

ISSN 2409-3777



ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага

ўніверсітэта

імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ

(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

2 (54)
2019

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар М.М. Дабравольскі (Тула)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонок (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс “Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова” ўключаны ў РІНЦ
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),
ліцэнзійны дагавор № 811–12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

ЗМЕСТ

ГАЛЬМАК А. М. О некоторых неравенствах в полиадических группоидах специального вида	4
ЛАПТИНСКИЙ В. Н., МАКОВЕЦКИЙ И. И. Двусторонняя регуляризация нелинейно возмущенной двухточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова с параметром	12
СИДОРЕНКО И. Н. Предельные циклы “нормального размера”, окружающие группу особых точек систем Лъенара с симметрией.....	21
ЯСЮКОВИЧ Э. И. Некоторые современные технологии разработки веб-сайтов с анимацией	30
ВОЛОСЕВИЧ А. В. Нелинейное взаимодействие Фарлей-Бунемановских волн в ионосферной плазме	38
СОТСКИЙ А. Б., МИХЕЕВ С. С. Коррекция данных спектрофотометра методом подвижного окна	49
ТИМОЩЕНКО Е. В., ЮРЕВИЧ Ю. В. Моделирование динамики излучения в низкоразмерном полупроводниковом лазере с двухкомпонентным активным элементом	57
ОСТРИКОВ О. М. Методика прогнозирования распределения полей напряжений в системе “остаточный клиновидный двойник – трещина”	69
ПОВОРОВА О. В., ЛИВИНСКАЯ В. А. Влияние качества урбанизированной среды г. Могилева на количественные характеристики устьиц сосны обыкновенной (<i>pinus sylvestris</i>)	79
КОНДРАТЕНКОВА Е. А. Изменение сенсомоторного реагирования гребцов разных возрастных групп.....	90
МАШКОВ Е. И., ГАЙДУЧЕНКО Е. С., КРИЩУК И. А., СОЛОВЕЙ И. А. Оценка плотности популяций видов рода <i>microtus</i> долинных экосистем Беларуси	96
ОСИПЕНКО А. Н. Антиатерогенный характер синтеза жирных кислот у крыс – одна из возможных причин их устойчивости к атеросклерозу	110

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук

Могилёвский государственный университет продовольствия

В статье продолжается изучение перестановочности элементов в полиадических группоидах специального вида, то есть в полиадических группоидах с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$ и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, n -арный группоид, абелевость, n -полуабелевость, нейтральная последовательность, идемпотент.

1. Введение

Полиадические операции специального вида, то есть операции вида $\eta_{s, \sigma, k}$ первоначально были определены в [1]. В [2] для любых целых $k \geq 2$, $l = s(n-1)+1 \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ на k -ой декартовой степени A^k группоида A была определена l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая является частным случаем l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, так как совпадает с ней при $n = 2$. Первоначально l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ была определена [3] на k -ой декартовой степени полугруппы. Частными случаями l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил и изучал в [4]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы. Вторую операцию Э. Пост определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Частным случаем l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ является и n -арная операция $\tilde{\eta}$ из [3, с. 227], которая совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, (12 \dots n-1), n-1}$.

В статье продолжается изучение перестановочности элементов в полиадических группоидах специального вида. Доказаны некоторые неравенства, связанные с перестановочностью элементов в таких полиадических группоидах. Полученные результаты обобщают основные результаты работ [5; 6]. Указанной тематике посвящены также статьи [7; 8].

2. Предварительные сведения

Следующая теорема позволяет находить значения l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, не используя явно n -арную операцию $\eta_{1, \sigma, k}$, как это сделано в определении l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

Теорема 2.1 [1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \quad (1.1)$$

Замечание 2.1. Если n -арная операция η ассоциативна, то (1.1) может быть переписано следующим образом:

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}). \quad (1.2)$$

Если η – бинарная операция, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s + 1$ совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[]_{s+1, \sigma, k}$ из [2]. При этом равенство (1.1) принимает вид

$$y_j = (x_{1j}(x_{2\sigma(j)}(\dots(x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} \dots))). \quad (1.3)$$

В правой части равенства (1.3) символ бинарной операции η , как обычно, не указан.

Если бинарная операция η ассоциативна, то (1.2) может быть переписано следующим образом:

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Следующие теоремы показывают, что некоторые важнейшие свойства переносятся с n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ на l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 2.2 [1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.

Теорема 2.3 [9]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная квазигруппа.

Теорема 2.4 [9]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Напомним, что последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют: *нейтральной* в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \dots e_{n-1}x] = [xe_1 \dots e_{n-1}] = x;$$

левой нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \dots e_{n-1}x] = x;$$

правой нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[xe_1 \dots e_{n-1}] = x.$$

Нейтральные последовательности впервые появились у Э. Поста в [4] для n -арных групп.

3. Основной результат

Установим невозможность в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ некоторых равенств, связанных с перестановочностью элементов.

Теорема 3.1. Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, \dots, e_{n-1} , что $a \neq e_r$,

$$\eta(ae_1 \dots e_{n-1}) = a, \quad (3.1)$$

$$\eta(e_r e_1 \dots e_{n-1}) = e_r, \quad (3.2)$$

$$\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}. \quad (3.3)$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и положим

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} e_1 \dots e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_s) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \mathbf{a} e_1 \dots e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}). \quad (3.10)$$

4. Некоторые следствия

Если в теореме 3.1 положить $a = e_{n-1}$, то равенство (3.1) совпадает с равенством (3.3). Таким образом, верна

Теорема 4.1. Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами e_1, \dots, e_{n-1} , что

$$e_{n-1} \neq e_r, \eta(e_r e_1 \dots e_{n-1}) = e_r, \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_r, a_j = e_{n-1}, a_{j+1} = \dots = a_k = e_r) \quad (4.1)$$

и определим элементы e_1, \dots, e_{n-1} с помощью (3.5). Тогда верно неравенство (3.6).

Полагая в теореме 4.1 $r = 1$, получим

Следствие 4.1 [5]. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами e_1, \dots, e_{n-1} , что

$$e_{n-1} \neq e_1, \eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_1, a_j = e_{n-1}, a_{j+1} = \dots = a_k = e_1) \quad (4.2)$$

и определим элементы e_1, \dots, e_{n-1} с помощью (3.5). Тогда верно неравенство (3.8).

Если в теореме 3.1 для $n \geq 3$ положить $a = e_1$, то справедлива

Теорема 4.2. Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и для некоторого $r \in \{2, \dots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами e_1, \dots, e_{n-1} , что

$$e_1 \neq e_r, \eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_r e_1 \dots e_{n-1}) = e_r, \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_r, a_j = e_1, a_{j+1} = \dots = a_k = e_r) \quad (4.3)$$

и определим элементы e_1, \dots, e_{n-1} с помощью (3.5). Тогда верно неравенство (3.6).

Полагая в теореме 4.2 $r = n-1$, получим

Следствие 4.2 [6]. Пусть для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами e_1, \dots, e_{n-1} , что

$$e_1 \neq e_{n-1}, \eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_{n-1}, a_j = e_1, a_{j+1} = \dots = a_k = e_{n-1}) \quad (4.4)$$

и определим элементы e_1, \dots, e_{n-1} с помощью (3.5). Тогда верно неравенство (3.10).

Случай нейтральных последовательностей. Так как для правой нейтральной (нейтральной) последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$ n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ верны равенства (3.1) – (3.3), то теореме 3.1 соответствует следующая

Теорема 4.3. Пусть $\sigma \in S_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$. Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e_r$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (3.4) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.6).

Теореме 3.2 соответствует

Следствие 4.3 [5]. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$. Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e_1$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (3.7) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.8).

Теореме 3.3 соответствует

Следствие 4.4 [6]. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$. Зафиксируем элемент $a \in A$ ($a \neq e_{n-1}$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (3.9) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.10).

Теореме 4.1 соответствует следующая теорема. Она же может быть получена из теоремы 4.3, если в ней для $n \geq 3$ положить $a = e_{n-1}$.

Теорема 4.4. Пусть $\sigma \in S_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью, что $e_{n-1} \neq e_r$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (4.1) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.6).

Следствию 4.1 соответствует следующее следствие. Оно же может быть получено из теоремы 4.4, если в ней положить $r = 1$.

Следствие 4.5. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$, что $e_{n-1} \neq e_1$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (4.2) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.8).

Теореме 4.2 соответствует следующая теорема. Она же может быть получена из теоремы 4.3, если в ней для $n \geq 3$ положить $a = e_1$.

Теорема 4.5. Пусть $\sigma \in S_k$ и для некоторого $r \in \{2, \dots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$, что $e_1 \neq e_r$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (4.3) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.6).

Следствию 4.2 соответствует следующее следствие. Оно же может быть получено из теоремы 4.5, если в ней положить $r = n-1$.

Следствие 4.6 [6]. Пусть для подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$, что $e_1 \neq e_{n-1}$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ с помощью (4.4) и (3.5) соответственно. Тогда верно неравенство (3.10).

Случай идемпотентов. Если в теореме 3.1 все e_1, \dots, e_{n-1} совпадают с некоторым идемпотентом e n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, то верны равенства (3.2) и (3.3). Поэтому справедлива

Теорема 4.6. Пусть $\sigma \in S_k$ и для некоторого $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ подстановка σ^r не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами

а и идемпотентом e , что

$$a \neq e, \eta(\underbrace{ae \dots e}_{n-1}) = a. \quad (4.5)$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^r(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e, a_j = a, a_{j+1} = \dots = a_k = e), \mathbf{e} = (\underbrace{e, \dots, e}_k). \quad (4.6)$$

Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{a} \mathbf{e}}_r \underbrace{\dots \mathbf{e}}_{s(n-1)-r}).$$

Полагая в теореме 4.6 вначале $r = 1$, а затем $r = n - 1$, получим еще два следствия.

Следствие 4.7 [5]. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает элементом a и идемпотентом e , удовлетворяющими условию (4.5). Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} и \mathbf{e} с помощью (4.6). Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e} \mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)-1}).$$

Следствие 4.8 [6]. Пусть для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает элементом a и идемпотентом e , удовлетворяющими условию (4.5). Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} и \mathbf{e} с помощью (4.6). Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e} \mathbf{a} \mathbf{e}}_{n-1} \underbrace{\dots \mathbf{e}}_{(s-1)(n-1)}).$$

Если η – бинарная операция ($n = 2$), то, как отмечалось во введении, l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[\]_{s+1, \sigma, k}$. Поэтому из теоремы 3.2 вытекает

Следствие 4.9. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает элементом a и идемпотентом e такими, что

$$a \neq e, \eta(ae) = a.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} и \mathbf{e} с помощью (4.6). Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_s]_{s+1, \sigma, k} \neq [\underbrace{\mathbf{e} \mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s-1}]_{s+1, \sigma, k}.$$

5. Признаки неабелевости и не n -полуабелевости

Определения абелевых и n -полуабелевых полиадических группоидов можно найти в [6].

Для каждой теоремы и каждого следствия из разделов 3 и 4, в формулировках которых присутствует нетождественная подстановка σ , можно сформулировать признак неабелевости соответствующего полиадического группоида. Например, теореме 3.2 соответствует следующий результат.

Теорема 5.1 [5]. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, \dots, e_{n-1} , что

$$a \neq e_1, \eta(ae_1 \dots e_{n-1}) = a, \eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Для каждой теоремы и каждого следствия из разделов 3 и 4, в формулировках которых присутствует нетождественная подстановка σ^{n-1} , можно сформулировать признак не n -полуабелевости соответствующего полиадического группоида. Например, теореме 3.3 соответствует следующий результат.

Теорема 5.2 [6]. Пусть для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ подстановка σ^{n-1} не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, \dots, e_{n-1} , что

$$a \neq e_{n-1}, \eta(ae_1 \dots e_{n-1}) = a, \eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Большое число признаков неабелевости и не n -полуабелевости полиадических группоидов (полиадических полугрупп, полиадических групп) специального вида приведено в [5–7].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Гальмак, А. М. Об операции $[\]_{l, \sigma, k}$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка біялогія. – 2010. – № 1(35). – С. 34–38.
3. Гальмак, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. Гальмак, А. М. О неабелевости полиадических группоидов специального вида / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка біялогія. – 2019. – № 1(53). – С. 13–31.
6. Гальмак, А. М. О не n -полуабелевости полиадических группоидов специального вида / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1. – С. 31–39.
7. Гальмак, А. М. О не n -полуабелевых полиадических группоидах специального вида / А. М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка біялогія. – 2018. – № 2(52). – С. 55–61.
8. Гальмак, А. М. Перестановочность элементов в полиадических группоидах специального вида / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3. – С. 70–75.
9. Гальмак, А. М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2018. – № 1(51). – С. 4–10.

Поступила в редакцию 04.03.2019 г.

Контакты: e-mail: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A. ON SOME INEQUALITIES IN POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL FORM.

The article reflects the ongoing studies of the permutability of elements in polyadic groupoids of special form, i.e. in polyadic groupoids with l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power of A^k n -ary groupoid $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $s \in S_k$ and n -ary operation η .

Keywords: polyadic operation, n -ary groupoid, abelianism, n -semiabelianism, neutral sequence, idempotent.

УДК 517.927.4

ДВУСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНО ВОЗМУЩЕННОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

доктор физико-математических наук, профессор

Институт технологии металлов НАН Беларуси

И. И. МАКОВЕЦКИЙ

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусско-Российский университет, г. Могилев

Получены достаточные конструктивные условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова с параметром. Разработан итерационный алгоритм построения решения.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, двухточечная краевая задача, однозначная разрешимость, построение решения

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F_0(t, X) + \lambda F_1(t, X), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1)$$

где $A, B \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $F_i (i=0,1) \in C(D_\rho, \mathbb{R}^{n \times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \rho\}$, $F_i(t, X)$. Предположим, что функции $F_i(t, X)$ удовлетворяют в D_ρ относительно X условию Липшица (локально); $F_i(t, 0) \neq 0$.

В конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_c = \max_t \|X(t)\|$ будем исследовать двухточечную краевую задачу для (1) с условием

$$MX(0, \lambda) + NX(\omega, \lambda) = 0, \quad (2)$$

где $\|\bullet\|$ – подходящая норма матриц в рамках определения этой алгебры, например, любая из норм, приведенных в [1, с. 21], M, N – вещественные $(n \times n)$ -матрицы.

Данная работа является продолжением и развитием [2, 3 (см. также [4, § 1.1])]. С помощью метода [5] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), алгоритм построения решения, а также оценка его области локализации.

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leq \rho\}, \quad \lambda_1 = \max_t \|U(t)\|, \quad \lambda_2 = \max_t \|U^{-1}(t)\|, \quad \mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \\ \mu_2 = \max_t \|V^{-1}(t)\|, \quad P = U^{-1}(\omega)N^{-1}M, \quad Q = -V(\omega), \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad m = \max\{\|P\|, \|Q\|\},$$

© Лаптинский В. Н., 2019

© Маковецкий И. И., 2019

$$h_i = \max_t \|F_i(t, 0)\|, \quad q = \gamma \lambda_0 \mu_0 t \omega L, \quad p = \gamma \lambda_0 \mu_0 t \omega h, \quad F(t, X, \lambda) = F_0(t, X) + \lambda F_1(t, X), \\ L = L_0 + \varepsilon L_1, \quad h = h_0 + \varepsilon h_1, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$

где $t \in I$, $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $\lambda_0 = \lambda_1 \lambda_2$, $\mu_0 = \mu_1 \mu_2$, Φ – линейный оператор, $\Phi X = PX - XQ$, $L_i = L_i(\rho) > 0$ – постоянные Липшица для $F_i(t, X)$ в D_ρ .

Лемма. Пусть выполнены условия:

- 1) $\det N \neq 0$;
- 2) матрицы P, Q не имеют общих характеристических чисел;
- 3) $q < 1$;
- 4) $p / (1 - q) \leq \rho$.

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка $\|X\|_c \leq p / (1 - q)$.

Доказательство. Сначала выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2). Пусть $X = X(t, \lambda)$ – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем

$$X(t) = U(t)X(0)V(t) + U(t) \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau V(t), \quad (3)$$

где $U(t), V(t)$ – соответственно решения уравнений

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U, \quad \frac{dV}{dt} = VB(t),$$

при этом $U(0) = V(0) = E$ – единичная матрица; для компактности изложения формул вместо $X(t, \lambda)$ принимаем $X(t)$.

Из (3) имеем

$$X(0) = U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) - \int_0^t U^{-1}F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau, \quad (4)$$

$$X(\omega) = U(\omega)U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)V(\omega) +$$

$$+ U(\omega) \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau V(\omega). \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в левую часть условия (2), получим

$$MX(0) + NX(\omega) = MU^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) - M \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \\ + NU(\omega)U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)V(\omega) + NU(\omega) \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau V(\omega).$$

Отсюда имеем на основании (2)

$$MU^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) + NU(\omega)U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)V(\omega) = \\ = M \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau - \\ - NU(\omega) \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau V(\omega)$$

и далее на основании условия 1)

$$\begin{aligned} & U^{-1}(\omega)N^{-1}MU^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) + U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)V(\omega) = \\ & = U^{-1}(\omega)N^{-1}M \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau - \\ & \quad - \int_0^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau V(\omega). \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом принятых обозначений из (6) имеем

$$\begin{aligned} & PU^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) - U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)Q = \\ & = P \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q, \end{aligned}$$

или в форме с оператором Φ :

$$\begin{aligned} & \Phi\{U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)\} = \\ & = P \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \\ & \quad + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как матрицы P, Q не имеют общих характеристических чисел (см. условие 2) данной леммы), то, согласно [6, с. 207], оператор Φ однозначно обратим, при этом оператор Φ^{-1} является линейным и ограниченным. На основании обратимости оператора Φ от уравнения (7) приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} X(t) = U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[P \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q \right] \right\} V(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Установим обратное: всякое непрерывное решение интегрального уравнения (8) является решением задачи (1), (2). Дифференцируя по t обе части (8), получим с учетом перестановочности операторов дифференцирования и Φ^{-1} :

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= \frac{dU(t)}{dt} \left\{ \Phi^{-1} \left[P \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q \right] \right\} V(t) + \\ & + U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[PU^{-1}(t)F(t, X(t), \lambda)V^{-1}(t) - U^{-1}(t)F(t, X(t), \lambda)V^{-1}(t)Q \right] \right\} V(t) + \\ & + U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[P \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q \right] \right\} \frac{dV(t)}{dt} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A(t)U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t) + \\
&+ U(t)\left\{\Phi^{-1}\Phi\left[U^{-1}(t)F(t, X(t), \lambda)V^{-1}(t)\right]\right\}V(t) + \\
&+ U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau, X(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t)B(t).
\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (8) получим тождество

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t, X(t), \lambda).$$

Докажем, что решение уравнения (8) удовлетворяет краевому условию (2). Для этого вместо (8) рассмотрим эквивалентное ему уравнение (7) с учетом полученного тождества

$$\begin{aligned}
&\Phi\{U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)\} = \\
&= P\left[\int_0^t U^{-1}(\tau)(dX(\tau))V^{-1}(\tau) - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t U^{-1}(\tau)(A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau\right] + \\
&\quad + \left[\int_t^\omega U^{-1}(\tau)(dX(\tau))V^{-1}(\tau) - \right. \\
&\quad \left. - \int_t^\omega U^{-1}(\tau)(A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau\right]Q. \tag{9}
\end{aligned}$$

Выполнив в (9) интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned}
&\Phi\{U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)\} = \\
&= P\left[U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) - X(0) - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t \left(\frac{dU^{-1}(\tau)}{d\tau}X(\tau)V^{-1}(\tau) + U^{-1}(\tau)X(\tau)\frac{dV^{-1}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t U^{-1}(\tau)(A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau\right] + \\
&\quad + \left[U^{-1}(\omega)X(\omega)V^{-1}(\omega) - U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) - \right. \\
&\quad \left. - \int_t^\omega \left(\frac{dU^{-1}(\tau)}{d\tau}X(\tau)V^{-1}(\tau) + U^{-1}(\tau)X(\tau)\frac{dV^{-1}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau - \right. \\
&\quad \left. - \int_t^\omega U^{-1}(\tau)(A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau\right]Q.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем соотношение

$$-PX(0) + U^{-1}(\omega)X(\omega)V^{-1}(\tau)Q = 0, \tag{10}$$

эквивалентное условию (2).

Для исследования разрешимости уравнения (8) воспользуемся принципом Банаха – Каччиопполи [7, с. 605] сжимающих отображений. Запишем уравнение (8) в операторной форме

$$X = \mathcal{L}(X), \quad (11)$$

где через \mathcal{L} обозначен нелинейный интегральный оператор, определяемый правой частью уравнения (8). Для произвольной матрицы $X(t)$, принадлежащей шару $\|X\|_C \leq \rho$, имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(X)\| \leq & \|U(t)\| \|\Phi^{-1}\| \left[\|P\| \int_0^t \|U^{-1}(\tau) F(\tau, X(\tau), \lambda) V^{-1}(\tau)\| d\tau + \right. \\ & \left. + \int_t^{\infty} \|U^{-1}(\tau) F(\tau, X(\tau), \lambda) V^{-1}(\tau)\| d\tau \|Q\| \right] \|V(t)\|. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку $\|F_i(t, X)\| \leq L_i \|X\| + h_i$, то, продолжая оценки в (12), получим с использованием принятых обозначений

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(X)\| \leq & \lambda_1 \mu_1 \gamma m \omega \lambda_2 \mu_2 [L \|X\|_C + h] = \gamma \lambda_0 \mu_0 m \omega (L \|X\|_C + h) \leq \\ & \leq q\rho + p \leq q\rho + (1 - q)\rho = \rho. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда следует оценка

$$\|\mathcal{L}(X)\|_C \leq \rho. \quad (14)$$

Далее выясним вопрос о сжимаемости оператора \mathcal{L} в шаре $\|X\|_C \leq \rho$. Из (8) имеем для всех X, Y таких, что $\|X\|_C \leq \rho$, $\|Y\|_C \leq \rho$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y) = \\ & = U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[P \int_0^t U^{-1}(\tau) (F(\tau, X(\tau), \lambda) - F(\tau, Y(\tau), \lambda)) V^{-1}(\tau) d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_t^{\infty} U^{-1}(\tau) (F(\tau, X(\tau), \lambda) - F(\tau, Y(\tau), \lambda)) V^{-1}(\tau) d\tau Q \right] \right\} V(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Выполнив оценки по норме в (15), аналогичные (12), (13), получим

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\| \leq \gamma \lambda_0 \mu_0 m \omega L \|X - Y\|_C = q \|X - Y\|_C.$$

Отсюда следует соотношение

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\|_C \leq q \|X - Y\|_C. \quad (16)$$

Соотношения (14), (16) являются условиями принципа Банаха – Каччиопполи применительно к (11) в шару $\|X\|_C \leq \rho$. На основании этого принципа заключаем: уравнение (8) однозначно разрешимо в области D_ρ . Стало быть, решение задачи (1), (2) существует и единственно в указанной области.

Изучим вопрос отыскания решения уравнения (8). Для построения этого решения воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [7, с. 605]). Применительно к (8) имеем

$$\begin{aligned} X_{k+1}(t) = & U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[P \int_0^t U^{-1}(\tau) F(\tau, X_k(\tau), \lambda) V^{-1}(\tau) d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_t^{\infty} U^{-1}(\tau) F(\tau, X_k(\tau), \lambda) V^{-1}(\tau) d\tau Q \right] \right\} V(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (17)$$

где $X_0(t)$ – произвольная матрица класса $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, принадлежащая шару $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$. Тогда, согласно (14), $\|X_i\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$ ($i = 1, 2, \dots$). Это нетрудно установить индукцией по k и на основании условия 4).

С помощью несложных выкладок установим (без использования свойств функций Грина), что все приближения, построенные согласно алгоритму (7), удовлетворяют краевому условию (2). Сначала продифференцируем по t обе части формулы (17):

$$dX_{k+1}(t) = [A(t)X_{k+1}(t) + X_{k+1}(t)B(t) + F(t, X_k(t), \lambda)]dt. \quad (18)$$

Соотношение (18) запишем в виде

$$F(t, X_k(t), \lambda)dt = dX_{k+1}(t) - [A(t)X_{k+1}(t) + X_{k+1}(t)B(t)]dt. \quad (19)$$

При $t = \omega$ из (17) следует

$$X_{k+1}(\omega) = U(\omega)\Phi^{-1} \left\{ P \int_0^{\omega} U^{-1}(\tau)F(\tau, X_k(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau \right\} V(\omega). \quad (20)$$

Запишем теперь (20) в следующем виде:

$$\Phi U^{-1}(\omega)X_{k+1}(\omega)V^{-1}(\omega) = P \int_0^{\omega} U^{-1}(\tau)F(\tau, X_k(\tau), \lambda)V^{-1}(\tau)d\tau. \quad (21)$$

Подставляя (19) в (21) и выполняя интегрирование по частям с использованием тождеств $dU^{-1}/dt = -U^{-1}A(t)$, $dV^{-1}/dt = -B(t)V^{-1}$, получим

$$\Phi U^{-1}(\omega)X_{k+1}(\omega)V^{-1}(\omega) = P[U^{-1}(\omega)X_{k+1}(\omega)V^{-1}(\omega) - X_{k+1}(0)]. \quad (22)$$

Используя явный вид левой части (22), придем к равенству

$$MX_{k+1}(0) + NX_{k+1}(\omega) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

Справедливость равенства (23) позволяет строить приближенные решения задачи (1), (2) в классе допустимых функций. Это свойство алгоритма (17) делает его достаточно удобным для возможных приложений.

Используя (16), получим рекуррентную оценку

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

а затем на ее основе

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q^m \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (24)$$

На основании условий 3), 4) последовательность $\{X_k(t)\}_0^{\infty}$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению $X(t) \in D_{\rho}$ уравнения (8).

На основе оценки (24) нетрудно получить оценку, характеризующую скорость сходимости алгоритма (17)

$$\|X_k - X\|_{\mathbb{C}} \leq q^k \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1 - q}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Полагая в (25) $k = 0$, $X_0 = 0$, получим

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{\|X_1\|_{\mathbb{C}}}{1 - q}. \quad (26)$$

Выведем явную, т. е. по исходным данным задачи, оценку для $\|X\|_{\mathbb{C}}$. При $k = 0$, $X_0 = 0$ из (17) имеем

$$X_1(t) = U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[P \int_0^t U^{-1}(\tau) F(\tau, 0, \lambda) V^{-1}(\tau) d\tau + \int_t^{\omega} U^{-1}(\tau) F(\tau, 0, \lambda) V^{-1}(\tau) d\tau Q \right] \right\} V(t). \quad (27)$$

Выполнив последовательно оценки по норме в (27), получим

$$\begin{aligned} \|X_1(t)\| &\leq \|U(t)\| \|\Phi^{-1}\| \left[\|P\| \int_0^t \|U^{-1}(\tau) F(\tau, 0, \lambda) V^{-1}(\tau)\| d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^{\omega} \|U^{-1}(\tau) F(\tau, 0, \lambda) V^{-1}(\tau)\| d\tau \|Q\| \right] \|V(t)\| \leq \\ &\leq \lambda_1 \mu_1 \gamma t \omega \int_0^{\omega} \|U^{-1}(\tau) F(\tau, 0, \lambda) V^{-1}(\tau)\| d\tau \leq \gamma \lambda_0 \mu_0 \omega h = p. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\|X_1\|_c \leq p. \quad (28)$$

Используя (28), имеем из (26)

$$\|X\|_c \leq \frac{\|X_1\|_c}{1-q} \leq \frac{p}{1-q} \leq \rho. \quad (29)$$

Теперь получим априорную оценку для $\|X\|_c$ на основе уравнения (8), рассматривая его как тождество при $X = X(t, \lambda)$. Производя оценки по норме в (8), получим с учетом (13)

$$\|X\|_c \leq q \|X\|_c + p.$$

Отсюда на основании условия 3) имеем

$$\|X\|_c \leq \frac{p}{1-q}. \quad (30)$$

Легко видеть, что оценка (29) предпочтительнее оценки (30).

Далее рассмотрим задачу (1), (2) с точки зрения теории возмущений.

Используемый метод позволяет получить в явном виде по исходным данным задачи оценку допустимых возмущений задачи, т. е. возмущений, сохраняющих условия ее однозначной разрешимости, а также оценить влияние этих возмущений на решение невозмущенной задачи; другими словами, дать оценку величины $\|X(t, \lambda) - X(t, 0)\|$. Такие оценки являются важными для решения ряда прикладных задач.

Наряду с принятыми обозначениями введем следующие:

$$a_0 = \gamma \lambda_0 \mu_0 t \omega L_0, \quad a_1 = \gamma \lambda_0 \mu_0 t \omega L_1, \quad b_0 = \gamma \lambda_0 \mu_0 t \omega h_0, \quad b_1 = \gamma \lambda_0 \mu_0 t \omega h_1,$$

$$\varepsilon_1 = (1 - a_0) / a_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho(1 - a_0) - b_0}{\rho a_1 + b_1}.$$

Теорема. Пусть выполнены предположения 1), 2) леммы, а также неравенства

$$a_0 < 1, \quad (31)$$

$$\frac{b_0}{1 - a_0} < \rho. \quad (32)$$

Тогда в области $D = D_\rho \times [-\varepsilon_2, \varepsilon_2]$ задача (1), (2) однозначно разрешима. Решение $X(t, \lambda)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением (17), при этом справедливы оценки

$$\|X(t, \lambda)\| \leq \frac{\rho}{1-q}, \quad (33)$$

$$\|X(t, \lambda) - X(t, 0)\| \leq \frac{\varepsilon(a_1 \|X_0\|_{\mathbb{C}} + b_1)}{1-q}. \quad (34)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что условия (31), (32) обеспечивают в области D_ρ существование и единственность решения интегрального уравнения (8) при отсутствии возмущения, т. е. при $F_1(t, X) \equiv 0$.

Оценим область значений параметра λ , позволяющую сохранить область локализации решения возмущенной задачи. Для этого воспользуемся доказанной леммой. Сначала отметим справедливость почти очевидного соотношения $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Далее на основе условия 3) имеем при $|\lambda| \leq \varepsilon_2 < \varepsilon_1$

$$a_0 + \varepsilon a_1 \leq a_0 + \varepsilon_2 a_1 < a_0 + \varepsilon_1 a_1 < 1. \quad (35)$$

Для значений λ , определяемых согласно (35), должно выполняться условие 4). Очевидно, при $|\lambda| \leq \varepsilon_2$ имеем соотношение

$$\frac{c_0 + \varepsilon c_1}{1 - a_0 - \varepsilon a_1} \leq \frac{c_0 + \varepsilon_2 c_1}{1 - a_0 - \varepsilon_2 a_1}. \quad (36)$$

С помощью несложных элементарных выкладок можно установить справедливость равенства

$$\frac{c_0 + \varepsilon_2 c_1}{1 - a_0 - \varepsilon_2 a_1} = \rho. \quad (37)$$

На основании (37) имеем из (36)

$$\frac{c_0 + \varepsilon c_1}{1 - a_0 - \varepsilon a_1} \leq \rho \quad (|\lambda| \leq \varepsilon_2). \quad (38)$$

Соотношения (35), (38) являются условиями принципа сжимающих отображений для интегральной задачи (8) в области $D = D_\rho \times [-\varepsilon_2, \varepsilon_2]$. Таким образом, в этой области возмущенная краевая задача однозначно разрешима.

Справедливость оценки (33), очевидно, следует из леммы. Получим оценку (34). Возмущенное и невозмущенное уравнения запишем соответственно в виде

$$X_\lambda = \tilde{\mathcal{L}}(F_\lambda), \quad (39)$$

$$X_0 = \tilde{\mathcal{L}}(F_0), \quad (40)$$

где $F_\lambda = F(t, X, \lambda)$, $F_0 = F_0(t, X)$, $X_\lambda = X(t, \lambda)$, $X_0 = X(t, 0)$, $\tilde{\mathcal{L}}$ – соответствующий линейный интегральный оператор. Из (39), (40) имеем

$$X_\lambda - X_0 = \tilde{\mathcal{L}}(F_\lambda - F_0). \quad (41)$$

Выполнив оценки по норме в (41) с использованием явного вида уравнений (39), (40), получим на основании (16)

$$\begin{aligned} \|X_\lambda - X_0\| &\leq (a_0 + \varepsilon a_1) \|X_\lambda - X_0\|_{\mathbb{C}} + \varepsilon (a_1 \|X_0\|_{\mathbb{C}} + b_1) = \\ &= q \|X_\lambda - X_0\|_{\mathbb{C}} + \varepsilon (a_1 \|X_0\|_{\mathbb{C}} + b_1). \end{aligned}$$

Отсюда, на основании условия 3), имеем оценку (34). Теорема полностью доказана.

Замечание. Очевидно, вместо оценки (34) можно принять более грубую, но явную оценку

$$\|X(t, \lambda) - X(t, 0)\| \leq \frac{\varepsilon(a_1 \rho + b_1)}{1-q}.$$

Замечание 1.2. При дополнительных предположениях о характеристических числах матриц P, Q для оператора Φ^{-1} имеют место различные явные представления (см., например, [8–11]), на основе которых для $\|\Phi^{-1}\|$ можно получить конструктивные оценки.

Замечание 1.3. Отметим, что используемый в работе [11] подход к качественному исследованию задачи (1), (2) приводит к системе двух матричных уравнений относительно $X(t)$, $X(0)$ и таким же алгоритмам построения решения. Конструктивный метод из [5], как видим, дает одно соотношение (8), (17).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М. : Наука, 1967. – 472с.
2. Лаптинский В. Н. К вопросу о разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2003. – № 2-3(15). – С. 176–181.
3. Лаптинский, В. Н. К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 994–996.
4. Лаптинский В. Н. Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев : БРУ, 2012. – 167 с.
5. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300с.
6. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
7. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука. 1977. – 744 с.
8. Абдикасова, П. А., К. Г. Валеев // Математическая физика. – 1976. – Вып. 19. – С. 3–10.
9. Беллман, Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М. : Наука, 1969. – 368 с.
10. Параев, Ю. И. Уравнения Ляпунова и Риккати / Ю. И. Параев. – Томск : Томский государственный университет, 1989. – 166 с.
11. Murty K. N. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. 1992. 167. P. 505–515.

Поступила в редакцию 14.01.2019 г.

Контакты: lavani@tut.by (Лаптинский Валерий Николаевич)

imi.makzi@gmail.com (Маковецкий Илья Иванович)

Laptinsky V., Makovetsky I. BILATERAL REGULARIZATION OF NON-LINEARLY PERTURBED TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LYAPUNOV MATRIX EQUATION WITH PARAMETER.

Constructive sufficient conditions of one-valued resolvability of a two-point boundary value problem for a nonlinear Lyapunov equation with parameter are obtained. The iterative algorithm for solution construction is developed.

Keywords: matrix differential equation, two-point boundary value problem, one-valued resolvability, solution construction.

УДК 517.925.42

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ “НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА”, ОКРУЖАЮЩИЕ ГРУППУ ОСОБЫХ ТОЧЕК СИСТЕМ ЛЬЕНАРА С СИММЕТРИЕЙ

И. Н. Сидоренко

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В настоящей работе исследуется семейство систем Льенара с симметрией, имеющее в конечной части плоскости пять простых особых точек. Рассмотрены и улучшены методы построения конкретных систем Льенара с наперед заданным количеством предельных циклов, окружающих группу особых точек. Выдвинута гипотеза о том, что максимальное число предельных циклов “нормального размера” систем Льенара с симметрией, окружающих все конечные особые точки, не менее чем $m+1$, где $2m$ – это степень функции трения. Построены примеры конкретных систем, подтверждающих гипотезу. Проведено обоснование максимального количества предельных циклов, получаемых при помощи предложенных методов.

Ключевые слова: предельные циклы “нормального размера”, системы Льенара с симметрией, бифуркация, 16-я проблема Гильберта, возмущение негрубого фокуса.

1. Введение

Рассматривается система Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - \varepsilon f(x)y, \quad (1)$$

где $f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^{2i}$, $g(x)$ – многочлен пятой степени, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Система (1) с помощью известных преобразований может быть представлена в виде

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x). \quad (2)$$

Будем рассматривать класс систем (1) с симметричным векторным полем и пятью простыми особыми точками в конечной части плоскости. Тогда систему (1) можно привести к одному из следующих канонических видов:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1-x^2)(1-(Bx)^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y, \quad (3)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x^2)(1-(Bx)^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y, \quad (4)$$

где $0 < B < 1$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Система (3) имеет конфигурацию $3A + 2S$ особых точек, а система (4) – $2A + 3S$, где A – это особая точка типа седло, S – седло. Симметричность векторного поля позволяет “сократить” исследование вдвое – рассматривая только одну полуплоскость. Целью данной работы является построение систем (3) и (4) с максимальным количеством предельных циклов “нормального размера”, окружающих группу особых точек. Данная работа является продолжением и развитием работы [1],

в которой было исследовано семейство систем Лъенара с тремя особыми точками и симметричным векторным полем и показано, что системы указанного семейства могут иметь не менее $2m$ предельных циклов “нормального размера”. В данной работе применяются модификации прогнозного метода оценки числа предельных “нормального размера” [2; 3; 4], а также конструктивных методов возмущения систем с центром при помощи функций последования и Мельникова. Построены примеры конкретных систем с максимальным числом предельных циклов, окружающих все конечные особые точки. Выдвинута гипотеза о том, что максимальное число предельных циклов, окружающих все конечные особые точки, для систем Лъенара (3) и (4) равно $m + 1$.

2. Методы исследования

Понятие предельного цикла “нормального размера” введено Л. Перко [5], т. е. это грубый предельный цикл, который легко обнаруживается численными методами без привлечения больших вычислительных мощностей. Основным методом получения таких предельных циклов – возмущение системы, имеющей центр или негрубый фокус.

2.1 Возмущение системы с центром при помощи функции Мельникова

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P_0(x, y) + \varepsilon P(x, y, a) = \tilde{P}(x, y, \varepsilon, a) \\ \frac{dy}{dt} = Q_0(x, y) + \varepsilon Q(x, y, a) = \tilde{Q}(x, y, \varepsilon, a) \end{cases} \quad (5)$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, P_0, Q_0, P, Q – многочлены, a – вектор их коэффициентов. При $a = 0$ система (5) имеет центр $O(0, 0)$, кривые которого трансверсально пересекают ось Ox на отрезке $[p, q]$, $p > 0$. Тогда на $[p, q]$ определена функция Мельникова [6]

$$\Phi(x, a) = \int_{\gamma(x)} M(x, y)(Pdy + Qdx) = \sum_{i=1}^m a_i \int_{\gamma(x)} M(x, y)(P_i dy + Q_i dx) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x), \quad (6)$$

где $M(x, y)$ – интегрирующий множитель невозмущенной системы, $(x, 0)$ – овал центра, проходящий через точку $(x, 0)$. Тогда простым нулям функции Мельникова $\Phi(x, a)$ соответствуют овалы, порождающие предельные циклы возмущенной системы.

Пусть требуется найти $n_0 - 1$ предельных циклов системы (4), пересекающих $[p, q]$ оси Ox при условии, что задача имеет решение. Тогда случайным образом задаем точки $x_i \in (p, q)$, $i = \overline{1, n_0}$ и решаем следующую задачу при возмущении центра

$$(-1)^i \sum_{j=1}^{m_0} a_j \varphi_j(x_i) > L, \quad i = \overline{1, n_0}, \quad L \rightarrow \max, \quad |a_j| \leq 1. \quad (7)$$

Если задача (7) имеет решение

$$a = a^*, \quad L = L^*,$$

то существует достаточно малое $\varepsilon > 0$, при котором система (5) имеет $n_0 - 1$ предельных циклов, пересекающих $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, n_0 - 1}$.

Так как функция Мельникова при $a = a^*$, $L = L^*$ имеет наибольшее отклонение от нуля в выбранных точках, то предельные циклы будут существовать не при слишком малых значениях $\varepsilon > 0$, т. е. они будут “нормального размера”. Конечно, успех зависит еще от точности приближенно найденных функций $\varphi_j(x)$. На $[p, q]$ выбираем равномерную сетку узлов v_k , $k = \overline{1, N_0 + 1}$ и находим $\varphi_j(v_k)$, приближенно интегрируя систему

$$\frac{dx}{dt} = P_0, \quad \frac{dy}{dt} = Q_0, \quad \frac{dM}{dt} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right), \quad \frac{d\Psi_j}{dt} = M(P_j Q_0 + Q_j P_0)$$

на $[0, T_k]$, $\Psi_j(0) = 0$, $x(0) = v_k$, $y(0) = 0$, T_k – период обхода овала $\gamma(v_k)$ в системе (4), который находится численно. Тогда функции $\varphi_j(x)$ можно приближенно найти в виде многочленов или сплайн-функций по значениям $\varphi_j(v_k) = \psi_j(T_k)$, $j = \overline{1, m}$.

Если задача (7) не имеет решения, меняем набор точек x_i и повторяем вычисления. При достаточно большом числе экспериментов получим решение задачи (7) (если заранее известно, что оно существует). Очевидно, данный метод имеет много источников ошибок и поэтому может применяться только при небольших значениях n . Максимальное значение, при котором был осуществлен удачный эксперимент, показывает, что $n < 10$.

Отметим также, что число предельных циклов $n_0 - 1$ может быть больше $m - 1$. Если же $\varphi_j(x)$ образуют систему функций Чебышева, то $n_0 \leq m$ и максимальное число нулей функции (6) равно $m - 1$, при этом их можно выбрать произвольно на отрезке $[p, q]$.

2.2 Метод построения систем с максимальным числом предельных циклов нормального размера с помощью возмущения кратного фокуса [2]

Пусть теперь при $a = a_0$ система (5) имеет негрубый фокус $O(0,0)$ кратности k . Тогда можно определить функцию последования

$$\Delta(x_0, a) = x(T, x_0, a, \varepsilon) - x_0,$$

где $x(t)$, $y(t)$ – решение системы (4), $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, T – период обхода дуги соответствующей траектории вокруг особой точки $O(0,0)$. Выберем на промежутке $[p, q]$, $p > 0$ точки x_i , $i = \overline{1, n_0}$ и рассмотрим разложение функции последования в ряд Тейлора в окрестности точки a_0 , учитывая, что $\Delta(x_i, a^0) \neq 0$ (т. к. траектории в окрестности a_0 являются спиралями). Тогда

$$\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j + o(\Delta a),$$

где $tp(i, j) = \frac{\partial \Delta(x_i, a^0)}{\partial a_j}$.

Для нахождения $tp(i, j)$ в общем случае необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu_i P_0, \quad \frac{dy}{dt} = \mu_i Q_0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial a_j} \right) &= \mu_i \left(P_j + \frac{\partial P_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_j} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_j} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial a_j} \right) = \mu_i \left(Q_j + \frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_j} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a_j} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right) &= P_0 + \mu_i \left(\frac{\partial P_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial P_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mu} \right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial \mu} \right) = Q_0 + \mu_i \left(\frac{\partial Q_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mu} \right), \\ x(0) &= x_i, \quad y(0) = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial a_j}(0) = \frac{\partial y}{\partial a_j}(0) = \frac{\partial x}{\partial \mu}(0) = \frac{\partial y}{\partial \mu}(0) = 0, \end{aligned}$$

где $P_0 = P(x, y, a_0, \varepsilon)$, $Q_0 = Q(x, y, a_0, \varepsilon)$,

$$\frac{\partial P(x, y, a)}{\partial a_j}, \quad Q_j = \frac{\partial Q(x, y, a^0)}{\partial a_j}, \quad \mu_i = \frac{T(x_i)}{2\pi},$$

$T(x_i)$ – период обхода дуги соответствующей траектории вокруг особой точки.

Тогда

$$tp(i, j) = \left. \frac{\partial x}{\partial a_j} - \frac{\partial x}{\partial \mu} \frac{\partial y}{\partial a_j} / \frac{\partial y}{\partial \mu} \right|_{t=T(x_i)}.$$

Как известно [10], вопрос о числе предельных циклов у системы (5) эквивалентен вопросу о числе действительных нулей функции последования. Поэтому потребуем, чтобы в точке x_1 функция последования была отрицательна (положительна), если фокус устойчивый (неустойчивый), в точке x_2 – положительна (отрицательна) и т. д. При этом Δa должно быть достаточно малым, чтобы $o(\Delta a)$ в разложении Тейлора не влияла на знак функции последования. Все перечисленные условия соответствуют задаче линейного программирования

$$L \rightarrow \min, \pm(-1)^i \left(\Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j \right) \geq 0, i = \overline{1, k+1}, |\Delta a_j| \leq L. \quad (8)$$

В неравенствах (8) выбираем знак “плюс”, если фокус неустойчивый, и знак “минус” – в противном случае. Если задача (8) имеет решение $\Delta a = \Delta a^*$, $L = L^*$, то проверяем неравенства

$$(-1)^i \Delta(x_i, \Delta a^*) > 0, i = \overline{1, k+1}.$$

Если они выполняются, то система (4) имеет, по крайней мере, k предельных циклов. Если же неравенства не выполняются и Δa^* велико, то это означает, что система далека от искомой. Если неравенства не выполняются и Δa^* сравнительно небольшое, то систему можно “улучшить”, взяв вместо точки a_0 точку $a_0 + \Delta a^*$, сделав, таким образом, процесс “улучшения” итерационным. Здесь важно следить за тем, чтобы, улучшая систему, мы не пришли к системе с центром. На каждом шаге итерации знак функции $\Delta(x, a_0 + \Delta a^*)$ должен проверяться на более мелкой сетке узлов.

2.3 Прогнозный метод оценки числа предельных циклов в системах Льенара

С. Смейл в своей работе [6] поддержал гипотезу о том, что система Льенара (2) (в случае если $g(x) = x$, $F(x)$ – полином степени $2k + 1$, $F(0) = 0$) может иметь не более k предельных циклов вокруг антиседла $O(0,0)$.

Гипотеза. В пространстве параметров системы (1) с $g(x) = x$ существует область Ω , в которой число предельных циклов системы (1) не превосходит количества m нулей нечетной части функции $F(x)$, т. е. положительных нулей функции

$$\varphi(x) = F(x) - F(-x), \quad (9)$$

а также внутри Ω существует подобласть, в которой это число равно m .

Система Льенара (1) примечательна тем, что все ее особые точки принадлежат оси Ox .

Определение. Пусть система Льенара (1) имеет антиседло $A(x_0, 0)$. Обозначим через ξ_1 (ξ_2) – абсциссу ближайшей слева (справа) к точке A особой точки. Если слева (справа) особых точек нет, то считаем $\xi_1 = -\infty$ ($\xi_2 = +\infty$). Системой прогноза вокруг особой точки $A(x_0, 0)$ для системы Льенара (1) будем называть систему

$$F(\eta) = F(\mu), G(\eta) = G(\mu), \quad (10)$$

где $F(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} f(x) dx$, $G(\mu) = \int_{x_0}^{\mu} g(x) dx$, $\xi_1 < \eta < x_0$, $x_0 < \mu < \xi_2$.

Таким образом, для прогноза числа предельных циклов индивидуальной системы Льенара будем использовать следующий алгоритм.

Алгоритм. (Прогноз числа предельных циклов)

Для прогноза числа предельных циклов системы Льенара (1) вокруг антиседла $A(x_0, 0)$ необходимо:

- 1) составить систему прогноза (10) для системы Льенара (1) и особой точки A ;
- 2) определить промежутки изменения переменных η , μ ;
- 3) определить число k – количество решений системы прогноза (10) на полученном промежутке изменения переменных η , μ .

С учетом справедливости гипотезы 1 в области Ω существует система, которая имеет k предельных циклов вокруг рассматриваемой особой точки.

Описанный алгоритм является конечным и алгебраическим.

Сформулированные определения и алгоритм остаются справедливыми и для оценки числа предельных циклов вокруг группы особых точек с суммарным индексом, равным +1. В данном случае в качестве x_0 необходимо брать “центральную” точку (это может быть и седло), ξ_1, ξ_2 – абсциссы ближайших левой и правой особых точек, не входящих в группу, вокруг которой производится оценка, $\xi_1 < \eta < \zeta_1, \zeta_2 < \mu < \xi_2$, где ζ_1, ζ_2 – находятся из условия $G(\zeta_1) = G(\zeta_2) = \max\{G(x_i)\}$, $\zeta_1 < x_i < \zeta_2, x_i$ – абсциссы всех особых точек, вокруг которых производится оценка числа предельных циклов.

Теорема 1. У системы Льенара типа $3A+2S$ (3) (с пятью особыми точками – три антиседла и два седла)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1-x^2)(1-(Bx)^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y,$$

максимальное количество предельных циклов по прогнозу не превосходит $m+1$, где $2m$ – степень функции трения.

Теорема 2. У системы Льенара типа $2A+3S$ (4) (два антиседла и три седла)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x^2)(1-(Bx)^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y,$$

максимальное количество предельных циклов по прогнозу не превосходит $m+1$, где $2m$ – степень функции трения.

Для доказательства теорем 1 и 2 составим систему прогноза для систем (3), (4). Второе уравнение системы (10) после упрощения принимает вид:

$$\frac{1}{4}(\xi - \eta)(\xi + \eta)(6 + 3(B^2 + 1)(\xi^2 + \eta^2) - 2B^2(\eta^4 + \eta^2\xi^2 + \xi^4)) = 0.$$

Оба равенства системы (10) можно сократить на множитель $\xi - \eta \neq 0$, после чего первое уравнение системы является полиномом степени $2m$, а второе – полиномом пятой степени. При оценке числа предельных циклов окружающих группу особых точек для систем (3) и (4) множитель $(6 + 3(B^2 + 1)(\xi^2 + \eta^2) - 2B^2(\eta^4 + \eta^2\xi^2 + \xi^4))$ не обращается в ноль, тогда второе уравнение является полиномом первой степени, общее число решений системы не превосходит $2m$, а в силу симметрии существенными являются только m решений. Еще один предельный цикл для системы (3), который не учитывается прогнозным методом в силу его локальной ограниченности, появляется из бесконечности путем анализа устойчивости сепаратрисы седла, окружающей группу особых точек (антиседла $-A_1(-1/B, 0)$, $O(0, 0)$ и $A_2(1/B, 0)$ и седла $-S_1(-1, 0)$, $S_2(1, 0)$), и устойчивости особой точки на бесконечности (рис. 1 а). Для системы (4) такой цикл может рождаться из сепаратрисы седла $(S_1(-1/B, 0), S_2(1/B, 0))$ и сепаратрис седла $O(0, 0)$ (рис. 1 б).

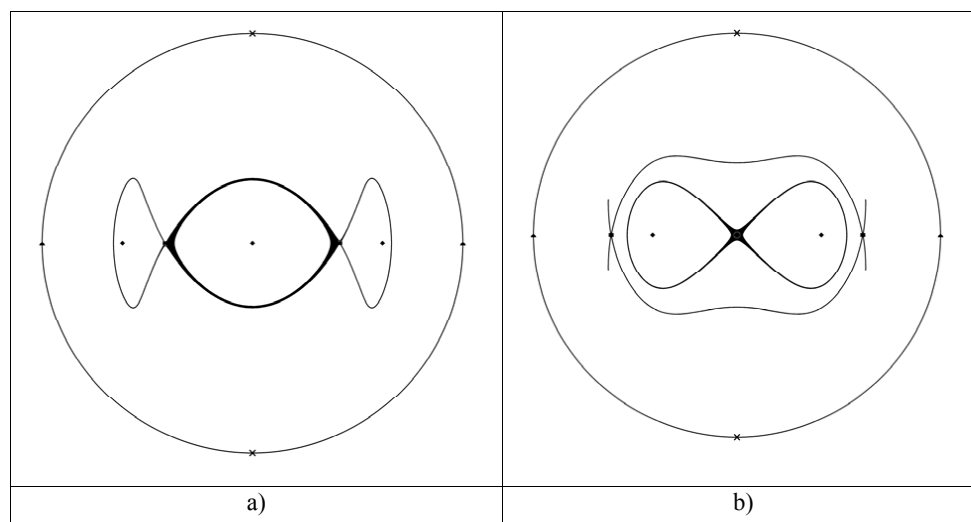


Рисунок 1. – Расположение сепаратрис систем Льенара (3), (4) на сфере Пуанкаре

3. Системы Льенара типа $2A+3S$ с максимальным числом предельных циклов вокруг группы особых точек

Рассмотрим применение описанных методов для построения конкретных систем Льенара с максимальным числом предельных циклов нормального размера. Будем исследовать систему (4)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x^2) \left(1 - \left(\frac{1}{2}x \right)^2 \right) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y,$$

Для исследования числа предельных циклов системы будем использовать метод, описанный в 2.3, т. е. будем исследовать количество нулей у соответствующей системы (10). Для этого определим значение точек x_1 и x_2 . Решая уравнения $G(x_1)=G(0)$, где $x_1 > 1$ и $G(x_2) = G(0)$, где $x_2 < -1$, находим, что $x_1 = \sqrt{2}$, а $x_2 = -\sqrt{2}$. Исследования решений системы (10) будем проводить следующим образом: для функции $u = G(x)$ на соответствующем промежутке существования предельных циклов ($x \in (0,1) \cup (1,\sqrt{2})$) для предельных циклов вокруг фокуса $A(1,0)$; $x \in (-2,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},2)$ – для предельных циклов вокруг всей группы особых точек) найдем обратные функции $\xi = \xi_i(u)$, $\eta = \eta_i(u)$, $i = 1, 2$, где $u \in (0, G(0))$ для предельных циклов вокруг фокуса A и $u \in (G(0), G(\frac{1}{B}))$ для предельных циклов, окружающих группу особых точек. После подстановки соответствующих ξ_i , η_i в первое уравнение системы получим две функции $\varphi_i(u)$, каждая из которых линейно зависит от коэффициентов полинома $f(x)$.

Пусть в системе (4) $m=3$, тогда по теореме 1 система прогноза (4) может иметь вокруг группы особых точек не более четырех предельных циклов. Найдем конкретную систему (4), которая имеет четыре предельных цикла вокруг каждого из фокусов. Для этого зафиксируем значение $a_0 = 0,1$, выберем три произвольные точки из промежутка $(11/48, 9/16)$, например, $u_1 = 0,26$, $u_2 = 0,42$ и $u_3 = 0,56$ и найдем условия на коэффициенты $f(x)$, при которых функция $\varphi_1(u)$ будет иметь нули в этих точках. В результате получаем, что $a_1 = -0,093$, $a_2 = -0,00091$, $a_3 = 0,004$. Для того чтобы определить, есть ли при этих

значениях параметров предельные циклы, окружающие группу особых точек, найдем нули функции $\varphi_2(u)$. В данном случае их оказалось три. Таким образом, система (4) при значениях параметров $a_0 = 0,1$, $a_1 = -0,093$, $a_2 = -0,00091$, $a_3 = 0,004$ имеет по прогнозу распределение $((0,0),3)$.

Однако если исследовать полученную систему численными методами, то необходимо прибегать к большой точности вычислений и полученные предельные циклы находятся “близко” друг к другу. Поэтому полученную систему необходимо “улучшить”. Применим для нее метод, представленный в пункте 2.2. Имеем $k = 3$. Предельные циклы будем искать на промежутке $I = [1,6; 1,8]$. Промежуток выбирается исходя из расположения сепаратрис данной системы (рис. 1 б). Для этого зафиксируем три точки 1,6; 1,64; 1,68 и будем возмущать систему по описанному методу. В результате после четырех итераций получили систему (4) с $a_0 = -2,8868$, $a_1 = -0,701$, $a_2 = -6,2783$, $a_3 = -2,02475$, имеющую три предельных цикла, окружающих группу особых точек (рис. 2).

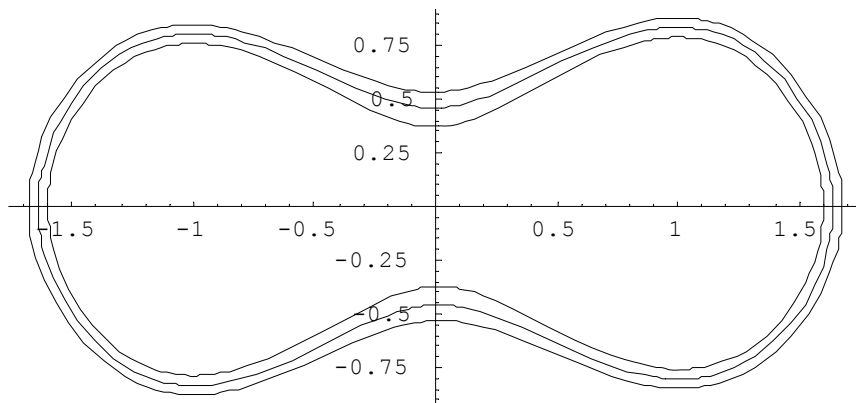


Рисунок 2. – Фазовый портрет системы (4) с тремя особыми точками вокруг группы особых точек

Таким образом, доказана

Теорема 3. Система (4)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x^2)(1-(Bx)^2) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y,$$

с $B = \frac{1}{2}$, $m = 3$, $\varepsilon = 0,01$, $a_0 = -2,8868$, $a_1 = -0,701$, $a_2 = -6,2783$, $a_3 = -2,02475$ имеет по меньшей мере три предельных цикла, окружающих группу особых точек, т. е. система имеет распределение $((0,0),3)$.

4. Системы Льенара типа 3A + 2S с максимальным числом предельных циклов вокруг всех конечных особых точек

Исследуем теперь максимальное количество предельных циклов, окружающих все конечные особые точки системы (3). Пусть $B = \frac{1}{2}$, $m = 3$, тогда по теореме 1 соответствующая система (3) может иметь не менее четырех таких предельных циклов.

Построим такую систему с помощью метода прогноза 2.3 и метода возмущения функции последования 2.2. Зафиксируем значение $a_0 = 0,1$, выберем три произвольные точки из промежутка $(0, 4)$, например, $u_1 = 0,8$, $u_2 = 2,4$ и $u_3 = 4$ и найдем условия на коэффициенты $f(x)$, при которых функция $\varphi_2(u)$ будет иметь нули в этих точках. В результате получим, что $a_1 = -0,1299$, $a_2 = 0,0311$, $a_3 = -0,00208$ и соответствующая система про-

гноза (10) имеет три существенных решения. Однако анализ устойчивости сепаратрис, окружающих все конечные особые точки, и бесконечной особой точки показывает, что вокруг всех конечных особых точек должно быть четное количество предельных циклов. Так появляется еще один предельный цикл. В результате соответствующая система (3) по прогнозу имеет распределение $((0,0,0),4)$ предельных циклов.

Для построения предельных циклов применим к полученной системе метод, представленный в пункте 2.2. В результате получаем систему (3) с $B = \frac{1}{2}$, $m = 3$, $a_0 = -0,09225$, $a_1 = 1,0176$, $a_2 = -0,2082$, $a_3 = 0,01193$, имеющую распределение $((0,0),4)$ (рис. 3).

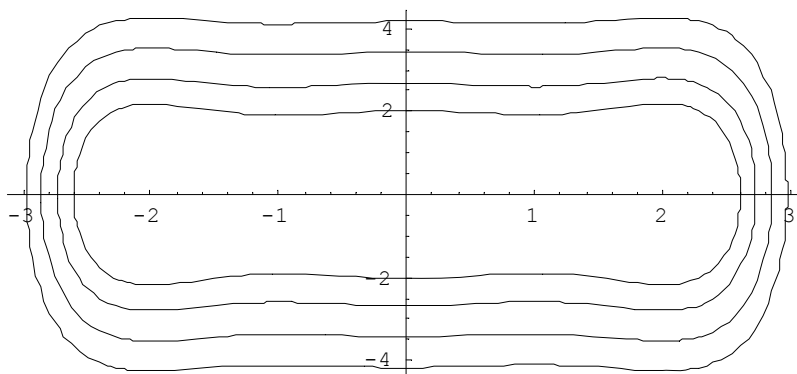


Рисунок 3. Фазовый портрет системы (4) с тремя предельными циклами вокруг всех конечных особых точек

Таким образом, доказана

Теорема 4. Система (3)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1-x^2)\left(1-(Bx)^2\right) - \varepsilon \sum_{i=1}^m a_i x^{2i} y,$$

с $B = \frac{1}{2}$, $m = 3$, $\varepsilon = 0,01$, $a_0 = -2,8868$, $a_1 = -0,701$, $a_2 = -6,2783$, $a_3 = -2,02475$ имеет по меньшей мере три предельных цикла, окружающих группу особых точек, т. е. система имеет распределение $((0,0),3)$.

Замечание. Для системы (4) использование данного метода при больших значениях m затруднено в силу близости “внешних” седел, однако их всегда можно “отодвинуть”, уменьшив значение параметра B .

Построенные примеры систем с различными распределениями предельных циклов позволяют считать предложенный прогнозный метод исследования предельных циклов в сочетании с методами улучшения систем, представленными в пунктах 2.1 и 2.2, достаточно эффективным.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы нормального размера систем Лъенара с симметрией / И. Н. Сидоренко // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – 2009. – № 4(34). С. 167–174.
2. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы “нормального размера” систем Лъенара, квадратичных и кубических систем : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / И. Н. Сидоренко / Гродненский государственный университет им. Янки Купалы. – Гродно, 2010. – 26 с.
3. **Сидоренко, И. Н.** Предельные циклы “нормального размера” некоторых полиномиальных систем Лъенара / И. Н. Сидоренко, Л. А. Черкас // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2007. – № 1(26). – С. 163–170.

4. **Сидоренко, И. Н.** Системы Куллеса с максимальным числом предельных циклов нормального размера / И. Н. Сидоренко, Л. А. Черкас // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. Серыя 2. – 2008. – № 3. – С. 20–26.
5. **Perko, L. M.** Limit cycles of quadratic systems in the plane / L. M. Perko // Rocky Mountain of Mathematics. – 1984. – Vol. 14. – Pp. 619–644.
6. **Черкас, Л. А.** Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков. – Гродно : ГрГУ, 2013. – 489 с.
7. **Smale, S.** Mathematical problems for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer. – 1998. – Vol. 20, no. 2. – Pp. 7–15.

Поступила в редакцию 22.05.2019 г.

Контакты: sidiwanik@mail.ru (Сидоренко Иван Николаевич)

Sidarenka I. LIMIT CYCLES OF “NORMAL SIZE” AROUND A GROUP OF SINGULAR POINTS OF LIENARD SYSTEMS WITH SYMMETRY.

The article focuses on the family of Lienard systems with symmetry that has five simple singular points in the final part of the plane. The methods to construct Lienard systems with a predetermined number of limit cycles surrounding a group of finite singular points are considered and improved. It has been hypothesized that the maximum number of limit cycles of a “normal size” of Lienard systems with symmetry surrounding all final singular points is not less than $m + 1$, where $2m$ is the degree of the friction function. The examples of certain systems confirming the hypothesis are constructed. The substantiation of the maximum number of limit cycles obtained by using the proposed methods is provided.

Keywords: limit cycle of a “normal size”, Lienard system with symmetry, bifurcation, 16-th d. Hilbert problem, bifurcation of weak focus.

УДК 68.004.93

НЕКОТОРЫЕ СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ РАЗРАБОТКИ ВЕБ-САЙТОВ С АНИМАЦИЕЙ

Э. И. Ясюкович

кандидат технических наук, доцент

Белорусско-Российский университет (г. Могилев)

В статье проведен обзор некоторых современных фронт-энд и бек-энд технологий разработки веб-сайтов. Рассмотрены технологии и средства построения анимированной графики, адаптивного веб-дизайна и адаптивной верстки сайтов. Приведены примеры построения анимированных веб-сайтов – на основе покадровой анимации и с использованием элемента “canvas”.

Ключевые слова: веб-сайт, адаптивный веб-дизайн, фронт-энд технология, бек-энд технология, веб-анимация, элемент *canvas*, язык разметки гипертекста, каскадные таблицы стилей, языки веб-программирования, браузер, системы управления контентом, параллакс-эффект.

Введение

В настоящее время межсетевое объединение Internet стало основным источником информации [1], но эффективность и функциональность веб-ресурса зависит от выбора технологий его разработки. Чтобы веб-проект выглядел наиболее современно и привлекательно, при его разработке необходимо учитывать новейшие, ежегодно меняющиеся и поддерживаемые последними версиями браузеров технологии.

Современный веб-сайт должен иметь такую структуру, чтобы при просмотре даже его первой страницы в течение первых трех секунд у посетителя создалось четкое представление о содержании и структуре сайта. Поэтому веб-мастерам следует ответственно относиться к вопросам полезности, эффективности и информативности их сайтов, чтобы привлечь внимание как можно большего количества посетителей [2].

Язык гипертекстовой разметки *html5* предоставляет дополнительные функции для использования передовых технологий сайтостроения, таких, как видео, аудио, анимация и многие другие. Одна из них – это элемент *canvas* (холст), позволяющий строить анимированные растровые изображения. Для построения масштабируемой векторной графики в *html5* используется элемент *SVG (Scalable Vector Graphics)*, который, в отличие от *canvas*, может содержать интерактивные объекты.

Для эффективного создания *SVG* графики и анимации используются библиотеки *JavaScript*, такие, как *Velocity*, *SVG.JS*, *Walkway*, *Raphael.JS*, *Snap.Svg*, *Bonsai* и другие, позволяющие создавать вращение и изменение форм объектов, а также анимационные сюжеты. Объектами векторной анимации могут быть изображения, текст, пользовательские интерфейсы, логотипы и другие.

Неотъемлемой частью сайта являются также каскадные таблицы стилей и процедуры на языках *JavaScript*, *PHP* или других.

Для взаимодействия языка *JavaScript* и *HTML* используется библиотека *jQuery*, называемая также фреймворком, позволяющая существенно упростить использование языка *JavaScript* и сделать его более доступным за счет предоставления простых функций, существенно облегчающих решение различных задач сайтостроения. Для использования *jQuery* ее необходимо скачать с официального сайта *jQuery.com* и в *HTML* документе подключить как обычный *JavaScript* файл:

```
<script type="text/javascript" src="js/jquery-1.9.1.min.js"></script>
```

Можно также, не скачивая, подключить ее последнюю версию с сайта *GoogleCode*:

```
<script type="text/javascript"
src="http://ajax.googleapis.com/ajax/libs/jquery/1.9.1/jquery.min.js"></script>
```

Важное место в сайтостроении занимают веб-анимации, для построения которых используются различные инструменты, например, такие, как [3]:

- редактор *HTML5 Maker*, предоставляющий большую коллекцию изображений;
- *OnlineSprite Box Tool*, позволяющий обрабатывать картинки с использованием *jQuery*, *CSS3* и *html5*;
- *Online 3D Sketch Tool*, использующийся для создания эскизов, 3D картинок, пунктирных линий и других элементов;
- *Tumult Hype* – специальная система покадровой анимации, позволяющая оживить неподвижный элемент;
- *Google Web Designer*, позволяющая создавать работающие на любом устройстве интерактивные проекты, основанные на *html5*;
- *GSAP*, содержащая набор инструментов скриптовой и высокопроизводительной полноцветной *html5* анимации;
- *Hippo Animator*, автоматически масштабирующая анимацию под любой размер веб-браузера;
- *Mugeda*, позволяющая создавать игры и веб-приложения, которые эффективно работают на мобильных устройствах;
- *Tween JS*, используемая для создания сложной анимации библиотека *JavaScript*;
- *Radi* – для создания видео, анимации и графики в реальном времени;
- *Animatron*, позволяющая создавать анимацию *html5* и интерактивный контент.

В современных технологиях сайтостроения активно используется также адаптивный веб-дизайн, представляющий собой новое направление, призванное обеспечивать качественное восприятие сайтов на различных устройствах, подключенных к сети Internet.

При создании адаптивного веб-дизайна для мобильных устройств используется метод *Mobile First* оптимизированной верстки, предполагающий сначала верстать сайт для мобильных устройств, а затем для больших экранов с учетом скорости подключения к сети. Данный метод демонстрирует в первую очередь самое важное содержание, обеспечивает легковесность и оптимизированность сайта, а также не допускает загрузки большего объема ресурсов, чем требуется пользователю [4].

Адаптивная верстка меняет дизайн веб-страниц в зависимости от поведения пользователя, платформы, размера экрана, ориентации девайса и является неотъемлемой частью современной веб-разработки. Она позволяет существенно экономить и не отрисовывать новый дизайн для каждого разрешения, а лишь менять размеры и расположение отдельных элементов.

Для автоматизации выполнения рутинных операций при разработке веб-сайтов широко используются *CMS* (*Content Management Software* – система управления контентом), позволяющие быстро строить сайты, наполнять их содержимым и выполнять редактирование. При этом использование *CMS* не требует глубоких знаний даже *html*.

1. Некоторые современные технологии веб-разработки

Несколько лет назад для разработки сайтов было достаточно знаний языка разметки гипертекста, каскадных таблиц стилей и основ компьютерной графики. В настоящее время

мя выполнение таких работ требует владения скриптовыми языками, одним из которых является *Java Script*, используемый для создания слайдеров – специальных графических элементов или текстов с эффектами анимации, модальными окнами и множеством других элементов, оживляющих сайт. То есть слайдеры на сайтах – это блоки на веб-страницах, в пределах которых с установленной периодичностью демонстрируются анонсы новостей, статей или изображений. Создаются эти блоки на *html*, *CSS*, *Java Script* и являются визуально привлекательными для посетителей веб-сайтов, так как стимулируют интерес к их материалам. Кроме этого, слайдеры позволяют экономить место, поскольку каждый их блок дает возможность демонстрировать несколько анонсов.

Основой в технологии создания сайтов является язык *html*, которым должны владеть и верстальщики, и веб-программисты. *CSS* используется для визуального оформления веб-страниц и адаптации их под все устройства, на которых будет отображаться сайт – от телевизоров до мобильных телефонов. Статистика показывает, что примерно 52% пользователей выходят в Интернет с помощью смартфонов [5], поэтому адаптивная версия сайта должна быть не хуже ее полной версии.

Современную веб-разработку разделяют на две части: *фронт-энд* и *бек-энд* [6]. *Фронт-энд* – это клиентская сторона пользовательского интерфейса, содержащая кнопки, панели, картинки, заставки и другие элементы, используемые для взаимодействия с сайтом. Разработка сайта во *фронт-энд* начинается с создания его эскиза и дизайна, которые затем реализуются верстальщиком. *Фронт-энд* разработчик не обязан быть профессиональным дизайнером, но в идеале должен уметь создавать макет и дизайн сайта, свободно владеть *html* и *CSS*, а также программировать на языке *JavaScript* с использованием *JQuery* и других *JavaScript* библиотек.

Бэк-энд – это написанная на языке *PHP* и выполняемая на стороне сервера скрытая от клиента программная часть сайта. Здесь может выполняться запрос к базе данных и поиск в ней необходимых вариантов, после чего генерируется ответ в виде веб-странички, которая отсылается клиенту как результат поиска, и клиент видит результат работы *бек-энда* на *фронт-энде*.

В последние два года наблюдается тенденция к росту *бек-энд* разработки на языке *Python*, который появился в 1991 г.

Быстро набирающим популярность является современный высокопроизводительный язык *Go*, который сочетает в себе лучшие черты статических и динамических языков: строгую типизацию и скорость исполнения, гибкость и скорость разработки, добавляя к этому производительную и надежную концепцию параллельного программирования.

Для мобильных устройств в 2017 г. появилась группа приложений *PWA* (*ProgressiveWebApplications* – прогрессивные веб-приложения), использующая стек веб-технологий (*JavaScript* + *html* + *CSS*), которые позволяют увеличить конверсию, количество пользователей и удобство использования веб-приложений на мобильных устройствах. Основными принципами *PWA* являются: полная адаптивность к любым “умным” устройствам; нативность, выдвигающая удобства пользователя на первое место, и автономность, обеспечивающая самостоятельное обновления приложений.

Важными параметрами качества сайта являются используемые шрифты, особенно на первом его экране, где можно применить каллиграфические или готические шрифты, которые обязательно должны быть свободно читаемыми.

Цвета, используемые на сайте, должны корректно отображаться в любом браузере и на любых типах устройств, а количество используемых цветов должно быть правильным и ограниченным [4].

Для оживления сайтов используется *параллакс-эффект* – специальная технология, когда фоновое изображение в перспективе движется медленнее, чем элементы перед-

него плана. Такой эффект формируется с помощью нескольких накладываемых друг на друга слоев, которые при прокручивании двигаются с различными скоростями. Такая технология позволяет создать также искусственные трехмерные эффекты.

В ближайшее время более 80% всего интернет-трафика захватит видеоконтент, то есть видео будут чаще появляться на большинстве сайтов [7].

2. Инструменты и средства сайтостроения и анимации

Современные сайты имеют довольно сложную структуру, поэтому их разработка требует специальных знаний и опыта работы в области *html*, веб-программирования, веб-дизайна и сайтостроения.

Для быстрой разработки сайтов широко используются различные *CMS* (content management system – система управления контентом), среди которых наиболее популярной является *WordPress*. В настоящее время более 40% интернет-сайтов разработаны с использованием данной *CMS*, которая проста в использовании и легко настраивается с помощью плагинов. Она позволяет публиковать новые сообщения и формировать страницы, имеет мощный редактор для редактирования и форматирования контента, поддерживает регистрацию пользователей [6].

Используются также такие *CMS*, как *Joomla*, *Drupal*, *Serendipity*, *DotClear*, *ImpressPages*, *Chamilo* и другие [8].

Joomla является менее дружелюбной к новичкам, но в некоторых аспектах может быть более гибкой, позволяет делать сложные динамические сайты. Первая версия вышла в 2005 г. Ее код является открытым.

Drupal содержит более гибкую, чем *Joomla*, систему для работы с настраиваемыми типами сообщений.

Serendipity – это удобная для пользователя *CMS*, которая идеально подходит для небольших блогов.

Dotclear – еще один отличный вариант для ведения блога. Позволяет добавлять новые функции на сайт с помощью плагинов и тем.

ImpressPages – малоизвестная *CMS*, лучше всего подходит для создания блогов, содержит простой редактор, оснащенный современным интерфейсом.

Chamilo – это так называемая система управления обучением (*LMS* – Learning Management System), являющаяся специфическим видом *CMS*.

Если сайт разработан на языке *PHP*, то браузер не сможет его интерпретировать, так как *PHP*-скрипты выполняются на сервере. В таком случае необходимо либо найти реальный удаленный сервер, либо создать локальный у себя на компьютере. Во втором случае огромный плюс в том, что работать будет проще, никто не увидит результаты экспериментов, потому что локальный сервер доступен только на компьютере разработчика сайта.

Самый известный локальный сервер на Windows – это *Denwer*, который уже не активно поддерживается. Известны также *OpenServer*, *WAMP*, *MAMP* и другие, которые позволяют открывать *php*-файлы и видеть результат их работы.

При создании веб-страниц широко используются различные анимации, которые являются одной из основ современного веб-дизайна [7].

Для создания анимированных веб-страниц используется *CSS*-анимация и *JavaScript*. *CSS*-анимация не позволяет создавать сложные физические эффекты и имитировать реалистичное движение. Поэтому такие анимации, как подпрыгивание, пауза, остановка и замедление лучше писать на *JavaScript* [9].

Для формирования сложных эффектов и 3D анимации для виртуальной реальности можно использовать библиотеку веб-графики *WebGL* (*WebGraphicsLibrary*), которая позволяет формировать рендеринг (визуализацию) графики 60 кадров в секунду.

3. Примеры создания анимированных сайтов на языке JavaScript

Для поддержки анимации современные браузеры не требуют установки дополнительных плагинов, таких, как *Flash*, а используют *JavaScript*, *CSS3* и *html5*.

В настоящей работе рассматриваются два примера анимации: покадровая (пример 1) и с использованием элемента *canvas* (пример 2).

Пример 1. Простейшая покадровая анимация “Бегущий кот” [8]. В папке данной задачи содержатся 13 файлов (*index.html*, содержащий *html* код задачи и функцию *anim*, а также 12 файлов образа кота в различных позициях – *ket01.png* – *ket012.png*).

Раздел `<head>` файла *index.html* содержит тег `<title>`, задающий название задачи в строке заголовка браузера и тег `<meta charset="UTF-8">`, задающий кодировку шрифта. Далее записаны две функции на языке *JavaScript* – *anim()* и *pusk()*. Функция *anim()* выполняет формирование массива *imAr* из 12 графических элементов размером 200×100 пикселей, в каждом из которых записываются имена графических файлов *ket01.png* – *ket012.png*. Функция *pusk()* используется для формирования анимации, в строке `document.images[0].src = imAr[is].src`, которой элементу коллекции присваивается *is*-й графический элемент из массива *imAr*. Строка `setTimeout("pusk()", 100)` – это внутренний таймер-планировщик, который задает вызов функции *pusk()* через каждые 100 миллисекунд. Полный текст кода анимации “Бегущий кот” приведен ниже (рис. 1).

```
<html>
  <head>
    <title>Бегущийкот</title>
    <meta charset = "UTF-8">
    <script language = "JavaScript">
      functionanim(){
        imAr = new Array();
        for(vari= 0; i< 12; i++){
          imAr[i] = new Image(200,100);
          imAr[i].src = "ket0" + (i+1).toString() + ".png";
        }
        is = -1;
      }
      functionpusk(){
        is = is + 1;
        document.images[0].src = imAr[is].src;
        setTimeout("pusk()",100);
        if(is == 11) is = -1;
      }
    </script>
  </head>
  <body onload="anim()">
    <input type="button" name="button1" value="Start" onclick="pusk()"><hr>
    <img>
  </body>
</html>
```

Рисунок 1 – Текст кода анимации “Бегущий кот”

На рисунке 2 приведен фрагмент кадра анимации, которая запускается кнопкой *Start*.



Рисунок 2. Фрагмент кадра анимации “Бегущий кот”

Пример 2. Анимационная сцена в *canvas* “Прыгающий мяч” [7]. Для разработки данной сцены на *JavaScript* создается холст размером 250×150 пикселей, а на нем с помощью элемента *canvas* формируется анимационная сцена [9]. Данный элемент введен в раздел *body*, в котором записано также пять процедур *JavaScript* – два конструктора (*Ball* – задающего параметры мяча и *circle* – выполняющего его начальную отрисовку); и три функции (*Ball.prototype.draw* – отрисовки перемещающегося мяча; *Ball.prototype.mov* – формирования перемещения мяча; *Ball.prototype.cheCo* – отслеживания столкновения мяча с границами холста).

Конструктор *Ball* задает начальные координаты мяча $x = 5$ пикселей, $y = 5$ пикселей и начальные скорости по оси x – -3 пикселя/с – влево, и по оси y – $+5$ пикселей/с – вниз для формирования диагонального движения мяча вниз до соприкосновения его с границами холста и отскока.

В строке `var circle=function(x, y, rad, Circl)` создается метод отрисовки мяча. Здесь *Circl* – логическая переменная, определяющая необходимость заливки круга (мяча).

Метод `ctx.beginPath()` определяет начало вывода линии контура мяча, а метод `ctx.arc(x, y, radius, 0, Math.PI*2, false)` отрисовывает полный круг без заливки, то есть формирует мяч.

Метод *draw* отрисовки мяча добавлен к свойству *prototype* конструктора *Ball*, чтобы все объекты, созданные при помощи *Ball*, могли его использовать.

Далее элементу *Ball* добавлен метод *circle* отрисовки окружности, то есть отрисовки окрашенного мяча, радиус которого равен 7 пикселям:

```
Ball.prototype.draw=function() {
  circle(this.x, this.y, 7, true)
}
```

Таким образом, создается функция отрисовки окружности либо залитого круга и добавляется метод *draw* с помощью свойства *prototype* для всех объектов *Ball*.

Для обновления координат мяча x и y построен метод, в котором они будут обновляться в соответствии с текущей скоростью *xSpeed* и *ySpeed*:

```
Ball.prototype.move = function(){
  this.x+=this.xSpeed;
  this.y+=this.ySpeed;
};
```

Метод формирования отскоков мяча, в котором проверяется, столкнулся ли мяч с левой или правой, нижней или верхней границами холста, имеет вид:

```
Ball.prototype.cheCo = function(){
  if (this.x<5||this.x>245){
    this.xSpeed = -this.xSpeed;
  }
  if (this.y<5||this.y>145){
    this.ySpeed = -this.ySpeed;
  }
}
```

Если столкновение наступило, то знак соответствующей скорости мяча меняется на противоположный.

После этого формируется анимация мяча с использованием элемента *canvas*. Для этого добавлены две строки, чтобы получить элемент *canvas* и указать контекст рисования:

```
var canvas = document.getElementById("canvas");
var ctx = canvas.getContext("2d");
```

Далее объявляется переменная *ball*:

```
var ball = new Ball();
```

После этого создается функция *setInterval*, первым атрибутом которой является функция, содержащая параметры: *ctx.clearRect(0, 0, 250, 150)* – метод очистки области холста; *ball.draw()* – метод отрисовки мяча; *ball.move()* – метод формирования движения мяча с помощью функции *move()*; *ball.checkCollision()* – метод проверки столкновения с помощью функции *checkCollision()*; *ctx.strokeRect(0, 0, 250, 150)* – метод отрисовки прямоугольника с границами. Вторым атрибутом функции *setInterval* является интервал анимации, равный 25 миллисекундам:

```
setInterval(function() {
    ctx.clearRect(0,0,250, 150);
    ball.draw();
    ball.move();
    ball.checkCollision();
    ctx.strokeRect(0,0,250, 150);
}, 25);
```

Полный текст *html* и *JavaScript* кода приведен на рисунке 3:

```
<!DOCTYPE html>
<html lang="en">
<head>
  <meta charset="UTF-8">
  <title>Мяч</title>
</head>
<body>
  <canvas id="canvas" width="250" height="150"></canvas>
  <script>
    var Ball = function() {
      this.x = 5;           this.y = 5;
      this.xSpeed = -3;    this.ySpeed = 4;  };
    var circle = function(x, y, rad, Circl) {
      ctx.beginPath();
      ctx.arc(x, y, rad, 0, Math.PI*2, false);
      if (Circl) {
        ctx.fill();
      } else {
        ctx.stroke();      }
    };
    Ball.prototype.draw = function() {
      circle(this.x, this.y, 7, true);  };
    Ball.prototype.mov = function() {
      this.x += this.xSpeed;
      this.y += this.ySpeed;          };
    Ball.prototype.cheCo = function() {
      if (this.x < 5 || this.x > 245) {
        this.xSpeed = -this.xSpeed;  }
    }
  </script>
</body>
</html>
```

```

        if (this.y < 5 || this.y > 145) {
            this.ySpeed = -this.ySpeed; }
    };
    var canvas = document.getElementById("canvas");
    var ctx = canvas.getContext("2d");
    var ball = new Ball();
    setInterval(function() {
        ctx.clearRect(0, 0, 250, 150);
        ball.draw();      ball.mov();
        ball.checkCo(); ctx.strokeRect(0, 0, 250, 150);
    }, 25);
</script>
</body>
</html>

```

Рисунок 3 – Текст кода анимационной сцены “Прыгающий мяч”

Результаты работы *html* страницы “Прыгающий мяч” приведены на рисунке 4.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе проведен обзор и анализ современных технологий разработки веб-сайтов с анимацией, в том числе для мобильных устройств.

В качестве примеров приведены две сцены анимации: бегущий кот, построенной на покадровой анимации, и “Прыгающий мяч”, разработанной на основе элемента *canvas*.



Рисунок 4 – Анимационная сцена “Прыгающий мяч”

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. <https://qwizz.ru/новые-технологии-сайтов/>;
2. <http://nonameno.com/creation-and-promotion-of-sites-the-basics.html/>;
3. <https://techrocks.ru/2018/11/16/web-animation-tools-for-web-app/>;
4. <https://www.kasper.by/blog/slaidler-dlya-sajta/>;
5. <http://isizov.ru/github-kak-hosting-dlya-sajtov/>;
6. <https://1ps.ru/blog/sites/2018/kakimi-budut-sajtyi-v-2019-godu/>;
7. <https://www.internet-technologies.ru/articles/sozdanie-animaciy-na-holste.html>;
8. <https://www.pvsm.ru/javascript/7177>;
9. <https://www.templatemonster.com/ru/blog/2015/05/12/html5-animation-tools/>.

Поступила в редакцию 23.05.2019 г.

Контакты: ed50@tut.by; +375 222 77 13 26 (Ясюкович Эдвард Игнатьевич)

Yasyukovich E. SOME MODERN TECHNOLOGIES FOR THE DEVELOPMENT OF WEB SITES WITH ANIMATION.

The article reviews some of the modern front-end and back-end technologies for website development. Modern technologies and tools for constructing animated graphics, responsive web design and responsive layout of sites are considered. Two examples of building animated websites are given: one is based on a frame-by-frame animation and the other is based on the Canvas element.

Keywords: website, responsive web design, front-end technology, back-end technology, web animation, Canvas element, hypertext markup language, cascading style sheets, web programming languages, browser, content management systems, parallax effect.

УДК 53

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ФАРЛЕЙ-БУНЕМАНОВСКИХ ВОЛН В ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

А. В. ВОЛОСЕВИЧ

доктор физико-математических наук, профессор

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В работе рассматривается нелинейное взаимодействие волн, возбуждаемых двухпотоковой, или модифицированной Фарлей-Бунемановской (ФБ), неустойчивостью. Показано, что линейно нарастающие низкочастотные волны воздействуют на высокочастотную часть спектра волн, создавая дополнительное давление, приводящее к возникновению нелинейной “пондеромоторной силы”. Эта сила действует на заряженные частицы плазмы в неоднородном электрическом поле и приводит к перераспределению фоновой плотности плазмы. Таким образом, низкочастотные ФБ волны нелинейно взаимодействуют с высокочастотными волнами, что приводит к стабилизации неустойчивости. На основе магнитогидродинамической модели движения заряженных частиц совместно с уравнениями для электромагнитного поля получена самосогласованная система нелинейных уравнений, описывающая нелинейное взаимодействие высокочастотных и низкочастотных ФБ волн. Приведены оценки модификации фоновой плотности заряженных частиц, а также возможные экспериментальные эффекты, обнаруженные при исследовании аврорального рассеяния радиоволн УКВ диапазона в авроральной ионосфере.

Ключевые слова: трехволновые нелинейные взаимодействия, нелинейные электростатические структуры, низкочастотные и высокочастотные волны, авроральные, неоднородности, ионосферная плазма, стационарные ударные волны, Фарлей-Бунемановская неустойчивость, пондеромоторная сила.

1. Введение

В настоящее время с помощью усовершенствованной техники VHF-радарных и спутниковых измерений в авроральной зоне были обнаружены мелкомасштабные плазменные структуры. Эксперименты по авроральному рассеянию радиоволн EISCAT и STARE выявили существование в E-области ионосферы достаточно интенсивных электростатических структур и связанных с ними модификаций плотности заряженных частиц.

В соответствии с современной точкой зрения эти плазменные структуры могут быть следствием возбуждения модифицированной двухпотоковой, или Фарлей-Бунемановской (ФБ), неустойчивости [1–4]. Действительно, линейная теория удовлетворительно объясняла возбуждение неустойчивости в E-области ионосферы 90–120 км и особенности авроральных радиоотражений – фазовую скорость ФБ волн и их преобладающий частотный диапазон. Однако многие важные черты экспериментальных измерений остаются необъяснимыми и часто противоречивыми: например, наблюдение радиоотражений под большими ракурсными углами вплоть до 5° (угол между направлением распространения волны и плоскостью, ортогональной направлению магнитного поля), а также существование радиоотражений с длинами волн порядка 16 см [3].

В соответствии с линейной теорией ФБ неустойчивости в авроральной E-слоя ионосферы было получено обобщенное дисперсионное уравнение при выполнении условий замагниченности электронов и незамагниченности ионов, что характерно для этой уникальной области ионосферной плазмы [1–3]:

$$\omega = \frac{\vec{k}\vec{V}_{0e} + \hat{\psi}\vec{k}\vec{V}_{0i}}{1 + \psi(1 + k_{\parallel}^2\omega_{ce}^2/k_{\perp}^2\nu_e^2)(1 + \eta_i k^2)}, \quad \hat{\psi} = \psi \left(1 + \frac{k_{\parallel}^2\omega_{ce}^2}{k_{\perp}^2\nu_e^2} \right). \quad (1)$$

Здесь обозначено: $\psi = \nu_e \nu_i / \omega_c^2$ – высотный фактор, $\omega_c^2 = \omega_{ce}\omega_{ci}$, $\eta = \alpha_{\eta}\nu_{ii}^2/\nu_i$, где ω_c – нижнегибридная частота, η – динамическая вязкость ионов, α_{η} – безразмерный коэффициент, зависящий от природы столкновений ионов с нейтральными частицами, k_{\parallel} и k_{\perp} – компоненты волнового вектора параллельно и перпендикулярно направлению магнитного поля, $\nu_{i\alpha} = (\gamma_{\alpha}T_{\alpha}/m_{\alpha})^{1/2}$, T_{α} – температура частиц сорта α , ν_e и ν_i – частоты столкновений электронов и ионов с нейтральными частицами, ω_{ce} и ω_{ci} – гирочастоты электронов, ионов, \vec{V}_{0e} – \vec{V}_{0i} – относительная дрейфовая скорость электронов под действием постоянного электростатического поля \vec{E}_0 . Заметим, что уравнение (1) справедливо для области ионосферы, где выполняются условия замагниченности электронов $\nu_e \ll \omega_{ce}$ и незамагниченности ионов $\nu_i \gg \omega_{ci}$, а также при условии малости ракурсного угла, т. е. при выполнении соотношения $k_{\parallel}^2/k_{\perp}^2 \ll \nu_e^2/\omega_{ce}^2 \approx 10^{-5}$ при ионосферных параметрах: $\nu_e \approx 3 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$, $\omega_{ce} \approx 6 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$.

Из линейной теории можно заключить, что условие для частот ФБ волн $\omega < \nu_i$

не выполняется, если неоднородности имеют масштаб $L < 2\pi V_{0e}/\nu_i$ так для области высот $h \approx 100 \text{ km}$ и ионосферных параметров $\nu_i \approx 2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ и $V_{0e} \approx 6 \cdot 10^2 \text{ ms}^{-1}$, это соответствует масштабу $L < 2 \text{ m}$.

Таким образом, можно утверждать, что в верхней части Е-области ионосферы могут выполняться условия $\omega \geq \nu_e$. В работах [3; 4] было найдено, что срыв ФБ неустойчивости происходит приблизительно на нижнегибридной частоте $\omega \leq \omega_g = \sqrt{\omega_{ce}\omega_{ci}}$. При учете кинетических эффектов, например, затухания Ландау, которое эквивалентно учету динамической вязкости на ионах, частотный диапазон неустойчивых волн расширяется. Как показано в работах [2–4], ФБ неустойчивость может возникать на более высоких частотах $\omega \geq \nu_i$, и в этом случае вместо ФБ волн возникают волны на нижнегибридных частотах.

Исследование нелинейного взаимодействия ФБ волн показало [5–9], что при учете дисперсионных эффектов и распадных взаимодействий волн могут быть выполнены резонансные условия $\omega = \omega_1 + \omega_2$ и $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$. Таким образом, этот эффект может объяснить возникновение волн с большими ракурсными углами $k_{\parallel}^2/k_{\perp}^2 \ll \nu_e^2/\omega_{ce}^2$ или $|\cos\varphi| \leq \pi/2$ (φ – угол между дрейфовой скоростью электронов и волновым вектором). Это означает, что за счет нелинейного взаимодействия происходит перекачка волн из области линейной генерации волн в область затухания, причем частота волны может быть значительно меньше частоты линейно растущих волн. Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. В результате развития ФБ неустойчивости возникают волны в достаточно широком частотном интервале. Низкочастотные ФБ волны описываются дисперсионным уравнением (1) при выполнении условия $\omega \geq \nu_e$, но высокочастотные волны имеют другой закон дисперсии.

2. Для реальных физических условий в Е-области авроральной ионосферы одновременно с низкочастотными волнами также возникают высокочастотные волны с частотами $\omega \geq \nu_i$, хотя природа этих волн различна. Эти волны имеют частоты порядка нижнегибридных частот, и они описываются дисперсионным уравнением, аналогичным рассмотренным в работах [10–11]:

$$\omega \approx \omega_{LH} \left(1 + \frac{k^2 R^2}{2} + \frac{m_i}{2m_e} \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \right), \quad R^2 = \frac{3T_i}{m_i \omega_{LH}^2} + \frac{2T_e}{m_e \omega_{ce}^2} \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2)}. \quad (2)$$

Здесь обозначено $\omega_{LH}^2 = \omega_{pi}^2 / (1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{ce}^2)$, и плотность плазмы удовлетворяет условиям $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce}^2$ и $\omega_{LH} \approx \omega_c \omega_{pe}$, $R^2 \approx (3T_i + 2T_e) / (m_i \omega_c^2)$ и ω_{pe} , ω_{pi} – частоты плазменных волн для электронов и ионов соответственно. Подобно ФБ волнам, описываемые дисперсионным уравнением (2), обладают эффектом ракурсной чувствительности, т. е. $k_{\perp} \gg k_{\parallel}$. Например, волны с длиной волны $\lambda = 16$ см, $k \approx 40$ м⁻¹ и для дрейфовых скоростей электронов $V_0 = 600$ м.с⁻¹ частоты соответствуют нижнегибридным частотам порядка $\omega \approx 2.4 \cdot 10^4 \approx \omega_c$.

3. Линейно нарастающие высокочастотные ФБ волны могут интенсивно взаимодействовать с низкочастотными волнами, которые также существуют в результате возбуждения неустойчивости.

2. Теоретическая модель

Исследуем математическую модель неустойчивости ФБ при реальных физических условиях в авроральной E-области ионосферы. Эволюция нелинейных ФБ волн может быть описана системой магнитогидродинамических уравнений движения заряженных частиц совместно с уравнениями непрерывности и уравнением Пуассона для электростатического поля при нарушении условия квазинейтральности плазмы. Предполагаем, что в E-области ионосферы электроны являются замагниченными при условии $v_e \ll \omega_{ce}$, а ионы не замагниченными при выполнении условий $v_i > \omega_{ci}$:

$$\frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\frac{e\vec{E}}{m_e} - \omega_{ce} [\vec{v}_e, \vec{e}_z] - v_e \vec{v}_e - v_{te}^2 \nabla \ln n_e, \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\frac{e\vec{E}}{m_i} - v_i \vec{v}_i - v_{ti}^2 \nabla \ln n_i + \eta \Delta \vec{v}_i, \quad (4)$$

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \nabla (n_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}) = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \vec{E} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e). \quad (6)$$

Здесь использованы стандартные обозначения: $\omega_{ce} = |e|B_0 / m_e$, $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$, $v_{i\alpha}^2 = k_B T_{\alpha} / m_{\alpha}$, T_{α} , m_{α} , n_{α} , v_{α} , v_{α} – температура, масса, плотность, скорость, частоты столкновений частиц сорта α , $\alpha = e$ – электроны, $\alpha = i$ – ионы.

2.1 Высокочастотные ФБ волны

Возмущения электростатического поля, скорости, плотности заряженных частиц за счет ФБ волн можно представить в виде

$$\vec{A}(r, t) = \frac{1}{2} \vec{A}(\vec{r}, t) e^{-i\omega_0 t} + \text{к.с.},$$

где к.с. – комплексно сопряженная величина.

При таком представлении временная зависимость учитывается в виде быстрой зависимости от времени, которая описывается фактором $e^{-i\omega_0 t}$, а медленная учитывается комплексной амплитудой $A(\vec{r}, t)$.

Затем из уравнений (3, 4) можно определить скорости электронов ионов:

$$\vec{v}_{e\perp} = \frac{1}{2} \frac{i\omega_e}{B\omega_e} \vec{E}_\perp + \frac{1}{B} [\vec{E}, \vec{e}_z] + i \frac{\omega_e}{\omega_e^2} v_e \nabla_\perp N_e - \frac{v_e^2}{\omega_e^2} [\nabla N_e, \vec{e}_z] - \frac{1}{B\omega_e} \frac{\partial \vec{E}_\perp}{\partial t}, \quad (7)$$

$$\vec{v}_{e\parallel} = \frac{1}{2} \frac{e\vec{E}_\parallel}{i\omega_e m_e} + v_{te}^2 \frac{\nabla_\parallel N_e \omega_e}{i\omega_e}, \quad (8)$$

$$\vec{v}_i = \frac{ie\vec{E}}{m_i \omega_i} - i \frac{v_{ie}^2 \nabla N_i}{\omega_o} - \eta_i \frac{e\Delta \vec{E}}{m_i \omega_i^2} + \frac{e}{m_i \omega_i^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (9)$$

Здесь обозначено $\omega_e = \omega_o - iv_e$, $\omega_i = \omega_o - iv_i$, $N_\alpha = (n_\alpha - n_o)/n_o$.

Из уравнения (5) для электронов и ионов можно получить уравнения для возмущений плотности заряженных частиц за счет электростатического поля.

$$N_i = \frac{1}{i\omega_o} \frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{e}{m_i \omega_i \omega_o \omega_i^2} \frac{\partial \nabla \vec{E}}{\partial t} + \frac{e \nabla \vec{E}}{m_i \omega_i \omega_o} - \frac{v_{ii}^2 \nabla N_i}{\omega_o \omega_i} - \eta_i \frac{e \Delta \nabla_\perp \vec{E}}{im_i \omega_o \omega_i^2}, \quad (10)$$

$$N_e = \frac{1}{i\omega_o} \frac{\partial N_e}{\partial t} + \frac{1}{iB\omega_o \omega_e} \frac{\partial \nabla \vec{E}_\perp}{\partial t} + \frac{\vec{v}_o \nabla N_e}{i\omega_o} + \frac{e\omega_e \nabla_\perp \vec{E}}{\omega_o m_e \omega_{ce}^2} - \frac{e\omega_e \nabla_\parallel \vec{E}_\parallel}{m_e \omega_o \omega_e} + \frac{\omega_e v_{ie}^2 \Delta_\perp N_e}{\omega_o \omega_{ce}^2} - \frac{v_{ie}^2 \Delta_\parallel N_e}{\omega_o \omega_{ce}^2} + \frac{1}{iB\omega_o} [\nabla N_s, \vec{E}] \cdot \vec{e}_z. \quad (11)$$

Здесь обозначено $\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Delta_\parallel = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y$.

Величины N_i , N_e , \vec{E} определяют комплексные амплитуды соответствующих величин. В уравнениях (10, 11) основной нелинейный вклад обусловлен низкочастотными возмущениями плотности N_s . В этих уравнениях учтен постоянный дрейф электронов за счет постоянного электростатического поля. Последний член в уравнении (11) описывает векторную нелинейность, которая обусловлена постоянным дрейфом электронов, причем только в случае двухмерных возмущений. Этот член исчезает в одномерной модели.

Далее учтем, что в случае генерации высокочастотных ФБ волн с частотами $\omega > \nu_i$ и $\omega < \omega_c$ возможно локальное нарушение условия квазинейтральности в плазме $N_e \approx N_i$. Исследование высокочастотной части спектра ФБ волн показало, что инкременты нарастания волн и законы дисперсии зависят от фоновой плотности заряженных частиц в плазме. Это означает, что для высокочастотных волн характерна зависимость от фоновой плотности плазмы. Для низкочастотных волн такая зависимость отсутствует.

Заметим, что уравнения (10, 11) можно записать в виде

$$N_i = \frac{1}{i\omega_o} \frac{\partial N_i}{\partial t} + a_i \nabla \vec{E} + b_i \Delta N_i + \tilde{\eta}_i \Delta \nabla_\perp \vec{E} + \frac{c_i}{i\omega_o} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \vec{E}, \quad (12)$$

$$N_e = \frac{1}{i\omega_o} \frac{\partial N_e}{\partial t} + a_{e\perp} \nabla \vec{E}_\perp + b_{e\perp} \Delta N_e + \vec{\sigma} \nabla N_e + a_{e\parallel} \nabla \vec{E}_\parallel + \frac{c_e}{i\omega_o} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_\perp \vec{E} + b_{e\parallel} \Delta_\parallel N_e + \frac{1}{iB\omega_o} [\nabla N_s, \vec{E}] \cdot \vec{e}_z, \quad (13)$$

$$\text{где } a_i = \frac{e}{m_i \omega_i \omega_o}, \quad b_i = -\frac{v_{ii}^2}{\omega_o \omega_i}, \quad \tilde{\eta}_i = \frac{i\eta_i e}{m_i \omega_o \omega_i^2}, \quad (14)$$

$$a_{e\perp} = \frac{e\omega_e}{\omega_o m_e \omega_{ce}^2}, b_{e\perp} = \frac{\omega_e v_{te}^2}{\omega_o \omega_{ce}^2}, a_{e\parallel} = -\frac{e}{m_e \omega_e \omega_o}, b_{e\parallel} = -\frac{v_{te}^2}{\omega_o \omega_e},$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\tilde{v}_o}{i\omega_o}, c_i = \frac{e}{m_i \omega_i^2}, c_e = \frac{e}{m_e \omega_e^2}.$$

Вычитая уравнение (13) из уравнения (12) и используя уравнение Пуассона (6), можно получить соотношение

$$\frac{ic}{i\omega_o} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp} \bar{E} + (a_{\perp} - \lambda) \nabla_{\perp} \bar{E} + b_{e\perp} \Delta N_e + (b_i \lambda + \tilde{\eta}_i) \Delta \nabla_{\perp} \bar{E} - \tilde{\sigma} \nabla N_e -$$

$$- a_{e\parallel} \nabla_{\parallel} \bar{E} - b_{e\parallel} \Delta_{\parallel} N_e + \frac{1}{iB\omega_o} [\nabla N_s, \bar{E}] \cdot \bar{e}_z = 0, \quad (15)$$

где $c = c_i - c_e + \lambda$, $a_{\perp} = a_i - a_{e\perp}$, $b_{\perp} = b_i - b_{e\perp}$ и $\lambda = e/(m_i \omega_{oi}^2)$.

Связь электростатического поля и флуктуации электронной плотности можно получить из уравнений (12, 13) в линейной аппроксимации, пренебрегая малыми дисперсионными эффектами при условии $k_{\parallel}^2/k_{\perp}^2 \ll 1$:

$$bN_e = (\beta - \lambda b_e) \nabla_{\perp} \bar{E} - \lambda b_i b_e \Delta \nabla_{\perp} \bar{E} + b_i a_i (\tilde{\sigma} \nabla) \bar{E}. \quad (16)$$

Далее, используя уравнения (16) и (15), запишем:

$$\frac{i\tilde{c}}{i\omega_o} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp} \bar{E} + \tilde{a} \nabla_{\perp} \bar{E} + \tilde{b} \Delta \nabla_{\perp} \bar{E} - \tilde{\sigma} \nabla_{\perp} \bar{E} + \beta_{\parallel} \nabla_{\parallel} \bar{E} = \frac{\omega_o}{i\omega_{ci}} [\nabla N_s, \bar{E}] \cdot \bar{e}_z = 0,$$

$$\tilde{a} = \frac{a_{\perp} - \lambda}{\alpha}, \tilde{\sigma} = \frac{a_i - \lambda}{\alpha}, \tilde{c} = \omega_o^2 \left(\frac{1}{\omega_i^2} + \frac{1}{\omega_{oi}^2} + \frac{1}{\omega_c^2} \right), \omega_{oi}^2 = \frac{e^2 n_o}{\epsilon_o m_i}, \quad (17)$$

$$\beta = a_i b_e - a_e b_i, \alpha \beta_{\parallel} = a_i - a_{e\parallel}, \alpha \tilde{b} = \tilde{\eta}_i + (b_i + b_e) \lambda + \beta - \tilde{\sigma}^2, \alpha = \frac{e}{m_i \omega_o^2}.$$

Частоту ω_o можно определить из условия

$$\tilde{a} \nabla_{\perp} \bar{E} - (\tilde{\sigma} \nabla) \nabla \bar{E} = 0, \quad (18)$$

которое соответствует дисперсионному уравнению ФБ волн. Подставляя выражения (14) для коэффициентов в уравнение (18), получаем

$$\frac{\omega_{oi}^2}{\omega_o^2} \left(\frac{\omega}{\omega_i} - \frac{\omega_e \omega_o}{\omega_c^2} - \frac{k v_o}{\omega_i} \right) - \left(1 + \frac{k v_o}{\omega_o} \right) = 0. \quad (19)$$

Затем, для низкочастотных ФБ волн при выполнении условия можно записать

$$\frac{\omega_o - k v_o}{\omega_i} = \frac{\omega_e \omega_o}{\omega_c^2}.$$

При условии $\omega \ll v_i$ можно получить общеизвестное дисперсионное уравнение ФБ волн:

$$\omega_o = \frac{k v_o}{1 + \psi}, \psi = \frac{v_e v_i}{\omega_c^2}, \gamma \mathcal{L} = \frac{\omega_o^2 v_e}{\omega_c^2}, \quad (20)$$

где $\gamma \mathcal{L}$ – линейный инкремент нарастания волн. Для высокочастотных волн из уравнения (19) получаем ($\omega_o > v_i$, $\omega_i \approx \omega_o$)

$$\frac{\omega_c^2}{\omega_o^2} - \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_{oi}^2} \right) - \frac{k v_o}{\omega_o} \left(\frac{\omega_c^2}{\omega_o^2} + \frac{\omega_c^2}{\omega_{oi}^2} \right) = 0. \quad (21)$$

Пренебрегая вторым членом уравнения (21), например, для $k\nu_o \approx 0$ из уравнения (21), получаем

$$\omega_o^2 = \omega_c^2 \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_{oi}^2} \right)^{-1} = \omega_{oi}^2 \left(1 + \frac{\omega_{oi}^2}{\omega_c^2} \right)^{-1}. \quad (22)$$

Таким образом, ω_o соответствует стандартной нижнегибридной частоте ω_{LH} , которая зависит от фоновой плотности заряженных частиц n_o . В более простом случае с $\nu_o \neq 0$ и $\omega \leq \nu_e$ можно получить дисперсионное соотношение $\omega_o \approx \omega_c + \Delta = \omega_c \left(1 + \tilde{k} \tilde{\nu}_o / \omega_c \right) \leq \omega_c$.

Заметим, что высокочастотная ФБ неустойчивость исследовалась численным методом в работах [4; 10], и было показано, что линейный рост волн при условии $\omega < \omega_{oi}$, $\omega_c > \omega > \nu_i$ обусловлен столкновениями электронов с нейтралами, но затухание вызвано столкновениями ионов. Уравнение (17) описывает эволюцию высокочастотных ФБ волн при произвольных физических условиях в ионосфере.

Подставляя соотношение (18) в (17), можно получить

$$-\frac{i\tilde{c}}{i\omega_o} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\perp} \vec{E} + \tilde{b} \Delta \nabla_{\perp} \vec{E} + \beta_{\parallel} \nabla_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} = \frac{\omega_o}{i\omega_{ci}} [\nabla N_s, \vec{E}] \cdot \vec{e}_z. \quad (23)$$

Уравнение (23) описывает эволюцию высокочастотных волн в столкновительной и бесстолкновительной плазме. В случае $\omega_o = \omega_{LH}$ это уравнение соответствует хорошо известному дисперсионному уравнению нижнегибридной неустойчивости. Так как это уравнение получено в магнитогидродинамическом приближении для частот $\omega \geq \nu_i$, нужно добавить кинетические эффекты. Однако учет кинетических эффектов эквивалентен учету динамической вязкости ионов. Второй член слева в уравнении (23) учитывает дисперсионные эффекты. Эти эффекты обусловлены коэффициентом η_i с различными знаками в зависимости от принятой модели столкновений. Также дисперсионные эффекты могут проявляться при нарушении условия квазинейтральности плазмы и конечности радиуса Дебая $r_D = \nu_{te} / \omega_{pe}$ в случае сильно замагниченной плазмы $\omega_c^2 \gg \omega_{oi}^2$ и радиуса Дебая для электронов $r_{ce} = \nu_{te} / \omega_{ce}$ в плотной плазме $\omega_{pe} \gg \omega_{ce}$.

Третий член слева уравнения (23) описывает движение заряженных частиц вдоль магнитного поля. Обычно предполагается, что для ФБ волн выполняется соотношение

$k_{\parallel}^2 / k_{\perp}^2 \ll 1$, поэтому электромагнитные эффекты не учитываются. Но при условии $k_{\parallel}^2 / k_{\perp}^2 \geq \nu_c^2 / \omega_{ce}^2$ волны распространяются под небольшим углом к плоскости ортогонально направлению магнитного поля. Эти малые углы играют важную роль в нелинейной динамике, так как эта область углов является областью эффективного поглощения энергии. Вследствие нелинейного взаимодействия волн с малыми ракурсными углами $\psi = \arctg k_{\parallel}^2 / k_{\perp}^2 \approx 0$ ракурсные углы линейно растущих волн могут изменяться и принимают конечные значения. Как уже отмечалось, волны с частотами $\omega = \omega_{LH}$ (ω_{LH} – нижнегибридная частота при $\beta_{\parallel} = m_i / m_e$) аналогичны ФБ волнам. При выполнении условия $\omega < \nu_e$, $\beta_{\parallel} \approx \omega_{ce}^2 / \nu_e^2$ значения ракурсных углов может изменяться на порядок. Коэффициент \tilde{b} определяет дисперсионный эффект, который обусловлен динамической вязкостью ионов. Может возрастать и компенсировать дисперсию за счет отклонения от условия квазинейтральности плазмы.

2.2 Низкочастотные ФБ волны

Далее рассмотрим эволюцию низкочастотных волн при условии квазинейтральности в плазме. При этом предполагаем, что в плазме существуют высокочастотные волны,

которые определяют движение заряженных частиц. Будем считать, что их движение происходит за счет давления и пондеромоторной силы (ПМС, сила Миллера).

Далее, эволюцию низкочастотных ФБ волн рассмотрим в рамках МГД системы уравнений (1-4) при условии квазинейтральности в плазме. Предполагаем, что частота волн мала. В этом случае движение заряженных частиц определяется столкновениями заряженных частиц. Предполагаем, что электроны являются замагниченными $v_e \ll \omega_{ce}$, а ионы не замагниченными $v_i > \omega_{ci}$. Далее предполагаем, что в определенной области плазмы возбуждены высокочастотные ФБ колебания плотности и электростатического поля, которое является источником нелинейной ПМС или силы Миллера $\vec{F}_\alpha = m_\alpha ((\vec{v}_\alpha \nabla) \vec{v}_\alpha^*)$. Пренебрегая ионной вязкостью в уравнениях (4, 5) и опуская нелинейные члены, получаем систему уравнений для низкочастотных ФБ волн.

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = -\nabla \frac{e\Phi_s}{m_i} + v_i^2 \nabla \ln N_i - v_i \vec{v}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i} - \frac{\vec{F}_e}{m_i}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla \vec{v}_i = 0, \quad N_i = \frac{n_i}{n_0}. \quad (25)$$

Комбинируя уравнения (24, 25), получаем уравнение для возмущений ионной плотности:

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial t^2} - \Delta \frac{e\Phi_s}{m_i} - v_i^2 \Delta \ln N_i + v_i \frac{\partial N_i}{\partial t} - \frac{\nabla \vec{F}_e}{m_i} = 0. \quad (26)$$

В уравнении (26) опущены нелинейные члены и учитывается только движение ионов под действием силы РМС. Также аналогично можно рассчитать движение электронов под действием ПМС в дрейфовом приближении:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\perp^* = & -\frac{1}{B} [\nabla_\perp \Phi_s, \vec{E}, \vec{e}_z] + \frac{v_e}{B\omega_{ce}} \nabla_\perp \Phi_s - \frac{v_e^2}{\omega_{ce}} [\nabla \ln N_e, \vec{e}_z] - \frac{v_e v_{te}^2}{\omega_{ce}^2} \nabla_\perp \ln N_e + \\ & + \frac{1}{m_e \omega_{ce}} [\vec{F}_e, \vec{e}_z] - \frac{v_e}{m_e \omega_{ce}^2} \vec{F}_{e\perp}. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\vec{v}_\parallel^* = \frac{e}{m_e v_e} \nabla_\parallel \Phi_s - \frac{v_{te}^2}{v_e} \nabla_\parallel \ln N_e - \frac{\vec{F}_{e\parallel}}{m_e v_e}. \quad (28)$$

Здесь $\vec{F}_e = m_e ((\vec{v} \nabla) \vec{v}^*)$ – среднее значение силы, действующей на электроны. Далее, подставляя соотношения (27, 28) в уравнение движения, получим уравнение для электронной плотности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_e}{\partial t} + \vec{v}_{oe} \nabla N_e + \frac{v_e}{B\omega_{ce}} \Delta_\perp \Phi_s - \frac{v_e v_{te}^2}{\omega_{ce}^2} \Delta_\perp \ln N_e + \frac{e}{m_e v_e} \Delta_\parallel \Phi_s - \frac{v_{te}^2}{v_e} \Delta_\parallel \ln N_e - \\ - \frac{v_e}{m_e \omega_{ce}^2} \nabla_\perp \vec{F}_{e\perp} + \frac{1}{m_e \omega_{ce}} [\nabla_\perp \vec{F}_e] \cdot \vec{e}_z - \frac{1}{m_e v_e} \nabla_\parallel \vec{F}_{e\parallel} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Используя связь электронных и ионных скоростей под действием ВЧ полей, определяемых соотношением (7–9), сформулируем ПМС для электронов и ионов:

$$\vec{F}_i = \frac{m_i}{2B^2} \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} \right)^2 \nabla |E|^2.$$

Определим подвижность электронов

$$\mu_{e\perp} = \frac{1}{B}, \quad \mu_e = \frac{i\omega_e}{B\omega_{ce}}, \quad \mu_\parallel = \frac{i\omega_{ce}}{B\omega_e}.$$

И, соответственно, ПМС для электронов

$$F_x^e = \frac{m_e}{2} \left(\mu_{\perp}^2 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\mu_{\perp} \mu_{\parallel}}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{\partial \phi^2}{\partial z} \right| \right) + k.c. ,$$

$$F_y^e = \frac{m_e}{2} \left(-\mu_{\perp}^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\mu_{\perp} \mu_{\parallel}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial \phi^2}{\partial z} \right| \right) + k.c. ,$$

$$F_z^e = \frac{m_e}{2} \left(\mu_{\perp} \mu_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\mu_{\parallel}^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left| \frac{\partial \phi^2}{\partial z} \right| \right) + k.c.$$

Здесь потенциал ϕ есть ВЧ потенциал, и $f_c = [\nabla \phi^*, \nabla \phi] \cdot \vec{e}_z$ определяется векторной нелинейностью и описывается скобками Пуассона:

$$f_c = \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Определим ВЧ потенциал соотношением

$$\phi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) \cdot e^{i\psi(\vec{r}, t)},$$

где A and ψ – амплитуда и фаза, затем запишем:

$$f_c = [\nabla \psi, \nabla A^2].$$

Причем знак ПМС определяется сдвигом фаз двух компонент высокочастотного поля $-\partial \phi / \partial x = E_x$, $-\partial \phi / \partial y = E_y$.

Можно легко показать, что $\nabla_{\perp} \vec{F}_e = 0$ и $[\nabla_{\perp}, \vec{F}_e] = 0$, если ВЧ поле не влияет на столкновения заряженных частиц. Разделяя на реальную и мнимую часть силы \vec{F}_e и оценивая их вклад в уравнение (29), можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_e}{\partial t} + \bar{v}_{oe} \nabla \ln N_e + \frac{v_e}{B \omega_{ce}} \Delta_{\perp} \Phi_s - \frac{v_e v_{te}^2}{\omega_{ce}^2} \Delta_{\perp} N_e + \frac{e}{m_e v_e} \Delta_{\parallel} (\Phi_s - T_e) - T_e - \frac{v_{te}^2}{v_e} \Delta_{\parallel} \ln N_e - \\ - \frac{v_e}{m_e \omega_{ce}^2} \nabla_{\perp} \vec{F}_{e\perp} + \frac{1}{m_e \omega_{ce}} [\nabla_{\perp} \vec{F}_e] \cdot \vec{e}_z - \frac{1}{m_e v_e} \nabla_{\parallel} \vec{F}_{e\parallel} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Таким образом, уравнения (23, 26, 30) представляют замкнутую систему уравнений для величин N_p, N_e and Φ_s . Используя условие квазинейтральности $N_e = N_p$, из уравнений (26, 30) и связи $N = N_e = N_p$, можно определить потенциал Φ_s .

Пренебрегая всеми нелинейными эффектами в выражении ПМС, получим

$$\begin{aligned} v_d \nabla N + e \frac{1 + \psi}{m_i v_i} \Delta_{\perp} \Phi_s + \frac{v_{ti}^2}{v_i} (1 - \psi \tau) \Delta_{\perp} \ln N + \\ + \frac{1}{m_e v_e} \Delta_{\parallel} (e \Phi_s (1 + \psi_{\perp}) - T_i (\tau - \psi_{\perp}) \ln N - f_e (1 + R_{\perp} f_i)) = 0 \\ \bar{v}_d = \bar{v}_{oe} - \bar{v}_{oi}, \psi = v_i v_e / \omega_c^2, \psi_{\perp} = m_e v_e / (m_i v_i), \tau = T_e / T_i. \end{aligned} \quad (31)$$

Соотношение (31) определяет природу возмущений в плазме и динамику процесса, характер структур плотности заряженных частиц и электростатического потенциала. Уравнение (31) эквивалентно уравнению

$$\text{div} \vec{j}_{\perp} = -\nabla_{\parallel} j_{\parallel} \quad (32)$$

и определяет динамику движения частиц в трехмерной модели. Нахождение общего решения уравнения (31) представляет большие трудности, но в случае $v_d \neq 0$ и если

продольное движение не существенно в силу условия $k_{\parallel}^2/k_{\perp}^2 \ll v_c^2/\omega_{ce}^2$, то $\Delta_{\parallel} \ll \Delta_{\perp}$ и первые три члена соотношения (31) дают наибольший вклад. В этом случае можно найти приближенное решение:

$$e\Delta_{\perp}\Phi_s = -\frac{m_i v_i}{1+\psi} v_d \nabla N - T_i(1-\psi\tau)\Delta_{\perp} \ln N. \quad (33)$$

Это уравнение представляет собой основное условие в теории ФБ неустойчивости, и оно соответствует дисперсионному уравнению (1). Дополнительный вклад Δ_{\parallel} имеет порядок величины $k_{\parallel}^2/k_{\perp}^2$. В противоположном случае продольное движение заряженных частиц определяет физический процесс и уравнение (31) может быть решено в общем виде. Если предположить, что потенциал Φ_s определяет поляризационное электрическое поле, которое направлено вдоль силовых линий магнитного поля и частицы движутся вдоль магнитного поля \vec{B}_0 , то можно записать уравнение

$$\Delta_{\parallel}(e\Phi_s(1+\psi_1) - T_i(\tau - \psi_1)\ln N_e - f_e) = 0$$

или приблизительно

$$e\Phi_s = T_e \ln N_e + \tilde{f}_e. \quad (34)$$

Уравнение (34) соответствует распределению Больцмана для электростатического потенциала при $\tilde{f}_e = 0$.

Далее, подставляя соотношение (34) в уравнения движения заряженных частиц, можно получить уравнения

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \bar{v}_0 \nabla N_e + \frac{v_e}{m_i \omega_e} \Delta_{\perp} \tilde{f}_e = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial t^2} - \frac{T_e}{m_i} \Delta \ln N_e - \frac{T_i}{m_i} \Delta \ln N_i + v_i \frac{\partial N_i}{\partial t} - \frac{\Delta \tilde{f}_e}{m_i} = 0. \quad (36)$$

Для квазинейтральной плазмы при выполнении условия $N = N_e = N_i$ вместо двух уравнений (35, 36) можно записать одно уравнение

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \ln N - v_i \bar{v}_0 \nabla_{\perp} N - (1+\psi) \frac{\Delta \tilde{f}_e}{m_i} = 0. \quad (37)$$

Если волны распространяются ортогонально дрейфовой скорости электронов и вне конуса линейной генерации волн, третий член уравнения (37) достаточно мал и в этом случае можно записать уравнение

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} - c_s^2 \Delta \ln N = (1+\psi) \frac{\Delta \tilde{f}_e}{m_i}. \quad (38)$$

Уравнения (15) и (38) представляют самосогласованную систему уравнений для низкочастотных и высокочастотных ФБ волн.

Если предположить существование стационарных структур, движущихся со скоростью V , т. е. $\partial/\partial t = -V \partial/\partial z$, то можно записать

$$N \approx \frac{1}{M^2 - 1} \frac{\tilde{f}_e}{m_i c_s^2} (1+\psi). \quad (39)$$

Принимая значения физических параметров ионосферной плазмы $v_e / \omega_{ce} \approx 1.2 \cdot 10^{-2}$, $\sqrt{m_e / m_i} \approx 5 \cdot 10^{-3}$, $M = V / C_s \approx 1.2$, для значений физических параметров $k_{\parallel}^2 / k_{\perp}^2 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ и для локальных значений $\tilde{f}_e \approx 10$ можно определить $|k_{\parallel} / k_{\perp}| \approx 0.17$.

Таким образом, можно заключить, что ракурсный угол (что определяет $k_{\parallel}^2 / k_{\perp}^2$) зависит от отношения масс электронов и ионов и отношения частоты волн к частоте столкновений, а также структуры электростатического потенциала. Следует отметить, что ракурсный угол радиоотражений определяется значением \tilde{f}_e , т. е. значением и формой электростатического потенциала.

Основные выводы

- На основе магнитогидродинамической теории движения заряженных частиц совместно с уравнениями для электростатического поля получены эволюционные уравнения для волновых структур возмущений плотности заряженных частиц (29), (30).
- При использовании метода медленно изменяющихся амплитуд определено дисперсионное уравнение (19), (22), которое определяет две ветви нарастающих возмущений плотности заряженных частиц.
- Показано, что, кроме общеизвестной ветви низкочастотных колебаний (1), существует высокочастотная ветвь колебаний на частотах порядка нижнегибридных частот, которые играют важную роль в нелинейной динамике ФБ неустойчивости.
- Для частного случая стационарных волновых структур, движущихся с постоянной скоростью, получено нелинейное эволюционное уравнение (39) при учете нелинейного взаимодействия высокочастотных и низкочастотных волн.
- Проведенные оценки нелинейного взаимодействия волн показали, что стационарный уровень возмущения фоновой плотности заряженных частиц ФБ неустойчивости зависит от среднего уровня энергии высокочастотных волн, высотного фактора и относительной скорости движения стационарной структуры числа Маха $M = V / C_s$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Volosevich, A. V.** Coherent nonlinear interaction of waves in collisional ionospheric plasma / A. V. Volosevich, C.-V. Meister // International Journal of Geomagnetism and Aeronomy, 2002. Vol. 3, N 2. – P. 151–156.
2. **Volosevich, A. V.** Nonlinear wave structures in collisional plasma of auroral ionosphere / A. V. Volosevich, Y. I. Galperin // Ann. Geophys., 1997, Vol. 15. – P. 899–905.
3. **Волосевич, А. В.** Обобщенная теория Фарлей-Бунемановской неустойчивости в столкновительной плазме / А. В. Волосевич, Ю. Ф. Зарницкий // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. Сер. В, Природазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2013. – № 1. – С. 24–35.
4. **Lee, K.** High-frequency Hall current instability / K. Lee, C. F. Kennel, J. M. Kindel // Radio Science. – 1971. – Vol. 6, N. 2. – P. 209–213.
5. **Volosevich A. V.** Nonlinear wave structures in collisional plasma of auroral E-region ionosphere / A. V. Volosevich, Y. I. Galperin // Ann. Geophys. – 1997. – V. 15. – P. 899–907.
6. **Volosevich, A. V.** Nonlinear mechanism of the stabilization of the Buneman-Farley instability / A. V. Volosevich, V. A. Liperovsky, M. A. Lifshits // Research of the High-Latitudinal Ionosphere and Magnetosphere (in Russian), Nauka 1985.
7. **Volosevich, A. V.** Coherent nonlinear interaction of waves in the collisional ionospheric plasma / A. V. Volosevich, C.-V. Meister // Int. J. Geomagnetism and Aeronomy, v. 2002 3 (6), No 2, P. 1-8.
8. **Volosevich, A. V.** Coherent nonlinear interaction of waves in the collisional plasma / A. V. Volosevich / Proceedings of SPIE 2007 Volume 6725, ICONO ul. DOI: 10.1117/12.751415.

9. **Volosevich, A. V.** Theoretical model and Experimental Diagnostics of Nonlinear Electrostatic Structures in Space plasma / A. V. Volosevich // *Advances in Space Research*, 200637. – P. 569–575.
10. **Musher, S. L.** On plasma wave collapse near lower-hybrid resonance / S. L. Musher, B. I. Sturman // *J. of Exp. and Theoretical Phys. (in Russian)*. – 1975. – Vol. 22 (11). – P. 537–542.
11. **Shapiro, V. D.** Wave collapse at the lower-hybrid resonance / V. D. Shapiro, V. I. Shevchenko, G. I. Solov'ev, V. P. Kalinin, R. Bingham, R. Z. Sagdeev, M. Ashour-Abdalla, J. Dawson, Su // *J. J Phys. Fluids B*, 19935 (9), P. 3148–3162.

Поступила в редакцію 15.04.2019 г.

Контакты: avolos@rambler.ru (Волосевич Александра Владимировна)

Volosevich A. NONLINEAR INTERACTION OF FARLEY-BUNEMAN WAVES IN IONOSPHERIC PLASMA.

The nonlinear interaction of waves excited by the two-stream or modified Farley-Buneman instability is considered. It has been found out that during the linear stage of wave growth the enhanced pressure of the high-frequency part of the waves locally generates a ponderomotive force. This force affects plasma particles and redistributes them. Thus an additional electrostatic polarization field occurs which influences the low-frequency part of the waves. Then, low-frequency waves also cause the redistribution of high-frequency waves. In the paper a self-consistent system of equations is obtained to describe the nonlinear interaction of the waves. It is shown that the considered mechanism of wave interaction causes a nonlinear stabilization of the high-frequency waves' growth and the formation of local density structures of the charged particles. The density modifications of the charged particles during the non-linear stage of wave growth and the possible interval of aspect angles of the high-frequency waves are estimated.

Keywords: three waves nonlinear interactions, nonlinear electrostatic structures, the low-frequency and, high-frequency waves, auroral irregularities, ionospheric plasma, stationary shock waves, Farley-Buneman instability, ponderomotive, force.

УДК 621.372.8; 535.1

КОРРЕКЦИЯ ДАННЫХ СПЕКТРОФОТОМЕТРА МЕТОДОМ ПОДВИЖНОГО ОКНА

А. Б. Сотский

доктор физико-математических наук, профессор

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

С. С. Михеев

аспирант

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Предложен простой в реализации метод коррекции искажений в измеряемых спектрофотометром отражательной либо пропускательной способности слоев, вызванных конечной шириной аппаратной функции прибора. Высокая эффективность подхода продемонстрирована на примере восстановления спектра отражательной способности слоя Nb_2O_5 на стеклянной подложке.

Ключевые слова: спектрофотометрия, аппаратная функция, щелевая функция, восстановление истинного спектра, отражательная способность.

1. Введение

Увеличение интенсивности света на фотоприемнике спектрофотометра позволяет повысить его быстродействие за счет снижения времени экспозиции и увеличить отношение “сигнал-шум”, влияющее на точность измерений спектров коэффициентов отражения и пропускания исследуемых слоев. Данное увеличение может быть достигнуто за счет расширения выходной или (и) входной щелей схемы монохроматора. Но в таком случае возрастает полуширина аппаратной функции прибора, что снижает его разрешающую способность и вызывает ошибки при определении спектров слоев. Актуальна задача по минимизации данных ошибок путем надлежащей обработки спектров.

Если под спектром слоя понимать зависимость $F(\lambda)$, где $F(\lambda) = R(\lambda)$, либо $F(\lambda) = T(\lambda)$, $R(\lambda)$, $T(\lambda)$ – энергетические коэффициенты отражения либо прохождения света, λ – длина волны излучения, то, как известно [1], определение $F(\lambda)$ методом спектрофотометрии сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda, \lambda') F(\lambda') d\lambda' \left[\int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda, \lambda') d\lambda' \right]^{-1}, \quad (1)$$

где $f(\lambda)$ – измеряемый сигнал, нормированный на опорный сигнал

$$A(\lambda, \lambda') = S(\lambda, \lambda') \rho(\lambda') \quad (2)$$

– аппаратная функция спектрофотометра, $S(\lambda, \lambda')$ – щелевая функция, отличная от нуля на интервале $|\lambda - \lambda'| \leq \Delta\lambda(\lambda)$, где $\Delta\lambda(\lambda)$ – полуширина аппаратной функции монохроматора, $\rho(\lambda')$ – спектральная плотность мощности источника излучения. В пределе при $\Delta\lambda(\lambda) \rightarrow 0$ (бесконечно узкая щель монохроматора) $F(\lambda) = f(\lambda)$. Но реально этот предел не достижим. Тогда при условии задания функции (2) решение (1) представляет собой не корректную задачу [1; 2]. Для нахождения $F(\lambda)$ из (1) предложены различные методы

[1; 3–5]. Среди них наиболее распространены методы, основанные на допущении [5]

$$A(\lambda, \lambda') = A(\lambda - \lambda'). \quad (3)$$

В классическом подходе [3; 5] уравнение (1) путем разложения функции $F(\lambda')$ в окрестности λ в ряд Тейлора сводится к бесконечному ряду для $f(\lambda)$, содержащему степени оператора $D = d/d\lambda$. Последний ряд допускает обращение

$$F(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} (A_i D^i) f(\lambda), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \quad A_1 = -I_1, \quad A_2 = -0.5I_2 + I_1^2, \\ A_3 &= -\frac{1}{6}I_3 + I_1I_2 - I_1^3, \quad A_4 = -\frac{1}{24}I_4 + \frac{1}{3}I_1I_3 + \frac{1}{4}I_2^2 - \frac{3}{2}I_1^2I_2 + I_1^4, \dots, \\ I_n &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) d\lambda \right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n A(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

При практических расчетах в ряде (4) обычно удерживают 2 либо 4 слагаемых, допуская, что узлы задания функции $f(\lambda)$ эквидистантны с шагом $\delta\lambda$, и используя конечно-разностные производные [3; 5]. В итоге возникают трехточечная либо пятиточечная вычислительные схемы, в которых $F(\lambda)$ линейно выражается через $f(\lambda - \delta\lambda)$, $f(\lambda)$, $f(\lambda + \delta\lambda)$ либо через $f(\lambda - 2\delta\lambda)$, $f(\lambda - \delta\lambda)$, $f(\lambda)$, $f(\lambda + \delta\lambda)$, $f(\lambda + 2\delta\lambda)$ [3]. Обе схемы просты в реализации, но обладают недостатками, состоящими в существенной зависимости решения от шага $f(\lambda)$, перестройка которого в реальных приборах имеет ограничения и в отсутствии устойчивости к шумам регистрации $f(\lambda)$ (см. ниже).

В [4] для получения устойчивого решения уравнения (1) использован метод квадратур, дополненный техникой регуляризации целевого функционала Тихонова [2]. Эффективность получаемого таким способом решения зависит от выбора квадратурной схемы, определяемой гладкостью искомой функции, и от выбора регуляризационной матрицы, который достаточно не тривиален.

Отметим также итерационный метод решения (1), основанный на схеме Ричардсона-Люки [5]. Он достаточно устойчив к шумам задания функции $f(\lambda)$. Вместе с тем данный метод требует задания хорошего нулевого приближения для $F(\lambda)$ и критерия окончания вычислений при наличии экспериментальных шумов. В нем также отсутствует стопроцентная гарантия сходимости.

В настоящей работе предложен простой альтернативный метод решения уравнения (1), основанный на полиномиальной интерполяции $F(\lambda)$. Данная интерполяция осуществляется на коротких интервалах полного диапазона задания функции $f(\lambda)$ $A \leq \lambda \leq B$, содержащего M эквидистантных (с шагом $\delta\lambda$) экспериментальных точек с координатами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$. Это позволяет использовать полиномы низких степеней, коэффициенты которых определяются в результате решения алгебраических систем (их построение осуществляется методом наименьших квадратов – МНК с хорошо обусловленными матрицами). Полное нахождение функции $F(\lambda)$ на экспериментальных длинах волн осуществляется за счет последовательного перемещения интервала интерполяции по диапазону $A \leq \lambda \leq B$. В связи с этим предлагаемый метод естественно назвать методом подвижного окна. Эффективность подхода и его преимущество по сравнению с классической схемой (4) продемонстрированы на примере восстановления спектра отражательной способности слоя Nb_2O_5 на стеклянной подложке.

2. Метод подвижного окна

Назовем окном с номером w совокупность нечетного числа $N_w < M$ длин волн $\lambda_w, \lambda_{w+1}, \dots, \lambda_{w+N_w-1}$ из экспериментального диапазона. Предполагая, что N_w от номера w не зависит, имеем $w = \overline{1, M - N_w + 1}$. Обозначим центральную и крайнюю правую длины волн окна $\bar{\lambda}_w$ и β_w соответственно ($\bar{\lambda}_w = \lambda_{w+0.5(N_w-1)}$, $\beta_w = \lambda_{w+N_w-1}$). С окном свяжем интерполяционный полином степени $N \geq 0$

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^{N+1} r_i^{(w)} [(\lambda - \bar{\lambda}_w)(\beta_w - \bar{\lambda}_w)^{-1}]^{i-1}, \quad (5)$$

где $r_i^{(w)}$ – коэффициенты, подлежащие определению. Рассмотрим модель, в которой $\rho(\lambda')$ пренебрежимо мало изменяется на интервале $|\lambda - \lambda'| \sim \Delta\lambda(\lambda)$. Такая модель адекватна тепловым источникам излучения. Используя приближение (3), имеем $\Delta\lambda(\lambda) = \Delta\lambda = const$, $A(\lambda - \lambda') = S(\lambda - \lambda')$. Щелевую функцию также зададим полиномом

$$S(\lambda - \lambda') = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_s+1} S_i (\lambda - \lambda')^{i-1} & \text{при } |\lambda - \lambda'| \leq \Delta\lambda, \\ 0 & \text{при } |\lambda - \lambda'| > \Delta\lambda, \end{cases} \quad (6)$$

где S_i – известные коэффициенты. С учетом (5) и (6) уравнение (1) записывается в виде

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{N+1} r_i^{(w)} \varphi_i^{(w)}(\lambda), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(w)}(\lambda) = & \left\{ \sum_{j=1}^{N_s+1} S_j j^{-1} (\Delta\lambda)^j [1 - (-1)^j] \right\}^{-1} \left(\frac{\lambda - \bar{\lambda}_w}{\beta_w - \bar{\lambda}_w} \right)^{i-1} \times \\ & \times \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k (\lambda - \bar{\lambda}_w)^{-k} \sum_{j=1}^{N_s+1} s_j (\Delta\lambda)^{j+k} [1 - (-1)^{j+k}] (j+k)^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

где C_{i-1}^k – биномиальные коэффициенты. Применяя к (7) МНК в пределах окна, приходим к алгебраической системе

$$\sum_{j=1}^{N+1} M_{ij} r_j^{(w)} = B_i^{(w)} \quad (i = \overline{1, N+1}; \quad N \leq N_w - 1), \quad (9)$$

$$M_{ij} = \sum_{k=w}^{w+N_s-1} \varphi_i^{(w)}(\lambda_k) \varphi_j^{(w)}(\lambda_k), \quad (10)$$

$$B_i^{(w)} = \sum_{k=w}^{w+N_s-1} \varphi_i^{(w)}(\lambda_k) f(\lambda_k). \quad (11)$$

Следовательно,

$$r_i^{(w)} = \sum_{j=1}^{N+1} M_{ij}^{-1} B_j^{(w)}, \quad (12)$$

где M_{ij}^{-1} – матрица, обратная матрице M_{ij} , которая от номера окна w не зависит, как это ясно из (8) и (10).

В рамках предлагаемого метода решение уравнения (1) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} F(\lambda_k) &= \sum_{i=1}^{N+1} r_i^{(w)} \left(\frac{\lambda_k - \bar{\lambda}_w}{\beta_w - \bar{\lambda}_w} \right)^{i-1} \quad \text{при } k = \overline{1, 0.5(N_w - 1) - 1}, \quad w = 1 \\ F(\lambda_k) &= r_1^{(w)} \quad \text{при } k = w + 0.5(N_w - 1), \quad w = \overline{1, M - N_w + 1} \\ F(\lambda_k) &= \sum_{i=1}^{N+1} r_i^{(w)} \left(\frac{\lambda_k - \bar{\lambda}_w}{\beta_w - \bar{\lambda}_w} \right)^{i-1} \quad \text{при } k = \overline{M - 0.5(N_w - 1) + 1, M}, \quad w = M - N_w + 1 \end{aligned} \right\} (13)$$

Выражения (13) записаны на том основании, что максимальную точность интерполяции (5) следует ожидать в окрестности центра соответствующего окна.

3. Эффективность метода

Мы исследовали решение (13) в вычислительных экспериментах по восстановлению спектра отражательной способности однородного слоя Nb_2O_5 толщиной 500 нм, нанесенного на подложку из стекла К8. Щелевая функция была выбрана в соответствии с экспериментальными данными работы [6] (рис. 1).

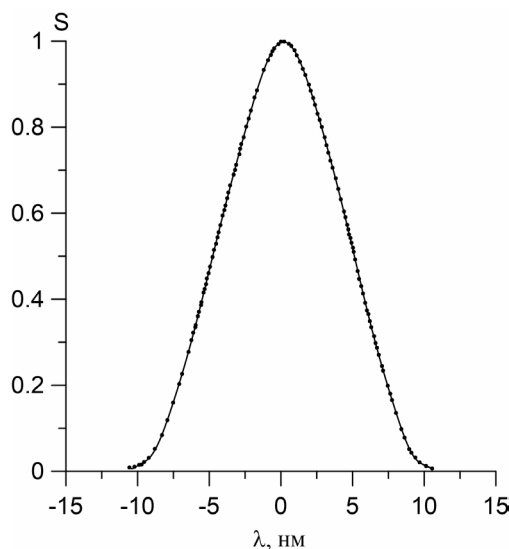


Рисунок 1 – Щелевая функция $S(\lambda)$, дискретные точки – эксперимент [6], сплошная кривая – его интерполяция (6) при $N_s = 16$, $\Delta\lambda = 10.558$ нм

Результаты вычисления функций $F(\lambda)$ и $f(\lambda)$ (прямая задача спектрофотометрии) с шагом $\delta\lambda = 1$ нм приведены на рис. 2. Здесь $F(\lambda) = R_e(\lambda)$, $R_e(\lambda)$ – точная отражательная способность слоя для волн TE поляризации при падении излучения на слой из воздуха под углом 50° . Расчет $R_e(\lambda)$ выполнен с использованием рекуррентных соотношений [7] и известных дисперсионных таблиц для спектров комплексного показателя преломления материалов слоя и подложки [8]. Для имитации измерительных погрешностей значения $f(\lambda_k)$, фигурирующие в упомянутых во введении классических трехточечной и пятиточечной схемах и в выражении (11), задавались в виде $f(\lambda_k) = f_0(\lambda_k) + \delta_k$, где $f_0(\lambda_k)$ равны значениям $f(\lambda_k)$, строго рассчитанным на основании (1), δ_k – случайные ошибки с нулевыми средними значениями, полученные нормальным генератором случайных чисел со среднеквадратичным отклонением $q f_0(\lambda_k)$. Функция $f(\lambda_k)$, представленная

на рис. 2 и использованная в дальнейших расчетах, соответствует значению $q = 0.0043$, которое адекватно спектрофотометру Photon RT (Essentoptics, Minsk) [9].

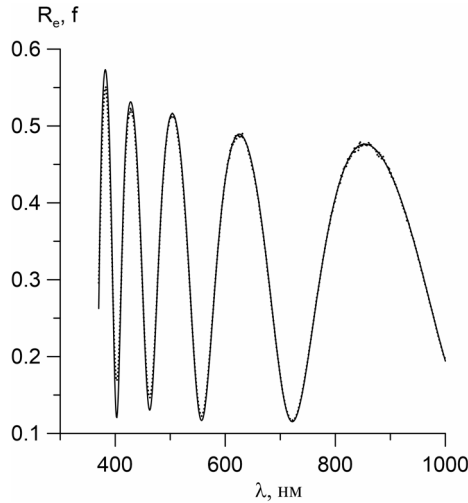


Рисунок 2 – Точный ($R_e(\lambda)$, сплошная кривая) и преобразованный сверткой (1) ($f(\lambda)$, штриховая кривая) спектры отражательной способности слоя Nb_2O_5 на стеклянной подложке

График функции $F(\lambda)$, восстановленной по формулам (13) при $N_w = 95$, $N = 17$, визуально не отличим от графика точной зависимости $R_e(\lambda)$ на рис. 2. Погрешности же классических трехточечной и пятиточечной схем (см. введение) оказались значительно больше. Об этом позволяет судить рис. 3.

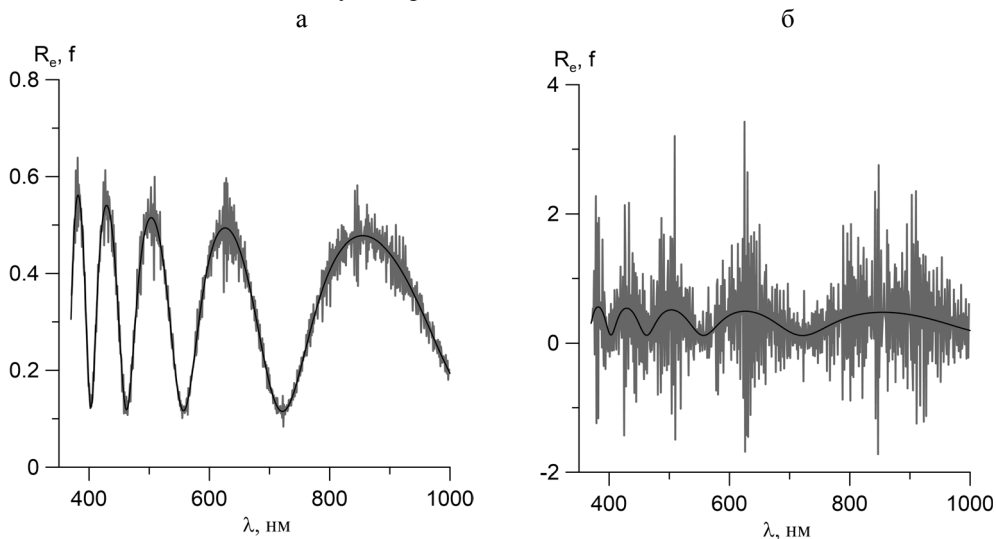


Рисунок 3 – Точный ($R_e(\lambda)$, черная кривая) и восстановленные по классическим трехточечной (а) и пятиточечной (б) схемам (серые быстро колеблющиеся кривые) спектры отражательной способности слоя Nb_2O_5 на стеклянной подложке

В методе подвижного окна имеются два свободных параметра: N_w и N . Их выбор существенно влияет на точность решения обратной задачи. Действительно, значительное уменьшение N_w , сопровождаемое уменьшением максимально возможного N (см. (8)), повышает погрешность квадратурной формулы (6) и чувствительность решения $F(\lambda)$ к шумам регистрации $f(\lambda_k)$ по причине уменьшения числа шумящих слагаемых в определении $B_i^{(w)}$ (см. (11)). С другой стороны, чрезмерное увеличение N_w требует использования больших значений N для детального задания функции $F(\lambda)$ в широком интервале длин волн. Это приводит к снижению числа обусловленности матрицы M_{ij} и, как следует из (11), (12), – к росту чувствительности решения $F(\lambda)$ к шумам регистрации $f(\lambda_k)$. Таким образом, существует проблема оптимального выбора $N_w = N_{w\text{opt}}$ и $N = N_{\text{opt}}$, соответствующих минимуму ошибки восстановления функции $F(\lambda)$.

Для ее исследования введем в рассмотрение два критерия: среднеквадратичное отклонение функции $F(\lambda)$ вида (13) от точной функции $R_e(\lambda)$:

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{k=1}^M [F(\lambda_k) - R_e(\lambda_k)]^2 (M-1)^{-1}}, \quad (14)$$

где $i=1$, и среднеквадратичное отклонение функции $F(\lambda)$ вида (13) от экспериментальной функции $f(\lambda)$:

$$\sigma_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^M [F(\lambda_k) - f(\lambda_k)]^2 (M-1)^{-1}}.$$

Типичные зависимости $\sigma_1(N)$ (кружки) и $\sigma_2(N)$ (треугольники) приведены на рис. 4а. Они соответствуют $N_w = 95$. Как видно из рис. 4а, в окрестности

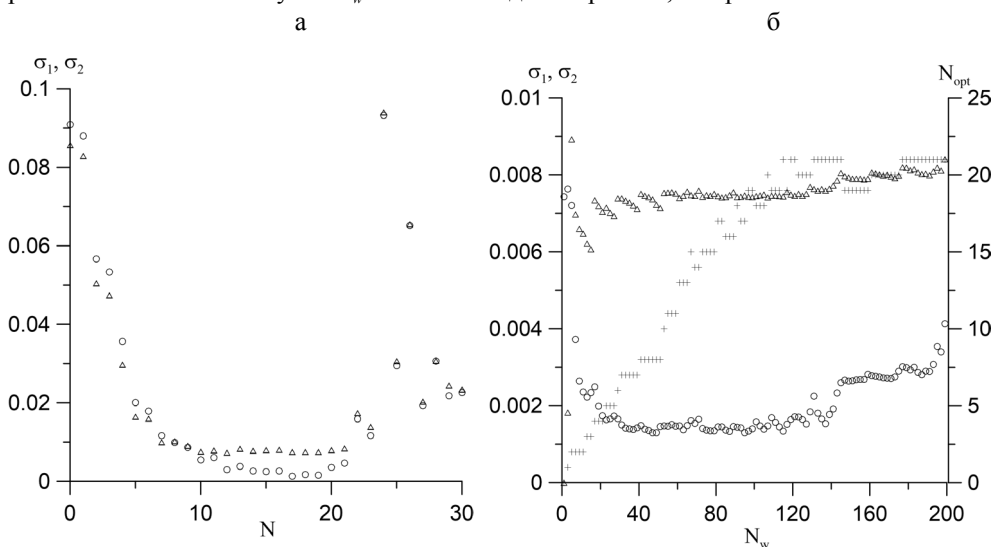


Рисунок 4 – К оптимальному выбору N (а) и N_w (б)

минимума функции $\sigma_1(N)$, который достигается при $N = N_{\text{opt}}$, имеет место платообразная зависимость $\sigma_2(N)$. Таким образом, для оценки оптимального порядка полинома (5) при практическом восстановлении функции $F(\lambda)$ с а priori неизвестными свойствами следует ориентироваться на положение центра платообразного участка экспериментальной зависимости $\sigma_2(N)$. На рис. 4б представлены зависимости $\sigma_1(N_w)$ и $\sigma_2(N_w)$ (для них использованы те же обозначения, что и на рис. 4а), рассчитанные при $N = N_{\text{opt}}(N_w)$ (последняя зависимость представлена крестиками).

Здесь опять наблюдается стабилизация зависимости $\sigma_2(N_w)$ в окрестности минимума зависимости $\sigma_1(N_w)$, что также можно использовать для оценки $N_{w\text{opt}}$ по экспериментальным данным для $f(\lambda)$.

Количественно судить о среднеквадратичных ошибках определения $F(\lambda)$ рассмотренными методами позволяет таблица. Здесь σ_0 , σ_3 и σ_5 оценены по формуле (14), где $F(\lambda_k) = f(\lambda_k)$ для σ_0 , а $F(\lambda_k)$ для σ_3 и σ_5 рассчитаны по классическим трехточечной и пятиточечной схемам соответственно; σ_1 – ошибка метода подвижного окна при указанных $N_{w\text{opt}}$ и N_{opt} .

Среднеквадратичные ошибки восстановления $F(\lambda)$ в различных приближениях и оптимальные параметры метода подвижного окна

σ_0	σ_1	σ_3	σ_5	$N_{w\text{opt}}$	N_{opt}
$7.4 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	0.61	95	17

Таким образом, в рассмотренном примере предложенный метод подвижного окна обеспечил семикратное снижение ошибки определения $F(\lambda)$ по сравнению с нулевым приближением $F(\lambda_k) = f(\lambda_k)$. Главным образом это связано с коррекцией функции $f(\lambda)$ в окрестности ее экстремальных точек (см. рис. 2). Обе исследованных классических схемы решения обратной задачи при рассмотренном уровне шумов функции $f(\lambda)$ оказались неэффективными: $\sigma_5 \gg \sigma_3 \gg \sigma_0$.

4. Заключение

Разработан простой в реализации метод подвижного окна для коррекции искажений в измеряемых спектрофотометром отражательной либо пропускательной способности слоев, вызванных конечной шириной аппаратной функции прибора. На примере восстановления спектра отражательной способности слоя Nb_2O_5 на стеклянной подложке продемонстрирована принципиально высокая эффективность подхода. Предложены оценочные критерии выбора оптимального числа точек в подвижном окне и оптимального порядка интерполяционного полинома для искомой функции. Уточнение этих критериев с целью получения точных количественных данных для указанных оптимальных параметров требует дополнительных исследований.

Исследование выполнено в рамках задания 1.3.03 “Разработка теории методов оптического контроля наноразмерных тонкопленочных структур” ГПНИ “Фотоника, опто- и микроэлектроника”.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Раутиан, Г. С.* Реальные спектральные приборы / Г. С. Раутиан // УФН. – 1958. – Т. LXVI. Вып. 3. – С. 475–517.
2. *Тихонов, А. Н.* Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 284 с.
3. *Woolliams, E.* Spectrometer bandwidth correction for generalized bandpass functions / E. Woolliams, R. Baribeau, A. Bialek, M. G Cox // Metrologia. – 2011. – Vol. 48, № 3. – P. 164–172.
4. *Nevas, S.* Simultaneous correction of bandpass and stray-light effects in array spectroradiometer data / S. Nevas, G. Wübbeler, A. Sperling, C. Elster, A. T. Nevas // Metrologia. – 2012. – Vol. 49, № 2. – P. 43–47.
5. *Eichstädt, S.* Comparison of the Richardson-Lucy method and a classical approach for spectrometer bandpass correction / S. Eichstädt, F. Schmähling, G Wübbeler, K. Anhalt, L. Bünger, U. Krüger, C. Elster // Metrologia. – 2013. – Vol. 50, № 2. – P. 107–118.
6. *Boivin, L.-P.* Study of bandwidth effects in monochromator-based spectral responsivity measurements / L.-P. Boivin // Applied optics. – 2002. – Vol. 41, № 10. – P. 1929–1935.

7. **Сотский, А. Б.** Теория оптических волноводных элементов / А. Б. Сотский. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2011. – 456 с.
8. **Gao, L.** Exploitation of multiple incidences spectrometric measurements for thin film reverse engineering / L. Gao, F. Lemarchand, M. Lequime // Optics Express. – 2012. – Vol. 20, № 14. – P. 15734–15751.
9. Модель Лорентц-Лоренца в обратной задаче спектрофотометрии неоднородного слоя / А. Б. Сотский [и др.] // ЖПС. – 2016. – Т. 83, № 5. – С. 809–817.

Поступила в редакцию 20.06.2018 г.

Контакты: mikheev_msu@mail.ru (Михеев Сергей Сергеевич)

Sotsky A., Miheyev S. CORRECTION OF SPECTROPHOTOMETER DATA BY THE MOVABLE WINDOW METHOD.

The authors suggest an easy implementation method to correct distortions of the reflectance or transmittance spectra caused by the finite width of the bandpass function and measured by a spectrophotometer. High efficiency of the approach is confirmed in numerical simulations.

Keywords: spectrophotometry, bandpass function, slit function, true spectrum reconstruction, reflectivity.

УДК 621.373.825

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ В НИЗКОРАЗМЕРНОМ ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ ЛАЗЕРЕ С ДВУХКОМПОНЕНТНЫМ АКТИВНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Е. В. Тимошенко

кандидат физико-математических наук, доцент, проректор по научной работе
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Ю. В. Юревич

кандидат физико-математических наук

Могилевский государственный университет продовольствия

В приближении однородного поля в активном слое теоретически проанализирована система уравнений, описывающих кинетику излучения в лазере со средой, образованной двумя компонентами – усиливающим и просветляющимся на частоте генерации. Учитывается, что низкоразмерный усиливающий элемент характеризуется свойствами плотной резонансной среды с возможностью обусловленного диполь-дипольным взаимодействием нелинейного дрейфа спектральной линии усиления. Для физических параметров полупроводниковых квантоворазмерных структур формулируются условия реализации режима самоподдерживающихся пульсаций излучения при постоянном уровне тока накачки.

Ключевые слова: самопульсации излучения, резонансная оптическая нелинейность, диполь-дипольное взаимодействие, нелинейный дрейф спектральной линии, полупроводниковая квантоворазмерная структура.

Введение

В связи с проблемой совершенствования используемых в системах обработки информации лазерных устройств пониженной размерности остаются актуальными задачи получения режимов их излучения, представляющих серии регулярных импульсов с относительно низкой средней мощностью, достаточным контрастом и возможно меньшей длительностью образующих пульсаций при оптимальной скважности. Причем эти режимы должны характеризоваться надежностью получения и гарантированной возможностью управления их характеристиками – частотой следования импульсов, скважностью, пиковой мощностью с высоким уровнем воспроизводимости.

Сочетание характеристик высвечиваемого когерентного светового поля и материальных параметров сред в полупроводниковых лазерах таково, что пикосекундные колебания интенсивности формируются уже за счет релаксационных процессов [1] при обмене энергии поля и среды усиливающего элемента (при установлении баланса – из-за различия вероятностей переходов в каналах накачки и генерации). Однако эти колебания при постоянном уровне тока накачки оказываются лишь переходными и в дальнейшем ходе энергообмена быстро затухают к установившемуся значению интенсивности – лазерная система излучает в стационарном режиме. Для поддержания неустойчивости излучения в виде регулярной временной структуры необходимо модуляция тока накачки либо модуляция в системе обратной связи с использованием

© Тимошенко Е. В., 2019

© Юревич Ю. В., 2019

внешних элементов, усложняющих схему лазера, и, нередко, снижающих надежность его функционирования.

Не нарушающая компактности схема модуляции в системе обратной связи лазера может быть реализована в варианте двухкомпонентного активного элемента, содержащего одну часть в виде инвертируемой среды, вторую, ненакачиваемую часть – в виде материала с резонансным поглощением на частоте генерации. В представленной работе проведен анализ возможности возникновения автомодуляционного осцилляционного режима в рамках решения задачи о характере устойчивости равновесных состояний кинетической модели энергообмена светового поля и накачки. Соотношения модели формулируются на основе полуклассического подхода к изучению резонансного взаимодействия излучения с веществом. Основу модели образуют нелинейные дифференциальные уравнения, которыми определяется баланс разностей населенностей в обеих частях среды.

Оригинальность модели состоит в том, что в качестве активных элементов рассматриваются тонкие слои вещества с относительно высокой концентрацией активных центров – так называемые плотные резонансные среды. При этом условия оказываются значимыми следствия диполь-дипольного взаимодействия, усиливающие степень нелинейности отклика среды на излучение [2]. Кроме того, в силу сравнительно малой толщины активного слоя в предлагаемой модели применяется допущение продольной однородности поля, что дает возможность уменьшить число степеней свободы в используемой динамической схеме взаимодействия, и это обстоятельство упрощает задачу ее качественного анализа. Известно, что нелинейно реагирующие на излучение в экситонной области спектра полупроводниковые структуры с квантоворазмерными эффектами относят к плотным резонансным средам [3]. Именно материалы этого рода сейчас активно исследуются и считаются перспективными при разработке низкоразмерных источников когерентного излучения. Поэтому при анализе возможности регулярных режимов свечения в случае двухкомпонентных сред далее использованы параметры полупроводниковых квантоворазмерных структур.

Постановка задачи

Традиционно схема с нелинейно поглощающим элементом (просветляющимся затвором) в лазерном резонаторе использовалась для формирования изолированных мощных световых импульсов. Процесс накопления энергии за счет накачки происходил при высоком уровне поглощения, задерживалось начало генерации, и в усиливающем элементе достигалась высокая инверсия. Неизбежно развивающийся в этих условиях процесс вынужденного излучения приводил к росту мощности высвечиваемого поля и насыщению поглощения. Дальнейший рост резонансного светового поля происходил в условиях сброса инверсии и “выброса” сгустка световой энергии через просветленный затвор.

При использовании полупроводниковых лазерных диодов и получении регулярных режимов излучения просветление среды в ненакачиваемой части активного элемента, очевидно, должно быть небольшим. Релаксационные колебания световой мощности обычно формируются за счет довольно незначительных вариаций инверсии вблизи величины, соответствующей равновесному значению квантовой осцилляционной системы. Соответственно, для “раскачки” равновесного состояния интенсивности, означающей формирование ее регулярной структуры, также требуются незначительные колебания нелинейного поглощения. Возможность реализации и примерный диапазон требуемых для получения регулярного режима параметров возбуждения и материальных параметров обеих частей активного элемента могут быть оценены на основе качественного

анализа устойчивости равновесных состояний математической балансной модели взаимодействия среды и поля. Дальнейший анализ задачи в форме моделирования целесообразно проводить в той зоне сочетаний параметров и характеристик системы, где равновесные состояния могут оказаться неустойчивыми. Неустойчивость в рассматриваемой физической ситуации не приводит к неконтролируемому развитию событий и деструкции системы из-за неизбежного насыщения. Возможность неустойчивости и условия ее существования в расчетном плане доказываются условиями неустойчивости равновесных состояний.

Переменные неустойчивой (в данной мере) динамической системы, которую представляет собой лазер, должны совершать осцилляции в ограниченной области фазового пространства. Результатами численного интегрирования системы уравнений для начальных условий переменных из этой области описывается временная картина излучения.

Физическая схема при постановке задачи основывается на том, что активный элемент включает два примыкающих один к другому тонких слоя резонансных сред – инверсного и нелинейно поглощающего. Задача об усилении света с одновременным преобразованием временной структуры при его поглощении в нелинейной среде может быть решена в представлении о тонкой планарной пленке, образованной элементарными резонансными диполями. В случае особо тонкого слоя в отраженном и действующем внутри слоя излучении значительны составляющие, обусловленные так называемыми сверхизлучательными компонентами резонансной поляризации [4–6]. Ими образованы дополнительные к величинам нерезонансного показателя преломления и френелева коэффициента отражения динамические резонансные добавки, зависящие от переменных отклика и, следовательно, от интенсивности, которые способны модулировать действующее световое поле. За счет сверхизлучательных добавок в двухслойной системе формируется обратная связь – оказываются “сцепленными” и взаимозависимыми световые поля в обеих частях активного элемента. При различии характерных времен релаксации и сечений переходов между активными уровнями колебания населенности в обеих частях лазерной схемы могут оказаться несфазированными и войти в режим автоколебаний, которые должны проявиться и в поле вынужденного излучения. Процесс формирования выходного излучения рассматривается в данной постановке задачи о низкоразмерном элементе с однородным полем именно как динамика сверхизлучательного компонента вблизи поверхности усиливающего слоя. Вклад сверхизлучательных компонентов в нелинейность отклика среды, проявляющуюся на частоте резонанса, особенно значителен в полупроводниковых структурах с квантоворазмерными эффектами [7; 8].

В экситонной области спектра вероятность вынужденных переходов и резонансной реакции на когерентное световое поле там особо велика [9; 10] – настолько, что эти материалы обычно приводят как пример плотных резонансных сред со свойством нелинейного частотного дрейфа резонансной спектральной линии, обусловленного взаимным влиянием ближних полей диполей [11; 12]. Вызванная смещением такого рода фазовая нелинейность резонансного отклика наряду с насыщением усиления и нелинейным поглощением при различии в их динамике может быть фактором самопроизвольной временной модуляции поля, формируемого в двухкомпонентной планарной структуре [13; 14]. Условия существования этой модуляции и ее следствия и представляют предмет анализа предлагаемой в работе кинетической модели низкоразмерного источника когерентного излучения.

Основные уравнения

При формулировке основных уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие светового поля со структурой тонких слоев, будем исходить из того, что хотя концентрация активных диполей относительно высока, расстояние между ними в средах обоих слоев предполагается достаточным, чтобы избежать перекрытия их электронных орбиталей. В этом допущении можно придерживаться традиционного описания взаимодействия атомарных диполей в квантоворазмерной структуре [3]. Применение квантовой резонансной модели взаимодействия, которая включает уравнения Блоха для электрических моментов двухуровневых атомов, при анализе динамических явлений в используемых в оптике и лазерной физике полупроводниках детально обосновано, например, в [15].

В приближении особо тонкого слоя плосковолновые световые поля, действующие в обеих средах, считаются однородными. В этом же приближении для записи соотношений полей возможно применение граничных электродинамических условий. Тогда связь между напряженностями поля E_1 в инверсной среде и поля E_2 , действующего на активные центры в поглощающей среде, а также плотностями вероятности резонансной поляризованности ρ_1 и ρ_2 , может быть выражена алгебраическими соотношениями [4] (в дальнейшем индексы 1, 2 следует относить к инверсной и поглощающей части рассматриваемой двухслойной схемы).

В этой постановке в данной задаче существует определенная аналогия, например, с работой [16], где в рамках балансно-вероятностной модели анализировалась кинетика лазера на основе активного слоя с двумя квантовыми ямами. К тематике автоколебаний, достигаемых в двухкомпонентной схеме тонких слоев с нелинейностью рефракции и различием релаксационных параметров, авторы обращались, в основном, в связи с решением задач выявления светомодуляционных свойств низкоразмерных оптических систем при действии внешнего когерентного поля [13; 14; 17–19].

В качестве исходной для записи материальных уравнений, описывающих реакцию на световое поле схемы из двух тонких полупроводниковых пленок, далее рассмотрена система оптических уравнений Блоха для плотности комплексной поляризованности ρ и вероятности разности населенностей уровней резонансного перехода n . Для нормированных квазистационарных полей $e_{1,2} = \mu_1 T_{21} E_{1,2} / \hbar$, переменных величин вероятности поляризованности $\rho_{1,2}$, показателей усиления ($N_1 = \kappa_1 n_1$) и поглощения ($N_2 = \kappa_2 n_2$) может быть сформулирована такая система уравнений:

$$\begin{aligned} e_1 &= e_i + \kappa_1 \rho_1 - \sigma \kappa_2 \rho_2, \quad e_2 = (e_i + \kappa_1 \rho_1) / \sigma - \kappa_2 \rho_2, \quad u = |\kappa_1 \rho_1|^2 T_{11} / T_{21}, \\ T_{21} \frac{d\rho_1}{dt} &= N_1 (e_i + \sigma \rho_2) - (1 - N_1)(1 - i\gamma) \rho_1, \quad T_{22} \frac{d\rho_2}{dt} = -N_2 (\sigma e_i + \rho_1) - \sigma (1 + N_2) \rho_1, \\ \frac{dN_1}{dt} &= \frac{\alpha - N_1}{T_{11}} - \frac{\kappa_1}{2} (\rho_1 e_1^* + \rho_1^* e_1), \quad \frac{dN_2}{dt} = \frac{\kappa_2 - N_2}{T_{12}} - \frac{\kappa_2}{2} (\rho_2 e_2^* + \rho_2^* e_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где e_i – нормированная величина инициирующего поля, возникающего на соответствующей резонансной частоте из поля люминесценции в среде инверсного слоя;

κ_1, κ_2 – ненасыщенные значения показателей усиления и поглощения;

$\sigma = \mu T_{22} / \mu T_{21}$ – отношение сечений перехода в обеих средах (μ_1, μ_2 – средние значения электрических моментов активных диполей, определяющие вероятность резонансных переходов),

T_{11}, T_{12} и T_{21}, T_{22} – соответственно времена продольной релаксации (спонтанной рекомбинации) и фазовой (поперечной) релаксации активных центров в средах слоев,

α – нормированный по пороговому уровню параметр накачки.

Влияние диполь-дипольного взаимодействия в системе (1) учитывается при допущении локальной (лорентцовой) поправки к действующему в инверсной среде полю. Ее учет означает возможность перестройки резонанса усиления (дрейфа центральной частоты линии усиления), определяемой резонансной вариацией инверсии. Нормированный коэффициент γ в компоненте, возникающем при введении лорентцовой поправки, в уравнении для ρ_1 из системы (1) получается зависимым от отношения длины волны и толщины слоя. При записи граничных условий, приводящих к формулировке соотношений для поля и поверхностной поляризованности, нерезонансное отражение на границе раздела образующих двухслойную систему сред считалось пренебрежимо малым. Мощность выходного излучения u рассчитывается по величине сверхизлучательного компонента светового поля в инверсном слое и масштабирована по уровню характерной мощности, насыщающей усиление.

Уравнениями системы (1) описывается динамика светового поля в двухслойной активной схеме пониженной размерности с учетом времени реакции фаз резонансных диполей на излучение – времени фазовой релаксации. При этом кроме накачки и насыщения разности населенностей переходов (просветления поглощающей части схемы) рассматриваются следствия нелинейного дрейфа частоты резонанса, безынерционного по отношению к вариациям населенности при развитии насыщения, то есть способного проявляться за время осцилляций интенсивности вынужденного излучения.

Конечность времени фазовой релаксации предполагает учет динамики факторов однородного уширения спектральной линии. Дополнительно к этому влияние ближних полей диполей в схеме с повышенной их концентрацией или значительными величинами электрического момента приводит к автомодуляционному уширению линии [5]. Далее в наших оценках будет учитываться только это уширение. Учет динамики поляризации активных сред, выраженной в ее инерционности, можно исключить из рассмотрения, считая ее безынерционной по отношению к действующим на активные центры в обеих пленках полям E_1 и E_2 . Это считается допустимым при анализе развивающихся в полупроводниковых материалах осцилляций интенсивности с наносекундным периодом [20], соответствующим времени спонтанной рекомбинации – времена же фазовой релаксации там имеют пикосекундную длительность.

Подобное предположение об адиабатическом характере изменения резонансной поляризации позволяет из уравнений для поляризационного отклика в системе (1) получить следующие приближенные квазиравновесные значения поляризованностей ρ_{1s} и ρ_{2s} :

$$\rho_{1s} = \frac{(1+i\gamma)(1+N_2)}{(1+\gamma^2)(1-N_1)} N_1 e_i, \quad \rho_{2s} = \frac{\sigma N_1}{1+N_2} N_2 e_i. \quad (2)$$

Замена переменных ρ_1 и ρ_2 в системе (1) на квазиравновесные значения (2) приводит к адиабатическому исключению поляризации из схемы анализа осцилляторного режима. С учетом масштабирования переменной времени $\tau = t/T_{11}$ можно записать систему кинетических уравнений для эволюции резонансных показателей усиления и поглощения:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{d\tau} &= \alpha - N_1 - \frac{\kappa_1}{1+\gamma^2} \left[\frac{(\sigma-1)N_2-1}{(1-N_1)(1+N_2)} \right]^2 N_1 e_i^2, \\ \frac{dN_2}{d\tau} &= \frac{\kappa_2 - N_2}{\tau_{12}} - \kappa_2 \frac{(\sigma-1)N_2-1}{(1+N_2)^2} \left(\sigma + \frac{1}{1+\gamma^2} \frac{N_1}{1-N_1} \right) N_2 e_i^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau_{12} = T_{12}/T_{11}$. На основе схемы расчета (2) можно анализировать энергообмен полей и резонансных сред в обеих частях двухкомпонентного активного элемента при допущении продольно-однородного поля. Расчет нормированной мощности подобной лазерной схемы возможен, исходя из соответствующих выражений в соотношениях (1) и (2). Ввиду снижения степеней свободы нелинейной системы (3) по сравнению со схемами, учитывающими инерционность поляризованного отклика среды по отношению к полю излучения, моделирование кинетики излучательных процессов на основе данной схемы, поиск возможности и условий развития автоколебательных режимов значительно упрощен.

Качественный анализ устойчивости

Система (3) допускает возможность качественного изучения устойчивости ее равновесных состояний (особых точек N_{1s} , N_{2s}) при условии уровня тока накачки и инициирующего поля спонтанной люминесценции, неизменных в ходе процесса вынужденного излучения (параметры α и e_i постоянны). Формально выражения для расчета зависимости равновесных состояний N_{1s} , N_{2s} от уровня тока накачки и характеристик среды определяются из нелинейной алгебраической системы, образованной сингулярными пределами уравнений (3):

$$\alpha = \frac{F}{1+F} + \kappa_1 \frac{1+F}{1+\gamma^2} F^2 \left(\frac{\sigma N_{2s}}{1+N_{2s}} \right)^2 e_i^2, \quad N_{1s} = \frac{F}{1+F}, \quad (4)$$

$$F = (1+\gamma^2) \left\{ \frac{(\kappa_2 - N_{2s})(1+N_{2s})^2}{\kappa_2 \tau_{12} [(\sigma - 1)N_{2s} - 1] N_{2s} e_i^2} - \sigma \right\}.$$

Точное аналитическое решение системы уравнений (4) для определения зависимостей равновесных состояний от коэффициентов (1) или (3) (физических параметров модели) ввиду высоких степеней неизвестных N_{1s} , N_{2s} невозможно. Запись первого, а также второго, из выражений (4), однако, представляется удобной для того, чтобы, зная физические пределы изменения величины N_{2s} ($0 < N_{2s} < \kappa_2$), параметрическим расчетом выстроить зависимости N_{1s} , N_{2s} от главного, изменяемого в реальных условиях, физического параметра тока накачки α . Поведение этих зависимостей позволит далее оценить область устойчивости (или неустойчивости) равновесных состояний системы (3) на шкале α .

Изучение устойчивости стационарных состояний основывается на линеаризации системы (3) в окрестности особых точек (N_{1s} , N_{2s}). Решения линеаризованного аналога в относительно малой окрестности (N_{1s} , N_{2s}) представляются экспонентами вида $e^{\chi t}$ ($\beta\tau$) с комплексными (в общем случае) коэффициентами в показателе. Отрицательные значения коэффициента β или его вещественной части при данных сочетаниях коэффициентов (1) или (3) соответствуют устойчивости состояния, определяемого N_{1s} и N_{2s} . Величина β определяется корнями характеристического уравнения линеаризованной системы

$$\Phi(\beta) = \beta^2 - 2\chi\beta + \eta = 0.$$

Коэффициенты уравнения выражаются непосредственно через значения N_{1s} и N_{2s} , рассчитываемые из соотношений (4), а также через коэффициенты системы (3)

$$\chi = \frac{1}{2}(P - R), \quad \eta = \frac{2\kappa_1\kappa_2 e_i^4}{(1+\gamma^2)^2} \frac{[(\sigma - 1)N_{2s} - 1]^3}{(1 - N_{1s})^4 (1 + N_{2s})^4} N_{1s} N_{2s} - PR, \quad (5)$$

где $P = \frac{2\kappa_1 e_i^2 [(\sigma-1)N_{2S}-1]^2 N_{1S}}{1+\gamma^2 (1-N_{1S})^3 (1+N_{2S})^2} \left[1 + \frac{(\sigma-1)(1-N_{1S})}{(\sigma-1)N_{2S}-1} \right] + \frac{\alpha}{N_{1S}},$

$$R = 2\kappa_2 \frac{[(\sigma-1)N_{2S}-1] e_i^2}{(1+N_{2S})^3} \left(\sigma + \frac{1}{1+\gamma^2} \frac{N_{1S}}{1-N_{1S}} \right) N_{2S} - \frac{\kappa_2}{N_{2S}\tau_{12}}.$$

Существование пары комплексно-сопряженных корней $\beta_{1,2} = -\chi \pm i \sqrt{-D}$ (D – дискриминант полинома $\Phi(\beta)$) с положительной действительной частью указывает на возможность неустойчивости, соответствующей гармоническим решениям линеаризованной системы с частотой $\omega = \sqrt{\eta - \chi^2}$:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\kappa_1 \kappa_2 e_i^4 [(\sigma-1)N_{2S}-1]^3 N_{1S} N_{2S}}{(1+\gamma^2)^2 (1-N_{1S})^4 (1+N_{2S})^4} - \frac{1}{4}(P+R)^2}. \quad (6)$$

Особая точка, характеризующая равновесное состояние, тогда представляет собой неустойчивый фокус. Уже, однако, отмечено – балансные уравнения для населенностей типа системы (3) таковы, что учитываемая в них нелинейность, описывает насыщение амплитуды переменных, поэтому неустойчивое нарастание функций $N_1(\tau)$ и $N_2(\tau)$ после выхода из окрестности (N_{1S}, N_{2S}) неизбежно ограничено. Фазовые траектории решений в пространстве переменных, которые соответствуют осциллирующим во времени зависимостям $N_1(\tau)$ и $N_2(\tau)$, тогда могут выходить на предельный цикл; сами же решения будут описывать периодическую зависимость выходной мощности u .

Область возможных осцилляторных решений (2) может быть также установлена параметрическим расчетом (4)–(6). Процедура параметрического расчета дает возможность построения нелинейной зависимости $\chi = \text{Re}\beta$ и частоты Ω на шкале α . Неустойчивым осцилляторным решениям, которые могут проявляться при условиях $D < 0$ и $\chi \geq 0$, должно соответствовать формирование регулярной автомодуляционной составляющей в интенсивности отраженного излучения. Примеры кривых $\text{Re}\beta(\alpha)$, $D(\alpha)$, для подобных случаев при различных величинах параметра поглощения κ_2 приведены на рисунке 1.

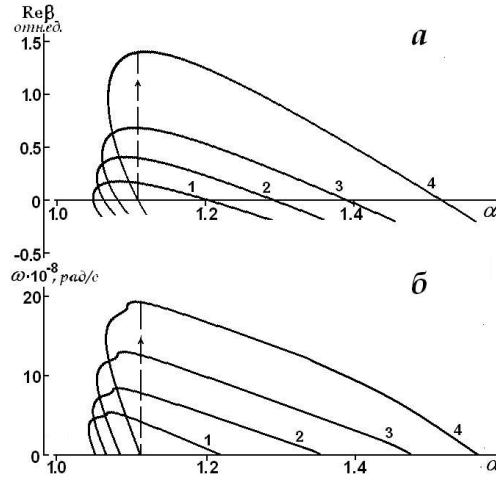


Рисунок 1 – Зависимости действительной части характеристического уравнения (а) и частоты колебаний в окрестности равновесного состояния (б) от уровня тока накачки α (пунктиром для кривой 4 указано направление бистабильного скачка): $\kappa_2 = 1.0$ (кривые 1), 1.3 (2), 1.5 (3), 2.0 (4), $\kappa_1 = 1.0$, $\tau_{12} = 20$, $\sigma = 10$, $\gamma = 1.58$, $T_{11} = 5.0 \cdot 10^{-9}$ с, $T_{21} = T_{22} = 1.0 \cdot 10^{-12}$ с.

Анализ данных от многократных расчетов, подобных тем, результаты которых продемонстрированы на рисунке 1, позволил сделать следующие выводы. Решения, описывающие осцилляторный режим, существуют в ограниченном диапазоне значений накачки, который определяется расчетом (4) – (6) и частично включает область бистабильности (неоднозначности) зависимостей $N_{1S}(\alpha)$, $N_{2S}(\alpha)$, соответственно, и зависимостей $\chi(\alpha)$, $\omega(\alpha)$ (рис. 1, а). Бистабильность отклика тонкого слоя используемых в оптике полупроводников на резонансное излучение довольно известное и исследованное явление [21; 22]. В рассматриваемом случае бистабильность означает, что переход к решениям с осцилляторной характерностью при увеличении α и достижении порогового по неустойчивости уровня α должен происходить скачком (направление бистабильных скачков на рисунке 1 указано только для кривых 4). Начиная с этого значения α (его именуют *вторым порогом генерации*), состояние N_{1S}, N_{2S} системы (3) характеризуется как неустойчивый фокус. Частота модуляции, которая характеризует осцилляторные решения линеаризованного аналога системы (3), при этом близка к максимальной и по мере увеличения α снижается (рис. 1, б). При достижении второго критического состояния (когда кривые $\chi(\alpha)$ вновь пересекают горизонтальную ось) и при дальнейшем нарастании α особая точка N_{1S}, N_{2S} в некоторой области значений представляет собой устойчивый фокус, все еще определяя осцилляторный, но переходный, характер решений в своей окрестности, затем принимает свойства устойчивого узла.

Поиск и определение условий неустойчивости на основе расчета соотношений, вообще, представляют самостоятельную, разрешимую в рамках теории бифуркаций задачу, но довольно сложны из-за множества параметров, определяющих релаксационные и нелинейные характеристики реакции сред, а также фазовые соотношения световых полей, действующих в слоях квантоворазмерных структур. Поэтому просто отметим, что возможность неустойчивого поведения светового потока, излучаемого в системе двух резонансных слоев, и соответствующая регулярная структура в лазерном световом поле проявляются для $\gamma \neq 0$ в условиях различия некоторых релаксационных параметров. Значимыми с этой точки зрения выступают времена продольной релаксации T_{11} и T_{21} , а также сечения переходов (их соотношение характеризуется параметром σ). Параметры T_{11} и T_{21} характеризуют обратимость населенностей при снижении мощности генерации, сечения переходов – вероятность вынужденных процессов излучения или поглощения.

Расчетные оценки показали, что поглощающая среда, во-первых, должна быть менее инерционной по отношению к изменению мощности поля, во-вторых, с большей скоростью релаксировать к состоянию при низком возбуждении (в условиях снижения интенсивности вынужденного излучения в усиливающем слое). Соответствующие параметры слоев должны различаться на порядок и более, поэтому значения τ_{12} и σ в приведенных расчетах превышали при прочих параметрах величину 10. Порог неустойчивости по уровню накачки (проявление второго порога генерации), судя по примерам расчета, иллюстрированным на рисунке 1, зависит от уровня ненасыщенного поглощения κ_2 в модулирующем добротность элементе схемы. Для достаточного и оптимального просветления более плотного слоя (со значительной величиной κ_2) требуется большая мощность вынужденного излучения и, соответственно, более высокая скорость накачки. Важным в отношении возможности возникновения неустойчивости и осцилляций фактором является также влияние диполь-дипольного взаимодействия. При отсутствии его учета в уравнениях (3) – (5), т. е. при $\gamma = 0$, область неустойчивости в пределах значений параметров (1), (3), перекрывающихся с реальными, не обнаруживается.

Численное моделирование

В оценке значений коэффициентов при параметрическом расчете (4) - (6), а также при моделировании кинетики излучения на основе интегрирования (3), представлялось целесообразным исходить из тех оценок, которые известны, например, из работ [18; 19; 23], где исследованы квантоворазмерные структуры на основе *InGaAs/GaAs* или *GaInAsSb*. Масштаб моделируемого явления по уровню мощности соответствовал вынужденному излучению с интенсивностью порядка мощности насыщения в подобных средах ($\sim 10^5$ Вт/см²) в экситонной области спектра (длина волны в пределах $1.25 \dots 1.30 \cdot 10^{-6}$ м); величина μ взята в диапазоне $(8 \dots 10) \cdot 10^{-29}$ Кл·м, время спонтанной рекомбинации порядка $0.5 \dots 10 \cdot 10^{-9}$ с. Разность релаксационных и нелинейных параметров пленок лежит в тех пределах, которые определяются обычным разбросом соответствующих величин в их экспериментальных измерениях [24].

Использование результатов качественной оценки устойчивости равновесных состояний в ходе численного моделирования процесса формирования генерации дало возможность выявить довольно различающиеся сценарии динамического поведения интенсивности вынужденного излучения. Численное интегрирование исходной системы уравнений (3) проводилось методом Рунге – Кутты для начальных условий, соответствующих достижению порогового условия генерации в усиливающем слое при ненасыщенном поглощении в ненакачиваемом слое схемы. Излучение развивалось из спонтанного поля люминесценции – вклад инициирующего поля e_i в действующее поле в усиливающем слое принципиален. Именно из него “стартует” излучение генерации, но по соответствующей мощности это поле пренебрежимо мало в сравнении со средней мощностью вынужденного излучения. Значения e_i взяты в соответствии с оценками [25] и избраны такими, что их величина не влияет на устойчивость системы (3).

Вид решений для нормированной интенсивности $u(t)$ в наносекундном масштабе для материальных параметров, совпадающих с теми, что использованы в вариантах рисунка 1 для расчета кривых, пронумерованных цифрой 3, представлен на рисунке 2. Варианты рисунка 2 различаются значениями α , которые соответствуют равновесным состояниям N_{1s} и N_{2s} с качественно разной устойчивостью. Для наглядности графическое изображение решений, описывающих автомодуляционный режим (рис, 2, $v - d$), дополнено разверткой $u(t)$ с большим разрешением (рис, 2, $v' - d'$) и иллюстрацией фазового портрета решений (рис, 2, $v'' - d''$).

На фрагментах *a* и *b* рисунка 2 зависимость $u(t)$ проявляет экспоненциальный спад интенсивности до ее устойчивого значения. Величина параметра α лежит вне пределов области устойчивости, для варианта *b* осцилляторный характер при затухании колебаний более выражен, параметр обуславливает в этом случае устойчивость особой точки по типу фокуса. Рисунки 2, $v - d$ демонстрируют автоколебательный режим модели взаимодействия (3), определяемый неустойчивостью процесса энергообмена световых полей со средами структуры и представляющий автомодуляцию излучения. Модуляционной составляющей $u(t)$ присущ в целом относительно высокий контраст, определенным образом связанный с частотой модуляции. Переходу к установившейся регулярной структуре в интенсивности предшествует этап “разгорания” – последовательность всплесков с нарастающей амплитудой колебаний. Выход на режим автоколебаний соответствует неустойчивости N_{1s} и N_{2s} по типу неустойчивого фокуса, фазовые кривые на рисунках 2, $v'' - d''$ устремляются к предельному циклу. Можно отметить, что частота автомодуляционной структуры интенсивности в зависимости от параметра α в пределах зоны неустойчивости неодинакова (рис. 2, $v' - d'$), что качественно соответствует ходу кривых $\omega(\alpha)$ на рисунке 2.

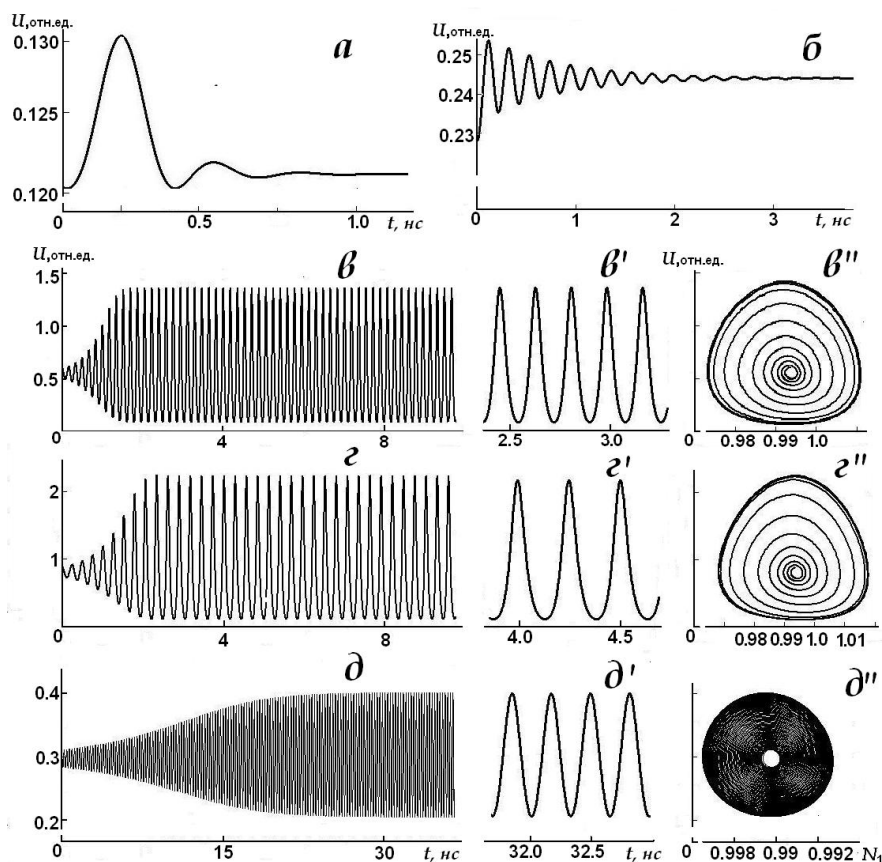


Рисунок 2 – Временная зависимость нормированной интенсивности u для устойчивых ($a, б$) и неустойчивых ($в - д$) режимов излучения, фрагменты ($в' - д'$) – зависимость $u(t)$ с большим разрешением, ($в'' - д''$) – фазовые кривые в плоскости (N_1, u) : $\alpha = 1.06$ (a), 1.4 ($б$), 1.15 ($в$), 1.25 ($з$), 1.35 ($д$); $\kappa_1 = 1.0$, $\kappa_2 = 1.5$, $\tau_{j2} = 20$, $\sigma = 10$, $\gamma = 1.58$, $T_{11} = 5.0 \cdot 10^{-9}$ с, $T_{21} = T_{22} = 1.0 \cdot 10^{-12}$ с.

Заключение

С применением качественного анализа устойчивости динамических систем и численного моделирования предложенной кинетической модели взаимодействия плосковолнового когерентного поля и двухуровневой активной среды исследована возможность достижения автоколебательного режима в компактном лазерном устройстве, состоящем из двух тонких полупроводниковых слоев, рассматриваемых как плотные резонансные среды. Уравнения для такой системы, записанные для сверхтонкого слоя, и с адиабатически исключенной поляризуемостью нелинейной среды учитывают влияние ближних полей диполей на диэлектрическую проницаемость. С этим влиянием связано смещение частоты резонанса, происходящее за время формирования импульса, и возможность проявления бистабильности в пропускании и отражении слоев.

В дополнение к резонансной нелинейности, которая выражена в возможности насыщения поглощения и усиления, с разной скоростью и вероятностью происходящего в обеих средах, бистабильность, проявляющаяся в резком переключении в схеме лазерной обратной связи, также оказывается причиной раскачки стационарных состояний устройства, излучающего когерентное световое поле.

Эффект развития неустойчивости в виде регулярной модуляции светового поля в двухкомпонентной схеме лазера можно использовать для формирования временной структуры излучения без применения синхронизированных с накачкой внешних устройств или для разработки приемов диагностики физических свойств тонких пленок.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Ораевский, А. Н.** Динамика ПЛ и “метки времени” / А. Н. Ораевский // Квантовая электроника. – 2003. – Т. 33, № 6. – С. 847–855.
2. **Boyd, R. W.** Local field effects in enhancing the nonlinear susceptibility of optical materials / R. W. Boyd, J. J. Maki, J. E. Sipeb // Nonlinear Optics: Fundamentals, Materials and Devices. – 1992. – P. 63–76.
3. **Каплан, А. Е.** Поведение локальных полей в нанорешетках из сильно взаимодействующих атомов: наностраты, гигантские резонансы, “магические” числа и оптическая бистабильность / А. Е. Каплан, С. Н. Волков // УФН. – 2009. – Т. 179, вып. 5. – С. 539–547.
4. **Юдсон, В. И.** Нелинейная резонансная оптика тонких пленок: метод обратной задачи / В. И. Юдсон, В. И. Рупасов // ЖЭТФ. – 1987. – Т. 93. – С. 494–501.
5. **Гадомский, О. Н.** Эффект ближнего поля в сверхтонкой пленке резонансных атомов / О. Н. Гадомский, С. В. Сухов // Квантовая электроника. – 1998. – Т. 25, № 6. – С. 529–534.
6. Reflection and transmission of ultrashort light pulses through a thin resonant medium: Local-field effects / M. Benedict [et al.] // Phys. Rev. A. – 1991. – Vol. 43, No 7. – P. 3845–3853.
7. **Леонов, М. Ю.** Нестационарное межзонное поглощение света квантовыми точками: невырожденный случай спектроскопии, накачка, зондирование / М. Ю. Леонов, А. В. Баранов, А. В. Федоров // Оптика и спектроскопия. – 2011. – Т. 110, № 3. – С. 28–35.
8. Effect of Excited-State Transitions on the Threshold Characteristics of a Quantum Dot Laser / L. V. Asryan [et al.] // IEEE J. of Quant. Electron. – 2001. – Vol. 37, № 3. – P. 418–425.
9. **Schneider, S.** Self-induced transparency in InGaAs quantum-dot waveguides / S. Schneider [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2003. – Vol. 83, № 18. – P. 3668–3670.
10. Rabi oscillations in a semiconductor quantum dot: Influence of local fields / G. Ya. Slepyan [et al.] // Phys. Rev. B. – 2004. – Vol. 70, № 4. – P. 045320-1-045320-5.
11. **Paspalakis, E.** Local field effects in excitonic population transfer in a driven quantum dot system / E. Paspalakis, A. Kalini, A. F. Terzis // Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 73, № 7. – P. 073305-1-073305-4.
12. Формирование сверхизлучения в наногетероструктурах с квантовыми точками / А. В. Савельев [и др.] // ФТП. – 2008. – Т. 42, вып. 6. – С. 730–735.
13. **Редько, В. П.** Автомодаляция лазерного излучения, отраженного от двухслойной резонансной среды / В. П. Редько, А. В. Хомченко, В. А. Юревич // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 1. – С. 57–61.
14. **Glasunova, E. V.** Self-induced instability of radiation in thin-film planar structure / E. V. Glasunova (Timoschenko), A. V. Khomchenko, V. A. Yurevich // Proc. SPIE. – 2006. – Vol. 6259. – P. 62590Y-1– 62590Y-10.
15. **Haug, H.** Quantum theory of the optical and electronic properties of semiconductors / H. Haug, S. W. Koch. – Singapore : World Scientific, 1994. – 492 p.
16. **Афоненко, А. А.** Режим регулярных пульсаций в лазерах с двумя квантовыми ямами / А. А. Афоненко, В. К. Кононенко, И. С. Манак // Письма в ЖТФ. – 1994. – Т. 20, № 2. – С. 57–61.
17. **Бабушкин, И. В.** Влияние α -фактора на динамику двухслойной полупроводниковой структуры / И. В. Бабушкин, П. В. Павлов, Н. А. Лойко // Квант. электрон. – 2004. – Т. 34, № 4. – С. 355–360.
18. **Paulau, P. V.** Self-sustained pulsations of light in nonlinear thin-film system / P. V. Paulau, N. A. Loiko // Phys. Rev. A. – 2005. – Vol. 72, № 1. – P. 013819-1– 013819-8.
19. **Юревич, Ю. В.** Неустойчивость излучения, отраженного двуслойной пленочной структурой / Ю. В. Юревич, В. Л. Титов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2015. – № 2(46). – С. 53–62.
20. **Ханин, Я. И.** Основы динамики лазеров / Я. И. Ханнин. – М. : Наука, 1999. – 368 с.

21. *Хаджи, П. И.* Особенности стационарного пропускания (отражения) тонкой пленки полупроводника с экситонной областью спектра / П. И. Хаджи, С. Л. Гайван // Квант. электрон. – 1997. – Т. 24, № 4. – С. 546–550.
22. *Глазунова, Е. В.* Бистабильность мощности излучения лазера с нелинейным тонкопленочным элементом / Е. В. Глазунова (Тимошенко), Д. М. Шилко // Весці НАН Беларусі, серыя фіз.-мат. нав. – 2005. – № 5. – С. 45–48.
23. *Жуков, А. Е.* Полупроводниковые лазеры на основе квантовых точек для систем оптической связи / А. Е. Жуков, А. Р. Ковш // Квант. электрон. – 2008. – Т. 38, № 5. – С. 409–422.
24. *Khomchenko, A. V.* Waveguide spectroscopy of thin films / A. V. Khomchenko // NY: Academic Press, 2005. – 220 p.
25. *Морозов, Ю. А.* Влияние спонтанных флуктуаций носителей тока и фотонов на динамику инжекционного лазера в режиме генерации пикосекундных импульсов / Ю. А. Морозов, А. В. Красовский // Квант. электрон. – 1994. – Т. 21, № 8. – С. 748–752.

Поступила в редакцию 03.06.2019 г.

Контакты: e-mail: timoshchenko@msu.by (Тимошенко Елена Валерьевна)

Timoshchenko E., Yurevich Yu. LASING DYNAMICS MODELLING FOR LOW-DIMENSIONAL SEMICONDUCTOR LASER WITH TWO-COMPONENT ACTIVE ELEMENT.

In the uniform light field approximation for the active layer, an equation system describing the lasing kinetics in a laser with a medium formed by two low-dimensional components – gain and bleaching at the generation frequency – is theoretically analyzed. It is taken into account that a gain element is characterized by the properties of a dense resonant medium with the possibility of the gain spectral line nonlinear drift caused by the dipole-dipole interaction. For the physical parameters of semiconductor quantum-dimensional structures, the conditions for the realization of self-sustaining pulsation output mode with a constant pump current level are formulated.

Keywords: lasing self-pulsations, resonant optical nonlinearity, dipole-dipole interaction, nonlinear drift of the spectral line, semiconductor quantum-dimensional structure.

УДК 539.4

МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ В СИСТЕМЕ “ОСТАТОЧНЫЙ КЛИНОВИДНЫЙ ДВОЙНИК – ТРЕЩИНА”

О. М. Остриков

кандидат физико-математических наук, доцент

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

Разработана методика расчета полей напряжений в системе “остаточный клиновидный двойник – трещина” в случае, когда двойник и трещина находятся вдали от поверхности кристалла. Рассчитаны поля напряжений в рассматриваемой системе для трех типов трещин: нормального отрыва, поперечного и антиплоского сдвигов. Показано, что остаточный клиновидный двойник оказывает существенное влияние на распределение полей напряжений у трещины.

Ключевые слова: остаточный клиновидный двойник, трещина нормального отрыва, поперечного и антиплоского сдвига.

Введение

Механическое двойникование часто выступает причиной зарождения разрушения [1–4]. Это связано с тем, что двойниковые границы являются концентраторами больших внутренних напряжений [5–7]. При затрудненном скольжении двойникование может выступать и в качестве релаксатора напряжений у трещин, препятствуя их развитию [1]. Поэтому при определенных условиях деформирования двойникование может рассматриваться, как ресурс пластичности материала [1; 8; 9], что также важно с практической точки зрения [1]. Таким образом, ставшее целью данной работы изучение напряженного состояния в системе “остаточный клиновидный двойник – трещина” является важной практической задачей.

Постановка задачи

Различают три типа трещин [10; 11]: нормального отрыва (тип I), поперечного сдвига (тип II) и продольного (антиплоского) сдвига (тип III). Согласно дислокационной теории трещин поля напряжений, обусловленных каждым типом трещин, могут быть рассчитаны по формулам [11]:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-\zeta)[(x-\zeta)^2 - y^2]}{[(x-\zeta)^2 + y^2]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}^{\infty} + \frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-\zeta)[(x-\zeta)^2 + 3y^2]}{[(x-\zeta)^2 + y^2]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{xy} &= \frac{\sigma_{yy}^{\infty} y}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-\zeta)^2 - y^2}{[(x-\zeta)^2 + y^2]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta\end{aligned}\quad (1)$$

для трещины нормального отрыва;

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{\sigma_{xy}^{\infty} y}{\pi} \int_{-l}^l \frac{3(x-\zeta)^2 - y^2}{[(x-\zeta)^2 + y^2]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{yy} &= \frac{\sigma_{xy}^{\infty} y}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-\zeta)^2 - y^2}{[(x-\zeta)^2 + y^2]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}^{\infty} + \frac{\sigma_{xy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-\zeta)[(x-\zeta)^2 - y^2]}{[(x-\zeta)^2 + y^2]^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta\end{aligned}\quad (2)$$

для трещины поперечного сдвига;

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= -\frac{\sigma_{yz}^{\infty} y}{\pi} \int_{-l}^l \frac{1}{(x-\zeta)^2 + y^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{yz}^{\infty} + \frac{\sigma_{yz}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{x-\zeta}{(x-\zeta)^2 + y^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta\end{aligned}\quad (3)$$

для трещины антиплоского сдвига, где σ_{yy}^{∞} – нормальные и σ_{xy}^{∞} , σ_{yz}^{∞} – сдвиговые напряжения на бесконечно удаленных поверхностях; l – половина длины трещины; ζ – параметр интегрирования.

На рисунке 1 схематически представлена система “остаточный клиновидный двойник – трещина” вдали от поверхности кристалла. Координаты центра трещины обозначим (x_c, y_c) . На бесконечно удаленных поверхностях кристалла действуют напряжения σ_{yy}^{∞} , σ_{xy}^{∞} и σ_{yz}^{∞} .

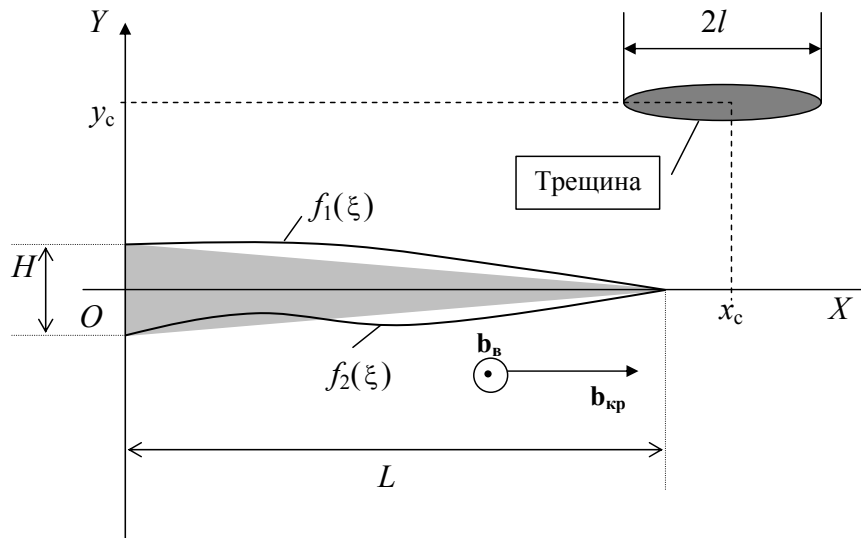


Рисунок 1 – Схематическое изображение остаточного механического клиновидного двойника и трещины вдали от поверхности

Пусть величина этих напряжений такова, что двойникоующие дислокации остаются неподвижными. Это возможно, когда сила внутреннего трения, обусловленная полными и сидячими дислокациями, достаточно велика. Напряжений, создаваемых трещиной, можно определить по получаемым из (1) – (3) формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{cr} &= \frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{((x-x_c)-\zeta)[((x-x_c)-\zeta)^2 - (y-y_c)^2]}{[(x-x_c)-\zeta]^2 + (y-y_c)^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{yy}^{cr} &= \sigma_{yy}^{\infty} + \frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{((x-x_c)-\zeta)[((x-x_c)-\zeta)^2 + 3(y-y_c)^2]}{[(x-x_c)-\zeta]^2 + (y-y_c)^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{xy}^{cr} &= \frac{\sigma_{yy}^{\infty}(y-y_c)}{\pi} \int_{-l}^l \frac{((x-x_c)-\zeta)^2 - (y-y_c)^2}{[(x-x_c)-\zeta]^2 + (y-y_c)^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta\end{aligned}\quad (4)$$

для трещины нормального отрыва;

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{cr} &= -\frac{\sigma_{xy}^{\infty}(y-y_c)}{\pi} \int_{-l}^l \frac{3((x-x_c)-\zeta)^2 - (y-y_c)^2}{[(x-x_c)-\zeta]^2 + (y-y_c)^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{yy}^{cr} &= \frac{\sigma_{xy}^{\infty}(y-y_c)}{\pi} \int_{-l}^l \frac{((x-x_c)-\zeta)^2 - (y-y_c)^2}{[(x-x_c)-\zeta]^2 + (y-y_c)^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta \\ \sigma_{xy}^{cr} &= \sigma_{xy}^{\infty} + \frac{\sigma_{xy}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{((x-x_c)-\zeta)[((x-x_c)-\zeta)^2 - (y-y_c)^2]}{[(x-x_c)-\zeta]^2 + (y-y_c)^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta\end{aligned}\quad (5)$$

для трещины поперечного сдвига;

$$\begin{aligned}\sigma_{xz}^{cr} &= -\frac{\sigma_{yz}^{\infty}(y-y_c)}{\pi} \int_{-l}^l \frac{1}{((x-x_c)-\zeta)^2 + (y-y_c)^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta, \\ \sigma_{yz}^{cr} &= \sigma_{yz}^{\infty} + \frac{\sigma_{yz}^{\infty}}{\pi} \int_{-l}^l \frac{(x-x_c)-\zeta}{((x-x_c)-\zeta)^2 + (y-y_c)^2} \frac{\zeta}{\sqrt{l^2 - \zeta^2}} d\zeta\end{aligned}\quad (6)$$

для трещины антиплоского сдвига.

Согласно [12] поля напряжений у находящегося вдали от поверхности клиновидного остаточного двойника в приближении непрерывного распределения двойникоующих дислокаций на двойниковых границах рассчитываются по формулам:

$$\sigma_{ij}^{fw}(x, y) = \sigma_{ij}^{tw(1)}(x, y) + \sigma_{ij}^{tw(2)}(x, y)\quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{tw(1)}(x, y) &= \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{ij}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) d\xi, \\ \sigma_{ij}^{tw(2)}(x, y) &= \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{ij}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) d\xi.\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь L – длина двойника; ξ – параметр интегрирования; $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ – функции, определяющие форму двух двойниковых границ; $\rho_1(\xi)$ и $\rho_2(\xi)$ – плотность двойникующих дислокаций на первой и второй границе двойника;

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= -\frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-f_1(\xi))[3(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2]^2}, \\ \sigma_{yy}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-f_1(\xi))[(x-\xi)^2 - (y-f_1(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2]^2}, \\ \sigma_{xy}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-\xi)[(x-\xi)^2 - (y-f_1(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2]^2}, \\ \sigma_{zx}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= -\frac{\mu b_{в}}{2\pi} \frac{y-f_1(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2}, \\ \sigma_{zy}^{(1,0)}(x, y, \xi, f_1(\xi)) &= \frac{\mu b_{в}}{2\pi} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-f_1(\xi))^2}; \\ \sigma_{xx}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= -\frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-f_2(\xi))[3(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2]^2}, \\ \sigma_{yy}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-f_2(\xi))[(x-\xi)^2 - (y-f_2(\xi))^2]}{[(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2]^2}, \\ \sigma_{xy}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0)[(x-x_0)^2 - (y-f_2(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2 + (y-f_2(x_0))^2]^2}, \\ \sigma_{zx}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= -\frac{\mu b_{в}}{2\pi} \frac{y-f_2(\xi)}{(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2}, \\ \sigma_{zy}^{(2,0)}(x, y, \xi, f_2(\xi)) &= \frac{\mu b_{в}}{2\pi} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (y-f_2(\xi))^2}.\end{aligned}\tag{9}$$

Здесь принималась во внимание представленная на рисунке 1 ориентировка винтовой $\mathbf{b}_в$ и краевой $\mathbf{b}_{кр}$ составляющих вектора Бюргерса; μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

При неподвижной трещине и двойникующих дислокациях в рамках теории упругости для системы “остаточный клиновидный двойник – трещина” поля напряжений можно рассчитать, как суперпозицию напряжений

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sigma_{ij}^{cr}(x, y) + \sigma_{ij}^{fw}(x, y) .\tag{11}$$

Результаты расчетов и их обсуждение

Примем как в [12]

$$f_1(\xi) = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{\xi}{L} \right),\tag{12}$$

$$f_2(\xi) = -\frac{H}{2} \left(1 - \frac{\xi}{L} \right),\tag{13}$$

где H – ширина двойника у устья.

Результаты расчетов полей напряжений (в МПа) в системе “остаточный клиновидный двойник – трещина” представлены на рисунках 2–9. Принималось: $b_B = b_{кр} = 0,124$ нм [13]; $\mu = 81$ ГПа [14 – 17]; $\nu = 0,29$ [14–17]; $\sigma_{yy}^\infty = 10$ МПа, $\sigma_{xy}^\infty = 10$ МПа, $\sigma_{yz}^\infty = 10$ МПа; $L = 100$ мкм; $H = 11$ мкм; $l = 20$ мкм; $x_c = 120$ мкм; $y_c = 50$ мкм.

На рисунках 2 – 4 показано распределение нормальных σ_{xx} и σ_{yy} и сдвиговых σ_{xy} напряжений в системе “двойник – трещина” в случае трещины нормального отрыва [11]. Соответствующие компоненты тензора напряжений двойника рассчитывались по формулам (7) – (10). Из рисунков 2–4 видно, что концентраторами напряжений являются не только двойниковые границы, но и вершины трещины и двойника.

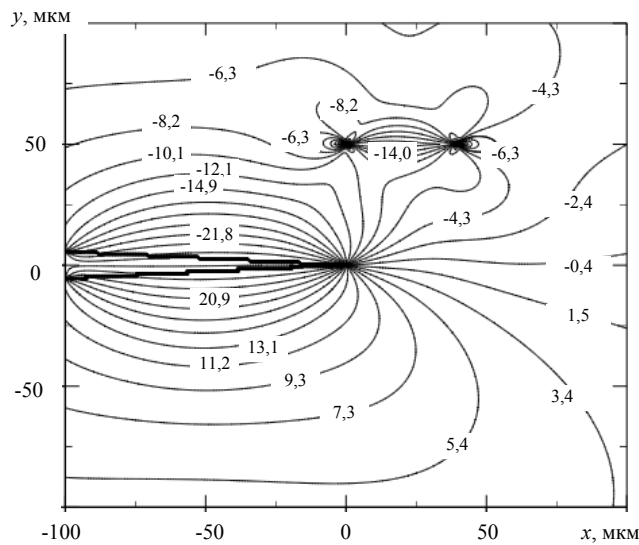


Рисунок 2 – Распределение нормальных напряжений σ_{xx} в системе “клиновидный двойник – трещина” (трещина нормального отрыва)

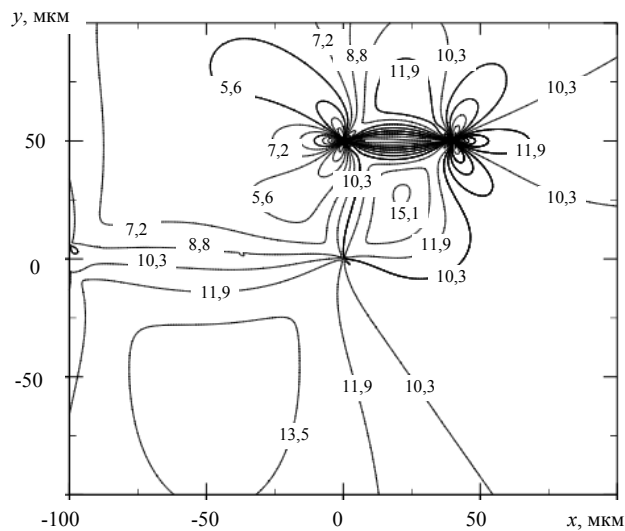


Рисунок 3 – Распределение нормальных напряжений σ_{yy} в системе “клиновидный двойник – трещина” (трещина нормального отрыва)

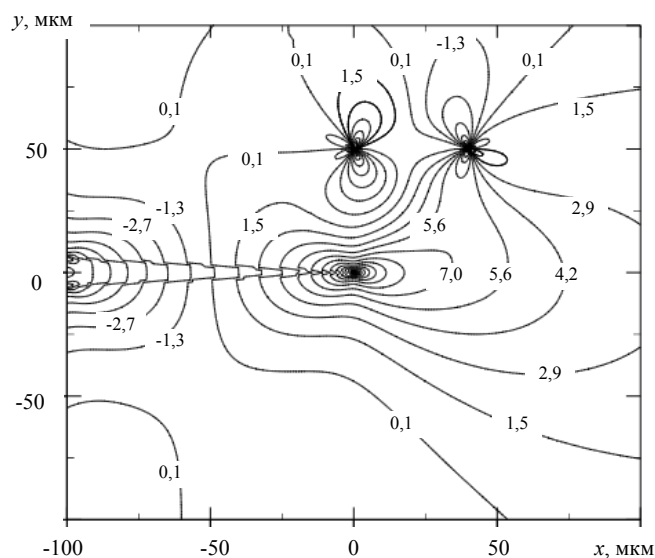


Рисунок 4 – Распределение сдвиговых напряжений σ_{yx} в системе “клиновидный двойник – трещина” (трещина нормального отрыва)

В случае трещины нормального отрыва напряжения σ_{xx} знакопеременны относительно оси OX (рисунок 2), напряжения σ_{yy} имеют один знак (рисунок 3), а напряжения σ_{xy} знакопеременны относительно оси OY (рисунок 4).

В случае трещины поперечного сдвига нормальные напряжения σ_{xx} знакопеременны относительно оси OX (рисунок 5), напряжения σ_{yy} знакопеременны относительно оси OY (рисунок 6), а сдвиговые напряжения σ_{xy} имеют один знак (рисунок 7).

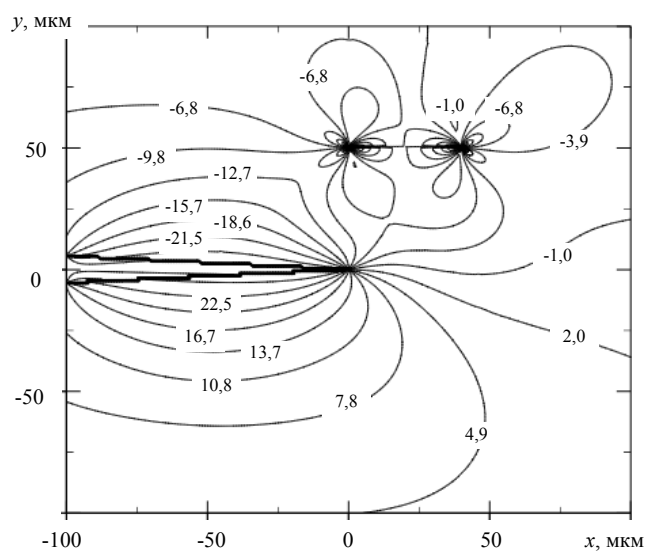


Рисунок 5 – Распределение нормальных напряжений σ_{xx} в системе “клиновидный двойник – трещина” (трещина поперечного сдвига)

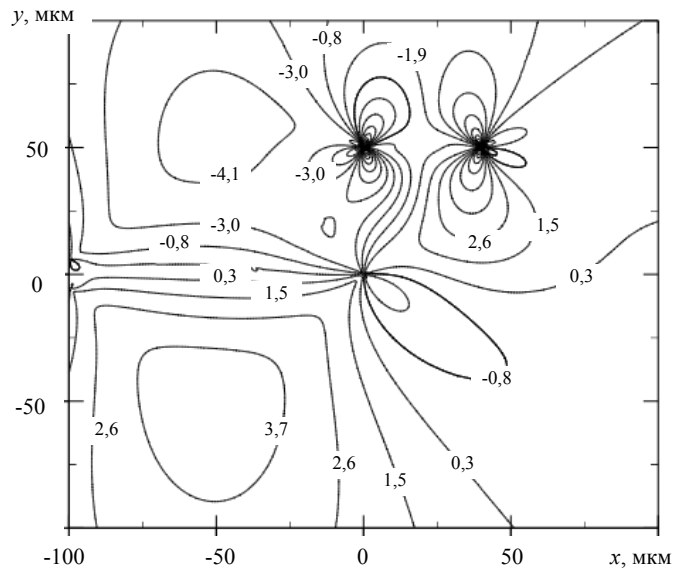


Рисунок 6 – Распределение нормальных напряжений σ_{yy} в системе «клиновидный двойник – трещина» (трещина поперечного сдвига)

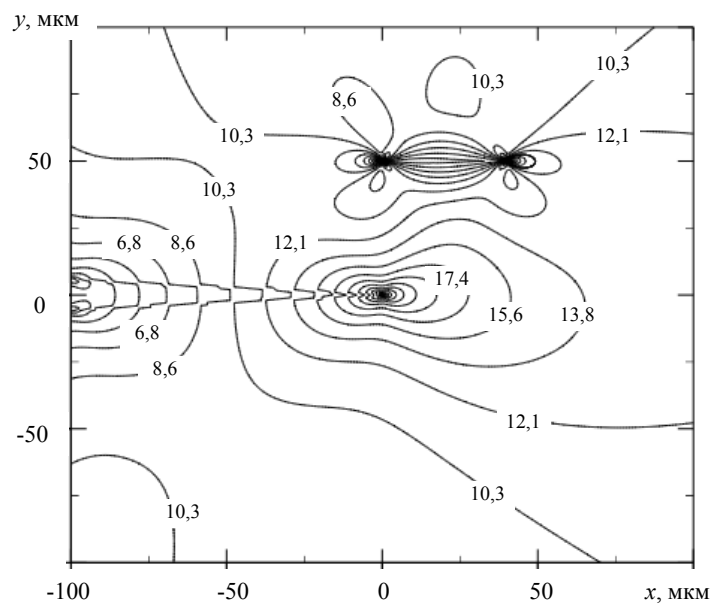


Рисунок 7 – Распределение сдвиговых напряжений σ_{xy} в системе «клиновидный двойник – трещина» (трещина поперечного сдвига)

Трещина антиплоского сдвига создает отрицательные сдвиговые напряжения σ_{xz} (рисунок 8). В целом распределение напряжений σ_{xz} знакопеременно относительно оси OX . Сдвиговые напряжения σ_{yz} имеют один знак (рисунок 9).

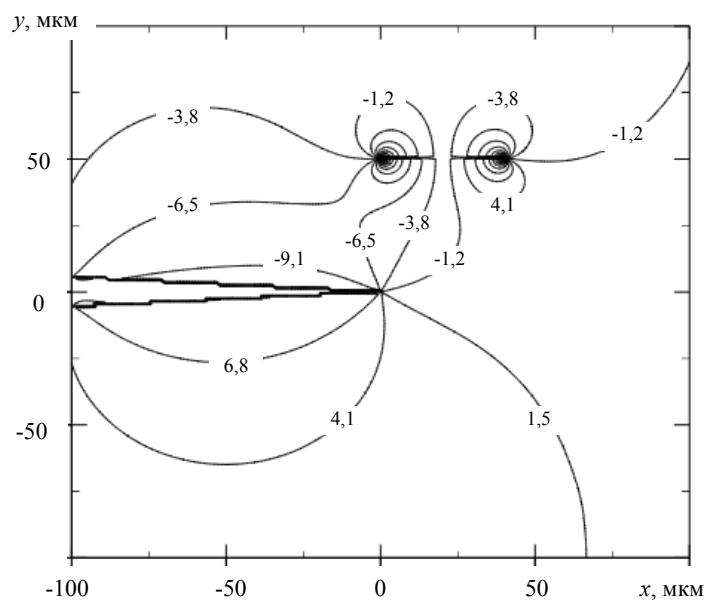


Рисунок 8 – Распределение сдвиговых напряжений σ_{xz} в системе “клиновидный двойник – трещина” (трещина антиплоского сдвига)

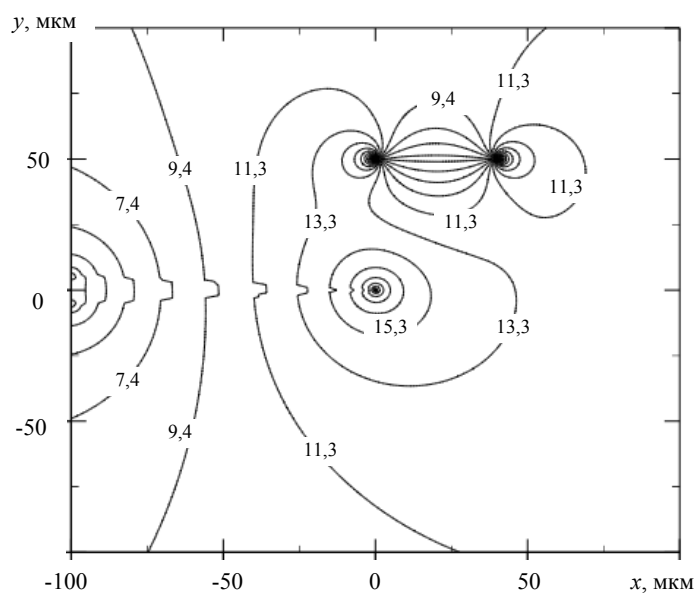


Рисунок 9 – Распределение сдвиговых напряжений σ_{yz} в системе “клиновидный двойник – трещина” (трещина антиплоского сдвига)

Заключение

Таким образом, разработана методика расчета полей напряжений в системе “остаточный клиновидный двойник – трещина”, находящейся вдали от поверхности кристалла. Дана количественная оценка полям напряжений в рассматриваемой системе.

Показано, что клиновидный двойник влияет на закономерности распределения полей напряжений у трещины.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Финкель, В. М.** Разрушение кристаллов при механическом двойниковании / В. М. Финкель, В. А. Федоров, А. П. Королев. – Ростов-на-Дону, 1990. – 172 с.
2. **Федоров, В. А.** Образование трещин на границах зерен и двойников в цинке при охлаждении до низких температур / В. А. Федоров, В. М. Финкель, В. П. Плотников // Физика металлов и металловедение. – 1980. – Т. 49, № 2. – С. 413–416.
3. **Яковлева, Э. С.** Влияние двойникования на хрупкое разрушение кристаллов цинка / Э. С. Яковлева, М. В. Якутович // Журнал технической физики. – 1950. – Т. 20, № 4. – С. 420–423.
4. **Cerv, J.** Transonic twinning from the crack tip / J. Cerv, M. Landa, A. Machova // Scr. Mater. – 2000. – V. 43, № 5. – P. 423–428.
5. **Остриков, О. М.** Напряженное состояние у поверхности кристалла, деформируемой сосредоточенной нагрузкой, при наличии клиновидного двойника / О. М. Остриков // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, № 5. – С. 137–139.
6. **Остриков, О. М.** Метод расчета распределения деформаций у клиновидного двойника с использованием подходов макроскопической дислокационной модели / О. М. Остриков // Механика твердого тела. – 2009, № 4. – С. 52–58.
7. **Остриков, О. М.** Учет формы границ клиновидного двойника в его макроскопической дислокационной модели / О. М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 2008. – Т. 106, № 5. – С. 471–476.
8. **Остриков, О. М.** Влияние импульсного электрического тока большой плотности на особенности двойникования монокристаллов висмута / О. М. Остриков // Физика и химия обработки материалов. – 2003, № 1. – С. 12–15.
9. **Остриков, О. М.** Кинетика образования клиновидных двойников в кристаллах висмута, облученных нерастворимыми в матрице мишени ионами / О. М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 1999. – Т. 87, № 5. – С. 78–82.
10. **Работнов, Ю. Н.** Введение в механику разрушения / Ю. Н. Работнов. – Москва : Наука, 1987. – 80 с.
11. **Астафьев, В. И.** Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара : Изд-во “Самарский университет”, 2001. – 562 с.
12. **Остриков О. М.** Механика двойникования твердых тел : монография. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 301 с.
13. **Остриков, О. М.** Расчет на основании мезоскопической дислокационной модели собственной энергии клиновидного двойника / О. М. Остриков // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2007. – Т. 12, № 2. – С. 22–24.
14. **Полухин, П. И.** Физические основы пластической деформации / П. И. Полухин, С. С. Горелик, В. К. Воронцов. – Москва : Металлургия, 1982. – 584 с.
15. **Шматок, Е. В.** Расчет полей напряжений у единичного линзовидного двойника, находящегося в поле напряжений полубесконечной трещины антиплоского сдвига в монокристаллическом Ni_2MnGa / Е. В. Шматок, О. М. Остриков // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2019, № 1(53). – С. 57–62.
16. **Иноземцева, Е. В.** Расчет полей напряжений у тонкого упругого двойника, находящегося вдали от поверхности и образованного в результате антиплоского сдвига / Е. В. Иноземцева, О. М. Остриков // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2017. – № 1(49). – С. 68–74.
17. **Шматок, Е. В.** Двухфункциональная модель линзовидного двойника в Ni_2MnGa / Е. В. Шматок, О. М. Остриков // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2016. – № 2(48). – С. 62–71.

Поступила в редакцию 04.03.2019 г.

Контакты: oostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Ostrikov O. THE METHOD OF FORECASTING DISTRIBUTION OF VOLTAGE FIELDS IN THE SYSTEM “RESIDUAL WEDGE TWIN – CRACK”.

A method has been developed for calculating stress fields in the system “residual wedge-shaped twin – crack” in the case when the twin and the crack are far from the surface of the crystal. The stress fields in the system under consideration have been calculated for three types of cracks: a normal tear, crosswise and anti-flat shear. It is shown that the residual wedge-shaped twin has a significant effect on the distribution of stress fields near the crack.

Keywords: residual wedge-shaped twin, normal tear, cross-section and anti-plane shear.

УДК 574.24

ВЛИЯНИЕ КАЧЕСТВА УРБАНИЗИРОВАННОЙ СРЕДЫ г. МОГИЛЕВА НА КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТЬИЦ СОСНЫ ОБЫКНОВЕННОЙ (*PINUS SYLVESTRIS*)

О. В. Поворова

старший преподаватель

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В. А. Левинская

доцент

Белорусско-Российский университет (Могилев)

*Проведен анализ числа устьиц на поперечных срезах листьев *Pinus sylvestris*, произрастающих в условиях промышленного города, методами прикладной статистики. Доказано статистически значимое различие числа устьиц в районах сочетанного действия продуктов сгорания топлива автомашин и поллютантов промышленного происхождения по сравнению с контролем.*

*Показатель числа устьиц может быть использован в качестве биоиндикатора газоустойчивости *Pinus sylvestris*, рекомендован при озеленении урбанизированных территорий для выбора газоустойчивых видов растений и в экологическом мониторинге их среды обитания.*

Ключевые слова: сосна обыкновенная (*Pinus sylvestris*), число устьиц, продукты сгорания топлива автомашин, поллютанты промышленного города, проверка гипотез, непараметрические критерии, критерий Краскелла-Уоллиса, критерий Манна-Уитни.

Введение

Устьица хвойных растений спрятаны глубоко под эпидермисом [1], что позволяет в урбанизированных условиях среды обитания снизить расход воды зимой на испарение, а летом — во время повышенной температуры. Устьичные ямки заполняют восковые структуры, изменяют скорость испарения в зависимости от собственной влажности, морфологической структуры [2]. Факторы внешней и внутренней среды прямо и косвенно воздействуют на устьичный аппарат, вызывая в замыкающих клетках преобразования, приводящие к изменению тургора. Высокая влажность около корней в почве способствует открыванию устьиц. Пониженная влажность воздуха способствует транспирации, так как градиент влажности между межклетниками и окружающей средой увеличен [3]. Повышение влажности, наоборот, подавляет транспирацию. Негативное влияние оказывают газообразные загрязняющие вещества. В промышленных зонах повышается температура и падает влажность воздуха. Газообразные загрязняющие вещества попадают в листья при газообмене через открытые устьица, нарушается регуляторная функция замыкающих клеток, токсичные вещества накапливаются в межклетниках и через клеточные стенки проникают к клеткам мезофилла [4]. Через устьица одним и тем же путем происходит транспирация и получение диоксида углерода растением для фотосинтеза. Растение регулирует “грань голода и жажды” — при недостатке влаги растение закрывает устьица, значит сокращается поступление CO_2 и в целом фотосинтез. При открытых устьицах транспирация усиливается, поступает диоксид углерода.

© Поворова О. В., 2019

© Левинская В. А., 2019

Выключение устьиц как газовоспринимающего аппарата позволяет растениям адаптироваться и сохраняться в городах. Газочувствительность отражает скорость и степень проявления у растений патологической реакции при воздействии газа. Газоустойчивость определяют как способность растения противостоять действию газов, сохраняя нормальный рост и развитие. Определение показателей газоустойчивости/чувствительности Сосны обыкновенной применимо в биомониторинге среды обитания растения. Для характеристики газоустойчивости/чувствительности определяют число устьиц [5]. Число устьиц у одного и того же вида голосеменных может различаться по годам в зависимости от экологических факторов, от освещенности и влажности, варьирует в течении вегетации [6]. Чем больше освещенность, тем больше плотность устьиц на единицу поверхности хвои по сравнению с теневой хвоей. Максимальную плотность устьиц отмечают для интродуцентов, эндемичные виды имеют наименьшие показатели числа устьиц. У Сосны сибирской в горах Алтая с повышением высоты произрастания растения число устьиц не изменяется, но повышается плотность клеток мезофилла на одно устьице, наращивается ассимилирующая поверхность как приспособление для лучшей фиксации CO_2 с увеличением высоты произрастания [2].

Отражением влияния экологических, климатических и почвенных факторов в сочетании с наследственностью являются рост и продуктивность отдельных насаждений. При воздействии неблагоприятных факторов среды у деревьев уменьшаются размеры различных органов (хвои, побегов, шишек). Адаптивные изменения роста, морфогенеза и метаболизма древесных голосеменных растений к стрессу – специфический отклик растений на стрессовые воздействия [7]. Температурный режим в городской среде необычен для растений и определяется специфическим микроклиматом города: суточный ход температур в городе выражен не так резко как в окрестностях, наблюдается ослабление заморозков, удлинение периода с положительной температурой воздуха, дневное нагревание асфальта, каменных стен домов и усиленное тепловое излучение от них ночью [8]. Городские территории представляют собой своеобразные “острова тепла”, которые характеризуются повышенными, по сравнению с фоновыми, температурами [9]. Основной источник загрязняющих веществ в городе – автотранспорт, поэтому на растительность преимущественно воздействуют вещества, содержащиеся в выбросах автотранспорта: оксиды углерода, азота, серы, соединения свинца, углеводороды, сажа, резиновая пыль и ряд других токсичных соединений [10]. Собравшаяся на листьях пыль воздействует путем снижения эффективности солнечного излучения и повышения температуры, а попавшая на почву пыль – через изменения водородного показателя почвы и содержания микроэлементов. В любом крупном городе выбрасывается большое количество CO_2 . В г. Могилеве развита промышленная инфраструктура, поэтому среда характеризуется дополнительными поллютантами промышленного происхождения. Подбирая газоустойчивые виды растений, решаются вопросы озеленения нашей среды обитания и ее биомониторинга.

Цель исследования – определить число устьичных аппаратов Сосны обыкновенной (*Pinus sylvestris*) в зависимости от экологических факторов урбанизированной среды обитания растений.

Материалы и методы исследований

Для изучения числа устьиц на поперечном срезе игловидного листа *Pinus sylvestris* использовали следующие методы исследования – гистологический метод приготовления временных окрашенных препаратов среза листа, метод микроскопирования, метод фотосъемки, статистические методы анализа (непараметрические критерии: Краскелла-Уоллеса, Манна-Уитни).

В городе Могилеве мониторинг атмосферного воздуха проводится на стационарных станциях Могилевским областным центром по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды, которые условно подразделяются на “городские фоновые” (жилые районы), “автотранспортные” (вблизи автодорог), “промышленные” (вблизи промышленных предприятий), “смешанные”. Нами места забора проб листьев выбирались таким образом, чтобы были приближены к стационарным постам “Могилевоблгидромет”, а также характеризовали районы наибольшего загрязнения г. Могилева. Выбирались места произрастания деревьев с дополнительной нагрузкой, снижающей уровень доступной почвенной влаги для растения и характеризующей экосистему города, – вытаптывание, асфальтное или плиточное покрытие вдоль мест произрастания голосеменных растений.

Место проведения исследования – г. Могилев, девять групп районов, отличающиеся по показателям антропогенной нагрузки и объединенные по зонам наблюдения:

- фоновые (Ф): микрорайоны “30-лет Победы”, “Восьмой”;
- автотранспортные (Ат): микрорайон “Спутник”, ул. Минское шоссе, ул. Ровчакова, ул. Островского, ул. Первомайская;
- промышленные (П): ул. Челюскинцев;
- смешанные (См): ул. Мовчанского.

В качестве контроля (К) выбраны дер. Любуж (К1 – нет поблизости крупных автодорог, в непосредственной близости к деревьям частные постройки и дороги, ведущие к частным домам, с уплотненным почвенным покрытием) в окрестностях города, микрорайон “Дачный” (К2 – вдоль дорог, ведущих к частным домам с уплотненным гравийным покрытием) в черте города.

Время взятия образцов листьев Сосны обыкновенной и их исследование: солнечные дни в 12 часов (20-22°C / 13-14°C) с одинаковой влажностью воздуха (68-70% / 71-73%) в летний и осенний периоды 2018 г. (июль/октябрь, соответственно). В каждом месте исследований отбирали по пять листьев одинаковой длины с трех деревьев на высоте 150 см и выше от поверхности земли.

В день сбора листьев проводилось их исследование – по всей длине листа делали три тонких поперечных среза листа на предметном стекле лезвием: по середине листа на $\frac{1}{2}$ длины (срез В), на $\frac{1}{4}$ длины листа от вершины листовой пластинки (срез А) и на $\frac{1}{4}$ длины листа от основания листовой пластинки (срез С). На каждый срез капали раствор флороглюцина таким образом, чтобы весь срез был покрыт красителем, затем капали концентрированную соляную кислоту. Микроскопировали (“Биолам”) с покровным стеклом (увеличение $\times 56$). Фотографировали камерой iSight 12 мп iPhone SE. Стенки замыкающих клеток устьиц, эпидерма, гиподерма листа голосеменных растений класса Хвойные одревесневают и окрашиваются в кислой среде флороглюцином в темно-красный цвет, что позволяет четко увидеть и подсчитать число устьиц по периметру поперечного среза листа при увеличении фотографии на мониторе ПК.

Результаты исследований

Устьичные аппараты напрямую связаны с водным режимом древесных растений и степенью устойчивости к неблагоприятным факторам среды согласно литературным данным. Из внешних факторов наиболее значимы свет, температура, влажность воздуха, водообеспеченность [7]. При хорошем водоснабжении устьица открываются тем шире, чем больше света, в результате продуктивность фотосинтеза выше. При изучении характера влияния водообеспеченности растения на число устьиц мы анализировали листья Сосны обыкновенной, произрастающих в идеальных садоводческих условиях (Рисунок 1 А) для покрытосеменных кустарников и деревьев: периодический полив,

стрижка (не прополка) сорняков для удержания влаги, дотации удобрений по всеосенне-осенним схемам внесения, отсутствие вытаптывания.

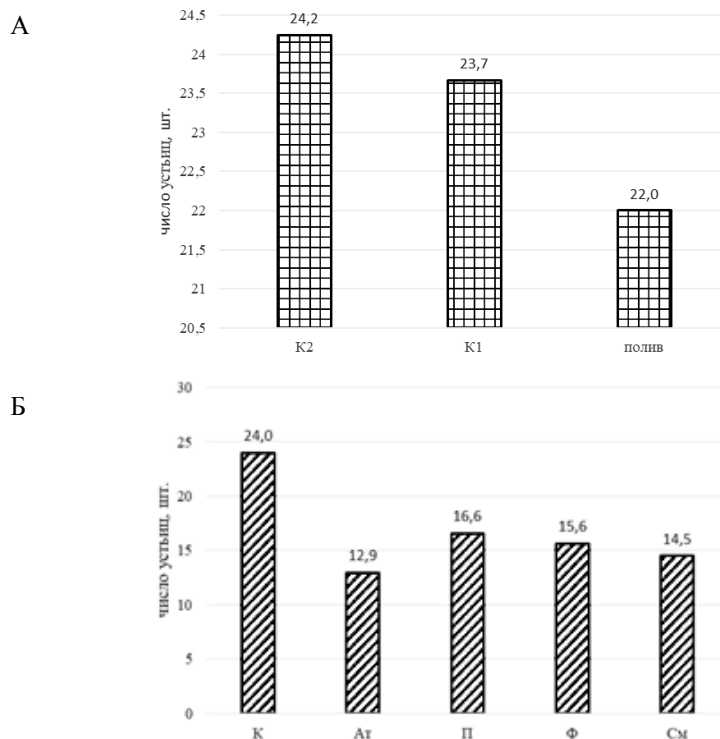


Рисунок 1 – Число устьичных аппаратов в листьях *Pinus sylvestris*, произрастающих в условиях разной степени уплотненности почвенного покрова и достаточного водообеспечения (А), в условиях промышленного города (Б)

Как видно из данных Рисунка 1А, число устьиц увеличивается обратно пропорционально водообеспеченности растения: число устьичных аппаратов больше у тех растений, которые растут вдоль дороги к частным постройкам с гравийным покрытием (К2), чем у тех, которые растут вдоль дорог с уплотненным почвенным покрытием (К1); у растений с периодическим поливом и низкой степенью уплотненности почвенного покрова (полив) число устьиц минимально. Достоверных различий между К1 и К2 не определено на уровне значимости $p = 0,05$ (критерий Манна-Уитни, $U = 810,5$; $p = 0,1$).

Таким образом, чем больше водообеспеченность почвы растений, тем меньше число устьиц в листе, что можно объяснить открытостью устьиц [4; 5; 11] для обеспечения процессов транспирации/газообмена из-за достаточного количества почвенной влаги. В результате снижения почвенной влаги у растений, растущих вдоль дорог с дополнительным покрытием, растение адаптируется для выполнения физиологических функций увеличением числа устьиц, т. к. чтобы листья получили воду, поглощенную корнями, она должна подняться на высоту растения в основном за счет разности давлений. Гравитация в верхних частях деревьев может быть преодолена только за счет уменьшения гидростатического давления из-за диффузии воды через устьица в атмосферу. Поэтому при затрудненном корневом водоснабжении транспирация уменьшается и в листьях меньше доступной воды, а чтобы изменить осмотическое давление в клетках и обеспечить восходящий ток воды с питательными веществами растение увеличивает

количество контактирующих с атмосферой клеток – устьиц (чем больше устьиц на листьях, тем больше лист испаряет воды).

Гидрологический режим территорий городов характеризуется ограниченным поступлением воды в почву из-за асфальтовых покрытий, хотя зачастую в черте города осадков выпадает больше, чем в пригородах. Большая часть влаги теряется для растений, поступая в канализационную систему. Кроме того, водный режим растений в городе осложняется повышенной сухостью воздуха, перегревом запыленных листьев и влиянием загрязняющих веществ на целостность устьичного аппарата [1; 12]. Изолированно растущие деревья в городских условиях страдают от перегрева листовой поверхности и потери воды путем транспирации. Таким образом, города представляют собой более “сухие” территории на фоне окружающего природного ландшафта.

В г. Могилеве некоторые предприятия располагаются в жилых районах. Поэтому трудно выделить районы «чисто» промышленные или «чисто» жилые. Одна и та же станция может быть отнесена и к промышленной, и к жилой, и к автотранспортной, поскольку она может размещаться в жилом районе, вблизи автодорог и вблизи крупных источников выбросов. Особенностью промышленного города Могилева является низкий уровень озеленения, поэтому мест произрастания Сосны обыкновенной в городской черте мало. Выбирались места произрастания деревьев с дополнительной нагрузкой, снижающей уровень доступной почвенной влаги для растения и характеризующей экосистему города, – вытаптывание, асфальтное или плиточное покрытие вдоль мест произрастания хвойных растений. На Рисунке 1Б представлены результаты анализа числа устьичных аппаратов в листьях Сосны обыкновенной в зависимости от воздействия факторов среды промышленного города.

Меньше всего устьиц (13 шт.) определено в листьях растений, произрастающих в условиях с большой пропускной способностью автотранспорта (Ат, без учета ул. Первомайская), где в 1,9 раз меньше устьиц по сравнению с контрольными участками. В листьях растений, произрастающих в микрорайонах фонового наблюдения (Ф), число устьиц в 1,5 раза меньше по сравнению с К. В промышленной зоне наблюдения (П) и смешанной зоне (См) число устьиц в 1,4 и 1,7 раз, соответственно, меньше по сравнению с контролем, составив 16,6 и 14,5 шт. Таким образом, самое низкое число устьичных аппаратов определено в местах произрастания с максимальным движением автотранспорта и сочетанным действием выхлопных газов средней напряженности движения автотранспорта и поллютантов промышленного происхождения.

Среди улиц зоны наблюдения Ат (Рисунок 1Б) ул. Первомайская не учитывалась в связи с тем, что на ней сокращен поток автомобилей личного пользования из-за его переноса на параллельную улицу (вдоль автовокзала) для обеспечения движения общественного городского транспорта, основным видом которого в нашем городе является троллейбусное движение как наиболее экологически чистый вид городского автотранспорта, что и отразилось на изучаемых показателях (Рисунок 2).

Как видно из диаграмм Рисунка 2, число устьиц в листьях Сосны обыкновенной, произрастающих в условиях сниженного транспортного движения по ул. Первомайской, составляет 21,3 шт, что в 1,6-1,7 раза достоверно выше по сравнению с числом устьиц в листьях деревьев, произрастающих в других районах с дополнительными поллютантами, образующимися при сгорании топлива автомашин (таблица 1).

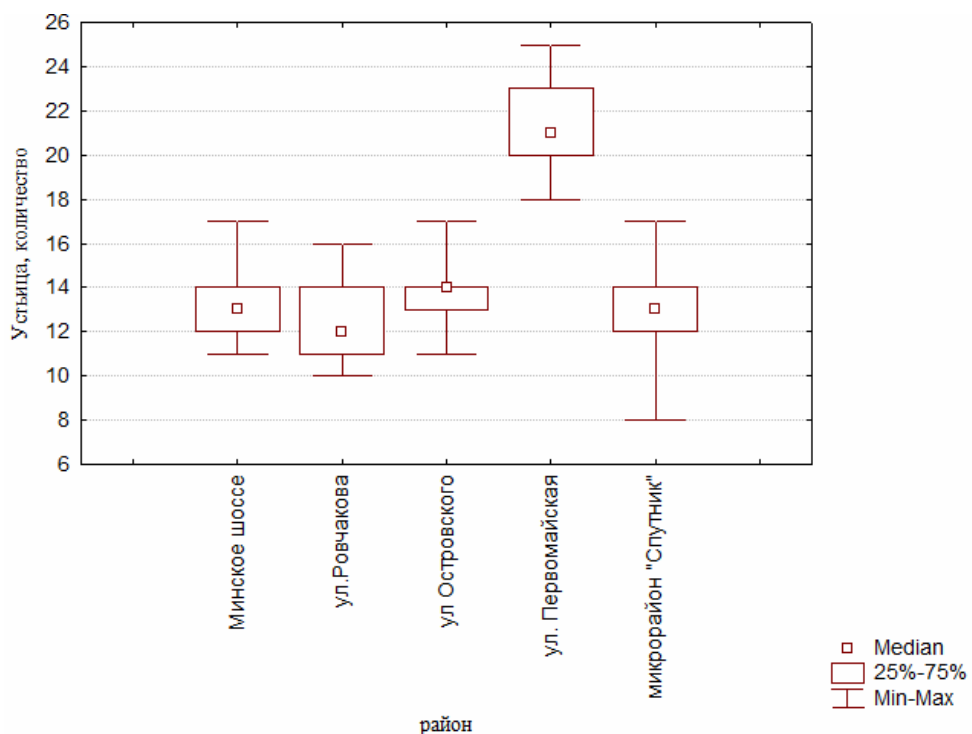


Рисунок 2 – Количественные показатели (шт.) устьиц в районах произрастания *Pinus sylvestris* с дополнительными выбросами продуктов сгорания топлива автомашин

Таблица 1 – Результаты анализа числа устьиц в листьях деревьев в районах произрастания с дополнительными продуктами сгорания топлива автомашин (критерий Манна-Уитни, 45 срезов листьев в каждом районе)

Анализируемые районы	Статистически значимая разница	U	Z	p-level
Микрорайон "Спутник" / ул. Минское шоссе	нет	876,5	1,098	0,2724
Микрорайон "Спутник" / ул. Ровчаково	есть	759,5	2,042	0,0412
Микрорайон "Спутник" / ул. Островского	нет	921,0	-0,738	0,4603
Микрорайон "Спутник" / ул. Первомайская	есть	0,0	-8,171	0,0000
ул. Минское шоссе / ул. Ровчаково	нет	819,5	1,558	1,5833
ул. Минское шоссе / ул. Островского	есть	728,0	-2,296	0,0217
ул. Минское шоссе / ул. Первомайская	есть	0,0	-8,171	0,0000
ул. Ровчаково / ул. Островского	есть	608,0	-3,264	0,0011
ул. Ровчаково / ул. Первомайская	есть	0,0	-8,171	0,0000
ул. Островского / ул. Первомайская	есть	0,0	-8,171	0,0000

В результате статистического непараметрического метода анализа мы получили статистически значимые (таблица 1) различия по числу устьиц в листьях растений, произрастающих в условиях с разной нагрузкой автотранспорта на среду обитания. Таким образом, при уменьшении экологической нагрузки на экосистему города число устьиц растения восстанавливается в пределах генетически predetermined значений. На диаграмме рисунка 3 наглядно видно, что показатель числа устьиц листьев растений на ул. Первомайской в настоящий момент времени сопоставим с показателями контрольных участков.

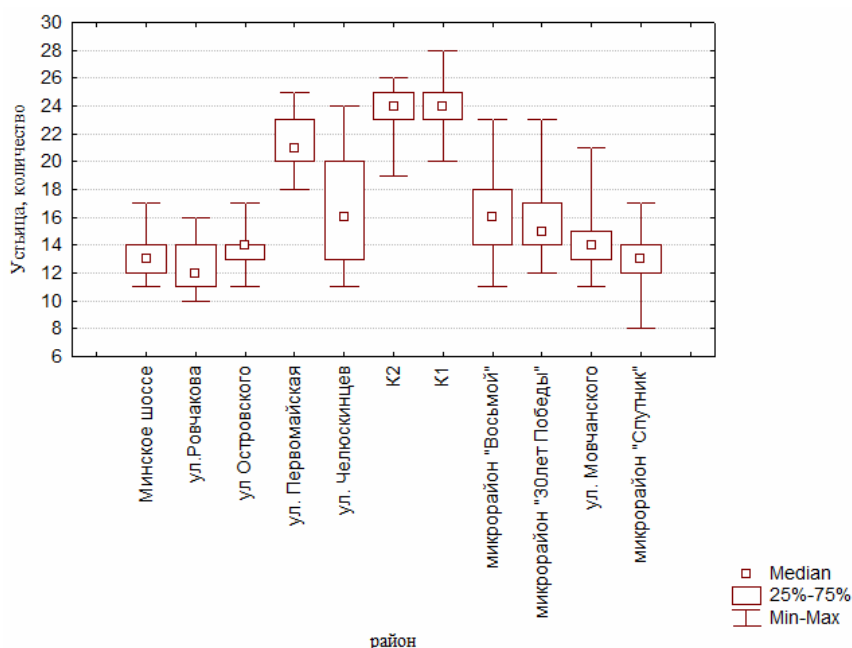


Рисунок 3 – Количественные показатели числа устьиц в листьях *Pinus sylvestris* в зависимости от района произрастания растения

Как видно из рисунка 3, в промышленной зоне (ул. Челюскинцев) наибольший квартильный размах показателя при медианном значении числа устьиц в 16 шт. и в районах с фоновым загрязнением (жилые). Для объяснения данного результата необходимы дальнейшие исследования и анализ показателей влагообеспеченности почвы и влагопотребления растением.

Начиная изучать число устьиц на поперечных срезах, мы обратили внимание, что число устьиц на поперечном срезе листа различается на протяжении длины всего листа – от единичных показателей на вершине и основании листа до самых больших показателей на медиальной зоне листа. Поэтому мы делали три среза по длине листа: на $\frac{1}{2}$ длины листа, на $\frac{1}{4}$ длины игловидного листа от основания и вершины листа (Рисунок 4).

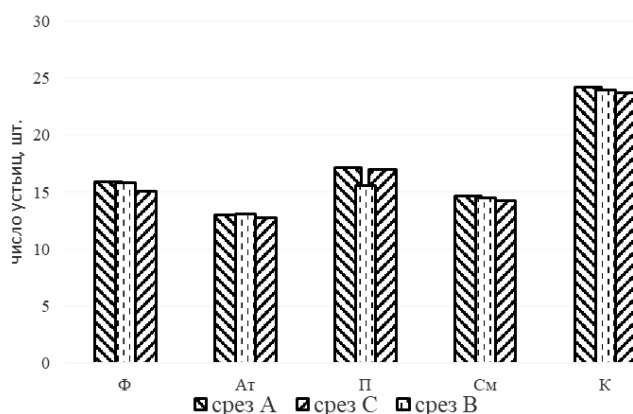


Рисунок 4 – Количественные показатели числа устьиц в листьях *Pinus sylvestris* в зависимости от места гистологического среза по длине листа

В районах контроля, зонах смешанного загрязнения и фонового уровня сохраняется общая тенденция: максимальное число устьиц на срезе А, минимальное – на срезе С, средние показатели – на срезе В. В промышленной зоне наблюдения (ул. Челюскинцев) не сохраняется данная тенденция и имеет значительно более низкие показатели числа устьиц по срезу В (на две единицы) по сравнению со срезами А и С. В районах с автотранспортными поллютантами (микрорайон “Спутник”, ул. Минское шоссе, ул. Ровчакова, ул. Островского) число устьиц в листьях на медиальных срезах самое большое, минимальное – у основания листа. Поскольку объем выборок по каждому из трех срезов мал в каждом районе исследования, проверку гипотезы о равенстве числа устьиц на трех поперечных срезах (А, В, С) по длине листа осуществляли с помощью непараметрического критерия Kruskal-Wallis ANOVA by Ranks (Таблица 2).

Таблица 2 – Результаты анализа проверки гипотезы о равенстве числа устьиц на поперечных срезах (критерий Kruskal-Wallis)

Район	H (2, N= 45)	p-level
ул. Первомайская	0,5981676	0,7415
K2	0,0458521	0,9773
ул. Челюскинцев	1,422358	0,4911
ул. Мовчанского	0,6355116	0,7278
Микрорайон “Восьмой”	0,7412197	0,6903
Микрорайон “Спутник”	0,1440369	0,9305
Микрорайон “30 лет Победы”	1,502772	0,4717
K1	1,942213	0,3787

В таблице 2 представлены значения критерия H и уровень p, по которому мы делаем вывод о возможности принятия гипотезы при выбранном уровне значимости 0,05. Для всех районов выполняется неравенство $p > 0,05$, а это свидетельствует об отсутствии оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Таким образом, число устьиц на трех срезах схоже, поэтому при проведении исследований с целью мониторинга состояния окружающей среды информативным будет один медиальный срез, что значительно облегчит исследования, позволит увеличить число выборки за счет числа листьев и самих деревьев.

Изучая число устьиц в листьях хвойных растений в зависимости от поры года (лето / осень), сложности равенство погодных условий при постановке исследований сложно из-за метеорологических особенностей осеннего периода в нашей страны. При схожих показателях влажности и температуры воздуха на полуденное время в октябре 2018 г. мы взяли пробы листьев только из трех районов, результаты представлены на Рисунке 5.

Как видно из данных Рисунка 5, число устьиц в листьях Сосны обыкновенной меньше в 1,2 раза в октябре по сравнению с летним периодом проведения исследований в районах контроля и на ул. Первомайская. Для того, чтобы принять значимыми данные результаты мы провели сравнение внутри районов по сезонам года с помощью теста Вилкоксона (Таблица 3).

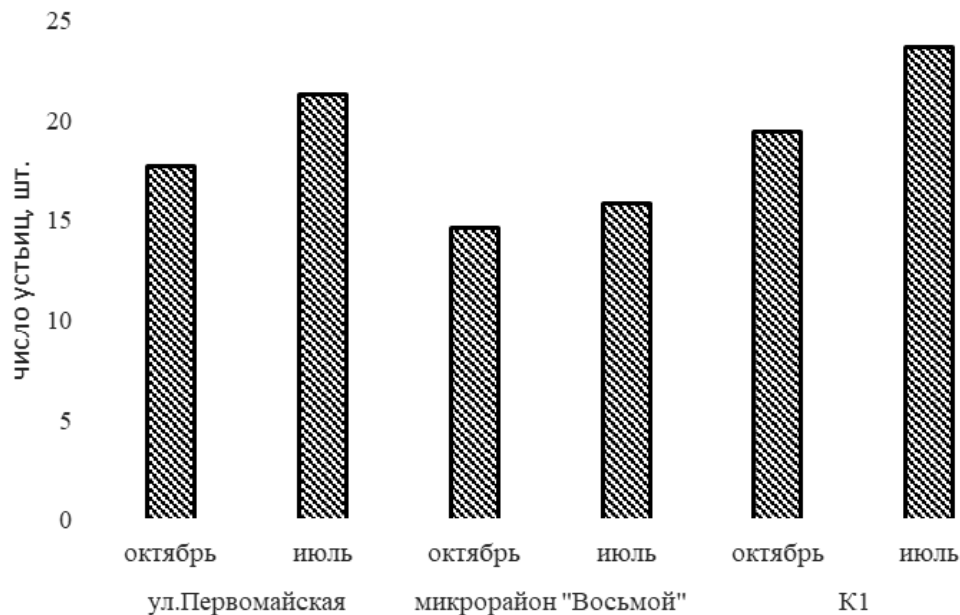


Рисунок 5 – Количественные показатели числа устьиц в листьях *Pinus sylvestris* в зависимости от времени года проведения исследований

Таблица 3 – Результаты анализа проверки гипотезы о равенстве числа устьиц в летне-осенние периоды проведения исследований (тест Вилкоксона)

Осень/лето	Число срезов	T	Z	p-level
ул. Первомайская	45	5,0000	5,443725	0,000000
Микрорайон "Восьмой"	45	23,0000	2,721897	0,006491
К1	45	0,0000	5,510932	0,000000

Как видно из результатов анализа таблицы 3, нулевая гипотеза (различий числа устьиц по сезонам года нет) отклоняется на уровне значимости $< 0,05$. Таким образом, число устьиц в летне-осенний период времени года различно.

При озеленении промышленных центров необходимо учитывать различную степень газоустойчивости древесных пород. Количество устьичных аппаратов показывает степень газочувствительности Сосны обыкновенной и может быть использовано в качестве биоиндикационных методов анализа среды обитания для характеристики уровня загрязненности того района, в котором произрастает древесное растение. Изучение их поможет найти наиболее благоприятную среду для высадки древесных растений, позволит в более ранние сроки проводить научно обоснованные хозяйственные мероприятия по улучшению состояния голосеменных растений и тем самым способствовать повышению их средостабилизирующей роли.

Заключение

На основании проделанной работы мы делаем следующие выводы:

1. На урбанизированных территориях произрастания деревьев в районах с автотранспортной, смешанной нагрузкой число устьиц в листьях в 1,5-1,9 раза меньше по

сравнению с листьями деревьев, произрастающими в районах без дополнительных антропогенных экологических факторов (контрольными районами). Основные факторы внешней среды, влияющие на число устьиц в листьях хвойных растений, – продукты сгорания топлива автомашин.

2. При уменьшении экологической нагрузки на экосистему города число устьиц растения восстанавливается в пределах генетически predetermined значений.

3. Для мониторинга состояния окружающей среды информативным будет проведение исследования числа устьиц на одном поперечном срезе игловидного листа.

4. В осенние периоды проведения работ в области биомониторинга число устьиц на поперечном срезе листа ниже в 1,2 раза по сравнению с летним периодом.

Полученные результаты исследований имеют практическую значимость при проведении со студентами и учащимися мониторинга состояния окружающей среды с использованием тест-объекта “число устьиц на поперечном срезе игловидного листа”:

– академическая значимость – впервые для города Могилева получены закономерности содержания устьиц в поперечных срезах листьев Сосны обыкновенной в зависимости от дополнительных антропогенных факторов среды, сезонов года; значимыми принимать результаты числа устьиц с одного среза;

– практическое применение – возможность использования простого в исполнении, бюджетного, достоверного метода биоиндикации среды обитания;

– воспитательный момент – обучение навыкам проведения научно-исследовательских работ; заинтересованность в изучаемых дисциплинах с практическим применением результатов собственных исследований.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Сергейчик, С. А.* Экологическая физиология хвойных пород Беларуси в техногенной среде / С. А. Сергейчик, Е. А. Сидорович, А. А. Сергейчик. – Минск : Беларуская наука, 1998. – 198 с.
2. *Бавтуто, Г. А.* Ботаника: Морфология и анатомия растений : учеб. пособие / Г. А. Бавтуто, Л. М. Еремич. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2003. – 400 с.
3. *Варлагин, А. В.* Влияние эколого-морфологических факторов на устьичное сопротивление ели европейской / А. В. Варлагин, Н. Н. Выгодская // Лесоведение. – 1993. – № 3. – С. 48–61.
4. *Крамер, П. Д.* Физиология древесных растений / П. Д. Крамер, Т. Т. Козловский. – Москва : Лесн. пром-сть, 1983. – 462 с.
5. *Алехина, Н. Д.* Физиология растений : учебник для студ. вузов / Н. Д. Алехина, Ю. В. Балнокин, В. Ф. Гавриленко ; под ред. И. П. Ермакова. – Москва : Издательский центр “Академия”, 2005. – 640 с.
6. *Сенькина, С. Н.* Транспирация и устьичное сопротивление Сосны обыкновенной в разных условиях произрастания / С. Н. Сенькина // Лесной журнал. – 2009. – № 6. – С. 46–52.
7. *Березина, Н. А.* Экология растений : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Н. А. Березина. – Москва : Издательский центр “Академия”, 2009. – 400 с.
8. *Федорков, А. Л.* Изменчивость анатомического строения хвои сосны и ее устойчивость к техногенному и климатическому стрессу / А. Л. Федорков // Экология. – 2002. – № 1. – С. 70–72.
9. *Жукова, И. И.* Адаптация растений к условиям окружающей среды : пособие : в 2 ч. / И. И. Жукова. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2008. – Ч. 1. – 88 с.
10. *Жукова, И. И.* Адаптация растений к условиям окружающей среды : пособие : в 2 ч. / И. И. Жукова. – Могилев МГУ им. А. А. Кулешова, 2009. – Ч. 2. – 68 с.
11. *Kulshrestha, U.* Plant Responses to Air Pollution / U. Kulshrestha, P. Saxena. – Singapore : Springer Verlag, 2016. – 195 с.
12. *Zhenzhu, X.* Elevated-CO₂ Response of Stomata and Its Dependence on Environmental Factors / X. Zhenzhu, Y. Jiang, B. Jia, G. Zhou // Frontiers in Plant Science. – 2016. – № 7. – С. 657.

Поступила в редакцию 21.05.2019 г.

Контакты: povorova@msu.by (Поворова Оксана Викторовна)

viktoriya.livinskaya@mail.ru (Ливинская Виктория Александровна)

Povorova O., Livinskaya V. THE INFLUENCE OF THE URBAN ENVIRONMENT QUALITY IN THE CITY OF MOGILEV ON THE QUANTITATIVE CHARACTERISTICS OF PINE STOMATA (*PINUS SYLVESTRIS*).

The methods of applied statistics have been used to analyze stomata on the cross-sections of Pinus sylvestris leaves growing in an industrial city. A statistically significant difference in the number of stomata in the areas of combined action of combustion products of motor vehicles and pollutants of industrial origin is proved.

The indicator of stomata number can be used as a bioindicator of gas sensitivity of Pinus sylvestris, it is recommended to be considered while choosing gas-resistant species of plants and for ecological monitoring of their habitat.

Keywords: Scots Pine (*Pinus sylvestris*), number of stomata, products of fuel combustion, industrial pollutants, hypothesis testing, nonparametric tests, Cresskill-Wallice criterion, Mann-Whitney test.

УДК 612.821:796

ИЗМЕНЕНИЕ СЕНСОМОТОРНОГО РЕАГИРОВАНИЯ ГРЕБЦОВ РАЗНЫХ ВОЗРАСТНЫХ ГРУПП

Е. А. Кондратенкова

кандидат биологических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Исследование было проведено с целью изучения становления сенсомоторного реагирования гребцов в многолетней динамике тренировочного процесса. Психофизиологическое тестирование включало анализ показателей простой и сложной (реакция выбора) зрительно-моторных реакций. Выявлено, что с ростом спортивного стажа происходит изменение функционального состояния центральной нервной системы обследуемых. Это отражается в постепенном улучшении вначале количественных, а затем и качественных психофизиологических показателей у спортсменов-гребцов.

Ключевые слова: гребцы, психофизиологические показатели, спортивный стаж.

Введение

В иерархической структуре функциональных систем, обеспечивающих процесс адаптации организма к физической нагрузке, центральная нервная система (ЦНС) выполняет ведущую роль. Свойства нервной системы (НС) выступают в качестве лимитирующего фактора спортивной деятельности, определяющего как психологическую подготовленность атлетов, так и модель их двигательных возможностей. Психофизиологическое тестирование, несомненно, должно использоваться для всестороннего медико-биологического обследования спортсменов, поскольку показатели сенсомоторного реагирования объективно отражают текущее функциональное состояние ЦНС [1; 2; 3].

В литературе имеются сведения об особенностях психомоторной организации спортсменов разного возраста и разных специализаций [2; 4; 5; 6]. Однако основное количество данных получено при обследовании взрослых высококвалифицированных спортсменов. На сегодняшний день все еще не ясно, как происходит развитие и становление психофизиологических функций под влиянием специфических тренировочных нагрузок циклического характера. Вместе с тем известно, что этим видам деятельности присущи высокий уровень психоэмоционального напряжения, а отработка двигательных стереотипов требует существенных затрат энергии со стороны НС. Поэтому актуальным представилось произвести мониторинг становления психофизиологических характеристик спортсменов под влиянием регулярных многолетних занятий греблей.

Основная часть

Целью настоящей работы явилось изучение становления сенсомоторного реагирования гребцов в многолетней динамике тренировочного процесса.

В исследовании приняли участие 87 испытуемых 10–18 лет мужского пола – учащиеся Могилевского государственного училища олимпийского резерва, Могилевской областной детско-юношеской спортивной школы по гребным видам спорта и учащиеся общеобразовательных и средних учебных заведений г. Могилева, не занимающиеся спортом. Они были сформированы в группы по 9–11 человек – гребцы и контроль

соответствующего возраста. Они были объединены в восемь групп: четыре экспериментальные – школьники 10–12 лет, прошедшие спортивный отбор ($n = 11$), спортсмены-гребцы 13–14 лет ($n = 10$), спортсмены-гребцы 15–16 лет ($n = 11$) и 17–18 лет ($n = 11$) и четыре контрольные – учащиеся средних школ г. Могилева 10–12 лет ($n = 10$), 13–14 лет ($n = 11$), 15–16 лет ($n = 12$) и студенты первого курса Могилевского государственного университета им. А.А. Кулешова 17–18 лет ($n = 11$), не занимающиеся спортом.

В работе использовался аппаратно-программный комплекс для психофизиологического исследования “НС-Психотест” (“НейроСофт”, Россия, г. Иваново). Психофизиологическое тестирование включало оценку показателей простой зрительно-моторной реакции (ПЗМР) и реакции выбора (РВ). Исследовались следующие показатели простой и сложной зрительно-моторных реакций: время реакции (ВР), коэффициент точности Уиппла и уровень функциональных возможностей (УФВ).

Методика “Простая зрительно-моторная реакция”. Многочисленные исследования показывают, что простая зрительно-моторная реакция объективно отражает текущее состояние ЦНС и является высоко валидным тестом. ПЗМР – это элементарный вид произвольной реакции человека на зрительный стимул. Простая зрительно-моторная реакция состоит из двух последовательных компонентов: сенсорного (латентного) периода и моторного периода.

Латентный период – это период восприятия и идентификации стимульного сигнала, имеющий несколько составляющих:

- Возбуждение рецепторов сетчатки.
- Прохождение сигнала по зрительному анализатору.
- Переработка сигнала центральной нервной системой.
- Принятие решения о конкретном способе реагирования.

Моторный период – это период выполнения движения, включающий следующие этапы:

- Посылка сигнала к исполнительному органу.
- Развитие возбуждения в исполнительном органе.
- Сокращение мышцы конечности, или собственно выполнение движения.

Оценка результатов производится на основании среднего значения времени реакции. Чем меньше среднее значение времени реакции, тем выше скорость реагирования.

Реализация методики: обследуемому последовательно предъявляются световые сигналы одного цвета. При появлении сигнала необходимо как можно быстрее нажать на соответствующую кнопку, стараясь при этом не допускать ошибок (ошибками считаются преждевременное нажатие кнопки и пропуск сигнала). Световой сигнал подается в случайные моменты времени, чтобы не выработывался рефлекс на время, и в то же время достаточно регулярно, чтобы каждый очередной сигнал был ожидаем.

Методика “Реакция выбора”. Реакция выбора – это способность человека наиболее быстро осуществлять выбор адекватного ответа на разнообразные раздражители в условиях дефицита времени и пространства. Произвольная сенсомоторная реакция выбора сложнее простой сенсомоторной реакции и поэтому характеризуется большими значениями времени.

Реализация методики: обследуемому последовательно предъявляются световые сигналы красного и зеленого цвета. При появлении сигнала человек должен как можно быстрее нажать на соответствующую кнопку, стараясь при этом не допускать ошибок (ошибками считаются преждевременное нажатие кнопки и пропуск сигнала).

Статистическая обработка данных проводилась с использованием программы “STATISTICA 6.0”.

На начальном этапе работы были протестированы школьники 10–12 лет, прошедшие спортивный отбор и приступившие к тренировкам по гребле, и их ровесники, не зачисленные в спортивные учреждения (контроль).

Как и можно было предположить, существенных отличий показателей сенсомоторного реагирования у начинающих гребцов по сравнению с контролем у этих испытуемых нет. Время ПЗМР и РВ у обследованных обеих групп почти совпадают. Это, очевидно, связано с начальным этапом тренировочного процесса. Однако у школьников, прошедших спортивный отбор, отмечаются более низкие показатели коэффициента точности Уиппла как при выполнении теста ПЗМР, так и при выполнении теста РВ (таблица 1).

Таблица 1 – Показатели простой зрительно-моторной реакции и реакции выбора у школьников, прошедших спортивный отбор и подростков, не занимающихся спортом (10–12 лет)

Показатель	Гребцы	Контроль
Средняя скорость ПЗМР ($M \pm \sigma$)	265±46,4	265,5±50,3
Коэффициент Уиппла ($M \pm \sigma$), ПЗМР	0,07±0,03	0,1±0,02
УФВ ($M \pm \sigma$), ПЗМР	2,5±1,1	2,4±1,2
Средняя скорость РВ ($M \pm \sigma$)	439,6±85,9	443±110,2
Коэффициент Уиппла ($M \pm \sigma$), РВ	0,16±0,06	0,18±0,07

Известно, что такие качества, как способность к концентрации внимания и стабильность работы всех функциональных систем являются чрезвычайно важными для этого вида спорта.

На втором этапе работы нами были обследованы спортсмены с небольшим стажем спортивной деятельности (год и более), систематически занимающиеся греблей. Показатели времени ПЗМР и РВ оказались ниже у гребцов по сравнению с контрольной группой (на 10 и 9,3 мс соответственно) (таблица 2).

Таблица 2 – Показатели простой зрительно-моторной реакции и реакции выбора у спортсменов-гребцов и подростков, не занимающихся спортом (13–14 лет)

Показатель	Гребцы	Контроль
Средняя скорость ПЗМР ($M \pm \sigma$)	223±39,2	233±47,2
Коэффициент Уиппла ($M \pm \sigma$), ПЗМР	0,06±0,03	0,05±0,04
УФВ ($M \pm \sigma$), ПЗМР	2,7±0,7	2,7±0,93
Средняя скорость РВ ($M \pm \sigma$)	373,6±97,2	382,8±103,1
Коэффициент Уиппла ($M \pm \sigma$), РВ	0,14±0,07	0,18±0,05

Известно, что показатель времени ПЗМР характеризует уровень возбуждения центральной НС и скорость распространения возбуждения по нервным цепям, а наиболее существенное уменьшение времени сложной РВ наблюдается при совершенствовании ее моторного компонента. Это свидетельствует, видимо, о более высокой подвижности нервных процессов у гребцов этой возрастной группы. Гребцы с небольшим стажем спортивной деятельности, также как и начинающие, имеют меньшую величину стандартного отклонения (таблицы 1, 2) чем их сверстники, не занимающиеся спортом. Коэффициент точности Уиппла (ПЗМР) у спортсменов и их ровесников, не занимающихся спортом, был практически одинаковым. Однако у начинающих гребцов при выполнении теста РВ этот показатель был ниже, чем у учащихся средней школы. То есть, спортсмены совершали меньше ошибок при дифференцировке сигналов, чем подростки, не занимающиеся спортом (ошибками считаются преждевременное нажатие кнопки и пропуск сигнала). Это свидетельствует о большей устойчивости внимания, обусловленной, прежде всего, силой и уравновешенностью нервных процессов [7; 8].

Таким образом, далее интересным оказалось проанализировать, как изменяются аналогичные показатели ПЗМР и РВ спортсменов-гребцов 15–16 лет, стаж спортивной

деятельности у которых был, соответственно, больше. Средняя скорость ПЗМР и РВ гребцов этой возрастной группы оказалась достоверно ниже, чем у гребцов 13–14 лет и их сверстников, не занимающихся спортом (таблицы 2 и 3).

Таблица 3 – Показатели простой зрительно-моторной реакции и реакции выбора у спортсменов-гребцов и подростков, не занимающихся спортом (15–16 лет)

Показатель	Гребцы	Контроль
Средняя скорость ПЗМР ($M \pm \sigma$)	204±33,3*	213±39,9
Коэффициент Уиппла ($M \pm \sigma$), ПЗМР	0,07±0,03	0,04±0,02
УФВ ($M \pm \sigma$), ПЗМР	3,3±1,1	3,23±1
Средняя скорость РВ ($M \pm \sigma$)	304±63,7*	339±77,9
Коэффициент Уиппла ($M \pm \sigma$), РВ	0,19±0,06	0,21±0,07

Примечание: * – $P < 0,05$

При выполнении этих тестов величина стандартного отклонения у спортсменов-гребцов 15–16 лет также оказалась меньше по сравнению с другими обследуемыми, что объясняется ростом стабильности сенсомоторного реагирования. Это означает, что ведущими факторами выявленных изменений являются не только естественные процессы роста и развития, но и кумулятивный эффект тренировочных занятий, приводящий к улучшению функционального состояния ЦНС у спортсменов этого возраста. Под влиянием систематических тренировок у гребцов 15–16 лет увеличивается не только скорость проведения нервного импульса, но и улучшается состояние нервно-мышечного аппарата [7; 8]. Существенных различий в показателях коэффициента точности Уиппла между представителями подростков этой возрастной группы установить не удалось.

При анализе показателей ПЗМР гребцов старшей возрастной группы (17–18 лет) и их ровесников, не занимающихся спортом, было выявлено, что к этому времени скорость ПЗМР и величина стандартного отклонения у них снижаются незначительно по сравнению с контролем и спортсменами 15–16 лет (таблицы 3, 4).

Таблица 4 – Показатели простой зрительно-моторной реакции и реакции выбора у спортсменов-гребцов и подростков, не занимающихся спортом (17–18 лет)

Показатель	Гребцы	Контроль
Средняя скорость ПЗМР ($M \pm \sigma$)	195±33,6	205±33,5
Коэффициент Уиппла ($M \pm \sigma$), ПЗМР	0,04±0,01*	0,1±0,03
УФВ ($M \pm \sigma$), ПЗМР	3,45±0,7	3,35±0,6
Средняя скорость РВ ($M \pm \sigma$)	309±62,1	328±72,8
Коэффициент Уиппла ($M \pm \sigma$), РВ	0,16±0,04*	0,22±0,06

Примечание: * – $P < 0,05$

Однако интересным оказался тот факт, что коэффициент точности Уиппла (ПЗМР и РВ) у гребцов 17–18 лет стал меньше, чем у спортсменов 15–16 лет, и достоверно ниже, чем у их ровесников, не занимающихся спортом (таблица 4). Чем меньше данный показатель, тем выше степень точности выполнения задания. Улучшение качества работы указывает на стабилизацию состояния центральных регуляторных механизмов у спортсменов этой возрастной группы. Кроме того, известно, что темпы прироста большинства значимых показателей могут снижаться временно, что связано с гетерохронностью развития отдельных структур мозга [3; 5; 7]. Более высокие показатели УФВ у спортсменов 17–18 лет по сравнению с младшими гребцами и контролем позволяют

предполагать наличие определенных резервов ЦНС, которые, возможно, будут реализованы на следующем возрастном этапе.

Заключение

Оценивая собранный материал в целом, можно заключить, что регулярные многолетние занятия греблей оказывают благотворное влияние на работоспособность и функциональное состояние ЦНС спортсменов. Уже на начальных этапах занятия этим видом спорта у подростков 13–14 лет намечается тенденция к стабилизации сенсомоторного реагирования и улучшению концентрации внимания.

К 15–16 годам у гребцов повышается скорость ПЗМР и РВ. Чем менее трудным и более автоматизированным является тренируемое движение, тем меньшее напряжение при его реализации испытывает нервная система, короче реакция и быстрее ответное действие, что объективно отражают показатели ПЗМР. Сложность выполнения теста РВ заключается в том, что ответное действие (нажатие определенной кнопки в ответ на разные световые раздражители) нужно провести в очень короткий временной интервал, что провоцирует стрессовое состояние. Очевидно, к этому возрасту у спортсменов под влиянием систематических тренировок нейроны переходят на новый уровень функционирования, за счет чего увеличивается скорость восприятия и переработки поступающей информации, улучшается состояние нервно-мышечного аппарата, увеличивается скорость проведения нервных импульсов, что обеспечивает более совершенную адаптацию к физическим нагрузкам.

У гребцов старшей возрастной группы (17–18 лет) улучшается качество выполняемой работы. Возможно, на данном возрастном этапе под влиянием систематических нагрузок циклического характера происходит совершенствование и стабилизация координационных способностей за счет приостановки роста количественных показателей, что немаловажно при занятиях греблей.

Уровень функциональных возможностей у всех спортсменов находился в пределах состояния, характеризуемого как “незначительно сниженная работоспособность”, границы которой – 2,0–3,7 усл. ед, что указывает на необходимость мониторинга функционального состояния спортсменов в различные периоды учебно-тренировочного процесса.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Bigsby, K.* Effects of postural control manipulation on visuomotor training performance: comparative data in healthy athletes / K. Bigsby, R. Mangine, J. Clark, et al. // *Int. J. Sports PhysTher*, 2014. – № 9(4). – P. 436–446.
2. *Zakharova, A.* Physical and Psychophysiological Profiles of Sub-elite Basketball Players Novel Approach to Complex Testing / A. Zakharova, K. Mekhdieva, S. Kondratovitch // *Proceedings of the 5th International Congress on Sport Sciences Research and Technology Support*, 2017. – P. 132–139.
3. *Ильин, Е. П.* Психология спорта. / Е. П. Ильин. – СПб. : Питер, 2012. – 338 с.
4. *Готовцев, И. И.* Актуальные вопросы развития физической культуры и массового спорта на современном этапе / И. И. Готовцев. – Киров : МЦНИП, 2014. – 437 с.
5. *Микрюкова, М. Г.* Дифференцированный подход к подготовке юных спортсменов на основе учета свойств нервной системы / М. Г. Микрюкова // *Современные проблемы науки и образования*. – Киров, 2015. – № 1(1). – С. 166–168.
6. *Потапкин, Д. И.* Психофизиологические характеристики хоккеистов 14–15 лет как фактор успешности соревновательной деятельности / Д. И. Потапкин, Т. В. Сборцева, А. А. Кылосов // *Современные научные исследования и разработки*. – Астрахань, 2016. – № 4(4). – С. 68–70.
7. *Кондратенкова, Е. А.* Анализ особенностей сенсомоторного реагирования у гребцов 13–16 лет / Е. А. Кондратенкова, Н. О. Мартусевич, О. Л. Борисов // *Актуальные проблемы*

естественных наук и их преподавания : материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 100-летию МГУ имени А. А. Кулешова, 20–22 февраля 2013 г., г. Могилев, МГУ имени А. А. Кулешова / под общ. ред. Т. Ю. Герасимовой, Д. В. Киселевой. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2013. – С. 467–469.

8. **Кондратенкова, Е. А.** Динамика простой зрительно-моторной реакции у гребцов 13–18 лет / Е. А. Кондратенкова, Н. О. Мартусевич // Вопросы экспериментальной и клинической физиологии : сборник научных трудов, посвященный 100-летию со дня рождения Н. И. Аринчина / отв. ред. В. В. Зинчук. – Гродно : ГрГМУ, 2014. – С. 159–162.

Поступила в редакцию 03.06.2019 г.

Контакты: kat-kondratenkova@yandex.ru (Кондратенкова Екатерина Александровна)

Kondratenkova Ye. CHANGES IN SENSOMOTOR REACTION OF OARSMEN OF DIFFERENT AGE GROUPS.

The research has been conducted in order to study the formation of sensomotor reaction of oarsmen in the long-term dynamics of the training process. Psychophysiological testing included the analysis of indicators of simple and difficult (choice behaviour) visual and motor reactions. It has been revealed that the growth of sports experience results in the change of the functional status of the central nervous system of those examined. It shows up in gradual improvement of quantitative characteristics and then of quality psychophysiological indicators that oarsmen demonstrate.

Keywords: oarsmen, psychophysiological indicators, sports experience.

УДК 599.323.4:574.4 (476)

ОЦЕНКА ПЛОТНОСТИ ПОПУЛЯЦИЙ ВИДОВ РОДА *MICROTUS* ДОЛИННЫХ ЭКОСИСТЕМ БЕЛАРУСИ

Е. И. Машков

аспирант, младший научный сотрудник НПЦ НАН Беларуси по биоресурсам

Е. С. Гайдученко

кандидат биологических наук,

старший научный сотрудник НПЦ НАН Беларуси

И. А. Крищук

кандидат биологических наук, старший научный сотрудник

НПЦ НАН Беларуси по биоресурсам

И. А. Соловей

кандидат биологических наук, ведущий научный сотрудник

НПЦ НАН Беларуси по биоресурсам

Для изучения обилия и плотности популяций видов-двойников обыкновенной полевки, а также для оценки видовой структуры ассоциаций мелких грызунов и насекомых на территории четырех физико-географических провинций Беларуси были проведены учетные ловы.

В ходе работы было выявлено обитание 17 видов мелких грызунов и насекомых. В период исследования 2016–2018 гг. у представителей рода *Microtus* наблюдалась депрессия численности, в связи с чем особи либо не отлавливались вовсе, либо попадались единичные экземпляры, несмотря на обловы многочисленных участков в видоспецифичных биотопах. В годы депрессии численности обыкновенная полевка наиболее часто регистрировалась на разнотравных суходольных лугах, где велось сенокосение и выпас скота, а также по разнотравно-злаковым участкам низинных болот.

Ключевые слова: популяция, криптические виды, виды-двойники, обыкновенная полевка, распространение, провинция, Беларусь.

Введение

Обыкновенная полевка – экологически пластичный вид, занимающий обширный ареал обитания практически на территории всей Евразии. В Беларуси это один из наиболее многочисленных, населяющих практически все экосистемы видов [1–2; 3–4]. Благодаря гибридологическим и цитогенетическим исследованиям [4–5] установлено, что обыкновенная полевка (*Microtus arvalis* Pallas, 1778 sensu lato) состоит как минимум из пяти самостоятельных, но сходных по морфологическим признакам и биологии видов. Так одними из первых российскими коллегами были обнаружены криптические виды восточноевропейской (*Microtus rossiameridionalis*, $2n = 54$) и обыкновенной *M. Arvalis* $2n = 46$) полевков [6], а также выявлены две кариоморфы у 46-хромосомной обыкновенной полевки (*M. arvalis* формы *obscurus* $NF=72$ и *M. arvalis* формы *arvalis*, $NF = 84$) [7], которые различаются морфологией мелких пар аутосом и Y-хромосомы.

© Машков Е. И., 2019

© Гайдученко Е. С., 2019

© Крищук И. А., 2019

© Соловей И. А., 2019

Криптические виды *M. arvalis* относятся к быстро эволюционирующей филогенетической ветви мышевидных грызунов и ввиду цитогенетических особенностей являются весьма перспективными в качестве модельного объекта при изучении механизмов эволюции млекопитающих [8–9].

Виды-двойники, *M. arvalis* и *M. rossiameridionalis* при отсутствии морфологических различий [10] имеют некоторые этологические и эпидемиологические отличия друг от друга. Так, восточноевропейская полевка является более синантропным видом [4; 11–12], при этом за счет непосредственных контактов с человеком несет определенную степень эпидемиологической опасности в очагах туляремии луго-полевого типа Европейской России [11]. В отличие от восточноевропейской полевки, обыкновенная полевка (*M. arvalis*) ввиду тяготения к агро- и луго-полевым экосистемам является потенциально более опасным вредителем сельского хозяйства, что приводит к активному поеданию посевных сельскохозяйственных культур в годы массового размножения зверька.

На территории Беларуси изучение обилия и плотности популяций видов рода *Microtus* проводились Н.В. Башениной [13], В.Н. Орловым [7], позже изучение криптических видов *M. arvalis* с применением кариотипологических методов проводилось в 1980-е гг. [10; 14; 15; 16]. Было установлено, что на территории Беларуси обитают два криптических вида – *M. arvalis* ($2n = 46$) и *M. rossiameridionalis* ($2n = 54$). При этом установлено также два пункта совместного обитания видов-двойников [10; 13]. Однако методологический подход и объемы выборок, приводимых автором в работе, позволяет усомниться в правомочности предположения о том, что на территории Беларуси существует два вида-двойника – *Microtus arvalis* и *Microtus rossiameridionalis*.

В ходе работ, проводимых на территории Беларуси [17; 18], было выявлено, что популяции обыкновенной полевки подвержены циклическому колебанию численности. Предполагается, что колебания численности возникают из-за запаздывающей реакции популяций на внешние факторы, зависящие от плотности популяции.

Цель исследования – оценка видовой структуры ассоциаций мелких млекопитающих; установление плотности популяций видов рода *Microtus* в долинных экосистемах Беларуси.

Материалы и методы исследования

Материалом для настоящей работы послужили данные, собранные на протяжении 2016–2018 гг. с помощью живоловушек трапикового типа. Учет проводился по стандартной методике учета методом ловушко-суток. Ловушки расставляли в линии по 25–50 штук на расстоянии 5 метров друг от друга. Постановка линий по 25 ловушек, дает возможность оценить равномерное распределение грызунов. В качестве приманки использовался геркулес, смоченный нерафинированным подсолнечным маслом. Погибших в живоловках зверьков измеряли, и проводили зоологическое вскрытие для установления их генеративного статуса и возрастного класса. Возраст зверьков определяли по комплексу признаков: размерам тела, форме и размерам черепа, развитию гребней на черепе, наличию тимуса. К молодым (сеголеткам) относили зверьков небольших размеров с развитым тимусом и без выраженных гребней на черепе [13; 19; 20; 21].

По отработанной методике, ловушко-линии экспонировали на одном биотопе 3–5 суток [17; 20; 22; 23].

Пункты сбора материала приведены на рисунке 1.

В выборе мест проведения сбора полевого материала мы руководствовались тем, что в их число входят локалитеты, которые использовались ранее рядом авторов, что упрощает сравнение полученных нами данных с литературными.

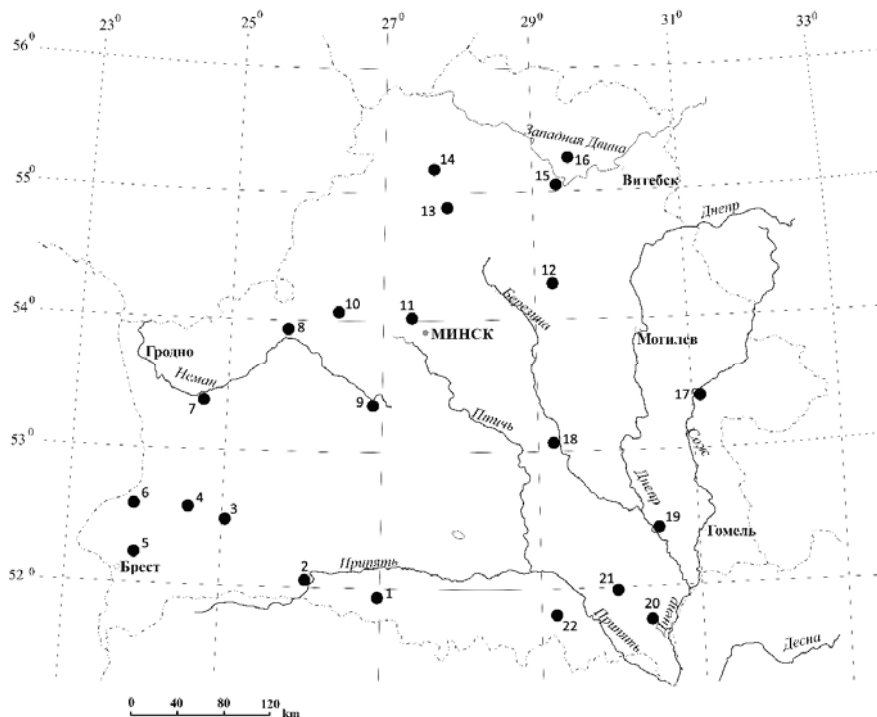


Рисунок 1 – Места сбора полевого материала

1 – окр. г. Лядец, Столинский район; 2 – окр. д. Плещицы, Пинский район; 3 – окр. г. Белоозерск, Березовский район; 4 – окр. г. Пружаны; 5 – окр. г. Жабинка; 6 – окр. агр. Каменюки, Брестская область; 7 – окр. д. Мосты левые, Мостовский район; 8 – окр. д. Лукашино, Ивьевский район, Гродненская область; 9 – окр. д. Николаевщина, Столбцовский район; 10 – окр. д. Белокорец, Воложинский район; 11 – окр. д. Романов, Молодечненский район; 12 – окр. д. Новая жизнь, Крупский район, Минская область; 13 – окр. д. Шнитки, Докшицкий район; 14 – окр. агр. Озерцы, Глубокский район; 15 – окр. д. Яновиль, Бешенковичский район; 16 – окр. г. п. Шумилино, Витебская область; 17 – окр. г. Славгород, Могилевская область; 18 – окр. г. п. Паричи, Светлогорский район; 19 – окр. д. Черное, Речицкий район; 20 – окр. д. Иванки, Брагинский район; 21 – окр. г. Хойники; 22 – окр. д. Добрынь, Ельский район, Гомельская область.

За период ловов 2016–2018 гг. на территории Беларуси нами было отработано 382 640 ловушко-суток на учетных площадках в 22 районах (на территории четырех провинций) (1).

Относительная численность мелких млекопитающих определялась по формуле

$$\text{Относительная численность} = \frac{n}{\text{количество ловушко-суток}} \cdot 100, \quad (1)$$

где n – число добытых зверьков.

Видовое разнообразие сообществ мелких млекопитающих оценивалось индексом Маргалефа [24] (2)

$$D_{Mg} = \frac{S-1}{\ln N}. \quad (2)$$

Эколагічная структура ісследаваных груп мікрамамалій ацэнівалася індэксам Шэннона-Уівера [25] (3)

$$H = -\sum p_i \ln p_i . \quad (3)$$

Структурнае разнаобразіе – індэксам Піелу [25] (4)

$$e = \frac{H'}{H_{\max}} . \quad (4)$$

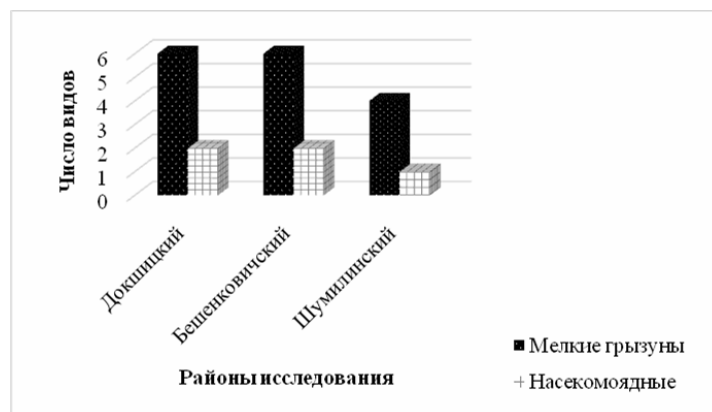
Для ацэнкі ступені домінавання відаў у даным біятопе іскавалі індэкс домінавання Бергера-Паркера [26], выражаючы адноснае значнасць найбольшага віда (5),

$$d = \frac{N_{\max}}{N} . \quad (5)$$

Результаты ісследавання і іх абсуджэнне

Відовае разнаобразіе мікрамамалій у долінных экосістэмах Беларусі. В 2016–2018 гг. для ісследавання відовага састава і выяўлення відаў-двойнікоў звычайнай полеўкі, а таксама для ацэнкі відовай структуры асацыяцый мелкіх грызуноў і насякомоядных, праведзены іх уліковыя ловы на тэрыторыі 4 фізіка-геаграфічных правінцый Беларусі.

У долінных экосістэмах Поозер'я былі праведзены уліковыя ловы ў 3 раёнах ісследавання: Докшыцкім, Бешанковіцкім, Шумілінскім ў 2017–2018 гг. Такім чынам, на поўначы Беларусі выяўлена дзесяць відаў мелкіх грызуноў – восем, насякомоядных – два віда (рысунк 2).



Рисунк 2 – Число выяўленых відаў на тэрыторыі Поозерскай правінцыі

Среди мелкіх грызуноў у ісследаваных раёнах былі выяўлены наступныя віды: *Apodemus agrarius*, *Silvaemus (=Apodemus) flavicollis*, *Arvicola amphibius*, *Micromys minutus*, *Myodes glareolus*, *Microtus agrestis*, *Microtus arvalis*, *Microtus oeconomus*. У луговых біятопах, а таксама ў нізінных болотах домінаруючым відам была звычайная бурозубка (5,0-9,4 асобей на 100 ловушко-сутак), доля ад другіх відаў даходзіла ад 37,3% да 66,7%. Па даным ісследаванняў І.А. Соловей [17; 27; 28; 29], на поўначы Беларусі выяўлена 16 відаў мелкіх грызуноў (12 відаў) і насякомоядных (4 віда). У відовай структуры асацыяцый мелкіх млекапитаючых лесных экосістэм (ельнікі, елава-мелкаліственны лес, соснава-еловы лес, чэрноольшаннікі і сёроольшаннікі) у відовай структуры пераважала полеўка рыжая [17].

Наибольшее видовое богатство ассоциаций мелких млекопитающих выявлено на разнотравном низинном внепойменном болоте (5 видов), $H = 1,53$, и лугу пойменном (семь видов, $H = 1,22$). Индекс Шеннона был высок и на береговом экотоне – 1,39, но здесь выявлено всего четыре вида и их видовое обилие было схожим, что при малом объеме выборки дает относительно равное распределение в структуре и, соответственно, большое значение индекса разнообразия.

В отношении обыкновенной полевки выявлено, что она регистрировалась с довольно большой плотностью популяции только на разнотипных лугах – до 18 особей на 100 ловушко-суток, и несколько меньше в экотоне (в среднем 5,6 особей на 100 ловушко-суток); в лесных комплексах плотность популяции была низкая (в среднем 1,5 особей на 100 ловушко-суток); на пойменном сенокосном лугу (в среднем 0,2 особей на 100 ловушко-суток); болото низинное внепойменное (в среднем 1,7 особей на 100 ловушко-суток, таблица 1).

Таблица 1 – Обилие (особей на 100 ловушко-суток) и доля вида (в %) в разнотипных биотопах в Поозерской провинции

Вид	Районы	ЛМ	ЛПС	БНВ	ЛСВ	ЛСВ	БЭЛ-К
<i>Microtus arvalis</i>	Докшицкий	1,5 (34,1)	0,2 (3,4)	1,7 (12,7)			
	Бешенковичский			1,7 (23,3)	5,6 (26,3)		
	Шумилинский					18,0 (91,4)	0,9(4,0)

Примечание: ЛМ – Лес мелколиственный, ЛПС – Луг пойменный сенокосный, БНВ – Болото низинное внепойменное, БЭО – Береговой экотон озера, ЛСВ – Луг суход. на мелиор. частично выпас, БЭЛ-К – Береговой экотон луг-канал.

Для Белорусской возвышенной провинции (центрально-западная часть Беларуси) характерны холмисто-моренно-эрозионные и вторичноморенные ландшафты с широколиственно-еловыми и сосновыми лесами на дерново-подзолистых почвах. На территории данной провинции проведены обловы мелких млекопитающих в 4 районах исследования: Мостовский, Ивьевский, Столбцовский, Воложинский (рисунок 1).

В центрально-западной части Беларуси нами было выявлено 10 видов мелких грызунов (8) и насекомоядных (2 вида, рисунок 3).

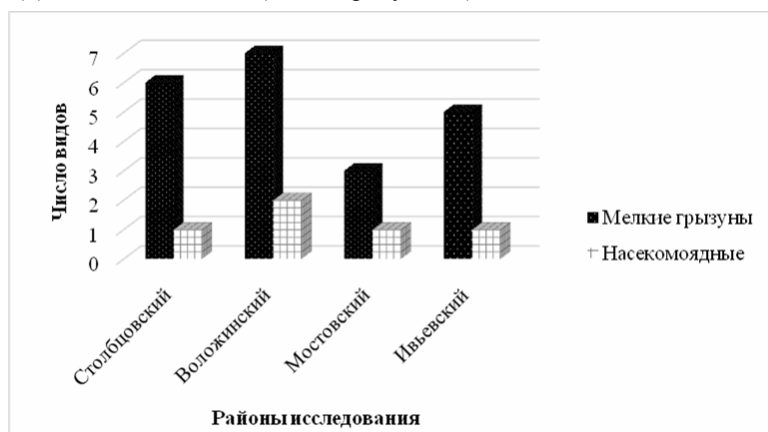


Рисунок 3 – Число выявленных видов на территории Белорусской возвышенной провинции

Видовой состав представлен следующими видами: *A. agrarius*, *S. flavicollis*, *A. sylvaticus*, *A. uralensis*, *M. minutus*, *M. glareolus*, *M. arvalis*, *M. oeconomus*, *S. araneus*, *S. minutus*. В теплый период в видовой структуре на суходольных разнотравных лугах преобладали полевая мышь и полевка обыкновенная (от 4,1 особи на 100 ловушко-суток Воложинский район до 8,0 особи на 100 ловушко-суток Столбцовский район), а на разнотравных лугах доминировала обыкновенная бурозубка (Столбцовский район от 2,0 до 19,3 (Воложинский район) особи на 100 ловушко-суток).

На территории Мостовского и Ивьевского районов выявлено обитание семи видов мелких млекопитающих, из них 5 видов мелких грызунов. В разные годы и в разных биотопах доминировали в основном виды открытых пространств – полевая мышь, полевка обыкновенная либо полевка-экономка. В целом видовое богатство ассоциаций мелких млекопитающих было не особо большим, $H = 0,25-1,34$ при наличии всего 2-4 вида.

В целом для суходольных лугов центрально-западной части Беларуси выявлено довольно высокое видовое разнообразие – $H = 1,45-1,54$ при наличии 5-7 видов. Наименьшее видовое богатство было в черноольшанниках и на участках сенокосных лугов – 3-4 вида, $H = 0,91-1,19$.

Обыкновенная полевка регистрировалась во всех районах исследования с небольшой плотностью популяции (0,3-20,0, в среднем 7,2 особей на 100 ловушко-суток) на разнотравных пойменных и внепойменных лугах, и в экотоне (таблица 2).

Таблица 2 – Обилие (особей на 100 ловушко-суток) и доля вида (в %) в разнотипных биотопах долинных экосистем Поозерской и Предполесско-Восточно-Белорусской провинций

Вид	Районы	ЛСРВ	ЛРП	ЛСВ	ЛРСВ	ЛРВ	ЭС-Л
<i>Microtus arvalis</i>	Столбцовский			8,0(26,7)			
	Воложинский				4,1(23,2)	6,3(14,5)	
	Мостовский						4,0 (14,8)
	Ивьевский	20,0 (51,3)	0,3 (17,6)				
	Крупский		9,0 (27,3)				

Примечание: ЛСРВ – Луг суходольный разнотравный, внепойменный, ЛРП – Луг разнотравный пойменный, ЛСВ – Луг суходольный на мелиор. частично выпас, ЛРСВ – Луг разнотравный, частично сенокосный, внепойменный, ЛРВ – Луг разнотравный, внепойменный, ЭС-Л – Экотон сосняк-луг.

Так как учетные ловы проводились в первой половине осени (сентябрь 2017–2018) и в специфических для данного вида биотопах, то из полученных результатов (таблица 2) можно заметить высокую долю обыкновенной полевки от других видов (от 14,5% Воложинский район до 51,3% Ивьевский район). По многолетним данным Е.С. Блоцкой и В.Е. Гайдука [30; 31], наибольшая численность обыкновенной полевки в летний период характерна для посевов сельскохозяйственных культур, где обилие составило 3,5 особей на 100 ловушко-суток.

Предполесско-Восточно-Белорусская провинция характерна вторично моренным и лессовым ландшафтом с широколиственно-еловыми и еловыми лесами на дерново-подзолистых и дерново-палево-подзолистых почвах. Данная провинция занимает обширную часть территории Беларуси. Учетные ловы проводились в 3 районах исследования: Крупский, Славгородский, Светлогорский районы (рисунок 1). В период проведения полевых работ нами было выявлено 9 видов мелких млекопитающих: из них 6 видов мелких грызунов и 3 вида насекомыхядных (рисунок 4).

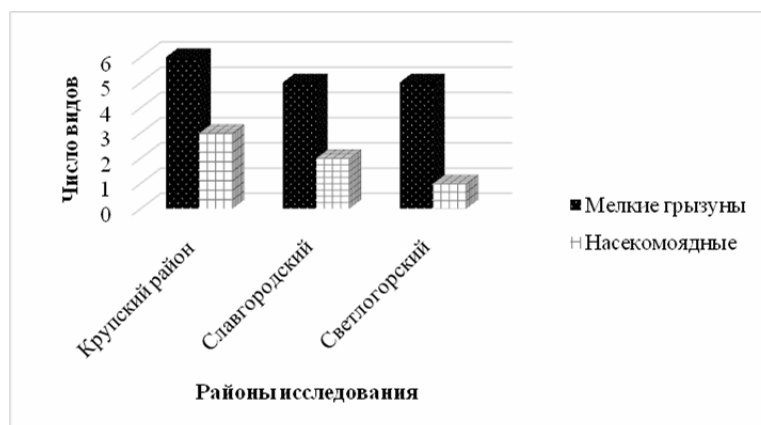


Рисунок 4 – Число выявленных видов на территории Предполесско-Восточно-Белорусской провинции

В местах проведения учетных ловов, в выборках выявлено 9 видов мелких млекопитающих: *A. agrarius*, *S. flavicollis*, *A. sylvaticus*, *A. uralensis*, *M. glareolus*, *M. arvalis*, *N. fodiens*, *S. araneus*, *S. minutus*.

Обыкновенная полевка регистрировалась в одном районе исследования Предполесско-Восточно-Белорусской провинции (таблица 2). Показатель улавливаемости составил 9,0 особей на 100 ловушко-суток. Относительное обилие вида является низким, так как уловы в данном районе исследования проводились во второй половине осени (первая половина ноября) в специфических для вида биотопах. По данным И.А. Кришук и Е.С. Гайдученко [32], присутствие обыкновенной полевки было отмечено в большинстве исследованных пойменных экосистем Светлогорского района. Так как исследования проводились в период депрессии вида, относительная численность составила от 1 до 3 особей на 100 ловушко-суток. Ранее отмечено [33], что средняя численность обыкновенной полевки может достигать до 30 особей на 100 ловушко-суток.

На территории Полесской провинции, в 2016–2018 гг. проведены исследования по выявлению видового состава микромаммалий. Данная провинция характерна озерно-аллювиальным, болотным и вторично водноледниковым ландшафтом с сосновыми, широколиственно-сосновыми и дубовыми лесами на дерново-подзолистых, часто заболоченных почвах, болотами.

В работе было охвачено 10 районов исследования: Столинский, Пинский Березовский, Жабинковский, Пружанский, Каменецкий, Речицкий Брагинский Хойникский, Ельский районы (рисунок 1).

На юго-западе Беларуси, в Брестской области, исследования проведены в шести административных районах (Березовский, Столинский, Пинский, Жабинковский, Каменецкий, Пружанский районы. Рисунок 5).

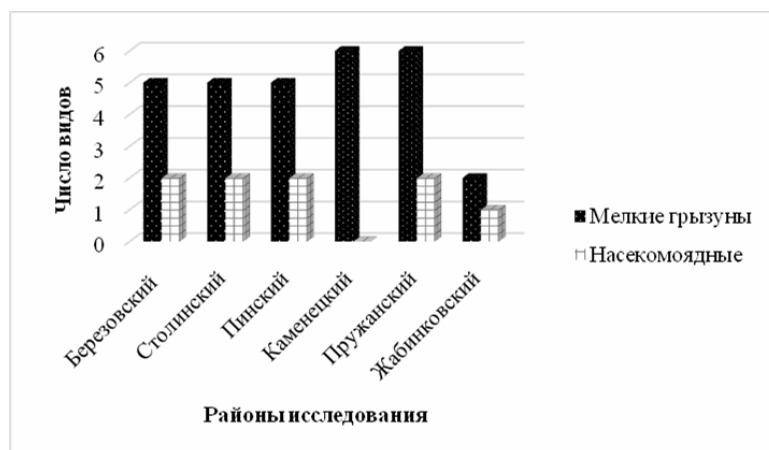


Рисунок 5 – Число выявленных видов на территории Полесской провинции (западная часть)

Видовой состав микромаммалей: *A. agrarius*, *S. flavicollis*, *A. sylvaticus*, *M. minutus*, *M. glareolus*, *A. amphibius*, *M. agrestis*, *M. arvalis*, *M. oeconomus*, *N. fodiens*, *S. araneus*, *S. minutus*. Доминирующим видом в 5 районах исследования была малая бурозубка (доля вида от 16,3% Столинский район до 42,1% Пружанский район). В Каменецком районе доминирующим видом в лесных биотопах была желтогорлая мышь (от 65,0% до 67,5%), в луговом биотопе – мышь малютка (69,6%). Ранее на данной территории были проведены работы И.М. Зениной [18; 23] по изучению численности и видовому разнообразию мелких млекопитающих. В ходе исследования было выявлено обитание 15 видов мелких млекопитающих на данной территории.

В 2017–2018 гг. исследования на юго-востоке Беларуси выявили 13 видов мелких грызунов (10 видов) и насекомоядных (3 вида). В видовой структуре ассоциаций мелких млекопитающих лесных экосистем (елово-сосновый лес, сосняк, дубрава, черноольшанник, осинник) преобладали полевка рыжая и/или мышь желтогорлая. Субдоминантным видом была бурозубка обыкновенная. Наиболее бедные ассоциации этих мелких млекопитающих сформировались в разнотипных сосняках (1-3 вида), а наиболее богатые – в смешанных березовых и черноольховых лесах и пойменных дубравах (5-8 видов, рисунок 6).

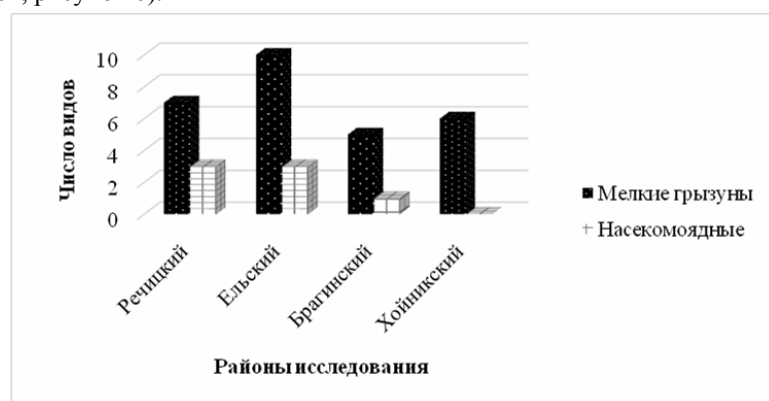


Рисунок 6 – Число выявленных видов на территории Полесской провинции (восточная часть)

На суходольных лугах, подвергающихся антропогенной нагрузке, т. е. используемые для сенокосения и выпаса скота, в видовой структуре ассоциаций мелких млекопитающих доминировала обыкновенная полевка (от 24,2% Пружанский район до 88,5% Березовский район. Таблица 3). Необходимо отметить, что обилие обыкновенной полевки в видовой структуре ассоциаций связано с малым количеством особей других представителей, а не с высокой плотностью вида. В других открытых нелесных экосистемах (разнотипные болота, пойменные луга и их экотоны) доминировали мышь полевая, а субдоминантными были малая бурозубка, бурозубка обыкновенная. А вот на относительно естественных низинных болотах доминировала полевка-экономка. Остальные виды отлавливались значительно реже и в основном в нелесных биотопах: полевка водяная, полевка темная, мышь-малютка, кутора обыкновенная, европейская лесная мышь.

Таблица 3 – Обилие (особей на 100 ловушко-суток) и доля вида (в %) в разнотипных биотопах в Полесской провинции

Вид	Районы	ЛРП	БО	БО-3-3	ЗЛ	ЛПС	ЛСВ	ЛРСВ	В
<i>Microtus arvalis</i>	Речицкий	1,3 (3,6)							
	Ельский		1,8 (15,3)	2,0 (10,8)	1,0 (21,3)				
	Березовский					13,1 (88,5)			
	Столинский							13,4 (48,6)	
	Пинский					1,0 (2,1)			
	Каменецкий								0,7 (5,6)
	Пружанский						3,8 (24,2)	1,5 (9,3)	

Примечание: ЛРП – Луг разнотравный пойменный, БО – Березняк осоковый, БО-3-3 – Болото осоково-злаково-закустаренное, ЗЛ – Закустаренный луг, ЛСВ – Луг суход. на мелиор. частично выпас, ЛРСВ – Луг разнотравный, частично сенокосный, внепойменный, В – Вырубки.

Наибольшее видовое богатство ассоциаций мелких грызунов и насекомоядных выявлено на открытых биотопах (разнотипные луга и открытые болота – 5-8 видов), $H = 1,23-1,55$, что заметно больше, чем в лесных местах обитания 0,63-0,98 (2-6 видов) и на используемых в сельском хозяйстве для сенокосов и пастбищ – 0,56-0,65 (2-5 видов).

В ходе исследования на территории Беларуси было выявлено обитание 17 видов мелких грызунов и насекомоядных. Все эти виды являются обычными и широко распространенными в нашей стране и приурочены к определенным местам обитания. В ходе работы нами не установлены виды-двойники обыкновенной полевки в исследуемых районах.

В отношении обыкновенной полевки можно сказать, что в 2016–2018 гг. популяция этого вида находилась на стадии депрессии. Известно, что обыкновенная полевка имеет циклическую динамику численности популяции с периодами между пиками 4–5 лет. Согласно многолетним данным Е.С. Гайдученко [22; 34; 35], этот вид может быть довольно многочисленным – до 53,0 особей на 100 ловушко-суток в годы пика численности. В годы депрессии численности обыкновенной полевки наиболее часто она регистрировалась на разнотравных суходольных лугах, где велось сенокосение и выпас скота, а также по разнотравно-злаковым участкам низинных болот.

Сообщества мелких млекопитающих в исследованных формациях Беларуси неоднозначны по видовой структуре, разнообразию, выравненности и ряду других параметров.

Для выявления различий в сообществах мелких млекопитающих, нами был проведен их сравнительный анализ. В анализ были включены сообщества мышевидных грызунов из четырех провинций Беларуси: Поозерье (15,0 особей на 100 ловушко-суток), Белорусская возвышенная провинция (18,5 особей на 100 ловушко-суток), Предполесско-Восточно-Белорусская провинция (17,2 особи на 100 ловушко-суток), Полесская провинция (18,2 особи на 100 ловушко-суток, рисунок 7).

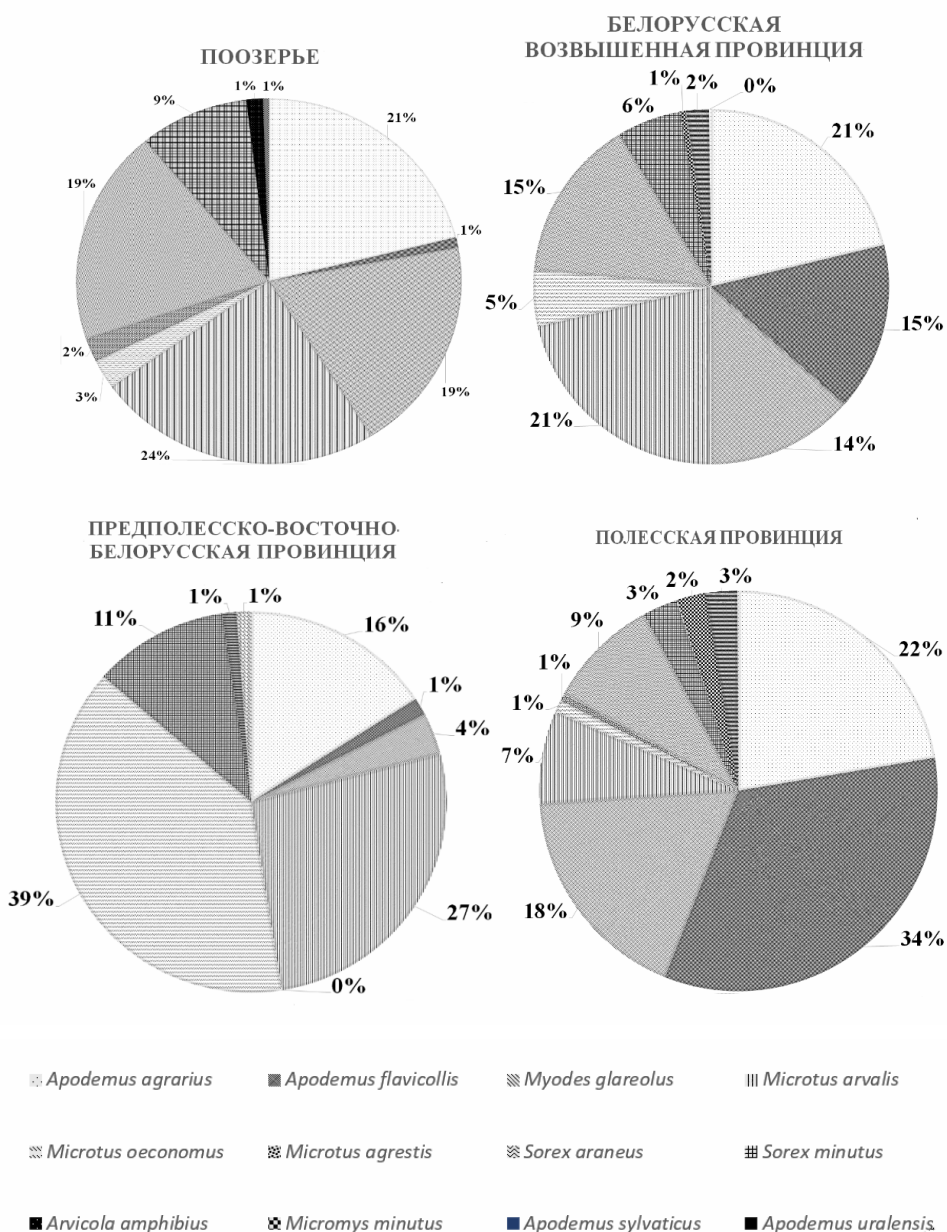


Рисунок 7 – Структура сообщества мышевидных грызунов в исследуемых экосистемах

Видовой состав мелких млекопитающих в исследуемых провинциях имеет ряд общих черт. Сообщества Поозерья, Белорусской возвышенной провинции и Предполесско-Восточно-Белорусская провинция схожи по субдоминантному виду обыкновенная полевка (24%, 21% и 27% соответственно), но отличаются по другому фаунистическому составу. Все 4 провинции схожи по субдоминирующему виду – полевая мышь (21%, 21%, 16%, 22%). В первых двух провинциях (Поозерье, Белорусской возвышенной провинция) не прослеживается явного доминирующего вида, а в двух других (Предполесско-Восточно-Белорусская и Полесская провинции), в видовой структуре преобладает обыкновенная бурозубка (39%) и желтогорлая мышь (34%) соответственно.

В биотопах Полесской провинции в ходе исследования так же были выявлены следующие виды: *Mus musculus*, *Sorex caecutiens*, *Neomys fodiens*, *Rattus norvegicus*, *Microtus subterraneus*. Данные представители микромаммалий попадались в единичных экземплярах, и их доля составила менее 1% в выборке, по этой причине они не отражены в видовом сообществе (рисунок 6).

Средние индексы по видовому богатству и разнообразию имеют большие показатели в осенний период. Динамика численности видов, сильно варьируется в зависимости от сезона года, процент попадаемости и улавливаемости осенью выше, чем в летний период. Большее число видов было выявлено в 2018 г., что сказывается на более высоких показателях индексов, характеризующих экологическую структуру популяций (таблица 4).

Таблица 4 – Индексы разнообразия сообществ мелких млекопитающих в исследуемых формациях

Год	Биотоп	Число видов	H	e	DMg	d	доминант
2016	Долинная экосистема	7	1,080	0,55	1,35	0,54	<i>Apodemus agrarius</i>
	Лесная экосистема	5	0,93	0,58	0,95	0,68	<i>Apodemus flavicollis</i>
2017	Долинная экосистема	9	1,73	0,78	1,67	0,42	<i>Myodes glareolus</i> , <i>Apodemus agrarius</i>
	Лесная экосистема	8	1,64	0,79	1,42	0,29	<i>Apodemus flavicollis</i>
2018	Долинная экосистема	9	1,65	0,75	1,42	0,42	<i>Sorex araneus</i>
	Лесная экосистема	9	1,62	0,74	1,55	0,48	<i>Myodes glareolus</i>

Примечание: H – видовое разнообразие Шеннона-Уивера, e – выравненность Пиелу, DMg – видовое богатство Маргалефа, d – доминирование Бергера-Паркера.

Индекс выравненности Пиелу меняется от 0 до 1, причем 1 соответствует равному обилию всех видов [24]. Как видно из данных таблицы, в выборках 2017 и 2018 гг. виды приблизительно равно представлены в сообществе. Из выборки 2016 г. в двух исследуемых экосистемах, наблюдается присутствие ярко выраженного вида-доминанта: в долинной экосистеме это полевая мышь, в лесной экосистеме – желтогорлая мышь.

Увеличение величины индекса доминирования Бергера-Паркера, означает уменьшение разнообразия и увеличение степени доминирования одного вида. По степени выраженности доминирования можно выделить долинную и лесную экосистемы 2016 г. исследования, 0,54 и 0,68 соответственно. В других экосистемах поздних лет исследования, наблюдается более высокое видовое разнообразие и отсутствие ярко выраженного вида-доминанта.

Заключение

Таким образом для изучения обилия и плотности популяций видов-двойников обыкновенной полевки, а также для оценки видовой структуры ассоциаций мелких млекопитающих, был определен видовой состав микромаммалий на территории четырех

провинций Беларуси. В ходе работы было выявлено обитание 17 видов мелких грызунов и насекомых. Виды-двойники обыкновенной полевки в проводимом исследовании не были выявлены. В отношении обыкновенной полевки выявлено, что она регистрировалась с довольно большой плотностью популяции на разнотравных пойменных и внепойменных лугах, подвергающихся антропогенной нагрузке, т. е. используемые для сенокоса и выпаса скота.

Как показали результаты исследования, в выборках долинных экосистем доминировали полевая мышь, рыжая полевка и обыкновенная бурозубка. В лесных экосистемах в годы проведения исследования доминировала желтогорлая мышь и рыжая полевка.

В период исследования 2016–2018 гг. у представителей рода *Microtus* наблюдалась депрессия численности, в связи с чем особи либо не отлавливались вовсе, либо попадались единичные экземпляры, несмотря на обловы многочисленных участков в специфичных для данного вида биотопов.

В связи с цикличностью всплесков численности обыкновенной полевки каждые 4–5 лет, отмеченных на территории Беларуси [17; 18], в последующие годы (2019–2021) есть тенденция повышения плотности зверьков данного вида. В дальнейшем планируется проведение учетных ловов в специфичных местах обитания восточноевропейской полевки, а также в местах обитания данного вида, где ранее он фиксировался [36; 37; 38].

Работа была поддержана БРФФИ на 2017–2019 гг. (проект Б17-121 “Распространение криптических видов рода *Microtus* в Беларуси по данным молекулярного и кариологического анализа”).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Савицкий, Б. П.** Млекопитающие Беларуси / Б. П. Савицкий, С. В. Кучмель, Л. Д. Бурко ; под ред. Б. П. Савицкого. – Минск : Белорусский государственный университет, 2005. – 317 с.
2. **Сидорович, В. Е.** Пищевая ниша и диетическое совпадение у сов северной Беларуси / В. Е. Сидорович, В. В. Ивановский, С. Г. Адамович // *Vogelwelt* 124: – 2003. – С. 271–279.
3. **Гайдученко, Е. С.** Формирование комплексов мелких млекопитающих долинных лесных экосистем юго-востока Белорусского Полесья / Е. С. Гайдученко // *Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўн-та імя І. П. Шамякіна*. – 2013. – № 1(38). – С. 9–14.
4. **Малыгин, В. М.** Систематика обыкновенной полевки / В. М. Малыгин. – Москва : Наука, 1983. – 206 с.
5. **Малыгин, В. М.** Систематика надвида обыкновенных полевок / В. М. Малыгин // *Вестн. МГУ*. – 1970. – Сер. Биол. почв. – № 5. – С. 89–91.
6. **Мейер, М. Н.** Использование данных кариологического, физиологического и цитогенетического анализов для выделения нового вида (Rodentia, Mammalia) / М. Н. Мейер, В. Н. Орлов, Е. Д. Схолль // *ДАН СССР*. 1969. – Т. 188, № 6. – С. 1411–1414.
7. **Орлов, В. Н.** Две формы 46-хромосомной обыкновенной полевки *Microtus arvalis Pallas* / В. Н. Орлов, В. М. Малыгин // *Материалы II Всесоюзного совещания по млекопитающим*. – Новосибирск : Изд-во СО РАН. – 1969. – С. 139–140.
8. **Мейер, М. Н.** Серые полевки фауны России и сопредельных территорий / М. Н. Мейер, Ф. Н. Голенищев, С. И. Раджабли, О. Л. Саблина – СПб. : Изд-во РАН, 1996. – 320 с.
9. **Mazurok, N. A.** Comparative chromosome and mitochondrial DNA analysis and phylogenetic relations hips with in common voles (*Microtus*, Arvicolidae) / N. A. Mazurok, N. V. Rubtsova, A. A. Isaenko, M. E. Pavlova, S. Ya. Slobodyanyuk, T. B. Nesterova, S. M. Zakian // *Chromosome Research*. – 2001. – № 9. – P. 107–120.
10. **Манохина, Н. В.** Эколого-морфологическая характеристика обыкновенной полевки Беларуси / Н. В. Манохина. – Минск : Ин-т зоологии АН БССР, 1981. – 17 с.
11. **Доброхотов, Б. П.** Изменения биоценозов туляремийных природных очагов луго-полевого типа Европейской части СССР и их устойчивость в условиях современной хозяйственной деятельности человека / Б. П. Доброхотов, П. М. Барановский, Т. Н. Демидова // *Зоологический журнал*. – 1987. – Т. 66, № 9. – С. 1430–1434.

12. **Баскевич, М. И.** О новых находках восточноевропейской полевки *Microtus rossiaemeridionalis* в Воронежской области / М. И. Баскевич, С. Ф. Сапельников // Роль особо охраняемых природных территорий Центрального Черноземья в сохранении и изучении биоразнообразия лесостепи. – Воронеж, 2002. – С. 12–16.
13. **Башенина, Н. В.** Об определении возраста обыкновенной полевки (*Microtus arvalis* Pall.) / Н. В. Башенина // Зоол. журн. – 1953. – Т. 32. – Вып. 4. – С. 730–743.
14. **Манохина, Н. В.** Хромосомный набор и таксономическое положение обыкновенной полевки Беларуси / Н. В. Манохина, В. Ф. Терехович // Вестн. Белорус. ун-та. – 1979. – Сер. 2, № 3. – С. 67–68.
15. **Терехович, В. Ф.** Особенности размножения обыкновенной полевки южной части Белоруссии в весенне-летний период / В. Ф. Терехович, Н. В. Манохина, М. Б. Голубева // Вестн. Белорус. ун-та. – 1981. – Сер. 2, № 2. – С. 39–41.
16. **Терехович, В. Ф.** Таксономическое положение и распространение обыкновенной полевки на территории Беларуси / В. Ф. Терехович, Н. В. Манохина // В кн.: Млекопитающие СССР. III съезд Всесоюз. териологического общества, т. I : тез. докл. – М., 1982. – 82 с.
17. **Соловей, И. А.** Ландшафтно-биотопические различия и сезонно-межгодовая динамика ассоциации мелких грызунов в хвойно-мелколиственных комплексах Белорусского Поозерья : автореф. дисс. ... канд. биол. наук : 03.00.08 / И. А. Соловей ; Нац. Акад. наук, ин-т зоологии. – Минск, 2005. – 21 с.
18. **Зенина, И. М.** Динамика численности мелких млекопитающих в условиях мелиорации Центрального Полесья / И. М. Зенина // Биологические ритмы : материалы науч.-практ. конф., Брест, 26–28 апр. 1999 г. / ГНП “Беловеж. Пуша” ; редкол.: В. Е. Гайдук [и др.]. – Брест : Изд-во БрГУ, 1999. – С. 92–94.
19. **Клевезаль, Г. А.** Принципы и методы определения возраста млекопитающих / Г. А. Клевезаль. – М. : КМК, 2007. – 283 с.
20. **Карасева, Е. В.** Экологические различия двух близких видов – обыкновенной и восточноевропейской полевки / Е. В. Карасева, Н. В. Степанова, А. Ю. Телицына // Синантропия грызунов. – 1994. – С. 60–76.
21. **Окулова, Н. М.** Краниометрическая диагностика трех близких форм обыкновенной полевки *Microtus arvalis* L. / Н. М. Окулова, М. И. Баскевич // Докл. РАН. – 2008. – Т. 412. – № 3. – С. 427–429.
22. **Гайдученко, Е. С.** Формирование комплексов мелких млекопитающих долинных лесных экосистем юго-востока Белорусского Полесья / Е. С. Гайдученко // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўн-та імя І. П. Шамякіна. – 2013. – № 1(38). – С. 9–14.
23. **Зенина, И. М.** Мелкие млекопитающие трансформированных территорий Центрального Полесья / И. М. Зенина // Фауна в антропогенном середовіщі – Луганськ, 2006. – Вып. 8. – С. 165–174.
24. **Margalef, R.** Temporal succession and spatial heterogeneity in phytoplankton / R. Margalef // Perspectives in Marine Biology, Buzzati-Travesco / ed. Berkeley, University of California Press. – 1958. – P. 323–347.
25. **Одум, Ю.** Экология : в 2 т. / Ю. Одум. – М. : Мир, 1986. – Т. 2. – 376 с.
26. **Песенко, Ю. А.** Принципы и методы количественного анализа в фаунистических исследованиях / Ю. А. Песенко // г. Минск. – М. : Наука, 1982. – 287 с.
27. **Соловей, И. А.** Ландшафтная детерминированность структурной организации сообщества миофагов и их жертв в лесных комплексах Поозерья / И. А. Соловей, В. Е. Сидорович, А. Г. Полозов, Д. И. Шамович, С. Г. Адамович // Разнообразие животного мира Беларуси: итоги изучения и перспективы сохранения : материалы Междунар. науч. конф., Минск, Белгосуниверситет, 28–30 ноября. – 2001. – С. 247–248.
28. **Соловей, И. А.** Ландшафтно-биотопические различия в экологической емкости транзитных лесных комплексов для сообщества мелких млекопитающих и хищников – их потребителей / И. А. Соловей [и др.] // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Серыя біялагічных навук. – 2003. – № 2. – С. 92–99.
29. **Соловей, И. А.** Анализ размерной структуры ассоциации мелких грызунов на низинных болотах северной части Беларуси / И. А. Соловей, В. Е. Сидорович, И. И. Ротенко,

- Е. И. Анисимова, А. Г. Полозов, Г. Г. Янута, Е. П. Шинкевич // Весці НАН Беларусі. 2007. – Сер. біял. нав. – № 4. – С. 95–101.
30. **Блоцкая, Е. С.** Популяционная экология мелких млекопитающих юго-западной и центральной Беларуси. / Е. С. Блоцкая, В. Е. Гайдук – Брест : Изд-во БрГУ, 2004. – 187 с.
31. **Блоцкая, Е. С.** Факторы динамики численности микромаммалий в Беларуси/ Е. С. Блоцкая// Проблемы сохранения биологического разнообразия и использования биологических ресурсов : материалы X зоологической конференции, Минск, 18–20 ноя. 2009 г. : в 2 ч. / НАН РБ, НПЦ НАН по биоресурсам ; под общ. ред. М. Е. Никифорова. – Минск, 2009. – Ч. 2. – С. 403–405.
32. **Кришук, И. А.** Видовое разнообразие мелких млекопитающих пойменных экосистем Белорусского Полесья / И. А. Кришук, Е. С. Гайдученко// Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўн-та імя І. П. Шамякіна. – 2012. – № 4(37). – С. 25–31.
33. **Гайдученко, Е. С.** Анализ морфофизиологической структуры мелких млекопитающих лесных массивов Гомельского Полесья, подверженных различной степени антропогенной трансформации / Е. С. Гайдученко, А. Н. Кусенков // Вестник Тверского государственного университета. – Серия: Биология и экология. – 2010. – № 20. – С. 55–61.
34. **Гайдученко, Е. С.** Численность биотопического распределения мелких млекопитающих лесных массивов Гомельского Полесья / Е. С. Гайдученко // Diversitatea, valorificarea rațională și protecția lumii animale : simpozion internațional consacrat celei de-a 70-a aniversări din ziua nașterii profesorului universitar Andrei Munteanu / Academia de Științe a Moldovei. Secția Științe Naturle și ale Vieții Institutul de Zoologie ; resp. ed.: Mihai Papuc [șialte]. – Ch. – Știința, 2009 – Н. 52–55.
35. **Гайдученко, Е. С.** Состав и видовое разнообразие микромаммалий лесных массивов Гомельского Полесья / Е. С. Гайдученко, А. М. Ботвич // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага ўн-та імя І. П. Шамякіна. – 2011. – № 3(32). – С. 17–21.
36. **Манохина, Н. В.** Хромосомный набор и таксономическое положение обыкновенной полевки Беларуси / Н. В. Манохина, В. Ф. Терехович // Вестн. Белорус. ун-та. – 1979. – Сер. 2, № 3. – С. 67–68.
37. **Манохина, Н. В.** Эколого-морфологическая характеристика обыкновенной полевки Беларуси / Н. В. Манохина. – Минск : Ин-т зоологии АН БССР, 1981. – 17 с.
38. **Терехович, В. Ф.** Таксономическое положение и распространение обыкновенной полевки на территории Беларуси / В. Ф. Терехович, Н. В. Манохина // В кн.: Млекопитающие СССР. III съезд Всесоюз. териологического общества, т. I : тез. докл. – М., 1982. – 82 с.

Поступила в редакцию 07.06.2019.

Контакты: e-mail: mashkov.evgenii25@gmail.com (Машков Евгений Игоревич)

Mashkov E., Gaiduchenko E., Krischuk I., Solovei I. ESTIMATION OF ABUNDANCE OF POPULATION OF THE GENUS MICROTUS SPECIES IN VALLEY ECOSYSTEMS OF BELARUS.

To study the abundance and density of population of twin species of common vole as well as to assess the species structure of associations of small rodents and insectivores on the territory of 4 physical-geographical provinces of Belarus accounting catches have been carried out.

In the course of the research 17 species of small rodents and insectivores were identified. During the study of 2016–2018 the representatives of the genus Microtus had a number depression. As a result the species were either not caught at all, or there were single specimens, despite the search of numerous sites in species-specific biotopes. In the years of depression, the number of common vole was most often recorded on the grassy dry meadow, where mowing and grazing were carried out, as well as on the grassy areas of the lowland marshes.

Keywords: population, cryptic species, twin species, common vole, distribution, province, Belarus.

УДК 612.019+616.13.002.2+577.125.3

АНТИАТЕРОГЕННЫЙ ХАРАКТЕР СИНТЕЗА ЖИРНЫХ КИСЛОТ У КРЫС – ОДНА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ПРИЧИН ИХ УСТОЙЧИВОСТИ К АТЕРОСКЛЕРОЗУ

А. Н. ОСИПЕНКО

Заведующий Центральной учебно-исследовательской лабораторией
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В работе представлены экспериментальные данные, указывающие на то, что одной из причин высокой, в сравнении с человеком, устойчивости крыс к атеросклерозу может быть разница в активности ряда ферментов, участвующих в элонгации и десатурации жирных кислот.

Ключевые слова: атеросклероз, крысы, жирные кислоты, десатураза жирных кислот, элонгаза жирных кислот.

Введение

В настоящее время лабораторные животные, и в особенности крысы – играют важную роль в качестве модельных организмов при проведении медико-биологических исследований. Экспериментальные модели с использованием крыс применяются при изучении механизмов развития патофизиологических процессов и при оценке влияния на организм негативных факторов среды, также они используются на этапе доклинического тестирования лекарственных препаратов. Тем не менее, у крысы и человека, несмотря на сходство в протекании физиологических процессов в организме, существуют различия в метаболизме, что, с одной стороны, отражается на биохимическом составе тканей, а с другой – на восприимчивости к развитию различных заболеваний. Наиболее известным в этом отношении является тот факт, что в отличие от человека крысы устойчивы к развитию атеросклероза. Только многократное и противоестественное для этих животных увеличение содержания холестерина в рационе приводит к формированию у них артериальных поражений, сходных с атеросклеротическими изменениями, наблюдаемыми у человека [1; 2; 3; 4]. Выяснение природы устойчивости крыс к развитию атеросклероза может помочь при создании их генетических линий с более близкими к человеческому организму свойствами, а самое главное, лучше понять причины восприимчивости самого человека к этой патологии. Решению данной задачи может помочь сравнительное исследование состава жирных кислот (ЖК) тканей человека и крыс с целью выяснения особенностей метаболизма ЖК этих животных.

Основная часть

Методы исследования. Проводился анализ состава жирных кислот (определение процентного содержания отдельных ЖК в их общей сумме) эритроцитов и плазмы крови у 20 белых лабораторных крыс. У 4 крыс был проанализирован состав ЖК в эластических артериях (брюшных аортах). Также был изучен состав ЖК эритроцитов и плазмы крови 17 здоровых людей (38,4 ± 3,3 лет) и соответствующий состав фрагментов артерий эластического типа (общих сонных артерий) 9 человек (56,3 ± 1,5 лет). Все исследованные артериальные сосуды не имели признаков атеросклероза.

Преаналитический этап состоял в разделении клеточного компонента и плазмы крови путем центрифугирования. Затем эритроциты дважды отмывали в сбалансированном по рН изотоническом растворе. Далее проводили дериватизацию анализируемых соединений плазмы и эритроцитов крови в 1,5 М растворе HCl в этаноле при температуре 60°C в течение 1 часа. Экстракцию полученных дериватов из реакционной смеси осуществляли с помощью гексана. Далее проводился анализ жирных кислот, которые присутствовали в гексановых экстрактах в виде этиловых эфиров. Для этого использовался метод газожидкостной хроматографии с регистрацией определяемых химических соединений пламенно-ионизационными детектором [5].

Производные жирных кислот артериальных сосудов получали после извлечения липидов этанолом из гомогенизированных образцов. Гомогенизацию фрагментов сосудов осуществляли до получения однородной массы. Для этого их растирали фарфоровым пестиком в ступках с толченым стеклом, добавляя небольшими количествами этанол. Затем аналогичным образом использовали кислотный этанолиз и экстракцию этиловых эфиров ЖК гексаном.

Измерения проводились на газовых хроматографах ГХ-1000, ЦВЕТ-800 (Россия). Разделение анализируемых соединений осуществлялось с использованием капиллярной колонки длиной 60 м и внутренним диаметром 0,56 мм, с силиконовой неподвижной фазой SE-30 (толщина пленки сорбента 0,25 мкм). В качестве газа-носителя использовался азот. Идентификация каждой жирной кислоты осуществлялась по времени ее удерживания в хроматографической колонке. Характерные для разных ЖК времена удерживания определялись с помощью смесей жирных кислот с известным процентным содержанием каждой кислоты. Кроме того, идентификация ЖК осуществлялась с помощью метода хромато-масс-спектрометрии. В работе использовался газовый хроматограф / масс-спектрометр Thermo Scientific DSQ II (США), оснащенный аналогичной хроматографической капиллярной колонкой. Более подробно процесс хроматографического анализа ЖК описан в статье [6].

Количественная оценка содержания отдельных жирных кислот производилась методом нормализации. Площадь пика, соответствующего определенной кислоте, определялась в процентном отношении от общей площади пиков ЖК. При этом доля пика отдельной жирной кислоты от общей площади пиков ЖК соответствовала ее массовому процентному содержанию в общей сумме жирных кислот ($C_{12:0}$ - $C_{22:6}$).

Полученные данные представлены в виде средних для сравниваемых групп и соответствующих значений доверительного интервала с доверительной вероятностью 95% (нормальность распределения подтверждалась по критерию Колмогорова-Смирнова), а также путем использования медианы (Me) и интерквартильного размаха в формате Me [LQ; UQ], где LQ – нижний квартиль, UQ – верхний квартиль медианы. Оценка достоверности различий между выборками осуществлялась с использованием U-критерия Манна-Уитни, который позволяет оперировать выборками с небольшим количеством наблюдений [7]. Изменения считались значимыми при $p < 0,05$.

Результаты и их обсуждение. Состав ЖК крови и артерий крыс заметно отличается от соответствующего состава у человека. При этом особенности рациона не оказывают определяющего влияния на видовые характеристики состава ЖК тканей организма. Это связано с тем, что в стенке кишечника синтезируются жиры во многом специфичные для человека или другого вида, и качественно отличающиеся от пищевого жира, так как при этом используется значительное количество жирных кислот, образующихся в организме [8]. Главным отличием состава ЖК артерий эластического типа крыс от соответствующего состава эластических артерий человека является существенно более высокая доля насыщенной пальмитиновой ($C_{16:0}$) кислоты и более низкая доля моно-

ненасыщенной олеиновой ($C_{18:1}$) ЖК. Высокое содержание пальмитиновой ($C_{16:0}$) ЖК при относительно невысоком содержании олеиновой ($C_{18:1}$) кислоты также отмечается в эритроцитах этих млекопитающих (таблица). Показано [9; 10], что основная часть мононенасыщенной олеиновой ($C_{18:1}$) кислоты в организме образуется из насыщенной пальмитиновой ($C_{16:0}$) кислоты. У человека и грызунов это происходит преимущественно путем удлинения углеводородной цепи пальмитиновой ($C_{16:0}$) ЖК на два атома углерода с помощью фермента Elov16 из группы элонгаз (до стеариновой ($C_{18:0}$) кислоты) и дальнейшего образованию в этой цепи двойной связи благодаря действию $\Delta 9$ -десатуразы. При этом в плазме крови и эритроцитах крыс также отмечается меньшая доля стеариновой ($C_{18:0}$) кислоты (таблица). Таким образом, полученные результаты указывают на более низкую активность данных ферментов в организме крыс в сравнении с человеком.

**Состав жирных кислот плазмы крови (1), эритроцитов (2)
и артерий эластического типа (3) людей и крыс**

Жирные кислоты, %	Люди			Крысы		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
миристиновая ($C_{14:0}$)	0,64±0,12	0,30±0,06	2,54 [2,39; 3,28]	0,94±0,09**	0,36±0,02*	2,89 [2,58; 3,18]
пальмитиновая ($C_{16:0}$)	26,82±1,55	25,80±0,77	25,47 [23,45; 27,38]	26,92±0,96	34,06±0,72***	32,20 [31,33; 33,67]**
маргариновая ($C_{17:0}$)	0,32±0,04	0,42±0,06	0,18 [0,16; 0,25]	0,37±0,03*	0,74±0,05***	0,14 [0,13; 0,17]
стеариновая ($C_{18:0}$)	11,98±0,67	23,59±0,84	6,10 [5,36; 7,16]	9,46±0,52***	19,64±0,40***	5,94 [4,81; 7,69]
пальмитолеиновая ($C_{16:1}$)	1,55±0,29	0,16±0,12	6,78 [5,10; 7,60]	3,68±0,43***	0,65±0,08***	7,02 [6,41; 7,47]
олеиновая ($C_{18:1}$)	16,55±1,17	14,35±0,91	43,29 [41,89; 43,73]	16,51±0,78	6,65±0,20***	32,79 [31,61; 34,84]**
линолевая ($C_{18:2}$)	30,37±2,22	13,95±1,09	9,08 [8,93; 10,13]	24,18±0,56***	8,76±0,31***	10,80 [7,80; 14,41]
эйкозатриеновая ($C_{20:3}$)	1,14±0,17	1,31±0,16	0,06 [0,00; 0,13]	0,47±0,08***	0,46±0,06***	0,07 [0,02; 0,14]
арахидоновая ($C_{20:4}$)	6,17±0,64	14,52±0,56	0,32 [0,20; 0,51]	11,53±1,08***	22,24±0,61***	0,48 [0,13; 0,92]
докозагексаеновая ($C_{22:6}$)	2,23±0,43	4,56±0,42	0,18 [0,09; 0,31]	1,37±0,11***	2,30±0,13***	0,05 [0,03; 0,05]*

Примечание 1: различия достоверны * – $p < 0,05$, ** – $p < 0,01$, *** – $p < 0,001$.

Примечание 2: некоторые ЖК, присутствующие в минорных количествах, не указаны.

Имеющиеся в научной литературе данные [9; 10] свидетельствуют о том, что снижение активности элонгазы Elov16 и $\Delta 9$ -десатуразы у мышцей приводит к улучшению чувствительности их клеток к инсулину, сокращению уровня триглицеридов, а также повышает устойчивость этих животных к развитию ожирения. Также существуют сведения [11; 12], согласно которым низкая активность $\Delta 9$ -десатуразы стимулирует окисление ЖК в митохондриях и ингибирует липидный синтез в печени, бурой жировой ткани и скелетной мускулатуре. Следовательно, способствуя использованию ЖК в процессах окислительного метаболизма и торможению липидного синтеза, невысокая активность $\Delta 9$ -десатураз в артериях может тормозить развитие атеросклероза. Таким образом, низкая активность указанных ферментов, может быть одной из причин устойчивости крыс к атеросклерозу.

В сравнении с человеком крысы имеют почти вдвое более высокую долю полиненасыщенной арахидоновой ($C_{20:4}$) кислоты и более низкую долю полиненасыщенной линолевой ЖК в эритроцитах и в плазме крови (таблица). Это указывает на то, что активность элонгазы Elovl5 в организме крысы существенно выше ее активности в организме человека. Установлено [13], что действие данного фермента у человека и грызунов является важным шагом при превращении линолевой ($C_{18:2}$) кислоты в арахидоновую ($C_{20:4}$) кислоту, для которого требуется удлинение углеводородной цепи на 2 атома углерода. Следовательно, высокая активность данной элонгазы объясняет наблюдаемую у крыс высокую долю арахидоновой ($C_{20:4}$) кислоты при относительно низком значении доли линолевой ($C_{18:2}$) кислоты (таблица). При этом существуют данные [10; 13], что повышенная активность Elovl5 положительно сказывается на липидном обмене в печени, снижая содержание в ней триглицеридов, а также вызывает сокращение содержания триглицеридов и холестерина в плазме крови. Селективный нокадаун этого фермента наоборот вызывает экспрессию липогенных ферментов, приводя к стеатозу печени и гипертриглицеридемии. Таким образом, высокая активность Elovl5 у крыс может способствовать их устойчивости к развитию атеросклероза путем снижения экспрессии липогенных ферментов.

Повышенная доля арахидоновой ($C_{20:4}$) кислоты при пониженной доле линолевой ($C_{18:2}$) кислоты у крыс указывает и на более высокую, чем у человека, активность $\Delta 6$ - и $\Delta 5$ -десатураз. Участие этих ферментов [14; 15] требуется для химического превращения линолевой ($C_{18:2}$) кислоты в арахидоновую ($C_{20:4}$) ЖК и реализуется путем вставки двойных связей в углеводородную цепь кислоты. При этом благодаря активному использованию линолевой ($C_{18:2}$) кислоты в реакциях с участием $\Delta 6$ - и $\Delta 5$ -десатураз синтез из олеиновой ($C_{18:1}$) кислоты эндогенной ω -9 полиненасыщенной эйкозатриеновой ($C_{20:3}$) ЖК (также осуществляющийся благодаря этим десатуразам и возрастающий в условиях дефицита полиненасыщенных кислот [14]), в организме крыс оказывается подавленным. Об этом свидетельствует крайне низкая доля эйкозатриеновой ($C_{20:3}$) кислоты, как в плазме крови, так и в эритроцитах этих животных (таблица). Необходимо также отметить, что поступление в организм значительного количества полиненасыщенных ЖК подавляет активность $\Delta 9$ -десатуразы [15; 16; 17]. В связи с этим можно заключить, что существенно более высокая в сравнении с человеком доля полиненасыщенной арахидоновой ($C_{20:4}$) кислоты в крови крыс ограничивает активность этого фермента и способствует отмечаемому в артериальных сосудах и эритроцитах этих животных более низкому содержанию олеиновой ($C_{18:1}$) кислоты.

Следует обратить внимание, что значительное количество полиненасыщенной арахидоновой ($C_{20:4}$) ЖК в эритроцитах крыс может быть необходимо для того, чтобы нивелировать влияние на липидный бислой высокого содержания насыщенной пальмитиновой ($C_{16:0}$) кислоты, которая, как известно [18] содействует увеличению вязкости мембран. Другими словами, невысокая активность $\Delta 9$ -десатуразы, участвующей в превращении насыщенного пальмитата в мононенасыщенный олеат, способствует росту вязкости мембран путем снижения содержания в них ненасыщенных кислот. При этом повышение вязкости мембран у крыс, по-видимому, предотвращается повышенной активностью $\Delta 5$ - и $\Delta 6$ -десатураз и элонгаз, участвующих в образовании полиненасыщенной арахидоновой ($C_{20:4}$) ЖК. Таким образом, сбалансированность в активности отдельных видов элонгаз и десатураз в значительной мере способствует тому, чтобы клеточные мембраны не были слишком вязкими или слишком текучими и имели необходимую функциональную активность. Вероятно, именно с разницей в способах поддержания оптимального физико-химического состояния клеточных мембран связаны различия в активности отдельных элонгаз и десатураз у людей и крыс. Побочным результатом

отличий в активности отдельных десатураз и элонгаз в организме крысы и человека может быть наблюдаемые у крыс более низкое содержание холестерина в плазме крови [2] и более высокая устойчивость к атеросклерозу [2; 3; 4].

Необходимо также указать на сравнительно невысокие значения доли ω -3 полиненасыщенной докозагексаеновой ($C_{22:6}$) кислоты в эритроцитах, плазме крови и сосудах лабораторных крыс (таблица). Учитывая это, а также тот факт, что ω -6 полиненасыщенная арахидоновая ($C_{20:4}$) кислота занимает значительный процент в составе ЖК эритроцитов и плазмы крови этих животных, можно заключить, что мембранные ω -3 полиненасыщенные ЖК не являются тем фактором, который препятствует развитию атеросклероза у крыс.

Заключение

Полученные данные свидетельствуют о низкой активности элонгазы Elovl6 и Δ 9-десатуразы и высокой активности элонгазы Elovl5 и Δ 5- и Δ 6-десатураз в организме крыс в сравнении с человеческим организмом. Можно предположить, что установленные отличия являются одной из причин более высокой устойчивости крыс к атеросклерозу, так как по современным представлениям такой характер изменений активности указанных ферментов приводит к повышению чувствительности клеток к инсулину, сокращению активности липогенных ферментов и снижению содержания липидов в плазме крови.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Крепкова, Л. В.** Использование модели гиперлипидемии и атеросклероза у крыс в токсикологическом эксперименте / Л. В. Крепкова // Биомедицина. – 2011. – № 3. – С. 103–106.
2. **Климов, А. Н.** Липиды, липопротеиды и атеросклероз / А. Н. Климов, Н. Г. Никульчева. – СПб. : Питер Пресс, 1995. – 304 с.
3. **Титов, В. Н.** Жирные кислоты. Физическая химия, биология и медицина / В. Н. Титов, Д. М. Лисицын. – Москва ; Тверь : ООО “Издательство «Триада», 2006. – 672 с.
4. **Ritskes-Heitinga, J.** Atherosclerosis in the rat / J. Ritskes-Heitinga, A. C. Beynen // Artery. – 1988. – Vol. 16, № 1. – P. 25–50.
5. **Кейтс, М.** Техника липидологии. Выделение, анализ и идентификация липидов : пер. с англ. / М. Кейтс. – М. : Мир, 1975. – 322 с.
6. **Осипенко, А. Н.** Плазмалогенные фосфолипиды при гипоксии миокарда и экспериментальной гипоксии / А. Н. Осипенко // Атеросклероз и Дислипидемии. – 2015. – № 1(18). – С. 30–40.
7. **Гланц, С.** Медико-биологическая статистика : пер. с англ. / С. Гланц. – Москва : Практика, 1998. – 459 с.
8. **Березов, Т. Т.** Биологическая химия : учебник. – 3-е изд., перераб. и доп. / Т. Т. Березов, Б. Ф. Коровкин. – Москва : Медицина, 1998. – 704 с.
9. Adipose tissue fatty acid chain length and mono-unsaturation increases with obesity and insulin resistance / C.Y. Tan [et al.] // Sci. Rep. – 2015. – Vol. 5. – 18366.
10. Role of fatty acid elongases in determination of de novo synthesized monounsaturated fatty acid species / C. D. Green [et al.] // J. Lipid Res. – 2010. – Vol. 51, № 7. – P. 1871–1877.
11. Loss of stearoyl-CoA desaturase-1 function protects mice against adiposity / J. M. Ntambi [et al.] // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2002. – Vol. 99, № 17. – P. 11482–11486.
12. Stearoyl-CoA desaturase 1 deficiency increases fatty acid oxidation by activating AMP-activated protein kinase in liver / P. Dobrzyn [et al.] // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2004. – Vol. 101, № 17. – P. 6409–6414.
13. Elevated hepatic fatty acid elongase-5 activity affects multiple pathways controlling hepatic lipid and carbohydrate composition / Y. Wang [et al.] // J. Lipid Res. – 2008. – Vol. 49, № 7. – P. 1538–1552.
14. **Назаров, П. Е.** Полиненасыщенные жирные кислоты как универсальные эндогенные биорегуляторы / П. Е. Назаров, Г. И. Мягкова, Н. В. Гроза // Вестник МИТХТ. – 2009. – Т. 4, № 5. – С. 3–19.

15. **Nakamura, M. T.** Structure, function, and dietary regulation of delta6, delta5, and delta9 desaturases / M. T. Nakamura, T. Y. Nara // *Annu. Rev. Nutr.* – 2004. – Vol. 24. – P. 345–376.
16. **Kersten, S.** Effects of fatty acids on gene expression: role of peroxisome proliferator-activated receptor α , liver X receptor α and sterol regulatory element-binding protein-1c / S. Kersten // *Proceedings of the Nutrition Society.* – 2002. – Vol. 61, № 3. – P. 371–374.
17. **Ntambi, J. M.** Regulation of stearoyl-CoA desaturase by polyunsaturated fatty acids and cholesterol / J. M. Ntambi // *J. Lipid Res.* – 1999. – Vol. 40, № 9. – P. 1549–1558.
18. **Болдырев, А. А.** Биомембранология : учебное пособие / А. А. Болдырев, Е. И. Кяйвярйянен, В. А. Илюха. – Петрозаводск : Изд-во Кар НЦ РАН, 2006. – 226 с.

Поступила в редакцию 16.05.2019 г.

Контакты: alosipenko@yandex.ru (Осипенко Александр Николаевич)

Osipenko A. ANTIATHEROGENIC NATURE OF FATTY ACID SYNTHESIS IN RATS IS ONE OF THE POSSIBLE REASONS FOR THEIR RESISTANCE TO ATHEROSCLEROSIS.

The article presents experimental data indicating that one of the reasons of rats' high resistance to atherosclerosis, in comparison with humans, may be the difference in the activity of a number of enzymes involved in elongation and desaturation of fatty acids.

Keywords: atherosclerosis, rats, fatty acids, fatty acid desaturase, fatty acid elongase.