываются дополнительные условия, то предполагается, что они пробегает все $\mathbb{R}$.

Доказательство этой теоремы также приведено в работе [1].

Информация о тензорах кручения и тензорах Риччи приведена в доказательстве теоремы 3.

Пусть далее $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Теорема 3. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – трехмерное симметрическое однородное пространство, приведенное в теореме 1 или 2. Эквиваффинные (локально эквиваффинные) связности имеют вид:

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$	Локально эквиваффинная связность (без кручения)
3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 4.2.1, 4.3.1, 4.5.1, 5.1.1, 5.3.1, 6.2.1, 6.3.1, 6.4.1, 7.1.1, 7.2.1, 8.1.1, 9.1.1	тривиальная
3.3.1, 4.1.1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$
5.2.1, 5.2.3, 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 2p_{1,3} \end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3}+1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(p_{1,3}+1) \end{pmatrix}$

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$	Эквиваффинная связность (без кручения)
3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 4.2.1 ($\lambda=-1/2$), 5.2.1, 5.2.3, 5.3.1, 6.2.1 ($\lambda=-1/2$), 6.4.1 ($\lambda=-1/2$), 8.1.1	тривиальная
3.3.1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{1,3} \end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

В остальных случаях пространство не допускает эквиваффинной (локально эквиваффинной) связности.

Доказательство. Действительно, пусть, например, $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – трехмерное симметрическое однородное пространство 3.5.1 (либо 3.5.2, либо 3.5.3), тогда

$$\Lambda(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

($\Lambda|_{\mathfrak{g}}$ является изотропным представлением подалгебры $\mathfrak{g}$). Отображение Λ является $\mathfrak{g}$ -инвариантным, поэтому инвариантная аффинная связность имеет вид (см. [1]):

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, при любых $p_{2,3} \in \mathbb{R}$ имеем $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$ (и $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$). Тензор кривизны

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}^2 + \delta & 0 \\ p_{2,3}^2 - \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}^2 + \delta \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}^2 - \delta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}^2 + \delta \\ 0 & p_{2,3}^2 - \delta & 0 \end{pmatrix},$$

$\delta = 0$ в случае 3.5.1, $\delta = -1$ в случае 3.5.2, $\delta = 1$ в случае 3.5.3. Тензор Риччи имеет вид

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} -2p_{2,3}^2 + 2\delta & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{2,3}^2 + 2\delta & 0 \\ 0 & 0 & -2p_{2,3}^2 + 2\delta \end{pmatrix}.$$

и является симметрическим. Тензор кручения $T(u_1, u_2) = (0, 0, -2p_{2,3})$, $T(u_1, u_3) = (0, 2p_{2,3}, 0)$, $T(u_2, u_3) = (-2p_{2,3}, 0, 0)$. Если $T=0$ (Λ является связностью без кручения), то $p_{2,3} = 0$ и связность тривиальная. В случаях 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 инвариантная аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

тогда $\text{tr}\Lambda(x) = 0$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$ (и $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$), тензор Риччи является симметрическим; тензор кручения $(2p_{1,2}, 0, 0), (0, 2p_{1,2}, 0), (0, 0, 2p_{1,2})$.

В случаях 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3 инвариантная аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Lambda(\mathfrak{g}) \not\subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$, связность не является эквивариантной. Тензор кручения

$(0, 0, 0), (-p_{1,3} + r_{1,1}, 0, 0), (0, -p_{1,3} + r_{1,1}, 0)$, если $T=0$ (Λ является связностью без кручения), то $r_{1,1} = p_{1,3}$. Имеем $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$, тензор Риччи является симметрическим, т. е. связность является локально эквивариантной.

В случаях 5.2.1, 5.2.3 инвариантная аффинная связность имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + q_{2,3} \end{pmatrix},$$

тензор кручения $(0, 0, 0), (q_{2,3} - r_{1,1}, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{1,1}, 0)$, тензор Риччи является симметрическим, то есть связность является эквивариантной при $3r_{1,1} + q_{2,3} = 0$ ($\text{tr}\Lambda(x) = 0$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$) и $r_{1,1} = q_{2,3}$ ($T = 0$), тогда связность тривиальная. Имеем также $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$, т. е. связность является локально эквивариантной. В случае 5.2.2 связность –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + q_{2,3} + 1 \end{pmatrix},$$

тензор кручения $(0, 0, 0), (q_{2,3} - r_{1,1} + 1, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{1,1} + 1, 0)$, тензор Риччи является симметрическим, связность является эквивариантной при $3r_{1,1} + q_{2,3} + 1 = 0$ ($\text{tr}\Lambda(x) = 0$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$) и $r_{1,1} = 0$, $q_{2,3} = -1$ ($T = 0$), тогда $r_{1,1} = 0$, $q_{2,3} = -1$ и связность имеет вид, приведенный в теореме. Также $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$, т. е. связность является локально эквивариантной.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Заключение

Таким образом, для трехмерных симметрических однородных пространств с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором определено, при каких условиях связность является эквивариантной (локально эквивариантной). Также выписаны в явном виде сами связности, тензоры кручения и тензоры Риччи.

Полученные результаты могут найти приложения при исследовании многообразий, при изучении пространств со связностью, а также в теории относительности, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др., поскольку многие фундаментальные проблемы в этих областях сводятся к исследованию инвариантных объектов на симметрических пространствах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Можей, Н. П.** Симметрические однородные пространства неразрешимых групп Ли и связности на них / Н. П. Можей // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В. Природазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2018. – № 2(52). – С. 15–23.
2. **Nomizu, K.** Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Cambridge Univ. Press, 1994. – 263 p.
3. **Картан, Э.** Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – М.: Моск. ун-т, 1960. – 307 с.
4. **Широков, П. А.** Симметрические пространства первого класса / П. А. Широков // Избранные работы по геометрии. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. – С. 366–383.
5. **Berezovski, V.** Geodesic mappings of affine-connected spaces onto Riemannian spaces / V. Berezovski, J. Mikeš // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. – 1989. – Vol. 56. – P. 491–494.
6. **Kiosak, V.** Geodesic Mappings of Manifolds with Affine Connection / V. Kiosak, J. Mikeš, A. Vanžurová. – Olomouc: Palacký Univ. Press, 2008.
7. **Eastwood, M.** Metric connections in projective differential geometry / M. Eastwood, V. S. Matveev // Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations (Minneapolis, MN, 2006). – New York: Springer, 2007. – (IMA Vol. Math. Appl.; Vol. 144). – P. 339–351.
8. **Hinterleitner, I.** On the theory of geodesic mappings of Einstein spaces and their generalizations / I. Hinterleitner, J. Mikeš, V. Kiosak // Acta Phys. Debrecena. – 2006. – Vol. 861. – P. 428–435.
9. **Mikeš, J.** On geodesic mappings of manifolds with affine connection / J. Mikeš, I. Hinterleitner. – 2009. – arXiv:math.DG/0905.1839v2.

10. **Гинтерлейтнер, И.** Проективная эквивалентность и пространства эквиаффинной связности / И. Гинтерлейтнер, Й. Микеш // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2010. – Т. 16. – № 1. – С. 47–54.
11. **Mozhey, N. P.** Equiaffine Connections on Three-Dimensional Pseudo-Riemannian Spaces / N. P. Mozhey // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019. – Vol. 40. – No. 8. – P. 1194–1203.
12. **Онищик, А. Л.** Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М. : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.
13. **Kobayashi, S.** Transformation groups in differential geometry / S. Kobayashi. – Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
14. **Кобаяси, Ш.** Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981.
15. **Nomizu, K.** Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // *Amer. Journ. Math.* – 1954. – Vol. 76, no. 1. – P. 33–65.

Поступила в редакцию 17.10.2019 г.

Контакты: mozheynatalya@mail.ru (Можей Наталья Павловна)

Mozhey N. EQUIAFFINE CONNECTIONS ON SYMMETRIC SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS.

The question of description of equiaffine connections on a smooth manifold is studied in the article. In general, the issue of the research is quite complicated. Therefore, it is natural to consider this problem in a narrower class of manifolds, for example, in the class of homogeneous symmetric spaces. The purpose of the work is to describe all invariant equiaffine connections on three-dimensional symmetric homogeneous spaces together with their torsion tensors and Ricci tensors. The author considers the case of the unsolvable Lie group of transformations with a unsolvable stabilizer. In the paper it is determined under what conditions the connection is equiaffine (locally equiaffine) for all three-dimensional symmetric homogeneous spaces. In addition, equiaffine (locally equiaffine) connections, torsion tensors and Ricci tensors are explicitly defined.

Keywords: equiaffine connection, transformation group, symmetric space, torsion tensor, Ricci tensor.

УДК 004.932.72

АЛГОРИТМ ШУМОФИЛЬТРАЦИИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ СИМВОЛЬНОЙ СТРОКИ

Д. В. ЗАЕРКО

магистр физико-математических наук, аспирант

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

В. А. Липницкий

доктор технических наук, профессор

Военная академия Республики Беларусь

Распознавание символьных строк является важной частью проблематики распознавания изображений. Для сегментации зашумленной символьной строки, как растрового изображения, стало традиционным использование вертикальной проекции. В работе предлагается дополнить эту процедуру процессом шумофильтрации. Представлено детальное описание специального проекционного фильтра, как основного инструмента шумофильтрации. Совместно с анализируемой проекцией рассматриваются модельные и скелетная проекции, обеспечивающие эквивалентную замену зашумленных фрагментов и хранящиеся в специализированных базах. Представлен процесс создания баз и обогащения их новыми данными. Созданный алгоритм шумофильтрации реализован на программном языке Java и встроен в библиотеку Java ANPR. Разобран модельный пример фильтрации зашумленной строки, на основе использования этой библиотеки.

Ключевые слова: растровые изображения, вертикальная и горизонтальная проекции, база проекций, алфавитная база проекции, средняя ширина символьной проекции, границы проекции, шумофильтрация символьных строк, оценка допустимого искажения.

Введение

Со времени возникновения цифровых систем обработки, передачи и хранения информации появилась и проблема надежности этих систем, достоверности их работы. Возникавшие сложности постепенно обобщились в единую проблему распознавания сигналов и изображений [1; 2; 3]. Оба направления имеют уже солидную историю, свои, существенно различные, методы и средства исследований.

Распознавание номерных знаков транспортных средств относится к проблематике распознавания изображений. На первый взгляд, номера эти носят линейную и строго ограниченную структуру. Реально же мы имеем дело, как правило, с некачественным двумерным снимком исследуемого номера. Задача заключается в максимальном приближении изображаемого номера к реальному качественному снимку. Имеем классическую задачу восстановления изображения [4].

Технологии распознавания номерных знаков автомобилей востребованы на современных автомагистралях. Она является основой контроля автомобильных потоков и автоматического отслеживания правонарушений. Технические средства, задействованные для визуального наблюдения, зачастую используют системы распознавания, несовершенные в алгоритмическом плане и в плане безошибочности распознавания номерных знаков. Последнее особенно актуально при обработке изображений, выполненных в неблагоприятных погодных условиях, которые негативно влияют на качество изображения и вид самого номерного знака.

© Заерко Д. В., 2020

© Липницкий В. А., 2020

Весь процесс распознавания можно разбить на отдельные, но тесно взаимосвязанные этапы, не успешность одного из которых повлечет серьезные ошибки или невозможность выполнения последующих этапов.

Сегментация и коррекция символов являются одним из фундаментальных этапов распознавания номерных знаков, т. к. остальные этапы полностью зависят от полученных результатов. Если сегментация выполнена неуспешно, то анализируемый символ может быть, например, разделен на две или более частей, что делает невозможным сопоставить отдельные части и, как следствие, провести дальнейшую обработку.

Несомненно, что этап очистки от шумов на этапе анализа строки был бы очень полезен, т. к. позволял бы избегать дальнейших трудоемких и бессмысленных действий на последующих этапах.

В научной литературе слабо представлены алгоритмы, используемые на этапе сегментации символов из символьной строки [3, 5 – 7], а очистка от помех на этапе сегментации и вовсе сводится лишь к отделению границ номера от символьной строки.

Уточним, что современный номерной автомобильный знак содержит кроме символьной строки еще и другие элементы, такие как рамка номерного знака, номер региона или области и т. д. (см., например, рис. 1).



Рис 1. Номер автомобиля из Республики Беларусь

Существует несколько способов сегментации однострочных номеров. Наиболее часто используемые – это методы горизонтальной проекции и сегментация на их основе. Для однострочных номеров сегментация представляет собой способ нахождения границ между символами по горизонтали. Сегменты реального изображения номера содержат, кроме ожидаемых символов, еще и шумы – элементы, такие как точки, символы знаков тире между символами, детали, не относящиеся к номерному знаку. Следующие фазы после сегментации – это “усиление” сегментов и непосредственное распознавание символов строки, однако, эти фазы возможны только в случае корректного завершения фазы сегментации символьной строки.

Из вышесказанного следует, что наиболее перспективным и многообещающим будет изучение символьной строки, представляющей собой набор монохромных пикселей, из которых состоят отдельные символы, а также проекции этой строки на ось Ox . Они и будут главными объектами нашего исследования. Предметом изучения будет описание и применение алгоритма проекционной фильтрации монохромной, пиксельной строки на этапе ее построения.

Таким образом, первоочередным и фундаментобразующим этапом является этап сегментации с последующей очисткой сегмента от помех. В статье, представленной ниже, подробно рассмотрен метод горизонтальной проекции, а также представлен один из методов очистки сегментов символьной строки от шумов на этапе построения проекции. Предложенный метод впервые вводит в рассмотрение очистку отдельных сегментов символьной строки, представленных в виде фрагментов проекции, а не только отделение анализируемой строки от ее границ, что было рассмотрено прежде [8].

- 1) изображение является растровым (пиксельным), монохромным;
- 2) построение проекции производится только по фрагменту изображения, на котором представлена символьная строка (включая как символы, так и искажения, подлежащие фильтрации);
- 3) символьная строка обязательно присутствует на изображении;
- 4) строки включают: арабские цифры, латинские или кириллические символы алфавита, общепринятые разделители (тире, двоеточие, точка и т. д.);

5) символьная строка может быть любой длины, однако, условимся, что она конечна.

Горизонтальная проекция позволяет выполнить сегментацию посимвольно, основываясь на определении пробелов между символами. Адаптивный порог используется для разделения темных областей на переднем плане от светлого фона с неравномерным освещением. Учитывая пороговое значение, можно вычислить горизонтальную проекцию $p_f(x)$ для номера $f(x, y)$. Использование проекции позволяет определить горизонтальные границы между сегментированными символами.

Основная цель алгоритма сегментации – это поиск пиков (локальных экстремумов) функции $p_f(x)$, которые связаны с пробелами между символами. Охарактеризуем несколько важных значений на графике горизонтальной проекции $p_f(x)$:

– v_m – максимальное значение горизонтальной проекции, определяемое как $v_m = \max_{0 \leq x < w} \{p_f(x)\}$, где w это ширина номера в пикселях;

v_a – усредненное значение горизонтальной проекции $p_f(x)$, рассчитываемое как
$$v_a = \frac{1}{w} \sum_{x=0}^{w-1} p_f(x);$$

– v_b – значение, используемое как базовое для оценки вертикальных пиков; базовое значение v_b – всегда рассчитывается как $v_b = 2v_a - v_m$; разумеется, значение v_a должно лежать на вертикальной оси между значениями v_b и v_m .

Итерационный алгоритм сегментирования найдет максимумы в графике функции вертикальной проекции. Пики представляют собой границы промежутков – разрывов между символами. После нахождения пиков производится обнуление пиков и итерационное повторение алгоритма до тех пор, пока не будет найден глобальный экстремум. Все вышеизложенное может быть представлено в виде следующего пошагового алгоритма.

1. Определение индекса максимального значения горизонтальной проекции $x_m = \arg \max_{0 \leq x < w} \{p_f(x)\}$.
2. Определение левой и правой границы пиков (поиск минимального и максимального значения проекции относительно локального максимума в x_m):

$$x_l = \max_{0 \leq x \leq x_m} \{x \mid p_f(x) \leq c_x p_f(x_m)\};$$

$$x_r = \min_{x_m \leq x \leq w} \{x \mid p_f(x) \leq c_x p_f(x_m)\}.$$

3. Сегментация номера по горизонтали по точкам x_m .
4. Обнуление вертикальной проекции $p_f(x)$ на интервале $\langle x_l, x_r \rangle$.
5. Если $p_f(x_m) < c_w v_m$, алгоритм оканчивается (найжены все пики на графике проекции), т. е. переходим на шаг 7. Проверяем, является ли точка x_m значимой, т. е. не относится к разряду шумов.
6. Переход к шагу 1.
7. Окончание алгоритма.

В приведенном алгоритме участвовали, в частности, две следующие никак не отмеченные ранее константы:

c_x – используется для определения границ пиков x_m (оптимальное $c_x = 0.7$). Другими словами c_x позволяет оптимально определить левую и правую границы относительно локального максимума $p_f(x_m)$ в точке x_m . Под оптимальным значением имеется в виду средняя величина, полученная статистическими методами после анализа множества изображений [8]. Однако эта величина, как и другие “оптимальные”, может иметь иные значения в зависимости от качества обрабатываемых изображений.

c_w — определяет минимальную высоту пика, связанную с максимальным значением проекции v_m , если высота пика ниже этого минимума, то пик не будет считаться как пробел между символами.

Очень важным является выбор значения константы c_w . Чрезмерно малое значение указывает на множество пиков, которые будут представлены как пробелы и, как следствие, символы будут разбиты на части. Чрезмерно большое значение c_w приведет к тому, что не все пики будут рассматриваться как пробелы, и символы будут склеены между собой. Наиболее приемлемое значение $c_w = 0.86$ [8]. Чтобы обеспечить правильное поведение алгоритма эти константы должны удовлетворять следующему соотношению

$$\begin{cases} \forall (x_l, x_m, x_r) \in P : c_w v_m > p_x(x_l), \\ \forall (x_l, x_m, x_r) \in P : c_w v_m > p_x(x_r), \end{cases}$$

где P — это множество всех пиков x_m со связанными пиками x_l, x_r .

2. Зашумленность символьной строки.

Анализ и фильтрация проекции символьной строки

Проекция растровых изображений часто используется для структурного анализа изображений с целью выявления закономерностей, которые в свою очередь будут использоваться при решении практических задач распознавания.

Растровая проекционная фильтрация предполагает анализ фрагментов проекции на наличие шаблонов, т. е. наборов последовательно повторяемых признаков на фиксированном фрагменте проекции. Под признаками будем иметь в виду последовательность максимумов и минимумов проекции или совпадение множества пикселей между чередующимися экстремумами, с некоторой допустимой погрешностью. Подчеркнем то, что использование фильтров будет возможно только в случае наличия не отдельных признаков, а в случае наличия целого их спектра.

Уточним понятие шума, а также признаков, указывающих на наличие его в фиксированном фрагменте проекции. Понятие шума может существенно изменяться в зависимости от начальных данных (исходной символьной строки) и от постановки задачи (воздействующих условий).

Далее, для примера, проанализируем возможные “шумы” на номерных автомобильных знаках. В контексте данной работы, под шумами с физической точки зрения будут рассматриваться: пятна грязи, т. е. песок, мазут и т. д. (рис. 3), царапины и трещины на полотне знака (рис. 4), выцветшая или отслоившаяся краска символов (рис. 5). На изображении эти шумы могут быть представлены в виде смазанных символов по вертикали и горизонтали (поток грязи); фрагмента символа, отдельных точек в составе символа, четкого контура символа, но с выцветшим центром до цвета заднего фона (выцветание и царапины). Исходя из вышесказанного, простейшими составляющими фрагментами шума на изображении являются: несвязанные, отдельно стоящие точки, вертикальные линии, выступающие по размеру относительно большинства символов и не выступающие за границы номера, а также горизонтальные линии, впереди и позади которых нет символов номера. Все три типа шума могут быть выявлены путем анализа экстремумов вертикальной проекции с последующим составлением их портрета или шаблона (набора обязательно присутствующих признаков).

Следующий ключевой этап после анализа проекции на наличие шумов в нашем исследовании — это этап корректировки проекции. Этап корректировки предполагает преобразование исходного зашумленного фрагмента проекции к фрагменту без шума, путем изменения графика вертикальной проекции. Рассмотрим два примера возможных зашумленных символьных строк.



Рис. 3. Пятна грязи на номерном знаке



Рис. 4. Царапины на номерном знаке

Рис 5. Отслоившиеся символы
на номерном знаке

В первом случае рассмотрим ситуацию, при которой один из знаков, а именно, символ тире имеет зашумленность, выраженную в виде набора несвязанных точек (рис. 6). Наличие шума может привести к росту экстремумов на этом отрезке (амплитуды проекции) и, как следствие, восприятие этого символа, либо как единое целое с соседними символами: “В-0”, “В-”, “-0”, либо как отдельный, и вовсе не распознаваемый символ алфавита. В случае восприятия как единое целое, алгоритм распознавания сегментированных фрагментов, выполняемый на следующем этапе, может быть легко заиклен, т. к. зачастую он циклический и, в лучшем случае, ограничен числом итераций, зависящим от заданного числа символов в символьных строках, а в худшем, не имеет ограничений как таковых. При нераспознаваемом символе – неверное распознавание номера. Во втором случае проанализируем ситуацию, когда символ тире первый в номерном знаке, что является недопустимым. Следовательно, такой символ не должен восприниматься как символ регистрационного номерного знака, а только как его визуальное оформление (сам номер располагается между знаками тире). Как и в первом примере, распознавание такой символьной строки, как номерного знака на этапе распознавания символов приведет либо к заикливанию, либо к распознаванию лишь части номера.



Рис. 6. Пример проекции монохромного изображения

Опишем следующий набор предположений, или набор признаков, характеризующий особые свойства фрагментов проекции и позволяющий сегментировать и корректировать зашумленные символы.

1. Если проекция на некотором фрагменте имеет ярко выраженный минимум, причем он находится между двумя локальными максимумами, не превышающими другие максимумы более чем на величину $\epsilon > 0$, то фрагмент потенциально характеризует отдельный знак, границы которого совпадают с локальными максимумами.

2. Существует предположение, что значение проекции (число пикселей) на определенном фрагменте для отдельного символа может быть четко сопоставлено с **конечным** набором модельных проекций, где каждая модельная проекция характеризует один единственный символ алфавита с некоторой допустимой погрешностью. Следовательно, исходя из вышесказанного, существует возможность, опираясь на множество модельных проекций, различать проекцию самого символа от шума, учитывая некоторую погрешность $\epsilon \geq 0$. Тем самым можно проводить замену фрагментов проекции (**коррекцию**) еще на этапе сегментации, либо в случае повторного этапа сегментации, когда этап распознавания, следующий за этапом сегментации, не дал удовлетворительных результатов.

3. Фрагмент проекции, минимум которого значительно превышает все остальные минимумы (порог $\tau_{\min} > 0$) на всем протяжении проекции, потенциально не подлежит распознаванию, в связи с сильной зашумленностью.

Выполнение первого предположения позволяет провести сегментацию символьной строки исходя только из анализа проекции. Выполнение второго предположения позволяет сегментированные фрагменты сопоставить с модельной проекцией и провести отделение проекции шума от проекции символа. Другими словами, выделяются две основные задачи или два этапа: обнаружение зашумленного сегмента проекции и коррекция или замена целого сегмента на некоторый “модельный” сегмент без шума.

3. Скелетная и модельная проекции.

Алгоритм-коррекция вертикальной проекции

Ключевую роль в фильтрации проекции отдельного взятого сегмента играет конечное модельное множество проекций p_{mod} , где модельная проекция – это “размытая” проекция выделенного символа, т. е. такая проекция, которая описывает нечеткую или размытую

пиксельную границу символа, но сохраняющая основной пиксельный скелет (чистую проекцию символа) [9; 10].

Скелетная проекция или чистая проекция – это множество целых значений $p_{frame}(x_{m,0}), p_{frame}(x_{m,1}), \dots, p_{frame}(x_{m+1,z(m,m+1)})$ функции проекции $p_{frame}(x)$, содержащее $z(m, m+1) \in N$ целых значений проекций символа на сегменте и ограниченных границами символа $[x_m, x_{m+1})$, $m \in [0, w-1]$. Скелетная проекция – это проекция символа без помех, ее строят на основе искусственного шаблона.

Модельная проекция символа – множество значений $p_{mod}(x_{m,0}), p_{mod}(x_{m,1}), \dots, p_{mod}(x_{m+1,z(m,m+1)})$ функции проекции $p_{mod}(x)$, слева и справа ограниченное предполагаемыми границами сегментации $[x_m, x_{m+1})$, $m \in [0, w-1]$ и, также как и скелетная, содержащая $z(m, m+1) \in N$ целых значений. Причем, модельная проекция кроме набора значений характеризует еще и величину $sum(\varepsilon_{mod})$, где $\sum_{m=0}^{w-1} \varepsilon_{mod}(p_{mod}(x_m)) = sum(\varepsilon_{mod}) \geq 0$.

Эта суммарная оценка допустимого “искажения” проекции символа. Допустимого – в смысле сохранения основных уникальных черт распознаваемого символа на сегменте.

В свою очередь, $\varepsilon_{mod}(p_{mod}(x_m))$ – это допустимое искажение проекции для столбца x_m (в случае вертикальной проекции) относительно суммы всех не закрашенных пикселей в этом столбце. Предположим далее, что задано не жесткое ограничение “искажения”, т. е. важна суммарная оценка для каждой модельной проекции, а не точное совпадение ограничения в “искажении” для отдельно взятого столбца. Такая постановка вносит определенную свободу проекции, т. е. позволяет охватить более широкий спектр возможных проекций при фильтрации. Аналогично определяется $p_{real}(x)$ для анализируемой символьной строки.

Очень важным является совпадение числа значений проекции, по которым вычислялась проекция на сегменте $[x_m, x_{m+1})$, как для сегмента анализируемой символьной строки, так и для модельного или скелетного сегмента. Иначе модельная проекция будет неприменима для оценки зашумленных сегментов. В связи с тем, что точное число значений проекции $z(m, m+1)$ на сегменте $[x_m, x_{m+1})$, $m \in [0, w-1]$ зависит от ширины символа, далее будем использовать ее среднюю величину $\bar{z}$. Вычисление средней ширины сегмента проекции для символа – задача, решаемая с использованием простейших статистических методов для анализа вертикальной проекции символьных строк. Для статистического анализа начальные и конечные точки сегментов символьной строки могут быть извлечены из набора тестовых изображений. Важными характеристиками изображений для формирования статистической выборки являются их одинаковое разрешение, а так же однотипность символьных строк. Под однотипностью имеется в виду тот факт, что проводится анализ номерных автомобильных знаков одного государства и одного образца.

В статье [11] представлена пошаговая инструкция анализа и представлен пример вычисления для двух типов номерных знаков, однако аналогичный анализ возможно провести с большим числом типов. В данной статье первый тип представлен номерными знаками Словацкой Республики, где каждая строка разбита, как правило, на $N = 12$ сегментов. Второй тип – номера Республики Беларусь (образца 2004 г.) – также 12 сегментов. Учитывая значения вариации для первого типа, среднее число значений, достаточное для описания одного сегмента проекции с одним символом $\bar{z} = 11,28 \approx 11$ (детали расчета смотри в [11]).

Величина $\varepsilon_{\text{mod}}(p_{\text{mod}}(x_{m,0}, x_{m,1}, \dots, x_{m+1, \bar{z}}))$ – это множество поточечных разностей между множеством значений проекции модельного символа $p_{\text{mod}}(x_{m,0}, x_{m,1}, \dots, x_{m+1, \bar{z}})$ и множеством значений скелетной проекции этого же символа $p_{\text{frame}}(x_{m,0}, x_{m,1}, \dots, x_{m+1, \bar{z}})$, где $\bar{z}$ – среднее число значений проекции на сегменте

$$\varepsilon_{\text{mod}}(p_{\text{mod}}(x_m)) = \varepsilon_{\text{mod}}(p_{\text{mod}}(x_{m,0}) - p_{\text{frame}}(x_{m,0}), p_{\text{mod}}(x_{m,1}) - p_{\text{frame}}(x_{m,1}), \dots, p_{\text{mod}}(x_{m+1, \bar{z}}) - p_{\text{frame}}(x_{m+1, \bar{z}})). \quad (1)$$

При наличии наборов A и N модельных проекций для символов латинского алфавита и арабских цифр можно провести замену зашумленного сегмента проекции на сегмент скелетной проекций. Замена возможна, при условии, что анализируемый фрагмент проекции α может быть оценен исходя из имеющихся множеств модельных проекций, т. е. $\alpha \in [A \cup N]$. Оценка $\alpha \in [A \cup N]$ предполагает то, что сумма поточечных разностей проекций для анализируемого сегмента меньше или равна наибольшей из всех поточечных сумм модельных проекций. Опишем шаги предлагаемого алгоритма шумофильтрации.

1) Если для сегмента проекции $[x_m, x_{m+1})$, $m \in [0, w-1]$ выполняется условие $\sum_{m=0}^{w-1} \sum_{z=0}^{\bar{z}} p_{\text{real}}(x_{m,z}) - p_{\text{mod}}(x_{m,z}) = \text{sum}(\varepsilon_{\text{real}}) \leq (\varepsilon_{\text{mod}})$, то шаг 2.

2) Замена сегмента $[x_m, x_{m+1})$, $m \in [0, w-1]$ проекции на скелетную $p_{\text{frame}}(x_{m,0}), \dots, p_{\text{frame}}(x_{m+1, \bar{z}})$. Если $m \leq w-1$ то шаг 3, иначе шаг 5.

3) Переход к следующему сегменту проекции: шаг 1 при $m = m + 1$.

4) Если $\alpha \in [A \cup N]$, то переход к следующему множеству модельных проекций для заданного алфавита (символы латинского алфавита и арабские цифры) и шаг 1, иначе сегмент проекции не анализируем: $\alpha \notin [A \cup N]$ и следует пропустить его, т. е. перейти на шаг 3.

5) Завершение алгоритма.

4. Об аспектах формирования словаря модельной и скелетной проекции на основе библиотеки Java ANPR. Средняя ширина символьной проекции

При реализации описанного выше алгоритма фильтрации особую роль играет подготовительный этап. На этом этапе в рамках выбранного множества $[A \cup N]$ необходимо сформировать численное описание скелетной проекции для символов латинского алфавита (A-Z) и цифр в арабской записи (0-9) и провести запись этих значений проекций в специализированный словарь или базу данных. Рассмотрим подготовительный процесс для распознавания автомобильных номерных знаков.

В качестве хранилища скелетных и модельных проекций выбрана нереляционная, популярная база данных MongoDB. Выбор хранилища был обусловлен следующими преимуществами.

1. Быстродействием. Особенно важен аспект “быстрого” чтения данных. Операция чтения будет задействована намного чаще, чем операции записи/изменения/удаления, используемые на этапе формирования.

2. Легкой масштабируемостью, что особенно актуально при большом объеме данных и росте этих данных.

3. Хранением информации в документно-ориентированном виде, что означает отсутствие жесткой схемы документа.

4. Хранения данных в JSON формате.

Для получения численного описания **скелетной или модельной проекций** используем уже имеющиеся алгоритмы в проекте Java ANPR, применим алгоритм построения проекции к “не искаженным” однотипным изображениям символьных строк или к изображениям с искусственным искажением.

Здесь под типом понимается не только однострочность, но и принадлежность к определенному государственному формату. С практической точки зрения очень важным является определение приблизительных границ символа, точнее, границ его проекции на ось Ox или средней ширины сегмента для заданного типа. Используя вычисленную среднюю ширину сегмента [11], и число предполагаемых сегментов (стандарт номера по его типу задает число символов в строке), можно определить число значений проекции, необходимое для описания одного сегмента и представляющей собой символ. После вычисления провести запись значений проекции символа в базу.

Рассмотрим архитектуру приложения Java ANPR и детальное формирование скелетной и модельной проекции.

Проект Java ANPR построен по принципу распределения обязанностей между пакетами. Каждый пакет (package) содержит набор классов, обеспечивающий выполнение одного из этапов процесса распознавания. Наиболее важные из них:

neuralnetwork – содержит описание нейросети для распознавания символов;

recognizer – отвечает за непосредственную классификацию и распознавание символов;

imageanalysis – отвечает за первоначальную обработку изображения, выделение фрагментов с изображением номера, выравнивание и фрагментацию номера. Содержит классы, отвечающие за построение пиксельной матрицы, построение проекции и поиск пиков. Наибольший интерес представляет класс Plate, содержащий методы для формирования вертикальной проекции и вычисления точек сегментации проекции.

Применяя программные методы к тестовому изображению, и проведя визуальное сопоставление конкретного символа с ассоциированным с ним фрагментом проекции (множество значений проекции), можно сделать соответствующую запись (элемента) фрагмента проекции в БД. Далее этот фрагмент можно использовать, как **скелетную** проекцию символа. Аналогичным образом делается запись элемента фрагмента для **модельной** проекции. Здесь различие заключается лишь во внесении искусственного искажения на тестовое изображение с искусственно заданной величиной этого отклонения. Величина искажения для символа ε_{mod} вычисляется как разность между скелетной проекцией и модельной. Если суммарная оценка $\text{sum}(\varepsilon_{\text{mod}})$ удовлетворяет предполагаемой, то проводится запись фрагмента модельной проекции в БД, с привязкой к ассоциированному символу и общему для всего множества модельных проекций $\text{sum}(\varepsilon_{\text{mod}})$.

Отметим, что зашумленные символы должны подлежать распознаванию либо имеющимися алгоритмами Java ANPR, либо путем человеческого анализа с последующей привязкой распознанного значения зашумленного символа к набору значений его проекции. Другими словами, предполагается анализ и распознавание искаженного изображения до определенного предела, при котором сохраняются какие-либо признаки или контуры символа.

Таким образом построена программная реализация алгоритма шумофильтрации на языке Java, которая включена в состав пакета Java ANPR.

5. Применение алгоритма шумофильтрации при распознавании номерных знаков

Опираясь на алгоритм сегментации, реализуем программный алгоритм, описанный выше, на языке высокого уровня Java. Воспользуемся алгоритмом сегментации,

базирующей на построении вертикальной проекции, которая представлена в пакете JavaANPR. В общем случае язык описания может быть любым, выбор Java обусловлен наличием готового базового алгоритма, удобством и перспективностью языка [12].

В качестве примера рассмотрим изображение номерного знака на рисунке (рис. 7). Акцентируем наше внимание на сегментации и проекционной фильтрации зашумленных фрагментов самого номера, всецело предоставляя процессы выделения, выравнивания по горизонтали (алгоритм Хафа) и размерной трансформации номерного знака, алгоритмам пакета Java ANPR.

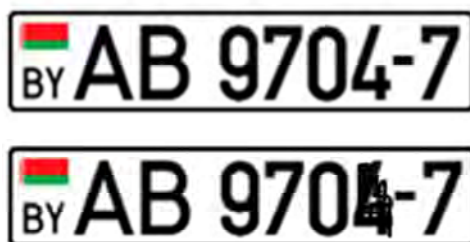


Рис. 7. Зашумленный автомобильный номер и исходный

Учитывая модельные и скелетные представления проекций, реализуем алгоритм, описанный выше в виде псевдокода. Далее применим его для зашумленных изображений, последовательно увеличивая количество зашумленных символов и “степень” допустимого зашумления. Получение результаты представлены далее.

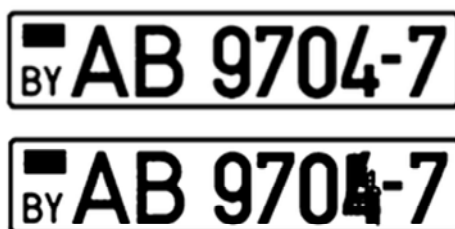


Рис. 8. Монохромное, растровое представление автомобильного номера

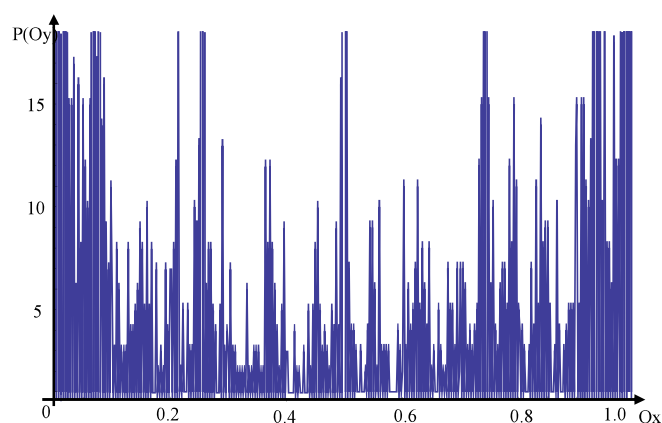


Рис. 9. Проекция строки до применения алгоритма фильтрации, для исходного номера

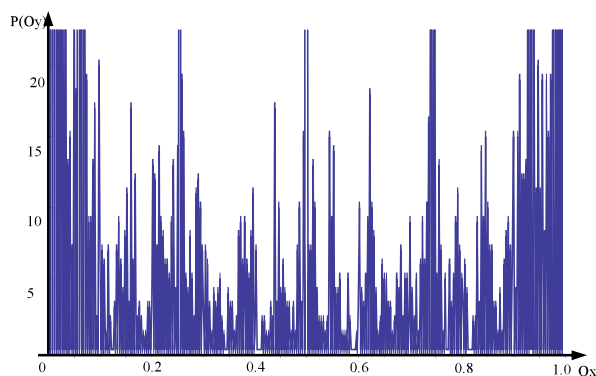


Рис. 10. Проекция строки до применения алгоритма фильтрации, для зашумленного номера

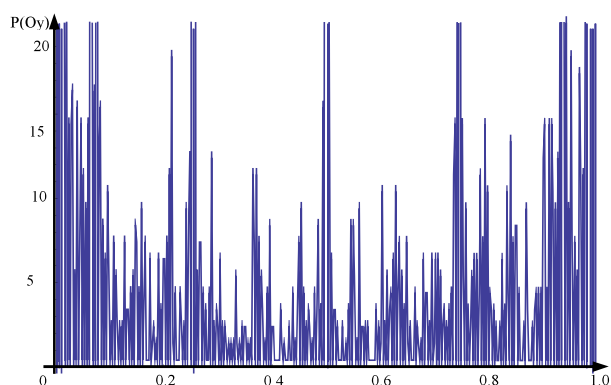


Рис. 11. Проекция строки после применения алгоритма фильтрации для зашумленного номера

На рисунках 11 и 12 наглядно продемонстрирована замена зашумленного фрагмента проекции, на фрагмент проекции скелетного символа, наиболее близко удовлетворяющий соотношению (1). Такая четкая и наглядная замена проекции произошла благодаря тому, что, во-первых, изображения были достаточно высокого качества для распознавания, а во-вторых, при создании модельных проекций использовалось не зашумленное изображение (рис. 7) и, в третьих, зашумлен был один из символов, а не группа соседних. Напомним, что основной целью примера было наглядная демонстрация основной идеи, описанной выше, применения алгоритма на изображении.

Предложенный алгоритм не отменяет последующих этапов распознавания. Напомним вид условия (1) и то, что он носит всего лишь приблизительную оценку, ограниченную имеющимся в наличии множеством модельных проекций. Представленный алгоритм не может являться последним этапом в цепочке распознавания символьной строки.

Заключение

Распознавание автомобильных номерных знаков является одной из задач распознавания изображений, а точнее, распознавания символьных строк. Процесс распознавания символьных строк как растровых изображений включает в себя множество алгоритмов, среди них процесс сегментации является одним из фундаментальных, влияющим на дальнейший процесс. Как правило, сегментация проводится на основе построения проекции символьной строки. В работе процедура построения проекции дополнена процессом шумофильтрации.

Для успешной шумофильтрации введены модельные и скелетная проекции, обеспечивающие эквивалентную замену зашумленных фрагментов и хранящиеся в специализированных базах. Алгоритм шумофильтрации реализован на программном языке Java и встроен в библиотеку Java ANPR. В завершении работы эффективность данного алгоритма успешно апробировано на конкретных примерах. Описанный алгоритм является универсальным и может применяться для различного типа символьных строк. Шаги, описанные для построения скелетной и модельной проекций, так же могут быть расширены на большее число алфавитов. Представленный алгоритм описывает фильтрацию проекции при очистке символьных строк от помех различного характера. Он послужит отправной точкой для дальнейших исследований.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Gonzales, R. C.** Digital image processing / R. C. Gonzales, R. E. Woods. – 2-nd edition. – Prentice-Hall, 2002. – 793 p.
2. **Фисенко В. Т.** Компьютерная обработка и распознавание изображений / В. Т. Фисенко, Т. Ю. Фисенко. – СПб. : ИТМО, 2008. – 192 с.
3. **Sawaki, M.** Text-Line Extraction and Character Recognition of Document Headlines With Graphical Designs Using Complementary Similarity Measure / M. Sawaki, N. Hagita // IEEE Trans. PAMI, 1998, vol. 20, No. 10. – Pp. 1103–1109.
4. **Визильтер, Ю. В.** Обработка изображений и распознавание образов : методическое пособие / Ю. В. Визильтер. – М. : МИРЭА, 2010. – 464 с.
5. **Jin L. W. and Qin J. Z.** Car plate number characters recognition using Gabor orientation features and neural networks // IEEE Int. Conf. Neural Networks & Signal Processing, 2003. – Pp. 1628–1631.
6. Partha Sarathi Giri. Text information extraction and analysis from images using digital image processing techniques. // Special Issue of International Journal on Advanced Computer Theory and Engineering (IJACTE), Volume 2, 2013. – Pp. 66–71.
7. Yungang Zhang and Changshui Zhang. A new algorithm for character segmentation of license plate. // IEEE Intelligent Vehicles Symposium, 2003. – Pp. 106–109.
8. Ondrej Martinsky. Algorithmic and Mathematical Principles of Automatic Number Plate Recognition Systems. // B. Sc.hesis, Brno University of Technology, Faculty of Information Technology, Department of Intelligent Systems, 2007.
9. **Заерко, Д. В.** Применение модифицированных алгоритмов Java ANPR для автоматического распознавания номеров автомобилей / Д. В. Заерко, В. А. Липницкий // Информационные технологии и системы 2018 (ИТС–2018): материалы международной научной конференции, БГУИР, Минск, Беларусь, 25 октября 2018 г. – С. 286–287.
10. **Заерко, Д. В.** Фильтрация сегментной проекции символьной строки на этапе сегментации / Д. В. Заерко, В. А. Липницкий // Технические средства защиты информации : тезисы докладов XVII Белорусско-российской научно-технической конференции, Минск, 11 июня 2019 г. / Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники ; редкол.: Т. В. Борботько [и др.]. – Минск, 2019. – С. 29–30.
11. **Заерко, Д. В.** Алгоритм коррекции проекции однострочного номера / Д. В. Заерко, В. А. Липницкий // Информационные технологии и системы 2019 (ИТС 2019) : материалы международной научной конференции, БГУИР, Минск, Беларусь, 25 октября 2019 г. = Information Technologies and Systems 2019 (ITS 2019) : Proceeding of The International Conference, BSUIR, Minsk, 25th October 2019 / редкол.: Л. Ю. Шилин [и др.]. – Минск : БГУИР, 2019. – С. 210–211.
12. **Заерко, Д. В.** Вычисление среднего расстояния между пиками горизонтальной проекции / Д. В. Заерко, В. А. Липницкий // Системный анализ и прикладная информатика. – 2019. – № 4. – С. 4–8.

Поступила в редакцию 13.01.2020 г.

Контакты: zaerko1991@gmail.com (Заерко Денис Владимирович)

Zaerko D., Lipnitsky V. NOISE FILTRATION ALGORITHM FOR VERTICAL PROJECTION OF SYMBOL STRING

Symbol string recognition is an important part of image recognition. The use of vertical projection is common for segmentation of distorted symbol string as a bitmap image. In the article the authors suggest supplementing this procedure with a noise filtration process. The article contains a detailed description of a special projection filter used as a main tool for noise filtration. The projection is analysed together with model and skeletal projections which provide the equivalent substitution of noisy fragments and are stored in specialized bases. The process of creating bases and enriching them with new data is presented. The algorithm of noise filtration is implemented in the software language Java and is built into the library Java ANPR. A model example of filtering string noise based on the use of this library is presented.

Keywords: bitmap images, vertical and horizontal projections, projection base, alphabetical projection base, average width of symbol projection, projection border, noise filtration of symbol string, estimation of permissible distortion.

УДК 629.114.2

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КУРСОВОГО ДВИЖЕНИЯ И ВЕРТИКАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ ЛЕГКОВОГО АВТОМОБИЛЯ

Э. И. Ясюкович

кандидат технических наук, доцент

Белорусско-Российский университет (г. Могилев, Беларусь)

Рассматривается разработанная методика имитационного моделирования курсового движения и вертикальной динамики легкового автомобиля с передними управляемыми колесами по опорной поверхности с микропрофилем, содержащая расчетные динамические схемы, математические модели и программное обеспечение. Обсуждаются некоторые результаты проведенных расчетных исследований.

Ключевые слова: легковой автомобиль, курсовое движение, вертикальная динамика, микропрофиль опорной поверхности, управляемые колеса, математическая модель, траектория движения, программное обеспечение, имитационное моделирование.

Введение

Повышение интенсивности движения на скоростных автомобильных трассах требует высокой надежности систем управления курсовым движением колесных машин при выполнении ими различных маневров. Поэтому эффективность эксплуатации автомобилей, обладающих высокой маневренностью, курсовой устойчивостью и управляемостью, требует рационального выбора конструктивных параметров их ходовой части, характеристик подвески и шин. Для выполнения такого выбора необходима специальная методика оценки, в качестве которой может быть использовано программное средство имитационного моделирования курсового движения и вертикальной динамики автомобилей по современным автомобильным трассам.

В связи с этим в настоящей работе поставлена задача разработки математической модели и программного обеспечения для имитационного моделирования движения легкового автомобиля по автомобильным дорогам, которое позволило бы проводить виртуальные испытания их управляемого курсового движения и вертикальной динамики.

Таким образом, целью настоящей работы является разработка математического и программного обеспечения для проведения имитационного моделирования курсового движения и вертикальной динамики легкового автомобиля с учетом моделируемого микропрофиля опорной поверхности – дороги.

Математическая модель курсового движения и вертикальной динамики автомобиля

В данной постановке задачи для имитационного моделирования автомобиля необходима его математическая модель, содержащая две подсистемы: курсовое движение и вертикальная динамика.

Для разработки математической модели названных подсистем введем следующие независимые (обобщенные) координаты: x_c, y_c, z_c – перемещения центра масс автомобиля по продольной ОХ, поперечной ОУ и вертикальной ОZ осям; z_1, z_2, z_3, z_4 – вертикальные перемещения центров масс колес (неподрессоренных масс) по вертикальным осям

φ – угол поворота остова автомобиля вокруг проходящей через его центр масс (точку С) вертикальной оси (курсовой угол), ψ, ϕ – угловые перемещения вокруг центральных продольной и поперечной осей поддрессоренной массы автомобиля.

Подсистемы курсового движения автомобиля содержат три динамических уравнения движения для координат x_c, y_c и четыре уравнения кинематических связей его колес с опорной поверхностью, для координат $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ – углов их увода.

Для вывода уравнений математической модели курсового движения автомобиля построим расчетную схему, рисунок 1.

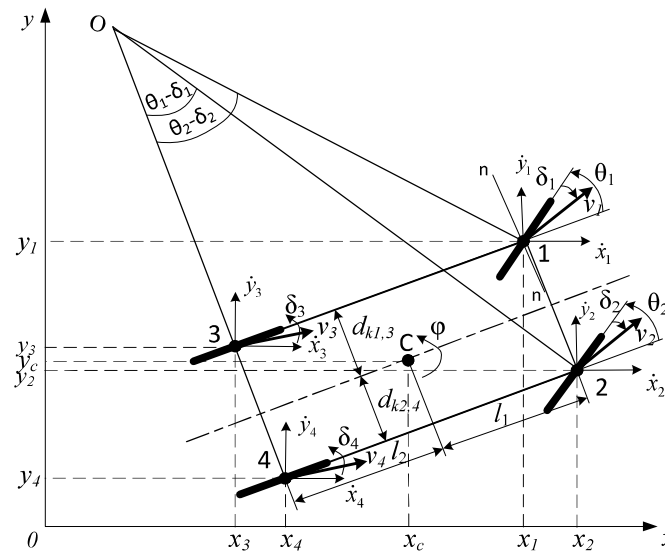


Рис. 1. Расчетная схема курсового движения автомобиля

На рисунке 1 приняты следующие обозначения: l_1, l_2 – расстояние от центра масс автомобиля до центров его передней оси и заднего моста; $d_{kl}, d_{k2}, d_{k3}, d_{k4}$ – половины ширины колеи (передней левой, передней правой, задней левой, задней правой); θ_1, θ_2 – углы поворота переднего левого и переднего правого управляемых колес; v_1, v_2, v_3, v_4 – линейные скорости перемещения переднего левого, переднего правого, заднего левого, заднего правого колес; $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{x}_3, \dot{y}_3, \dot{x}_4, \dot{y}_4$ – проекции линейных скоростей центров колес автомобиля на продольную и поперечную оси.

Динамические уравнения курсового движения получены на основе математической схемы Лагранжа второго рода и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_c &= \left\{ -\sum_{i=1}^2 \{Y_i \sin(\varphi + \theta_i - \delta_i) + P_{ki} \cos(\varphi + \theta_i - \delta_i)\} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=3}^4 \{Y_i \sin(\varphi + \theta_i - \delta_i) + P_{ki} \cos(\varphi + \theta_i - \delta_i)\} \right\} / m; \\ \ddot{y}_c &= \left\{ \sum_{i=1}^2 \{Y_i \cos(\varphi + \theta_i - \delta_i) + P_{ki} \sin(\varphi + \theta_i - \delta_i)\} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=3}^4 \{Y_i \cos(\varphi + \theta_i - \delta_i) + P_{ki} \sin(\varphi + \theta_i - \delta_i)\} \right\} / m; \\ \ddot{\varphi} &= \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \{Y_i [l_1 \cos(\theta_i - \delta_i)] \mp d_i \sin(\theta_i - \delta_i)\} + \\ &\quad + P_{ki} [L_j \sin(\theta_i - \delta_i) \pm d_i \cos(\theta_i - \delta_i)] / J_z. \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Для обеспечения движения автомобиля без бокового проскальзывания и с минимальным износом шин, конструкция системы его управляемого движения должна обеспечи-

вать пересечение нормалей к проекциям средних линий шин каждого колеса на опорной поверхности в одной точке O , рис. 1. Это условие определяется следующим уравнением:

$$\theta_2 = \arctg \left(\frac{tg\theta_1}{\frac{d_{k1} + d_{k2}}{l_1 + l_2} tg\theta_1 + 1} \right). \quad (1)$$

Моделирование процессов взаимодействия пневматических колес автомобиля с опорной поверхностью выполнялось с использованием теории увода Рокара [1; 2; 3], согласно которой в процессе криволинейного движения на колеса автомобиля действуют боковые реакции дороги P_{ki} , которые пропорциональны углам увода δ_i их шин:

$$P_{ki} = ku_i \delta_i, i = 1, \dots, 4, \quad (2)$$

где ku_i – коэффициент сопротивления боковому уводу шины i -го колеса.

То есть, в этом случае колесо начинает движение в направлении, образующем угол δ_i с вертикальной плоскостью недеформируемого колеса, который пропорционален величине боковой деформации пневматика и, соответственно, боковой реакции дороги P_i .

Коэффициенты ku_i зависят от приложенных к колесам нормальных и тангенциальных сил, давления воздуха в шинах, характеристик дорожной поверхности по условиям сцепления и т. д. [3; 4]. Поэтому при моделировании курсового движения автомобиля на протяжении длительного времени значение коэффициентов ku_i необходимо уточнять в каждый момент времени в процессе интегрирования уравнений движения.

Для определения углов δ_i составим уравнения кинематических связей колес автомобиля с опорной поверхностью. Для этого приравняем к нулю разность проекций поперечной ($\dot{x}_i$) и продольной ($\dot{y}_i$) скоростей центров каждого колеса на нормали $n - n$ к векторам их линейных скоростей v_i , рисунок 1. В результате получим систему уравнений (1), описывающую условия отсутствия бокового проскальзывания шин по опорной поверхности:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 \cos(\varphi + \theta - \delta_1) - \dot{x}_1 \sin(\varphi + \theta - \delta_1) &= 0; \\ \dot{y}_2 \cos(\varphi + \theta - \delta_2) - \dot{x}_2 \sin(\varphi + \theta - \delta_2) &= 0; \\ \dot{y}_3 \cos(\varphi + \theta - \delta_3) - \dot{x}_3 \sin(\varphi + \theta - \delta_3) &= 0; \\ \dot{y}_4 \cos(\varphi + \theta - \delta_4) - \dot{x}_4 \sin(\varphi + \theta - \delta_4) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Чтобы найти углы увода δ_i выразим координаты x_i и y_i через независимые координаты x_c, y_c, φ и от полученных выражений возьмем производные по времени и подставим их в систему уравнений (1). Из полученных выражений выразим искомые углы увода:

$$\left. \begin{aligned} \delta_i &= \varphi + \theta_i - \arctg \left(\frac{\dot{y}_c + \dot{\varphi} l_1 \cos \varphi + \dot{\varphi} d_i \sin \varphi}{\dot{x}_c - \dot{\varphi} l_1 \sin \varphi + \dot{\varphi} d_i \cos \varphi} \right), i = 1, 2 \\ \delta_i &= \varphi - \arctg \left(\frac{\dot{y}_c - \dot{\varphi} l_1 \cos \varphi + \dot{\varphi} d_i \sin \varphi}{\dot{x}_c + \dot{\varphi} l_1 \sin \varphi + \dot{\varphi} d_i \cos \varphi} \right), i = 3, 4; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Динамические уравнения курсового движения автомобиля получены на основе математической схемы Лагранжа второго рода [1; 5]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial r_i} = Q_i - \frac{\partial \Pi}{\partial r_i} - \frac{\partial D}{\partial \dot{r}_i}, i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где T, Π, D – соответственно, кинетическая, потенциальная энергии и диссипативная функция моделируемой системы; r_i, Q_i – обобщенные координаты и обобщенные силы; n – количество обобщенных координат.

Полная модель курсового движения автомобиля, содержащая три обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка для координат x_c , y_c , φ и четыре уравнения кинематических связей, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_c &= \left\{ -\sum_{i=1}^2 \{Y_i \sin(\varphi + \theta_i - \delta_i) + P_{ki} \cos(\varphi + \theta_i - \delta_i)\} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=3}^4 \{Y_i \sin(\varphi + \theta_i - \delta_i) + P_{ki} \cos(\varphi + \theta_i - \delta_i)\} \right\} / m; \\ \ddot{y}_c &= \left\{ \sum_{i=1}^2 \{Y_i \cos(\varphi + \theta_i - \delta_i) + P_{ki} \sin(\varphi + \theta_i - \delta_i)\} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=3}^4 \{Y_i \cos(\varphi + \theta_i - \delta_i) + P_{ki} \sin(\varphi + \theta_i - \delta_i)\} \right\} / m; \\ \ddot{\varphi} &= \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \{Y_i [l_1 \cos(\theta_i - \delta_i)] \mp d_i \sin(\theta_i - \delta_i)\} + \\ &\quad + P_{ki} [L_j \sin(\theta_i - \delta_i) \pm d_i \cos(\theta_i - \delta_i)] / J_z; \\ \delta_i &= \varphi + \theta_i - \arctg \left(\frac{\dot{y}_c + \phi l_1 \cos \varphi \mp \phi d_i \sin \varphi}{\dot{x}_c - \phi l_1 \sin \varphi \mp \phi d_i \cos \varphi} \right), i = 1, 2; \\ \delta_i &= \varphi - \arctg \left(\frac{\dot{y}_c - \phi l_1 \cos \varphi \mp \phi d_i \sin \varphi}{\dot{x}_c + \phi l_1 \sin \varphi \mp \phi d_i \cos \varphi} \right), i = 3, 4. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подсистема вертикальной динамики автомобиля также построена по схеме Лагранжа второго рода и содержит семь обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для координат z_c , z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , ψ , ϕ . Для вывода названных уравнений использовалась расчетная схема, представленная на рисунке 2.

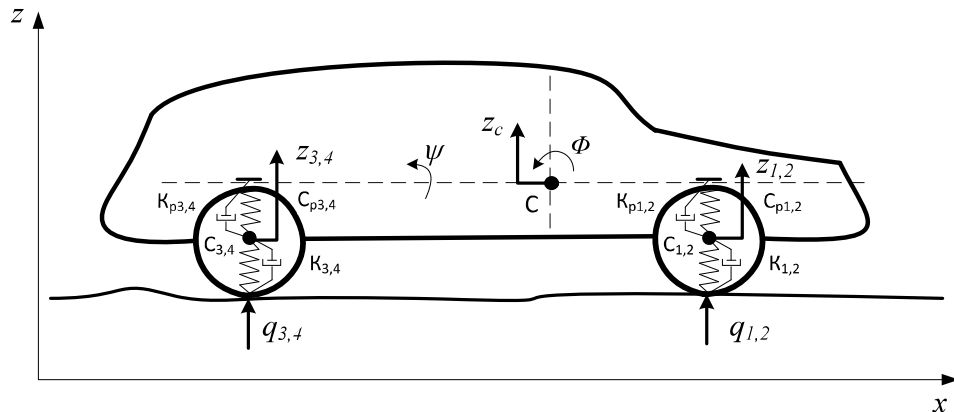


Рис. 2. Расчетная схема вертикальной динамики автомобиля

На рисунке 2 приняты следующие обозначения: q_1, q_2, q_3, q_4 – случайные вертикальные воздействия микропрофиля дороги на колеса автомобиля, $c_{p1}, c_{p2}, c_{p3}, c_{p4}$ – жесткости передней левой, передней правой, задней левой и задней правой элементов подвески; $k_{p1}, k_{p2}, k_{p3}, k_{p4}$ – коэффициенты демпфирования передней левой, передней правой, задней левой и задней правой элементов подвески; c_1, c_2, c_3, c_4 – жесткости передней

левой, передней правой, задней левой и задней правой шин; k_1, k_2, k_3, k_4 – коэффициенты демпфирования передней левой, передней правой, задней левой и задней правой шин.

Полная математическая модель, содержащая уравнения курсового движения и вертикальной динамики автомобиля, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_c &= \left\{ - \sum_{i=1}^2 \{Y_i \sin(\varphi + \theta_i - \delta_i) + P_{ki} \cos(\varphi + \theta_i - \delta_i)\} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=3}^4 \{Y_i \sin(\varphi + \theta_i - \delta_i) + P_{ki} \cos(\varphi + \theta_i - \delta_i)\} \right\} / m; \\ \ddot{y}_c &= \left\{ \sum_{i=1}^2 \{Y_i \cos(\varphi + \theta_i - \delta_i) + P_{ki} \sin(\varphi + \theta_i - \delta_i)\} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=3}^4 \{Y_i \cos(\varphi + \theta_i - \delta_i) + P_{ki} \sin(\varphi + \theta_i - \delta_i)\} \right\} / m; \\ \ddot{\varphi} &= \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \{Y_i [l_1 \cos(\theta_i - \delta_i)] \mp d_i \sin(\theta_i - \delta_i)\} + \\ &\quad + P_{ki} [L_j \sin(\theta_i - \delta_i) \pm d_i \cos(\theta_i - \delta_i)] / J_z \\ \ddot{z}_c &= \sum_{i=1}^4 \frac{P_{pi}}{m}; \quad \ddot{z}_i = \frac{P_i - P_{pi}}{m_i}, i = 1 \dots 4; \\ \ddot{\psi} &= \frac{[\sum_{i=1}^4 \mp p_i d_i - F_c h_c]}{J_x}; \quad \Phi = \sum_{i=1}^4 \frac{P_{i1} l_i + P_{i2} l_2}{J_y}; \\ \delta_i &= \varphi + \theta_i - \arctg \left(\frac{\dot{y}_c + \dot{\varphi} l_1 \cos \varphi \mp \dot{\varphi} d_i \sin \varphi}{\dot{x}_c - \dot{\varphi} l_1 \sin \varphi \mp \dot{\varphi} d_i \cos \varphi} \right), i = 1, 2; \\ \delta_i &= \varphi - \arctg \left(\frac{\dot{y}_c - \dot{\varphi} l_1 \cos \varphi \mp \dot{\varphi} d_i \sin \varphi}{\dot{x}_c + \dot{\varphi} l_1 \sin \varphi \mp \dot{\varphi} d_i \cos \varphi} \right), i = 3, 4. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Расчетные исследования курсового движения автомобиля

Для расчетных исследований была разработана специальная технология управления курсовым движением автомобиля, построенная на основе таблицы 1 [6]. В первой строке этой таблицы задавались моменты времени t , в которые на переднее левое колесо автомобиля подавались управляющие воздействия водителя в виде скорости $\dot{\theta}_1$ изменения его угла, задаваемой во второй строке этой же таблицы.

Таблица 1 – Закон изменения скорости угла поворота левого управляемого колеса автомобиля

t	t_1	t_2	t_3	t_4	...	
$\dot{\theta}_1$	$\dot{\theta}_{11}$	$\dot{\theta}_{12}$	$\dot{\theta}_{13}$	$\dot{\theta}_{14}$	...	

В процессе интегрирования уравнений курсового движения по скорости $\dot{\theta}_1$ определялся угол θ_1 поворота левого управляемого колеса, а по нему – правого θ_2 в соответствии с кинематикой поворота автомобиля, заданной уравнением (1).

При моделировании вертикальной динамики автомобиля задавались вертикальные воздействия неровностей микропрофиля опорной поверхности (дороги) на его колеса.

Микропрофиль дороги, соответствующий экспоненциально-косинусной корреляционной функции вида

$$R(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|} \cos(\beta t), \quad (8)$$

моделировался по уравнению [9]

$$q[n] = a_0 x_N[n] + a_1 q[n-1] + b_1 q[n-1] + b_2 q[n-2], n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где σ – среднее квадратичное отклонение неровности дороги;

α, β – коэффициенты корреляционной связи;

$q[n]$ – n -я координата неровности микропрофиля дороги;

$a_0 = \sigma b_0$;

$x_N(n)$ – псевдослучайное число с нормальным законом распределения;

$a_1 = \sigma/b_0$;

$b_0 = [(c_1 + (c_1^2 - 4c_0^2))^{0.5}]^{0.5}$;

$b_1 = 2e^{-\alpha h} \cos(\beta h)$;

$b_2 = e^{-2\alpha h}$;

$c_0 = e^{-\alpha h} (e^{-2\alpha h} - 1) \cos(\beta h)$;

$c_1 = 1 - e^{-4\alpha h}$.

h – шаг по времени интегрирования дифференциальных уравнений движения.

С помощью специально разработанной программы по уравнению (9) был заранее смоделирован микропрофиль дороги и сохранен в виде файла.

В процессе интегрирования уравнений движения, ординаты q_i неровностей микропрофиля считывались из файла микропрофиля и аппроксимировались в соответствии с реальной скоростью движения.

Алгоритм задачи

Алгоритм решения задачи сводится к численному интегрированию уравнений движения (7) и предусматривает ввод исходных данных и начальных условий интегрирования; считывание и привязку к реальным условиям движения ординат микропрофиля дороги и их скоростей; считывание параметров управления курсовым движением автомобиля в виде заданного закона изменения скорости угла поворота левого управляемого колеса автомобиля; численное интегрирование уравнений математической модели и формирование файла результатов моделирования; формирование и вывод функциональных зависимостей изменения во времени параметров движения автомобиля.

Для численного интегрирования уравнений движения использовался метод Булирша-Штера рациональной экстраполяции с переменным шагом [7].

Исходные данные и результаты имитационного моделирования управляемого движения автомобиля

В качестве исходных данных задачи использовались массо-геометрические и упруго-диссипативные параметры автомобиля, скорость движения, параметры неровностей дороги, закон изменения скорости угла поворота переднего левого колеса.

Пример задания закона скорости изменения угла поворота переднего левого управляемого колеса для совершения маневра “поворот влево” представлен в таблице 2.

Таблица 2 – Закон изменения скорости угла поворота левого управляемого колеса автомобиля для совершения маневра “поворот влево”

	1	2	3	4			
t	1	1,5	2	200			
$\dot{\theta}_1$	0	0,15	-0,15	0			

В данной таблице указывается, что движение автомобиля в интервале времени t от нуля до одной секунды скорость угла поворота левого управляемого колеса $\dot{\theta}_1$ равна нулю – прямолинейное движение; в интервале от одной до полторы секунды $\dot{\theta}_1$ равна 0,15 рад/с; в интервале от полторы до двух секунд $\dot{\theta}_1$ равна -0,15 рад/с, то есть управляемые колеса возвращаются в исходное положение.

Расчетные эксперименты проводились в интервале времени от нуля до 200 и более секунд по дорогам с различными параметрами микропрофиля.

Каждая строка файла результатов моделирования содержит следующие значения: момент времени, значения обобщенных координат модели и скоростей их изменения, значения углов увода управляемых колес, ординаты неровностей микропрофиля дороги и их скорости, боковые реакции дороги на колеса автомобиля.

На рисунке 3 приведен один из вариантов имитационного моделирования курсового движения автомобиля по круговой траектории с малым углом поворота управляемых колес.

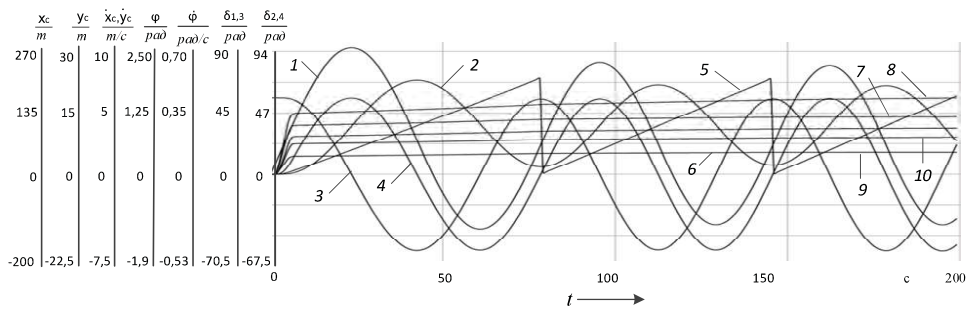


Рис. 3. Результаты имитационного моделирования движения автомобиля по круговой траектории со скоростью 72 км/ч: 1, 2 – перемещение центра масс по осям ОХ и ОУ; 3, 4 – скорости перемещения центра масс по продольной и поперечной осям; 5, 6 – курсовой угол и скорость его изменения; 7, 8, 9, 10 – углы увода шин левого, правого передних и левого, правого задних колес

На рисунке 3 значения по осям $d_{1,2}$ и $d_{2,4}$ умножены на 10^5 , а по оси $\dot{\varphi}$ – на 10^2 .

За 200 секунд движения автомобиль совершил три неполных оборота с большим радиусом траектории движения. При завершении каждого оборота, то есть при достижении курсовым углом φ значения 2π , линия 5 на рисунке 1 обнуляется. Углы увода $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ шин колес автомобиля после входа его в режим движения по кругу с постоянным радиусом, с момента времени 6 секунд, стабилизировались, линии 7, 8, 9 и 10.

На рисунке 4 приведены фазовая траектория движения центра масс автомобиля в координатах ХОУ, подтверждающая рабо-

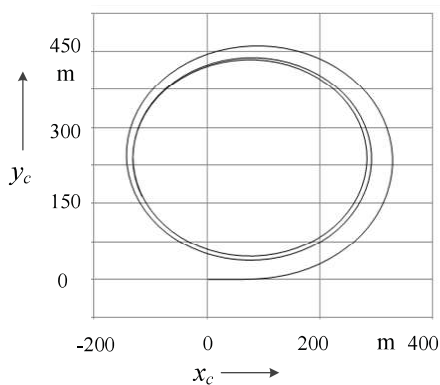


Рис. 4. Фазовая траектория движения центра масс автомобиля в координатах ХОУ на интервале времени 0 ... 200 с

тоспособность математической модели и программного обеспечения при имитационном моделировании кругового движения.

Результата моделирования вертикальной динамики автомобиля по дороге с микропрофилем представлены на рисунке 5.

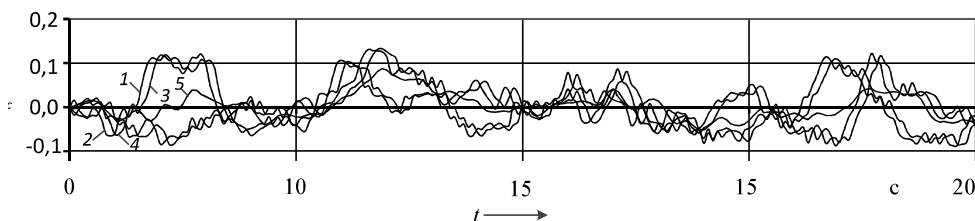


Рис. 5. Результаты моделирования вертикальной динамики автомобиля при движении его по дороге с микропрофилем со скоростью 20 м/с: 1 – z_1 ; 2 – z_2 ; 3 – z_3 ; 4 – z_4 ; 5 – z_c

На рисунке 6 приведен участок микропрофиль дороги длиной 400 метров ($20 \text{ м/с} * 20 \text{ с} = 400 \text{ м}$), используемый при моделировании вертикальной динамики автомобиля при движении со скоростью 20 м/с.

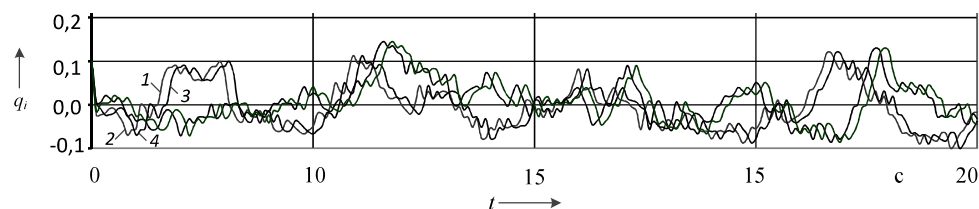


Рис. 6. Участок микропрофиля дороги длиной 400 метров: 1 – q_1 ; 2 – q_2 ; 3 – q_3 ; 4 – q_4

Приведенные на рисунках 3...6 результаты моделирования подтверждают работоспособность разработанных математической модели и программного обеспечения, которое позволяет моделировать курсовое движение четырехосной колесной машины по различным траекториям и категориям дорог.

Заключение

По результатам проведенных расчетных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Разработана математическая модель курсового движения и вертикальной динамики легкового автомобиля с передними управляемыми колесами по дорогам с моделируемым микропрофилем, позволяющая оценить влияние ее массогеометрических параметров и упруго-диссипативных характеристик на характер движение, на курсовую устойчивость и управляемость.
2. Приведенные на рисунках 3 ... 6 результаты имитационного моделирования подтверждают работоспособность разработанных математической модели и программного обеспечения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Левин, М. А.** Теория качения деформируемого колеса / М. А. Левин, Н. А. Фуфаев. – М. : Наука, 1989. – 269 с.
2. **Литвинов, А. С.** Управляемость и устойчивость автомобиля / А. С. Литвинов. – М. : Машиностроение, 1971. – 416 с. : ил.
3. **Рокар, И.** Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты / И. Рокар. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1959. – 288 с.

4. Динамика колесных машин : монография / И. С. Сазонов [и др.]. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2006. – 462 с. : ил.
5. **Вонг, Дж.** Теория наземных транспортных средств : пер. с англ. / Дж. Вонг. – М. : Машиностроение, 1982. – 284 с. : ил.
6. **Ясюкович, Э. И.** Разработка методики виртуальных испытаний курсовой устойчивости трехосных автомобилей / Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2010. – № 2. – С. 59–69.
7. <https://allbest.ru/otherreferats/mathematics/c00368957.html>

Поступила в редакцию 29.05.2019 г.

Контакты: +375 33 694 02 07 (Ясюкович Эдвард Игнатьевич)

Yasiukevich E. SIMULATION OF HEADING MOTION AND VERTICAL DYNAMICS OF PASSENGER CAR.

The article highlights the developed method of simulation of heading motion and vertical dynamics of a car with front wheel drive on the support surface with a microprofile. The calculated dynamic schemes, mathematical models and software are provided. Some results of the computational studies are discussed.

Keywords: passenger car, heading movement, vertical dynamics, support surface microprofile, steered wheels, mathematical model, trajectory, software, simulation.

УДК 51-73:796.01

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИНТЕЗА ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СПОРТСМЕНА

М. А. Киркор

кандидат технических наук, доцент

А. Е. Покатилов

старший преподаватель

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук, профессор

Могилевский государственный университет продовольствия

В статье изучается синтез целенаправленного движения биомеханических систем в условиях взаимодействия с упругой опорой. Данное взаимодействие описывается системой неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка. Предложена система таких уравнений, отражающих движение механической системы (спортивного снаряда, выступающего в качестве упругой опоры), а также система динамических уравнений движения непосредственно биомеханической системы (опорно-двигательного аппарата спортсмена). Рассмотрен алгоритм синтеза движения в условиях заданного программного управления на кинематическом уровне при взаимодействии двух систем: механической и биомеханической.

Ключевые слова: синтез движения, программное управление, биомеханическая система, упругая опора.

Введение

В биомеханике двигательных действий современные исследования ведутся в двух направлениях: в направлении анализа техники спортивных упражнений и в направлении синтеза, то есть в направлении построения и оптимизации двигательной деятельности спортсмена [1–3]. В связи со сложностью получения траекторных положений спортсмена в натурном эксперименте, обычно рассматривается плоское движение спортсмена. Методы исследования пространственного движения начали развиваться сравнительно недавно, при этом на данном этапе появилась возможность заимствовать ряд технологий, разрабатываемых в кинематографе, мультипликации и в компьютерных играх. Так, например, используемая и развиваемая в кинематографе технология “захват движения” позволяет получить пространственные координаты человека. И в этом плане оправданно развитие этих технологий применительно к задачам биомеханики спорта.

Отметим, что использование указанных технологий дает возможность решить многие актуальные проблемы биомеханики движения человека. Одной из таких проблем является синтез целенаправленного движения спортсмена, опорно-двигательный аппарат которого мы определяем как биомеханическую систему (БМС). И здесь, в первую очередь, необходима разработка математических моделей движения БМС и алгоритмов их расчета.

Существующие на сегодня исследования в этом направлении ограничиваются изучением движения непосредственно биомеханической системы. Взаимодействие со спортивным снарядом не рассматривается, но в некоторых видах оно существенно и определяет всю технику выполнения спортивного упражнения.

© Киркор М. А., 2020

© Покатилов А. Е., 2020

© Гальмак А. М., 2020

В работе [3] для синтеза движения только тела спортсмена используется уравнение целенаправленного движения в виде уравнения Лагранжа второго рода

$$\sum_{j=1}^N A_{jk} \ddot{\varphi}_k \cos(\varphi_k - \varphi_j) - \sum_{j=1}^N A_{jk} \dot{\varphi}_k^2 \sin(\varphi_k - \varphi_j) + Y_i \cos \varphi_i = M_i - M_{i+1}. \quad (1)$$

Здесь коэффициенты A_{jk} постоянны и включают в себя масс-инерционные характеристики тела спортсмена. Остальные параметры представляют собой: φ_j – обобщенные координаты звеньев БМС, $\dot{\varphi}_j$ и $\ddot{\varphi}_j$ соответственно угловые скорости и ускорения звеньев (рук, туловища и ног); Y_i – фактор, отражающий действие внешних сил на звенья БМС; M_i и M_{i+1} – это моменты управляющих сил, соответственно в i и $i+1$ суставах биомеханической системы.

Деформацию спортивного снаряда можно описать дифференциальными уравнениями, которые будут отражать колебания спортивного снаряда и вполне подходить для математического моделирования целенаправленного движения спортсмена вместе со снарядом, влияющим на движение БМС.

Но предварительные исследования авторов выявили следующую проблему: существующие алгоритмы расчета в подобных случаях при взаимодействии двух систем, основываются на применении метода приближений (метод итераций). В данной задаче это означало бы, что необходимо отдельно рассчитать движение БМС, потом по полученным данным рассчитать деформацию спортивного снаряда, выступающего в качестве опоры для человека, и уже по окончательным результатам повторять расчеты с самого начала до заданной точности. Метод работает, только если полученный ряд значений сходится, в противном случае метод приближений не применим, например, в условиях самоторможения [4].

В качестве примера целенаправленного движения биомеханической системы в условиях взаимодействия с упругой опорой на рисунке 1 представлен большой оборот назад на перекладине.



Рис. 1. Большой оборот назад на перекладине

Анализ показал, что спортивный снаряд как раз и движется в условиях самоторможения, так как он деформируется упруго, а любая деформация конечна, что и будет

означать самоторможение. Отсюда и возникает актуальность проблемы разработки как математических моделей движения, так и методов их расчета.

Динамические уравнения целенаправленного движения.

На рисунке 2 показана кинетограмма спортивного упражнения по рисунку 1.

Для N -звенной биомеханической системы (БМС) по рисункам 1 и 2 с учетом дефор-

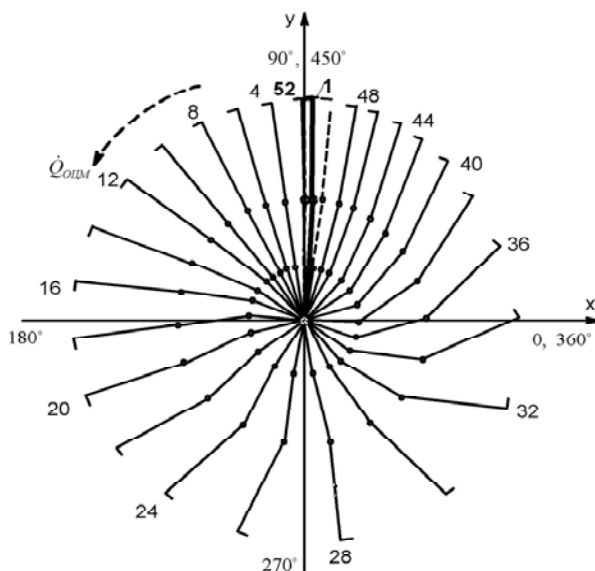


Рис. 2. Кинетограмма большого оборота

мации спортивного снаряда в рекуррентной форме динамическое уравнение движения относительно управляющего момента мышечных сил в i -м суставе имеет вид [1]

$$M_{i,i-1} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos \varphi_j - \ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin \varphi_j + \ddot{L}_{0b} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos \varphi_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{\varphi}_k \cos(\varphi_k - \varphi_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{\varphi}_k^2 \sin(\varphi_k - \varphi_j). \quad (2)$$

Здесь коэффициенты C_j также постоянны как A_{jk} и тоже отражают геометрию масс тела спортсмена. Параметры $\ddot{L}_{0r}$, $\ddot{L}_{0b}$ представляют собой соответственно ускорения опоры в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Уравнение (2) получено на основе принципа Даламбера, хорошо структурированно и отражает движение двух разных систем: механической (спортивный снаряд) и биомеханической системы (спортсмен). В общем виде выражение (2) можно представить следующей функциональной связью

$$f_{O_{i-1,i}} = f_{O_{i-1,i}}^{OP} + f_{O_{i-1,i}}^{BMC} = M_{O_{i-1,i}}^{OP} + M_{O_{i-1,i}}^{BMC}. \quad (3)$$

Здесь функция $f_{O_{i-1,i}}^{OP}$ отражает движение (деформацию) спортивного снаряда, называется выделенной по моменту управляющих сил опорой $M_{O_{i-1,i}}^{OP}$, и в соответствии с уравнением (2) равна

$$f_{O_{i-1,i}}^{OP} = M_{O_{i-1,i}}^{OP} = -\ddot{L}_{0r} \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin \varphi_j + \ddot{L}_{0b} \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos \varphi_j. \quad (4)$$

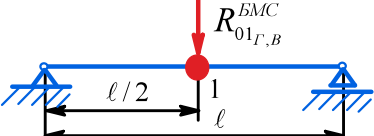
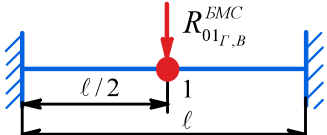
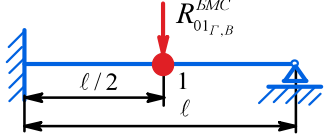
Вторая часть выражения $f_{O_{i-1,i}}^{BMC}$ является выделенной по моменту управляющих сил биосистемы $M_{O_{i-1,i}}^{BMC}$ и по уравнениям (2) и (3) равна

$$f_{O_{i-1,i}}^{BMC} = M_{O_{i-1,i}}^{BMC} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos \varphi_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{\varphi}_k \cos(\varphi_k - \varphi_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{\varphi}_k^2 \sin(\varphi_k - \varphi_j). \quad (5)$$

Отметим, что система дифференциальных уравнений движения спортивного снаряда (4) отражает именно влияние рассматриваемого снаряда, и поэтому данные выражения применимы для расчетов движения на кинематическом и динамическом уровнях, но по ним нельзя рассчитать деформацию спортивного снаряда. Для этого нужны другие математические модели.

Математические модели колебаний снаряда. При синтезе движения системы “снаряд-спортсмен” необходима математическая модель движения (деформации) снаряда. Для этого можно воспользоваться соответствующими уравнениями колебаний с подсчитанными коэффициентами, учитывающими параметры стандартной перекладины олимпийского образца, показанными в таблице 1. Наиболее реально деформацию спортивного снаряда, представляющего собой упругую опору, моделирует статически определяемая балка № 1 по таблице 1.

Таблица 1 – Уравнения колебаний снаряда при действии силы $R_{01_{Г,В}}^{BMC}$

	Схема балки	Уравнение колебаний
1		$\ddot{q}_1 + 1213,955q_1 = 1317 \cdot 10^{-5} R_{01_{Г,В}}^{BMC} \quad (6)$
2		$\ddot{q}_1 + 686,046q_1 = 1302 \cdot 10^{-5} R_{01_{Г,В}}^{BMC} \quad (7)$
3		$\ddot{q}_1 + 299,114q_1 = 1298 \cdot 10^{-5} R_{01_{Г,В}}^{BMC} \quad (8)$

В дифференциальном уравнении (6) $\ddot{q}_1$ обозначает линейное ускорение балки в ее средней части (точка 1) под действием силы $R_{01_{Г,В}}^{BMC}$, возникающее во время выполнения спортивного упражнения (рис. 1, 2). Таким образом, имеем $\ddot{q}_1 = \ddot{L}_{0_{Г}}; \ddot{L}_{0_{В}}$ в зависимости от рассматриваемой плоскости движения: горизонтальной (Г) или вертикальной (В).

Силовой анализ. Для решения уравнений колебаний по формуле (6) необходимо знание опорной реакции, возникающей при действии спортсмена на снаряд. Силу выделенной БМС $R_{01_{Г,В}}^{BMC}$ в каждой плоскости можно определить из системы дифференциальных уравнений.

$$R_{01_r}^{BMC} = -\sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{\varphi}_j \sin \varphi_j - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{\varphi}_j^2 \cos \varphi_j, \quad (9)$$

$$R_{01_b}^{BMC} = \sum_{j=1}^N C_{ij} \ddot{\varphi}_j \cos \varphi_j - \sum_{j=1}^N C_{ij} \dot{\varphi}_j^2 \sin \varphi_j + \sum_{p=1}^N G_p. \quad (10)$$

Именно эти силы и вызывают упругую деформацию спортивного снаряда.

Математическая модель с программным управлением. Зададим программное управление при синтезе движения в форме изменения суставных углов по времени [3]. Общая структура управляющего воздействия принимает вид

$$u_z = \varphi_{z+1} - \varphi_z, \quad z=1, 2, \dots, N-1. \quad (11)$$

Здесь u_z обозначает изменение разницы обобщенных координат $(\varphi_{z+1} - \varphi_z)$ во времени.

Тогда любая обобщенная координата φ_k выделенной БМС определяется через угловое положение 1-го звена φ_1 и программное управление u_z следующим образом

$$\varphi_k = \varphi_1 + \sum_{z=1}^{k-1} u_z, \quad k=2, 3, \dots, N. \quad (12)$$

Для первых и вторых производных уравнения (9), т. е. для угловых скоростей и ускорений, имеем следующие модели

$$\dot{\varphi}_k = \dot{\varphi}_1 + \sum_{z=1}^{k-1} \dot{u}_z, \quad \ddot{\varphi}_k = \ddot{\varphi}_1 + \sum_{z=1}^{k-1} \ddot{u}_z, \quad k=2, 3, \dots, N. \quad (13)$$

Введем кинематические связи по уравнениям (10) и (11) в выражение (5) для выделенной биомеханической системы. Имеем

$$M_{O_{i-1,i}}^{BMC} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos \varphi_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_k - \varphi_j) + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \sum_{z=1}^{k-1} \ddot{u}_z \cos(\varphi_k - \varphi_j) - \\ - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} (\dot{\varphi}_1 + \sum_{z=1}^{k-1} \dot{u}_z)^2 \sin(\varphi_k - \varphi_j); \quad i=1, \dots, N. \quad (14)$$

Так как заданное программное управление по уравнениям (10) и (11) связывает все звенья биосистемы, то выделенную БМС по моменту управляющих сил относительно сустава можно представить как

$$M_{O_{i-1,i}}^{BMC} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos \varphi_j + \sum_{j=i}^N A_{j1} \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_j) + \sum_{k=2}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{\varphi}_k \cos(\varphi_k - \varphi_j) - \\ - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{\varphi}_k^2 \sin(\varphi_k - \varphi_j); \quad i=1, \dots, N. \quad (15)$$

Из системы уравнений (14) имеем решение относительно $\ddot{\varphi}_1$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{M_{O_{i-1,i}}^{BMC} - g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos \varphi_j - \sum_{k=2}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{\varphi}_k \cos(\varphi_k - \varphi_j) + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{\varphi}_k^2 \sin(\varphi_k - \varphi_j)}{\sum_{j=i}^N A_{j1} \cos(\varphi_1 - \varphi_j)}. \quad (16)$$

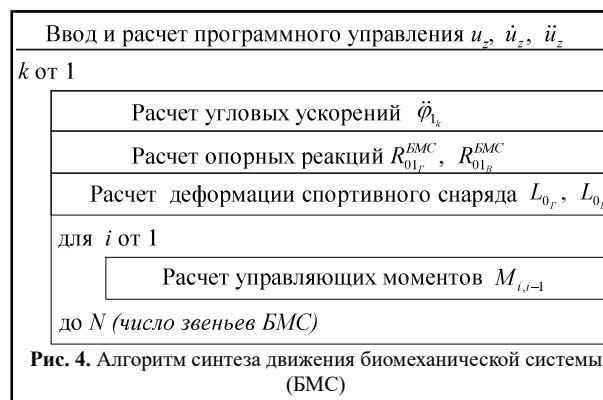
Таким образом, получив решения системы уравнений (16) и имея программное управление (12) и (13), решаем систему уравнений силового анализа для горизонтальной (9) и вертикальной (10) плоскостей. После этого решается система уравнений (5)–(7) колебательного движения спортивного снаряда, являющегося опорой для спортсмена.

Только после этого можно получить окончательное решение уравнения целенаправленного движения по формуле (2).

На рисунке 3 представлен алгоритм задания программного управления для разных вариантов исходных данных [5].



Рис. 3. Алгоритм расчета программного управления



На рисунке 4 показан алгоритм выполнения синтеза движения спортсмена в условиях взаимодействия со спортивным снаряжением.

Отметим, что расчету по данному алгоритму предшествует расчет программного управления по рисунку 3.

Заключение

Описание колебательного движения спортивного снаряда через систему дифференциальных уравнений при моделировании снаряда определенным типом балки позволил создать алгоритм и методику синтеза целенаправленного движения биомеханической системы в условиях, когда снаряд является опорой спортсмена. Показано, что при синтезе движения вначале задается программное управление в виде изменения суставных углов звеньев или их первых и вторых производных. Решение относительно кинематических параметров первого звена (рук) позволяет через программное управление рассчитать кинематические параметры всех остальных звеньев биомеханической системы.

На основе полученных данных возможен силовой анализ взаимодействия спортсмена и снаряда. Именно эти силы, возникающие в контакте спортсмена и опоры, и вызывают упругую динамическую деформацию последней, описываемую через уравнения колебаний для выбранной модели опоры. Решая систему уравнений колебаний спортивного снаряда в горизонтальной и вертикальной плоскостях, получим окончательные данные для системы динамических уравнений целенаправленного движения спортсмена во взаимодействии со снарядом.

Важнейшим моментом при разработке алгоритма расчета системы дифференциальных уравнений является тот факт, что из-за явления самоторможения программное управление задается сразу для конечного положения биомеханической системы в условиях упругой опоры, без необходимости уточнения взаимодействия со снарядом методом итераций.

Исследования проводились на примере большого оборота назад на перекладине для спортивной гимнастики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Покатилов, А. Е.** Биодинамические исследования спортивных упражнений в условиях упругой опоры / А. Е. Покатилов, В. И. Загrevский, Д. А. Лавшук. – Минск : Изд. центр БГУ, 2008. – 279 с.
2. **Покатилов, А. Е.** Биомеханика взаимодействия спортсмена с упругой опорой / А. Е. Покатилов ; под ред. В. И. Загrevского. – Минск : Изд. центр БГУ, 2006. – 351 с.
3. **Загrevский, В. И.** Построение оптимальной техники спортивных упражнений в вычислительном эксперименте на ПЭВМ / В. И. Загrevский, Д. А. Лавшук, О. И. Загrevский. – Могилев–Томск : 2000. – 190 с.
4. **Артобoлевский, И. И.** Теория механизмов и машин : учеб. для втузов / И. И. Артобoлевский. – М. : Наука, 1988. – 640 с.
5. **Харин, Ю. С.** Практикум на ЭВМ по математической статистике / Ю. С. Харин, М. Д. Степанова. – Минск : Университетское, 1987. – 304 с.

Поступила в редакцию 05.07.2019 г.

Контакты: e-mail: pokatilov-a@mail.ru (Покатилов Алексей Евгеньевич)

Kirkor M., Pokatilov A., Galmak A. MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE SYNTHESIS OF ATHLETE'S PURPOSEFUL MOVEMENT.

The article studies the synthesis of targeted movement of biomechanical systems when interacting with an elastic support. This interaction is described by a system of second order inhomogeneous differential equations. A system of such equations reflecting the motion of a mechanical system (an implement acting as an elastic support) and a system of dynamic equations of the motion of a biomechanical system (sportsman's musculoskeletal system) are proposed. An algorithm for the synthesis of motion under conditions of the specified program control at the kinematic level with the mechanical and biomechanical systems interacted is considered.

Keywords: motion synthesis, program control, biomechanical system, elastic support.

УДК 004.855.5

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ СТЕПЕНИ КРИТИЧНОСТИ CVE-УЯЗВИМОСТЕЙ

А. К. Доронин

магистр технических наук, аспирант
Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники

В. А. Липницкий

доктор технических наук, профессор
Военная академия Республики Беларусь

В статье рассматривается использование методов машинного обучения в сочетании с алгоритмом представления слов в многомерном векторном пространстве GloVe для задачи предсказания критичности уязвимости, основываясь лишь на ее текстовом описании. В качестве набора данных для анализа и обучения используется база данных об уязвимостях NVD. В статье приведен анализ записей об уязвимостях, механизм оценки уязвимостей, на основании чего обосновывается выбор признаков для обучения модели. Описываются различные подходы и методы для построения векторных представлений слов, обосновывается выбор векторов, построенных алгоритмом GloVe. Также приводится сравнительный анализ работы модели на наборах векторов GloVe различных размерностей, сделаны выводы об использовании 50-размерных векторов GloVe. Приводятся несколько возможных дальнейших практических применений обученной модели.

Ключевые слова: машинное обучение, конволюционные нейронные сети, анализ данных, уязвимости компьютерных систем, оценка степени критичности уязвимости, векторное представление слов, обработка текста.

Введение

Каждый день в мире становится известно около 20 новых кибер-уязвимостей. Каждый день в IT-сфере появляются сведения примерно о 20 новых киберуязвимостях. Практически все они связаны с различными недостатками реализации программного обеспечения. Злоумышленники могут использовать эти уязвимости для запуска атаки, инициации системного сбоя, организации доступа к конфиденциальной информации или получения удаленного доступа к системе. Некоторые уязвимости несут в себе большой потенциальный ущерб, в то время как другие имеют малый интерес у злоумышленников или же интерес отсутствует вовсе. Для офицера информационной безопасности может оказаться сложным быстро и верно оценить, какие уязвимости имеют более высокий приоритет для исправления, а какие – менее высокий. Ландшафт киберугроз быстро меняется, и для многих организаций жизненно важно постоянно обновлять ПО и активно работать над улучшением безопасности.

Многие уязвимости относятся к так называемым уязвимостям нулевого дня (0-day), что означает: данная уязвимость была обнаружена до того, как компания-разработчик ПО узнала о ее существовании. 90% эксплойтов (программ, позволяющих использовать уязвимость) обычно доступны в течение недели с момента раскрытия уязвимости, подавляющее большинство из них – в течение нескольких дней. Таким образом, автоматическая ранняя оценка критичности уязвимости может помочь офи-

© Доронин А. К., 2020

© Липницкий В. А., 2020

церам безпачасці заранее абнаражыць магчымыя ўгрозы і прыняць меры па процівадействію.

Амерыканская Нацыянальная база даных уязвимостей (NVD) как набор данных для анализа

Амерыканская Нацыянальная база даных уязвимостей NVD (National Vulnerabilities Database) аснована на спісе уязвимостей з праекта CVE, запушчана MITRE ў 1999 г. [1].

CVE (Common Vulnerabilities and Exposures) – гэта агульнадаступны спіс записей, кожны з якіх змяшчае ідэнтыфікацыйны нумар, апісанне і, па крайняй меры, адну агульнадаступную спасылку для кожнай уязвимости. Записи з спіска CVE існуюць у многачысленных прадуктах і паслугах па кібербезпачасці са ўсяго свету, у тым ліку і NVD [2].

Усе записи ў базе даных NVD маюць 14 палёў, з якіх асноўнымі з'яўляюцца наступныя:

- CVE Id: унікальны ID (нумар) уязвимости (напрыклад, CVE-2011-1585)
- Date published: дата першай публікацыі аб данай уязвимости
- Date modified: апошняя дата змянення записі
- Summary: тэкставое апісанне уязвимости
- Застаўленыя палі адносяцца да параметрам ацэнкі уязвимости, выстаўляемай у адпаведнасці са стандартам CVSS [2]:
 - CVSS Base: базавая ацэнка уязвимости (дзясятнае значэнне ад 0 да 10, напрыклад, 9.5)
 - CVSS Impact: ацэнка элементаў ўздзеяння (дзясятнае значэнне ад 0 да 10, напрыклад, 9.5)
 - CVSS Exploit: ацэнка магчымасці эксплуатацыі (дзясятнае значэнне ад 0 да 10, напрыклад, 9.5)
 - CVSS Access vector (AV): вектар даступа (лакальны/сетавы/лакальна-сетавы)
 - CVSS Access complexity (AC): складанасць даступа (нізкая/сярэдняя/высокая)
 - CVSS Authentication (Au): узровень патрабаванай аўтэнтыфікацыі (нулявая/адно-кратная/многакратная)
 - CVSS Confidentiality impact (C): ўздзеянне на канфідэнцыяльнасць (поўнае/частковае/нулявое)
 - CVSS Integrity impact (I): ўздзеянне на цэласнасць (поўнае/частковае/нулявое)
 - CVSS Availability impact (A): ўздзеянне на даступнасць (поўнае/частковае/нулявое)
 - CVSS Vector: базавы вектар уязвимости змяшчае ў сабе значэнні іншых палёў (напрыклад, AV:N/AC:M/Au:N/C:N/I:P/A:C)

У тэблiцы 1 адражэн прымер записі аб уязвимости CVE-2008-4250, вiдэстнай такжэ как MS-08-067 [3].

Таблица 1 – Прымер записи в БД NVD

Название поля	Значение
CVE ID	CVE-2008-4250
Date published	2008-10-23
Date modified	2018-10-12
CVSS Base	10.0
CVSS Impact	10.0
CVSS Exploit:	10.0

Окончание таблицы 1

Название поля	Значение
CVSS Access vector	Network
CVSS Access Complexity	Low
CVSS Authentication	None
CVSS Score	10
CVSS Confidentiality Impact	Complete
CVSS Integrity Impact	Complete
CVSS Availability Impact	Complete
CVSS Vector	AV:N/AC:L/Au:N/C:C/I:C/A:C
Summary	The Server service in Microsoft Windows 2000 SP4, XP SP2 and SP3, Server 2003 SP1 and SP2, Vista Gold and SP1, Server 2008, and 7 Pre-Beta allows remote attackers to execute arbitrary code via a crafted RPC request that triggers the overflow during path canonicalization, as exploited in the wild by Gimmiv.A in October 2008, aka "Server Service Vulnerability."

Текстовое описание в качестве источника обучения модели машинного обучения

С помощью алгоритмов машинного обучения можно построить модель, бинарно классифицирующую уязвимости как критичные или некритичные по тем или иным признакам.

В исследовании [4] компании Symantec показано, что наиболее информативным источником признаков для последующего анализа и применения методов машинного обучения является текстовое описание уязвимости в БД NVD.

Описание является аккумулятором информации из других признаков. При этом оно обычно составлено кратко и содержит в себе описание ключевых особенностей уязвимости.

В данной работе мы строим модель машинного обучения с целью определения степени критичности уязвимости, также используя в качестве источника обучения ее текстовое описание из БД NVD.

Степень критичности как целевой признак для модели обучения

Степень критичности уязвимости в NVD выражается в трех признаках:

cvss_impact (воздействие) – оценка воздействия на компонент в случае ее эксплуатации. Оценивается худший результат, который наиболее прямо и предсказуемо связан с атакой, использующей уязвимость.

cvss_exploit (эксплуатируемость) – оценка возможности эксплуатации уязвимости, отражающая суммарные показатели свойств уязвимости, которые приводят к успешной атаке.

cvss_base – средняя оценка *cvss_impact* и *cvss_exploit*.

На рисунке 1 приведены гистограммы распределения оценок.

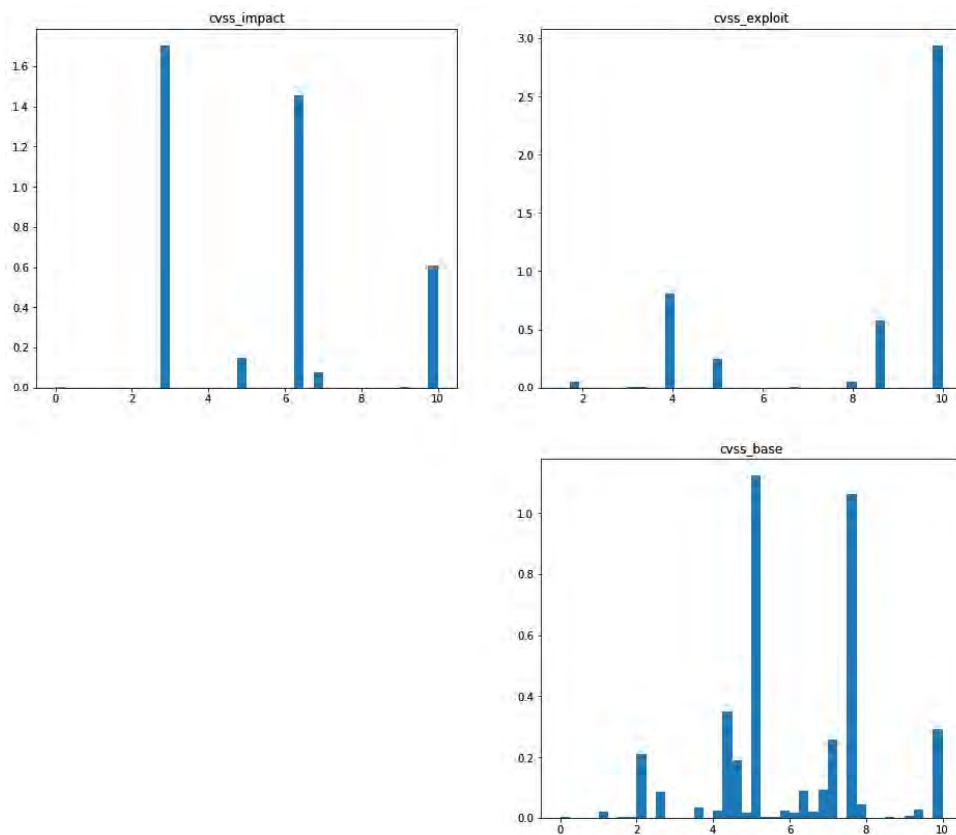


Рис. 1. Гистограммы распределения cvss_base, cvss_exploit, cvss_impact

Для проведения дальнейших исследований критерий оценок CVSS Base был выбран в качестве “главной оценки” степени критичности уязвимости как наиболее информативный. На рисунке 2 представлена гистограмма распределения оценок CVSS Base.

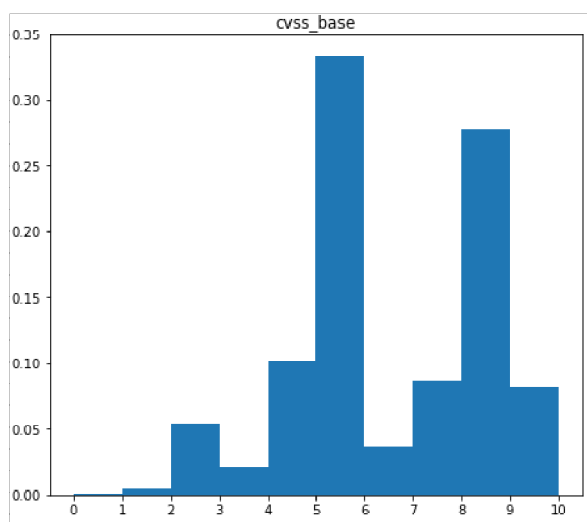


Рис. 2. Гистограмма распределения оценок CVSS Base

На гистограмме видно, что примерно половина всех оценок сгруппирована вокруг отметки в 4,5 балла, а остальная половина – вокруг 8. Таким образом составим два класса уязвимостей, описанных в таблице 2.

Таблица 2 – Классы уязвимости

Класс	Название	Правило соотнесения	Доля класса в датасете
0	Некритичные уязвимости	$CVSSBase \leq 5$	51.635%
1	Критичные уязвимости	$CVSSBase > 5$	48.365%

Как видно из столбца 4 таблицы 2, доля классов практически одинаковая, поэтому набор данных не нуждается в предварительной нормализации.

Постановка задачи

Сформулируем задачу следующим образом.

Необходимо смоделировать систему, которая смогла бы автоматически бинарно классифицировать входящее текстовое сообщение по следующим классам:

- **класс 0** – описание уязвимости с низкой оценкой (от 0 до 5 баллов включительно);
- **класс 1** – описание уязвимости с высокой оценкой (от 5 до 10 баллов).

В качестве входных данных для обучения модели – текстовое описание уязвимостей из набора данных.

Таким образом, имеем задачу классификации с двумя классами: класс 0 – уязвимости с низкими оценками, класс 1 – с высокими оценками.

Выбор модели векторных представлений слов

Очевидно, что для обучения модели на текстовом описании необходимо некоторым образом получить возможность представить отдельные слова в виде некотором n -мерном векторном пространстве. Эту задачу решают так называемые модели векторных представлений слов.

Векторное представление слов (англ. *word embedding*) – общее название для различных подходов к моделированию естественного языка, направленных на сопоставление словам из некоторого словаря векторов небольшой размерности [5].

Существует несколько подходов для построения такого сопоставления.

Матрицы со-упоминаний слов в контексте других слов

Первые подходы основывались на построении матрицы совместных упоминаний слов в тексте и затем понижения ее размерности каким-либо из методов. Данный подход основан на предположении о том, что слова, встречающиеся в подобных контекстах, как правило, имеют сходные значения. Таким образом, использование статистики со-встречаемости слов является естественным выбором для встраивания подобных слов в общее векторное пространство [6].

Суть данного подхода состоит в следующем. По корпусу текстов D и словарю T строится матрица со-упоминаний слов $X_{|T| \times |T|}$.

Фиксируется размер контекстного окна вокруг каждого слова.

Контекстное окно – это число, отражающее количество контекстных слов слева и справа от текущего слова в тексте. Все слова из данного окна будут считаться упоминаниями по отношению к текущему слову. Порядок слов при этом не играет роли.

Матрица $X_{|T| \times |T|}$ заполняется поэлементно. По всему корпусу текстов подсчитывается сумма числа упоминаний слова T_i в контексте слова T_j . Данная сумма затем нормализуется по числу корпусов текстов и становится элементом матрицы x_{ij} . В зависимости от

задачи применялись и иные варианты формирования матрицы (например, по количеству документов, хоть раз содержащих пару слов (T_i, T_j) или по количеству документов, хоть раз содержащих (T_i, T_j) в окне [7]).

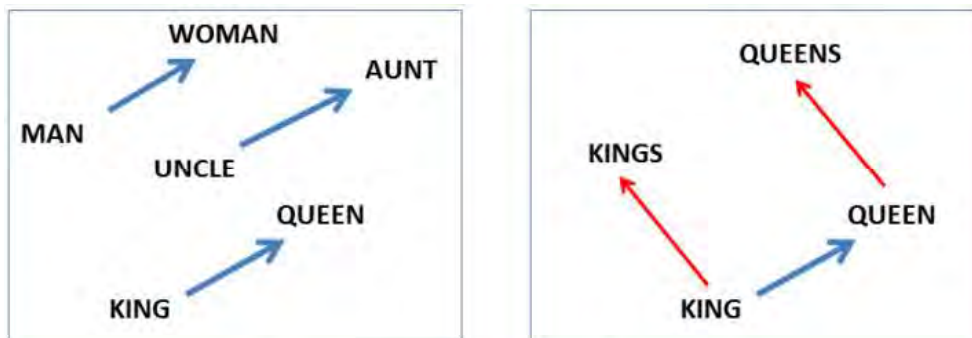
На выходе получалась матрица размером $|T| \times |T|$. Она сильно зависела от размера словаря и являлась практически неприменимой на практике. Для устранения данного недостатка – понижения размеров матрицы – применялись методы линейной алгебры, например, сингулярное разложение:

$$X = USV^T.$$

Методы понижения размерности матрицы давали возможность строить статистику на основе словарей и корпусов текстов огромных размерностей. Однако на выходе получалось относительно низкое качество получаемых – представлений [6].

Word2vec – алгоритм, использующий машинное обучение для предсказания контекста слова

Следующим развитием подходов к векторизации слов является результат работы Томаша Миколова – алгоритм *Word2vec* [7]. Алгоритм строит векторные представления, применяя нейронную сеть в своей основе. Основная идея алгоритма заключается в том, что модель (нейронная сеть) обучается, учитывая контекстное окно вокруг каждого слова. Словам в модели сопоставлен уникальный вектор. Данный вектор изначально является вырожденным – все его элементы, кроме одного, равны 0, а оставшийся равен 1. Он изменяется в процессе обучения и будет являться выходным вектором модели после всех эпох ее обучения. Изменения вектора происходят в конце каждой эпохи обучения, минимизируя методом обратного распространения вероятность ошибки встречи текущего слова с учетом окружающих его слов из контекстного окна. Поэтому похожие по смыслу слова будут иметь похожие векторные представления, чего не удавалось достичь при помощи матрицы со-упоминаний слов и прочих статистических методов. Пример из работы автора алгоритма представлен на рисунке 3.



(Mikolov et al., NAACL HLT, 2013)

Рис. 3. Пример соотнесения векторов некоторым словам

На рисунке 3 видно, что векторы, относящиеся к словам “женщина” и “мужчина” соотносятся между собой идентично векторам, обозначающим слова “тетя” и “дядя”. Иными словами, вектора в данной модели несут семантический смысл контекста того слова, к которому относится вектор. Еще один пример автора над векторами, соответствующий словам “king”, “man”, “woman”:

$$[king] + [woman] - [man] = [queen]$$

Векторные преобразования над векторами word2vec частично сохраняют смысл исходного контекста, позволяя использовать векторы более естественным образом.

Алгоритм GloVe-развитие Word2vec

Алгоритм GloVe (Global Vectors) был разработан исследовательской группой Стэнфордского университета в 2015 г. [8]. Он является сочетанием идеи Word2vec и подхода, основанного на формировании матрицы со-вхождений. Алгоритм работает по тому же принципу, что и Word2vec. Однако отличие состоит в том, что вместо функции минимизации ошибки предсказания контекста в GloVe для обучения модели используется матрица со-вхождений слова, аналогичная той, что использовалась в ранних подходах векторизации слов.

Word2vec пытается предсказать контекст каждого слова, в то же время GloVe учится на основе предварительно построенной матрицы со-вхождений слова в контекст каждого другого слова и предсказывает частотность встречаемости слова в данном контексте. Выходные векторы, полученные при помощи GloVe, сохраняют информацию о глобальной статистике каждого слова, а не только (как в Word2vec) информацию из контекста локального окна фиксированного размера.

GloVe является развитием Word2vec, используя тот же подход и нивелируя его недостатки. Поэтому для решения поставленной задачи нами далее будут использоваться векторные представления слов, сформированные по алгоритму GloVe.

Выбор набора подготовленных векторных представлений GloVe

На странице проекта GloVe присутствует несколько предварительно подготовленных авторами наборов векторных представлений слов, словарей по типу “слово-вектор”, обученных на четырех корпусах текстов [9]. Они представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Предварительно подготовленные векторные представления слов

Источник	Общее количество слов	Количество слов в словаре	Размерность векторов
Wikipedia 2014 + Gigaword 5	6.000.000.000	400.000	50, 100, 200, 300
Common Crawl	42.000.000.000	1.900.000	300
Common Crawl	840.000.000.000	2.200.000	300
Twitter	27.000.000.000	1.200.000	25, 50, 100, 200

В исходном наборе данных всего около 100.000 записей об уязвимостях. Также известно, что описания уязвимостей составлены с использованием только литературных слов и специфичных терминов. Большинство терминов имеется в энциклопедии Википедия вместе с их описанием. Поэтому для проведения исследования мы остановились на использовании словаря векторных представлений слов, построенных на основе всех англоязычных статей Википедии.

Мы остановились на использовании 50-размерных векторов с целью минимизации времени обучения. В разделе “Использование словарей больших размерностей” приводится сравнение качества модели при использовании 50, 100, 200 и 300-размерных векторов.

Исходный код построенной модели на Python

В качестве предиктивного алгоритма было принято решение использовать конволюционную нейронную сеть, так как данный тип нейросетей обычно показывает хорошие результаты в задачах обработки естественного текста. В результате была построена

многослойная нейронная сеть с двумя выходами. На вход нейросети подается текстовое описание уязвимости, которое преобразуется в вектор в соответствии с векторным представлением GloVe. Далее преобразованные данные проходят три конволюционных слоя (Conv1d), после каждого из них – следует обобщающий (MaxPooling) слой. С целью уменьшения переобучения затем идут три полносвязных (Dense) слоя в сочетании с исключющими (Dropout) слоями. Сеть обучается, используя оптимизатор Adam и кросс-энтропийную функцию в качестве функции потерь. Весь исходный код доступен по ссылке: https://github.com/teacherlex/cve_vulns_classifier

Для построения модели нейронной сети использовались библиотеки Tensorflow [10] и Keras [11]. В Листинге 1 представлен исходный код программы обучения нейронной сети.

```
dropout = 0.4
x = Conv1D(128, 5, activation='relu')(embedded_sequences)
x = SpatialDropout1D(dropout)(x)
x = MaxPooling1D(5)(x)
x = Conv1D(128, 5, activation='relu')(x)
x = SpatialDropout1D(dropout)(x)
x = MaxPooling1D(5)(x)
x = Conv1D(128, 5, activation='relu')(x)
x = SpatialDropout1D(dropout)(x)
x = MaxPooling1D(35)(x)
x = Flatten()(x)
x = Dense(128, activation='relu')(x)
x = Dropout(dropout)(x)
x = BatchNormalization()(x)
x = Dense(128, activation='relu')(x)
x = Dropout(dropout)(x)
x = BatchNormalization()(x)
x = Dense(128, activation='relu')(x)
x = Dropout(dropout)(x)
x = BatchNormalization()(x)
preds = Dense(2, activation='softmax')(x)

model = Model(sequence_input, preds)
model.compile(loss='categorical_crossentropy',
              optimizer='adam',
              metrics=['acc', 'auc'])

model.fit(x_train, y_train,
        batch_size=128,
        epochs=20,
        validation_data=(x_val, y_val))
```

Листинг 1. Исходный код программы

Оценка качества модели

Всего в базе данных уязвимостей NVD имеется 94.949 записей. Обучение происходит на 75.960 из них (эту выборку далее будем называть *тренировочной* или *обучающей*).

Для проверки качества построенной модели используется *валидирующая выборка* – случайным образом отобранные записи из исходного набора данных. Нами было отобрано 20% записей исходной базы данных, что составляет 18.989.

Валидирующая выборка предназначена для оценки построенной модели. Оценка производится по различным критериям, так называемым *метрикам*. Мы использовали следующие метрики оценки качества модели:

- **Точность предсказания** (англ. “accuracy”) – соотношение количества верных предсказаний классификатора к размеру обучающей выборки [12]. Точность является наиболее простой метрикой в области анализа данных и вычисляется по формуле

$$Accuracy = \frac{T}{N},$$

где T – количество верных предсказаний, а N – общее количество примеров.

- **Площадь под ROC-кривой** (англ. “ROCcurve”, receiver operating characteristic curve) – агрегированная характеристика качества классификации, не зависящая от соотношения цен ошибок. Чем больше значение площади по ROC-кривой, тем “лучше” модель классификации [13]. Данную метрику также сокращенно называют AUC-ROC (AUC – AreaUnderCurve, площадь под кривой).

Мы провели 20 эпох обучения нейронной сети. На рисунке 4 ниже представлены графики изменения метрик для тренировочной и валидирующей выборок.

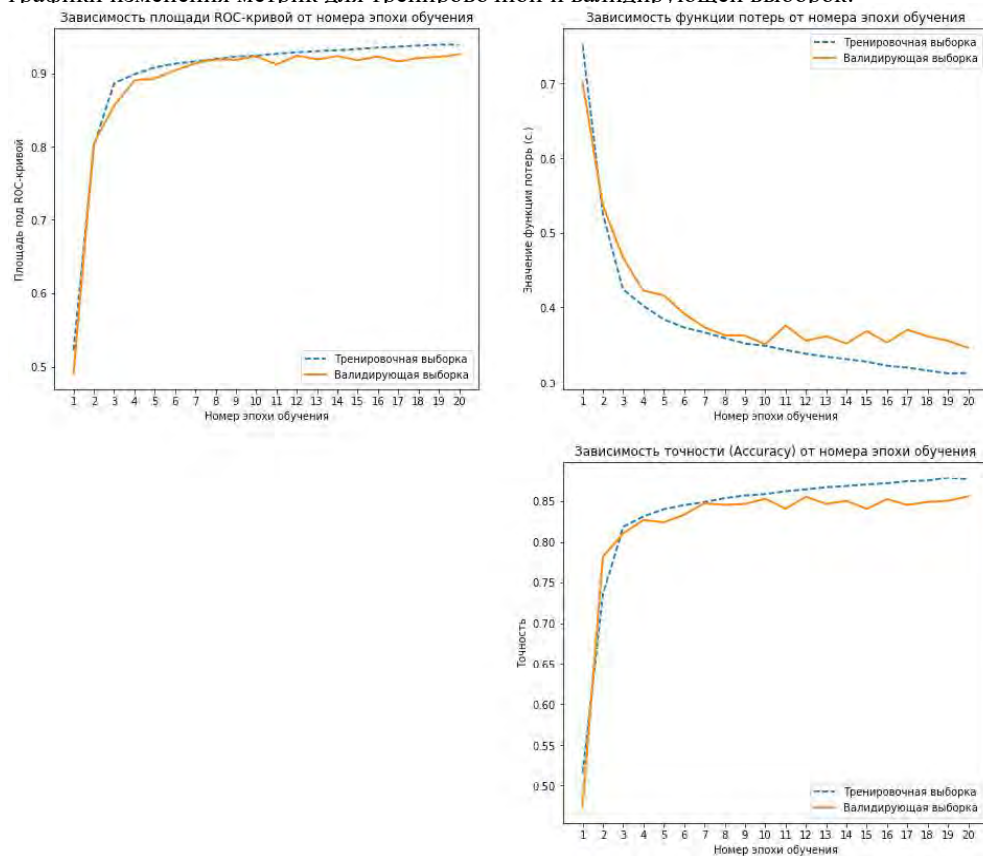


Рис 4. Графики изменения метрик в зависимости от эпохи обучения

Все метрики стабилизируются на валидирующей выборке на 5-6 эпохах. Максимальный показатель точности достигает значения 85.52%, а площади под ROC-кривой – 92.74%.

Начиная с 6 эпохи обучения, происходит небольшое устойчивое увеличение разницы в показателях между валидирующей и тренировочной выборкой. Это означает,

что нейросеть медленно начинает подстраиваться под тренировочную выборку, что приводит к переобучению при росте номера эпохи. Поэтому в практических задачах имеет смысл остановить обучение на 6 эпохе.

Использование классических методов машинного обучения: случайный лес, наивный байесовский классификатор

Для сравнительного анализа качества модели полезно попытаться применить и другие классификаторы (методы машинного обучения для задачи классификации). Были применены следующие алгоритмы: случайный лес (RandomForest [14]) для 1500 деревьев в ансамбле и наивный байесовский классификатор (naiveBayesclassifier [15]). Сравнительные результаты показателей качества представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Сравнение результатов работы различных методов машинного обучения

Метод	Точность предсказания	Площадь по ROC-кривой
Наивный байесовский классификатор	53.66%	66.9%
Случайный лес	79.26%	87.2%
Нейронная сеть	85.52%	92.74%

Исходя из представленных данных, можно сделать вывод о том, что наивный байесовский классификатор справился с задачей значительно хуже оставшихся алгоритмов. Случайный лес отстает по показателям на 5–6%, причем рост количества деревьев не дает заметного роста качества модели. Предположительно, построенная модель нейронной сети из-за своей природы сумела найти скрытые взаимосвязи между словами в предложении и степенью критичности уязвимости и поэтому показывает лучшие показатели. Поэтому далее будем рассматривать только модель, построенную на основе нейронной сети.

Сравнение размерностей векторов GloVe для последующего практического применения

На реальную производительность системы будет также играть размерность векторов GloVe (50, 100, 200 или 300), т. к. вместе с размерностью будет соответствующе расти объем выборки и, следовательно, время обучения каждой эпохи. Имеет смысл сравнить различные размерности векторных представлений на практике, чтобы выбрать наиболее подходящее из них для использования в практических задачах.

Мы протестировали модель, используя при обучении различные векторные представления GloVe (50-, 100-, 200- и 300-размерные). Результаты приведены на рисунке 5.

Из графиков видно, что на начальных эпохах обучения метрики качества (точность, AUC-ROC, значение функции потерь) значительно выше у моделей, использующих более высокую размерность векторов. Однако с ростом эпох результаты выравниваются, и далее каждая модель показывает сравнительно одинаковые результаты.

При этом время обучения каждой эпохи в зависимости от размерности отличается значительно. Исходя из этого, можно сделать следующий вывод: при практическом применении имеет смысл использовать вектора минимальной размерности (50), чтобы уменьшить время обучения следующей эпохи на обновленных данных.

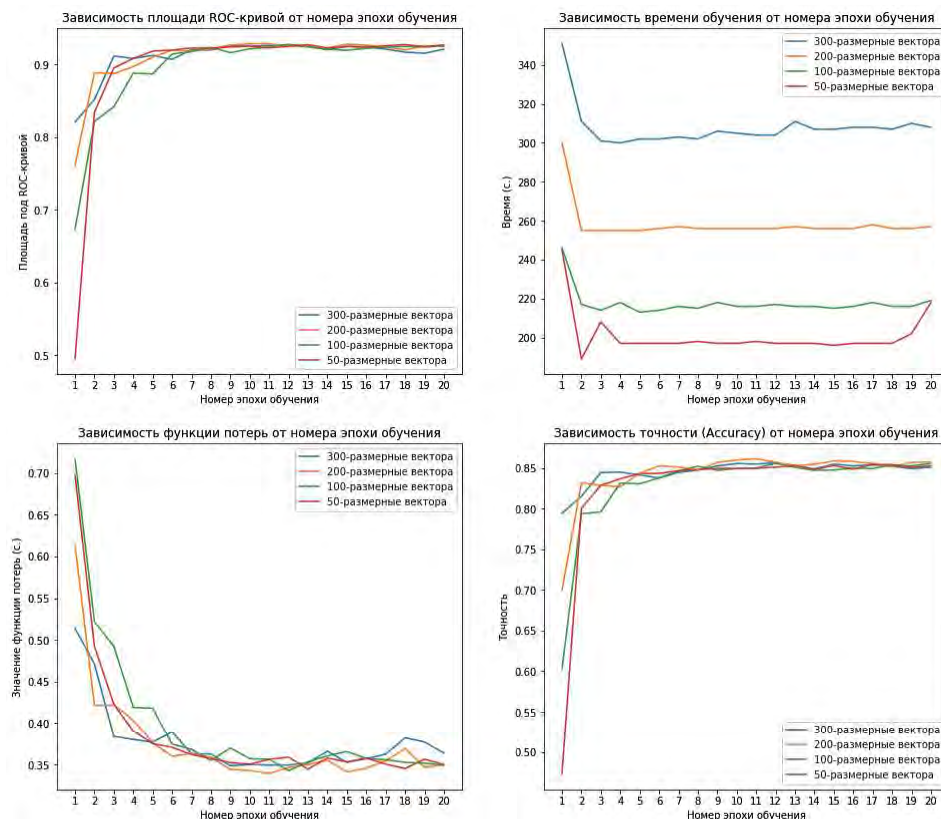


Рис. 5. Графики зависимостей показателей обучения от номеров эпохи обучения для различных размерностей векторов GloVe (50, 100, 200, 300)

Варианты практического применения модели. Оценка новых уязвимостей и новостных записей

Модель можно применять к только появившимся уязвимостям, которым еще не выставлена оценка NVD, чтобы предварительно выяснить их степень критичности до выставления оценки экспертами.

Также можно применить модель к новостным источникам, связанным с информационной безопасностью. К примеру, можно в первую очередь показывать офицеру безопасности “критичные” новостные записи, а только лишь потом – некритичные. Таким образом, в случае появления ранее неизвестной критичной уязвимости у офицера безопасности будет больше времени предпринять возможные меры по предотвращению ее эксплуатации в организации.

Оценка критичности баг-репортов и коммитов на [www.GitHub.com](https://www.github.com)

Также существует актуальная задача предварительной автоматической оценки нового кода в OpenSource-проектах на [www.GitHub.com](https://www.github.com). В этом случае данными на вход модели могут служить текстовое описание из следующих GitHub-источников, связанных с уязвимостями [16] (должны быть помечены тегом #vulnerability_relatives):

- Отдельные коммиты
- Баг-репорты
- Пулл-реквесты

Модель может выполнять функцию выставления предварительной оценки (например, критичен ли баг-репорт с точки зрения безопасности или же нет), и далее ревьювер кода может либо согласиться с данной оценкой, либо нет, таким образом выполняя этап дообучения модели на новой порции данных. Верная предварительная оценка позволит ревьюверу концентрироваться в первую очередь на проверке кода, связанного с более критичными уязвимостями, и лишь во вторую очередь – с менее опасными.

Заключение

В статье описана модель машинного обучения, предсказывающая критичность той или иной уязвимости, основываясь лишь на ее текстовом описании. В качестве звена, преобразующего текст в векторное пространство, используется 50-мерный словарь проекта GloVe, а в качестве основного обучающегося алгоритма – многослойная конволюционная нейронная сеть. Наилучшая из построенных нами моделей достигла показателя 92.74% по метрике площади под ROC-кривой. Также выполнено сравнение словарей GloVe различных размерностей (50, 100, 200, 300), обоснован выбор векторов размерности 50. Построенную модель можно использовать в дальнейшем для оценки любого текста, а не только являющегося непосредственно описанием уязвимости. К примеру, можно предварительно классифицировать степень критичности баг-репортов по их описанию на ресурсах для управления контролем версиями, что позволит автоматизировать часть работы с баг-репортом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. National Vulnerability Database [Электронный ресурс] / National Vulnerability Database. – Режим доступа: <https://cve.mitre.org>
2. Общая система оценки уязвимостей CVSS [Электронный ресурс] / BISExpert. – Режим доступа: <http://bis-expert.ru/blog/5345/43124>
3. Vulnerability Details: CVE-2008-4250 [Электронный ресурс] / CVE Details. – Режим доступа: <https://www.cvedetails.com/cve/CVE-2008-4250/>
4. Anticipating Cyber Vulnerability Exploits Using Machine Learning [Электронный ресурс] / Semantic Scholar. – Режим доступа: <https://pdfs.semanticscholar.org/8394/ec608f6167d6c79ec2c495595249b439d959.pdf>
5. *Levy, Omer; Goldberg, Yoav*. Linguistic Regularities in Sparse and Explicit Word Representations // Proceedings of the Eighteenth Conference on Computational Natural Language Learning, Baltimore, Maryland, USA, June. Association for Computational Linguistics. – 2014.
6. Векторные представления слов [Электронный ресурс] / Профессиональный информационно-аналитический ресурс, посвященный машинному обучению, распознаванию образов и интеллектуальному анализу данных. – Режим доступа: <http://www.machinelearning.ru/wiki/images/b/b3/Word2Vec.pdf>
7. *Mikolov T., Chen K., Corrado G., Jeffrey D.* Efficient estimation of word representations in vector space. In: ICLR Workshop Papers, 2013a.
8. *Pennington J., Socher R., Manning C.* GloVe: Global vectors for word representation. In: Proceedings of EMNLP-2014. Doha, Qatar, October 2014, p. 1532–1543.
9. Global Vectors for Word Representation [Электронный ресурс] / The Natural Language Processing Group at Stanford University. – Режим доступа: <https://nlp.stanford.edu/projects/glove/>
10. *Abadi M. et al.* Tensorflow: A system for large-scale machine learning // 12th Symposium on Operating Systems Design and Implementation. – 2016. – P. 265–283.
11. *Chollet F. et al.* Keras. – 2015.
12. Scikit-learn: Machine learning in Python / F. Pedregosa [et al.] // J. of Machine Learning Research. – 2011. – No. 12. – P. 2825–2830.
13. ROC Graphs: Notes and Practical Considerations for Researchers [Электронный ресурс] / George Mason University. – Режим доступа: <http://binf.gmu.edu/mmasso/ROC101.pdf>

16. **Breiman L.** / Random Forests // Machine Learning journal. – 2001. – Vol. 45, no. 1. – P. 5–32.
17. **Pedro D., Pazzani M.** / On the optimality of the simple Bayesian classifier under zero-one loss// Machine Learning. – 1997. – Vol. 29. – P. 103–137.
18. Using Machine Learning to Identify Security Issues in Open-Source Libraries [Электронный ресурс] / GitHub.com. – Режим доступа: <https://asankhaya.github.io/pdf/Using-machine-learning-to-identify-security-issues-in-open-source-libraries.pdf>

Поступила в редакцию 16.09.2019 г.

Контакты: e-mail: alixei.doronin@gmail.com (Доронин Алексей Константинович)

Doronin A., Lipnitsky V. BUILDING MACHINE LEARNING MODEL FOR THE CVE VULNERABILITY SEVERITY CLASSIFICATION PROBLEM.

The article discusses the use of machine learning methods in combination with the algorithm of word representation in the multidimensional vector space GloVe for the problem of predicting the criticality of vulnerability based only on its textual description. The NVD vulnerability database is used as a dataset for analysis and training. The article presents the analysis of vulnerability records, vulnerability assessment mechanism, on the basis of which the choice of features for model training is justified. Various approaches and methods for constructing vector representations of words are described, the choice of vectors constructed by the GloVe algorithm is justified. A comparative analysis of the model on sets of GloVe vectors of different dimensions is also given, conclusions about the use of 50-dimensional GloVe vectors are drawn. Several possible further practical applications of the trained model are given.

Keywords: machine learning, convolution neural networks, data analysis, vulnerability of computer systems, assessment of vulnerability severity, vector representation of words, text processing.

УДК 519.95:535.1: 535.3:537.311.3:539.104

ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ВАВИЛОВА-ЧЕРЕНКОВА И УДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В РЕЛАКСАЦИОННОЙ ОПТИКЕ

П. П. Трохимчук

кандидат физико-математических наук, доцент
Восточноевропейский национальный университет
имени Леси Украинки, Луцк, Украина

Обсуждаются основные особенности моделирования черенковского излучения и ударных процессов релаксационной оптики. Показано, что эти процессы могут иметь неравновесный и необратимый характер. Проанализированы физико-химические и электродинамические аспекты этих явлений. Модифицированные модели Рэлея, теория Лугового-Прохорова и основные теории черенковского излучения используются для исследования представленных экспериментальных данных. Влияние интерференционных и дифракционных процессов на формирование лазерно-индуцируемых фазовых трансформаций проанализировано. Сравнительный анализ методов моделирования ударно-волновых процессов и каскадной модели возбуждения в режиме насыщения и возбуждения используются для моделирования лазерно-индуцированного пробоя облученного вещества. Проанализированы соответствующие экспериментальные данные для 4H-SiC. Получено хорошее совпадение экспериментальных и модельных данных.

Ключевые слова: ударные процессы, релаксационная оптика, насыщение возбуждения, каскадные процессы, необратимые явления, черенковское излучение, модель Рэлея, фемтосекундный лазер, дифракционное расслоение.

Введение

Проблемы получения и применения черенковского излучения представляют интерес с точки зрения релаксационной оптики [1–3].

Классическое черенковское излучение генерируется после прохождения частиц высокой энергии (электронов, ионов, γ -квантов) через вещество. Отличие черенковского и тормозного излучения заключается в следующем. Излучение Вавилова-Черенкова имеет две стадии [4; 5]: первая – это поляризация вещества, вторая – излучение этого поляризованного вещества. Но у нелинейнооптических процессов есть две или четыре стадии. Поэтому в кинетическом смысле черенковское излучение можно представить как нелинейнооптический процесс [1–3].

Но черенковское излучение можно представить и как ударный электромагнитный процесс [4].

Три типа моделей могут быть использованы для объяснения этого явления.

Во-первых, в классической концепции Тамма-Франка черенковское излучение представляется как реакция облученного вещества на его ударное возбуждение [4].

Теория Нильса и Оге Боров основана на теории замедления заряженных частиц [5]. Эта концепция может быть представлена как микроскопическая природа черенковского излучения. Но для частиц высоких энергий каждая частица поляризует вещество в большом объеме. И каждая частица имеет свой конус электромагнитного возбуждения облучаемой среды. Угол между перпендикуляром к поверхности этого конуса и его

осью соответствует углу черенковского излучения. Количество конусов равно числу налетающих частиц. В этом случае мы имеем дробление энергии каждой заряженной частицы по профилю ее электромагнитного воздействия на среду.

Для получения излучения Вавилова-Черенкова может быть использован и метод оптической накачки. После облучения вещества в области прозрачности вещества при фемтосекундном лазерном облучении этот эффект может быть получен за счет многофотонной поляризации вещества в режиме насыщения возбуждения. В этом случае для облучения лазерной модой ТЕМ₀₀ мы имеем только один конус [1–3]. Один конус может быть получен и для сфокусированного излучения. Но для режима фокусировки наблюдается дифракционное расслоение излучения и каскад черенковских излучателей. Таким образом, мы можем создавать излучатели в спектральном диапазоне собственного поглощения в объеме облучаемого вещества. Это явление может использоваться для локального изменения свойств облучаемого вещества по объему.

Экспериментальные данные по получению каскада лазерно-индуцированных повреждений в 4H-SiC можно представить как действие вторичного черенковского излучения [6; 7].

Изменение физических свойств облученного вещества в конических сечениях для оптического случая является простым по сравнению с облучением высокоэнергетическими частицами. В этом случае у нас меньше радиационных повреждений. Для моделирования этих процессов может быть использован кинетический метод оценки собственных механизмов многофотонного рассеяния света. Грубо говоря, мы имеем спектр различных нелинейно-оптических явлений. Поэтому спектр этого излучения должен быть непрерывным, как и для других случаев получения черенковского излучения.

Образование микроскопического распределения оптических повреждений может быть объяснено на основе интерференции черенковского излучения [8].

Процесс создания каскада из пяти фаз лазерно-индуцированных повреждений был смоделирован с помощью обобщающей модели колец Рэлея [2]. Представлен также сравнительный анализ этой модели и теория Лугового-Прохорова [9; 10].

Основные результаты и обсуждения

Экспериментальные данные, показывающие роль черенковского излучения в генерации каскадного разрушения объема 4H-SiC после импульсного фемтосекундного лазерного облучения, были получены группой Т. Окады [6; 7].

В [6; 7] для минитюаризации пролучаемых структур кристаллы 4H-SiC облучались импульсами фемтосекундного лазера (длительность импульсов 130 фс, длина волны 800 нм, частота импульсов 1 кГц, энергия 200-300 нДж/импульс) с помощью микроскопа [6]. Фемтосекундные лазерные импульсы облучались вдоль линий внутри монокристаллов 4H-SiC на глубине 30 мкм перемещением образца со скоростью сканирования 10 мкм/с (Рис 1 (b)). Лазерное облучение осуществлялось под прямым углом к поверхности (0001) кристалла. Направление облучения было почти параллельно к кристаллографическому направлению $[1\bar{1}00]$.

Светлополевое ПЭМ-изображение поперечного сечения линии, записанной с энергией импульса 300 нДж / импульс, показано на рисунке 1 [6].

Светлополевое ПЭМ-изображение участка поперечного сечения линии, записанного с энергией импульса 200 нДж/импульс, представлено на рисунке 2 [7].

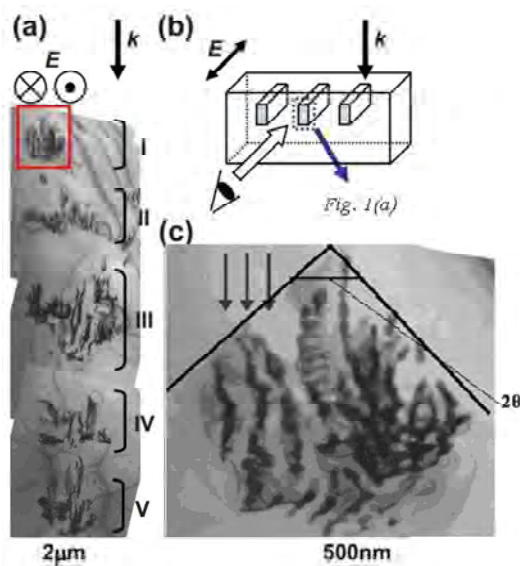


Рис. 1 – (а) Светлополевое ПЭМ-изображение сечения линии, записанного с энергией импульса 300 нДж/импульс. (б) Схематическое изображение геометрической взаимосвязи между облученной линией и микрофотографией поперечного сечения. (в) Увеличенное изображение прямоугольной области в (а). Модифицированные лазером слои с интервалом 150 нм указаны стрелками [6]

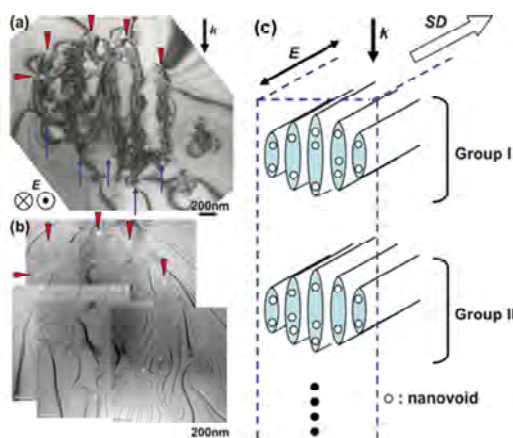


Рис. 2 – (а) Светлополевое ПЭМ-изображение части сечения линии, записанной с энергией импульса 200 нДж/импульс. (б) Изображение с нулевыми потерями той же области, что и в (а), где нановоиды выглядят как яркие области. Соответствие (а) можно найти, отметив стрелки на обеих микрофотографиях. (в) Схематические иллюстрации микроструктуры модифицированной лазером линии. Показаны направления распространения света (k), электрическое поле (E) и направление сканирования (SD). Представлены только две группы (I и II группы) лазерно-модифицированной микроструктуры [7]

В отличие от формирования поверхностных периодических структур в этом случае были получены трехмерные периодические структуры [2]. Поперечный размер этих структур составлял ~ 22 мкм, глубина ~ 50 мкм. Как видно из рисунка 1 (а), мы имеем пять ступеней неупорядоченных областей, которые расположены на расстоянии от 2 до 4 мкм друг от друга по вертикали [6]. Сами ветви в этом случае имеют толщину от 150 до 300 нм. Кроме того, в облученной нанополости имеются линии с диаметрами от 10 до 20 нм. При этом облученные структуры имеют кристаллографическую симметрию исходной структуры.

Объяснение основных особенностей экспериментальных данных рисунка 1 и рисунка 2 согласно [2] может быть следующим.

Создание каскада объемного разрушения (рис. 1 (а)) можно представить как результат дифракционного расслоения [2]. Оценка размеров каскада объемных разрушений может быть объяснена следующим образом. Размеры (диаметры) соответствующих членов каскада (рис. 1 (а)) d_{nir} пропорциональны соответствующим диаметрам дифракционных колец (диаметр соответствующего дифракционного кольца)

$$d_{nir} = k d_{ndif}, \quad (1)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Дифракционные диаметры d_{ndif} могут быть определены с помощью условия максимумов дифракционной картины (модифицированное соотношение Рэлея) [2]

$$d_{ndif} = n\lambda. \quad (2)$$

Оценки дифракционных диаметров d_{ndif} для $\lambda = 800$ нм при $n = 1, 2, 3$ позволяют объяснить размеры первых трех стадий каскадного разрушения объема (рис. 1 (а)). Для этого случая коэффициент $k \sim 2$. Но для стадий 4 и 5 рис. 1 (а) наши оценки $k_4 \sim 1,2$ и $k_5 = 1$. Различные значения коэффициентов k_i объясняются различными условиями оптического пробоя и созданием соответствующих фазовых превращений.

Расстояние между дифракционными пятнами и соответственными “движущимися” фокусами можно определить с помощью следующей формулы [2]

$$l_{nf} = \frac{d_{ndif}}{2 \tan \frac{\varphi}{2}}. \quad (3)$$

Эти расстояния для углов $\varphi_1 = 20^\circ$ и $\varphi_2 = 30^\circ$ наведены в [2]. Что удовлетворяет экспериментальным данным рис. 1 (а).

Качественное объяснение получения каскадных разрушений может быть следующим. В фокусе каждой дифракционной зоны (пятна) находится “генератор” соответствующего ударно-оптического пробоя. Но фокусы с более высоким числом расположены в “зоне” влияния предыдущих фокусов. Поэтому только первая стадия каскада на рис. 1 (с) представлена чисто ударным механизмом (конус Маха). Конусы Маха характерны и для второй, и третьей стадий каскада рис. 1 (с). Но его максимумы смещены от центра. Это может быть результатом взаимодействия второй и третьей ударных волн с предыдущими ударными волнами: первой – для второй волны и первой и второй – для третьей волны. Ударный механизм разрушения подтверждается линейным направлением оптического пробоя. Это направление параллельно направлению ударной волны и излучаемый спектр является непрерывным как для черенковского излучения, так и для наблюдаемых лазерно-индуцированных нитей в воде и воздухе [9]. Таким образом, основным создателем следов оптического пробоя является вторичное черенковское излучение и ударные волны. Это излучение поглощается более эффективно, чем лазерное излучение, и, следовательно, создание оптических следов пробоя происходит более эффективно, чем для исходного лазерного излучения. Черенковское излучение лежит в области собственного поглощения

4H-SiC, а 800 нм – в области прозрачности материала [2]. Для проверки этой гипотезы мы должны измерить спектр вторичного излучения. В этом случае можно использовать физико-химическую каскадную модель возбуждения собственных химических связей облучаемого вещества в режиме насыщения возбуждения [2].

Характер конуса, первую стадию каскада на рис. 1 (с) будем считать застывшей картиной черенковского излучения с оптической накачкой [1–3]. Угол 2θ в пике на Рис. 1 (с) соответствует черенковскому углу или углу конуса Маха [1–3]. Но этот угол меньше или равен черенковскому углу, который определяется как

$$\cos \theta_{ch} = \frac{c}{n\vartheta}, \quad (4)$$

где n – показатель преломления, c – скорость света в вакууме, ϑ – скорость оптически-индуцируемой поляризации среды. Для 4H-SiC $n = 2,77$ [2]. В теориях Боров [5] угол Черенкова определяется как угол между направлением движения частицы и перпендикуляром к гиперboloиду электромагнитного возбуждения вещества. В этом случае справедливо следующее соотношение

$$\theta_{ch} + \alpha_{ex} = 90^\circ, \quad (5)$$

где α_{ex} – половина угла гиперboloида для случая Бора или половина угла фокусировки света в веществе.

Формула (5) может быть использована для определения угла Черенкова с помощью α_{ex} и для определения θ_{ch} с помощью α_{ex} .

Теория движущихся фокусов Лугового-Прохорова позволяет объяснить некоторые особенности самофокусировки [9; 10]. Расслоение лазерного луча осуществляется в направлении облучения. Результаты численного моделирования зависимости квадрата безразмерной электрической напряженности $|X(0, z_1)|^2$ на оси пучка от глубины представлены на рисунке 3 [10].

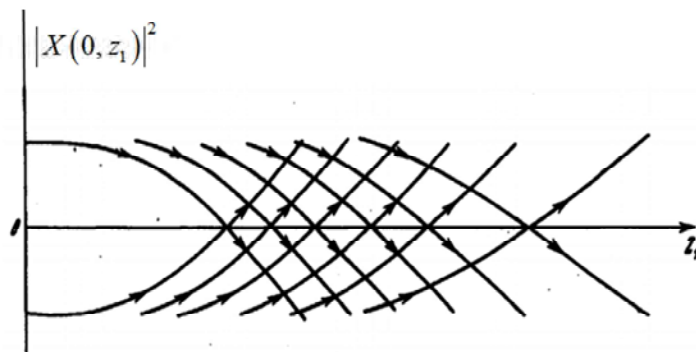


Рис. 3. Расслоение лазерного излучения согласно теории Лугового-Прохорова [10]

Значения параметра N (отношение начального поля к критическому полю) изменялись с 1 на 10 [10]. Для каждого значения N было получено решение $X(r_1, z_1)$. При этом были получены несколько точек на оси. Для различных значений N получено расслоение исходного пучка [10]. Таким образом, при $N > N_1$ поле на оси имеет конечное число интенсивных максимумов. Начальная интенсивность луча распределяется между максимумами; поэтому интенсивность максимума определяется из числа этих максимумов.

Анализ поля вне оси показывает, что наш луч имеет структуру кольца или другими словами, каждый максимум является результатом фокусировки в соответствующую зону кольца [2]. Этот факт отображен на рис. 3. Расстояния между максимумами намного меньше, чем расстояние между $z_1 = 0$ и первым максимумом.

Одним из основных выводов модели Лугового-Прохорова является следующее: дифракционное расслоение дифракционных колец генерируется в процессе лазерного облучения [10]. Этот вывод похож на вывод модели, основанной на кольцах Рэлея [2]. Что касается теории Лугового-Прохорова, то мы имеем, что расстояния между максимумами намного меньше, чем расстояние между $z_1 = 0$ и первым максимумом (первая стадия каскада повреждений). Но в теории Лугового-Прохорова расстояния между соседними максимумами (этапами каскада повреждений) различны, тогда как в модифицированной модели колец Рэлея эти расстояния одинаковы.

Процессы образования нановоидов (нанопор рис. 2 (с)) могут быть представлены как результат лазерно-индуцированного разрушения облучаемого материала и образования кавитационных пузырьков [2; 3]. Световое давление может быть определено с помощью следующей формулы [3]

$$p_0 = \frac{E_{ir}}{\tau_i c S}, \quad (6)$$

где E_{ir} – энергия облучения, τ_i – длительность импульса, S – площадь зоны облучения, c – скорость света.

Для оценки максимального радиуса нановоидов была использована модифицированная формула Рэлея [2; 3]

$$R_{\max} = \frac{2R}{0,915r} \sqrt{\frac{E_{ir}}{\pi \tau_i c E}}, \quad (7)$$

где R – радиус нанотрубки, r – радиус облучаемой зоны, E – модуль Юнга.

Если подставить $r = 250$ нм, $R = 10$ нм, $E = 600$ ГПа [35, 36], $E_{ir} = 130$ нДж, $\tau_i = 130$ пс, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, то $R_{\max} = 11$ нм.

Эллиптичность нановоидов можно определить с помощью формулы [2]

$$\alpha = \frac{\mathcal{G}_{ls}}{\mathcal{G}_{is}} = \sqrt{\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}} = \frac{R_{\max l}}{R_{\max t}} = 0,33, \quad (8)$$

где $\mathcal{G}_{ls}$ – поперечная скорость звука; $\mathcal{G}_{is}$ – продольная скорость звука; $R_{\max l}$ – максимальный продольный радиус нановоида; $R_{\max t}$ – максимальный поперечный радиус нановоида; ν – коэффициент Пуассона.

Использование модели Рэлея для электромагнитных процессов обусловлено электромагнитной природой лазерного оптического пробоя [2; 3].

В этом случае мы представили 4H-SiC как изотропное упругое тело. Для реальной картины мы должны взять гексагональную структуру. Но для качественного объяснения экспериментальных данных рис. 1 эта модифицированная модель Рэлея позволяет объяснить и оценить довольно точно размеры и формы полученных нановоидов.

Основные особенности распределения энергии в конусе Маха можно оценить следующим образом [10]. Энергетические характеристики экспериментальных данных, приведенных на рис. 1 (а), оценим следующим образом. Пусть каждая ступень (стадия) каскада имеет ~ 200 нанотрубок с размерами $d_{nt} = 20$ нм в диаметре и длиной $l_{nt} = 500$ нм. Общее количество этих нанотрубок составляет $N_{lsnt} \sim 1000$. Их суммарный объем равен

$$V_{lsnt} = N_{lsnt} \frac{\pi d_{nt}^2}{4} l_{nt} = 0,63 \text{ мкм}^3. \quad (9)$$

Плотность атомов 4H-SiC может быть определена с помощью следующей формулы

$$N_a = \frac{\rho N_A}{A}, \quad (10)$$

где ρ – плотность полупроводника, N_A – число Авогадро, A – вес одного грамма-атома. Для 4H-SiC $N_{aSiC} = 2,4 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$.

Поэтому количество атомов в суммарном объеме нанотрубок равно

$$N_{asnt} = N_{aSiC} V_{1snt} = 1,51 \cdot 10^{10}. \quad (11)$$

Энергия, которая необходима для оптического пробоя наших нанотрубок, может быть определена следующим образом. Пороговая энергия Зейтца для 4H-SiC равна $E_{Zth} \sim 25 \text{ эВ}$ [3; 8]. Пусть это значение соответствует энергии оптического пробоя. Поэтому суммарная энергия равна

$$E_{1ob} = N_{asnt} \cdot E_{Zth} = 30,2 \text{ нДж}. \quad (12)$$

Это значение равно 25% от энергии импульса. В этом случае мы имеем более высокую эффективность преобразования исходного излучения в “необратимую” часть черенковского излучения. Этот результат соответствует более интенсивному возбуждению по сравнению с классическими методами получения черенковского излучения. В этом “необратимом” случае мы имеем чистые фотохимические процессы.

Таким образом, мы даем ответ об основных особенностях экспериментальных данных рис. 1 и рис. 2, а представленные модели объясняют основные объемные процессы и явления релаксационной оптики в 4H-SiC.

Эти модели могут быть использованы для моделирования увеличения срока службы волоконно-оптических линий связи, а также других элементов оптикоэлектронных систем.

В целом микроскопический механизм лазерно-индуцированного черенковского излучения можно представить в виде неравновесного спектра всех возможных нелинейно-оптических явлений в локальных точках распространения лазерного пучка. Это может быть рамановское и мандельштам-бриллюэновское, преобразование с повышением и понижением частоты, генерация гармоник и различные интерференции этих процессов и явлений. Совокупность этих явлений и процессов и генерирует непрерывный спектр от ультрафиолетовой до инфракрасной областей спектра оптического излучения.

Черенковское излучение с оптической накачкой можно представить как нелинейно-оптический процесс, скорость которого меньше скорости фазы света в облучаемом веществе. В этом случае фазовая скорость в веществе имеет физическую природу: это электромагнитная скорость “коллективного” движения заряженных частиц или заряда в веществе. Поэтому в локальном масштабе мы имеем нелинейно-оптические процессы, которые модулируются конусом Маха черенковским излучением (рис. 1 (с)). Это позволяет дополнить теорию Нильса и Оге Боров о микроскопическом механизме черенковского излучения [5].

В твердом теле этот спектр должен быть смещен в ультрафиолетовый диапазон. Поэтому наши филаменты (нити пробоя вещества) имеют меньшую длину, нежели в воде или воздухе [8; 9]. Основной причиной этого факта является большая плотность твердого тела и более интенсивное поглощение света. Но в жидкости и воздухе происходит прямое оптическое разрушение, и эти типы материи имеют более “мягкую” релаксацию чем твердое тело. А процессы многофотонной ионизации в режиме самофокусировки идут медленнее, чем в твердом теле. Континуальный спектр нитей в этом случае соответствует восстановлению разрушающих химических связей и электронных состояний облученных молекул и атомов.

Вопросы об излучении суперконтинуума в процессе фемтосекундной лазерной филаментации обсуждаются в [9]. В воздушном суперконтинууме спектры излучения филаментов расположены от ультрафиолетового до инфракрасного диапазонов. В целом

нелинейная оптика филаментов включает в себя суперрасширение частотно-углового спектра исходного импульса, генерацию более высших гармоник и терагерцовое излучение, сжатие импульсов, оптическую анизотропию филамента и другие нелинейные явления [8; 9].

Но эти вопросы можно проанализировать и с точки зрения черенковского излучения [4; 5]. Эта модель может быть использована и для модификации модели Франка [4; 8] для электронной “накачки” черенковского излучения и в режиме “оптической” накачки [8].

Экспериментальные данные рис. 1 и рис. 2 можно объяснить на основе двумерной интерференции различных волн или поляритон-плазмонов согласно В. Макина [11]. Максимумы этих интерферограмм являются источниками более интенсивной ионизации облученного вещества и сопутствующих процессов фазовых превращений.

Как видим, источниками релаксационнооптических процессов являются оптические и нелинейнооптические процессы и явления.

Выводы

1. Обсуждаются основные особенности черенковского излучения и его роли в генерируемых релаксационно-оптических процессах.
2. Представлен краткий обзор экспериментальных данных по получению лазерно-индуцированных объемных каскадных разрушений в 4H-SiC.
3. Для объяснения этих данных используются модель дифракционного расслоения сфокусированного лазерного излучения и модифицированная модель Рэлея.
4. Представлен сравнительный анализ модели, основанной на кольцах Рэлея, и теории Лугового-Прохорова.
5. Проанализировано влияние интерференционных процессов на формирование лазерно-индуцированного оптического пробоя.
6. Эти модели позволяют удовлетворительно объяснить представленные экспериментальные данные.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Trokhimchuck, P. P.* Relaxed Optics. Realities and Perspectives / P. P. Trokhimchuck. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2016. – 250 p.
2. *Trokhimchuck, P. P.* Some Problems of Modeling the Volume Processes of Relaxed Optics / P. P. Trokhimchuck // Int. J. Adv. Res. Phys. Sc. (IJARPS). Vol. 5. Is. 11. 2018. – P. 1–14.
3. *Trokhimchuck, P. P.* Problems of modeling the phase transformations in Nonlinear and Relaxed Optics (review) / P. P. Trokhimchuck // Int J. Eng. Res. @ Developm. (IJERD). Vol. 14. Is. 2. 2018. – P. 48–61.
4. *Франк, И. М.* Излучение Вавилова-Черенкова. Теоретические аспекты / И. М. Франк. – Москва : Наука, 1988. – 286 с.
5. *Бор, Н.* Прохождение излучения через вещество / Н. Бор. – Москва : ИЛ, 1950. – 148 с.
6. *Okada, T.* Formation of periodic strain layers associated with nanovoids inside a silicon carbide single crystal induced by femtosecond laser irradiation / T. Okada, T. Tomita, S. Matsuo, S. Hashimoto, Y. Ishida, S. Kiyama, T. Takahashi // J. Appl. Phys. – 2009. – Vol. 106(5). – 054307 (5 pp).
7. *Okada, T.* Formation of nanovoids in femtosecond laser irradiated single crystal silicon carbide / T. Okada, T. Tomita, S. Matsuo, S. Hashimoto, R. Kashino, T. Ito // Material Science Forum. – 2012. – Vol. 725. – P. 19–22.
8. *Trokhimchuck, P. P.* Problems of modeling diffraction and interference processes in Nonlinear and Relaxed Optics / P. P. Trokhimchuck // Int. J. Adv. Res. Phys. Sc. (IJARPS). Vol. 6. Is. 7. 2019. – P. 5–17.
9. Self-Focusing: Past and Present. Springer Series: Topics in Applied Physics, Vol. 114. / eds. R. W. Boyd, S. G. Lukishova, Y.-R. Shen. – NY : Springer Verlag, 2009. – 605 p.

10. **Дышко, А. Л.** Самофокусировка интенсивных лазерных лучей / А. Л. Дышко, В. Н. Луговой, А. М. Прохоров // Письма в ЖЭТФ. – Т. 6, № 5. – 1967. – С. 655–659.
11. **Макин, В. С.** Regularities of creation of ordering micro- and nanostructures in condensed matter for laser excitation of mode of surface polaritons / V. S. Makin. D. Sc. Thesis, Saint-Petersburg, Russia: State University of Informative Technologies, Mechanics and Optics, 2013. – 384 p. (In Russian)

Поступила в редакцию 04.07.2019 г.

Контакты: trope1650@gmail.com (Трохимчук Петр Павлович)

Trokhimchuk P. BASIC PROBLEMS OF MODELING CHERENKOV RADIATION AND SHOCK PROCESSES IN RELAXED OPTICS.

Basic peculiarities of modeling Cherenkov radiation and shock processes of Relaxed Optics are discussed. It is shown that these processes may have nonequilibrium and irreversible nature. Physical and chemical and electrodynamic aspects of these phenomena are analyzed. Modified Rayleigh models, Lugovoy-Prokhorov theory and basic theories of Cherenkov radiation are used for the research of the experimental data. The author substantiates the influence of interference and diffraction processes on the formation of laser-induced phase transformations. The article provides a comparative analysis of the methods applied to model shock waves processes and a cascade model of excitation in saturation and excitation regime used for modeling a laser-induced breakdown of irradiated matter. Proper experimental data for 4H-SiC are analyzed. The agreement of experimental and modeling data is received.

Keywords: shock processes, Relaxed Optics, saturation of excitation, cascade processes, irreversible phenomena, Cherenkov radiation, Rayleigh models, femtosecond laser, diffraction stratification.

UDC 539.187; 673.378

MODELING OF NUTATION OSCILLATIONS IN LIGHT RADIATION REFLECTED BY THIN RESONANT LAYER

E. V. TIMOSHCHENKO

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor, Vice-Rector for Research
Mogilev A.A. Kuleshov State University

YU. V. YUREVICH

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Mogilev State University of Food Technologies

Within the framework of the semiclassical oscillator model the possibility of modulating radiation upon resonant reflection in the regime of coherent interaction of lasing field with a thin-layer substance is predicted basing on methods of the mathematical theory of stability of nonlinear dynamical systems and numerical modeling.

Keywords: thin planar layer of resonant atoms, dipole-dipole interaction, self-sustained light pulsations

Introduction

Collective optical processes capable of developing under conditions of resonant interaction and the relative weakness of relaxation mechanisms are characterized by a high consistency of light field oscillations and polarization of the medium. Factors that can violate the coherence of the field and polarization and significantly complicate the dynamics of this kind of ultrafast optical processes include dipole-dipole interaction. Its arising is typical of a substance with a high concentration of active centers and relatively large dipole moments attractive to these structural elements – the so-called dense resonant media.

It is believed that similar materials are also represented by semiconductor quantum-sized heterostructures that resonantly respond to radiation in the exciton region of the spectrum [1]. Similar structures are also a convenient experimental and theoretical model for studying the dynamics of coherent effects [2; 3]. Based on them, in a thin-film design, nonlinear modulating elements are developed in compact optical information processing devices. The study of the dynamics of their reaction to radiation in a coherent mode of interaction between the optical field and the active medium is therefore a nontrivial and practically important problem.

1. Computation model

In this regard, the problem of modeling the dynamics of reflection of a resonantly polarizable film in the framework of a semiclassical approach using the hyperfine layer approximation was posed [4]. The nonlinear response of the medium is described by the equations of the quantum-mechanical density matrix, and the field (incident from outside E_p , reflected E_r , transmitted E , and acting on dipole atoms) by the relations obtained from the electrodynamic conditions for the fields and the boundary layer with resonant polarization:

$$E_r = -r E_i + \frac{\mu N l}{\varepsilon_0(\eta+1) c} \frac{d\rho}{dt}, \quad E = \frac{2}{\eta+1} E_i + \frac{\mu N l}{\varepsilon_0(\eta+1) c} \frac{d\rho}{dt},$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{2}{T_2} \frac{d\rho}{dt} + \omega_0 \left(\omega_0 - \frac{2\mu^2 N}{3\varepsilon_0 \hbar} n \right) \rho = \frac{2\mu}{\hbar} \omega_0 n E, \quad \frac{dn}{dt} + \frac{1}{T_1} (n-1) = \frac{2\mu}{\hbar \omega_0} \frac{d\rho}{dt} \left(E + \frac{\mu N}{3\varepsilon_0} \rho \right). \quad (1)$$

Here ρ and n are the variable variables of polarization and population difference, μ is the matrix element of the dipole transition, N is the concentration of active dipoles, T_1 and T_2 are the times of longitudinal and irreversible phase relaxation, η и l are refractive index and layer thickness, r_0 is the reflection coefficient of the layer.

System (1) is modified taking into account the contribution to the field of the near fields of elementary dipoles acting on the active centers. The frequency detuning from the resonance ω_0 then depends on the population difference and, therefore, is non-linear. Model parameters of the medium were chosen for quantum-sized structures based on InGaAs, following the data of [5].

2. Reflection of a quasi-continuous light field

In the case of optical field with continuous envelope probing a resonant film, the reflected radiation field receives an expressed nutational structure. The variant of the quasi-continuous signal of the effect corresponded to the temporal distribution of the bending intensity of the applied field, defined by the dependence

$$e'_i(t) = e'_{i0} [\exp(t/\Delta t) - \exp(-t/\Delta t)] / [\exp(t/\Delta t) + \exp(-t/\Delta t)], \quad (\text{Fig. 1, } a),$$

the value of Δt in this case is determined by the steepness of the growth of tension at the initial stage of exposure.

Figure 1 for a different level of excitation and unsaturated absorption, calculated as $\kappa = \mu^2 N l \omega_0 T_2 / \varepsilon_0 \hbar c$, shows a time pattern of the intensity of the normalized reflected field $e_r = \mu E_r / \hbar \omega_0$.

Looking for the dependencies, the options for calculating the power of the reflected signal are presented mainly by a envelope series of pulsations, which encompass the high-frequency carrier component and attenuate to an equilibrium value. Power oscillations arise as a result of nutation vibrations of dipole particles representing active centers in the film material matrix. The damping of the pulsations in the interaction scheme with a relatively slow irreversible phase relaxation is caused by a violation of the field coherence and the polarization response of the medium due to the shift in the natural frequencies of the active dipoles due to their mutual influence due to the near fields.

The emergence of the substructure “started” from a certain power value (Fig. 1, *b*; 1, *c*). The increase in the applied power, with other fixed parameters, led to a reduction in the transition period in the output to the ripple mode. At the same time, the frequency of nutation pulsations increased, their contrast decreased (Fig. 4, *b* - *e*). These regularities of the temporal pattern are to a certain extent similar to how the structure of laser radiation in the free-lasing mode changes with increasing excitation level (pumping rate). An increase in the resonance absorption index, however, changes the picture of the nutational pulsations in another way – the contrast and the duty cycle increases, while the frequency of their repetition decreases (Fig. 1, *g* - *m*).

The presence of two opposing trends in the development of a picture when these basic characteristics change, which can be changed in the experiment, makes it possible that with a certain combination of them, the optimal variant of the process is possible, when a series of nutation pulsations will be represented by self-oscillations of power in reflected radiation.

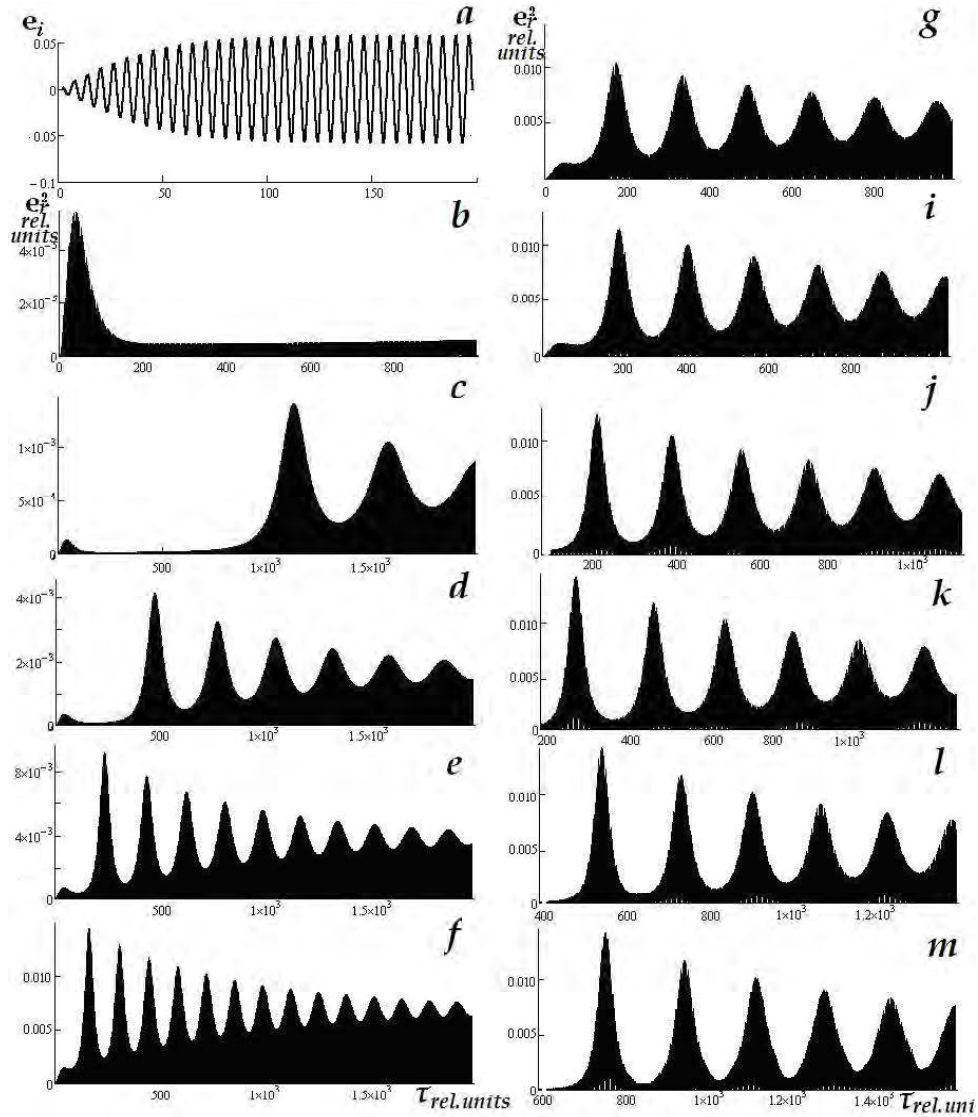


Fig. 1 – Temporal dependence of the normalized intensity of reflected field;
a is incident signal shape, *b* – $\epsilon'_0=0.05$, *c* – $\epsilon'_0=0.15$, *d* – $\epsilon'_0=0.25$, *e* – $\epsilon'_0=0.5$,

f – $\epsilon'_0=1.25$, $\kappa=2$; *g* – $\kappa=3.5$, *j* – $\kappa=4$, *k* – $\kappa=5$, *l* – $\kappa=6$, *m* – $\kappa=9$,

$$\epsilon'_0 = 0.5, \gamma = 0.0078, \tau_2 = 400, \omega_0 = 1.45 \cdot 10^{14} \text{ rad/s}$$

For quasistationary envelopes of variables of field strengths and resonant polarization, system (1) is reduced to the optical Bloch equations. Below are the results of the analysis of the equilibrium states of the model in the framework of the mathematical theory of stability.

3. Analysis of the stability of the analogue of the initial oscillator model

The calculated evaluation of the properties of the quasi-equilibrium states of the source model (1) was carried out within the framework of a linear analysis of the stability of the quasistationary analogue of the model. This means considering the dynamical system for

relatively slow field envelopes and polarization, that is, similar to [2], the quasistationary approximation of model (1) was used.

The transition to this approximate oscillatory system is trivial; it is formulated for relatively slowly varying amplitudes and fields and polarization. By solving the system with a high degree of coincidence, regularities of the reflection processes calculated for the variants of Figure 1 can be described. In the accepted normalization, quasistationary equations for amplitudes $\rho(\tau)$, $e'(\tau)$ and the envelope of the population difference $n(\tau)$ are written as follows:

$$\frac{d\rho'}{dt} - \frac{1+\kappa n}{\tau_2} \rho' + i(\Delta + \gamma n) \rho' = n e'_i,$$

$$\frac{dn}{dt} + \frac{n-n_0}{\tau_1} = -\frac{1}{2} \left[\rho'^* \left(e'_i - \frac{\kappa}{\tau_2} \rho' \right) + \rho' \left(e'_i - \frac{\kappa}{\tau_2} \rho'^* \right) \right].$$

It is further assumed that the probability amplitude of polarization can be represented as $\rho' = R + iS$ and $e'_i(t) = e_0$. Accordingly, the kinetic system for these variables is presented in this form [6]:

$$\frac{dR}{dt} = n e_0 - \frac{1+\kappa n}{\tau_2} R - (\Delta + \gamma n) S, \quad \frac{dS}{dt} = (\Delta + \gamma n) R - \frac{1+\kappa n}{\tau_2} S,$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1-n}{\tau_1} - e_0 R + \frac{\kappa}{\tau_2} (R^2 + S^2).$$
(2)

The expressions for the equilibrium states R_s , S_s and n_s of system (2) are not difficult to determine from the singular limits of the corresponding equations (the expression for the dependence e_0^2 on n_s):

$$R_s = \frac{n_s^2}{Z \tau_2^2} e_0, \quad S_s = \frac{\Delta + \gamma n_s}{Z \tau_2^2} n_s e_0,$$

$$e_0^2 = \frac{1-n_s}{\tau_1 n_s} \tau_2 Z, \quad Z = \frac{(1+\kappa n_s)^2}{\tau_2^2} + (\Delta + \gamma n_s)^2.$$
(3)

From expressions (3) it follows that with certain combinations of coefficients (2) the stationary value of n_s can be determined depending on the magnitude of the power e_0^2 ambiguously. It is known that the equilibrium states of models describing radiation when it is nonlinear resonantly interacting with a thin polarizable layer are characterized by a special property – the so-called bistability [7].

It is easy to verify that after separation of the real root, the characteristic equation for the exponent index λ , which determines the temporal dynamics of solutions for relatively small variations of the variables ΔR , ΔS and Δn in the neighborhood of (3) with the factor $\exp(\lambda \tau)$, is represented as:

$$\lambda^2 - \left[A - B + \frac{2}{3} \left(2M n_s + \frac{1}{\tau_1} \right) \right] \lambda + \left[\frac{A-B}{2} + \frac{1}{3} \left(2M n_s + \frac{1}{\tau_1} \right) \right]^2 + \frac{3}{4} (A+B)^2 = 0. \quad (4)$$

Here

$$A = \left(C + \sqrt{C^2 + D^3} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad B = \left(-C + \sqrt{C^2 + D^3} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad C = \frac{1}{2} \left[\gamma (mr - pu) - M (\gamma n_s)^2 - \frac{QM}{3} - \frac{2M^3}{27} \right],$$

$$D = (M^2/3 - Q)/3, \quad M = \frac{\kappa n_s}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}, \quad Q = (pr - mu) e_0^2.$$

The quantities $p = 1 - \frac{n_s}{\tau_2 Z} \left[\frac{\kappa}{\tau_2} \frac{1 + \kappa n_s}{\tau_2} + \gamma (\Delta + \gamma n_s) \right]$, $m = \frac{n_s}{\tau_2^2 Z} (\gamma + \kappa \Delta)$, $u = \frac{\kappa n_s}{\tau_2^2 Z} (\Delta + \gamma n_s)$, and $u = \frac{\kappa n_s}{\tau_2^2 Z} (\Delta + \gamma n_s)$, included in parameters of equation (4) are also expressed in terms of the coefficients of equations (2).

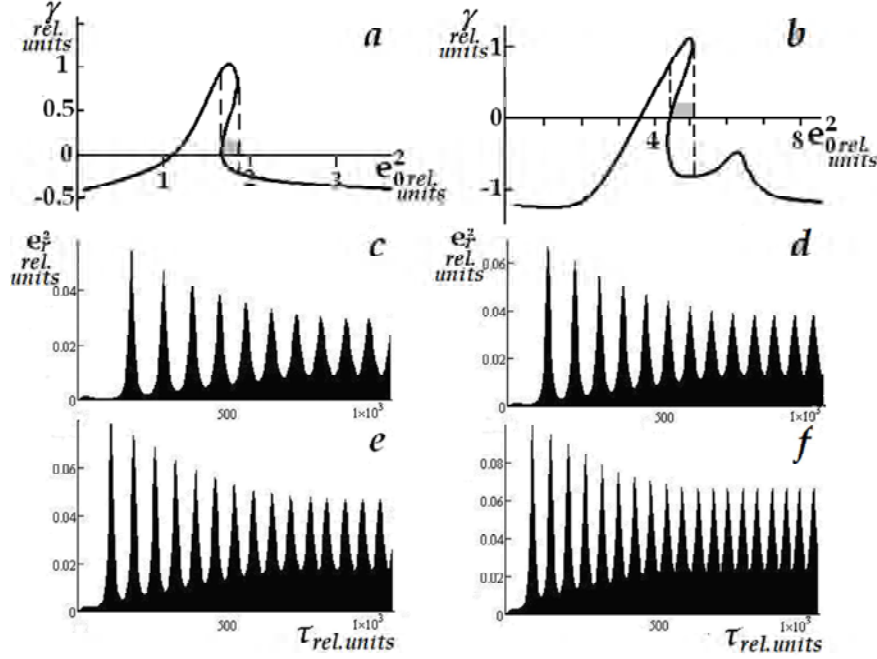


Fig. 2 – The dependence of the real part of the root of the characteristic equation (4) on the excitation parameter (*a, b*) and the temporal dependence of the normalized intensity of self-pulsations in the reflected radiation (*c – f*);

$\kappa = 12.5$ (*a, c*), $\kappa = 15.0$; $\kappa = 16.0$ (*b, d*); $\kappa = 18.5$ (*f*); $e'_0 = 1.3$ (*c, e*),
2.2 (*d, f*); $\gamma = 0.08$, $\tau_2 = 500$, $\omega_0 = 1.45 \cdot 10^{14} \text{ rad/c}$

The complex roots of equation (4) can be expressed as follows:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[A - B + \frac{2}{3} \left(2 \frac{\kappa n_s}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) \right] \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} (A + B).$$

Thus, if the following relation

$$\gamma = A - B + \frac{2}{3} \left(2 \frac{\kappa n_s}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) > 0, \quad (5)$$

is true, the attractor of system (2) can be a limit cycle. The frequency Ω of cyclic motion of a point in phase space along a phase curve curled up to a limit cycle is calculated as $\Omega = \sqrt{3}(A + B)/2$.

Calculated estimates of the existence conditions of the self-oscillating regime of the nutational instability of variables based on (3), (4), (5) are more convenient to carry out parametrically, that is, setting the parameter linearly increasing within (0, 1) (Fig. 2, *a, b*). It should be noted that the dependence curves $\gamma(e_0^2)$ are resonant in nature. In this case, the

resonance is deformed in such a way that the dependence $\gamma(e_0^2)$ in a certain region of the excitation parameter e_0 is ambiguous (this region is highlighted in the dependences shown in Fig. 2, *a, b*). This expresses bistability property mentioned above and such feature of equilibrium state characteristic, in general, characterizes the possibility of spontaneous instability and the transition of the nonlinear oscillatory system excited in such a bistability range to the self-oscillation regime.

Variants of the modeling of the dependence $e_r^2(\tau)$ basing on scheme (1) in Fig. 2, *c–f* were obtained for system parameters (1), approximately corresponding to condition (5) of the instability of the equilibrium state. It is clearly noticeable that the carrier oscillations with the optical frequency after the transitional evolution stage are modulated by the lower-frequency periodic envelope of nutational origin.

Conclusion

Obviously, nutation vibrations can cause a regular pattern of intensity in radiation reflected by a thin layer of a semiconductor structure with quantum-well effects modeled by a dense resonant medium. The occurrence of a series of self-sustaining pulsations is a consequence of the nonlinear phase shift of the absorption spectral line caused by the mutual influence of the near fields of dipoles under conditions of their relatively high concentration. The balance of oscillations of the resonance response generated by the optical nutation of dipole active centers and the effect of dipole-dipole interaction can lead to regular modulation of the initially continuous probing signal even under conditions of a certain influence of irreversible phase relaxation. This property of resonant reflection can be taken into account when developing lasers emitting series of short pulses with controlled parameters.

LIST OF USED SOURCES

1. **Kaplan, A. E.** Nanoscale stratification of optical excitation in self-interacting one-dimensional arrays / A. E. Kaplan, S. N. Volkov // *Phys. Rev.* – 2009. – Vol. A79. – P. 053834–(1-16).
2. **Афанасьев, А. А.** Оптические солитоны в плотных резонансных средах / А. А. Афанасьев, Р. А. Власов, А. Г. Черствый // *ЖЭТФ.* – 2000. – Т. 117, № 3. – С. 489–495.
3. **Маликов, Р. Ф.** Оптическая бистабильность и гистерезис тонкого слоя резонансных излучателей: взаимное влияние неоднородного уширения линии поглощения и локального поля Лоренца / Р. Ф. Маликов, В. А. Малышев // *Опт. и спектр.* – 2017. – Т. 122, № 6. – С. 1000–1009.
4. **Рупасов, В. И.** О граничных задачах в нелинейной оптике резонансных сред / В. И. Рупасов, В. И. Юдсон // *Квант. электрон.* – 1982. – Т. 9, № 11. – С. 2179–2186.
5. Rabi oscillations in the excitonic ground-state transition of InGaAs quantum dots / P. Borri [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2002. – Vol. 66. – P. 081306–(1-4).
6. **Юревич, Ю. В.** Устойчивость осцилляторных решений оптических уравнений Максвелла-Блоха в задаче о светомодуляционных свойствах тонких пленок резонансных сред / Ю. В. Юревич, Е. В. Тимошенко // *Итоги научных исследований ученых МГУ имени А. А. Кулешова 2014 г. : сб. научных статей / МГУ имени А. А. Кулешова ; под ред. Е. К. Сычовой.* – Могилев, 2015. – С. 47–52.
7. **Yurevich, V. A.** Resonant reflection by active thin layer / V. A. Yurevich, E. V. Timoschenko, Yu. V. Yurevich // *Журн. прикл. спектр.* – 2016. – Т. 83, вып. 6–16. – С. 307–308.

Поступила в редакцию 12.12.2019 г.

Контакты: +375 222 60 41 37 (Тимошенко Елена Валерьевна)

Тимошенко Е. В., Юревич Ю.В. МОДЕЛИРОВАНИЕ НУТАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ИЗЛУЧЕНИИ, ОТРАЖЕННОМ ТОНКИМ РЕЗОНАНСНЫМ СЛОЕМ.

В рамках полуклассической осцилляторной модели с применением методов математической теории устойчивости динамических систем и численного анализа предсказана возможность модуляции излучения при резонансном отражении в режиме когерентного взаимодействия поля с веществом тонкого слоя.

Ключевые слова: тонкий планарный слой резонансных атомов, диполь-дипольное взаимодействие, самопульсации излучения.

УДК 50(075.8)

ЭВОЛЮЦИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ КАРТИНЫ МИРА

М. С. Носкова

кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Рассматривается последовательность основных этапов развития научной картины мира в связи с изменением представлений о фундаментальных физических принципах. Анализ ретроспективы научного прогресса предлагается в качестве связующего компонента в системе приемов формирования научного мышления слушателей при усвоении курса истории физики в программе высшей школы.

Ключевые слова: история физики, научная картина мира, фундаментальные физические принципы.

§ 1. Введение

В настоящее время естественные науки являются не просто одной из производительных сил, но, фактически, создают и поддерживают условия жизни современного общества. Поэтому важнейшей задачей образования является формирование научного мышления.

Научное мышление основано на знании фундаментальных законов природы, умении применять их к анализу какого-либо явления и прогнозу его развития, способности выводить новые законы из фактов, полученных опытным путем.

Научное мышление не только рабочий инструмент ученых, оно необходимо и для решения практических задач, и для поиска истины в современном информационном потоке.

Фундаментальной составляющей научного мышления, и, одновременно, важнейшим результатом научной деятельности является научная картина мира [1–6].

Научная картина мира (НКМ) – система законов и теорий, объясняющая все известные явления природы (не только в естественных науках, но и в общественных, гуманитарных и т. д.).

Так как физика – наука о наиболее общих законах природы, а также главный источник научных приборов и методов, то именно физика и является фундаментом научной картины мира. Поэтому в данной работе в качестве НКМ рассматривается физическая картина мира. Возможность вывода законов гуманитарных наук непосредственно из физических – сложный вопрос, требующий дополнительных исследований.

Физическая картина мира (ФКМ) – система фундаментальных физических принципов, законов и теорий, математически описывающая, объясняющая и предсказывающая почти все известные явления природы (и некоторые неизвестные).

Формулировка НКМ или ФКМ является актуальной при изучении общей физики, истории физики, астрономии и других естественных наук.

В данной работе **картиной мира (КМ)** – будем называть обобщенные представления о природе, сложившиеся до появления современной науки. В КМ для объяснения природных явлений могут быть задействованы не только естественно-научные закономерности, но и элементы религиозной картины.

В литературе можно найти большое разнообразие вариантов формулировок КМ, НКМ и ФКМ [1–6].

§ 2. Схема анализа НКМ

В данной работе предлагается свести формулировку основных положений НКМ / ФКМ к ответам на следующие вопросы:

1. Как устроена материя? (Виды материи, строение и т. д.).
2. Почему она движется? (Виды взаимодействий, механизм их передачи).
3. Какие законы определяют строение и движение материи?
4. Как строение и движение материи зависит от времени?

Данная формулировка позволяет более адекватно сравнивать и анализировать различные картины мира, выявлять законы их эволюции, и, соответственно, сделать изучаемый материал более связным и структурированным, что поможет студентам эффективнее осмысливать полученную информацию [7].

Например, используя классификацию физических теорий [8–10] по вопросам 1–4 НКМ можно разделить на:

- 1) дискретные – континуальные;
- 2) близкодействующие – далекодействующие;
- 3) детерминированные – стохастические;
- 4) статичные – эволюционирующие.

§ 3. Анализ некоторых исторических КМ

Рассмотрим далее несколько примеров НКМ, сформулированных по вопросам 1–4 [10–13].

Первые известные попытки сформулировать естественно-научную картину мира производились в научно-философских школах Древней Греции.

Милетская школа, существовавшая в г. Милет в конце VII в. до н.э. и первой половине VI в. до н.э., посвятила свою деятельность изучению законов природы.

Картина мира милетской школы:

1. Строение материи. За многообразием природы скрывается единая, вечная, бесконечная первостихия.

2. Взаимодействие. Явлениями природы управляет Мировая душа – особая тонкая и подвижная форма первостихии. Проявления мировой души проявляются в свойствах магнитов и наэлектризованного янтаря.

3. Законы. Ничто не возникает из ничего. Космос един и весь пронизан мировой душой.

4. Развитие. Природа постоянно изменяется, миры периодически возникают из первостихии и вновь в нее возвращаются. Животные произошли из воды, после чего вышли на сушу.

КМ милетской школы – континуальная, близкодействующая, сочетает в себе как детерминированные, так и случайные процессы, эволюционирующая во времени.

Последователи милетской школы, сформулировали некоторые фундаментальные принципы (сохранения, соответствия, эволюции), на которых основана и современная картина мира.

Пифагорейская школа, состоящая из учеников и последователей Пифагора, сложилась в греческих колониях на юге Апеннинского полуострова в VI в. до н.э. Изучая законы музыкальной гармонии, пифагорейцы построили первую математическую модель мира [11].

Картина мира пифагорейской школы:

1. Строение материи. В основе всех вещей лежат числа или отношения целых чисел.

2. Взаимодействие. Причина движения – стремление к равновесию, гармония противоположностей.

3. Законы. Все тайны природы скрыты в числовых закономерностях.

4. Развитие. Мир – живое и огненное шаровидное тело, вдыхающее из окружающего беспредельного пространства пустоту (воздух или эфир). Проникая извне в тело мира, пустота разделяет и обособляет вещи [12].

КМ пифагорейцев дискретная (или дискретно-континуальная), близкодействующая (передаточный механизм взаимодействия – пустота или воздух/эфир), детерминированная, скорее эволюционирующая, чем статичная.

В дальнейшем пифагорейцы поддерживали атомистическую теорию строения вещества.

Занимаясь математикой, пифагорейцы рассматривали бесконечные прямые, плоскости, геометрические фигуры, числовые последовательности, т. е. каждый день встречались с бесконечностью, и воспринимали ее спокойно. Соответственно, им было легче представить себе бесконечное мироздание. Именно ученику Пифагора Архиту Тарентскому принадлежит классический довод в пользу бесконечности Вселенной [10]:

“Окажись я на краю Вселенной, то есть на сфере неподвижных звезд, мог бы я вытянуть вовне руку или палку в ней? Допущение, что не мог бы вытянуть, нелепо. Но если вытяну, тогда то, что вовне, окажется либо телом, либо местом (что совершенно безразлично). Таким образом, сколько раз не допускай границу Вселенной, всякий раз мы будем аналогичным образом подходить к ней и задавать тот же самый вопрос”.

Элейская школа (VI–V вв. до н.э.), Парменид, Зенон и Мелисс.

Картина мира элеатов:

1. Строение материи. Пространство заполнено сплошным однородным веществом.

2. Взаимодействие. Невозможно переместиться на уже занятое место, поэтому движение невозможно.

3. Законы. Мир един, в нем нет никаких отдельных частей.

4. Развитие. Бытие не погибает, не воскресает. Существует в виде огромного сплошного шара, неподвижно покоящегося в центре мира. Все изменения в мире – иллюзия.

Картина мира элеатов континуальная и полностью статичная, вопросы о взаимодействии и закономерностях переходят в мир иллюзий, который напоминает виртуальный мир.

Идеи элейской школы оказали большое влияние на развитие древнегреческих научных теорий.

Учение Эмпедокла.

Свою картину мира составил философ Эмпедокл (V век до н.э.).

Картина мира Эмпедокла:

1. Строение материи. “Корни всех вещей” – четыре элемента: земля, вода, огонь и воздух. Они заполняют все пространство и находятся в постоянном движении.

2. Взаимодействие. “Корни” приводятся в движение двумя противоположными друг другу движущими силами – Любовью и Враждой.

3. Законы. Сами “корни” вечны и неизменны. Тела возникают из них при определенных количественных отношениях (как неживые, так и живые). Соединение элементов носит случайный характер, но затем они подчиняются необходимости.

4. Развитие. Соединение и разъединение элементов под действием Любви и Вражды дает начало очередным циклам мироздания. Высказывал идею эволюции живых существ.

КМ Эмпедокла континуальная, близкодействующая, одновременно стохастичная и детерминированная, эволюционирующая.

Греческие атомисты (V–III вв. до н.э.), наиболее известные представители Демокрит, Левкипп, Эпикур, Тит Лукреций Кар.

Основоположник атомизма Демокрит создал свое учение в ответ на учение элеатов. Раз невозможно переместиться на уже занятое место, движение должно происходить в пустоте. Эпикур добавил идею о хаотичном движении атомов.

Картина мира атомистов:

1. Строение материи. Все тела состоят из неделимых атомов, разделенных пустотой.

2. Взаимодействие. Причина всех явлений – движение атомов в пустоте и их хаотические столкновения.

3. Законы. Законы природы одинаковы везде (принцип изономии). Атомы существуют вечно, не сотворяясь и не уничтожаясь.

4. Развитие. Миры возникают из вихрей атомов, развиваются, стареют и разрушаются.

КМ атомистов дискретная, близкодействующая (так как взаимодействия передаются через столкновения), стохастичная и эволюционирующая.

Принцип изономии – предвестник принципа относительности.

Законы сохранения – проявление принципа симметрии.

Случайное движение атомов – аналог принципа неопределенности.

Многие философские школы и отдельно взятые философы имели свои собственные картины мира, которые можно анализировать по предложенной схеме, но в рамках данной статьи рассмотрим далее картину мира, которая оставалась господствующей в течение почти двух тысяч лет.

Учение Аристотеля.

Картина мира Аристотеля (384–322 г. до н.э.):

1. Строение материи. Вселенная – единое замкнутое целое, в ней нет пустоты и деления на атомы. Материя состоит из пяти элементов: элемент земли собран в шар в центре мира, его окружают сферы воды, воздуха, огня, небесные сферы заполнены эфиром.

2. Взаимодействие. Мир приводит в движение “неподвижный перводвигатель”, который управляет им посредством движения небесных тел. Каждое движение определяется своей целью.

3. Законы. В разных сферах мира действуют разные законы: в небесных сферах – совершенные, на Земле – искаженные.

4. Развитие. Мир объемлет в себе не только все место, но и все время [12]. Вселенная не имеет начала и конца во времени. Сферы земли, воды, воздуха и огня – область постоянных изменений, превращений, рождения и гибели. Небесные сферы – область неизменных движений по идеальным окружностям.

Картина мира Аристотеля – континуальная, близкодействующая, детерминированная, в целом статичная (в небесных сферах), но с элементами эволюции в земной сфере – противоположность картине мира атомистов.

КМ Аристотеля сформировалась в результате его наблюдений за процессами в живой природе: рождение и рост живых организмов, целесообразное действие инстинктов, целесообразная структура организмов. Аристотель считал, что истинные свойства природных явлений могут открыться только при наблюдении за ними в естественной среде, поэтому отрицательно относился к искусственно поставленным экспериментам [12].

В средние века картина мира Аристотеля была канонизирована – официально признана единственно верной и абсолютно истинной. Однако с течением времени

накапливались научные результаты, вызывающие сомнения в ее адекватности. XVI–XVII вв. – время формирования новых научных теорий, основанных на открытиях Коперника, Кеплера, Галилея.

Учение Р. Декарта

Новую, охватывающую практически все области естествознания картину мира, сформулировал в своих работах французский ученый и философ Рене Декарт (1596–1650).

Картина мира Декарта [14]:

1. Строение материи. Декарт не признавал пустоты, считал, что существует три вида атомов: “огненные”, самые большие, из которых состоят Солнце и звезды, “земляные”, из которых формируются планеты, и “воздушные”, самые мелкие, заполняющие пространство между остальными атомами. Свет – давление, передающееся “воздушными” атомами от раскаленного тела глазу.

2. Взаимодействие. Предметы взаимодействуют друг с другом либо при прямом столкновении, либо через возмущения в “воздушной” среде, которая осуществляет перенос тепла, действие тяготения, электричества и магнетизма.

3. Законы. Всеми процессами управляют законы сохранения количества движения, включая закон инерции (тело, предоставленное самому себе, стремится продолжить движение по прямой). Современное состояние Вселенной определяется ее прошлым, в ней нет места неожиданностям.

4. Развитие. Первоначальный толчок движению материи дала божественная воля, но затем Вселенная развивалась и формировалась по естественным законам.

Картина мира Декарта – континуальная, близкодействующая, детерминированная, эволюционирующая.

Хотя Декарт значительно продвинул математический аппарат физики, его картина мира в целом дает качественное, но не количественное описание природных явлений.

§ 4. Анализ ФКМ

Первая научная картина мира, основанная на фундаментальных, точных, математически сформулированных законах, – механическая картина мира, представленная И. Ньютоном (1643–1727) в книге “Математические начала натуральной философии” [10; 13]. (Естественно, ньютоновская формулировка фундаментальных законов является точной в области их применимости). В законе всемирного тяготения Ньютона нет скорости распространения взаимодействия, из чего следует идея о его мгновенной передаче.

Механическая картина мира (МКМ):

1. Строение материи. Материя делится на вещество, состоящее из атомов, и свет, представляющий собой поток частиц (корпускул), много меньших атомов вещества. Пространство и время абсолютны, и не зависят от происходящих в них явлений.

2. Взаимодействие. Главная движущая сила – всемирное тяготение. Действие силы тяготения передается мгновенно на любые расстояния.

3. Законы. Детерминированность. Все виды движения в природе сводятся к механическому движению тел и составляющих их частиц, которые можно описать и предсказать с любой точностью, используя законы механики.

4. Развитие. Ньютон считал, что бог сотворил Вселенную, и поддерживает ее в неизменном виде. Однако вскоре появились эволюционирующие варианты механических теорий, например, теория формирования Солнечной системы Канта-Лапласа.

МКМ – дискретная, дальнодействующая, детерминированная, в целом эволюционирующая.

Концепция дальнодействия воспринималась многими учеными (Гюйгенс, Лейбниц, Эйлер) с большим сомнением, тем не менее закон всемирного тяготения позволял адекватно описывать устройство Солнечной системы и объяснял существование и поведение кратных звездных систем.

В дальнейшем МКМ дополнилась мощным математическим аппаратом теоретической механики (в работах Эйлера, Лапласа, Лагранжа, Гамильтона и др.), в ее рамках утвердились законы сохранения, развивалась молекулярно-кинетическая теория газов, зародились начала термодинамики.

Появились новые машины, двигатели, средства транспорта, изменившие жизнь человеческого общества.

Тем не менее, в МКМ имелись противоречия.

Корпускулярная теория света не объясняла явления интерференции, дифракции, поляризации. В результате возродилась волновая теория света, (Гюйгенс, Юнг, Френель). Конечно, в механике волновое движение было детально изученным, но природа световых волн оставалась неизвестной.

Также МКМ не могла объяснить взаимодействие атомов и образование молекул.

Результаты исследования электрических и магнитных явлений первоначально вполне соответствовали МКМ. Например, закон взаимодействия точечных зарядов, открытый Кулоном, по форме совпадал с законом всемирного тяготения, чем подтверждался принцип единства сил природы. Аналогично, закон Био-Савара-Лапласа, выражающий вихревую специфику силового магнитного поля, также укладывался в концепцию дальнодействия.

Затем, исследуя связь между электрическими и магнитными явлениями, Майкл Фарадей обнаружил явление электромагнитной индукции, установив прямую корреляцию электрического поля и порождающего его в этом случае переменного магнитного поля. Разрабатывая математическое описание его результатов, Дж. Максвелл заявил о существовании единого электромагнитного поля и свел все законы электромагнетизма к системе уравнений, из которых следовало существование волн, распространяющихся с большой, но конечной скоростью – скоростью света. Таким образом, свет оказался электромагнитной волной, причем далеко не единственной их разновидностью, что было подтверждено экспериментами Г. Герца. В результате законы Максвелла соединили в себе не только все законы электромагнетизма, но и законы оптики. На их основе и начала формироваться новая, электромагнитная картина мира.

Открытие законов электромагнетизма привело к появлению новых двигателей, видов и средств коммуникаций, устройств передачи энергии на большие расстояния.

Однако картину триумфа науки сильно осложняло противоречие между принципом относительности и тем, что в теории Максвелла скорость распространения электромагнитных волн в вакууме не зависит от скоростей движения их источника и приемника.

В процессе разрешения этого противоречия возникает специальная теория относительности А. Эйнштейна, которым в дальнейшем предложена новая теория гравитации, учитывающая конечную скорость взаимодействия [15].

Электромагнитная картина мира (ЭКМ):

1. Строение материи. Пространство и время составляют единый континуум и связаны с энергетикой происходящих в нем процессов. Частицы вещества искажают пространство-время, и эти искажения и представляют собой непрерывные электромагнитные поля.

2. Взаимодействие. Движущие силы – всемирное тяготение и электромагнетизм, являющиеся проявлением единого общего взаимодействия, которое передается возмущениями полей, с конечной скоростью – скоростью света.

3. Законы. Все явления природы можно описать и предсказать с любой точностью используя единую теорию поля.

4. Развитие. Из общей теории относительности следует, что Вселенная не может быть стационарной. Эволюцию Вселенной определяют законы гравитации и термодинамики.

ЭКМ дискретно-континуальная, близкодействующая, детерминированная, эволюционирующая картина мира.

Создание общей теории электромагнетизма и гравитации потребовало введения дополнительных пространственно-временных измерений, что не удалось воспроизвести экспериментально [15].

Накапливались данные о сложном строении атома: периодический закон, открытый Д.И. Менделеевым, особенности спектров излучения, открытие электрона и других элементарных частиц, рентгеновских лучей и радиоактивности.

Зарождение новой научной теории – квантовой механики начинается с выступления М. Планка в 1900 г. [16].

Квантово-полевая картина мира (КПКМ):

1. Строение материи. Все виды материи на уровне микроструктуры квантованы (включая пространство-время), но одновременно обладают свойствами волн (корпускулярно-волновой дуализм материи). Разные виды материи могут превращаться друг в друга.

2. Взаимодействие. Движущие силы – четыре вида взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое, которые можно объединить в общее взаимодействие. Механизм действия сил – обмен квантами полей с конечной скоростью – скоростью света.

3. Законы. В масштабах, сравнимых с длиной волны де Бройля, движение объектов можно описать, используя законы квантовой механики, которые в макроскопических системах, усредняются и переходят в законы классической механики и электромагнетизма. Точность описания явлений ограничена соотношением неопределенностей.

4. Развитие. Вселенная образовалась в ходе Большого взрыва, и эволюционирует за счет локального гравитационного уплотнения материи, как открытая термодинамическая система по законам теории относительности.

Дискретно-континуальный характер КПКМ определяется квантовой механикой и принципиально отличается от такового в ЭКМ и других картинах. КПКМ однозначно близкодействующая, одновременно детерминированная и стохастическая, эволюционирующая. Нестационарность Вселенной следует из теории относительности. Ядерные реакции синтеза – источник энергии звезд тоже результат гравитационного уплотнения энергии.

Еще в процессе формирования КПКМ в ней имелись противоречия, например, так и не удалось создать теорию квантовой гравитации. Обнаружились также неизвестные формы материи, такие как темная материя и темная энергия [17].

Видимо, КПКМ не последняя научная картина мира.

§ 5. Заключение

При изучении процесса формирования НКМ можно выделить следующие моменты, характеризующие одновременно как фундаментальные законы природы, так и процесс их освоения человеком.

Эволюция научной картины мира:

По мере развития науки картина мира тоже развивается:

о С одной стороны, старые законы объединяются в более общие системы законов, – картина мира упрощается, появляется надежда вывести один всеобщий закон, описывающий все явления.

о С другой стороны, открываются новые явления природы, изучение которых выдает новые, неизвестные ранее законы, – картина мира усложняется.

о При этом ни одна научная картина мира не могла объяснить все явления природы без противоречий.

о Однако каждое противоречие со временем становилось источником новых открытий. Возможно некоторая противоречивость законов природы и является двигателем эволюции Вселенной.

Автор выражает признательность профессору кафедры естествознания МГУ имени А.А. Кулешова В.А. Юревичу и доценту кафедры математики и естествознания А.В. Томову за полезные консультации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Эйнштейн, А.* Эволюция физики / А. Эйнштейн, Л. Инфельд. – Москва : Молодая гвардия, 1966. – 268 с.
2. *Садохин, А. П.* Концепции современного естествознания: учебник для студентов вузов, обучающихся по гуманитарным специальностям и специальностям экономики и управления / А. П. Садохин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 447 с.
3. *Мошанский, В. Н.* Формирование мировоззрения учащихся при изучении физики / В. Н. Мошанский. – М. : Просвещение, 1976. – С. 145.
4. *Горбачев, В. В.* Концепции современного естествознания : в 2 ч. [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. В. Горбачев. – Московский государственный университет печати, 2002. – Режим доступа: <http://www.hi-edu.ru/e-books/xbook131/01/>, свободный. – Дата доступа: 22.12.2018.
5. *Дягилев, Ф. М.* Концепции современного естествознания : учебное пособие для вузов по специальностям и направлениям гуманитарного профиля / Ф. М. Дягилев. – М. : ИМПЭ, 1998. – 192 с.
6. Новая философская энциклопедия. – 2-е изд., испр. и допол. – М. : Мысль, 2010. – Т. 1–4. – 2816 с.
7. *Коатс, Дж.* Поколения и стили обучения / Дж. Коатс. ; пер. с англ. Л. Е. Колбачева. – М. : МАПДО – Новочеркасск : НОК, 2011. – 121 с.
8. *Фейнман, Р.* Характер физических законов : пер. с англ. / Р. Фейнман. – 2-е изд., испр. – М. : Наука, 1987. – 160 с.
9. *Маделунг, Э.* Математический аппарат физики. Справочное руководство : пер. с немецк. / Э. Маделунг. – М. : Наука, 1968. – 620 с.
10. *Дорфман, Я. Г.* Всемирная история физики с древнейших времен до конца XVIII вв. / Я. Г. Дорфман. – М. : КомКнига, 2007. – 352 с.
11. Фрагменты ранних греческих философов. От эпических теокосмогоний до возникновения атомистики / подгот. издания А. В. Лебедева, Наука, Москва, 1989. – 577 с.
12. *Асмус, В. Ф.* Античная философия / В. Ф. Асмус. – М. : Высшая школа, 2005. – 408 с.
13. *Кудрявцев, П. С.* История физики и техники : учебное пособие для педагогических вузов / П. С. Кудрявцев, И. Я. Конфедератов. – Москва : Учпедгиз, 1960. – 507 с.

14. *Асмус, В. Ф.* Декарт / В. Ф. Асмус. – Москва : Государственное издательство политической литературы, 1956. – 373 с.
15. *Владимиров, Ю. С.* Классическая теория гравитации / Ю. С. Владимиров. – изд. URSS: Серия Классический учебник МГУ, 2018. – 304 с.
16. Физический энциклопедический словарь / гл. ред. А. М. Прохоров ; ред. кол.: Д. М. Алексеев [и др.]. – М. : Сов. Энциклопедия, 1984. – 944 с.
17. *Эйнасто, Я.* Темная материя и темная энергия / Я. Эйнасто, А. Д. Чернин. – М. : Век-2, 2018. – 176 с.

Поступила в редакцию 22.10.2019 г.

Контакты: +375 222 28 39 69 (Носкова Марина Сергеевна)

Noskova M. EVOLUTION OF THE PHYSICAL PICTURE OF THE WORLD.

The historical sequence of the main stages in the development of the world scientific picture is considered in connection with a change of the ideas about fundamental physical principles. A retrospective analysis of the scientific progress is proposed as a binding element in the system of methods used to form students' scientific thinking while mastering the course of the History of Physics in higher education institutions.

Keywords: the history of physics, scientific picture of the world, fundamental physical principles.

УДК 581.8:582.632.2(043.3)

АНАТОМИЯ НАДЗЕМНЫХ ВЕГЕТАТИВНЫХ ОРГАНОВ НЕКОТОРЫХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ СЕМЕЙСТВА БУКОВЫЕ (FAGACEAE DUMORT.)

В. И. Бойко

доцент

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

Г. Н. Тихончук

доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Д. И. Шевчук

магистрант второго года обучения

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина

В статье рассматривается анатомическое строение надземных вегетативных органов 7 видов из семейства Буковые. Проведен сравнительно-анатомический анализ вегетативных органов изученных представителей, описана топография тканей их органов, выявлены диагностические признаки, которые использованы в построении ключа для определения растений.

Ключевые слова: стебель, черешок, лист, Буковые, диагностические признаки, кора, флоэма, ксилема, перидерма, колленхима, паренхима первичной коры, сердцевина.

Введение

Ученые давно применяют анатомические признаки растений для решения филогенетических и эволюционных проблем, так как они являются более консервативными, чем морфологические, и позволяют более объективно судить о направленности структурных преобразований [1].

Изучение анатомической структуры стебля древесных и кустарниковых растений имеет большое значение в целях диагностики и уточнении границ таксонов, для решения вопросов филогении, а также для проведения научной и криминалистической диагностики [2].

Комплексное использование растительных ресурсов должно быть основано на знании не только полезности сырья, но и его структуры, обуславливающей технологию переработки, а также сферу применения. Буковые широко используются в деревообрабатывающей промышленности, кроме этого в целях озеленения парков, приусадебных участков и др.

Большая часть исследований посвящена не анатомическому строению вегетативных органов в целом, а их отдельным тканям. Следовательно, основными направлениями в области изучения анатомии вегетативных органов следует считать: а) структурный анализ их как комплекса; б) вовлечение в исследование как можно большего числа видов; в) анализ анатомического строения вегетативных органов целых таксонов, что даст дополнительную информацию для целей систематики и филогении.

© Бойко В. И., 2020

© Тихончук Г. Н., 2020

© Шевчук Д. И., 2020

Целью нашего исследования является выявление анатомического строения надземных вегетативных органов некоторых представителей семейства Буковые (*Fagaceae* Dumort.).

Задачами исследования было: изучение топографии тканей надземных вегетативных органов на поперечном срезе; выявление их диагностических признаков; составление ключа для определения растений.

Объекты исследования – 7 представителей семейства Буковые: каштан посевной (*Castanea sativa* L.), бук европейский (*Fagus sylvatica* L.), дуб черешчатый (*Quercus robur* L.), дуб северный (*Quercus rubra* L.), дуб пушистый (*Quercus pubescens* L.), дуб пробковый (*Quercus suber* L.), дуб каменный (*Quercus ilex* L.) (таблица 1).

Таблица 1 – Места сбора исследуемых видов сем. *Fagaceae* Dumort

Таксон	Место сбора
Род <i>Castanea</i> L. Вид <i>Castanea sativa</i> L.	Брест, Республика Беларусь
Род <i>Fagus</i> L. Вид <i>Fagus sylvatica</i> L.	
Род <i>Quercus</i> L. Вид <i>Quercus robur</i> L. Вид <i>Quercus rubra</i> L. Вид <i>Quercus pubescens</i> L. Вид <i>Quercus suber</i> L. Вид <i>Quercus ilex</i> L.	
	Никитский ботанический сад, Республика Крым, Российская Федерация

Образцы для исследования (надземные вегетативные органы) собирались нами в октябре – марте, т. е. в период, когда камбий находился в неактивном состоянии (лист – в мае – июне). Мы выбрали растения, произрастающие в оптимальных для жизнедеятельности условиях. Для проведения исследования подбирали хорошо развитые особи, не поврежденные вредителями и болезнями. Брали три особи одного вида, из них готовили образцы, которые в полевых условиях фиксировали в 96% спирте и выдерживали в смеси спирта и глицерина (1:1). Из образцов одного растения готовили постоянные препараты, на которых проводили измерения. Образцы двух других растений являлись контролем, т. е. из них делали только временные препараты.

Фиксированный материал помещали в воду на 25–30 минут, чтобы спирт, пропитавший стебли, диффундировал в растворитель, а объект при этом легче подвергается заморозке. Из стеблей, подвергшихся фиксации, готовили микрообразцы, которые использовали для получения срезов. Толщина срезов составляла 10–30 мкм. Изготавливали их на санном микротоме с замораживающим столиком. Срезы выполнялись в двух направлениях: поперечном и продольном.

Затем они окрашивались регрессивным способом, помещая в сафранин и нильский синий. После окраски срезы проводили через растворы спиртов разных концентраций (50, 70, 96% и абсолютный спирт). На следующем этапе они обрабатывались карбоксиллом и ксилолом, после чего помещались в канадский бальзам. Таким образом, методика была общепринятой в анатомии растений [3].

Анализ исследуемых объектов проводился на световых микроскопах. Измерения осуществляли с помощью винтового окуляр-микрометра МОВ – 1–15.

Основная часть

Строение однолетнего стебля. Исследованные нами представители семейства Буковые имеют схожую топографию тканей на поперечном срезе стебля. Однолетний

стебель на поперечном срезе имеет следующее расположение тканей: снаружи находится эпидерма, под которой залегает перидерма, граничащая с колленхимой, глубже от нее имеется кольцо первичных механических элементов и рядом с ним – вторичная флоэма, окружающая камбий, ко внутри от последнего формируется вторичная, а затем и первичная ксилема. Самое внутреннее расположение занимает сердцевина.

Снаружи однолетний стебель покрыт однослойной эпидермой [4], клетки которой в поперечнике овальной формы у бука европейского, каштана посевного и дуба пробкового, а у остальных представителей прямоугольной [5]. Тангентальный размер эпидермальных клеток варьирует в пределах от 18 до 22 мкм, а радиальный – 8–10 мкм. Клетки ткани дубов пушистого, пробкового и каменного образуют звездчатые трихомы [6; 7]. Ткань снаружи покрыта слоем кутикулы толщиной 1–2 мкм, а иногда и до 3 мкм.

В однолетнем стебле рано субэпидермально закладывается перидерма. Ткань представлена феллемой, феллогеном и феллодермой. Феллема состоит из 4–7 слоев клеток в радиальном ряду однолетнего стебля на поперечном срезе (бук европейский, дубы черешчатый и северный) [8], или 2–3 (каштан посевной, дубы каменный, пушистый и пробковый). Последние заполнены бурым содержимым у всех кроме дубов каменного, пушистого и пробкового). Клетки пробки прямоугольной формы, их тангентальный размер достигает 15–25 мкм, а радиальный – 8–12 мкм. У дубов пушистого и пробкового радиальные стенки клеток феллемы волнистые, а тангентальные вытянуты к периферии. Феллоген представлен одним слоем овальных в поперечнике клеток, тангентальный размер их составляет 17–30 мкм, а радиальный – 10–18 мкм. Феллодерма образует 2–3 слоя клеток овальной формы, их тангентальный размер колеблется в пределах 9–18 мкм, а радиальный – 5–10 мкм.

Колленхима на поперечном срезе однолетнего стебля представлена 2–5 слоями клеток овальной формы, тангентальный размер находится в пределах 18–30 мкм, а радиальный – 8–16 мкм. Ширина ткани составляет 20–40 мкм, она формируется только в стебле бука европейского и каштана посевного, а с возрастом – сминается.

Первичная кора гомогенная у бука европейского, каштана конского и дуба черешчатого [12], а остальные виды обладают гетерогенной паренхимой (в состав входят идиобласты – крупные клетки пяти- и шестиугольной формы, тангентальный размер их равен 25–38 мкм, а радиальный – 15–25 мкм, не большие округлые клетки, диаметр которых – 10–18 мкм и брахисклереиды (бук европейский), диаметр которых достигает – 16–45 мкм). В большом количестве в ткани обнаружены кристаллы оксалата кальция призматической формы и в виде друз (кроме дубов черешчатого и пушистого) [13]. Ширина ткани составляет 30–45 мкм.

Кольцо первичных механических элементов гетерогенное, сплошное, соединено склереидами. В его состав входят волокна (шириной 17–23 мкм, их длина составляет – 400–600 мкм) и брахисклереиды, тангентальный размер которых находится в пределах 18–42 мкм, а радиальный – 13–19 мкм. Ширина ткани достигает 15–45 мкм.

Вторичная флоэма представлена проводящими, запасными и механическими элементами. Проводящие элементы – ситовидные трубки, диаметр члеников которых в поперечнике составляет 9–14 мкм. Членики имеют длину 30–50 мкм, на их поперечных стенках расположены округлые ситовидные поля, диаметр которых приблизительно равен 2–3 мкм. На поперечном срезе членики ситовидных трубок расположены рассеяно, не формируют четких радиальных рядов. В продольном срезе их поперечные стенки слегка наклонены по отношению к продольным.

Запасные элементы представлены вертикальной и горизонтальной паренхимой. Тангентальный размер клеток аксиальной паренхимы находится в пределах от 10 до 17 мкм, а радиальный – от 6 до 11 мкм. Сердцевинные лучи во флоэме однорядны (каш-

тан посевной и дуб черешчатый), но изредка встречаются трех-, пяти- и шестирядные (у остальных). Их ширина варьирует в пределах 10–15 мкм, а высота – 350–400 мкм. На продольном срезе в клетках вертикальной паренхимы и лучей обнаружены кристаллы оксалата кальция призматической формы (у всех кроме каштана посевного и дуба черешчатого). Ширина ткани составляет 100–120 мкм.

Лубяные волокна обнаружены только у каштана посевного, дубов черешчатого и пушистого). Их поперечник 5-6-угольной формы диаметром 14–24 мкм, длина составляет 250–330 мкм [13].

На границе между вторичной флоэмой и вторичной ксилемой расположен камбий, состоящий из одного слоя клеток веретеновидной формы. Иногда они формируют камбиальную зону. Диаметр поперечника составляет 5–8 мкм, высота 25–33 мкм

Вторичная ксилема является рассеяно-сосудистой (у бука европейского, каштана посевного дуба каменного), остальные виды характеризуются кольце-сосудистой тканью. Древесина представлена сосудами и трахеидами, волокнами либриформа, сердцевинными лучами и вертикальной паренхимой. Сосуды пяти- и шестиугольной формы в поперечнике, их тангентальный размер равен 30–45 мкм, а радиальный – 25–40 мкм. Длина члеников составляет 70–100 мкм. На продольном срезе на стенках сосудов хорошо видны округлые поры (характерна сетчатая поровость для бука европейского и дуба пушистого). У молодых сосудов и трахеид наблюдается вторичное спиральное утолщение стенок. Между члениками сосудов у бука европейского и дуба пушистого находятся округлые перфорации, а у остальных – сетчатые.

Сердцевинные лучи во вторичной ксилеме однорядны, но иногда встречаются трех-, пяти- и шестирядные. Их ширина составляет 9–21 мкм, высота – 450–550 мкм. Вертикальная паренхима представлена на продольном срезе 2-4 слоями клеток овальной в поперечнике формы, диаметр которого равен 8–11 мкм.

Волокна либриформа образованы толстостенными клетками овальной в поперечнике формы, диаметр которого составляет 5–8 мкм, а высота – 500–600 мкм. Их клетки собраны в группы по 4-15. Ширина древесины достигает 160–180 мкм.

Первичная ксилема пучками внедряется в сердцевину. Ее составляют мелкие округлые в поперечнике сосуды. Таким образом, стебель сформирован на основе прокамбиальных пучков.

Сердцевина гомогенная, сложенная тонкостенными округлыми клетками, диаметр поперечника которых достигает 22–38 мкм. В клетках имеются кристаллы оксалата кальция различной формы: призматические (дубы пушистый и каменный), друзы (дубы черешчатый и северный), призматические и друзы (бук европейский, каштан посевной и дуб пробковый). Перимедуллярная зона образована мелкими тонкостенными клетками округлой формы, диаметр которых равен приблизительно 5–7 мкм.

Топография тканей многолетнего стебля и однолетнего схожа, различия касаются только количественных параметров.

Строение листа. Плоский лист имеет следующую топографию тканей: снаружи располагается верхний эпидермис, под которым залегает столбчатый мезофилл, ниже от него размещается губчатый, под которым находится нижняя кожа.

Снаружи лист покрыт верхним однослойным эпидермисом. В поперечнике клетки имеют прямоугольную форму, ширина их равна 15–18 мкм, а высота – 6–10 мкм. Верхний эпидермис покрыт слоем кутикулы толщиной 2–3 мкм.

Под верхним эпидермисом залегает столбчатый мезофилл, образующий 1 (иногда 2-3) слой хлорофиллоносных клеток прямоугольной формы, ширина их составляет 5–8 мкм, а высота – 17–20 мкм. Ширина ткани достигает 80 мкм.

Ниже от столбчатого расположен губчатый мезофилл. Ткань состоит из 5-15 слоев клеток, между которыми хорошо развита сеть межклетников. В поперечнике они четырех- и пятиугольной формы, их ширина находится в пределах 6–8 мкм, а высота – 13–15 мкм. В ткани имеются друзы оксалата кальция. Ширина губчатого мезофилла варьирует в пределах 30–40 мкм.

Нижний эпидермис состоит из 1 слоя клеток прямоугольной формы. Их ширина составляет 10–16 мкм, а высота – 8–10 мкм. В нижней кожице у центральной жилки присутствуют трихомы в виде волосков, заполненные воздухом (бук европейский). Их длина достигает до 100 мкм.

Лист в области центральной жилки имеет следующую топографию тканей: снаружи располагается эпидерма, под ней находится колленхима (кроме бука европейского), а ко внутри от них паренхима и кольцо первичных механических элементов, в центре находятся вторичные флоэма и ксилема, центральное место занимает сердцевина.

Эпидерма однослойная, сложена клетками прямоугольной и овальной формы, ширина которых равна 10–15 мкм, а высота – 6–10 мкм. Ткань покрыта кутикулой, толщина которой находится в пределах 2–3 мкм. В нижнем эпидермисе у центральной жилки присутствуют волоски (бук европейский [14], дубы северный, каменный и пушистый), а также звездчатые трихомы (дуб пробковый). Все выросты клеток заполнены воздухом кроме дуба пушистого и каштана посевного (имеется бурое содержимое). У дуба пробкового ткань двуслойная.

Колленхима образована мелкими овальными клетками, имеющими утолщенные оболочки. Диаметр клеток достигает 10–12 мкм. Ширина ткани примерно равна 20 мкм.

Паренхима сложена клетками четырех- и пятиугольной формы, ширина которых составляет 9–23, а высота – 7–20 мкм. В ткани присутствуют друзы оксалата кальция, и лишь дубы пушистый и пробковый дополнительно содержат еще и призматические кристаллы. Её ширина варьирует в пределах 30–60 мкм.

Ко внутри от паренхимы находится механическое кольцо, окружающее жилку. Кольцо первичных механических элементов состоит 4-6 слоев плотно сомкнутых механических волокон, диаметр поперечника которых примерно равен 6–8 мкм. Ширина ткани колеблется в пределах 15–18 мкм.

Проводящая система представлена пучками, количество и расположение последних сильно различается (одно у каштана посевного, два у бука европейского и от шести до пятнадцати у остальных представителей).

Черешок имеет такую же топографию тканей и анатомическое строение как и лист в области центральной жилки.

Ключ для определения исследованных представителей семейства *Fagaceae* Dumort. по анатомическим признакам надземных вегетативных органов

1	Наличие трихом в эпидерме стебля.....	3
2	Отсутствие трихом в эпидерме стебля.....	5
3	Трихомы игольчатой формы в паренхиме отсутствуют кристаллы Дуб пушистый (<i>Quercus pubescens</i> L.)	
–	Трихомы звездчатой формы.....	4
4	Древесина кольцо-сосудистая	
	Дуб пробковый (<i>Quercus suber</i> L.)	
–	Древесина рассеяно-сосудистая	
	Дуб каменный (<i>Quercus ilex</i> L.)	
5	Колленхима присутствует	6

- 6 В коровой паренхиме имеются склереиды.....
Бук европейский (*Fagus sylvatica* L.)
 — В коровой паренхиме отсутствуют склереиды.....
Каштан посевной (*Castanea sativa* L.)
 7 Лестничная перфорация сосудов 8
 8 Лубяные волокна присутствуют во флоэме.....
Дуб черешчатый (*Quercus robur* L.)
 — Лубяные волокна отсутствуют во флоэме.....
Дуб северный (*Quercus rubra* L.)

Заключение

1. Надземные вегетативные органы исследованных представителей семейства *Fagaceae* Dumort. сложены как тканями первичного происхождения (эпидерма, колленхима, коровая паренхима, механическое кольцо, первичные ксилема и флоэма, сердцевина), так и вторичного (перидерма (стебель), вторичные флоэма и ксилема). Большинство изученных видов имеют схожую топографию тканей надземных вегетативных органов.

2. Несмотря на большое сходство структуры надземных вегетативных органов, исследованные виды имеют отличительные признаки, которые можно выделить как диагностические: форма и размеры эпидермальных клеток в поперечном сечении; наличие или отсутствие трихом в кожице; тип трихом и их форма (игловидная, звездчатая); степень развития феллемы в однолетнем стебле: количество клеток феллемы в радиальном ряду на поперечном срезе однолетнего стебля; наличие или отсутствие: эфирных масел в клетках феллемы; колленхимы в однолетнем стебле; склереид в паренхиме; лубяных волокон во флоэме; характер паренхимы первичной коры (гомогенная или гетерогенная); форма кристаллов оксалата кальция в лучах, либо в аксиальной паренхиме; рядность лучей; форма ситовидных полей; структура древесины; характер перфораций между члениками сосудов (лестничная или сетчатая); поровость стенок члеников сосудов.

3. Перечисленные особенности использованы для построения ключей по анатомическим признакам для определения представителей семейства Буковые. Для уточнения границ таксонов предлагается использовать комплекс диагностических признаков, так как по одному признаку невозможно выделить ни один вид. Наиболее показательным в этом плане является однолетний стебель (особенно его кора), так как орган сложен наиболее разнообразным комплексом тканей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Шкуратова, Н. В.** Сравнительная анатомия коры представителей сем. Salicaceae Mirb. : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / Н. В. Шкуратова ; БрГУ им. А. С. Пушкина. — Минск, 2005. — 21 с.
2. **Бойко, В. И.** Анатомическое строение коры видов сем. Ericaceae Juss. : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05 / В.И. Бойко ; ВГУ — Воронеж, 1996. — 18 с.
3. **Прозина, М. Н.** Ботаническая микротехника / М. Н. Прозина. — Москва : Высшая школа, 1960. — 206 с.
4. **Эзау, К.** Анатомия семенных растений : пер с англ. : в 2 кн. / К. Эзау. — Москва : Мир. — 1980. — Кн. 1. — 219 с. ; Кн. 2. — 560 с.
5. **Шевчук, Д. И.** Сравнительная анатомия коры однолетних стеблей некоторых представителей семейств Вересковые и Буковые / Д. И. Шевчук, В. И. Бойко // Проблемы экологии и экологической безопасности: материалы Респ. студ. науч.-практ. конф., Брест, 14 ноября 2019 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; ред. кол.: Н. В. Шкуратова [и др.]. — Брест, 2019. — С. 152–154.

6. **Шевчук, Д. И.** Анатомия стебля дуба пушистого (*Quercus pubescens* L.) / Д. И. Шевчук, В. И. Бойко // Теоретические и практические аспекты развития современной науки : сб. статей по материалам междунар. науч.-практ. конф., Уфа, 6 ноября 2019 г. : в 2 т. / Вестник науки ; под ред. А. Р. Халикова. – Уфа : Изд. НИЦ Вестник науки, 2019. – Т. 1. – С. 34–38.
7. **Шевчук, Д. И.** Анатомия стебля дуба пробкового (*Quercus suber* L.) / Д. И. Шевчук, В. И. Бойко // Инновационные подходы в решении научных проблем : сб. статей по материалам междунар. науч.-практ. конф., Уфа, 14 ноября 2019 г. / Вестник науки ; под ред. А. Р. Халикова. – Уфа : Изд. НИЦ Вестник науки, 2019. – С. 23–27.
8. **Шевчук, Д. И.** Сравнительная анатомия однолетнего стебля дуба черешчатого (*Quercus robur* L.) и бука европейского (*Fagus sylvatica* L.) / Д. И. Шевчук, В. И. Бойко // Актуальные проблемы лесного комплекса : сб. науч. трудов, Брянск, ноябрь 2019 г. / под ред. Е. А. Памфилова. – Брянск : Изд. БГИТУ, 2019. – С. 116–119.
9. **Бойко, В. И.** Сравнительная анатомия однолетнего стебля дуба пробкового (*Quercus suber* L.) и дуба каменного (*Quercus ilex* L.) / В. И. Бойко, Д. И. Шевчук // Проблемы оценки, мониторинга и сохранения биоразнообразия : материалы III Респ. науч.-практ. экол. конф. с междунар. участием, Брест, 28 ноября 2019 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; редкол.: Н. В. Шкуратова, М. В. Левковская, Н. М. Матусевич. – Брест, 2019. – С. 69–72.
10. **Шевчук, Д. И.** Анатомия стебля дуба каменного (*Quercus ilex* L.) / Д. И. Шевчук, В. И. Бойко // Технологические инновации в современном мире : сб. статей по материалам междунар. науч.-практ. конф., Уфа, 28 ноября 2019 г. : 3 т. / Вестник науки ; под ред. А. Р. Халикова. – Уфа : Изд. НИЦ Вестник науки, 2019. – Т. 1. – С. 42–46.
11. **Шевчук, Д. И.** Сравнительная анатомия однолетнего стебля бука европейского (*Fagus sylvatica* L.) и каштана посевного (*Castanea sativa* L.) / Д. И. Шевчук, В. И. Бойко // Российская наука в современном мире : сб. статей по мат. XXIII Междунар. науч.-практ. конф., Москва, 15 июля 2019 г. – Москва : Изд. НИЦ Актуальность, 2019. – С. 30–33.
12. **Шевчук, Д. И.** Анатомия стебля дуба черешчатого (*Quercus robur* L.) / Д. И. Шевчук, В. И. Бойко // Инновационный потенциал развития науки в современном мире : сб. статей по мат. междунар. науч.-практ. конф., Уфа, 24 сентября 2019 г. / Вестник науки ; под ред. А. Р. Халикова. – Уфа : Изд. НИЦ Вестник науки, 2019. – С. 16–21.
13. **Шевчук, Д. И.** Сравнительная анатомия однолетнего стебля дуба пушистого (*Quercus pubescens* L.) и дуба северного (*Quercus rubra* L.) / Д. И. Шевчук, В. И. Бойко // Научно-исследовательские работы студентов, аспирантов и научных работников вузов : сб. статей по мат. всерос. науч.-исслед. конкурса, Уфа, 20 ноября 2019 г. / Вестник науки ; под ред. А. Р. Халикова. – Уфа : Изд. НИЦ Вестник науки, 2019. – С. 25–31.
14. **Шевчук, Д. И.** Сравнительная анатомия листьев бука европейского (*Fagus sylvatica* L.) и дуба черешчатого (*Quercus robur* L.) / Д. И. Шевчук, В. И. Бойко // Интеграция науки и практики в современном мире : сб. статей по мат. междунар. научно-практ. конф., Уфа, 16 сентября 2019 г. : 2 т. / Вестник науки ; под ред. А. Р. Халикова. – Уфа : Изд. НИЦ Вестник науки, 2019. – Т. 1. – С. 27–34.

Поступила в редакцию 02.12.2019 г.

Контакты: +375 222 63 59 61 (Тихончук Галина Николаевна)

Boyko V., Tikhonchuk G., Shevchuk D. ANATOMY OF ABOVE-GROUND VEGETATIVE BODIES OF SOME REPRESENTATIVES OF THE BEECH FAMILY (FAGACEAE DUMORT.).

The article discusses the anatomical structure of the above-ground vegetative organs of 7 species of the beech family. A comparative anatomical analysis of the vegetative organs of the studied representatives has been carried out, the topography of the tissues of their organs has been described, diagnostic signs used to construct the key for determining the plants have been revealed.

Keywords: stem, petiole, leaf, beech, diagnostic signs, bark, phloem, xylem, periderm, collenchyma, parenchyma of primary cortex, core.

УДК 612.111

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛИКОГЕМОГЛОБИНА ЭРИТРОЦИТОВ ПРИ ХРАНЕНИИ КРОВИ МЕТОДОМ ПРОТОЧНОЙ ЦИТОМЕТРИИ

Н. В. Акулич^{1,3}, В. Э. Сяхович¹, А. В. Сорока²,
А. С. Доронькина², С. А. Беляев¹

¹ Национальная антидопинговая лаборатория, а/г Лесной, Беларусь,

² Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

³ Гродненский государственный медицинский университет

Статья посвящена разработке методики определения гликированного гемоглобина эритроцитов методом проточной цитометрии. Исследовано содержание гликогемоглобина при хранении эритроцитов с использованием карбоксифлуоресцеина.

Ключевые слова: гликогемоглобин, хранение крови, проточная цитометрия.

Введение

В Республике Беларусь достигнуты большие успехи в области кардиохирургии и трансплантологии. Для гематологического сопровождения этих направлений современной медицины необходимы качественные компоненты крови, которые бы не вызывали посттрансфузионных осложнений.

Общезвестно, что продолжительность жизни эритроцитов (RBC) человека составляет *in vivo* около 120 дней, а в условиях станций переливания крови – около 42 суток. Для хранения крови наиболее часто используются следующие консервирующие растворы: PAGGS-M и SAGM, содержащие в качестве основных компонентов физиологический раствор, аденин, глюкозу и маннит.

В зависимости от вида гемоконсерванта, можно обеспечить хранение крови в течение 35±10 дней. Содержание глюкозы в хранящейся крови очень высоко. Так, например, в надосадочной жидкости контейнеров с SAGM концентрация глюкозы выше, чем у пациентов с диабетом [1].

Во всем мире диагностировано более 220 миллионов человек с диабетом, хотя фактическое число людей с диабетом, вероятно, будет выше, поскольку оно не учитывает довольно большое количество людей с нарушенной толерантностью к глюкозе [2]. Следует отметить, что нарушение толерантности к глюкозе не является противопоказанием для доноров крови.

Переливание одной или двух единиц хранящейся крови не приведет к значительному превышению уровня гликогемоглобина, поскольку процент перелитых клеток (10%) будет не высоким из-за их разведения в общей массе, содержащей нормальный уровень гемоглобина A1c (HbA1c). Но эти донорские эритроциты будут иметь иные

© Акулич Н. В., 2020

© Сяхович В. Э., 2020

© Сорока А. В., 2020

© Доронькина А. С., 2020

© Беляев С. А., 2020

физиологические свойства, которые существенно ухудшат тканевую (или органную) гемодинамику, что может оказаться критичным в периоперационный период [1; 2; 3; 4].

Поскольку количество HbA1c – это результат гликирования гемоглобина на протяжении всей жизни эритроцита, а эритроциты крови и, особенно, хранящиеся эритроциты имеют ее иную продолжительность, то биохимические методы исследования, которые дают среднее содержание HbA1c в объеме крови, *a priori* не могут дать точных сведений о значении HbA1c в отдельной клетке. Следовательно, необходима методика, позволяющая оценить содержание гликогемоглобина в отдельном эритроците компонентов крови.

Актуальность исследования связана с необходимостью выяснения молекулярных процессов, определяющих продолжительность жизни клеток крови, а также интервалы, в пределах которых возможно проведение трансфузиологических процедур.

Поскольку повышение HbA1c в хранящейся крови может оказать влияние на качество хранящейся крови, то целью исследования является разработка метода оценки содержания гликогемоглобина эритроцитов при хранении крови.

Анализ данных литературы. Гликирование представляет собой многостадийную реакцию, и она происходит с ускоренной скоростью в условиях гипергликемии, что приводит к модификации свободных аминогрупп в белках, а также к развитию окислительного стресса.

Известно, что около 90% общего гемоглобина является негликозилированным. Основная фракция негликозилированного гемоглобина представляет собой негликозилированный HbA, называемый HbAO (также к этой фракции относится HbA, гликированный без модификации изоэлектрической точки (молекул).

Гликированный гемоглобин относится к ряду минорных компонентов гемоглобина, которые образуются в результате присоединения различных сахаров к молекуле гемоглобина. Эритроцит человека свободно проницаем для глюкозы. В каждом эритроците гликированный гемоглобин образуется со скоростью, которая прямо пропорциональна окружающей концентрации глюкозы [3].

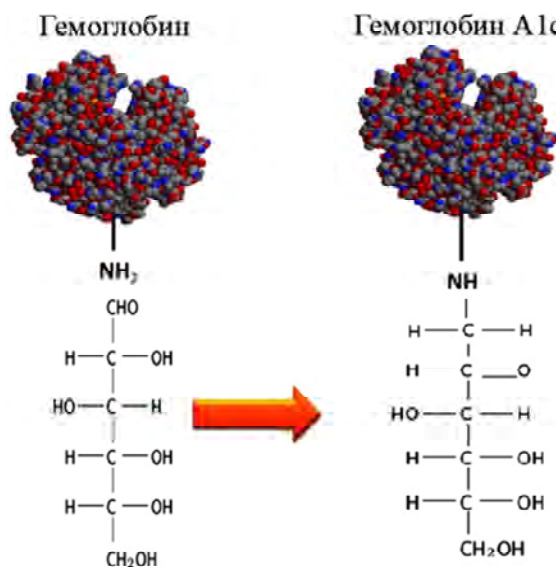


Рис. 1. Образование гликогемоглобина эритроцитов

Реакция глюкозы с гемоглобином является неферментативной, необратимой и медленной (рис. 1), так что только часть общего гемоглобина гликируется в течение жизненного цикла эритроцита (120 дней).

В результате измерение гликированного гемоглобина дает взвешенное “скользящее” среднее значение уровней глюкозы в крови, которое можно использовать для мониторинга долгосрочных уровней глюкозы в крови, обеспечивая индекс средней концентрации глюкозы в крови за предшествующие 2–3 месяца. Наиболее важным клиническим применением этого является оценка гликемического контроля у пациента с диабетом [4; 7].

Кроме того, гликирование гемоглобина индуцирует свободно-радикальные процессы, вызывая окислительное повреждение эндогенных молекул. Нарушение обмена углеводов приводит к изменению концентрации 2,3-ДФГ в эритроцитах, что в свою очередь, влияет на сродство гемоглобина крови реципиента к кислороду. Красные кровяные тельца подвергаются гликозилированию при старении и/или хранении при температуре выше 0°C. По мере хранения эритроцитов гликирование гемоглобина нарастает, поскольку этот процесс необратим.

Методы оценки гликогемоглобина. Гемоглобин A1c – представляет собой один из специфических подтипов гликированного гемоглобина. HbA1c составляет приблизительно от 3 до 6% общего гемоглобина у здорового человека и 20% или более при диабете, который плохо поддается контролю [6; 7].

Поскольку определение концентрации HbA1c необходимо при диагностике и мониторинге сахарного диабета, то в последние несколько десятилетий были разработаны стандартные методы анализа HbA1c, одним из которых является метод высокоэффективной жидкостной хроматографии (ВЭЖХ), являющийся референсным [6; 8] в большинстве лабораторий.

Еще один метод анализа HbA1c основан на иммунотурбидиметрии с использованием антител к HbA1c. Процентное содержание HbA1c в образце рассчитывается с использованием подсчета общего гемоглобина и концентрации HbA1c.

Эти стандартные методы анализа HbA1c представляют собой анализ средней концентрации гемоглобина всей пробы и процентного содержания HbA1c гемолизата, полученного из всех лизированных клеток эритрона, включая как зрелые эритроциты, так и ретикулоциты. Этот результат можно использовать только в качестве показателя средней концентрации глюкозы в крови за предыдущие 2–3 месяца, он не отражает процентное содержание HbA1c в клетках отдельных эритроцитов и не дает информацию о процентном содержании HbA1c между зрелыми эритроцитами и незрелыми. Следовательно, эти стандартные методы не дают своевременной информации о реакции пациента на лечение.

Разработка методики

Наиболее распространенным прибором для количественной цитометрии является проточный цитофлуометр, в некоторых случаях используют клеточный цитофлуометр-сортер. С ограничениями – можно использовать гематологический или мочевой анализатор. Все вышеперечисленные приборы позволяют получать сопоставимые результаты, оценивая значения электропроводности, оптической плотности, сигналов рассеяния света и флуоресценции [9; 10].

Проведение пробоподготовки образца возможно как “на борту” анализатора, так и вне прибора с использованием специальных реагентов, которые могут лизировать, пермеабилизировать и окрашивать клетку и ее клеточные компоненты. Таким способом окрашивают ретикулоциты в гемоанализаторе Sysmex с использованием встроенной в

прибор емкости с реагентом полиметин, а для проточного цитофлуориметра применяют, например, тиазол оранжевый, которым окрашивают пробу на преаналитическом этапе до ее помещения в цитофлуориметр. Для разработки методики определения гликогемоглобина при хранении крови эритроцитов требуется подбор красителя, способного выявлять HbA1c.

В нашем исследовании использовался сукцинимидный эфир карбоксифлуоресцеина (CFSE), который является липофильным красителем. Ферментативные реакции с клеточными эстеразами расщепляют ацетатные группы, что приводит к получению флуоресцентной формы CFSE, способного связываться с первичными аминами эритроцитов. Для нашей методики было важным, что гликирование гемоглобина при хранении крови сопровождается изменением доступности первичных аминогрупп для карбоксифлуоресцеина [9], что, в конечном счете, сопровождается ростом флуоресценции CFSE.

При разработке методики требуется учет содержания гемоглобина в эритроците, поскольку эта величина напрямую влияет на количество гликированного гемоглобина. Поскольку гемоглобин эритроцитов является важным параметром для клинической диагностики, то методика его подсчета в гематологических анализаторах разработана довольно давно [9]. Концентрацию общего гемоглобина в пробе крови получают путем лизиса эритроцитов в пробе крови с помощью литического реагента и спектрофотометрического измерения содержания хромогена, образованного высвобожденными молекулами гемоглобина, с использованием.

Золотым стандартом определения гемоглобина является лизис красных клеток крови с помощью цианида калия с последующим формированием стабильного цианметгемоглобина или гемоглобинуцианида.

Железо гемоглобина окисляется из двухвалентного (Fe^{2+}) в трехвалентное (Fe^{3+}), формируя метгемоглобин, который реагирует с цианидом калия (KCN) с образованием стабильного цианметгемоглобина. Затем концентрация гемоглобина измеряется фотометрически при длине волны 550 нм. Коэффициент светопоглощения разведенного образца сравнивается с коэффициентом светопоглощения реагента без образца.

Среднее содержание гемоглобина в эритроците (MCH) образца крови определяется по концентрации гемоглобина (Hb)/количество эритроцитов (RBC). MCH – это среднее значения измерения всех эритроцитов, оно не отражает содержание гемоглобина в отдельных эритроцитах. MCHC – средняя концентрация гемоглобина в эритроцитах, отражает степень насыщения эритроцита гемоглобином. Это наиболее стабильный гематологический показатель, поскольку он не зависит от размера эритроцита. Этот параметр можно использовать как индикатор ошибки прибора или ошибки, допущенной при подготовке пробы к исследованию.

Измерение клеточного гемоглобина на проточном цитометре является измерением в каждой клетке, что позволяет предоставить важную диагностическую информацию. Важно отметить, что хотя в большинстве современных гематологических анализаторов 5 Diff используется принцип проточной цитометрии, подсчет MCH производится расчетным способом: MCH/RBC .

В работе [8] был выполнен анализ гемоглобина методом проточной цитометрии в отдельных эритроцитах с использованием антител с флуоресцентной меткой к антигемоглобину A.

В другом исследовании [4] провели анализ гемоглобина с использованием проточной цитометрии и антител к анти-пангемоглобину. Особенностью данной работы является использование большого количества флуоресцентно-меченных антител, поскольку эритроциты имеют высокую концентрацию гемоглобина. Кроме того, существуют по-

тенциальные артефакты из-за помех связывания антител или угасания флуоресценции, вызванной высокой плотностью гемоглобина в эритроците. Используемый нами краситель (CFSE), лишен многих вышеперечисленных недостатков, что позволит измерять гликогемоглобин без использования антител.

Выбор контролей

Ряд контролей HbA1c коммерчески доступен. Большинство из этих контролей представлены в форме порошков лиофилизированного белка или гемолизированных жидких растворов [11]. Они пригодны для аффинной хроматографии и иммунологического детектирования. Контрольный материал стабилен в течение 300 дней при 6°C, и может быть использован для различных методов, включая ВЭЖХ и иммунотурбидиметрию. Но они не пригодны для проточной цитометрии, поскольку для анализа необходимо обеспечить, с одной стороны, сохранение клетки, а с другой – создать условие для ее окрашивания.

Исходя из вышеизложенного, к числу требований к контрольным материалам относится способность к проникновению через клеточную мембрану для анализа HbA1c клетки, а также других вариантов гемоглобина и/или других клеточных компонентов. Кроме того, необходимо учесть отличные от эритроцитов клетки. Контрольный материал должен сохранять свойства при замораживании/размораживании при хранении.

При разработке методики необходимо обратить внимание, что на точное соотношение выходного сигнала анализатора исследуемому клеточному содержимому могут влиять различные физические или химические факторы. Например, лизирующий раствор в гемоанализаторах 3 Diff не только лизирует эритроциты, но и удаляет часть содержимого цитоплазмы лейкоцитов. В общем случае это не является препятствием для последующего анализа лейкоцитов, поскольку эта особенность носит систематический характер.

Поэтому для точного количественного измерения компонентов клетки необходимо использование контрольных материалов в качестве внешнего или внутреннего контроля. В последнем случае контрольные материалы (антитела к HbA1c) добавляются в каждый измеряемый образец в качестве контроля. Они используются в качестве контрольного материала для настройки цитометра.

Ход анализа. Забор крови производили у добровольцев, антикоагулянт – ЭДТА K₂. Пробы крови окрашивали моноклональными антителами к гликофору А (CD 235 а), фиксировали, проводили пермеабиллизацию эритроцитарной мембраны и затем вносили CFSE. Для хранения крови использовался консервант SAGM, пробы крови анализировались еженедельно в течение 42 дней.

Определяли параметры прямого и бокового светорассеяния, интенсивность флуоресценции CD 235 а и CFSE на приборе FACS ARIA, (BD Bioscience, США). Для прободготовки использовали фосфатный буфер, эритроциты на гистограммах гейтировали по CD 235а. Для статистического анализа использовались непараметрические методы. Изменения считались значимыми при $p < 0.05$.

При использовании функций логического ограничения, в пределах области регистрации клеток проточного цитометра выделяли субпопуляцию, позитивную по CD 235а. Далее проводили анализ клеток, различающихся по значению флуоресценции CFSE.

При регистрации флуоресценции CFSE в популяции эритроцитов удастся выделить популяцию микрочастиц (40% позитивны по CD 235а) и тромбоцитов, имеющих не-большие линейные размеры и невысокое значение бокового светорассеяния [9].

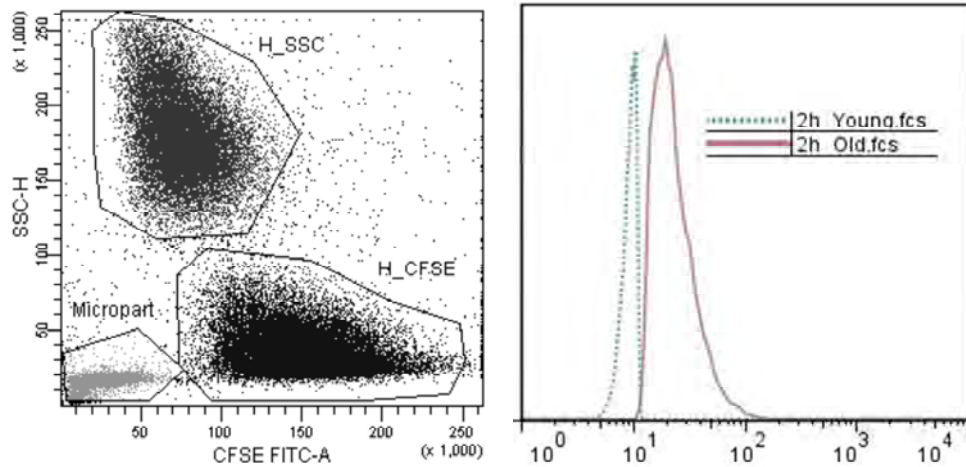


Рис. 2. Анализ эритроцитов хранящейся крови, окрашенных CFSE

Они характеризовались фоновыми значениями флуоресценции CFSE. Красные кровяные тельца образовывали неперекрывающиеся клеточные популяции, отличающиеся разными значениями флуоресценции зонда, которые неоднородны по дифрактометрическим параметрам – предположительно эритроциты, имеющие разные степени зрелости и/или различную упаковку гемоглобина [9].

При дальнейшем анализе этих популяций установлено, что морфологически (по размерам) они не имеют четких отличий и соотносятся – 60/40.

Для разработки методики важно выяснить зависимость между уровнем флуоресценции CFSE и продолжительностью хранения эритроцитов. Для этого с суточным интервалом исследовали интенсивность флуоресценции CFSE в образцах крови.

Полученные данные содержания гликогемоглобина при хранении крови представлены на рисунке 3. Значение CFSE имеет прямо пропорциональную зависимость с экспозицией хранения, которая близка к линейной. Ее можно удовлетворительно аппроксимировать полиномом 2 степени (рис. 3).

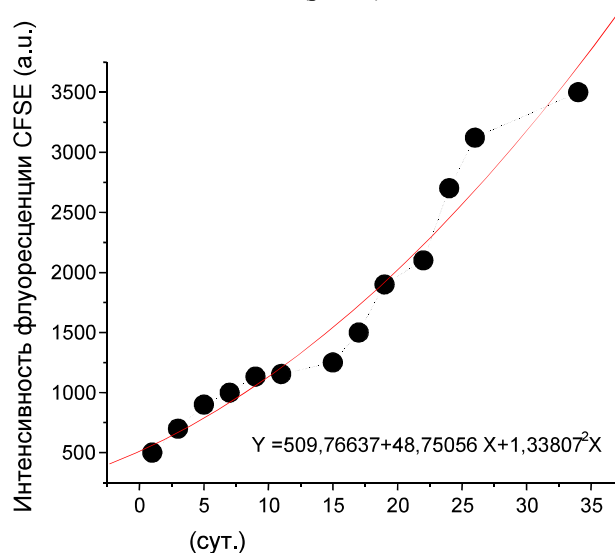


Рис. 3. Образование гликогемоглобина эритроцитов

Между 10–15 сутками наблюдения выявлено снижение прироста флуоресценции CFSE. Наши предыдущие данные показали [10], что этот период хранения характеризуется ростом гемолиза эритроцитов проб крови, а также снижением оптической плотности клеток по данным морфоденситометрического анализа. Рост флуоресценции CFSE, выявленный нами при хранении крови, основанный на изменении доступности первичных аминогрупп специфической и возрастании реакционной способности CFSE с первичными аминогруппами, свидетельствует об увеличении содержания гликогемоглобина при хранении крови.

Выводы

1. Разработан метод определения гликогемоглобина эритроцитов методом проточной цитометрии без использования антител.
2. Хранящаяся с гемоконсервантом кровь характеризуется наличием двух популяций эритроцитов, отличающихся по содержанию гликогемоглобина и неоднородны по дифрактометрическим параметрам.
3. Содержание гликогемоглобина эритроцитов имеет прямо пропорциональную зависимость от продолжительности хранения красных кровяных телец с гемоконсервантом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Correlation of glucose regulation and hemoglobin A1c in diabetes mellitus / R. Koenig [et al.] // *N Engl J Med.* – 1976 – Vol. 295. – № 8. – P. 417–420.
2. **Little R.R.** Glycated hemoglobin standardization-National Glycohemoglobin Standardization Program (NGSP) perspective. // *Clin Chem Lab Med.* – 2003. – Vol. 41. – № 9. – P. 1191–1198.
3. Diabetes and cardiovascular disease: a statement for healthcare professionals from the American Heart Association / S. M. Grundy [et al.] // *Circulation.* – 1999. – Vol. 100. – № 10. – P. 1134–1146.
4. **Reynolds T. M., Smellie W. S., Twomey P. J.** Glycated haemoglobin (HbA1c) monitoring // *BM.* – 2006. – Vol. 333. – № 7568. – P. 586–588.
5. **Luthra M., Balasubramanian D.** Nonenzymatic glycation alters protein structure and stability. A study of two eye lens crystallins // *J Biol Chem.* – 1993. – Vol. 268. – № 24. – P. 18119–18127.
6. Candidate reference methods for hemoglobin A1c based on peptide mapping / U. Kobold [et al.] // *Clin Chem.* – 1997. – Vol. 43. – P. 1944–1951.
7. **Koval D., Kasicka V., Cottet H.** Analysis of glycated hemoglobin A1c by capillary electrophoresis and capillary isoelectric focusing // *Anal Biochem.* – 2011. – Vol. 413. – № 1. – P. 8–15.
8. **Miedema, K.** Standardization of HbA1c and Optimal Range of Monitoring // – *Clin Lab Invest Scand* – 2005. – 240. – P. 61–72.
9. Detection of microparticles from human red blood cells by multiparametric flow cytometry / G. Grisendi [et al.] // *Blood Transfus.* – 2015. – Vol. 13. – P. 274–280.
10. Морфологические маркеры старения эритроцитов донорской крови / Н. В. Акулич [и др.] // *Вестник МГУ имени А. А. Кулешова.* – 2017. – № 1. – С. 75–83.
11. What is hemoglobin A1c? An analysis of glycated hemoglobins by electrospray ionization mass spectrometry / Peterson K. P. [et al.] // *Clin Chem.* – 1998 – Vol. 44. – № 9. – P. 1951–1958.

Поступила в редакцию 12.01.2020 г.

Контакты: akulich_n@antidoping.by (Акулич Николай Васильевич)

Akulich N., Syakhovich V., Soroka A., Doronkina A., Belyaev S. DETERMINATION OF ERYTHROCYTE GLYCOHEMOGLOBIN IN THE BLOOD STORAGE BY FLOW CYTOMETRY.

The article is devoted to the development of a method for the determination of glycated hemoglobin of red blood cells by flow cytometry. Using carboxyfluorescein, the content of glycohemoglobin during storage of red blood cells has been studied.

Keywords: glycohemoglobin, blood storage, flow cytometry.

УДК 159.9:502

ОТ ЖИТЕЙСКОЙ И НАУЧНОЙ ЭКОПСИХОЛОГИИ К ЭКОЛОГИЧЕСКОМУ СОЗНАНИЮ В СИСТЕМЕ ОБРАЗОВАНИЯ

Г. Н. Тихончук

кандидат биологических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В статье проводится анализ взаимосвязи житейского и научного экопсихологического знания как фактора формирования экологического сознания обучающихся на разных ступенях системы образования Республики Беларусь.

Ключевые слова: экопсихологическое знание, экопсихология, экологическое образование, природа, гипотеза.

Введение

Для современной психологии характерен процесс дифференциации, ведущий к значительному разветвлению психологии на отдельные отрасли, которые существенно отличаются друг от друга, но сохраняют общий предмет исследования – *факты, закономерности и механизмы развития и функционирования психики*. В тоже время дифференциация психологии дополняется встречными процессами *интеграции*, в результате которой происходит стыковка психологии со многими другими науками: общественными, социальными, техническими, естественными и т. д.

В настоящее время в психологии определены три группы критериев, по которым выделяют многие психологические отрасли. Первая группа критериев – это содержание выполняемой деятельности. Например, трудовая деятельность привела к появлению такой отрасли, как психология труда, соответственно, педагогическая деятельность – к появлению педагогической психологии и т. д. Вторая группа критериев – это субъект выполняемой деятельности. Например, если это возраст, то возникает необходимость в возрастной психологии. Если человека рассматривать как представителя его нации, этноса, то это уже предмет этнопсихологии. И, лишь в рамках третьей группы критериев – это конкретная научная или житейская проблема – становится возможным выделить новую научную отрасль: *экологическую психологию* и такие значимые составляющие ее предмета, как *экологическое сознание* и *экологическое образование*.

Как известно, любая научная отрасль возникает и существует для решения проблемы. Экологическая психология призвана с одной стороны, заниматься изучением научной проблемы влияния природы на психику человека и его поведение в окружающей среде. Здесь приоритетной становится экология в тесной связи с психологией человека. С другой стороны, важно решать и житейскую проблему: отсутствие необходимых культурных навыков, социально выработанных привычек экологически полезного поведения, а порой и деструктивного отношения к природе при практическом взаимодействии с окружающей средой. А это уже прерогатива психологии сознания, обучения и воспитания во взаимосвязи с экологическим знанием. Все это указывает на необходимость решения проблематики экологической психологии природным, цивилизационным и культурным способом взаимодействия человека и природы [1].

Вслед за обозначенной проблемой природа отвечает негативным своим воздействием (загрязнением воздуха, воды, природными катастрофами и т. п.), в результате которого человек получает физическую или психологическую травму, влекущую за собой ухудшение здоровья, болезнь или психическое расстройство, что уже становится задачами в области медицины, нейрофизиологии, экологии или социальной политики общества. В связи с этим в рамках данного исследования актуализируется проблема формирования у подрастающего поколения Республики Беларусь экологического сознания на разных ступенях образования.

Основная часть

Понятие “со-знание” в психологии рассматривается как совокупность знаний о мире, которые человек усваивает благодаря психическим познавательным процессам. Как известно, знания – это вид прошлого опыта, то, что когда-то человек приобрел. Следовательно, определение знания, в том числе и экопсихологического знания, тесно увязывается с когнитивными, эмоциональными, мотивационными и другими аспектами психологии человека. Это, в свою очередь, дает основание в данном исследовании опираться на позицию Г.В. Аконова и Е.И. Чердымовой относительно структуры экологического сознания: экологическая перцепция (восприятие, ощущение), экологическое мышление (воображение, речь), экологический аффект (эмоции, чувства), экологическая воля (мотивация, действие) [2].

В контексте рассмотрения взаимосвязи житейской и научной экопсихологии важное значение приобретает память: приобретение опыта, сохранение опыта и воспроизведение опыта или передача его другим поколениям.

Житейское или обыденное экопсихологическое знание приобретается в конкретной ситуации взаимодействия человека с природой, начиная с детского возраста. Конкретность ситуации означает, что знание не создается заранее, а возникает спонтанно, без каких-либо ожиданий или программ. Знание приобретается нерегулярно. Конкретная ситуация может быть для человека значимой, прежде всего, эмоционально, но при этом не являться собственно познавательной. В конкретной ситуации человек не познает ради познания, а открывает для себя знание, чтобы разрешить ситуацию или выйти из нее. Таким образом, все обыденные экопсихологические знания приобретаются интуитивно и имеют эмоциональную окраску. Уже в раннем и младшем дошкольном возрасте наблюдается формирование экологических представлений и первый чувственный опыт ребенка (удивление, восхищение, радость от общения с животными и т. п.) при ознакомлении с природой или наглядно представленным ему природным материалом (уголки природы с растениями и животными, зоны экспериментирования, коллекции природного материала – листья, каштаны, камешки и т. п.).

Современная система дошкольного образования Республики Беларусь организована с учетом обязательного экологического образования и воспитания, что предусмотрено программой обучения и воспитания детей дошкольного возраста. В дошкольных учреждениях создаются все необходимые условия для перехода от житейских представлений о природных объектах и явлениях к элементарным житейским экопсихологическим знаниям, позволяющим ребенку уже в ближайшей перспективе совершать экологически грамотные поступки при взаимодействии с природой (“нельзя бросать мусор на улице”, “животных нужно любить”, “растения надо поливать” и т. д.). В целом житейское экопсихологическое знание носит интуитивный характер, что связано с особым способом получения этого знания: оно приобретается путем проб и ошибок, а методы получения таких знаний и сферы их применения ограничены. Тем не менее эта эмпирическая основа является предпосылкой для формирования у ребенка экологического сознания на ступени дошкольного образования.

Расширение сферы применения экопсихологических знаний становится возможным благодаря формированию научного знания, которое, в отличие от житейского, приобретает в экспериментальной ситуации. Здесь важно выделить два аспекта: 1) экспериментальная ситуация создается, заранее строится и 2) экспериментальная ситуация строится как типичная ситуация, то есть она с самого начала претендует на некоторое обобщение [1]. В отличие от ребенка, действующего или познающего методом проб и ошибок в конкретной природной ситуации, возможен риск неверных обобщений. Следовательно, если ситуация создается, то знания уже не являются стихийными, а приобретаются регулярно. Даже если имеет место интуиция, так или иначе в условиях экспериментальной ситуации научные экопсихологические знания приобретаются понятийно: оформляются в понятиях и экспериментальных гипотезах. Как показывает опыт работы по приобретению научных экопсихологических знаний, наиболее эффективными для рождения собственных идей, схем, гипотез являются эвристические образовательные экологические ситуации, ролевые игры [2]. Экспериментальный опыт приобретения экопсихологических знаний переходит на уровень экологической грамотности в условиях школьного образования от первых научных наблюдений в природе, элементов научной работы до самостоятельного научного поиска в сфере экологического образования, что ведет к обретению практических навыков рационального взаимодействия с природой.

Целью экологического образования и воспитания в школе является не только формирование у индивида специфических знаний, но, самое главное, собственных моральных принципов и убеждений, которые в дальнейшем определяют его жизненную позицию не только в отношениях с живой природой, но и с обществом в целом. Экологическая работа в школе – это одна из возможностей социализировать человека в общество, заложив основы его личного экопсихологического мировоззрения [4].

Единицей хранения житейского экопсихологического знания является ситуативно-контекстное утверждение: жизненное правило, пословица, народная мудрость и т. п. Важная особенность житейского знания, в том числе и экопсихологического – это знание, безразличное к логике. Житейская мудрость не стремится к логике. Единица хранения научного знания – проверяемая гипотеза.

Для накопления экопсихологических знаний недостаточно лишь только их воспроизвести, если нет учета условий, контекста, в котором они приобретены. Известно, если не соблюдается учет условий, то накопление знаний не происходит. Прошлый опыт присутствует, но лишь формально. Воспроизвести знания можно только тогда, когда человек оказывается в такой же или типовой ситуации. Необходим полный учет факторов или условий, которые обеспечивают накопление или аккумуляцию экопсихологических знаний, а, следовательно, и приобретение опыта экологического поведения. Таким образом, накопленное научное экопсихологическое знание можно освоить, если полностью описать условия, в которых его можно получить. Это – есть критерий высокого уровня экологического сознания, формирование которого становится возможным в системе высшего образования, где обучающиеся в рамках разных учебных программ и научных исследований получают экологическое знание, которое тесным образом связано с личной экологической культурой, осознанием себя в окружающем мире. Экопсихологическое проектирование образовательной среды позволит минимизировать факторы социального риска, отрицательные психофизические влияния и обеспечит обучаемому адекватные условия его развития.

Выводы

Таким образом, житейские и научные экопсихологические знания не противоречивы, а равноправны, они постоянно взаимодействуют и вступают в диалог посредством

сотрудничества, проявляющееся в том, что житейское экопсихологическое знание становится основой для научных понятий и методов экопсихологии.

Такая отрасль научного знания, как экопсихология, нужна для того, чтобы взаимодействие человека с природой сделать более эффективным, где научное экопсихологическое знание необходимо для осознания и понимания собственных жизненных проблем: сохранения здоровьесберегающей психологически безопасной среды, информационно-виртуальной и экологической среды.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Психология : курс лекций / авт.-сост. Э. В. Котлярова. – Могилев : МГУ имени А. А. Куляшова, 2017. – С. 9–11.
2. **Акопов, Г. В.** Структурно-функциональные исследования экологического сознания / Г. В. Акопов, Е. И. Чердымова // мат-лы 2-й Российской конф. по экологической психологии 12–14 апр. 2000 г., Москва / под ред. В. И. Панова. – М. : Экопсицентр РОСС, 2001. – С. 14.
3. **Поворова, О. В.** Эвристическое обучение как инновационная форма работы в экологическом образовании / О. В. Поворова, Г. Н. Тихончук, Н. М. Новикова // мат-лы междунауч.-практич. конф. “Экологическая культура и охрана окружающей среды : II Дорофеевские чтения” 29–30 ноября 2016 г., Витебск. – Витебск : ВГУ им. П. М. Машерова. – С. 173.
4. **Тихончук, Г. Н.** Особенности экологического образования младших школьников / Г. Н. Тихончук // мат-лы IX Междунауч.-практ. конф. “Детский сад – начальная школа: Опыт, проблемы преемственности и оптимизация образования” 29 октября 2015 г., Мозырь. – Мозырь, 2015. – С. 86.

Поступила в редакцию

Контакты: +375 222 63 59 61 (Тихончук Галина Николаевна)

Tikhonchuk G. FROM EVERYDAY AND SCIENTIFIC ECOPSYCHOLOGY TO ENVIRONMENTAL AWARENESS IN THE EDUCATIONAL SYSTEM.

The article provides the analysis of the relationship between worldly and scientific ecopsychological knowledge as a factor in the formation of environmental consciousness of students at different levels of the education system of the Republic of Belarus.

Keywords: ecopsychological knowledge, ecopsychology, environmental education, nature, hypothesis.

УЧЕНЫЙ, НАСТАВНИК, КОЛЛЕГА...

6 февраля 2020 года ушел из жизни ученый в области ядерной физики, ветеран факультета математики и естествознания **Чернов Станислав Михайлович**.

Станислав Михайлович работал в Могилевском государственном университете имени А. А. Кулешова (Могилевском государственном педагогическом институте) с 1976 года. Окончив в 1972 году Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова по специальности “Физика” и аспирантуру на кафедре квантовой теории физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова по специальности “Теоретическая и математическая физика” и имея фундаментальное физическое образование, он привнес свежую струю в научную жизнь физико-математического факультета.



Защитив в 1976 году кандидатскую диссертацию “Феноменологический анализ сильных взаимодействий Λ -гиперона”, активно подключился к исследованию световодов, пленочных покрытий, к научному сотрудничеству с Институтом физики АН БССР, Могилевским комбинатом “Химволокно”. Однако актуальными проблемами физики атома и атомного ядра он занимался постоянно, и результаты этих исследований опубликованы во многих его научных статьях.

Станислав Михайлович являлся уникальным специалистом по атомной и ядерной физике не только для нашего университета, но и для всего региона, имел очень высокий авторитет в научном сообществе Могилевской области и Республики Беларусь. Со дня основания научно-методического журнала “Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова” Чернов С.М. был включен в его редколлегия, более 20 лет принимал активное участие в работе редакционного совета, обеспечивая и поддерживая высокий научный статус журнала. Станислав Михайлович был одним из основателей международной научной конференции «Оптика неоднородных структур», организованной на кафедре экспериментальной и теоретической физики.

Станислав Михайлович посвятил всю свою жизнь физико-математическому факультету, проработав на нем более 40 лет. Работая старшим преподавателем кафедры физики (1976–1977), кафедры теоретической физики (1977–1984), доцентом кафедры теоретической физики (1984–1990), заведующим кафедрой теоретической физики (1990–2004), профессором кафедры экспериментальной и теоретической физики (2004–2009), заведующим кафедрой экспериментальной и теоретической физики (2009–2012), он на высоком научно-методическом уровне читал лекции, проводил практические занятия по квантовой, атомной и ядерной физике. Станислав Михайлович подготовил не одно поколение студентов. Его лекции с большим удовольствием посещали не только студенты и магистранты, но и коллеги, отмечая высокий профессиональный уровень, великолепное знание своего предмета, порядочность, уважительное отношение к людям, что было обусловлено высоким уровнем его общей культуры. Им подготовлены, изданы курсы лекций по физике атома, атомного ядра и элементарных частиц, многие методические материалы для студентов. Под руководством Станислава Михайловича кафедра экспериментальной и теоретической физики всегда была в авангарде научных и учебных достижений университета.

С.М. Чернов на протяжении многих лет являлся одним из организаторов областных и республиканских этапов олимпиады по физике для учащихся учреждений общего

среднего образования, принимая участие в работе жюри. Его с увлечением слушали участники олимпиад при разборах решения задач, а также будущие абитуриенты при проведении профориентационных мероприятий на факультете и в учреждениях общего среднего образования.

Станислав Михайлович обладал безграничным обаянием, чувством юмора, умением расположить к себе людей, был основателем и активным участником традиционных физматовских Юморин.

За свои заслуги в научной и педагогической деятельности он награжден многими наградами, среди которых Почетная грамота Министерства просвещения БССР (1982), нагрудный значок “Отличник образования Республики Беларусь” (1998), Почетная грамота Национального собрания Республики Беларусь (2003), нагрудный знак МГУ имени А.А. Кулешова (2018).

КРОТОВ В.М.

кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры общей физики
Могилевского государственного университета
имени А.А. Кулешова

ДЛЯ ЗАЎВАГ

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў
на англійскую мову
Я.В. Рубанава

Тэхнічны рэдактар *А.Л. Пазнякоў*
Камп'ютарны набор і вёрстка *А.Л. Пазнякоў*
Карэктар *І.Г. Каржова*

Падпісана да друку 10.03.2020 г.
Фармат 70х108^{1/16}. Папера афсетная. Гарнітура TimesNewRoman.
Ум.-друк. арк. 9,63. Ул.-выд. арк. 10,0. Тыраж 100 экз. Заказ 1613.

Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А.А. Куляшова”, 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства
“Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля”
ЛП № 02330/23 ад 30.12.2013 г.
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў