

ISSN 2409-3777



ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта
імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

1 (53)
2019

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар М.М. Дабравольскі (Тула)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонок (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс “Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова” ўключаны ў РІНЦ
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),
ліцэнзійны дагавор № 811–12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

ЗМЕСТ

ЛИПНИЦКИЙ В. А., СЕРГЕЙ А. И., СПИЧЕКОВА Н. В. Быстрое преобразование Фурье в подсчете количества S_n^2 -орбит кэмероновских матриц.....	4
ГАЛЬМАК А. М. О неабелевости полиадических группоидов специального вида.....	14
МОРОЗОВА И. М., КЕМЕШ О. Н., САКОВИЧ Н. В. Распределение нулей невырожденных функций на коротких отрезках	23
РОМАНОВИЧ Л. А. Геометрические характеристики инвариантных связностей в группоиде Ли $P^4(B)$	28
ЧЕРНОВ С. М. Оценка параметров ΔN -потенциала по энергии связи гипертретия в двухчастичной модели	34
ЮРЕВИЧ В. А. Особенности динамики излучения, отражаемого тонким слоем инверсной среды	45
ШМАТОК Е. В., ОСТРИКОВ О. М. Расчет полей напряжений у единичного линзовидного двойника, находящегося в поле напряжений полубесконечной трещины антиплоского сдвига в монокристаллическом Ni_2MnGa	57
ГУНДИНА М. А. Метод асимптотических разложений в задачах распространения трещин. Нахождение коэффициента нелинейности	63
ТИХОНЧУК Г. Н., ДОРОНЬКИНА А. С. Фенотипическая изменчивость рисунка переднеспинки колорадского жука (<i>leptinotarsa decemlineata say</i>) как оценка здоровья окружающей среды.....	71
ДЕГТЯРЕВА Е. И., НАУМЕНКО Е. М., СОТНИКОВА В. В., ВОЛЧЕК В. С. Характеристика состава сточных вод, отобранных для микробиологического и химического исследования на территории города Гомеля и Гомельского района в период с 2013 по 2016 год	78
ВАШКЕВИЧ М. Н., БЕЛЫЙ П. Н. Количественные характеристики устьичного аппарата березы повислой (<i>Betula pendula</i>) в зоне влияния выбросов щелочного типа.....	87

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 517.4

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ПОДСЧЕТЕ КОЛИЧЕСТВА S_n^2 -ОРБИТ КЭМЕРОНОВСКИХ МАТРИЦ

В. А. Липницкий

доктор технических наук, профессор
Военная академия Республики Беларусь

А. И. СЕРГЕЙ

аспирант

Гродненский государственный университет имени Я. Купалы

Н. В. СПИЧЕКОВА

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

В данной работе предлагается алгоритм, основанный на быстром умножении многочленов, для подсчета количества орбит, на которые разбивается множество P_n квадратных $(0,1)$ -матриц под действием квадрата S_n^2 симметрической группы S_n . Рассматриваемый алгоритм имеет вычислительную сложность $O(p(n)n^{2.5} \log n)$, где $p(n)$ – количество неупорядоченных разбиений числа n . Наилучший алгоритм, известный до публикации данной работы, имеет вычислительную сложность $O(p(n)n^4)$.

Ключевые слова: бинарная матрица, симметрическая группа, орбита, мощность орбиты, третья проблема Питера Кэмерона, лемма Бёрнсайда, цикленный тип подстановки, дискретное преобразование Фурье, быстрое умножение многочленов.

Введение

В данной работе рассматривается третья проблема Питера Кэмерона [1], которая формулируется следующим образом: *найти общую формулу или алгоритм вычисления количества орбит α_n , на которые разбивается множество P_n всех бинарных $(0,1)$ -матриц, содержащих в точности n единиц, под действием квадрата $G = S_n^2 = S_n \times S_n$ симметрической группы S_n .*

Группа G задает перестановки строк и столбцов матриц из множества P_n .

Данная работа является продолжением работ авторов [2] и [3]. Подробный обзор литературы по изучаемой теме приводится в [2] и [3]. В [2] также описывается алгоритм вычисления α_n , имеющий сложность $O(p^2(n)n^2 \log(n))$, где $p(n)$ – количество неупорядоченных разбиений числа n . Предлагаемый алгоритм основан на лемме Бёрнсайда и линейной развертке бинарной матрицы и реализует идеи метода динамического программирования. В [3] приводится усовершенствованный алгоритм вычисления α_n , имеющий сложность $O(p(n)n^4)$. Целью данной работы является применение быстрого умножения многочленов при помощи преобразования Фурье для построения алгоритма вычисления α_n , который имеет меньшую вычислительную сложность по сравнению с алгоритмами в [2] и [3].

© Липницкий В. А., 2019

© Сергей А. И., 2019

© Спичекова Н. В., 2019

Основная часть

Быстрое преобразование Фурье. Пусть $\omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$ – комплексные корни n -ой степени из единицы, т. е. $\omega_n^k = e^{2\pi k/n}, k = 0, 1, \dots, n-1$.

Пусть имеется многочлен $A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$. Будем предполагать, что n является степенью 2. Это требование всегда можно удовлетворить, добавив равные нулю старшие коэффициенты. Обозначим

$$y_k = A(\omega_n^k) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}. \tag{1}$$

Вектор $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ представляет собой дискретное преобразование Фурье (ДПФ) вектора коэффициентов $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$. Будем также писать $y = \text{ДПФ}_n(a)$. ДПФ переходит от коэффициентов многочлена к значениям многочлена в комплексных корнях n -ой степени из 1.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) – это метод, основанный на использовании специальных свойств комплексных корней из единицы, позволяющий находить $\text{ДПФ}_n(a)$ и имеющий сложность $O(n \log n)$. Суть этого метода кратко заключается в следующем.

На основании многочлена $A(x)$ построим два новых полинома степени $\frac{n}{2} - 1$:

$$A^{[0]}(x) = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \dots + a_{n-2} x^{n/2-1},$$

$$A^{[1]}(x) = a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n/2-1}.$$

$A^{[0]}(x)$ содержит все коэффициенты полинома $A(x)$ с четными индексами, $A^{[1]}(x)$ – все коэффициенты с нечетными индексами. Очевидно, что выполняется равенство

$$A(x) = A^{[0]}(x^2) + x A^{[1]}(x^2). \tag{2}$$

Задача вычисления $A(x)$ в точках $\omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$ сводится к следующим двум задачам:

- 1) вычислить полиномы $A^{[0]}(x)$ и $A^{[1]}(x)$ степеней $\frac{n}{2} - 1$ в точках $(\omega_n^0)^2, (\omega_n^1)^2, \dots, (\omega_n^{n-1})^2$; (3)
- 2) объединить полученные результаты в соответствии с формулой (2).

Список (3) содержит не n различных значений, а только $\frac{n}{2}$ комплексных корней степени $\frac{n}{2}$ из единицы, причем каждый корень встречается в списке ровно дважды. Поэтому полиномы $A^{[0]}(x)$ и $A^{[1]}(x)$ рекурсивно вычисляются в $\frac{n}{2}$ комплексных корнях $\frac{n}{2}$ -ой степени из единицы. Эти подзадачи имеют точно такой вид, как и исходная задача, но их размерность вдвое меньше, т. е. вычисление n -элементного ДПФ_n сводится к вычислению двух $\frac{n}{2}$ -элементных $\text{ДПФ}_{n/2}$. Такая декомпозиция позволяет реализовать [4, с. 953] рекурсивный алгоритм БПФ, который вычисляет $\text{ДПФ}_n(a)$ и имеет сложность $O(n \log n)$.

Обратным дискретным преобразованием Фурье (ОДПФ) для вектора $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ значений многочлена $A(x)$ в точках $\omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$ называется вектор $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ коэффициентов этого многочлена, обозначается $a = \text{ОДПФ}_n(y)$.

ОДПФ восстанавливает коэффициенты многочлена по значениям этого многочлена в точках – комплексных корнях n -ой степени из 1.

ОДФП $_n(y)$ вычисляется [4, с. 956] по формуле

$$a_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega_n^{-kj}, j = 0, 1, \dots, n-1. \tag{4}$$

Так как формулы (1) и (4) похожи, то коэффициенты a_j могут быть найдены таким же алгоритмом, как и описанный выше алгоритм вычисления ДФП $_n(a)$, только вместо ω_n^k нужно использовать ω_n^{-k} и каждый элемент результата разделить на n . Следовательно, алгоритм вычисления ОДФП $_n(y)$ имеет сложность $O(n \log n)$.

Пусть требуется вычислить произведение полиномов $A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ и $B(x) = \sum_{j=0}^{k-1} b_j x^j$.

Можно полагать, что $k = n$, так как в противном случае в многочлен меньшей степени

можно добавить равные нулю старшие коэффициенты. Так как в каждой точке x значение полинома AB равно произведению величин $A(x)$ и $B(x)$, то ДФП $_n(c)$, где $c = (c_0, c_1, \dots, c_{2n-2})$ – вектор, составленный из коэффициентов многочлена $A(x)B(x)$, равно покомпонентному произведению векторов ДФП $_n(a)$ и ДФП $_n(b)$, где $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 0, \dots, 0)$ и $b = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, 0, \dots, 0)$ – вектора длины $2n - 1$. Для нахождения вектора c достаточно вычислить ОДФП(ДФП $_n(c)$). Из вышесказанного следует, что предлагаемый алгоритм вычисления вектора c будет иметь сложность $O(n \log n)$.

Краткое изложение полученных ранее результатов. В данном пункте приведем основные обозначения и результаты из [3], используемые в дальнейшем.

Через $P_{i,j,k}$ будем обозначать множество бинарных матриц размера $i \times j$, которые содержат в точности k единиц.

Пусть $h = (h_1, h_2) \in S_i \times S_j$, $h_1 = C_1^1 C_2^1 \dots C_s^1$, $h_2 = C_1^2$ – разложения h_1 и h_2 в произведение независимых циклов, содержащие в том числе и циклы длиной 1, причем порядок следования циклов в разложении подстановки h_1 фиксирован. Через $t_{h,i,j,k}$ будем обозначать количество матриц из множества $P_{i,j,k}$ являющихся неподвижными точками для подстановки h , т. е. $t_{h,i,j,k} = |Inv(h)|$. Полагаем, что $t_{h,0,j,0} = 1$. Значения $t_{h,i,j,k}$ могут быть найдены по следующей рекуррентной формуле:

$$t_{h,i,j,k} = \sum_{\substack{l, \\ k \geq l \cdot \text{НОК}(|C_s^1|, |C_1^2|)}} C^l \text{НОД}(|C_s^1|, |C_1^2|) t_{\tilde{h}, i-|C_s^1|, j, k-l \cdot \text{НОК}(|C_s^1|, |C_1^2|)}, \tag{5}$$

где $|C_u^v|$ – длина цикла C_u^v , $\tilde{h} = (\tilde{h}_1, h_2) \in S_{i-|C_s^1|} \times S_j$, $\tilde{h}_1 = C_1^1 C_2^1 \dots C_{s-1}^1$.

Через $P_n(i, j)$ будем обозначать множество бинарных матриц размера $n \times i$, которые содержат в точности j единиц.

Зафиксируем натуральное число $k \leq i$, подстановку $g \in S_n$ и порядок следования множителей в ее разложении $g = C_1^g C_2^g \dots C_v^g$ в произведение независимых циклов.

Рассмотрим множество $H_{g,i,k} = \{(g, h_k) | h_k \in S_i\} \subset G_i = S_n \times S_i$, где h_k из S_i удовлетворяет следующему условию: в разложении h_k в произведение независимых циклов число i входит в цикл длины k .

Пусть $h_{g,i,k} = (g, h_k) \in H_{g,i,k}$ и $h_k = C_1^{h_k} C_2^{h_k} \dots C_{\mu_{h_k}}^{h_k}$ (6)

– это разложения подстановки $h_k \in S_i$ в произведение независимых циклов, содержащее в том числе и все циклы длины 1. Далее будем считать, что в разложении (6) подстановки h_k множители упорядочены так, что число i входит в цикл $C_1^{h_k}$ длины k , т. е. $C_1^{h_k} = (h_1^{h_k}, h_2^{h_k}, \dots, h_{k-1}^{h_k}, i)$, где $h_1^{h_k}, h_2^{h_k}, \dots, h_{k-1}^{h_k}, i$ – некоторые натуральные числа, не превосходящие i . В дальнейшем элемент $h_{g,i,k}$ также будем записывать в виде $(C_1^g C_2^g \dots C_v^g, C_1^{h_k} C_2^{h_k} \dots C_{\mu_{h_k}}^{h_k})$.

Пусть $f_{g,i,j} = \sum_{h_{g,i,k} \in \bigcup_{k=1}^i H_{g,i,k}} |\text{Inv}(h_{g,i,k})|$. Полагаем, что $f_{g,0,0} = 1$. $f_{g,i,j}$ равно числу матриц

из множества $P_n(i, j)$, которые являются неподвижными точками для подстановок из множества

$$H_{g,i} = \bigcup_{k=1}^i H_{g,i,k}. \quad (7)$$

$f_{g,i,j}$ может быть найдено по следующей рекуррентной формуле:

$$f_{g,i,j} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=0}^j A_{i-1}^{k-1} f_{g,i-k,j-l} t_{\tilde{g},n,k,l}, \quad (8)$$

где $t_{\tilde{g},n,k,l}$ равно количеству матриц из множества $P_{n,k,l}$, являющихся неподвижными точками для подстановки $\tilde{g} = (g, C^{h_k}) = (C_1^g C_2^g \dots C_v^g, C^{h_k}) \in S_n \times S_k$, где $C^{h_k} = (1, 2, \dots, k-1, k)$ – цикл длины k , и может быть найдено по формуле (5).

Пусть p_i – это одно из разбиений числа n . p_i задает цикленный тип подстановки $g_i \in S_n$. Зная цикленный тип подстановки g_p по формуле (8) можно вычислить $f_{g_i,n,n}$. Пусть k_{p_i} – это количество подстановок множества S_n , имеющих такой же цикленный тип, как и подстановка g_i . В соответствии с предложением 7 из [2] если в подстановке g_i имеется c_i циклов длины $l_i, i = \overline{1, k}$, то $k_{p_i} = n! \prod_{i=1}^k (c_i! l_i^{c_i})^{-1}$. Тогда формулу для числа α_n орбит множества P_n можно записать в следующем виде:

$$\alpha_n = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{i=1}^{p(n)} f_{g_i,n,n} k_{p_i}. \quad (9)$$

Вычисление $t_{g,i,j,k}$. Выведем еще одну формулу для вычисления $t_{g,i,j,k}$.

Пусть $g = (g_1, g_2) \in S_i \times S_j$, $g_1 = C_{11}^1 C_{21}^1 \dots C_{p_1 1}^1 C_{12}^1 C_{22}^1 \dots C_{p_2 2}^1 \dots C_{1s}^1 C_{2s}^1 \dots C_{p_s s}^1$, $g_2 = C_1^2$ – разложения g_1 и g_2 в произведение независимых циклов, содержащие в том числе и циклы длиной 1. Будем считать, что все циклы $C_{1u}^1, C_{2u}^1, \dots, C_{p_u u}^1$ из разложения g_1 имеют одну и ту же длину, а длины циклов $C_{p_u u}^1$ и $C_{p_v v}^1$ различны для $u \neq v$. Зафиксируем порядок следования циклов в разложении подстановки g_1 .

Предложение 1. Справедлива следующая рекуррентная формула:

$$t_{g,i,j,k} = \sum_{l=0}^L C_{p_s \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)}^l t_{\tilde{g}, i-p_s |C_{p_s s}^1|, j, k-l} \text{НОК}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|) \quad (10)$$

где $L = \min \left\{ p_s \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_{p_s s}^1|), \left\lceil \frac{k}{\text{НОК}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)} \right\rceil \right\}$ (здесь и далее $[]$ означают целую

часть), $|C_u^v|$ – длина цикла C_u^v , $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, g_2) \in S_{i-p_s|C_{p_s^s}^1|} \times S_j$,

$$\tilde{g}_1 = C_{11}^1 C_{21}^1 \dots C_{p_1 1}^1 C_{12}^1 C_{22}^1 \dots C_{p_2 2}^1 \dots C_{1(s-1)}^1 C_{2(s-1)}^1 \dots C_{p_{s-1}(s-1)}^1.$$

Доказательство во многом повторяет доказательство предложения 3 из [3].

Пусть

$$h(g) = C_1 C_2 \dots C_\alpha \quad (11)$$

– разложение в произведение циклов матричной подстановки, построенной по элементу g , содержащее в том числе и все циклы длиной 1. Пусть матрица $A \in \text{Inv}(g)$. Из предложения 1 из [3] следует, что элементы матрицы A , соответствующие любому из циклов разложения (11), равны 0 или 1. Индексы элементов матрицы A , которые стоят на пересечении строк и столбцов, входящих в циклы $C_{1s}^1, C_{2s}^1, \dots, C_{p_s s}^1$ и C_1^2 , в соответствии с предложением 2 из [3], образуют p_s НОД ($|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|$) циклов разложения (11), каждый цикл имеет длину $\text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)$. Пусть элементы матрицы A , соответствующие l из этих циклов, $l \leq p_s \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)$, равны 1. Существует $C_{p_s \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)}$ способов выбрать эти l циклов.

Из циклов разложения (11) удалим циклы, которые соответствуют элементам матрицы A , расположенным на пересечении строк и столбцов из $C_{1s}^1, C_{2s}^1, \dots, C_{p_s s}^1$ и C_1^2 .

Оставшиеся циклы $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \dots, C_{\alpha_k}$ образуют подстановку $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, g_2) \in S_{i-p_s|C_{p_s^s}^1|} \times S_j$, $\tilde{g}_1 = C_{11}^1 C_{21}^1 \dots C_{p_1 1}^1 \dots C_{1(s-1)}^1 C_{2(s-1)}^1 \dots C_{p_{s-1}(s-1)}^1$. Среди элементов матрицы A , соответствующих этим циклам, имеется $k - l \cdot \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)$ единиц. Понятно, что должно выполняться неравенство $k - l \cdot \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)$. Существует $t_{\tilde{g}, i-p_s|C_{p_s^s}^1|, j, k-l \cdot \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)}$ способов выбрать из $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \dots, C_{\alpha_k}$ циклы $C_{\beta_1}, C_{\beta_2}, \dots, C_{\beta_k}$ так, чтобы их суммарная длина была равна $k - l \cdot \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)$.

Так как выбор l циклов, соответствующих элементам матрицы A , стоящим на пересечении строк и столбцов, входящих в $C_{1s}^1, C_{2s}^1, \dots, C_{p_s s}^1$ и C_1^2 , и циклов $C_{\beta_1}, C_{\beta_2}, \dots, C_{\beta_k}$ не зависит друг от друга, то существует $A_l = C_{p_s \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)}^l t_{\tilde{g}, i-p_s|C_{p_s^s}^1|, j, k-l \cdot \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)}$ вариантов такого выбора. Для нахождения $t_{g, i, j, k}$ необходимо просуммировать A_l по всем l таким, что $0 \leq l \leq L$, $L = \min \left\{ p_s \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|), \left\lceil \frac{k}{\text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)} \right\rceil \right\}$. Доказательство завершено.

Предложение 2. Все коэффициенты $t_{g, n, i, j}$ для $i \leq n, j \leq n$ могут быть найдены за $O(n^{2.5} \log n)$ операций.

Доказательство. Зафиксируем величину i и введем обозначение $\Phi_{g, k, j} = t_{g, k, i, j}$. Из формулы (10) следует, что

$$\Phi_{g, k, j} = \sum_{l=0}^L C_{p_s \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)}^l \Phi_{\tilde{g}, k-p_s|C_{p_s^s}^1|, j-l \cdot \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)}, \quad (12)$$

где $L = \min \left\{ p_s \text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|), \left\lceil \frac{j}{\text{НОД}(|C_{p_s s}^1|, |C_1^2|)} \right\rceil \right\}$, $|C_u^v|$ – длина цикла C_u^v ,

$$\tilde{g} = (\tilde{g}_1, g_2) \in S_{k-p_s|C_{p_s^s}^1|} \times S_i, \quad \tilde{g}_1 = C_{11}^1 C_{21}^1 \dots C_{p_1 1}^1 \dots C_{1(s-1)}^1 C_{2(s-1)}^1 \dots C_{p_{s-1}(s-1)}^1.$$

Пусть $\Phi_{g,k}(x) = \sum_{j=0}^n \varphi_{g,k,j} x^j$. Из (12) следует, что

$$\Phi_{g,k}(x) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{l=0}^L C_{p_s \text{НОД}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)}^l \Phi_{\tilde{g}, k-p_s |C_{p_s^s}^1|, j-l \cdot \text{НОК}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)} \right) x^j.$$

Пусть запись $\text{trunc}_n(f(x))$ означает отбрасывание всех слагаемых многочлена $f(x)$ степени, большей n . С учетом формулы (12) получаем, что

$$\begin{aligned} & \text{trunc}_n \left(\Phi_{\tilde{g}, k-p_s |C_{p_s^s}^1|}(x) \sum_{l=0}^{p_s \text{НОД}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)} C_{p_s \text{НОД}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)}^l x^{l \cdot \text{НОК}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)} \right) = \\ & = \text{trunc}_n \left(\left(\sum_{t=0}^n \varphi_{\tilde{g}, k-p_s |C_{p_s^s}^1|, t} x^t \right) \left(\sum_{l=0}^{p_s \text{НОД}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)} C_{p_s \text{НОД}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)}^l x^{l \cdot \text{НОК}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)} \right) \right) = \\ & = \text{trunc}_n \left(\sum_{t=0}^n \left(\sum_{l=0}^{p_s \text{НОД}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)} C_{p_s \text{НОД}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)}^l \varphi_{\tilde{g}, k-p_s |C_{p_s^s}^1|, t+l \cdot \text{НОК}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)} \right) x^{t+l \cdot \text{НОК}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)} \right) = \\ & = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{l=0}^L C_{p_s \text{НОД}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)}^l \Phi_{\tilde{g}, k-p_s |C_{p_s^s}^1|, j-l \cdot \text{НОК}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)} \right) x^j. \end{aligned}$$

Последнее равенство получено после выполнения замены $t+l \cdot \text{НОК}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|) = j$. Следовательно,

$$\Phi_{g,k}(x) = \text{trunc}_n \left(\Phi_{\tilde{g}, k-p_s |C_{p_s^s}^1|}(x) \sum_{l=0}^{p_s \text{НОД}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)} C_{p_s \text{НОД}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)}^l x^{l \cdot \text{НОК}(|C_{p_s^s}^1|, |C_1^2|)} \right). \quad (13)$$

Для вычисления $\Phi_{g,n}(x)$ при фиксированном i необходимо s раз применить формулу (13). В соответствии с введенными обозначениями s – это количество различных чисел в разбиении числа n . Максимум количества различных элементов разбиения будет достигаться на разбиении вида $n = 1 + 2 + 3 + \dots + (t-1) + t + p$. Из последней формулы следует, что $n \geq 0.5t(t+1)$ и, соответственно, $t = O(\sqrt{n})$. Значит, для вычисления $\Phi_{g,n}(x)$ при фиксированном i требуется выполнить $O(\sqrt{n})$ умножений многочленов степени n , стоящих в правой части формулы (13), каждое из которых может быть выполнено с помощью быстрого преобразования Фурье за $O(n \log n)$ операций. Так как i принимает значения от 1 до n , то $t_{g,n,i,j}$ для $i \leq n, j \leq n$ как коэффициенты $\Phi_{g,n}(x)$ могут быть найдены за $O(n^{2.5} \log n)$ операций. Доказательство завершено.

Быстрое вычисление элементов матриц специального вида. Пусть имеются квадратные матрицы A и B с элементами $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$, $0 \leq i, j < n$ соответственно. Рассмотрим матрицу $C = C(c_{i,j})$.

$$c_{i,j} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j a_{k,l} b_{i-k, j-l}. \quad (14)$$

Обозначим операцию вычисления матрицы C знаком \bullet , т. е. $C = A \bullet B$. Порядок матрицы C равен $n + 1$.

Предложение 3. Матрица C может быть найдена за $O(n^2 \log n)$ операций.

Доказательство. Элемент c_{ij} равен коэффициенту многочлена $A(x)B(x)$, где $A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} a_{k,l} x^{2n(k+n)+l+n}$ и $B(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} b_{k,l} x^{2nk+l}$, при $x^{2n(i+n)+j+n}$. С помощью быстрого преобразования Фурье произведение $A(x)B(x)$ может быть найдено за $O(n^2 \log n)$ операций. Доказательство завершено.

Алгоритм вычисления количества орбит, основанный на быстром преобразовании Фурье. Пусть

$$r_{g,i,j} = \frac{f_{g,i,j}}{i!}. \quad (15)$$

Из формул (8) и (15) следует, что $r_{g,i,j} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i \sum_{l=0}^j r_{g,i-k,j-l} t_{\tilde{g},n,k,l}$. Переобозначив индексы суммирования, из последнего равенства получим

$$r_{g,i,j} = \frac{1}{i} \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=0}^j r_{g,k,l} t_{\tilde{g},n,i-k,j-l}. \quad (16)$$

Подстановки g и \tilde{g} в формуле (16) связаны между собой так же, как подстановки g и \tilde{g} в формуле (8):

$$\tilde{g} = (g, C^{h_k}) = (C_1^g C_2^g \dots C_v^g, C^{h_k}) \in S_n \times S_{i-k}, \quad (17)$$

где $C^{h_k} = (1, 2, \dots, i-k)$ – цикл длины $i-k$. В дальнейшем для фиксированного k под \tilde{g} будем понимать подстановку из $S_n \times S_{i-k}$, задаваемую формулой (17). Используя запись $t_{\tilde{g},n,k,l}$, будем считать, что \tilde{g} задается формулой (17), при этом соответствующее значение k равно третьему индексу в $t_{\tilde{g},n,k,l}$.

Предложение 4. Величина $r_{g,i,j}$ является целым числом.

Доказательство. Согласно определению $f_{g,i,j}$ – это количество матриц из множества $P_n(i, j)$, которые являются неподвижными точками для подстановок из множества (7). На множестве $P_n(i, j)$ действует группа перестановок столбцов мощностью $i!$.

В соответствии с леммой Бёрнсайда $\frac{f_{g,i,j}}{i!}$ равно числу орбит, на которые разбивается $P_n(i, j)$ под воздействием группы перестановки столбцов. Так как число орбит – целое число, то $r_{g,i,j}$ также целое. Доказательство завершено.

Зафиксируем целое i , $0 \leq i \leq n$ и подстановку $g \in S_n$. Пусть $\overline{R_{g,i}} = (\overline{r_{g,j,k}})$, $j = \overline{0, n}$, $k = \overline{0, n}$ – это $(n+1) \times (n+1)$ матрица с элементами

$$\overline{r_{g,j,k}} = \begin{cases} r_{g,j,k} & \text{при } j \leq i, \\ 0 & \text{при } j \geq i+1. \end{cases} \quad (18)$$

Пусть $\overline{T_{\tilde{g}}} = (\overline{t_{\tilde{g},j,k}})$, $j = \overline{0, n}$, $(n+1) \times (n+1)$ – это $(n+1) \times (n+1)$ матрица с элементами $\overline{t_{\tilde{g},j,k}} = \begin{cases} t_{\tilde{g},n,j,k} & \text{при } j > 0, \\ 0 & \text{при } j = 0. \end{cases}$

Предложение 5. Сложность вычисления $\overline{R_{g,n}}$ составляет $O(n^{2.5} \log n)$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\overline{R_{g,i}} \bullet \overline{T_{\tilde{g}}}$. Через $(\overline{R_{g,i}} \bullet \overline{T_{\tilde{g}}})_{i,j}$ условимся обозначать элемент матрицы $\overline{R_{g,i}} \bullet \overline{T_{\tilde{g}}}$, стоящий на пересечении i -ой строки и j -го столбца. Применяя формулы (14), (18) и (16), получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\left(\overline{R_{g,i}} \bullet \overline{T_{\tilde{g}}}\right)_{i+t,j}}{i+t} &= \frac{1}{i+t} \sum_{k=0}^{i+t} \sum_{l=0}^j r_{g,k,l} t_{\tilde{g},i+t-k,j-l} = \frac{1}{i+t} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j r_{g,k,l} t_{\tilde{g},n,i+t-k,j-l} = \\
 &= \frac{1}{i+t} \sum_{k=0}^{i+t-1} \sum_{l=0}^j r_{g,k,l} t_{\tilde{g},n,i+t-k,j-l} - \frac{1}{i+t} \sum_{k=i+1}^{i+t-1} \sum_{l=0}^j r_{g,k,l} t_{\tilde{g},n,i+t-k,j-l} = \\
 &= r_{g,i+t,j} - \frac{1}{i+t} \sum_{k=i+1}^{i+t-1} \sum_{l=0}^j r_{g,k,l} t_{\tilde{g},n,i+t-k,j-l}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Из (19) следует, что

$$r_{g,i+t,j} = \frac{\left(\overline{R_{g,i}} \bullet \overline{T_{\tilde{g}}}\right)_{i+t,j}}{i+t} + \frac{1}{i+t} \sum_{k=i+1}^{i+t-1} \sum_{l=0}^j r_{g,k,l} t_{\tilde{g},n,i+t-k,j-l}, \tag{20}$$

т. е., зная $\overline{R_{g,i}} \bullet \overline{T_{\tilde{g}}}$, можно найти матрицу $\overline{R_{g,i+t}}$ с элементами $\overline{r_{g,s,j}} = \begin{cases} r_{g,s,j} & \text{при } s \leq i+t, \\ 0 & \text{при } s \geq i+t+1. \end{cases}$ Значения, найденные при вычислении элементов матрицы $\overline{R_{g,i+t}}$, также позволяют выписать матрицы $\overline{R_{g,i+1}}, \overline{R_{g,i+2}}, \dots, \overline{R_{g,i+t-1}}$.

Пусть $R_{g,i}(x) = \sum_{j=0}^n r_{g,i,j} x^j$, $T_{\tilde{g},i}(x) = \sum_{j=0}^n t_{\tilde{g},n,i,j} x^j$. Тогда при каждом фиксированном k величина $\sum_{l=0}^j r_{g,k,l} t_{\tilde{g},n,i+t-k,j-l}$, стоящая в правой части формулы (20), равна коэффициенту при x^j в произведении многочленов $R_{g,k}(x)T_{\tilde{g},i+t-k}(x)$ степени n . При этом вычисление $r_{g,i+1,j}$ потребует 0 умножений многочленов, $r_{g,i+2,j}$ – 1 умножение, ..., $r_{g,i+t,j}$ – $t-1$ умножение. Всего такой подход потребует выполнения $1+2+\dots+(t-1) = \frac{t(t-1)}{2}$ операций умножения многочленов и с использованием быстрого преобразования Фурье может быть реализован за $O\left(\frac{t(t-1)}{2} n \log n\right)$ операций.

Будем действовать следующим образом: выберем некоторое U и для i , отстоящих друг от друга на величину U , будем вычислять $\overline{R_{g,i}} \bullet \overline{T_{\tilde{g}}}$ для нахождения $r_{g,j,k}$. Для всех остальных i величины $r_{g,j,k}$ будем вычислять, используя формулу (20) так, как описано выше. С использованием такого подхода вычисление $\overline{R_{g,n}}$ требует выполнения двух типов операций: вычисления произведения $\overline{R_{g,i}} \bullet \overline{T_{\tilde{g}}}$ и перехода на U строк вперед. Каждая из этих операций будет выполняться $O\left(\frac{n}{U}\right)$ раз. Учитывая предложение 3, получим, что сложность вычисления $\overline{R_{g,n}}$ составит $O\left(\frac{n^3 \log n}{U} + \frac{U-1}{2} n^2 \log n\right)$. Из полученной формулы следует, что оптимально выбирать U порядка \sqrt{n} . В этом случае сложность вычисления $\overline{R_{g,n}}$ составит $O(n^{2.5} \log n)$. Доказательство завершено.

Предложение 6. Количество орбит множества P_n может быть найдено за $O(p(n)n^{2.5} \log n)$ операций.

Доказательство. Количество α_n орбит множества P_n будем искать по формуле (9), правая часть которой содержит $p(n)$ слагаемых. Каждое из значений $f_{g_i, n, n}$, входящих в (9), можно найти, выразив его из формулы (15) через $r_{g_i, n, n}$.

Как элемент матрицы $\overline{R_{g_i, n}}$, $r_{g_i, n, n}$, в соответствии с предложением 5, может быть найдено за $O(n^{2.5} \log n)$ операций. Для вычисления $\overline{R_{g_i, n}}$ необходимо знать матрицу $\overline{T_{g_i}}$, элементы которой, в соответствии с предложением 2, также могут быть найдены за $O(n^{2.5} \log n)$ операций. Следовательно, нахождение количества орбит α_n множества P_n потребует $O(n^{2.5} \log n)$ операций. Доказательство завершено.

Заключение

В данной работе, являющейся продолжением работ авторов [2] и [3], предложено использовать быстрое умножение многочленов, основанное на преобразовании Фурье, для уменьшения вычислительной сложности алгоритма для подсчета количества орбит α_n , на которые разбивается множество P_n квадратных $(0,1)$ -матриц под действием квадрата S_n^2 симметрической группы S_n . Предлагаемая модификация алгоритма имеет вычислительную сложность $O(p(n)n^{2.5} \log n)$.

Методы и алгоритмы, развиваемые на протяжении трех статей, позволили предложить программный метод решения проблемы Кэмерона, расширить на практике ее решение с $n = 28$ до $n = 102$. Если при $n = 28$ количество орбит было равно 20141650236664, то при $n = 102$ число орбит достигло величины 10573638098259743734406815287874396796082663132302516285076455894397796731 – целое число из 74 десятичных знаков. Если такая величина для кого-то все еще имеет смысл, то разработанная программа позволяет продолжить вычисления.

Репозиторий с исходным кодом доступен по адресу <https://github.com/NuM314/thesis-codes/tree/master/solution-pn-n2.5-logn>.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Cameron, P. J.** Problems on permutation groups / P. J. Cameron. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/pgprob.html>. – Дата доступа: 21.10.2018.
2. **Липницкий, В. А.** Алгоритм развертки при подсчете количества S_n^2 -орбит кэмеровских матриц / В. А. Липницкий, А. И. Сергей, Н. В. Спичекова // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2017. – № 2(50). – С. 23–37.
3. **Липницкий, В. А.** Динамическое программирование в методе развертки решения третьей проблемы Кэмерона / В. А. Липницкий, А. И. Сергей, Н. В. Спичекова // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2018. – № 1(51). – С. 11–21.
4. **Кормен, Т. Х.** Алгоритмы: построение и анализ / Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Риверст, К. Штайн. – Москва : И. Д. Вильямс, 2013. – 1328 с.

Поступила в редакцию 17.11.2018 г.

Контакты: valipnitski@yandex.ru (Липницкий Валерий Антонович)

sergej.a.i@mail.ru (Сергей Александр Иванович)

n.spichekova@gmail.com (Спичекова Наталья Викторовна)

Lipnitsky V., Sergey A., Spichekova N. FAST FOURIER TRANSFORM TO CALCULATE

THE NUMBER OF S_n^2 – ORBITS FOR CAMERON MATRICES.

In the article an algorithm to calculate the number of orbits in the set of binary square matrices of order n , $n \geq 2$, with n ones that are formed under the action of square S_n^2 of the symmetric group

S_n is considered. The algorithm is based on the fast multiplication of polynomials and has the computational complexity of $O(p(n)n^{2.5} \log n)$, where $p(n)$ equals to the number of unordered partitions of n . Up to this paper, the best known algorithm to solve the problem under consideration has the complexity of $O(p(n)n^4)$.

Keywords: binary matrix, symmetric group, orbit, orbit cardinality, the third Peter Cameron's problem, Burnside's lemma, orbital type of a substitution, discrete Fourier transform, fast multiplication of polynomials.

УДК 512.548

О НЕАБЕЛЕВОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук

Могилевский государственный университет продовольствия

В статье изучается перестановочность элементов в полиадических группоидах с полиадической операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$ и n -арной операции η . Частными случаями операции $\eta_{s, \sigma, k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил соответственно на декартовой степени симметрической группы и декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Основным результатом статьи является теорема, в которой сформулированы достаточные условия неабелевости l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, где $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$. Приведены многочисленные следствия из этой теоремы. В частности установлено, что если нетривиальная подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ имеет не менее двух элементов, то полиадический группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является неабелевой полиадической группой.

Ключевые слова: n -арный группоид, абелевость, нейтральная последовательность.

1. Введение

В статье под полиадическими группоидами специального вида понимаются l -арные группоиды $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая была определена в [1, определение 1.1] следующим образом.

Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид,

$$n \geq 2, s \geq 1, l = s(n-1) + 1, k \geq 2, \sigma \in S_k.$$

Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \end{aligned} \quad (1)$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)} \eta_{1, \sigma, k}(\dots \\ &\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}) \dots))). \end{aligned} \quad (2)$$

Ясно, что n -арная операция $\eta_{1, \sigma, k}$ совпадает с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$ при $s = 1$.

Пример 1.1. Пусть в определении операции $\eta_{s, \sigma, k} \langle A, \eta \rangle$ – тернарный группоид,

$$n = 3, s = 3, k = 2, \sigma = (12) \in S_2.$$

Тогда на A^2 определены тернарная операция $\eta_{1, (12), 2}$ и 7-арная операция $\eta_{3, (12), 2}$. Выпишем явный вид этих операций.

Согласно (1),

$$\begin{aligned} \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3) &= \eta_{1, (12), 2}((x_{11}, x_{12})(x_{21}, x_{22})(x_{31}, x_{32})) = \\ &= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} x_{3\sigma^2(1)}), \eta(x_{12}x_{2\sigma(2)} x_{3\sigma^2(2)})) = (\eta(x_{11}x_{22}x_{31}), \eta(x_{12}x_{21}x_{32})), \end{aligned}$$

то есть

$$\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3) = (\eta(x_{11} x_{22} x_{31}), \eta(x_{12} x_{21} x_{32})).$$

Кроме того, положив

$$\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_7) = (u_1, u_2),$$

$$\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_7)) = (v_1, v_2)$$

и используя (2), получим

$$\begin{aligned} & \eta_{3, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_7) = \\ & = \eta_{3, (12), 2}((x_{11}, x_{12})(x_{21}, x_{22})(x_{31}, x_{32})(x_{41}, x_{42})(x_{51}, x_{52})(x_{61}, x_{62})(x_{71}, x_{72})) = \\ & = \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_7))) = (\eta(x_{11} x_{22} v_1), \eta(x_{12} x_{21} v_2)) = \\ & = (\eta(x_{11} x_{22} \eta(x_{31} x_{42} u_1)), \eta(x_{12} x_{21} \eta(x_{32} x_{41} u_2))) = \\ & = (\eta(x_{11} x_{22} \eta(x_{31} x_{42} \eta(x_{51} x_{62} x_{71}))), \eta(x_{12} x_{21} \eta(x_{32} x_{41} \eta(x_{52} x_{61} x_{72})))), \end{aligned}$$

то есть

$$\eta_{3, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_4 \mathbf{x}_5 \mathbf{x}_6 \mathbf{x}_7) = (\eta(x_{11} x_{22} \eta(x_{31} x_{42} \eta(x_{51} x_{62} x_{71}))), \eta(x_{12} x_{21} \eta(x_{32} x_{41} \eta(x_{52} x_{61} x_{72}))).$$

Частными случаями l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Поста определил и изучал в [2]. Одна из них была определена им на $(m - 1)$ -ой декартовой степени симметрической группы S_T всех подстановок конечного множества T . Вторую операцию Э. Поста определил на $(m - 1)$ -ой декартовой степени полной линейной группы $GL_n(C)$ над полем C комплексных чисел. Обе отмеченные полиадические операции Э. Поста имеют арность, равную m , и в определении каждой из них неявно присутствует цикл $\sigma = (12 \dots m - 1)$ из S_{m-1} .

Можно обобщить конструкцию Э. Поста, если заменить в ней цикл $\sigma = (12 \dots m - 1)$ любой подстановкой из S_{m-1} , а симметрическую группу и полную линейную группу – произвольной группой и даже произвольным группоидом. Одно из таких обобщений реализовано в книге [3]. В ней для любых целых $k \geq 2, l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ на k -ой декартовой степени A^k полугруппы A определена l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая при

$$k = m - 1, l = m, \sigma = (12 \dots m - 1), A = S_n$$

совпадает с операцией Э. Поста, определенной на декартовой степени S_n^{m-1} симметрической группы S_n , а при тех же k, l, σ , и $A = GL_n(C)$ операция $[]_{l, \sigma, k}$ совпадает с операцией Э. Поста, определенной на декартовой степени $GL_n^{m-1}(C)$ полной линейной группы $GL_n(C)$.

Заметим, что обобщая конструкцию Э. Поста, l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ в то же время является частным случаем l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, так как совпадает с ней при $n = 2$.

Основная цель статьи – нахождение достаточных условий неабелевости l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

2. Предварительные сведения.

При изучении l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ существенно используется следующая

Теорема 2.1 [1, теорема 1.1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \cdots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \cdots x_{(2(n-1)\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \cdots x_{(s(n-1)+1)\sigma^s(n-1)}(j)) \dots))). \quad (3)$$

Замечание 2.1. Если n -арная операция η ассоциативна, то (3) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \cdots x_{(s(n-1)+1)\sigma^s(n-1)}(j)) = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \cdots x_{l\sigma^{l-1}(j)}). \quad (4)$$

Если η – бинарная операция, обозначаемая символом \circ , то бинарная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с бинарной операцией \circ , а l -арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[]_{s+1,\sigma,k}$ из [4]. При этом равенства (1), (2) и (3) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \circ \mathbf{x}_2 &= (x_{11}, \dots, x_{1k}) \circ (x_{21}, \dots, x_{2k}) = (x_{11} x_{2\sigma(1)}, \dots, x_{1k} x_{2\sigma(k)}), \\ [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_k]_{l,\sigma,k} &= \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_2 \circ (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \circ (\mathbf{x}_{l-1} \circ \mathbf{x}_l)) \dots)), \\ y_j &= (x_{1j} (x_{2\sigma(j)} (\dots (x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} \dots))). \end{aligned} \quad (5)$$

Для сокращения записей в правой части равенства (5) символ операции \circ не указан.

Если бинарная операция η ассоциативна, то (4) может быть переписано следующим образом

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \cdots x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \cdots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)},$$

где снова символ операции \circ не указан. Именно последним равенством в [3, определении 3.1.4] была определена l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$ на k -ой декартовой степени полугруппы A .

Таким образом, l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$ из [3], определенная на k -ой декартовой степени полугруппы, является частным случаем l -арной операции $[]_{l,\sigma,k}$ из [4], определенной на k -ой декартовой степени группоида. Последняя операция, в свою очередь, является частным случаем l -арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ определенной на k -ой декартовой степени n -арного группоида.

Частным случаем l -арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ является и n -арная операция $\tilde{\eta}$ из [3, с. 227], которая совпадает с n -арной операцией $\eta_{1,(12 \dots n-1),n-1}$.

Имеет место

Теорема 2.2 [1, теорема 2.1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.

Таким образом, Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная полугруппа.

Аналогичный результат справедлив и для полиадических групп.

Теорема 2.3 [5, теорема 4.1]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная группа.

Напомним, что n -арный группоид $\langle A, [] \rangle$ называют абелевым, если в нем для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)}].$$

В. Дёрнте первым отметил важность указанного тождества, которое он использовал для определения абелевой n -арной группы [6].

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют:

нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \dots e_{n-1} x] = [x e_1 \dots e_{n-1}] = x;$$

левой нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \dots e_{n-1} x] = x;$$

правой нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[x e_1 \dots e_{n-1}] = x.$$

Нейтральные последовательности впервые были определены Э. Постом в [2] для n -арных групп.

3. Некоторые неравенства в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Прежде чем сформулировать признаки неабелевости l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, докажем некоторые неравенства, которые справедливы в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 3.1. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, \dots, e_{n-1} , что $a \neq e_1$,

$$\eta(a e_1 \dots e_{n-1}) = a, \tag{6}$$

$$\eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1, \tag{7}$$

$$\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}. \tag{8}$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = e_1, \dots, a_{j-1} = e_1, a_j = a, a_{j+1} = e_1, \dots, a_k = e_1), \tag{9}$$

$$\mathbf{e}_1 = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_k), \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2, \dots, e_2}_k), \dots, \mathbf{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1}, \dots, e_{n-1}}_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_s) \neq \\ & \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{a} \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}). \end{aligned} \tag{10}$$

Доказательство. Заметим, что выбор $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ с условием $\sigma(j) \neq j$ возможен, так как подстановка σ не является тождественной. Положим

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_s) = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{a} \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}) = (z_1, z_2, \dots, z_k).$$

Тогда, согласно теореме 2.1,

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(a e_1 \dots e_{n-2} \\ & \underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \\ & \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}))) \dots})). \end{aligned}$$

Применяя к полученному равенству $s - 1$ раз равенство (8), получим

$$y_j = \eta(a e_1 \dots e_{n-2} \underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}))) \dots} _{s-2}) =$$

$$= \eta(a e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1})) = \eta(a e_1 \dots e_{n-2} e_{n-1}),$$

то есть

$$y_j = \eta(a e_1 \dots e_{n-2} e_{n-1}).$$

Из этого равенства и из равенства (6) вытекает $y_j = a$.

Согласно теореме 2.1,

$$z_j = \eta(e_1 a_{\sigma(j)} e_2 \dots e_{n-2} \underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}))) \dots)}_{s-2}).$$

Кроме того, из (9), ввиду $\sigma(j) \neq j$, следует $a_{\sigma(j)} = e_1$. Таким образом,

$$z_j = \eta(e_1 e_1 e_2 \dots e_{n-2} \underbrace{\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \dots \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} \eta(e_{n-1} e_1 e_2 \dots e_{n-1}))) \dots)}_{s-2}).$$

Применяя к полученному равенству $s - 1$ раз равенство (8), получим

$$z_j = \eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}).$$

Из этого равенства и из равенства (7) вытекает $z_j = e_1$. А так как

$$y_j = a, z_j = e_1, a \neq e_1,$$

то $y_j \neq z_j$, откуда следует, что доказываемое неравенство (10) из формулировки теоремы верно. Теорема доказана.

Сформулируем следствие из теоремы 3.1 для $n = 3$.

Следствие 3.1. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, e_2 , что

$$a \neq e_1, \eta(ae_1e_2) = a, \eta(e_1e_1e_2) = e_1, \eta(e_2e_1e_2) = e_2.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ так же, как в теореме 3.1. Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}_s) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \mathbf{a} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2}_{s-1}). \quad (11)$$

Если η – бинарная операция ($n = 2$), то, как отмечалось выше, l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[\]_{s+1, \sigma, k}$. Поэтому из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.2. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает элементом a и идемпотентом e такими, что

$$a \neq e, \eta(ae) = a.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e, a_j = a, a_{j+1} = \dots = a_k = e), \mathbf{e} = (\underbrace{e, \dots, e}_k).$$

Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_s]_{s+1, \sigma, k} \neq [\underbrace{\mathbf{e} \mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s-1}]_{s+1, \sigma, k}. \quad (12)$$

Если в теореме 3.1 положить $a = e_{n-1}$, то равенство (6) совпадает с равенством (8). Таким образом, верна

Теорема 3.2. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами e_1, \dots, e_{n-1} , что $e_{n-1} \neq e_1$,

$$\eta(e_1 e_1 \dots e_{n-1}) = e_1,$$

$$\eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафіксуем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для якога $\sigma(j) \neq j$, положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_1, a_j = e_{n-1}, a_{j+1} = \dots = a_k = e_1)$$

и определим элементы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ так же, как в теореме 3.1. Тогда верно неравенство (10).

Полагая в следствии 3.1 $a = e_2$ или в теореме 3.2 $n = 3$, получим

Следствие 3.3. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами e_1, e_2 , что

$$e_2 \neq e_1, \eta(e_1 e_1 e_2) = e_1, \eta(e_2 e_1 e_2) = e_2.$$

Зафіксуем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для якога $\sigma(j) \neq j$, положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = \dots = a_{j-1} = e_1, a_j = e_2, a_{j+1} = \dots = a_k = e_1)$$

и определим элементы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 так же, как в теореме 3.1. Тогда верно неравенство (11).

Случай нейтральных последовательностей. Так как для правой нейтральной (нейтральной) последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$ n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ верны равенства (6) – (8), то теореме 3.1 соответствует следующая

Теорема 3.3. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, n -элементный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$. Зафіксуем $a \in A$ ($a \neq e_1$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для якога $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ так же, как в теореме 3.1. Тогда верно неравенство (10).

Сформулируем следствия из теоремы 3.3 для $n = 3$ и $n = 2$.

Следствие 3.4. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, n -элементный тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 e_2$. Зафіксуем $a \in A$ ($a \neq e_1$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для якога $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ так же, как в теореме 3.1. Тогда верно неравенство (11).

Следствие 3.5. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, n -элементный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e . Зафіксуем $a \in A$ ($a \neq e$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для якога $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} и \mathbf{e} так же, как в следствии 3.2. Тогда верно неравенство (12).

Следующее следствие вытекает из теоремы 3.2. Оно же вытекает из теоремы 3.3, если в ней положить $a = e_{n-1}$.

Следствие 3.6. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$, что $e_{n-1} \neq e_1$. Зафіксуем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для якога $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы $\mathbf{a}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ так же, как в теореме 3.1. Тогда верно неравенство (10).

Следующее следствие может быть получено из следствия 3.4 при $a = e_2$ или из следствия 3.6 при $n = 3$.

Следствие 3.7. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такой правой нейтральной (нейтральной) последовательностью $e_1 e_2$, что $e_2 \neq e_1$. Зафіксуем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для якога $\sigma(j) \neq j$, и определим элемент \mathbf{a} \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 – так же, как в теореме 3.1. Тогда верно неравенство (11).

Случай идемпотентов. Если в теореме 3.1 все e_1, \dots, e_{n-1} совпадают с некоторым идемпотентом e n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, то верны равенства (7) и (8). Поэтому справедлива

Теорема 3.4. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементом a и идемпотентом e , что

$$a \neq e, \eta(\underbrace{ae \dots e}_{n-1}) = a.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} и \mathbf{e} так же, как в следствии 3.2. Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e} \mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{s(n-1)-1}). \quad (13)$$

Сформулируем следствие из теоремы 3.4 для $n = 3$.

Следствие 3.8. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает таким элементом a и идемпотентом e , что $a \neq e$, $\eta(aee) = a$. Зафиксируем $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} и \mathbf{e} так же, как в следствии 3.2. Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{2s}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e} \mathbf{a} \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{2s-1}). \quad (14)$$

Замечание 3.1. Следствие 3.2 может быть извлечено из теоремы 3.4 если в ней положить $n = 2$. Из следствия 3.2, в свою очередь, извлекается следствие 3.5.

Случай единиц. Если неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e , то для любого его элемента a , отличного от e , выполняется условие

$$a \neq e, \eta(\underbrace{ae \dots e}_{n-1}) = a$$

из теоремы 3.4. Поэтому справедлива

Теорема 3.5. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e . Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} и \mathbf{e} так же, как в следствии 3.2. Тогда верно неравенство (13).

Сформулируем следствия из теоремы 3.5 для $n = 3$.

Следствие 3.9. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, неоднородный тернарный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e . Зафиксируем $a \in A$ ($a \neq e$), а также $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого $\sigma(j) \neq j$, и определим элементы \mathbf{a} и \mathbf{e} так же, как в следствии 3.2. Тогда верно неравенство (14).

4. Неабелевость l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

l -Арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ может быть как абелевым, так и неабелевым. Для каждого результата предыдущего раздела можно сформулировать признак неабелевости соответствующего полиадического группоида.

Например, теоремам 3.1 – 3.5 соответствуют следующие признаки.

Теорема 4.1. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, \dots, e_{n-1} , что $a \neq e_1$, и верны равенства (6) – (8). Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Теорема 4.2. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами e_1, \dots, e_{n-1} , что $e_{n-1} \neq e_1$, и верны равенства (7), (8). Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Теорема 4.3. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, неоднородный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Теорема 4.4. Пусть подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает таким элементом a и идемпотентом e , что

$$a \neq e, \eta(\underbrace{ae \dots e}_{n-1}) = a.$$

Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Теорема 4.5. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ не является тождественной, неоднородноэлементный n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e . Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Замечание 4.1. Для l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ и единицы e теорема 4.5 доказана в [4, теорема 7]. Частный случай этого результата для полугруппы A доказан в [3, предложение 3.5.1].

Замечание 4.2. Если в теоремах 4.1 – 4.5 n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ заменить n -арной полугруппой $\langle A, \eta \rangle$ и потребовать дополнительно, чтобы подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяла условию $\sigma^l = \sigma$, то получим новые признаки неабелевости, в которых, согласно теореме 2.2, вместо l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ будет фигурировать l -арная полугруппа $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Таким образом, теоремам 4.1 – 4.5 соответствуют следующие теоремы.

Теорема 4.6. Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает такими элементами a, e_1, \dots, e_{n-1} , что $a \neq e_1$, и верны равенства (6) – (8). Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – неабелева l -арная полугруппа.

Теорема 4.7. Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$, где $n \geq 3$, обладает такими элементами e_1, \dots, e_{n-1} , что $e_{n-1} \neq e_1$, и верны равенства (7), (8). Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – неабелева l -арная полугруппа.

Теорема 4.8. Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, неоднородноэлементная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – неабелева l -арная полугруппа.

Теорема 4.9. Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает таким элементом a и идемпотентом e , что

$$a \neq e, \eta(\underbrace{ae \dots e}_{n-1}) = a.$$

Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – неабелева l -арная полугруппа.

Теорема 4.10. Пусть нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, неоднородноэлементная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой единицей (единицей) e . Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – неабелева l -арная полугруппа.

Так как в любой n -арной группе имеются нейтральные последовательности, то теоремы 2.3 и 4.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.11. Если нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородноэлементная n -арная группа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – неабелева l -арная группа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – №3. – С. 35–40.
2. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Гальмак, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Гальмак, А. М. Об операции $[]_{l, \sigma, k}$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2010. – № 1(35). – С. 34–38.
5. Гальмак, А. М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2018. – № 1(51). – С. 4–10.
6. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

Поступила в редакцию 18.07.2018 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A. ON NONABELIANISM POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL CLASS.

The article deals with permutability of the elements in polyadic groupoids with polyadic operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that is defined on Cartesian power of A^k n -ary groupoid $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$ and n -ary operation η . The special cases of the operation $\eta_{s, \sigma, k}$ are two polyadic operations defined by E. Post on Cartesian power of symmetric group and Cartesian power of full linear group over the field of complex numbers respectively. The main result of the article is the theorem in which sufficient conditions of non-abelianism of l -ary ($l = s(n - 1) + 1$, $k \geq 2$) groupoid $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ are formulated. Numerous consequences of this theorem are given. In particular, it was found that if nonidentity substitution $\sigma^l = \sigma$, n -ary group $\langle A, \eta \rangle$ has no less than two elements, polyadic groupoid $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ is a non-abelian polyadic group.

Keywords: polyadic operation, n -ary groupoid, n -ary semigroup, n -ary group, abelianism, neutral sequence.

УДК 511.42

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ НЕВЫРОЖДЕННЫХ ФУНКЦИЙ НА КОРОТКИХ ОТРЕЗКАХ

И. М. Морозова

кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский аграрный технический университет, г. Минск, РБ

О. Н. Кемеш

старший преподаватель
Белорусский аграрный технический университет, г. Минск, РБ

Н. В. Сакович

кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В последние 20 лет были найдены связи между метрической теорией диофантовых приближений с распределением действительных алгебраических и целых алгебраических чисел на коротких интервалах действительной прямой. В.В. Бересневичем, М. Хаксли, С. Велани, Д. Диккинсом были установлены оценки сверху и снизу для количества точек с рациональными координатами вблизи гладких кривых и поверхностей. Были найдены связи между метрической теорией диофантовых приближений с распределением действительных алгебраических и целых алгебраических чисел на коротких интервалах действительной прямой.

Рассмотрено распределение нулей некоторого класса невырожденных кривых. Получены точные оценки сверху по высоте для количества нулей этих функций. Для $n = 2$ найдена оценка снизу для количества нулей.

Ключевые слова: корень многочлена, алгебраические числа, вронскиан производных, система диофантовых неравенств, диофантовы приближения.

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

полином с целыми коэффициентами степени $\deg P = n$ и высоты $H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$. Введем класс полиномов $P(x)$ при натуральном числе $Q \geq 1$.

$$P_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P = n, H(P) \leq Q\}. \quad (2)$$

Через $\#A$ обозначим количество элементов конечного множества A , μB – мера Лебега измеримого множества B , а через $c_1 = c_1(n)$, $c_2 = c_2(n), \dots$ – величины, зависящие от n , но не зависящие от H и Q .

Алгебраические числа – это корни многочленов с целыми коэффициентами. Если для $\alpha \in \mathbb{R}$ или $\alpha \in \mathbb{C}$ существует полином $P(x)$, для которого $P(\alpha) = 0$, то α – алгебраическое число. Полином $P_1(x)$ наименьшей степени n , с условием $\text{НОД}(a_0, a_1, \dots, a_n) = 1$ называется минимальным многочленом алгебраического числа α , а числа n и $H(P_1)$ называются соответственно степенью и высотой алгебраического числа α . Если $a_n = 1$, то корни таких полиномов называются целыми алгебраическими числами.

© Морозова И. М., 2019

© Кемеш О. Н., 2019

© Сакович Н. В., 2019

Из (2) следует, что $\#P_n(Q) = (2Q+1)^{n+1}$. Несложно доказать, что количество действительных корней полиномов из $P_n(Q)$ не менее $c_1 Q^{n+1}$.

Обозначим $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ интервал меры $\mu I = c_2 Q^{-\gamma}$, $0 \leq \gamma < 1$. В [1; 2] доказано, что существуют интервалы длины $c_2 Q^{-1}$, в которых нет алгебраических чисел α степени $\deg \alpha = n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$ ни при каких n . В [1] доказано, что можно взять $c_3 > 0$ так, что в интервале $\mu I = c_3 Q^{-\gamma}$, $\gamma < 1$ будет не менее $c_4 Q^{n+1} \mu I$ корней полиномов из $P_n(Q)$.

Пусть на I заданы $(n+1)$ раз непрерывно-дифференцируемые функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ такие, что вронсиан $W(x)$ их производных

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \dots & f_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \dots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

для почти всех x (в смысле меры Лебега) отличен от нуля на I . Такие функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ будем называть невырожденными на I .

Составим функцию

$$F_n(x) = a_n f_n(x) + \dots + a_1 f_1(x) + a_0.$$

Введем обозначения: $n = \deg F_n(x)$, $H = H(F_n) = \max |a_j|$, $0 \leq j \leq n$.

Функции $F_n(x)$ обладают многими свойствами полиномов. Например, количество нулей $F_n(x)$ на I не превосходит $c_5 n$.

В работах [3; 4; 5] относительно функций $F_n(x)$ установлено следующее.

Обозначим через $\psi(t)$ положительную монотонно убывающую функцию аргумента $t > 0$, а через $\mathfrak{Z}_n(\psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|F_n(x)| < H^{-n+1} \psi(H) \quad (3)$$

имеет бесконечное число решений в функциях $F_n(x)$.

Тогда

$$\mu \mathfrak{Z}_n(\psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \psi(H) < \infty, \\ \mu I, & \text{если } \sum_{H=1}^{\infty} \psi(H) = \infty \end{cases}. \quad (4)$$

Если $F_n(x)$ – полином, то первое равенство в (4) было доказано В.И. Берником в [6], а второе равенство В.В. Бересневичем в [3].

При $\psi(H) = H^{-\nu}$, $\nu > 1$ первое утверждение в (4) представляет собой известную гипотезу К. Малера [7] и было доказано В.Г. Спринджук [8; 9].

В случае невырожденных функций при $n = 2$ аналогичное утверждение получил В. Шмидт [10], а при $n = 3$ В.В. Бересневич и В.И. Берник [4].

Д. Клейнбок и Г. Маргулис в [11] решили проблему В.Г. Спринджук [9], доказав, что $\mu(H^{-\nu}) = 0$ при $\nu > 1$ для произвольного n при невырожденных функций $f_j(x)$, $1 \leq j \leq n$.

В работах [5] и [12] первое и второе равенства (4) были доказаны для произвольной функции $\psi(t)$.

В работе [13] для случая $n = 2$ доказана теорема о существовании δ_0 , при котором $\mu B_1 > d \mu I$, $0 < d < 1$. Эта теорема полезна при получении оценок количества нулей функций $F_n(x)$.

В работе [14] задача о количестве целых точек в области обобщена на точки с рациональными координатами.

В работе [15] получены новые результаты о распределении алгебраических точек. Предложен метод, позволяющий получать оценки сверху и снизу для количества алгебраических точек в кубах малой меры Лебега в пространствах любой размерности.

Рассмотрим невырожденные функции $\vec{f} = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ и для целочисленного вектора $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ составим функцию

$$F_n(x) = a_n f_n(x) + a_{n-1} f_{n-1}(x) + \dots + a_1 f_1(x) + a_0.$$

Введем замену переменных: $f_1(x) = t, f_j(t) = f_j(f_1^{-1}(t)), 2 \leq j \leq n$ и перейдем к набору невырожденных функций аргумента $t, f_j(t), \in 2 \leq j \leq n$.

Далее, чтобы не менять обозначений, будем считать, что на интервале I задан набор невырожденных функций $x, f_2(x), \dots, f_n(x)$ и

$$F_n(x) = a_n f_n(x) + a_{n-1} f_{n-1}(x) + \dots + a_1 x + a_0 \tag{5}$$

$$\max_{x \in I} |f_j(x)| < c_5.$$

Обозначим $l_i = \max_{x \in I} |f_i(x)|, l = \max_{1 \leq i \leq n} l_i$.

Введем класс функций при натуральном Q :

$$L_3(Q, \vec{f}) = \{F_n(x) : H(F_n) \leq Q\}.$$

В настоящей работе доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. На любом интервале $I, \mu I = Q^{-\gamma}, 0 \leq \gamma < 1$ количество нулей функций $F_n(x) \in L_3(Q, \vec{f})$ не превосходит $c_5 n l 2^{n+3} Q^{n+1} \mu I$.

Доказательство.

Разложим функции $F_j(x)$ на интервале I в ряд Тейлора в нуле α_{1_j} функции $F_j(x)$, лежащем в I .

$$F_j(x) = F(\alpha_{1_j}) + F'(\alpha_{1_j})(x - \alpha_{1_j}) + \frac{1}{2} F''(\zeta_{ij})(x - \alpha_{1_j})^2, \text{ где } \zeta_j \in (x; \alpha_{1_j}).$$

Так как $F(\alpha_{1_j}) = 0, |x - \alpha_{1_j}| \leq \mu I = Q^{-\gamma}, |F''(\zeta_j)| < cnQ, |F'(\alpha_{1_j})(x - \alpha_{1_j})| < nlQ^{1-\gamma}$, то при достаточно большом Q имеем для всех $x \in I$ оценку

$$|F_j(x)| < 2nlQ^{1-\gamma}. \tag{6}$$

Введем вектор $\vec{b} = (a_n, \dots, a_1)$, состоящий из коэффициентов функции $F_j(x)$, и множество функций $F_j(x)$ с одним и тем же вектором \vec{b} обозначим $F(\vec{b})$. При достаточно большом Q верно неравенство

$$\#F(\vec{b}) = (2Q+1)^n < 2^{n+1} Q^n.$$

Занумеруем функции $F_j(x), j = 0, 1, \dots, 2cnl2^{n+2}Q^{n+1}\mu I$, нули которых лежат на интервале I . образуем новые функции $R_j(x) = F_j(x) - F_0(x) = d_j$, которые являются различными целыми числами. Тогда $\max |d_j| > 2nlQ^{1-\gamma}$, что противоречит (6). Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Теорема 2. Существует $c_9 > 0$, что на любом интервале I , длины $Q^{-\gamma}, 0 < \gamma < \frac{1}{9}$ не менее $c_9 2^3 \delta_0^{-1} Q^3 \mu I$ нулей функций $F_2(x) \in L_3(Q, \vec{f})$.

Доказательство теоремы 2 базируется на теореме 3, доказанной в работе [13].

Теорема 3. При достаточно малом δ_0 справедливо неравенство

$$\mu M_2(I, Q) < \frac{1}{4} \mu I, \tag{7}$$

где через $M_2(I, Q)$ обозначено множество $x \in I$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |F_2(x)| < Q^{-2} \\ |F_2'(x)| < \delta_0 Q, \end{cases}$$

имеет решение хотя бы для одной функции $F_2(x) \in L_3(Q)$.

Доказательство теоремы 2.

Введем множество $B_1 = I \setminus M_2(I, Q)$. Из (7) следует, что

$$\mu B \geq \frac{3}{4} \mu I. \quad (8)$$

Пусть $x_1 \in B_1$. С помощью принципа ящиков Дирихле доказывается, что существует функция $F_2(x) \in L_2(Q)$ такая, что

$$|F_2(x_1)| < c_6 Q^{-2}. \quad (9)$$

Если $x \in B_1 = I \setminus M_2(I, Q)$, то

$$|F_2'(x_1)| \geq \delta_0 Q. \quad (10)$$

Из системы (9) и (10) следует, что в окрестности точки x_1 функция $F_2(x)$ имеет действительный корень α_1 и

$$|x_1 - \alpha_1| < c_7 \delta_0^{-1} Q^{-3}. \quad (11)$$

Неравенство (11) определяет интервал T_1 с центром в точке x_1 меры

$$\mu T_1 = 2c_7 \delta_0^{-1} Q^{-3}. \quad (12)$$

Возьмем точку $x_2 \in B_2 \subset I \setminus M_2(I, Q) \setminus T_1$ и аналогичным образом найдем другую функцию $F_2(x) \in L_2(Q)$, у которой действительный корень α_2 удовлетворяет неравенству

$$|x_2 - \alpha_2| < c_8 \delta_0^{-1} Q^{-3}. \quad (13)$$

Такую процедуру можно продолжать и построить t нулей функций $F_2(x) \in L_2(Q)$ до тех пор, пока выполняется неравенство $t 2c_3 \delta_0^{-1} Q^{-3} < \frac{3}{4} \mu I$, откуда следует, что количество нулей не менее

$$c_9 2^3 \delta_0^{-1} Q^3 \mu I. \quad (14)$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Bernik, V., Getze F.** // Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals. *Izv. Math. RAN*, 79. – 2015. – P. 28–39.
2. **Bernik V., Gusakova A., Götze F.** // On points with algebraically conjugate coordinates close to smooth curves. *Moscow. Journal of Combinatorics and Number Theory*. – 2016. – Vol. 6, iss. 2-3. – P. 56–101.
3. **Beresnevich, V. V.** On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. V. Beresnevich // *Acta Arithmetica*. – 1999. – Vol. 90, № 2. – P. 97–112.
4. **Beresnevich, V.** // On a metrical theorem of W. Schmidt. / V. Beresnevich, V. Bernik // *Acta Arithmetica*. – 1996. – Vo. 75. – P. 219–233.
5. **Beresnevich, V.** Groshew type theorem for convergence on manifold / V. Beresnevich // *Acta Arithmetica Hungar.* – 2002. – Т. 94, № 1-2. – С. 99–130.
6. **Берник, В. И.** О точном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // *Acta Arithmetica*. – 1989. – Т. 53. – С. 17–28.
7. **Mahler K.** Über das Mass der Menge aller S-Zahlen. *Mathematische Annalen*. 106. – 1932. – P. 131–139.
8. **Спринджук, В. Г.** Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 184 с.
9. **Sprindzuk, V.** Achiements and problems of the theory of Diophantine approximations / V. Sprindzuk // *Uspekhi Mat. Nauk* – 1980. – Vo. 35, № 4(24). – P. 3–68.

10. **Schmidt, W. M.** Metrische Sätze über simultane Approximation abhängiger Größen / W. M. Schmidt // Monatsch. Math. – 1964. – Vol. 68. – P. 154–166.
11. **Kleinbock, D. Y.** Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds / D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis // Ann. Math. – 1998. – 148. – P. 339–360.
12. **Bernik V. I., Kleinbock D., Margulis G. A.** // Khintchine-type theorems on manifolds the convergence case for standard and multiplicative versions, Internet. Math. Res. Notices. – 2001. – P. 453–486.
13. **Морозова, И. М.** Метод обнаружения нулей гладких функций, основанный на теореме Минковского о линейных формах / И. М. Морозова, О. Н. Кемеш, Н. В. Сакович // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – № 2(50). – 2017. – С. 49–54.
14. **Кемеш, О. Н.** О количестве точек с действительными алгебраическими координатами вблизи гладкой кривой / О. Н. Кемеш, И. М. Морозова, Н. В. Сакович // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. – № 1(49). – 2017. – С. 12–16.
15. **Ламчановская, М. В.** Двухсторонние оценки для количества точек с алгебраическими координатами в k -мерных кубах малой меры / М. В. Ламчановская, Н. В. Сакович, Н. В. Шамукова // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – № 1(51). – 2018. – С. 28–34.

Поступила в редакцию 27.11.2018 г.

Контакты: sakovich_nv@msu.by (Сакович Наталья Владимировна)

Morozova I., Kemesh O., Sakovich N. DISTRIBUTION OF ZEROS OF NONDEGENERATE FUNCTIONS ON SHORT CUTTINGS.

During the last 20 years there have been found the connections between the metric theory of Diophantine approximations and the distribution of real algebraic and integer algebraic numbers on the short cuttings of the real straight line. V.V. Beresnevich, M. Huxley, S. Velani, D. Dickens have determined estimates from above and below for the number of points with rational coordinates near smooth curves and surfaces. The connections between the metric theory of Diophantine approximations and the distribution of real algebraic and integer algebraic numbers on the short cuttings of the real straight line have been found.

The distribution of zeros of some class of nondegenerate curves has been considered.

Accurate estimates from above for the number of zeros of these functions have been obtained.

For $n = 2$ the estimate from below has been obtained.

Keywords: root of polynomial, algebraic number, Wronskian derivative, set of Diophantine inequalities, Diophantine approximations.

УДК 514. 76

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНВАРИАНТНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ В ГРУППОИДЕ ЛИ $\Pi^k(B)$

Л. А. Романович

старший преподаватель

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Теория структур высших порядков на гладких многообразиях является одним из важных направлений современной дифференциальной геометрии. Среди них особый интерес вызывают связности. В данной работе продолжается изучение инвариантных связностей в группоиде Ли k -струй локальных диффеоморфизмов гладкого многообразия и приводится описание их кривизны и кручения. Исследование проводится методом Эресмана.

Ключевые слова: гладкое многообразие, группоид Ли, алгеброид Ли, инвариантная связность, кривизна, кручение.

Введение

Важным направлением дифференциальной геометрии является теория структур высших порядков на гладких многообразиях. Ш. Эресман [1] предложил подход к исследованию геометрических структур на гладких многообразиях, основанный на использовании группоидов Ли и k -струй гладких отображений. К. Маккензи изложил основы дифференциальной геометрии, используя группоиды Ли и алгеброиды Ли [2]. И. В. Белько осуществил развитие этого метода [3].

Вопросы теории связностей первого и высших порядков являются актуальными в современной дифференциальной геометрии. Основные идеи общей теории связностей восходят к Э. Картану и Ш. Эресману. Связности, введенные Э. Картаном, сейчас называют картановыми связностями. Они определяют картановы геометрии, которые можно рассматривать одновременно как обобщения римановой геометрии и однородных пространств. Актуальность исследования картановых геометрий подтверждается возросшим в последние годы интересом к ним, о чем свидетельствуют статьи Д. В. Алексеевского, П. Михора, Е. Альта, Ш. Франца (см., например, [4], [5]), монографии А. Чапа и Я. Словака [6]. Одним из обобщений понятия линейной связности в векторном расслоении, основанном на использовании группоидов Ли, является связность в группоиде Ли, построенная Ш. Эресманом. Построение связностей высших порядков методом Эресмана приведено в работе Нго ван Кё [7].

В данной работе продолжается [8], [9] изучение связностей высших порядков на гладких многообразиях, согласованных с транзитивным действием группы Ли и исследуются их кривизна и кручение.

Основная часть

Пусть B – гладкое многообразие, (Ω, B) – группоид Ли над B , (Ω^k, B) – продолжение порядка k группоида Ли (Ω, B) , (E, p, B) – векторное расслоение, ассоциированное с группоидом Ли (Ω, B) , $(J^k E, p^k, B)$ – продолжение порядка k векторного расслоения (E, p, B) , $(Q^k(\Omega), \pi, B)$ – расслоение элементов связностей порядка k .

Группоид Ли (Ω^k, B) действует на векторном расслоении $(J^k E, p^k, B)$ [7, с. 170]. Локальная запись этого действия имеет вид:

$$Z \cdot X = j_x^k \sigma \cdot j_x^k s = j_y^k \left((\sigma(\beta \circ \sigma)^{-1}) \cdot s(\beta \circ \sigma)^{-1} \right), \quad (1)$$

где $Z = j_x^k \sigma \in \Omega^k$, $\alpha \circ \sigma = id$, $X = j_x^k s \in J^k E$, $y = \beta \circ \sigma(x)$.

Группоид Ли (Q^k, B) действует на векторном расслоении $(Q^k(\Omega), \pi, B)$ [3, с. 133]. Локальная запись этого действия имеет вид:

$$Z \cdot Y = j_x^k \sigma \cdot j_x^k f = j_y^k \left((\sigma(\beta \circ \sigma)^{-1}) \cdot f(\beta \circ \sigma)^{-1} \cdot (\sigma(x)^{-1}) \right), \quad (2)$$

где $Y = j_x^k f \in Q_x^k(\Omega)$.

Нго ван Кё каждой связности в группоиде Ли ставит в соответствие морфизм векторных расслоений [7, с. 190]

$$\lambda_k : E \rightarrow J^k E, \quad (3)$$

который расщепляет точную последовательность расслоений

$$0 \rightarrow J_0^k E \rightarrow J^k E \rightarrow E \rightarrow 0. \quad (4)$$

Пусть G – группа Ли, H – замкнутая подгруппа в G , $B = G/H$ – однородное пространство. Группа Ли G действует на гладком многообразии B :

$$L_g : G \times B \rightarrow B : (g, x) \rightarrow gx. \quad (5)$$

Группоид Ли k -струй локальных диффеоморфизмов гладкого многообразия $\Pi^k(B)$ действует на векторном расслоении $L_g : G \times B \rightarrow B : (g, x) \rightarrow gx$. Согласно (1) локальная запись этого действия имеет вид:

$$Z \cdot X = j_x^k \sigma \cdot j_x^k s = j_y^k \left((\sigma(\beta \circ \sigma)^{-1}) \cdot s(\beta \circ \sigma)^{-1} \right), \quad (6)$$

где $Z = j_x^k \sigma \in \Pi^k(B)$, $\alpha \circ \sigma = id$, $X = j_x^k s \in J^k TB$, $y = \beta \circ \sigma(x)$.

Пусть $\Omega = \frac{G \times G}{H}$, $\Omega^k = J^k \left(\frac{G \times G}{H} \right)$. Группоид Ли $\frac{G \times G}{H}$ действует на векторном расслоении (TB, p, B) , его продолжение $J^k \left(\frac{G \times G}{H} \right)$ – подгруппоид Ли группоиды Ли $\Pi^k(B)$, действует на векторном расслоении $(J^k TB, p^k, B)$.

Действие группоиды Ли $\Pi^k(B)$ на расслоении $(Q^k(\Omega), \pi, B)$ естественным образом определяет инвариантную связность относительно действия Ω^k :

$$c(y) = Z \cdot c(x), \quad (7)$$

где $Z = j_x^k \sigma \in \Omega^k$, $\alpha \circ \sigma = id$, $y = \beta \circ \sigma(x)$.

Соответствующий этой связности морфизм векторных расслоений $\lambda_k : TB \rightarrow J^k TB$ согласован с действиями Ω на TB и Ω^k на $J^k TB$ [8, с. 38].

Покажем, что кривизна и кручение инвариантной связности также обладают аналогичным свойством. Следуя определению кривизны связности в группоиде Ли [2, с. 295], получим, что для морфизма векторных расслоений $\lambda_k : TB \rightarrow J^k TB$ кривизна представляет собой следующее отображение:

$$R_{\lambda_k} : \Gamma(TB \wedge TB) \rightarrow \Gamma(J^k TB) : (\mu, \eta) \rightarrow \lambda_k[\mu, \eta] - [\lambda_k(\mu), \lambda_k(\eta)], \quad (8)$$

где $\mu, \eta \in \Gamma(TB)$.

Теорема 1. Кривизна инвариантной связности согласована с действием группоида Ли Ω на TB и его продолжения Ω^k на $J^k TB$.

Доказательство.

Пусть $c : B \rightarrow Q^k(\Omega)$ – инвариантная связность порядка k в группоиде Ли (Ω, B) .

Тогда для расщепления $\lambda_k : TB \rightarrow J^k TB$ также выполняется условие инвариантности [9, с. 38]

$$\lambda_k(\sigma(x) \cdot \mu(x)) = j_x^k \sigma \cdot \lambda_k(\mu(x)). \quad (9)$$

Проверим инвариантность скобки относительно действия продолженного группоида Ли Ω^k на расслоении $J^k TB$. Из (1) и определения скобки в $J^k TB$ получим (10):

$$j_x^k \sigma \cdot [j_x^k \mu, j_x^k \eta] = j_y^{k-1} (\sigma(\beta \circ \sigma)^{-1} \cdot [\mu(\beta \circ \sigma)^{-1}, \eta(\beta \circ \sigma)^{-1}]). \quad (10)$$

Из согласованности скобки с дифференциалом отображения левых сдвигов (5) получим (11) и (12):

$$j_y^{k-1} (\sigma(\beta \circ \sigma)^{-1} \cdot [\mu(\beta \circ \sigma)^{-1}, \eta(\beta \circ \sigma)^{-1}]) = j_y^{k-1} [\sigma \mu(\beta \circ \sigma)^{-1}, \sigma \eta(\beta \circ \sigma)^{-1}] \quad (11)$$

$$j_y^{k-1} [\sigma \mu(\beta \circ \sigma)^{-1}, \sigma \eta(\beta \circ \sigma)^{-1}] = [j_y^k(\sigma \mu), j_y^k(\sigma \eta)] = [\sigma_x^k \mu, \sigma_x^k \eta]. \quad (12)$$

Из (10), (11), (12) следует инвариантность скобки относительно действия продолженного группоида Ли Ω^k на расслоении $J^k TB$.

Проверим далее инвариантность кривизны R_{λ_k} относительно действия продолженного группоида Ли. Из (8) и линейности действия Ω^k на $J^k TB$ получим (13) и (14):

$$j_x^k \sigma \cdot R_{\lambda_k}(\mu, \eta) = j_x^k \sigma \cdot (\lambda_k[\mu(x), \eta(x)] - [\lambda_k(\mu(x)), \lambda_k(\eta(x))]), \quad (13)$$

$$j_x^k \sigma \cdot (\lambda_k[\mu(x), \eta(x)] - [\lambda_k(\mu(x)), \lambda_k(\eta(x))]) = \lambda_k(\sigma(x) \cdot [\mu(x), \eta(x)]) - [\lambda_k(\sigma \mu(x)), \lambda_k(\sigma \eta(x))]. \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует

$$j_x^k \sigma \cdot R_{\lambda_k}(\mu, \eta) = R_{\lambda_k}(\sigma \mu, \sigma \eta). \quad (15)$$

Теорема доказана.

Следуя определению кручения связности в группоиде Ли [7, с. 199], получим, что для морфизма векторных расслоений $\lambda_k : TB \rightarrow J^k TB$ кручение представляет собой следующее отображение:

$$T_{\lambda_k} : \Gamma(TB \wedge TB) \rightarrow \Gamma(J^{k-1}TB) : (\mu, \eta) \rightarrow D_\mu(\lambda_k(\eta)) - D_\eta(\lambda_k(\mu)) - \rho_{k-1}([\lambda_k(\mu), \lambda_k(\eta)]), \quad (16)$$

где $\mu, \eta \in \Gamma(TB)$, D – дифференциальный оператор Спенсера D [10, с. 54] В терминах оператора $\nabla_k = D \circ \lambda_k$ (17) имеет вид (18):

$$T_{\lambda_k}(\mu, \eta) = \nabla_{k\mu}(\eta) - \nabla_{k\eta}(\mu) - \rho_{k-1}([\lambda_k(\mu), \lambda_k(\eta)]). \quad (17)$$

Теорема 2. Кручение инвариантной связности согласовано с действием группоида Ли Ω на TB и его продолжения Ω^k на $J^k TB$.

Доказательство.

Пусть $c : B \rightarrow Q^k(\Omega)$ – инвариантная связность порядка k в группоиде Ли (Ω, B) и пусть $\lambda_k : TB \rightarrow J^k TB$ – соответствующий этой связности морфизм векторных расслоений. Проверим инвариантность кручения T_{λ_k} относительно действия продолженного группоида Ли. Из (17) получим (18):

$$T_{\lambda_k}(\mu, \eta) = \nabla_{k\mu}(\eta) - \nabla_{k\eta}(\mu) - \rho_{k-1}([\lambda_k(\mu), \lambda_k(\eta)]). \quad (18)$$

Из согласованности оператора Спенсера с действием Ω^k на $J^k TB$ получим (19)

$$D_\mu(\lambda_k(\sigma\eta)) - D_\eta(\lambda_k(\sigma\mu)) - \rho_{k-1}([\lambda_k(\sigma\mu), \lambda_k(\sigma\eta)]) = T_{\lambda_k}(\sigma\mu, \sigma\eta). \quad (19)$$

Из (18) и (19) следует (20):

$$j_x^k \sigma \cdot T_{\lambda_k}(\mu, \eta) = T_{\lambda_k}(\sigma\mu, \sigma\eta). \quad (20)$$

В терминах дифференциального оператора ∇_k инвариантность кручения T_{λ_k} относительно действия продолженного группоида Ли следует из (21) и (22):

$$j_x^k \sigma \cdot T_{\lambda_k}(\mu, \eta) = j_x^k \sigma \cdot (\nabla_{k\mu}(\eta) - \nabla_{k\eta}(\mu) - \rho_{k-1}([\lambda_k(\mu), \lambda_k(\eta)])), \quad (21)$$

$$(\nabla_{k\sigma\mu}(\sigma\eta)) - \nabla_{k\sigma\eta}(\sigma\mu) - \rho_{k-1}([\lambda_k(\sigma\mu), \lambda_k(\sigma\eta)]) = T_{\lambda_k}(\sigma\mu, \sigma\eta). \quad (22)$$

Теорема доказана.

В качестве примера приведем описание кривизны инвариантных связностей первого и второго порядков на двумерной сфере

$$S^2 = \{x^1, x^2, x^3 \in R^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}. \quad (23)$$

Как известно, данное многообразие является однородным пространством

$$S^2 \approx O(3)/O(2), \quad (24)$$

на котором действует группа ортогональных матриц третьего порядка $O(3)$:

$$O(3) \times S^2 \rightarrow S^2: (\sigma_i^j, x^j) \rightarrow \sigma_i^j x^j. \quad (25)$$

Локальная запись условий инвариантности морфизмов (3) использована для вычисления функций Γ_{kj}^n и Γ_{klj}^n инвариантных связностей на S^2 [9, с. 39]. Для локального описания функций кривизны инвариантных связностей на S^2 относительно действия (25) воспользуемся локальной записью морфизмов (8).

Функции кривизны инвариантной связности первого порядка могут быть найдены из условий (26):

$$R_{ij,k}^t = \Gamma_{kj}^n \cdot \Gamma_{ni}^t - \Gamma_{ki}^n \cdot \Gamma_{nj}^t + \frac{\partial \Gamma_{kj}^t}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^t}{\partial x^j}, \quad (26)$$

где Γ_{kj}^n – функции инвариантной связности первого порядка на S^2 относительно локальной карты (U_1, φ_1) [9, с. 39].

Функции кривизны инвариантной связности первого порядка на S^2 относительно локальной карты (U_1, φ_1) имеют вид (27.1) – (27.4):

$$R_{11,1}^1(x) = R_{11,2}^1(x) = R_{11,1}^2(x) = R_{11,2}^2(x) = 0 \quad (27.1)$$

$$R_{12,1}^1(x) = 2 \frac{x^1 x^2}{\rho^2}, \quad R_{12,2}^1(x) = \frac{1 - (x^1)^2}{\rho^2} \quad (27.2)$$

$$R_{12,1}^2(x) = \frac{1 - (x^2)^2}{\rho^2}, \quad R_{12,2}^2(x) = -2 \frac{x^1 x^2}{\rho^2} \quad (27.3)$$

$$R_{11,1}^2(x) = R_{11,2}^2(x) = R_{22,1}^2(x) = R_{22,2}^2(x) = 0, \quad (27.4)$$

где $\rho = \sqrt{1 - (x^1)^2 - (x^2)^2}$.

Заключение

В последнее время возрос интерес к исследованию картановых геометрий. В работе продолжено изучение инвариантных связностей в группоиде Ли k -струй локальных диффеоморфизмов гладкого многообразия $B = G/H$ и приведено описание их геометрических характеристик – кривизны и кручения. В качестве примера приведено описание кривизны инвариантных связностей первого и второго порядков на двумерной сфере.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Ehresmann, C.** Introduction a la theorie des structures infinitesimales et des pseudo-groupes de Lie / C. Ehresmann // Colloq. Geometr. Differ., Strastbourgs. – 1953. – P. 97–100.
2. **Mackenzie, K.** Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometrie / K. Mackenzie. – Cambridge : Universitu Press, 1987. – 327p.
3. **Белько, И. В.** Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии / И. В. Белько. – Москва : Издательство УРСС, 2004. – 208 с.
4. **Alekseevsky, D. V.** Tanaka structures (non Holonomic G -structures) and Cartan connections / Dmitri V. Alekseevsky, Lianna David // Journal of Geometry and Phusics. – 2015. – V. 91. – P. 88–100.

5. **Michor, P.** Tensor fields and connections on holomorphic orbit spaces of finite groups / A. Kriegel, M. Losik, P. Michor // Journal of Lie Theorie. – 2003. – № 13(2). – P. 519–534
6. **Cap, A.** Parabolic Geometrie I: Background and General Theory / A. Cap, J. Slovák // AMS : Publishing House, 2009. – 628 p.
7. **Ngo van Que.** Du prolongement des espaces fibres et des structures infinitesimales / Ngo van Que // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1967. – Т. 17, N 1. – P. 159–223.
8. **Рамановіч, Л. А.** Інварыянтныя звязнасці ў групойдах Лі / Л. А. Рамановіч // Весці Беларускага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта. – 1998. – № 3. – С. 117–121.
9. **Романович, Л. А.** Инвариантные связности в группоиде Ли $\Pi^k(B)$ / Л. А. Романович // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – 2018. – № 1(51). – С. 35–41.
10. **Пале, Р.** Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе / Р. Пале. – Москва : Мир, 1970. – 359 с.

Поступила в редакцию 02.01.2019 г.

Контакты: L_romanovich@mail.ru (Романович Людмила Александровна)

Romanovich L. GEOMETRIC PROPERTIES OF INVARIANT CONNECTIONS IN LIE GROUPOID $\Pi^k(B)$.

The article follows up on the research of invariant connections between the Lie groupoid k -jets of local diffeomorphisms of smooth manifold and provides a description of their curvature and torsion. Ehresmann's method is used in the research.

Keywords: smooth manifold, Lie groupoid, Lie algebroid, invariant connection, curvature, torsion.

УДК 539.144

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ΛN -ПОТЕНЦИАЛА ПО ЭНЕРГИИ СВЯЗИ ГИПЕРТРИТИЯ В ДВУХЧАСТИЧНОЙ МОДЕЛИ

С. М. ЧЕРНОВ

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Проведены численные оценки параметров ΛN -потенциала по энергии связи гипертрипия в модели дейтрон+ Λ . Исследовано влияние формы и параметров нуклонной плотности дейтрона, а также радиуса действия ΛN -сил на результаты численного анализа.

Ключевые слова: Λ -гиперон, гипертрипий, волновые функции дейтрона, параметры ΛN -потенциала.

Введение

Гипертрипий ${}^3_{\Lambda}H$ представляет собой легчайшее гиперядро, существующее в природе, построенное из трех барионов: протона, нейтрона и Λ -гиперона с энергией отрыва последнего $B_{\Lambda} = 0,13 \pm 0,05 \text{ МэВ}$ [1]. Гипертрипий играет такую же важную роль в гиперядерной физике, как и дейтрон в ядерной физике. При этом малое число частиц позволяет использовать микроскопический подход в системе взаимодействующих частиц. Поэтому практически сразу после открытия М. Данышем и Е. Пниевским в 1952 г. гиперядер появилось серия работ, посвященные расчетам энергии связи именно гипертрипия [2; 3]. В настоящее время анализ гиперядра ${}^3_{\Lambda}H$ продолжает интересовать исследователей [4]. Как правило, расчеты энергии связи гипертрипия проводились в системе трех тел вариационным методом Ритца [2–4]. В настоящей работе, однако, мы будем проводить анализ гипертрипия в модели двух тел, построенного из нуклонного остова (дейтрона) и Λ -гиперона. Предполагается, что присутствие Λ -частицы не приводит к деформации остова, так что плотность распределения нуклонов в гиперядре имеет такой же характер, как и в свободном дейтроне $\rho(r)$. Построение функции $\rho(r)$ проводилось в результате решения уравнения Шредингера для двух моделей ядерного потенциала в виде сферически симметричной потенциальной ямы и экспоненциального профиля, допускающих точное аналитическое решение. Численные расчеты энергии связи гипертрипия позволяют оценить значение объемного интеграла $\Omega_{\Lambda N}$, который сравнивается с результатами 3-частичной модели.

Основная часть

1. Оценка параметров нуклонной плотности в дейтроне.

Дейтрон представляет собой связанную систему протона и нейтрона с параллельной ориентацией спинов нуклонов с энергией связи $B_d = 2,226 \text{ МэВ}$. К сожалению, у дейтрона отсутствуют другие возбужденные состояния. Таким образом, мы имеем единственный экспериментальный параметр – B_d . Поэтому простейшие ядерные потенциалы, которые определяются как минимум двумя параметрами – интенсивностью U_0 и радиусом действия r_0 , – не могут быть однозначно построены из задачи дейтрона. На качественном уровне можно лишь оценить диапазон изменения r_0 в пределах

1-2 Фм (1 Фм=10⁻¹⁵ м) из мезонной теории (комптоновская длина волны π -мезона $\hbar/m_\pi c$ составляет 1,4 Фм). Следует ожидать, однако, что дальнейшие наши оценки будут слабо зависеть как от параметров U_0 и r_0 , так и от выбора формы ядерного потенциала $U(r)$. В качестве первой модели $U(r)$ выберем функцию в виде сферической прямоугольной ямы глубиной $-U_0$ и шириной r_0 [5]:

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r \leq r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases} \quad (1)$$

Ниже будет рассмотрена задача дейтрона с экспоненциальным профилем np – потенциала.

Динамика движения нуклонов в СЦМ описывается радиальным уравнением Шредингера с волновой функцией $f(r) = r \cdot R(r)$ и граничным условием

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} \left[E - U(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_0 r^2} \right] f(r) = 0. \\ f(0) = 0. \quad (2)$$

В нашем случае в уравнении (2) следует положить $E = -B_d$, $l = 0$ и заменить m_0 на приведенную массу протона и нейтрона $\mu = m_p m_n / (m_p + m_n) = 469,459 \text{ МэВ}$. Тогда это уравнение примет окончательный вид:

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} [B_d + U(r)] f(r) = 0. \quad (3)$$

Далее необходимо найти решения внутри и вне ямы и сшить решения на границе при $r = r_0$.

1. Область $r \leq r_0$.

В этом случае уравнение (3) для потенциала (1) примет вид:

$$f_1'' + \frac{2\mu}{\hbar^2} (U_0 - B_d) f_1 = 0 \quad (4)$$

или, вводя обозначение

$$\beta^2 \equiv \frac{2\mu}{\hbar^2} (U_0 - B_d), \quad (5)$$

$$f_1'' + \beta^2 f_1 = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) имеет решение, удовлетворяющее граничному условию (2), вида

$$f_1(r) = A \sin \beta r \quad (7)$$

2. Область $r > r_0$.

Уравнение (3) переходит в уравнение

$$f_2'' - \gamma^2 f_2 = 0, \quad (8)$$

где введено обозначение

$$\gamma^2 \equiv \frac{2\mu}{\hbar^2} B_d. \quad (9)$$

Решение уравнения (8), исчезающее на бесконечности, можно представить в виде:

$$f_2(r) = B \exp(-\gamma r). \quad (10)$$

Решения (7) и (10) на границе областей должны удовлетворять стандартным условиям непрерывности и гладкости, т. е.

$$f_1(r_0) = f_2(r_0) \quad (11)$$

$$f_1'(r_0) = f_2'(r_0). \quad (12)$$

Из первого условия можно найти связь амплитудных коэффициентов A и B :

$$B = A \sin \beta r_0 \exp \gamma r_0. \quad (13)$$

А разделив уравнение (12) на (11), получим дисперсионное соотношение, связывающее все параметры задачи: $\beta \operatorname{ctg} \beta r_0 = -\gamma$, после умножения которого на r_0 приводится к виду:

$$y + x \cdot \operatorname{ctg} x = 0, \quad (14)$$

где введены обозначения:

$$y = \gamma r_0; \quad x = \beta r_0. \quad (15)$$

Учитывая условия (5) и (9), видно, что параметры x и y удовлетворяют уравнению окружности

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (16)$$

с радиусом, не зависящим от энергии связи дейтрона B_d :

$$R^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} U_0 r_0^2. \quad (17)$$

Проведем, наконец, нормировку полученных решений:

$$\int_0^{\infty} f^2(r) dr = \int_0^{r_0} f_1^2(r) dr + \int_{r_0}^{\infty} f_2^2(r) dr = \frac{A^2}{2} \left[r_0 - \frac{1}{2\beta} \sin 2\beta r_0 + \frac{1}{\gamma} \sin^2 \beta r_0 \right] = 1,$$

тогда

$$A = \sqrt{\frac{2}{\left(r_0 - \frac{1}{2\beta} \sin 2\beta r_0 + \frac{1}{\gamma} \sin^2 \beta r_0 \right)}}. \quad (18)$$

Для дальнейших численных оценок, учитывая условия (5), (9) и (15), дисперсионное уравнение (14) запишем в развернутом виде:

$$\sqrt{B_d} + \sqrt{U_0 - B_d} \operatorname{ctg} r_0 \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} (U_0 - B_d)} = 0. \quad (19)$$

Во многих руководствах по ядерной физике [5] утверждается, что оценки энергии связи дейтрона чувствительны к характерной комбинации параметров потенциала вида $U_0 r_0^2$, который называют “эффективностью потенциала”. Однако это утверждение, как видно из (19), справедливо лишь в приближении нулевой энергии связи дейтрона $B_d = 0$.

Для анализа влияния параметров потенциала на свойства ядерной и гиперядерной систем численно оценим введенные характеристики задачи $(U_0, \beta, \gamma, A, B)$, которые размещены в таблице 1, для некоторых значений r_0 .

Следует обратить особое внимание на результаты, представленные в последнем столбце таблицы ($r_0 = 2,77 \text{ Фм}$). Здесь рассмотрен вариант параметров потенциала, который определяет среднеквадратичный радиус дейтрона $\langle r_d \rangle = 4,19 \text{ Фм}$, совпадающий с результатом, получаемый в рамках другой модели с экспоненциальным профилем ядерного потенциала (см. ниже).

Плотность распределения нуклонов в дейтроне аналитически можно описать функцией

$$\rho(r) = \begin{cases} A^2 \sin^2 \beta r, & r \leq r_0 \\ B^2 \exp(-2\gamma r), & r > r_0 \end{cases}. \quad (20)$$

Так как функция $\rho(r)$ нормирована на 1 нуклон, то можно ввести среднеквадратичный радиус дейтрона согласно условия

$$\langle r_d \rangle = \sqrt{\int_0^{\infty} \rho(r) r^2 dr} . \quad (21)$$

Численные результаты этого анализа также указаны в таблице 1. Следует считать полученные результаты достаточно разумными, соответствующими оценкам размеров дейтрона многими авторами и в других моделях [5].

Таблица 1 – Результаты численных расчетов параметров (U_0, β, γ, A, B) для дейтрона в модели прямоугольного потенциала

r_0 (Фм)	формула	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,77
U_0 (МэВ)	(19)	122,90	88,43	67,30	53,35	43,63	36,57	21,69
A (Фм ^{-1/2})	(18)	0,613	0,602	0,592	0,581	0,572	0,563	0,531
B (Фм ^{-1/2})	(13)	0,766	0,785	0,805	0,824	0,846	0,867	0,956
β (Фм ⁻¹)	(5)	1,706	1,442	1,253	1,110	0,999	0,910	0,685
$\langle r_d \rangle$ (Фм)	(21)	3,43	3,51	3,60	3,68	3,77	3,85	4,19
γ (Фм ⁻¹)	(9)	0,2317						

Рассмотрим задачу дейтрона в предположении, что между нуклонами потенциал взаимодействия имеет вид:

$$U(r) = -U_0 \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) . \quad (22)$$

Тогда, в соответствии с уравнением Шредингера (3), динамика движения нуклонов (или движение частицы с приведенной массой μ) с потенциалом (22) описывается уравнением

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[B_d - U_0 e^{-\frac{r}{r_0}} \right] f(r) = 0 . \quad (23)$$

Это уравнение можно привести к стандартному уравнению Бесселя [6], если произвести замену переменной r на t :

$$t = \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right); \quad (24)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{df(t)}{dt} + \left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{t^2} \right) f(t) = 0, \quad (25)$$

где введены обозначения

$$\alpha^2 = \frac{8\mu}{\hbar^2} U_0 r_0^2; \quad \beta^2 = \frac{8\mu}{\hbar^2} B_d r_0^2 . \quad (26)$$

Подставляя численные значения параметров

$$\mu = 469,459 \text{ МэВ}, \quad c\hbar = 197,3286 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}, \quad B_d = 2,226 \text{ МэВ} ,$$

условия (26) можно также записать в виде:

$$\alpha^2 = 0,09645 \cdot U_0 r_0^2; \quad \beta^2 = 0,2147 \cdot r_0^2 . \quad (27)$$

Общее решение уравнения (25) можно записать в виде [6]:

$$f(t) = C J_{\beta}(\alpha t) + D J_{-\beta}(\alpha t), \quad (28)$$

где $J_m(x)$ – функция Бесселя первого рода порядка m . Согласно обозначению (24) точке $t = 0$ соответствует точка $r = \infty$, где функция $f(t)$ должна обращаться в нуль. Следовательно, необходимо положить $D = 0$ и волновая функция примет окончательный вид:

$$f(r) = C \cdot J_\beta(\alpha t) = C \cdot J_\beta(\alpha e^{-r/2r_0}). \quad (29)$$

С другой стороны, точке $t = 1$ соответствует точка $r = 0$, где $f(0) = 0$, и мы приходим к соответствующему дисперсионному уравнению вида:

$$J_\beta(\alpha) = 0. \quad (30)$$

Дальнейшую схему численных расчетов можно представить в виде следующих этапов. Выберем значения r_0 из интервала $(1 \div 2) \Phi_M$ с шагом $0,2 \Phi_M$, как и в случае прямоугольной ямы. Для каждого значения r_0 из соотношения (27) вычисляется параметр β и из дисперсионного уравнения (30) находим α , который позволяет из (27) оценить амплитудное значение потенциала U_0 . Далее, находим нормировочную постоянную волновой функции C из уравнения $C^2 I = 1$, где I определяется условием

$$I = \int_0^\infty J_\beta^2(\alpha \cdot e^{-r/2r_0}) dr.$$

Таким образом, можно определить плотность распределения нуклонов в дейтроне, нормированной на 1 нуклон, по формуле

$$\rho(r) = C^2 J_\beta^2(\alpha e^{-r/2r_0}), \quad (31)$$

а также среднеквадратичный радиус дейтрона (21):

$$\langle r_d \rangle = \sqrt{\int_0^\infty \rho(r) r^2 dr} = C \sqrt{\int_0^\infty J_\beta^2(\alpha \cdot e^{-r/2r_0}) r^2 dr}. \quad (32)$$

Результаты этих вычислений в системе MathCad приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты численных расчетов параметров дейтрона в модели экспоненциального потенциала

r_0 (Фм)	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
U_0 (МэВ)	93,31	77,76	66,65	58,32	51,84	46,66
C (Фм ^{-1/2})	0,714	0,720	0,726	0,732	0,738	0,746
α	3,090	3,221	3,351	3,479	3,606	3,733
β	0,463	0,556	0,649	0,741	0,834	0,927
$\langle r_d \rangle$ (Фм)	4,19	4,30	4,39	4,44	4,47	4,48

Из проведенных расчетов видно, что вариация параметров потенциала незначительно отражается на пространственной зависимости плотности распределения нуклонов и размерах дейтрона. Следует отметить некоторое отличие результатов расчетов, полученных в рамках двух рассмотренных моделей – прямоугольной ямы и экспоненциального профиля потенциала взаимодействия протона и нейтрона. Однако можно найти такие варианты параметров обоих потенциалов, которые обеспечивают практически совпадающие результаты (например, определяют среднеквадратичный радиус дейтрона $\langle r_d \rangle = 4,19 \Phi_M$). Это достигается в случае ямы при $U_0 = -21,69 \text{ МэВ}$ и $r_0 = 2,77 \Phi_M$, а для экспоненциального потенциала – при $U_0 = -93,31 \text{ МэВ}$ и $r_0 = 1,0 \Phi_M$. Этот случай отражен на рисунке 1.

Важно отметить, что среднеквадратичный электромагнитный радиус дейтрона (кроме энергии связи) может служить второй недостающей экспериментальной точкой для определения параметров ядерного потенциала из задачи дейтрона.

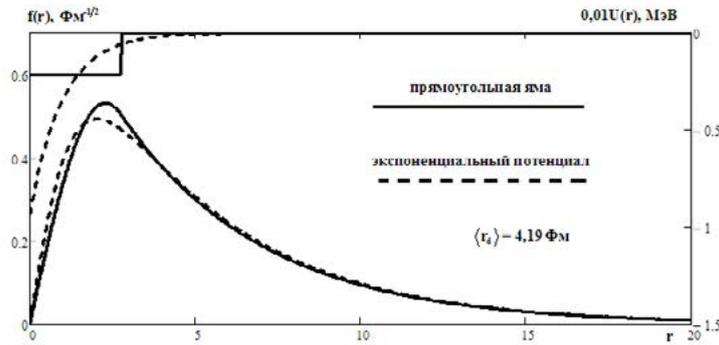


Рисунок 1 – Волновые функции нуклонов в СЦМ дейтрона для моделей ядерного потенциала в виде прямоугольной ямы и экспоненциального профиля, обеспечивающие одинаковое значение размера дейтрона $\langle r_d \rangle = 4,19 \text{ Фм}$

2. Определение объемного интеграла ΛN -потенциала по энергии связи гипертригия.

Для расчетов энергии связи гипертригия (точнее – B_Λ) необходимо построить потенциал взаимодействия Λ -гиперона с дейтроном:

$$U_{\Lambda d}(r) = \int V_{\Lambda N}(|\vec{r} - \vec{r}_1|) \rho(\vec{r}_1) d^3 r_1. \tag{33}$$

Так как радиус действия ΛN -сил вдвое меньше NN -взаимодействия (порядка комптоновской длины двух пионов $\hbar/2m_\pi c \approx 0,7 \text{ Фм}$) и, по крайней мере, много меньше размеров дейтрона ($4 \div 5 \text{ Фм}$), то в дальнейшем будем рассматривать приближение нулевого радиуса действия ΛN -сил ($R_{\Lambda N} = 0$), т. е.

$$V_{\Lambda N}(\vec{r}) = -\Omega_{\Lambda N} \delta(\vec{r}), \tag{34}$$

где $\delta(\vec{r})$ дельта-функция Дирака. В дальнейшем будет показано, что учет конечности радиуса действия ΛN -потенциала не оказывает существенного влияния на проводимые оценки. Тогда для потенциала Λd -взаимодействия окончательно получаем:

$$U_{\Lambda d}(r) = -2\Omega_{\Lambda N} \rho(r). \tag{35}$$

В последнем соотношении также учтен тот факт, что ранее полученные зависимости $\rho(r)$ нормированы на один нуклон, но дейтрон содержит 2 частицы.

Таким образом, наша задача сводится к определению единственного параметра – объемного интеграла $\Omega_{\Lambda N}$ ($\Omega_{\Lambda N} = -\int V_{\Lambda N}(r) d^3 r$), который обеспечивает экспериментальное значение энергии связи гипертригия (или B_Λ). Для дальнейшего решения задачи необходимо обратиться к численному интегрированию уравнения Шредингера (3):

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} [B_\Lambda + U_{\Lambda d}(r)] f(r) = 0. \tag{36}$$

В этом уравнении $B_\Lambda = 0,13 \text{ МэВ}$, μ – приведенная масса Λ -гиперона и дейтрона ($m_d = 1875,613 \text{ МэВ}$; $m_\Lambda = 1115,683 \text{ МэВ}$; $\mu = 699,56 \text{ МэВ}$). Для потенциала $U_{\Lambda d}(r)$ (35) будем рассматривать два варианта функций $\rho(r)$ дейтрона в модели прямоугольной ямы и экспоненциального профиля np -потенциалов, которые мы будем условно называть “вариант А” и “вариант В” соответственно.

Вариант А (прямоугольная яма):

$$U_{\Lambda d}(r) = -2\Omega_{\Lambda N}\rho(r) = -2\Omega_{\Lambda N} \begin{cases} A^2 \sin^2 \beta r, & r \leq r_0 \\ B^2 \exp(-2\gamma r), & r > r_0 \end{cases} \quad (37)$$

Вариант В (экспонента):

$$U_{\Lambda d}(r) = -2\Omega_{\Lambda N}\rho(r) = -2\Omega_{\Lambda N} C^2 J_\beta^2(\alpha e^{-r/2r_0}). \quad (38)$$

Все необходимые параметры, входящие в функции (37) и (38) (кроме $\Omega_{\Lambda N}$), указаны в таблицах (1) и (2).

Численное решение краевой задачи по поиску собственного значения $\Omega_{\Lambda N}$ будем проводить в среде MathCad с помощью встроенной функции sbval, которая сводит нашу задачу к задаче Коши методом “пристрелки”. Для применения этой методики запишем уравнение Шредингера (36) в виде:

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} = V(r, \Omega) f(r), \quad (39)$$

где введено обозначение

$$V(r, \Omega) = \frac{2\mu}{\hbar^2} [B_\Lambda + U_{\Lambda d}(r)]. \quad (40)$$

В силу линейности уравнения Шредингера (39) можно использовать следующие начальные условия: $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $\Omega = \Omega_0$. Далее определим матричные элементы: $f_0 = f(r)$; $f_1 = f'(r)$; $f_2 = \Omega = const$. Численное решение поставленной задачи для потенциала (37) (вариант А) проводилось в среде MathCad в соответствии с программой, представленной в листинге 1. Решение задачи для потенциала с экспоненциальным профилем ядерного взаимодействия (вариант В) проводилось по этой же программе, где использовалась зависимость (38).

Листинг 1. Определение параметра $\Omega_{\Lambda N}$ из уравнения Шредингера для дейтрона в модели ядерного потенциала в виде прямоугольной ямы

ВΛ := 0.13 μ := 699.56 \hbar := 197.329 -параметры уравнения Шредингера	
r0 := 1 A := 0.613 B := 0.766 β := 1.706 γ := 0.2317	-параметры нуклонной плотности
$\rho(r) := \text{if}[r \leq r0, (A \cdot \sin(\beta \cdot r))^2, B^2 \cdot \exp(-2\gamma \cdot r)]$ -нуклонная плотность	
U(r, Ω) := -2Ω · $\rho(r)$ -потенциал взаимодействия гиперона и дейтрона	
V(r, Ω) := $\frac{2\mu}{\hbar^2} \cdot (В\Lambda + U(r, \Omega))$	
b := 0 c := 100 Ω_0 := 300 -начальные условия	
D(r, f) := $\begin{pmatrix} f_1 \\ V(r, f_2) \cdot f_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	-условие $f_1 = f'(r)$ -правая часть уравнения Шредингера -условие $\Omega = 0$

$$\text{load}(\mathbf{b}, \Omega) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \Omega_0 \end{pmatrix} \quad \text{-начальные условия}$$

$$\text{score}(\mathbf{c}, \mathbf{f}) := f_0 \quad \text{разность между вычисляемым и заданным } f(\mathbf{c})-0$$

$$\Lambda := \text{sbval}(\Omega, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{D}, \text{load}, \text{score}) \quad \text{-найденное значение } \Omega_{\Lambda V}$$

$$\Lambda = (337.625)$$

Результаты численных расчетов $\Omega_{\Lambda V}$ для обоих вариантов приведены в таблице (3), где указаны также соответствующие параметры ядерного потенциала (U_0, r_0) и значения среднеквадратичных радиусов дейтрона $\langle r_d \rangle$.

Таблица 3 – Результаты численных вычислений объемных интегралов $\Omega_{\Lambda V}$ по энергии связи гипертретия, согласованные с расчетами параметров дейтрона для ядерных потенциалов в модели прямоугольной ямы (вариант А) и экспоненты (вариант В)

		r_0 (Фм)	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,77
Вариант А	U_0 (МэВ)		122,9	88,43	67,30	53,35	43,63	36,57	21,69
	$\Omega_{\Lambda V}$ (МэВ · Фм ³)		337,6	334,1	330,3	327,7	323,0	319,3	304,6
	$\langle r_d \rangle$ (Фм)		3,43	3,51	3,60	3,68	3,77	3,85	4,19
Вариант В	U_0 (МэВ)		93,31	77,76	66,65	58,32	51,84	46,66	33,69
	$\Omega_{\Lambda V}$ (МэВ · Фм ³)		294,5	285,8	277,7	269,2	261,7	253,9	219,3
	$\langle r_d \rangle$ (Фм)		4,19	4,30	4,39	4,44	4,47	4,48	4,41

Следует отметить хорошее согласие результатов расчетов $\Omega_{\Lambda V}$ по энергии связи гипертретия с аналогичными вычислениями B_{Λ} других гиперядер с массовыми числами $A=4 \div 207$, где получен достаточно широкий разброс для $\Omega_{\Lambda V} = (210 \div 320) \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3$ [7]. Кроме того, важно указать на сильную зависимость значений $\Omega_{\Lambda V}$ от параметров ядерных потенциалов.

Интересно отметить, что два разных подхода с параметрами потенциала дейтрона $(U_0; r_0) = (21,7 \text{ МэВ}; 2,77 \text{ Фм})$ для варианта (А) и $(93,3 \text{ МэВ}; 1,0 \text{ Фм})$ для варианта (В) приводят к одинаковому значению размера дейтрона $\langle r_d \rangle = 4,19 \text{ Фм}$, а также практически совпадающим значениям объемного интеграла $304,6 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3$ и $294,5 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3$ соответственно. Иными словами, проведенные расчеты не зависят от выбора профиля ядерного потенциала.

Полезно также сравнить наши результаты с работой Брауна и Пешкина [2], которые провели вариационные расчеты с Хьюлтоновскими пробными функциями энергии связи гипертретия с таким же дельта-образным потенциалом (34). По оценкам этих авторов, $\Omega_{\Lambda V} = 290 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3$.

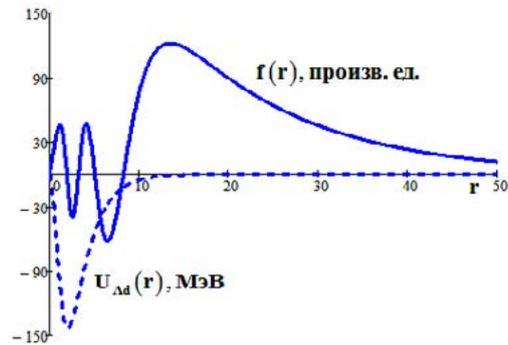


Рисунок 2 – Потенциал взаимодействия Λ -гиперона с дейтроном $U_{\Lambda d}(r)$ (пунктирная линия) и волновая функция Λ -частицы $f(r)$ в гипертриитии (сплошная линия)

Полученные численные результаты позволяют также получить волновую функцию Λ -гиперона в гипертриитии и оценить его пространственные размеры. Для дальнейшего ограничимся одним примером – моделью прямоугольной ямы для дейтрона с размером $\langle r_d \rangle = 4,19 \text{ Фм}$. Соответствующая подпрограмма представлена в листинге (2).

Потенциал взаимодействия Λ -гиперона с дейтроном $U_{\Lambda d}(r)$ изображен на рисунке (2), который представляет собой яму с одним минимумом в точке $r_1 = 2,29 \text{ Фм}$ и $U_{\Lambda d}(r_1) = -171,8 \text{ МэВ}$. Ожидается, что внутри такой ямы волновая функция Λ -гиперона относительно СЦМ дейтрона должна носить осциллирующий характер, что также отражено на рисунке (2).

Листинг 2. Подпрограмма вычисления волновой функции и размера гипертриития

```

μ := 699.56          h := 197.32858      r0 := 2.77
γ := 0.2317          ВΛ := 0.13          β := 0.685
A := 0.531           B := 0.956         Ω := 304.612

ρ1(r) := if[r ≤ r0, (A·sin(β·r))2, (B)2·exp(-2γ·r)]

U(r) := -2Ω·ρ1(r)

V(r) :=  $\frac{2\mu}{h^2} \cdot (B\Lambda + U(r))$ 

Given

 $\frac{d^2}{dr^2}f(r) = V(r) \cdot f(r) \quad f(0) = 0 \quad f'(0) = 1$ 

f := Odesolve(r, 100)

R :=  $\sqrt{\frac{\int_0^{100} f(r)^2 \cdot r^2 \, dr}{\int_0^{100} f(r)^2 \, dr}}$  = 19.7121

```

Как показывают расчеты (листинг 2), среднеквадратичный размер гипертригия $\langle r_\Lambda \rangle = 19,7 \text{ Фм}$, что почти в 5 раз превышает размеры дейтрона ($\langle r_d \rangle = 4,19 \text{ Фм}$). Аналогичная картина имеет место для варианта (В), для которого $\langle r_\Lambda \rangle = 22,2 \text{ Фм}$.

В проведенном анализе предполагалось, что радиус действия ΛN -сил $R_{\Lambda N} = 0$, т. е. ΛN -потенциалы имели δ -образный характер (34). Покажем, что учет конечности радиуса действия ΛN -сил не имеет существенного влияния на результаты проведенных расчетов. Для этого учтем, что любой центрально-симметричный потенциал (33) может быть представлен в виде разложения [8]:

$$V_{\Lambda O}(r) = -\Omega_{\Lambda N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\langle R_{\Lambda N}^{2m} \rangle}{(2m+1)!} \nabla^{2m} \rho(r), \quad (41)$$

где введены обозначения

$$\Omega_{\Lambda N} = -\int V_{\Lambda N}(r) d^3r; \quad \langle R_{\Lambda N}^{2m} \rangle = -\frac{1}{\Omega_{\Lambda N}} \int V_{\Lambda N}(r) r^{2m} d^3r. \quad (42)$$

В дальнейшем ограничимся первыми двумя членами последнего разложения:

$$V_{\Lambda O}(r) \approx -\Omega_{\Lambda N} \left(1 + \frac{R_{\Lambda N}^2}{6} \nabla^2 \right) \rho(r). \quad (43)$$

Здесь объемный интеграл $\Omega_{\Lambda N}$ и среднеквадратичный радиус $R_{\Lambda N} = \sqrt{\langle R_{\Lambda N}^2 \rangle}$ являются интегральными характеристиками ΛN -потенциала и не зависят от структуры ядра-остова, оператор Лапласа $\Delta = \nabla^2$ имеет вид: $\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}$.

В качестве примера рассмотрим случай экспоненциального профиля ядерного потенциала (В) для дейтрона с радиусом $\langle r_d \rangle = 4,19 \text{ Фм}$, где в соответствии с (31)

$$\rho(r) = C^2 J_\beta^2(\alpha e^{-r/2r_0}) \quad (44)$$

$$(r_0 = 1,0 \text{ Фм}; \alpha = 3,09; \beta = 0,463; C = 0,7141 \text{ Фм}^{-1/2}).$$

Численные расчеты по указанной выше методике объемных интегралов $\Omega_{\Lambda N}$ для различных $R_{\Lambda N}$ из интервала $[0, 1]$ приводят к результатам, указанным в таблице (4).

Таблица 4 – Объемные интегралы для различных значений радиусов действия ΛN -сил

$R_{\Lambda N} \text{ (Фм)}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\Omega_{\Lambda N} \text{ (МэВ} \cdot \text{Фм}^3)$	294,6	293,9	292,0	288,4	282,7	274,7

Графики соответствующих потенциалов $U_{\Lambda d}(r)$ для двух крайних случаев $R_{\Lambda N} = 0$ и $R_{\Lambda N} = 1 \text{ Фм}$ представлены на рисунке (3).

Как видно из рисунка 3, характер поведения потенциала $U_{\Lambda d}(r)$ меняется лишь в малой области $r \leq 3 \text{ Фм}$, что практически не влияет на величину объемного интеграла (таблица 3), так как пространственные размеры гипертригия достигают значений $\langle r_\Lambda \rangle \approx 20 \text{ Фм}$.

Заключение

Проведенный анализ позволяет сделать общий вывод о разумности использования 2-тельной модели гипертригия при условии согласованности расчетов параметров гипертригия с задачей дейтрона. Оценки основной характеристики ΛN -потенциала (объемного интеграла $\Omega_{\Lambda N}$) слабо зависят от формы и параметров нуклонной плотности дейтрона, а также от выбора численных значений радиуса действия ΛN -сил.

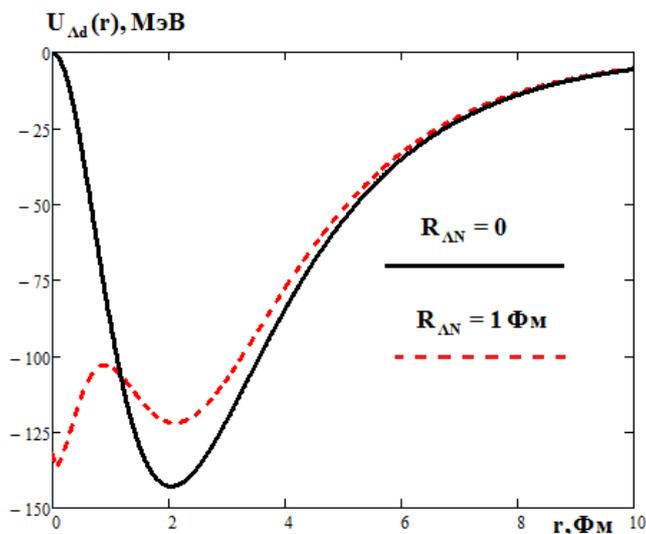


Рисунок 3. Потенциалы взаимодействия Λ -гиперона и дейтрона для радиусов действия $R_{\Lambda N} = (0 \div 1) \Phi_M$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Juric, M.** A new determination of the binding energy values of the light hypernuclei / M. Juric, G. Bohm, J. Klabuhn [et al] // Nucl. Phys. B. – V. 52. – 1973. – Pp. 1–30.
2. **Brown, L. M.** Λ -Nucleon Potential and Binding of Hyperfragments / L. M. Brown, M. Peshkin // Phys. Rev. – 1957. – V. 107. – № 1. – Pp. 272–274.
3. **Dalitz, R. H.** Remarks on the Hypertriton / R. H. Dalitz, B. W. Downs // Phys. Rev. – 1958. – V. 110. – № 4. – Pp. 958–965.
4. **Калачей, С. А.** Энергии связи гиперядер и взаимодействие ΛN и $\Lambda \Lambda$: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.04.02 / С. А. Калачей. – Москва, 2005. – 119 л.
5. **Ситенко, А. Г.** Лекции по теории ядра : учебное пособие для вузов / А. Г. Ситенко, В. К. Тартаковский. – Москва : Атомиздат, 1972. – 352 с.
6. **Флюгге, З.** Задачи по квантовой механике : в 2 т. / З. Флюгге. – Москва : Мир, 1974. – Т. 1. – 342 с.
7. **Чернов, С. М.** Задача о частице в сферической прямоугольной яме и ее применение к оценкам энергий возбужденных состояний Λ -гиперядер / С. М. Чернов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – Серья В. Природазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2017. – № 1(49). – С. 54–67.
8. **Колесников, Н. Н.** ΛN -потенциал из совместного анализа гиперядер и Λp -рассеяния / Н. Н. Колесников, С. М. Чернов // Ядерная физика. – 1976. – Т. 23. – Вып. 5. – С. 960–969.

Поступила в редакцию 26.11.2018 г.

Контакты: stanislavchernof2011@yandex.by (Чернов Станислав Михайлович)

Chernov S. ASSESSING PARAMETERS OF ΛN -POTENTIAL OF HYPERTRITIUM BINDING ENERGY IN TWO-PARTIAL MODEL.

Numerical estimates of the parameters of the ΛN -potential of hypertritium binding energy in the deuteron + Λ model are presented. The influence of the form and the parameters of deuteron nucleon density as well as the impact of the operating range of ΛN -forces on the results of the numerical analysis are investigated.

Keywords: Λ -hyperon, hypertritium, deuteron wave functions, ΛN -potential parameters.

УДК 535.87 + 621.373

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ, ОТРАЖАЕМОГО ТОНКИМ СЛОЕМ ИНВЕРСНОЙ СРЕДЫ

В. А. ЮРЕВИЧ

доктор физико-математических наук, профессор

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В приближении сверхтонкого слоя резонансных атомов на основе численного моделирования и качественного анализа устойчивости равновесных состояний кинетической модели, образованной оптическими уравнениями Максвелла – Блоха, предсказывается возможность амплитудной автомодуляции излучения при отражении планарной приповерхностной пленкой инвертированной плотной резонансной среды. В качестве модельных параметров использованы материальные характеристики полупроводниковых квантоворазмерных структур в спектральной области экситонного резонанса.

Ключевые слова: плотная резонансная среда, оптический гистерезис, диполь-дипольное взаимодействие, генерация при отражении, регулярные пульсации излучения.

Введение

В ходе решения ряда прикладных задач оптики для разработки лазерных и интегрально-оптических устройств возникает необходимость анализировать проблемы поведения световых волн на границе раздела сред, содержащей тонкий слой материала с относительно сильной нелинейной реакцией на излучение в диапазоне частот, близких к одному из оптических резонансов. Весьма актуальными являются также вопросы нелинейного взаимодействия электромагнитных волн с приповерхностным активным слоем, которое приводит к таким нелинейным явлениям как обращение волнового фронта, гистерезисное поведение коэффициента отражения или пропускания оптической системы в зависимости от интенсивности падающего света и др. [1–3]. В фундаментальном плане планарные структуры с особо тонкими пленками на основе вещества с резонансным нелинейным откликом представляют собой пример простейшей физической системы, допускающей модельное рассмотрение при изучении разнообразного круга физических явлений, таких как оптическая бистабильность, самопульсации света, солитонный режим прохождения ультракоротких импульсов света, генерация когерентного излучения, возникновение динамического хаоса [4–9]. С другой стороны, значителен и практический интерес к подобным структурам, обусловленный возможностями их применения в элементной базе оптоэлектроники.

К проблеме усиления света при отражении инвертированным слоем или тонкой приповерхностной пленкой с инверсией заселенности исследователи обращались в разное время [10–12]. При теоретическом анализе ситуации рассматривалась задача о полном отражении света однородной полубесконечной усиливающей средой, что трактовалось как обобщение граничной задачи о полном отражении света на границе раздела двух сред на случай усиливающей отражающей среды. Предсказывалось, что при полном отражении от инвертированной среды отраженный световой поток может усиливаться. В настоящее время интенсивно разрабатываются искусственные электромагнитные композитные среды с оптическими свойствами, отсутствующими у составляющих их

исходных природных материалов. Эти заранее неочевидные оптические или, в более широком частотном диапазоне, электромагнитные свойства обусловлены субволновым размером элементарного дипольного рассеивателя при их плотной упаковке в среде и резонансным характером рассеяния внешнего электромагнитного излучения. Плотная упаковка резонансных рассеивателей делает невозможным непосредственное использование математических подходов, развитых для расчетов эффектов многократного рассеяния классических волновых полей. Тем более что в классическом подходе рассматриваются, в основном, линейные задачи.

Между тем задача об усилении света с одновременным преобразованием его временной структуры при его отражении усиливающей средой может быть решена применением представления о приповерхностном слое с резонансной поляризацией. В случае особо тонкого слоя в отраженном и действующем внутри слоя на инвертированный ансамбль атомных диполей излучении значительны составляющие, обусловленные так называемыми сверхизлучательными компонентами [13–15]. Ими образованы дополнительные к величинам нерезонансного показателя преломления и френелева коэффициента отражения динамические резонансные добавки, зависящие от интенсивности и способные модулировать действующее световое поле. Их вклад в нелинейность отклика среды, проявляющуюся на частоте резонанса, особенно значителен в активно изучаемых в последнее время полупроводниковых структурах с квантоворазмерными эффектами [16; 17]. Именно их относят к упоминаемым выше композитным материалам с высокой плотностью активных центров. В экситонной области спектра вероятность вынужденных переходов и резонансной реакции на когерентное световое поле там особо велика [17; 18] – настолько, что эти материалы обычно приводят как пример плотных резонансных сред со свойством нелинейного частотного дрейфа резонансной спектральной линии, обусловленного взаимным влиянием ближних полей диполей [14; 17]. Вызванная этим смещением фазовая нелинейность резонансного отклика может быть фактором самопроизвольной временной модуляции отраженного тонкой поверхностной пленкой плотной резонансной среды первоначально непрерывного излучения [19; 20].

В настоящей работе анализируются светодинамические следствия обусловленного влиянием ближних полей на поляризуемость активных центров уширения спектральной линии усиления для резонансного отражения инвертированного тонкого слоя плотной оптической среды. Решение задачи преобразования временной структуры отраженного светового поля представляет важность для разработки компактных модулирующих или генерирующих когерентное излучение устройств.

Исходные уравнения

Рассматривается планарная пленка толщиной l , значительно меньшей длины волны света $\lambda = 2\pi c/\omega$, находящаяся на поверхности линейной оптической среды. На пленку извне нормально падает плоская световая волна с несущей частотой ω , в пределах ширины спектральной линии поглощения (усиления) близкой к частоте оптического резонанса ω_0 . Материал граничной пленки является активным, обладающим свойством резонансной поляризации на частотах, близких к ω_0 , – обычно принято говорить о тонком слое резонансных атомов [1; 2], более того – вещество пленки представляет собой плотную резонансную среду, то есть материал с относительно высокой плотностью активных центров и их способностью влиять друг на друга собственными электрическими полями. Отклик двухуровневой среды особо тонкого слоя на действие падающего поля с напряженностью E_i проявляется в обоих составляющих светового поля – в прошедшей (E) и отраженной (E_r). В выражениях связи напряженностей падающей извне, прошедшей (то есть, действующей на активные центры в среде слоя) и отраженной волн содержится

дополнительные к френелевым динамические резонансные компоненты. Эти компоненты прямо пропорциональны скорости поверхностной поляризации среды – их именуют сверхизлучательными [15]. Выражения для связи полей световых волн и поляризованности записываются с учетом обычно применяемого приближения сверхтонкого слоя резонансных атомов ($l \ll \lambda$) [13] в форме алгебраических соотношений, вытекающих из электродинамических условий для уравнений Максвелла. Существенно, что комплексная амплитуда поля внутри слоя тогда рассматривается как продольно-однородная переменная. Схема расчета образует систему нелинейных дифференциальных уравнений, поскольку согласованная с соотношениями для световых полей динамика материальных составляющих отклика – комплексной амплитуды поляризованности и разности населенностей – анализируется в рамках уравнений, которые получаются, следуя работам [13; 14], в рамках формализма квантовомеханической матрицы плотности активных центров, представляемых двухуровневыми диполями.

В приведенной ниже и используемой далее для расчетов модификации схемы расчета квазистационарные напряженности плосковолновых полей E , E_i и E_r в нормированном времени $\tau = t/T_2$ масштабируются как безразмерные переменные (например, $e = \mu T_2 E / \hbar$):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\tau) &= \mathbf{e}_i(\tau) + \kappa \rho, \quad \mathbf{e}_r(\tau) = -r \mathbf{e}_i(\tau) + \kappa \rho, \quad \Delta\omega = (\omega - \omega_0) T_2, \\ \frac{d\rho}{d\tau} &= n e - \left[1 - i \left(\Delta\omega - \frac{\mu^2 N}{3\epsilon_0 \hbar} T_2 n \right) \right] \rho, \quad \frac{dn}{d\tau} = \frac{1-n}{\tau_{12}} - \frac{1}{2} (\rho^* \mathbf{e} + \rho \mathbf{e}^*), \quad |\rho| \leq 1, \quad -1 \leq n \leq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

ρ и n – вероятностные переменные резонансной поляризованности и инверсии заселенности;

$\Delta\omega$ – нормированная по ширине спектральной линии ($1/T_2$) линейная отстройка частоты;

$\kappa = \mu N l \omega T_2 / \epsilon_0 \hbar (\eta + 1) c$ – показатель усиления инверсного слоя, максимальный при данном уровне накачки;

μ – средний дипольный момент, характеризующий вероятность резонансного перехода;

N , η , и r – концентрация активных центров в единице объема, нерезонансный показатель преломления и амплитудный коэффициент отражения слоя;

ϵ_0 , \hbar и c – диэлектрическая постоянная, постоянная Планка и скорость света;

$\tau_{12} = T_1/T_2$ – отношение времен продольной (T_1) и поперечной (T_2) релаксации.

Система (1) в приближении однородного поля характеризует энергообмен входного поля и квантовой системы образующих приповерхностный слой частиц среды с учетом конечности времени фазовой (поперечной) релаксации резонансной поляризованности. Также учтено влияние накачки, стимулирующей инверсию и обратимость разности населенностей. Особо характерен учет присущего плотным резонансным средам диполь-дипольного взаимодействия, выражаемой локальной лорентцовой поправкой к полю, действующему на дипольные активные центры. Частотная отстройка в уравнении для поляризованности выражается суммой дефекта частоты $\omega - \omega_0$ и лорентцовой поправки с коэффициентом $\mu^2 N / 3\epsilon_0 \hbar$, величина которой может изменяться по мере насыщения инверсной заселенности. Зависящая по этой причине от интенсивности поля излучения нелинейная отстройка резонанса как нарушение резонансного условия усиления неизбежно становится фактором обратной связи в схеме генерации в среде инверсного тонкого слоя и способна обусловить определенные динамические особенности процесса.

В рамках изучения динамики излучения и порождаемого им отклика среды на основе анализа поведения системы (1) решается задача преобразования временной структуры отраженного светового поля при взаимодействии с тонким приповерхностным слоем.

Свойства стационарных решений

Отметим далее, что при постоянном уровне возбуждения среды слоя внешним полем ($e_A(\tau) = e_0$) система (1) автономна. Ее стационарными решениями, определяемыми сингулярными пределами составляющих дифференциальных уравнений, характеризуются равновесные состояния динамической модели. Имеются в виду нетривиальные стационарные решения (1), нелинейно зависящие от амплитуды e_0 . Определяя устойчивость равновесных этих состояний, можно дать оценку возможности осцилляторного поведения отраженного поля в той физической ситуации, когда внешний сигнал представляет собой прямоугольный выброс поля. Предполагается также, что время воздействия такого светового импульса с амплитудой $e_A(\tau) = e_0$ может быть сравнимым или превышать времена релаксации T_1 и T_2 .

Следуя сказанному, стационарные решения (1) ρ_s, n_s , соответствующие определенному уровню непрерывного возбуждения e_0 , могут быть выражены из алгебраических выражений:

$$\rho_s = \frac{\kappa n_s - 1 + i(\Delta\omega - \kappa\gamma n_s)}{(\kappa n_s - 1)^2 + (\Delta\omega - \kappa\gamma n_s)^2} n_s e_0, \quad \frac{1 - n_s}{\tau_{12}} n_s = |\rho_s|^2. \quad (2)$$

При записи соотношений (2) и в дальнейшем представлялось удобным использовать в выражении для нелинейной отстройки резонанса нормировочный коэффициент γ , в основном определяемый соотношением длины волны и толщины пленки. Возникающие при наличии возбуждения равновесные состояния ρ_s, n_s , количественно характеризуются, следуя расчету выражений (2), существуют наряду с точкой тривиального положения равновесия, то есть с точкой в фазовом пространстве системы (1) с координатами $|\rho_s| = 0, n_s = 0$.

Соотношения (2) представляют систему нелинейных алгебраических уравнений относительно $R_s = \text{Re } \rho_s, S_s = \text{Im } \rho_s$ и n_s . Зависимость этих величин от коэффициентов и параметров системы (1) относительно просто вычисляется применением параметрического расчета. Следует иметь в виду, что ρ и n – вероятностные переменные. При расчете зависимостей одну из таких переменных, например, n_s , удобно задать как линейно нарастающую в пределах (0; 1) величину.

Расчеты проведены для известного из литературы [5; 17; 18] набора параметров, соответствующего используемым в оптике и лазерной физике полупроводниковым кванторазмерным структурам, возбуждаемым излучением в спектральной области экситонного резонанса. Масштаб явлений и коэффициенты (1) определялись значениями параметров из диапазона: $\mu \sim (6 \dots 8) \cdot 10^{-29}$ Кл·м, $Ml \sim (1 \dots 5) \cdot 10^{16}$ м², $T_1 \approx 1 \cdot 10^{-9}$ с, $T_2 \approx 1 \cdot 10^{-12}$ с; интенсивность внешнего излучения могла достигать величины примерно $2.5 \cdot 10^5$ Вт/м² на длинах волн из диапазона $\lambda \sim (1.25 \dots 1.3) \cdot 10^{-6}$ м, величина линейной отстройки $\Delta\omega$ была в пределах ширины линии.

На рисунке 1 приведены кривые, которыми для разных параметров системы (1) характеризуется изменение величин R_s, S_s, n_s в зависимости от уровня возбуждения – нормированной интенсивности внешнего поля, выражаемой значением e_0^2 . Отмечается особо нелинейный характер этих зависимостей – в определенном диапазоне изменения e_0^2 отмечается неоднозначность функций $R_s(e_0^2), S_s(e_0^2)$ и $n_s(e_0^2)$. В этом случае говорят о бистабильности состояний – значениям e_0^2 из этого диапазона отвечают три значения функций, из них два соответствуют реализуемым равновесным состояниям модели, то есть при одном и том же уровне возбуждения возможно существование двух различных наборов стационарных значений переменных. Бистабильность представляет крайнее проявление нелинейной связи переменных и параметров, когда нелинейность обусловлена несколькими физическими механизмами, которые способны в зависимости от соотношения параметров в той или иной мере влиять один на другого. Именно в области их

компенсации должна проявляться бистабильность. В рассматриваемом случае изменение усиления происходит за счет его насыщения полем вынужденного излучения и зависящей от разности населенностей отстройкой резонанса.

Иными словами, подобный гистерезисный характер связи характеристик состояния с параметрами возбуждения предполагает возможность резкого переключения состояний в точках поворота кривых. Динамическая модель в этом случае внутренне неустойчива с возможностью развития автоколебаний при постоянном уровне возбуждения. Вариантами расчета на рисунке 1 демонстрируется критичность ширины петли гистерезиса (расстояния между точками поворота) по отношению к максимально достижимому уровню усиления κ , соответственно, при высоких уровнях усиления следствия неустойчивости ожидаются более масштабными – вплоть до образования автоколебаний переменных.

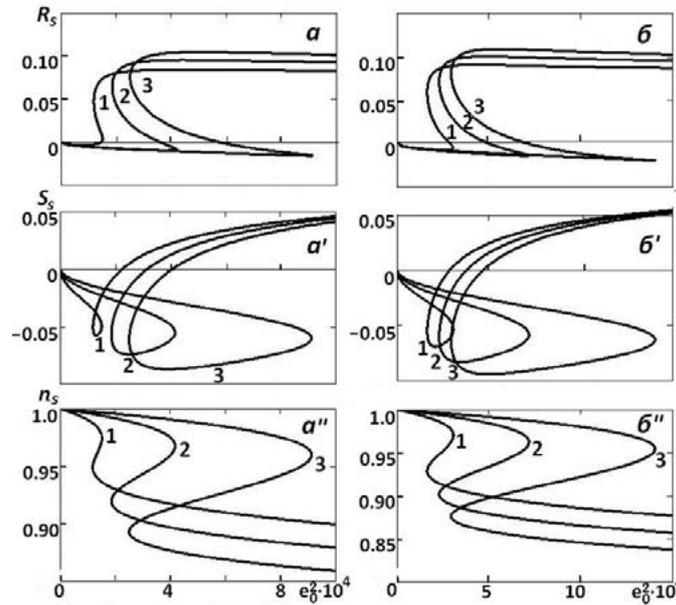


Рис. 1 – Бистабильные зависимости стационарных решений системы (1) от параметра нормированной интенсивности внешнего излучения;
 $a - \kappa = 1.02$ (кривая 1), 1.05 (2), 1.08 (3), $\gamma = 1.58$;
 $b - \kappa = 1.04$ (1), 1.07 (2), 1.10 (3), $\gamma = 2.04$; $\Delta\omega = 1.5$

Оценка динамической устойчивости равновесных состояний модели

Качественное изучение устойчивости решений (1) вблизи равновесных состояний (2) дает возможность оценить характер его стабильности, определить область неустойчивости решений, указать зону параметров, в которой процесс перехода к положению равновесия принимает форму осцилляций. Процедура линеаризации системы (1) сводится к замене переменных, используя их представление в виде: $Re \rho = R_s + \Delta R(\tau)$, $Im \rho = S_s + \Delta S(\tau)$, $n = n_s + \Delta n(\tau)$ при предположении относительно малыми компонентами $\Delta R(\tau)$, $\Delta S(\tau)$, $\Delta n(\tau)$. При формулировке линеаризованного аналога (1) пренебрегают высшими степенями малых компонентов или их произведениями, записывая следующую систему:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} \Delta R &= (\kappa n_s - 1) \Delta R - (\Delta\omega - \kappa n_s) \Delta S + [e_0 + \kappa (R_s + \gamma S_s)] \Delta n, \\ \frac{d}{d\tau} \Delta S &= (\Delta\omega - \kappa n_s) \Delta R + (\kappa n_s - 1) \Delta S + \kappa (S_s - \gamma R_s) \Delta n, \\ \frac{d}{d\tau} \Delta n &= -(e_0 + 2\kappa R_s) \Delta R - 2\kappa S_s \Delta S - \frac{\Delta n}{\tau_{12}}.\end{aligned}\quad (3)$$

Характеристический полином системы (3) относительно величины σ обычно записывается в виде детерминанта:

$$\begin{vmatrix} \sigma + 1 - \kappa n_s & \Delta\omega - \kappa n_s & e_0 + \kappa (R_s + \gamma S_s) \\ -(\Delta\omega - \kappa n_s) & \sigma + 1 - \kappa n_s & \kappa (S_s - \gamma R_s) \\ e_0 + 2\kappa R_s & 2\kappa S_s & \sigma + 1/\tau_{12} \end{vmatrix} = 0.\quad (4)$$

Коэффициент σ в показателе решений $\exp(\sigma\tau)$ системы (3) из малой окрестности равновесных величин (2) может выражаться действительной или комплексной величиной. В последнем случае решения будут иметь не просто экспоненциальный, но и осциллирующий характер. Образованное на основе полинома характеристическое уравнение (4) относительно коэффициента σ представляет алгебраическое кубическое уравнение. Особыми с точки зрения корреляции динамического поведения модели (1) и возможной реальной временной развертки отраженного излучения представляются решения (1), которые соответствуют особой области ее коэффициентов. В этой области характеристическое уравнение (4), формулируемое на основе линеаризованного аналога (3), может иметь один действительный и два комплексных корня (σ_1 и $\sigma_{2,3}$):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \zeta_- - \zeta_+ - \frac{1}{3\tau_{12}} - \frac{2}{3}(1 - \kappa n_s), \quad \zeta_{\pm} = \sqrt[3]{g \pm \sqrt{D}}, \\ \sigma_{2,3} &= -\frac{1}{3\tau_{12}} - \frac{2}{3}(1 - \kappa n_s) + \frac{1}{2}(\zeta_+ + \zeta_-) \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}(\zeta_+ - \zeta_-),\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$D = g^2 + p^3, \quad g = b^3/27 - b(q - \kappa m + \Delta_s^2)/6 + \Delta[b\Delta_s - \kappa(e_0 S_s - \gamma m)]/2, \quad p = [3(q - \kappa m + \Delta_s^2) - b^2]/9, \\ b = \kappa n_s - 1 + 1/\tau_{12}, \quad m = e_0 R_s + 2\kappa |R_s|^2, \quad q = e_0(e_0 + 2\kappa R_s + \kappa \gamma S_s), \quad \Delta_s = \Delta\omega - \kappa n_s.$$

Незатухающие со временем периодические изменения переменных отклика $R(\tau)$, $S(\tau)$ и, соответственно, нормированной интенсивности отраженного светового поля I , возможны при таких сочетаниях значений коэффициентов (1), при которых действительная часть корней $\sigma_{2,3}$ (3) положительна. Нестабильность равновесных состояний (2) тогда принимает тип неустойчивого фокуса, точки решений, движущиеся по кривым в фазовом пространстве системы (1), описывая “развертывающиеся” циклические траектории, покидают окрестность точек (2). В то же время из-за неизбежного насыщения усиления (инверсной заселенности n) излучением мощность генерации должна стабилизироваться. Кривые локализуются в замкнутом пространстве, их проекции на координатные плоскости в фазовом пространстве с течением времени образуют предельные циклы. Во временном аспекте эта динамика переменных (1) будет соответствовать их автоколебаниям, возникающих самопроизвольно (при постоянном уровне стимулирующих факторов – накачки и амплитуды напряженности возбуждающего поля e_0) – только для определенных сочетаний значений материальных параметров инвертированного слоя и характеристик возбуждения – интенсивности e_0^2 и отстройки частоты $\Delta\omega$. Условия существования комплексных корней уравнения (4) при положительных значениях их действительной части, следуя выражениям (5), формулируются такими соотношениями:

$$\zeta_+ + \zeta_- > \frac{2}{3\tau_{12}} + \frac{4}{3}(1 - \kappa n_S), \quad D > 0; \quad (6)$$

второе требование в (6) – положительная величина дискриминанта – собственно и выражает условие существования комплексных корней уравнения (4) в виде $\sigma_{2,3}$ (5).

Варианты расчета типичной зависимости действительной и мнимой частей σ , соответствующих затуханию (разгоранию) и частоте осцилляторных решений (3) от уровня нормированной интенсивности внешнего поля e_0^2 , представлены на рисунке 2. Можно отметить область неустойчивости по этому параметру. Действительно, разгорание малых осцилляций, соответствующих выходу фазовых кривых из окрестности особых точек, должно происходить при значениях e_0^2 , располагающихся на соответствующей шкале до пересечения с горизонтальной осью спадающих зависимостей $\text{Re } \sigma(e_0^2)$ (кривая 1 рис. 2, а) или до “правых точек” поворота бистабильных кривых (кривые 2–5 рис. 2, а). Положение этих точек на шкале e_0^2 отмечено вертикальными пунктирными линиями, “переход” к устойчивости равновесного состояния при нарастании e_0^2 должен происходить резким скачком (“кинком”).

Судя по ходу кривых, область неустойчивости на шкале e_0^2 расширяется с увеличением параметра максимального усиления κ – зависимости рассчитаны для его нарастающих значений. Затухание с ростом возбуждения должно снижаться, снижаться должна и выражаемая величинами $\text{Im } \sigma$ частота колебаний переменных (рис. 2, б), но при значениях возбуждения e_0^2 выше граничных в области неустойчивости осцилляторные решения не существуют, поэтому исчезает и возможность возникновения и развития регулярных осциллирующих режимов автоколебательного типа в отраженном излучении.

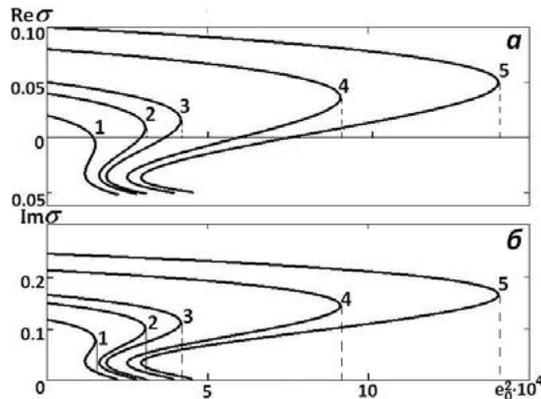


Рис. 2 – Зависимость действительной (а) и мнимой (б) частей комплексных корней характеристического уравнения от параметра нормированной интенсивности внешнего излучения;
 $\kappa = 1.02$ (кривая 1), 1.04 (2), 1.05 (3), 1.08 (4), 1.10 (5); $\gamma = 1.58$; $\Delta\omega = 1.5$

Результаты моделирования процесса отражения

Данные качественного анализа указывают область параметров и начальных условий для переменных, в которой можно искать решения (1), описывающие самоподдерживающиеся пульсации интенсивности отраженного светового поля. Поэтому далее в рамках численного решения (1) было целесообразно проанализировать динамику реакции тонкого слоя на стационарное внешнее оптическое поле. Интегрирование системы (1) проводилось для начальных условий, очевидно соответствующих инвертированному состоянию среды слоя: для разности населенностей –

$n(\tau=0) = n_0$ (величина n_0 для данного уровня амплитуды возбуждающего поля e_0 выбиралась по расчетам, иллюстрированным зависимостями $n_s(e_0^2)$ на рисунках 1, a'' , b''), для поляризованности $\rho(\tau=0) = 0$ (предполагалось, что поляризующее влияние внешнего излучения первоначально отсутствует). Рассчитывалась временная зависимость безразмерной плотности поля отраженного излучения $e_r^2(\tau)$.

На рисунках 3 и 4 приведены примеры временных разверток типичных решений (1) для переменной $e_r^2(t)$, выраженной в относительных единицах на пикосекундной шкале времени для общего случая ненулевого дефекта частоты, которым обусловлена линейная фазовая модуляция. Одновременно учитывается фактор ближних полей, вызывающий нелинейную модуляцию фазы ($\gamma \neq 0$). Значения e_0 и соответствующие им величины n_0 , в основном, взяты из диапазона значений в области неустойчивости равновесных состояний; в иллюстрированных на рисунке 3 вариантах решений (1) в качестве “опорной” расчетной кривой, которой определена область неустойчивости решений, избрана линия 3 на рисунке 2. На фрагментах рисунка 3 целесообразным оказалось наряду с иллюстрацией временной картины интенсивности (рис. 3, $a - d$) привести фазовые портреты окрестности равновесного состояния системы (рис. 3, $a' - d'$) в плоскости переменных (n, e_r^2) .

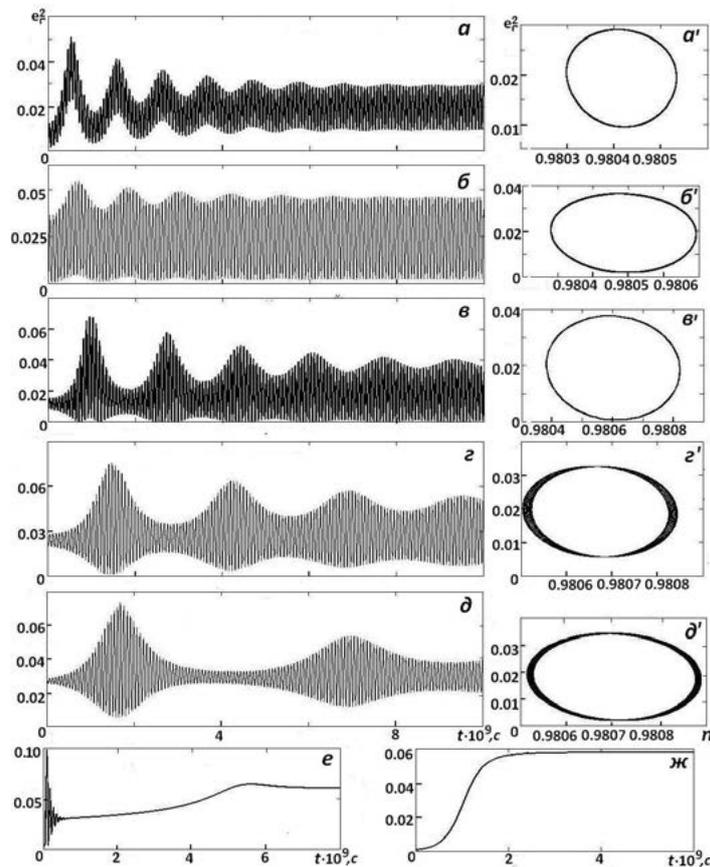


Рис. 3 – Зависимости нормированной интенсивности отраженного излучения от времени ($a - ж$) и фазовые кривые ($a' - d'$) соответствующих решений системы уравнений (1) на плоскости (n, e_r^2) ;

$$e_0^2 = 2 \cdot 10^{-4} (a, a'), 2.5 \cdot 10^{-4} (б, б'), 3 \cdot 10^{-4} (в, в'), 3.5 \cdot 10^{-4} (г, г'), 3.7 \cdot 10^{-4} (д, д'), 4 \cdot 10^{-4} (e), 1 \cdot 10^{-4} (ж); \kappa = 1.05; \gamma = 1.58; \Delta\omega = 1.5$$

Варианты рисунка 3, $a - e$, $a' - d'$ различаются значениями уровня возбуждения в порядке их нарастания в пределах области бистабильности равновесных состояний. В общем случае решения (1) описывают осцилляторный режим перехода к равновесному состоянию (рис. 3, $a - d$). Выделяются, прежде всего, переходные относительно низкочастотные колебания с наносекундным периодом следования, обычно именуемые релаксационными, которые в кинетических процессах объясняются различием вероятностей переходов в каналах накачки и генерации. В данном случае из-за наложения более высокочастотных колебаний переходные пульсации имеют сложную форму, и их затухание приводит к “выходу” лазерной колебательной системы на установившийся режим излучения. На этом этапе развития процесса в условиях нелинейных колебаний фазовой отстройки поля и поляризованности, вызванных смещением резонанса в условиях влияния ближних полей диполей, продолжают существовать и принимают регулярный характер осцилляции интенсивности, частота которых зависит от уровня возбуждающего поля, огибающая регулярных осцилляций в остальное время действия возбуждающего излучения и накачки должна стремиться к постоянному уровню (рис. 3, $a - d$ и рис. 4). Колебательная система из-за потери когерентности осцилляций поля и поляризованности, таким образом, переходит к неустойчивому равновесному состоянию, в котором совершаются автоколебания переменных, то есть к некоторому особому квазистационарному (нелинейно модулированному) состоянию. Фазовые портреты решений представлены кривыми, выходящими на предельные циклы (рис. 3, $a' - d'$).

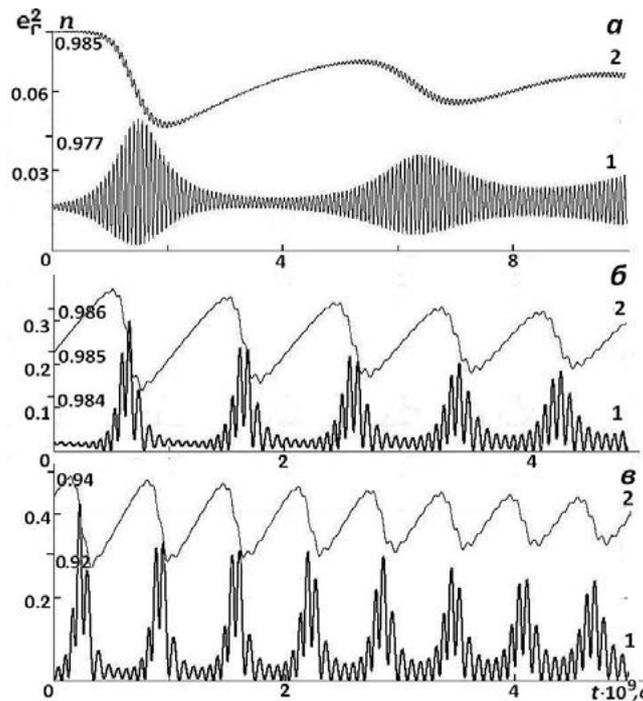


Рис. 4 – Зависимости нормированной интенсивности отраженного излучения (кривые 1) и инверсной заселенности (2) от времени; $\kappa = 1.02$ (а), 1.05 (б), 1.08 (в); $e_0^2 = 3.6 \cdot 10^{-4}$; $\gamma = 1.58$; $\Delta\omega = 1.5$

Формирование регулярного режима с осцилляциями в пикосекундном диапазоне происходит, однако, не во всей области неустойчивости на шкале e_0^2 , а только в зоне

бистабильности равновесных состояний, при относительно невысоком уровне возбуждения переход к равновесному состоянию носит чисто релаксирующий характер (рис. 3, *ж*). За пределами зоны неустойчивости сценарий развертки представляет ряд коротких релаксационных всплесков интенсивности в качестве переходного режима и, затем, относительно быстрый переход к стационарному уровню излучения (рис. 3, *е*). Физически достижение режима автоколебаний (регулярных пульсаций) при резонансном отражении означает возможность преобразования светового сигнала с постоянной огибающей интенсивности в модулированный во времени сигнал, причем параметры модуляции управляются изменением световой мощности.

Отметим следующие особенности процесса резонансного отражения. Судя по иллюстрациям с фазовыми портретами решений (рис. 3, $a' - d'$) и с развертками решений для $n(t)$ (рис. 4, кривые 2), нелинейные высокочастотные пульсации со стационарной огибающей, представляющие после переходного этапа модуляцию отраженного сигнала, происходят за счет относительно слабых автоколебаний инверсии $n(t)$. Это может соответствовать классическому случаю свободной генерации с учетом нелинейных эффектов, вызывающих неустойчивость и раскачку нетривиального равновесного состояния лазерной системы [21]. Нарастание уровня усиления (увеличение параметра κ) или уровня внешнего модулируемого поля e_0 приводит к повышению частоты модуляции, что подтверждается и качественной оценкой (расчетом соотношений (5)). Переходный к установлению неустойчивого равновесия режим, однако, с увеличением параметра κ должен быть более продолжительным (рис. 4).

Заключение

Проведенное моделирование и аналитическая оценка кинетики вынужденного излучения в приближении особо тонкого слоя инверсной среды позволили характеризовать динамическое явление амплитудной автомодуляции света, отражаемого приповерхностным слоем плотной резонансной среды. Этот эффект может быть использован при реализации новых лазерных устройств. Такие устройства должны обладать определенными преимуществами перед существующими. Действительно, в явлении усиления света при отражении взаимодействие света с усиливающей средой происходит в основном в тонком слое вблизи границы раздела сред, при этом проникновение излучения в усиливающую среду невелико. Это снижает технические требования к оптическим свойствам усиливающих сред, их однородности, прозрачности и т. д. Некоторые из возможных устройств, в которых используется явление усиления света при отражении, уже реализованы, но для приповерхностных инвертированных слоев с высокой концентрацией активных центров стимулирующие самопроизвольную модуляцию нелинейные процессы до сих пор детально не изучались.

В диапазоне ИК частот до сих пор отмечается отсутствие электрооптических материалов, позволяющих применять стандартные методы модуляции добротности импульсных лазеров и сокращения длительности импульсов. Поэтому в настоящее время исследование лазерной генерации интенсивно развивается применительно к технологиям формирования регулярной последовательности коротких и сверхкоротких импульсов с управляемыми временными параметрами именно в этой спектральной области. Результаты приведенных в статье расчетов динамики излучения с учетом фазовой автомодуляции будут полезными для разработки методов получения серий коротких световых импульсов с относительно невысокой средней интенсивностью.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Reflection and transmission of ultrashort light pulses through a thin resonant medium: Local-field effects / M. Benedict [et al.] // Phys. Rev. A. – 1991. – Vol. 43, N 7. – P. 3845–3853.

2. **Crenshaw, M. E.** Ultrafast intrinsic optical switching in a dense medium of two-level atoms / M. E. Crenshaw, M. Scalora, C. M. Bowden // *Phys. Rev. Lett.* – 1992. – Vol. 68, N 7. – P. 911–914.
3. Hysteresis behavior in light reflection from a dense resonant medium with intrinsic optical bistability / A. A. Afanas'ev [et al.] // *J. Opt. Soc. Amer. B.* – 1998. – Vol. 15, N 3. – P. 1160–1167.
4. **Башаров, А. М.** Тонкая пленка двухуровневых атомов – простая модель оптической бистабильности и самопульсаций / А. М. Башаров // *ЖЭТФ.* – 1988. – Т. 94. – С. 12–18.
5. **Malyshev, V.** Spatial effects in nonlinear resonant reflection from the boundary of a dense semi-infinite two-level medium: normal incidence / V. Malyshev, E. C. Jarque // *J. Opt. Soc. Amer. B.* – 1997. – Vol. 14, N 5. – P. 1167–1178.
6. **Захаров, С. М.** Взаимодействие УКИ света с тонкопленочными резонаторными структурами / С. М. Захаров // *ЖЭТФ.* – 1998. – Т. 114. – С. 1578–1594.
7. **Новицкий, Д. В.** Оптические свойства фотонного кристалла со слоями плотных резонансных сред : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.04.05 / Д. В. Новицкий. – Минск : Институт физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси, 2010. – 104 с.
8. **Тимошенко, Е. В.** Отражение излучения поверхностным слоем среды с неоднородным уширением резонанса поглощения / Е. В. Тимошенко, В. А. Юревич, Ю. В. Юревич // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2012. – № 1(10). – С. 31–35.
9. **Юревич, Ю. В.** Расщепление сверхкороткого импульса при резонансном отражении от тонкой пленки / Ю. В. Юревич, В. А. Юревич, Е. В. Тимошенко // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2015. – № 2(23). – С. 29–32.
10. **Бойко, Б. Б.** Усиление электромагнитных волн при отражении от сред с отрицательным поглощением / Б. Б. Бойко, Н. С. Петров, И. З. Джиладари // В кн.: *Квантовая электроника и лазерная спектроскопия.* – Минск : Навука і тэхніка, 1974. – С. 449–468.
11. **Бойко, Б. Б.** Лазер с усилением излучения при отражении от инверсной среды / Б. Б. Бойко, Н. Н. Уварова // *Квантовая электроника.* – 1981. – Т. 8, № 11. – С. 2506–2507.
12. **Петров, Н. С.** Лазерная генерация тонких инверсных слоев / Н. С. Петров, А. Б. Зимин // *Журн. прикл. спектр.* – 2010. – Т. 77, № 1. – С. 69–73.
13. **Юдсон, В. И.** Нелинейная резонансная оптика тонких пленок: метод обратной задачи / В. И. Юдсон, В. И. Рупасов // *ЖЭТФ.* – 1987. – Т. 93. – С. 494–501.
14. Local-field effects in a dense ensemble of resonant atoms: Model of a generalized two-level system / A. A. Afanas'ev [et al.] // *Phys. Rev. A.* – 1999. – Vol. 60, N 2. – P. 1523–1529.
15. **Гадомский, О. Н.** Эхо-спектроскопия поверхности / О. Н. Гадомский, Р. А. Власов. – Минск : Навука і тэхніка, 1990. – 216 с.
16. Оптическое усиление в структурах с квантовыми точками / П. Г. Елисеев [и др.] // *Квантовая электроника.* – 2000. – Т. 30, № 8. – С. 664–668.
17. **Kaplan, A. E.** Nanoscale stratification of optical excitation in self-interacting one-dimensional arrays / A. E. Kaplan, S. N. Volkov // *Phys. Rev.* – 2009. – Vol. A79. – P. 053834-1–053834-16.
18. Rabi oscillations in the excitonic ground-state transition of InGaAs quantum dots / P. Borri [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2002. – Vol. 66, N 8. – P. 081306–(1-4).
19. Пичковая структура когерентного излучения оптически плотных сред / А. М. Башаров [и др.] // *ЖЭТФ.* – 2006. – Т. 129. – С. 229–501.
20. **Юревич, Ю. В.** Модуляция оптического излучения при отражении тонкой пленкой плотной резонансной среды / Ю. В. Юревич, В. А. Юревич // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2015. – № 3(24). – С. 38–45.
21. **Glasunova, E. V.** Intensity self-pulsations in injection laser with thin-film nonlinear-refractive element / E. V. Glasunova, V. A. Yurevich // *Advanced Lasers and Systems: Proc. SPIE.* – 2006. – Vol. 6054. – P. 6054-C-1–C-8.

Поступила в редакцию 11.12.2018 г.

Контакты: va_yurevich@mail.ru (Юревич Владимир Антонович)

Yurevich V. DYNAMICS OF RADIATION REFLECTED BY THIN INVERSE LAYER.

In approach of a superthin layer of resonant atoms on the basis of numerical modeling and the qualitative analysis of equilibrium states stability of the kinetic model formed by the optical equations of Maxwell – Bloch the possibility of light amplitude self-modulation at reflection by a planar subsurface film of the inverted dense resonant medium is predicted. As model parameters material characteristics of semiconductor quantum-dimensional structures in exciton resonance spectral range are used.

Keywords: dense resonant medium, optical hysteresis, dipole-dipolar interaction, lasing at reflection, lasing regular pulsations.

УДК 539.4

РАСЧЕТ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ У ЕДИНИЧНОГО ЛИНЗОВИДНОГО ДВОЙНИКА, НАХОДЯЩЕГОСЯ В ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРЕЩИНЫ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА В МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ Ni_2MnGa

Е. В. ШМАТОК

магистр технических наук, ассистент

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

О. М. ОСТРИКОВ

кандидат физико-математических наук, доцент

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

При реализации расчетов макроскопической модели получены графические результаты распределения полей напряжений в системе “полубесконечная трещина антиплоского сдвига – единственный линзовидный двойник” в Ni_2MnGa . На их основании определены характеры распределения напряжений каждой из рассматриваемых компонент $\sigma_{xz}(x, y)$ и $\sigma_{yz}(x, y)$, отмечены участки концентрации наибольших и наименьших значений напряжений при наличии в Ni_2MnGa полубесконечной трещины и линзовидного двойника. Установлено, что отличительной особенностью компоненты $\sigma_{xz}(x, y)$ является наличие значительных напряжений на границах двойника, способных вдвое превысить модульные значения напряжений вершины трещины.

Ключевые слова: механическое двойникование, полубесконечная трещина, антиплоский сдвиг.

Введение

Разрушение монокристалла Ni_2MnGa процесс многостадийный [1]. На ранних стадиях первичные признаки появления трещины обнаруживаются задолго до полного разрушения образца [2]. Увеличение площади свободной поверхности, обусловленной трещиной, происходит посредством влияния различных факторов, основным инструментом воздействия которых являются напряжения. Знание особенностей распределения напряженных участков в наиболее типовых случаях, позволит впоследствии, ответить на такие важные вопросы, как: распределение участков локализации напряжений наибольшей и наименьшей величины; определение зон повышенного риска перехода дефекта в неустойчивое состояние. Из этого следует, что моделирование напряжений в типовых системах взаимодействия дефектов монокристалла Ni_2MnGa является важной научной задачей.

Цель работы представляет собой расчет полей напряжений в системе “полубесконечная трещина антиплоского сдвига – единственный линзовидный двойник” в Ni_2MnGa .

Постановка задачи.

Выделяют три основные формы разрушения в зависимости от характера смещений [3]. В данной работе осуществляется расчет напряжений трещины, образованной антиплоским (продольным) сдвигом участков металла друг относительно друга в плоскости трещины. Схема формирования данного дефекта представлена на рисунке 1.

© Шматок Е. В., 2019

© Остриков О. М., 2019

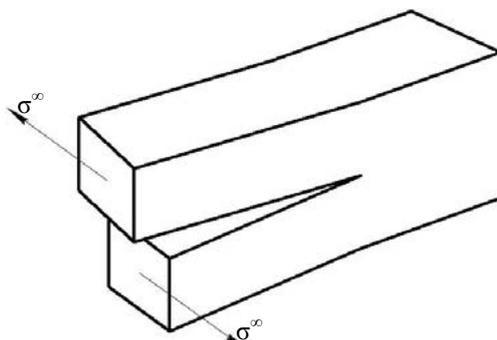


Рисунок 1. – Схема формирования трещины продольного (антиплоского) сдвига в Ni_2MnGa [3]

На рисунке 2 изображена расчетная схема задачи. Представленная на этом рисунке трещина, в виду отсутствия напряжений на ее берегах, имеет неизменный вид напряжений вблизи вершины $\sigma_{ij}^{cr}(x, y)$, независимо от формы тела, геометрии трещины и приложенных нагрузок [3].

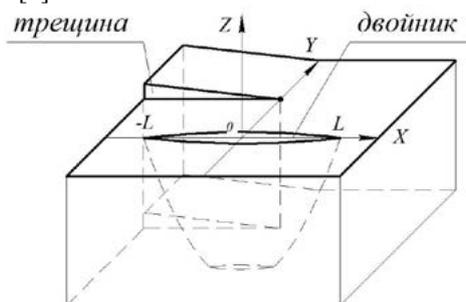


Рисунок 2. – Схема постановки задачи для расчетной модели

Линзовидный остаточный двойник, образовавшийся под влиянием напряжений трещины, имеет длину $2L$ и обладает собственным полем напряжений $\sigma_{ij}^{fw}(x, y)$ [4]. Плоскость XOY на рисунке 2 является плоскостью сечения трещины и двойника. В этой плоскости ведется дальнейший расчет напряжений. При этом, учитывая неподвижность источников напряжений, используя принцип суперпозиции полей напряжений, общее напряженное состояние в рассматриваемом случае определяется следующим выражением

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sigma_{ij}^{fw}(x, y) + \sigma_{ij}^{cr}(x, y), \quad (1)$$

где i, j – принимают значения x, y или z .

Напряжения вершины трещины $\sigma_{ij}^{cr}(x, y)$, в соответствии с [5, 6], определяются из соотношений:

$$\sigma_{xz}^{cr}(x, y) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (2)$$

$$\sigma_{yz}^{cr}(x, y) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right), \quad (3)$$

где K_{III} – коэффициент интенсивности напряжений трещины рассматриваемого типа;
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $u = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$.

Поля напряжений двойника, используя приближение о непрерывном распределении дислокаций вдоль его границ [4; 7; 8], определяются из равенства

$$\sigma_{ij}^{tw}(x, y) = \sum_m \sigma_{ij}^{tw(m)}(x, y), \quad (4)$$

где m – количество функций, описывающих форму границ двойника; $\sigma_{ij}^{tw(m)}(x, y)$ – напряжения m -го участка границы двойника, которые, в соответствии с [4], находятся из выражений:

$$\sigma_{ij}^{tw(1)}(x, y) = \int_{-L}^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_m(\xi) \sigma_{ij}^{tw(1,0)}(x, y, \xi) d\xi, \quad (5)$$

$$\sigma_{ij}^{tw(2)}(x, y) = \int_{-L}^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_m(\xi) \sigma_{ij}^{tw(2,0)}(x, y, \xi) d\xi, \quad (6)$$

где L – половина длины двойника; $\rho_m(\xi)$ – плотность распределения двойникующих дислокаций на m -м участке границы двойника; $\sigma_{ij}^{tw(m,0)}(x, y, \xi)$ – напряжения единичной винтовой двойникующей дислокации; $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ – функции, описывающие форму двойниковых границ; ξ – параметр интегрирования.

Напряжения $\sigma_{ij}^{tw(m,0)}(x, y, \xi)$ определяются по формулам [4]:

$$\sigma_{xz}^{tw(m,0)}(x, y, \xi) = -\frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{(y - f_m(\xi)) - B}{((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2}, \quad (7)$$

$$\sigma_{yz}^{tw(m,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{(x - \xi) - A}{((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2}, \quad (8)$$

где μ – модуль сдвига; b_B – модуль винтовой составляющей вектора Бюргерса частичной двойникующей дислокации; A, B – параметры положения двойника в рассматриваемом сечении плоскости XOY .

Результаты расчетов и их обсуждение.

Прежде всего необходимо отметить, что в результате воздействия поля напряжений трещины, образовавшийся вблизи нее остаточный двойник также может быть как упругим, так и остаточным. В случае упругого двойника, для его существования будет необходимо и достаточно поля напряжений трещины.

В качестве исходных данных для решения поставленной расчетной задачи принималось:

$L = 60$ мкм; $H = 15$ мкм; $\rho(\xi) = \text{const} = \rho = 2 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$; $\mu = 19,231$ ГПа; $b_B = 2,735 \cdot 10^{-10}$ [9–14]; $K_{III} = 10$ ГПа $\cdot\sqrt{\text{м}}$. Расчет проводится в приближении однородной изотропной сплошной упругой среды. Плоскость XOY является плоскостью сечения, в которой велся расчет напряжений. Результаты моделирования приведены на рисунке 3.

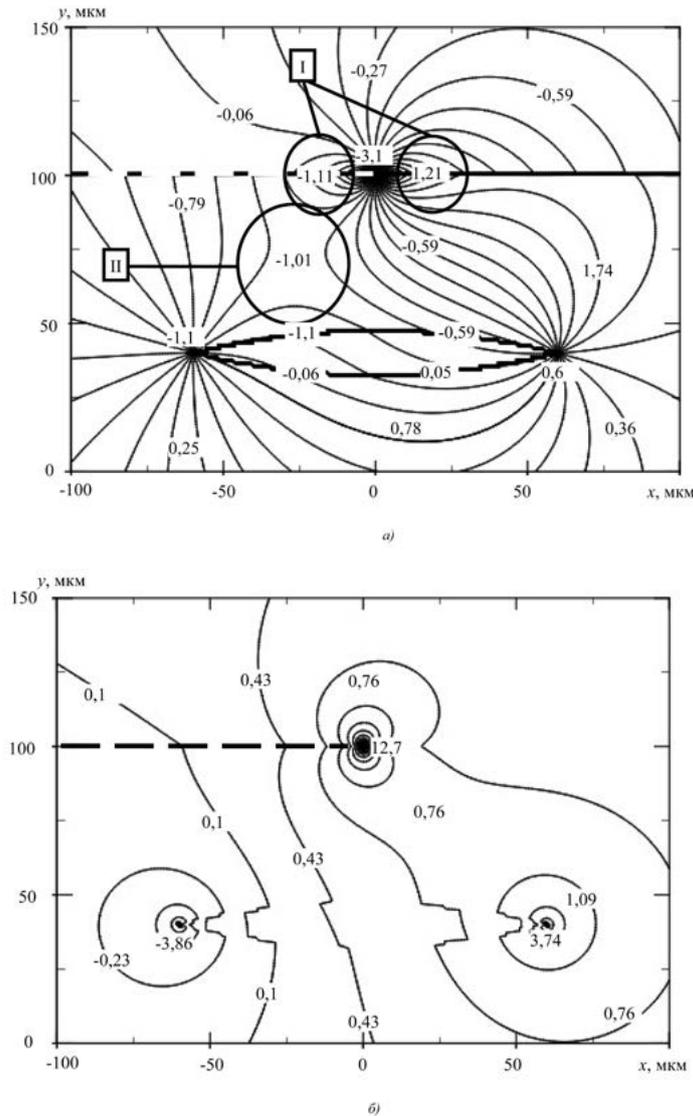


Рисунок 3. – Результаты моделирования полей напряжений трещины продольного (антиплоского) сдвига и единичного линзовидного двойника, образовавшихся в сплошной упругой однородной среде монокристалла Ni_2MnGa : а – $\sigma_{xz}(x, y)$; б – $\sigma_{yz}(x, y)$ (МПа)

Картина распределения напряжений в окрестностях рассматриваемых объектов для сдвиговой компоненты $\sigma_{xz}(x, y)$ представлена на рисунке 3, а. Участки материала I, окружающие вершину трещины, испытывают растягивающие напряжения, имеющие симметричные по модулю значения относительно OX и OY . Помимо этого, при движении в отрицательном направлении вдоль оси OY , наблюдается плавное нарастание уровня напряжений у трещины вплоть до приближения к верхней границе двойника. Далее напряжения трещины изменяют свое направление и численные значения скачкообразно.

В результате встречи напряжений вершины трещины и границ двойника образовалась площадка пониженных значений (рисунок 3, а, область II), под влиянием которой

изменилось положение линий равных величин напряжений у внешнего поля и внутри линзы двойника. Кроме того, появление площадки II оказало влияние на уровень напряжений нижней границы двойника, компенсировав их на участках отрицательных значений по OX .

Результаты моделирования характера распределения напряжений в плоскости XOY для компоненты $\sigma_{yz}(x, y)$ тензора напряжений представлены на рисунке 3, б. Картина локализации напряжений двойника данной компоненты весьма специфична, поскольку здесь основными концентраторами являются не границы, а вершины двойника. Экстремумы напряжений здесь симметричны по OY по модулю и имеют противоположные знаки.

Напряжения у вершины трещины для компоненты $\sigma_{yz}(x, y)$ имеют единичный экстремум значения в центре, расположенном на OY , в результате чего зона влияния заметно меньше чем у напряжений компоненты $\sigma_{xz}(x, y)$. В результате мы наблюдаем равномерное распределение близких нулю величин напряжений по всей расчетной плоскости (за исключением вершин двойника и вершины трещины).

Заключение

В результате реализации макроскопической модели в расчете полей напряжений у единичного клиновидного двойника и трещины, образованной антиплоским сдвигом в монокристалле Ni_2MnGa , показан характер распределения напряжений в данной системе, определены зоны концентрации совокупных напряжений трещины и двойника. Установлено, что уровень напряжений у границ двойника для компоненты $\sigma_{xz}(x, y)$, способен вдвое превышать напряжения вершины трещины.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Остриков, О. М.** Разрушение и сопутствующие ему эффекты в ферромагнитном монокристалле Ni_2MnGa с эффектом памяти формы / О. М. Остриков, Е. В. Шматок. – Минск : Инж.-физ. журнал. – 2015. – Т. 88, № 1. – С. 272–278.
2. **Николаева, Е. А.** Основы механики разрушения / Е. А. Николаева // Пермский гос. тех. ун-т. – 2010. – С. 103.
3. **Астафьев, В. И.** Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара : Изд-во “Самарский университет”. – 2001. – С. 57–60.
4. **Остриков, О. М.** Дислокационная макроскопическая модель клиновидного двойника / О. М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2006, № 2. – С. 10–18.
5. **Мухелишвили, Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – Москва : АН СССР. – 1954. – С. 648.
6. **Работнов, Ю. Н.** Введение в механику разрушения / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука : Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 80 с.
7. **Остриков, О. М.** Напряженное состояние у поверхности кристалла, деформируемой сосредоточенной нагрузкой, при наличии клиновидного двойника / О. М. Остриков // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, № 5. – С. 137–139.
8. **Остриков, О. М.** Метод расчета распределения деформаций у клиновидного двойника с использованием подходов макроскопической дислокационной модели / О. М. Остриков // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 4. – С. 52–58.
9. **Sozinov, A.** Giant magnetic-field-induced strain in $NiMnGa$ seven-layered martensitic phase / A. Sozinov, A. A. Likhachev, N. Lanska, K. Ullakko // Appl. Phys. Lett. – 2002. – V. 80. – P. 1746–1748.
10. **Heczko, O.** Temperature dependence and temperature limits of magnetic shape memory effect / O. Heczko, L. Straka // Journal of Applied Physics. – 2003. – V. 94, № 11. – P. 7139–7143.
11. **Heczko, O.** Magnetic properties and domain structure of magnetic shape memory $Ni-Mn-Ga$ alloy / O. Heczko, K. Jurek, K. Ullakko // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2001. – V. 226–230. – P. 996–998.

12. **Mullner, P.** Large cyclic deformation of a Ni-Mn-Ga shape memory alloy induced by magnetic fields / P. Mullner, V. A. Chernenko, M. Wollgarten, G. Kostorz // Journal of Applied Physics. – 2002. – V. 92, № 11. P. 6708–6713.
13. **Aaltio, I.** Magnetic Shape Memory Actuators / I. Aaltio, K. Ullakko // Proc. of Actuator 2000 conference, 19–21 June 2000. – Bremen, Germany. – 2000. – P. 527–530.
14. **Hirsinger, L.** Modelling detwinning of martensite platelets under magnetic and stress actions on Ni-Mn-Ga alloys / L. Hirsinger, C. Lexcellent // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2003. – V. 254–255. – P. 275–277.

Поступила в редакцію 15.01.2018 г.

E-mail: omostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Shmatok E., Ostrikov O. CALCULATION OF STRESS FIELDS OF SINGLE LENTICULAR TWIN LOCATED IN THE STRESS FIELD OF SEMI-INFINITE CRACK OF ANTIPLANE SHIFT IN Ni_2MnGa SINGLE-CRYSTAL.

With the implementation of the macroscopic model calculations the authors have received graphical results of the distribution of the stress fields in the system “a semi-infinite crack of antiplane shift – a single lenticular twin” in Ni_2MnGa . These results allowed to determine the character of the stress dis-

tribution of each component in question $\sigma_{xz}(x, y)$ and $\sigma_{yz}(x, y)$, to mark the areas of maximum and minimum concentration values in the presence of a semi-infinite crack and lenticular twin in Ni_2MnGa .

It is established that the distinctive feature of the component $\sigma_{xz}(x, y)$ is the presence of significant stress on the twin boundaries capable to exceed the modular stress values of the crack tip two times.

Keywords: mechanical twinning, semi-infinite crack, antiplane shift.

УДК 539.3

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН. НАХОЖДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА НЕЛИНЕЙНОСТИ

М. А. Гундина

кандидат физико-математических наук

Белорусский национальный технический университет

Рассматривается математическая постановка задачи о центральной прямолинейной трещине в пластине упрочняющегося упругопластического материала с нагрузкой, приложенной на краях пластины, в условиях плоской деформации. Задача решается численно-аналитически с помощью метода асимптотических разложений. В работе приводится методика нахождения коэффициента нелинейности с помощью квадратичной аппроксимации по методу наименьших квадратов. Данный коэффициент характеризует нелинейность диаграммы деформирования упругопластического материала. В работе описана постановка задачи и последовательность шагов для нахождения коэффициента. Значение данного параметра позволяет выразить компоненты тензора напряжений в зависимости от значений деформаций для упругопластического материала. Полученные теоретические зависимости по определению характеристик предельного состояния конструкции позволяют сделать мотивированный выбор геометрических параметров с учетом прочностных свойств материала.

Ключевые слова: Асимптотические разложения, трещина, диаграмма деформирования, теория течения, упругопластический материал.

Введение

Процесс получения аналитических решений сложных прикладных задач теории пластичности, а именно нахождение функций, описывающих напряженно-деформированное состояние (НДС) упругопластических тел и конструкций, сопряжен с некоторыми математическими и вычислительными трудностями. Для этого есть несколько причин. В первую очередь, это связано с нелинейностью дифференциальных уравнений, описывающих состояние материала, и наличием сингулярности возникающих полей напряжений и деформаций в окрестности дефекта. Широкое распространение при решении такого рода задач получили численные методы, такие как метод конечных элементов, метод граничных элементов и др. В этом случае часто приходится рассматривать задачи, для которых вопрос устойчивости решения остается открытым. Кроме этого, даже при небольшом изменении исходных данных, при численном подходе решать задачу приходится заново, что не позволяет проводить комплексный качественный анализ возникающих эффектов в материале, что является явным недостатком в сравнении с аналитическими подходами.

Нелинейные подходы в задачах механики разрушения для детального анализа закономерностей изменения упругопластических полей деформаций и напряжений в окрестности фиксированной и развивающейся трещины описаны в работах отечественных и зарубежных ученых. Подробный анализ НДС материала приводится в работах В.И. Астафьева [1], В.Д. Ключникова [2], В.М. Морозова [3], В.З. Партон [3], Ю.М. Плескачевского [4], Э.И. Старовойтова [5], Л.В. Степановой [6], Г.П. Черепанова [7], А.В. Чигарева [8]. Показано, что процесс раз-

вития деформаций в упрочняющихся материалах является сложным и сопровождается физическими явлениями, которые требуют учета большого количества факторов. К ним относятся наличие нелинейной диаграммы деформирования материала, влияние границ зон активного нагружения и разгрузки вблизи трещины, эффект упрочнения материала.

Основная часть

Асимптотические разложения. При решении прикладных задач часто приходится вычислять величины, при работе с которыми требуется осуществить большое количество действий, так что их выполнение становится практически невозможным. Чем точнее находится некоторое численное приближение к искомой величине, тем больше действий необходимо для ее прямого вычисления. В подобном положении говорят об асимптотической формуле.

Некоторый способ отбрасывания информации дает обозначение O . Обычно символом O заменяют слова “величина, которая по абсолютному значению не превосходит постоянной, умноженной на...”. Если S – какое-либо множество, а f и φ – действительные или комплексные функции, определенные на S , то формула

$$f(s) = O(\varphi(s)), s \in S, \quad (1)$$

означает, что существует такое положительное число A , не зависящее от s , что выполняется следующее условие

$$|f(s) \leq A|\varphi(s)|. \quad (2)$$

Часто для функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ имеется бесконечная последовательность O -оценок, причем каждая следующая оценка усовершенствует предыдущую. Чаще всего встречаются последовательности такого вида: имеется последовательность функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots$, удовлетворяющих условиям:

$$\varphi_1(x) = o(\varphi_0(x)), (x \rightarrow \infty), \quad \varphi_2(x) = o(\varphi_1(x)), (x \rightarrow \infty), \dots \quad (3)$$

и последовательность постоянных c_0, c_1, \dots , таких, что для $f(x)$ имеет место последовательность O -оценок при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= O(\varphi_0(x)), \\ f(x) &= c_0\varphi_0(x) + O(\varphi_1(x)), \\ f(x) &= c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + O(\varphi_2(x)). \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда имеет место формула

$$f(x) \approx c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots \quad (5)$$

Правая часть этого выражения называется асимптотическим рядом для $f(x)$, или асимптотическим разложением функции. Это понятие было впервые введено Пуанкаре, подробно данный подход описан в работе [9]. При данных φ_k и f величины c_k определяются единственным образом, если асимптотическое разложение f по φ_k существует.

Однако такой ряд не обязательно сходится. Причина этого заключается в том, что сходимость является некоторым свойством ряда при фиксированном значении x_0 , в то время как O -оценка относится не к фиксированному x , а к $x \rightarrow \infty$. Более того, даже если асимптотический ряд сходится, его сумма не обязательно равна $f(x)$.

Асимптотический ряд может быть полезен при вычислении значений функции при малых или больших значениях параметра.

Нахождение коэффициента нелинейности. Нахождение асимптотических разложений компонентов тензора напряжений по степеням расстояния от вершины трещины осуществляется на основе экспериментальных данных, полученных при деформировании образцов, подверженных разным режимам нагружения.

В работе [10] подробно описана процедура построения диаграммы деформирования для упругопластических материалов. Диаграмма σ - ε представлена на рис. 1.

Диаграмма растяжения-сжатия представляет наклонную линию, выходящую из начала координат в системе “напряжение-деформация”.

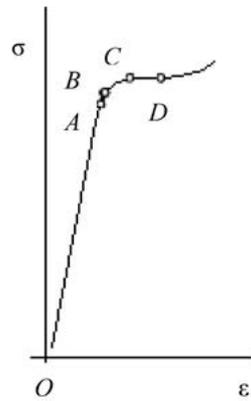


Рис. 1. Диаграмма растяжения упругопластического материала

В точке A , представленной на рис. 1, достигается предел пропорциональности материала, в точке B – предел упругости, в точке C – предел текучести.

Значения напряжения соотносятся к площади поперечного сечения образца до испытания [10]. В качестве ε рассматривается относительное удлинение, которое находится по формуле

$$\varepsilon = \Delta l / l_0, \quad (6)$$

где l_0 – длина расчетного участка до деформирования, Δl – удлинение образца.

После достижения состояния, соответствующего точке D , начинается процесс упрочнения материала.

Наличие нелинейного участка диаграммы σ - ε для упругопластических материалов выявлено и подтверждено в ряде известных экспериментов, которые описаны в литературе [11].

Для упругопластических материалов линейная зависимость деформаций от напряжений не соответствует экспериментам. При аппроксимации диаграммы σ - ε квадратичной параболой имеет место равенство:

$$\varepsilon = B_2 \sigma^2, \quad (7)$$

где B_2 – числовой параметр, который характеризует нелинейность диаграммы деформирования. Значение этого параметра находится из эксперимента на растяжение соответствующего материала.

Тогда связь между напряжениями и деформациями для упругопластического материала выражается формулами [12]:

$$\sigma = A_1 \varepsilon - A_2 \varepsilon^2, \quad (8)$$

$$\varepsilon = \sigma/A_1 - B_2 \sigma^2, \quad (9)$$

где A_1, A_2 – некоторые параметры нелинейности.

В статической задаче о растяжении прямоугольной пластины, содержащей центральную прямолинейную трещину, связь приращений девиаторов напряжений и деформаций имеет вид

$$\delta s_j = \delta e_j - \delta \Phi(\Gamma) e_j, \quad i, j = r, \varphi, \quad (10)$$

где $\delta s_{ij}, \delta e_{ij}$ – приращения девиаторов напряжений и деформаций.

Функция интенсивности деформаций находится по формуле

$$\Phi(\Gamma) = B_2 \Gamma^2, \quad (11)$$

где $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}$; G – модуль сдвига материала.

В соотношении (11) значение коэффициента B_2 , подставляется соотнесенное на удвоенный квадрат модуля сдвига для соответствующего материала [13].

Получим коэффициент B_2 для стали 40 по экспериментальным значениям напряжений и деформаций, полученным в работе А.В. Шмелевым [14].

Если аппроксимирующая функция представляет собой квадратичную зависимость, то B_2 находится из уравнения

$$\sigma_{\text{экспер}} = B_2 \varepsilon_{\text{экспер}}^2 + b \varepsilon_{\text{экспер}} + c, \quad (12)$$

где $\sigma_{\text{экспер}}, \varepsilon_{\text{экспер}}$ – значения эквивалентного напряжения и пластической деформации, полученные из опыта на растяжение.

Для данного материала диаграмма деформирования представлена на рис. 2.

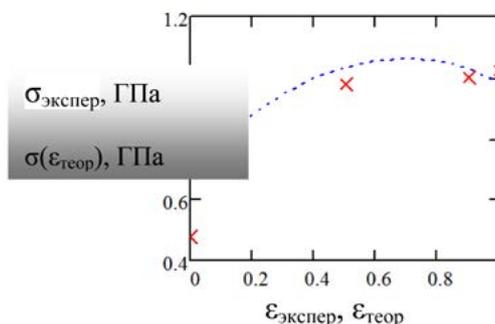


Рис. 2. Диаграмма деформирования стали 40

В этом случае значение коэффициента $B_2 = -0,790$. Для данной аппроксимируемой кривой среднее квадратическое отклонение составляет 0,102. Максимальное значение вектора абсолютных погрешностей равно 0,211 с точностью до трех знаков после запятой.

Это значение находится по методу наименьших квадратов из системы уравнений:

$$\begin{aligned} B_2 \sum_1^n \varepsilon_i^3 + b \sum_1^n \varepsilon_i^2 + c \sum_1^n \varepsilon_i &= \sum_1^n \varepsilon_i \sigma_i, \\ B_2 \sum_1^n \varepsilon_i^3 + b \sum_1^n \varepsilon_i^2 + c \sum_1^n \varepsilon_i &= \sum_1^n \varepsilon_i \sigma_i, \\ B_2 \sum_1^n \varepsilon_i^2 + b \sum_1^n \varepsilon_i + cn &= \sum_1^n \sigma_i, \end{aligned} \quad (13)$$

где ε_i, σ_i – текущие значения напряжений и деформаций, полученные из эксперимента на растяжение, n – количество измерений.

Тогда аналитические представления компонентов деформаций примут вид:

$$\varepsilon_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n U_n r^{\lambda_n - 1}, \quad (14)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (V'_n + U_n) r^{\lambda_n - 1}, \quad (15)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (U'_n + (\lambda_n - 1)V_n) r^{\lambda_n - 1}. \quad (16)$$

Интенсивность деформаций может быть записана следующим образом:

$$\Gamma = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + 3\varepsilon_{r\varphi}^2)} = \frac{2}{3} (F(r, \varphi))^{1/2}, \quad (17)$$

где функция F имеет вид разложения

$$F(r, \varphi) = \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} a_{k\ell} r^{\lambda_k + \lambda_\ell - 2}, \quad (18)$$

где коэффициенты определяются по формуле

$$\begin{aligned} a_{k\ell} &= \lambda_k \lambda_\ell U_k U_\ell - \lambda_k (U_k V'_\ell + U_\ell U_k) + (V'_k + U_k) \cdot (V'_\ell + U_\ell) + \frac{3}{4} (U'_k + (\lambda_k - 1)V_k) \times \\ &\times (U'_\ell + (\lambda_\ell - 1)V_\ell). \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим среднее напряжение в виде асимптотического ряда

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\varphi) r^{\lambda_n - 1}, \quad (20)$$

где $W_n(\varphi)$ – некоторые функции, подлежащие определению в процессе решения поставленной задачи.

Компоненты тензоров напряжений можно выразить через девиаторы напряжений и среднее напряжение по следующей формуле

$$\sigma_{rr} = \sigma + s_{rr}. \quad (21)$$

Тогда приращение компонентов тензора напряжений представим в следующем виде

$$\delta\sigma_{rr} = \delta e_{rr} + \delta\sigma - \delta\Phi(\Gamma)e_{rr}. \quad (22)$$

Поскольку (22) формула полного дифференциала функции, тогда можно найти члены выражения, располагающиеся при δr , а далее проинтегрировать это соотношение по переменной r для получения выражения для компонентов тензора напряжения:

$$\sigma_{rr} = \sum_{n \geq 0} (\lambda_n U_n + W_n) r^{\lambda_n - 1} - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \alpha_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3}, \quad (23)$$

где коэффициенты будут найдены по следующим формулам:

$$\mu_{k\ell m} = \lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m, \quad (24)$$

$$B = \frac{4B_2}{9}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{k\ell m} &= \frac{(\lambda_k + \lambda_\ell - 2)\lambda_m U_m a_{k\ell}}{\lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m - 3} = \frac{\lambda_k + \lambda_\ell - 2}{\lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m - 3} \cdot (\lambda_k \lambda_\ell \lambda_m U_k U_\ell U_m - \lambda_k \lambda_m \times \\ &\times (U_k V'_\ell + U_k U_\ell) U_m + \lambda_m (V'_k + U_k) \cdot (V'_\ell + U_\ell) U_m + \frac{3}{4} \lambda_m (U'_k + (\lambda_k - 1) V_k) \times \\ &\times (U'_\ell + (\lambda_\ell - 1) V_\ell) U_m). \end{aligned} \quad (26)$$

Для второго компонента тензора напряжений, записанного в полярной системе, справедливы формулы:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = s_{\varphi\varphi} + \sigma, \quad (27)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sum_{n \geq 0} (U_n + V'_n + W_n) r^{\lambda_n - 1} - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \beta_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3}, \quad (28)$$

где коэффициенты $\beta_{k\ell m}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_{k\ell m} &= \frac{\lambda_k + \lambda_\ell - 2}{\lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m - 3} \cdot \lambda_k \lambda_\ell U_k U_\ell (V'_m + U_m) - \\ &- \lambda_k (U_k V'_\ell + U_k U_\ell) (V'_m + U_m) + (V'_k + U_k) (V'_\ell + U_\ell) (V'_m + U_m) + \\ &+ \frac{3}{4} (U'_k + (\lambda_k - 1) V_k) (U'_\ell + (\lambda_\ell - 1) V_\ell) (V'_m + U_m), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} ((\lambda_n - 1) V_n + U'_n) r^{\lambda_n - 1} - \frac{1}{2} B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \gamma_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3}, \quad (30)$$

где коэффициенты $\gamma_{k\ell m}$ находятся по формуле:

$$\begin{aligned} \gamma_{k\ell m} &= \frac{\lambda_k + \lambda_\ell - 2}{\lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m - 3} \lambda_k \lambda_\ell U_k U_\ell (U'_m + (\lambda_m - 1) V_m) - \lambda_k (U_k V'_\ell + U_k U_\ell) \cdot (U'_m + (\lambda_m - 1) V_m) + \\ &+ (V'_k + U_k) (V'_\ell + U_\ell) (U'_m + (\lambda_m - 1) V_m) + \frac{3}{4} (U'_k + (\lambda_k - 1) V_k) (U'_\ell + (\lambda_\ell - 1) V_\ell) (U'_m + (\lambda_m - 1) V_m). \end{aligned} \quad (31)$$

Задача формулируется с помощью уравнения равновесия и условия несжимаемости, учитывается, что концы трещины свободны от усилий.

Заключение

Метод асимптотических разложений может быть применен в окрестности вершины трещины материала для получения количественных и качественных оценок основных характеристик его разрушения.

Построение аналитических зависимостей компонентов напряжений и деформаций от полярного угла и расстояния от вершины трещины, разработка математического аппарата для диагностики прочностных характеристик элементов конструкций, а также анализ поведения материала при растягивающей нагрузке и учете упругопластических эффектов – все это является актуальным с точки зрения прогнозирования ресурса деталей машин и механизмов, а также развития прикладной математики и соответствующих численных и аналитических методов.

В статье представлена разработанная методика постановки краевой задачи по определению НДС стальной пластины упругопластического материала с трещиной, подверженной растягивающей нагрузке, основанная на методе асимптотических разложений с использованием коэффициента нелинейности. Коэффициент получен с помощью квадратичной аппроксимации.

Подобный подход учитывает пластические свойства рассматриваемого материала, это позволяет определить члены асимптотических разложений для компонентов тензора напряжений. Возможно удержание нужного количества членов разложения. Результаты исследования НДС упрочняющегося упругопластического материала с трещиной, проведенного на основе метода асимптотических разложений, позволяют в отличие от существующих методик, строить аналитические выражения компонентов тензоров напряжений и деформаций для области промежуточной структуры окрестности трещины. Эта область соответствует переходу из упругого в пластическое состояние. Появляется возможность описывать геометрии пластических зон для материалов, как сталь и медь, в рамках соотношений теории течения с упрочнением и учитывать разгрузку при плоской деформации и плоском напряженном состоянии.

Данные результаты позволяют оценить НДС конструкций, содержащих трещины, а также их эксплуатационную надежность и долговечность. Появляется возможность решать задачи прикладной математики по определению характеристик предельного состояния конструкции. Результаты влияют на мотивированный выбор геометрических параметров конструкции с учетом прочностных свойств используемого материала.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Астафьев, В. И.** Распределение напряжений вблизи вершины наклонной трещины в нелинейной механике разрушения / В. И. Астафьев, А. Н. Крутов // Вестник СамГУ. – 1999. – № 4. – С. 56–69.
2. **Клюшников, В. Д.** Математическая теория пластичности / В. Д. Клюшников. – М. : МГУ, 1978. – 208 с.
3. **Партон, В. З.** Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. – М. : Изд-во ЛКИ, 2008. – 192 с.
4. **Плескачевский, Ю. М.** Корректное применение моделей континуума, квазиконтинуума, сетей в наномеханике / Ю. М. Плескачевский, Ю. А. Чигарева // Доклады НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 118–122.
5. **Starovoitov, E. I.** Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F. B. Nagiyev. – Toronto, New Jersey : Apple Academic Press, 2012. – 346 p.

6. **Stepanova, L. V.** Asymptotic methods of nonlinear fracture mechanics: results, contemporary state and perspectives / L. V. Stepanova, E. M. Adylina // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. – 2013. – no. 2. – P. 156 – 168.
7. **Черепанов, Г. П.** Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
8. **Чигарев, А. В.** Исследование неосесимметричного напряженного состояния при квазистатическом термосиловом нагружении в условиях облучения высокоэнергетическими частицами / А. В. Чигарев, П. И. Ширвель // Наука и Техника. – 2013. – № 4. – С. 46–53.
9. **Boven, H.** Asymptotic Series of Poincare and Stieltjes / H. Boven, R. Wesselink, S. A. Wepster // Nieuw archief voor wiskunde. – 2012. – Vol. 13, no. 3. – P. 187–190.
10. **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов / Э. И. Старовойтов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
11. **Александровский, С. В.** Нелинейные деформации бетона при сложных режимах нагружения / С. В. Александровский, Н. А. Колесников // Бетон и железобетон. – М., 1976. – № 4. – С. 27–32.
12. **Sanjarovsky, R.** Creep of concrete and its instantaneous nonlinearity of deformation in the structural calculations / R. Sanjarovsky, M. Manchenko. – Scientific Israel – Technological Advantages. – 2015. – Vol. 17, no. 1–2. – P. 180–187.
13. **Ибрагимов, В. А.** Напряженно-деформированное состояние вблизи конца растущей трещины в упругопластической среде / В. А. Ибрагимов // ПММ. – 1976. – Т. 40, № 2. – С. 337–345.
14. **Шмелев, А. В.** Идентификация параметров полилинейных моделей металлов, применяемых при численном моделировании процессов пластического деформирования и разрушения конструкций / А. В. Шмелев, А. Г. Кононов, А. В. Омелюсик // Наука и образование. – 2017. – № 1. – С. 1–17.

Поступила в редакцию 02.10.2018 г.

Контакты: maryanatolevna@mail.ru (Гундина Мария Анатольевна)

Gundina M. METHOD OF ASYMPTOTIC EXPANSION FOR CRACK DISTRIBUTION PROBLEMS. FINDING NONLINEARITY COEFFICIENT.

The article deals with the mathematical formulation of the problem of a central straight crack in a plate of the hardening elastic-plastic material with the load applied at the boundaries of the plate in the plane strain conditions. The problem is solved numerically-analytically by the method of asymptotic expansions. The principle for finding the coefficient of nonlinearity by means of quadratic interpolation by the least squares method is given in the paper. This coefficient characterizes the nonlinearity of the deformation diagram of an elastoplastic material. The statement of the problem and the sequence of steps for finding the coefficient of nonlinearity are described in the paper. The value of this parameter allows to express the components of the stress tensor depending on the strain values for an elastoplastic material. The obtained theoretical dependences defining the characteristics of the limiting construction states allow to make a motivated choice of geometric parameters taking into account strength material properties.

Keywords: method of asymptotic expansion, crack, deformation curve, flow theory, elastic-plastic material.

УДК 632.7

ФЕНОТИПИЧЕСКАЯ ИЗМЕНЧИВОСТЬ РИСУНКА ПЕРЕДНЕСПИНКИ КОЛОРАДСКОГО ЖУКА (*LEPTINOTARSA DECEMLINEATA* SAY) КАК ОЦЕНКА ЗДОРОВЬЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Г. Н. Тихончук

кандидат биологических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. С. Доронькина

магистрант

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В работе представлены результаты изучения состояния окружающей среды на трех модельных участках в течение двух вегетационных сезонов.

*В качестве биоиндикатора использовалась взрослая особь колорадского жука (*Leptinotarsa decemlineata* Say). В статье обсуждается возможность использования полиморфизма рисунка переднеспинки жука в качестве тест-объекта окружающей среды посредством анализа группы фенотипов переднеспинки и степени их асимметричности.*

Ключевые слова: колорадский жук, флуктуирующая асимметрия, биоиндикация, коэффициент оценки состояния окружающей среды, морфа.

Введение

Исследования внутривидовой изменчивости в связи с антропогенными изменениями среды обитания особенно широко развиваются последние десятилетия. Одним из новых направлений таких исследований является изучение флуктуирующей асимметрии билатеральных признаков.

Особенностью этого направления является то, что в этом случае анализируется особая форма изменчивости – внутри индивидуальное разнообразие как проявление случайной изменчивости развития. Уровень флуктуирующей асимметрии билатеральных признаков является характеристикой общей стабильности развития, понимая под этим наличие стабилизированного потока, траектории развития. Являясь показателем случайных отклонений в развитии, т. е. стабилизированности развития, флуктуирующая асимметрия одновременно является неспецифическим показателем условий развития, что дает возможность использовать ее для оценки условий существования как естественных, так и искусственных популяций [1]. В связи с этим представляет интерес проведение сравнительного анализа флуктуирующей асимметрии билатеральных признаков у видов с широким ареалом для оценки стабильности развития в отдельных популяциях и установления связи уровня стабильности развития с теми или иными параметрами среды. Эти исследования позволяют выяснить значения параметров среды, близкие к оптимальным в отношении стабильности развития, и сделать определенные филогенетические выводы [2].

Выбор колорадского (*Leptinotarsa decemlineata* Say) жука в качестве объекта изучения фенетической изменчивости под влиянием экологических условий на выбранных нами участках обусловлен тем, что он характеризуется обширным внутривидовым полиморфизмом, достаточно сложной популяционной структурой и экологической пластичностью, которые позволяют ему быстро адаптироваться к разнообразным естественным и антропогенным воздействиям. Флуктуирующая асимметрия рисунка надкрылий колорадского жука точно отражает степень антропогенного воздействия и используется для биоиндикации. Характер рисунка переднеспинки позволяет сформулировать представление о норме, о наличии и частоте отклонений от нее и может служить дополнительным критерием оценки степени неблагоприятных условий [3].

© Тихончук Г. Н., 2019

© Доронькина А. С., 2019

Основная часть

Материал был собран на трех модельных приусадебных участках картофельного поля. 1-й участок находился у д. Мосток Могилевского района (место сбора жуков находилось в 400 метрах от шоссе в окружении лесного массива). 2-й участок – у д. Кадино Могилевского района (располагался в 200 метрах от шоссе). 3-я площадка – у д. Добрейка Шкловского района (участок характеризуется расположением в естественной низине и прохождением в 200 метрах железнодорожного полотна). Площадки имели схожий гранулометрический состав почвы, агротехнику возделывания. На всех площадках для выращивания использовался сорт белорусской селекции “Ласунак”, растения которого не обрабатывались инсектицидами, так как этот сорт считается одним из наиболее устойчивых к повреждениям колорадским жуком.

На переднеспинке жука имеются 10-11 черных пятен и полос, которые в совокупности образуют типичный рисунок у жуков этого вида, вариации которого могут рассматриваться как фены. При анализе изменчивости рисунка можно выделить ряд фенов по изменчивости формы центральных полос **A** [4].

Фен **U**: вертикальные полосы расположены отдельно друг от друга.

Фен **H**: вертикальные полосы соединены друг с другом горизонтальной линией.

Фен **V**: полосы соединяются в нижней точке под углом.

Фен **Y**: полосы соединяются под углом и с пятном **P** в нижней точке.

Фен $E_{(3)}$: три пятна объединены в одно. Фен E_3 : три пятна находятся отдельно друг от друга. Фен $E_{(2)+1}$: два пятна соединены в одно, а одно пятно находится на определенном расстоянии от них.

Фен **P**: Крупное, четко выраженное пятно. Фен **p**: Пятно едва заметно, напоминает точку. Фен -: Фен **P** отсутствует.

Группа фенов **A** может образовывать слияния с пятном **B**. Если вертикальные полосы группы пятен **A** слиты с пятнами **B** с обеих сторон, то такой фен обозначают **A**. Если вертикальные полосы группы пятен **A** слиты с пятном **B** только с одной стороны, то такой фен обозначают **AB**. Если вертикальные полосы пятен **A** расположены отдельно от пятен **B**, то такой фен обозначают **B**.

Пятно **D**, расположено между вертикальным пятном **A** и тремя пятнами **E**. Но возможно слияние пятен **E** и **D**, что обозначается как **E+D** (рисунок 1).

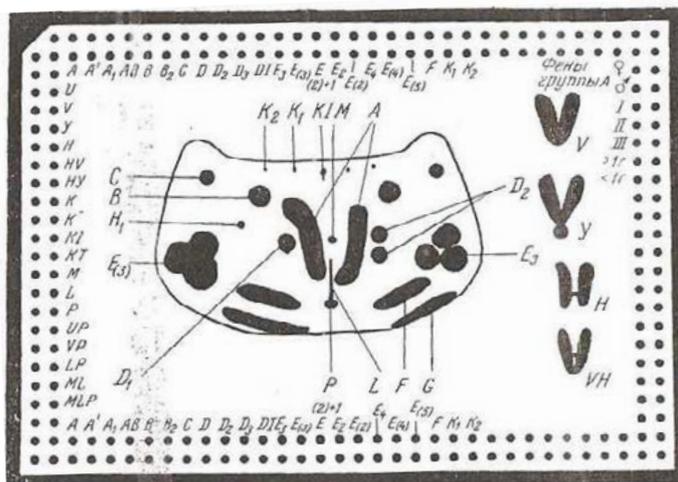


Рис. 1. Схема расположения фенов на переднеспинке колорадского жука

Из всего многообразия наиболее изменчивы фены групп: А, D, E, K. Анализ их изменчивости позволил выделить как самостоятельные фены, так и некоторые их модификации.

Для анализа фенетической изменчивости структуры популяций колорадского жука в данной работе использовались фены: А, В, D, E, P, которые, как показано ниже, могут служить маркерами состояния окружающей среды.

Анализ фенетической структуры переднеспинки на трех участках показал (таблица 1, 2), что каждая из них характеризуется своим набором частот фенов.

Таблица 1 – Анализ фенетической структуры переднеспинки (особей)

Выборка 2016 г.																
Место сбора	Кол-во особей	Фен														
		фены группы А				фены группы E			фены группы P			фены группы АВ			фены группы D	
		V	Y	H	U	E ₍₃₎	E ₃	E ₍₂₎₊₁	P	P	-	A	AB	B	D	D+E
д. Мосток	100	16	0	8	76	180	0	20	48	32	20	54	16	30	192	8
а\г Кадино	100	6	2	24	68	186	0	14	64	10	26	52	18	30	188	12
а\г Добрейка	100	16	0	12	72	176	0	24	56	32	12	42	30	28	192	8

Таблица 2 – Анализ фенетической структуры переднеспинки (особей)

Выборка 2017 г.																
Место сбора	Кол-во особей	Фен														
		фены группы А				фены группы E			фены группы P			фены группы АВ			фены группы D	
		V	Y	H	U	E ₍₃₎	E ₃	E ₍₂₎₊₁	P	P	-	A	AB	B	D	D+E
д. Мосток	100	5	3	14	78	185	0	15	41	8	3	43	18	42	200	0
а\г Кадино	100	15	3	11	74	193	0	7	51	31	18	44	25	31	195	5
а\г Добрейка	100	10	6	27	57	182	1	17	88	8	4	42	26	32	194	6

Из представленных данных в таблицах видно, что для каждой группы фенов есть лидирующая фенорма, которая преобладает на каждом из трех участков. В фенах группы А чаще всего на трех модельных участках встречается морфа U (количество особей в 2016 г. от 68 до 76%, в 2017 г. от 57 до 78% в зависимости от участка). В фенах группы E для всех участков и в выборках разных лет преобладала морфа E₍₃₎. В 2016 г. ее процент встречаемости колебался в районе 88–93%. В 2017 г. – от 93 до 97%. В фенах группы P преобладала на всех модельных участках морфа P.

В группе фенов АВ преобладает морфа А. В фенах группы D ведущую позицию занимает морфа D: в 2016 г. колебания встречаемости данного признака составило от 94 до 96%, в 2017 г. – от 97 до 100%.

Таким образом, количество каждого фена, соответствующего какой-либо группе, есть своя ниша, свое место, которое данная морфа занимает по отношению к другим морфам своей группы.

С.Р. Фасулати выявил различия между природными популяциями колорадского жука, учитывая формы рисунка переднеспинки как совокупности фенов. Суть метода состоит в следующем: из всего многообразия форм изменчивого вида выбираются 5-10 легко различимых форм и определяются частоты их встречаемости в сравниваемых популяциях в процентах от общего числа особей на примере выборок в несколько сотен экземпляров. Им выделены девять основных форм рисунка центральной части переднеспинки имаго колорадского жука [5; 6]. Фасулати считает, что к этим девяти формам (рисунок 2), можно свести все фактическое разнообразие рисунка на переднеспинке жуков.

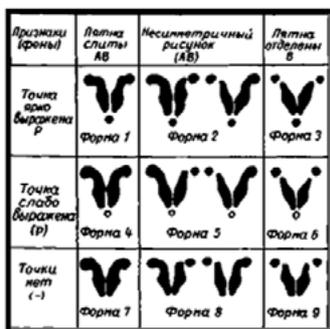


Рис. 2. Девять форм рисунков на переднеспинке колорадского жука (по С.Р. Фасулати, 1985)

Количество форм 2, 5, 8 использовалось как экологический маркер в данном исследовании. Таким способом было проанализировано 600 шт. взрослых особей колорадского жука (таблица 3, 4).

Таблица 3 – Встречаемость форм рисунков переднеспинки колорадского жука (по Фасулати, шт.)

Место сбора	2016 г.								
	Формы								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
д. Мосток	16	16	16	32	0	0	6	0	14
а\г Кадино	42	14	8	2	2	6	8	2	16
а\г Добрейка	42	2	12	0	28	0	0	4	12

Таблица 4 – Встречаемость форм рисунков переднеспинки колорадского жука (по Фасулати, шт.)

Место сбора	2017 г.								
	Формы								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
д. Мосток	39	6	11	0	11	30	1	1	1
а\г Кадино	30	10	11	2	10	19	12	5	1
а\г Добрейка	39	23	23	0	2	8	3	1	1

Все девять рассматриваемых феноформ имаго встречаются во всех проанализированных популяциях колорадского жука, но с разной частотой. Результаты анализа закономерностей распространения феноформ показали, что форма 1 на всех участках встречается чаще всего (33–36%). Форма 8 встречается реже всего на всех модельных участках.

Наибольшее количество несимметричных особей по признаку А+В+Р было обнаружено как в 2016 г., так и в 2017 г. в а\г Добрейка (таблица 5). Наименьшее количество асимметричных особей было собрано на участке в деревне Мосток, что подтверждает полученные выше результаты о том, что этот участок является наиболее экологически чистым.

Таблица 5 – Количество несимметричных особей по совокупности пятен А+В+Р, шт.

Место сбора	2016 г.	2017 г.
д. Мосток	16	18
а\г Кадино	18	25
а\г Добрейка	34	26

Таким образом, участок в а\г Добрейка является наиболее загрязненным, т.к. при анализе колорадского жука было выявлено наибольшее количество асимметричных особей (26–34%), а предположительно чистым является участок у деревни Мосток (уровень асимметрии в разные годы колеблется в пределах 16–18%). Процент асимметричных особей вырос в 2017 г. по сравнению с 2016 г. на модельных участках Мосток и Кадино; в Добрейке коэффициент асимметричных особей снизился. Такие же результаты были получены при анализе надкрылий имаго колорадского жука [7]. В 2016 г. на участке Добрейка коэффициент асимметричного проявления был 34%, что соответствует среднему уровню загрязненности. На других участках в разные годы коэффициент флуктуирующей асимметрии низкий и соответствует норме.

С.Р. Фасулати в своих трудах предложил методику определения состояния окружающей среды по трем пятнам А, В, Р. Но анализ рисунка переднеспинки колорадского жука показал, что асимметричными являются не только эти пятна, но и пятна группы E, D (таблица 6, 7).

Таблица 6 – Анализ групп фенотипов E и D, шт.

2016 г.							
Место сбора	феноформы группы E				феноформы группы D		
	$E_{(3)}/E_{(3)}$	$E_{(3)}/E_{(2)+1}$	$E_{(2)+1}/E_{(2)+1}$	$E_{(3)}/E_3$	D/D	D / D+E	D+E / D+E
д. Мосток	88	4	8	0	96	0	4
а\г Кадино	90	6	4	0	94	0	6
а\г Добрейка	82	12	6	0	96	0	4

Таблица 7 – Анализ групп фенотипов E и D, шт.

2017 г.							
Место сбора	феноформы группы E				феноформы группы D		
	$E_{(3)}/E_{(3)}$	$E_{(3)}/E_{(2)+1}$	$E_{(2)+1}/E_{(2)+1}$	$E_{(3)}/E_3$	D/D	D / D+E	D+E / D+E
д. Мосток	88	5	7	1	100	0	0
а\г Кадино	93	7	0	0	96	3	1
а\г Добрейка	89	9	2	0	95	3	2

Из таблиц видно, что число несимметричных фенотипов подгруппы E, увеличивается от первого участка к третьему. Причем в 2016 г. в выборке из 300 особей ни одна не имела феноформу D/D+E в отличие от выборки 2017 г. Возможно, что задержка в развитии жуков из-за погодных условий была причиной появления данных феноформ.

Исходя из полученных данных очевидно (таблица 8), что участок в Добрейке наиболее загрязненный, процент асимметрии составляет 12%; участок у д. Мосток наиболее чистый, процентное содержание не симметричных особей в выборке 4–6%. Но в целом на всех участках уровень асимметричного проявления низкий и соответствует норме.

Таблица 8. Количество несимметричных особей по совокупности пятен E, D, шт.

Место сбора	2016 г.	2017 г.
д. Мосток	4	6
а\г Кадино	6	10
а\г Добрейка	12	12

Таким образом, колорадский картофельный жук, удобный объект изучения полиморфизма: по обилию и доступности материала он может быть сравним лишь с лабораторными культурами насекомых [8]. Полиморфизм рисунка покровов жука

определяется генетическим и экологическим факторами [2], что предполагает возможность использования характера полиморфизма этого вида для биоиндикации. Наиболее подходящими для этих целей представляются следующие признаки: степень меланизма покровов, соотношение форм рисунка, характер и степень асимметрии признаков [1].

При анализе переднеспинки по методу С.Р. Фасулати, особи были разделены на 9 групп в зависимости от вариации пятен А, В, Р, из которых чаще других встречалась форма 1. Асимметричными в этой классификации являлись формы 2, 5, 8.

При анализе переднеспинки по методике, предложенной нами, имаго колорадского жука были разделены на группы в зависимости от вариации пятен группы Е и D. Из группы Е чаще других встречалась феноформа $E_{(3)}/E_{(3)}$, А из группы D лидирующую позицию занимала феноформа D/D. Асимметричными в этой классификации являются феноформы $E_{(3)}/E_{(2)+1}$ и D/D+E.

При проведении анализа надкрылий [7] и переднеспинки выявлено, что наиболее загрязненным является участок у агрогородка Добрейка Шкловского района. Вероятно, степень стрессирующего состояния этого участка определяется шумовой вибрацией железнодорожного транспорта и выбросами выхлопных газов.

Нужно отметить, что данный способ оценки окружающей среды очень прост и доступен, но он не дает гарантии, что результаты, полученные при исследовании, полно отражают состояние окружающей среды, т. к. колорадские жуки имеют свойство перемещаться с одного участка на другой. И, тем не менее, метод флуктуирующей асимметрии возможно использовать при первичной оценке здоровья окружающей среды.

Заключение

Флуктуирующая асимметрия может быть использована для оценки стрессирующего воздействия среды на популяции и конкретные организмы. Характеристикой ее на популяционном уровне является коэффициент флуктуирующей асимметрии, демонстрирующий долю асимметричных особей в данной популяции. Среди особей колорадского жука в исследуемых выборках отмечены асимметричные варианты групп пятен переднеспинки. При проведении анализа морф переднеспинки выявлено, что наиболее загрязненным является участок у агрогородка Добрейка Шкловского района.

Данный метод оценки состояния окружающей среды позволяет с помощью коэффициента асимметричного проявления отследить уровень загрязненности на интересующем участке с минимальными затратами на исследование.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Захаров, В. М.* Асимметрия животных (популяционно-фенетический подход) / В. М. Захаров. – Москва : Наука, 1987. – 215 с.
2. *Тихончук, Г. Н.* Использование биоиндикационных методов на занятиях по зоологии / Г. Н. Тихончук, А. С. Доронькина // Итоги научных исследований ученых МГУ имени А. А. Кулешова 2016 г. : сб. материалов науч.-методической конференции, Могилев, 25 января – 1 февраля 2017 г. – С. 160–162.
3. *Доронькина, А. С.* Оценка здоровья окружающей среды методом флуктуирующей асимметрии / А. С. Доронькина // Дни студенческой науки : сб. материалов XLVI студенческой науч.-практ. конференции, Гомель, 11–12 мая 2017 года / ГГУ им. Ф. Скорины. – 2017. – № 1. – С. 77.
4. *Фасулати, С. Р.* Полиморфизм и популяционная структура колорадского жука *Leptinotarsa decemlineata* Say в Европейской части СССР / С. Р. Фасулати // Экология. – 1985. – № 6. – С. 50–56.
5. *Зелеев, Р. М.* Оценка полиморфизма рисунка переднеспинки и надкрылий колорадского жука, *Leptinotarsa decemlineata*, в окрестностях Казани / Р. М. Зелеев // Зоологический журнал. – 2002. – Т. 81. – № 3. – С. 316–322.

6. **Кохманюк, Ф. С.** Колорадский жук как модель микроэволюции / Ф. С. Кохманюк // Природа. – 1981. – № 12. – С. 86–87.
7. **Тихончук, Г. Н.** Фенотипическая изменчивость рисунка надкрылий колорадского жука как оценка здоровья окружающей среды / Г. Н. Тихончук // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – 2017. – № 1. – С. 96–100.
8. **Бацылев, Е. Г.** Колорадский картофельный жук / Е. Г. Бацылев // Наука и Жизнь. – 1949. – № 4. – С. 14–15.
9. **Гриценко, В. В.** Эколого-генетический анализ изменчивости центральных элементов рисунка переднеспинки у колорадского жука (*Leptinotarsa decemlineata*) // В. В. Гриценко, Н. В. Глотов, Д. Б. Орлинский // Зоол. журнал. – 1998. – Т. 77. – № 3. – С. 278–284.

Поступила в редакцию 01.10.2018 г.

Контакты: +375 29 741 29 59 (Тихончук Галина Николаевна)

(Доронькина Анастасия Сергеевна)

Tikhonchuk G., Doronkina A. PHENOTYPIC VARIABILITY OF COLORADO PRONOTUM PICTURE (*LEPTINOTARSA DECEMLINEATA* SAY) AS ENVIRONMENT HEALTH ASSESSMENT.

The article presents the results of the study aimed to determine the state of the environment in three model areas during two growing seasons.

*An adult individual of the Colorado potato beetle (*Leptinotarsa decemlineata* Say) was used as a bioindicator. The article discusses the possibility of using the beetle's pronotum polymorphism as a test object of the environment by analyzing the group of pronotum phenes and the degree of their asymmetry.*

Keywords: Colorado potato beetle, fluctuating asymmetry, bioindication, coefficient of environmental assessment, morph.

УДК [579+54]:628.1/.3(476.2)“2013–2016”

ХАРАКТЕРИСТИКА СОСТАВА СТОЧНЫХ ВОД, ОТОБРАННЫХ ДЛЯ МИКРОБИОЛОГИЧЕСКОГО И ХИМИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НА ТЕРРИТОРИИ ГОРОДА ГОМЕЛЯ И ГОМЕЛЬСКОГО РАЙОНА В ПЕРИОД С 2013 ПО 2016 ГОД

Е. И. ДЕГТЯРЕВА

кандидат биологических наук, доцент
Гомельский государственный медицинский университет

Е. М. НАУМЕНКО

Гомельский областной центр гигиены, эпидемиологии и общественного
здоровья

В. В. СОТНИКОВА

студент лечебного факультета
Гомельский государственный медицинский университет

В. С. ВОЛЧЕК

студент лечебного факультета
Гомельский государственный медицинский университет

В статье представлены данные ретроспективного анализа микробиологического и химического состава сточных вод, отобранных из коллекторов, расположенных на территории города Гомеля и Гомельского района в период с 2013 по 2016 год.

В связи с фактически не изменяющимся количеством положительных проб воды, отобранной из коллекторов исследуемого региона, можно говорить о неизменном источнике фекального загрязнения в период с 2013 по 2016 год.

Установлено, что микробиологический и химический состав сточных вод в данном регионе является небезопасным для здоровья населения (в особенности, детей), проживающего на исследуемой территории, поэтому использование данной воды для любой цели не рекомендовано.

Ключевые слова: сточные воды, Гомель, Гомельский район, микробиологический состав, химический состав.

Введение

Водные объекты, располагающиеся на территории города Гомеля и Гомельского района, являются основными источниками воды для населения данного региона. На водные объекты исследуемой территории оказывается сильное антропогенное влияние, в основном за счет сточных вод, которые ежедневно впадают в реку Сож (основной водный объект города Гомеля и Гомельского района).

В водных экосистемах, в том числе и в сточных водах, микробиота является интегрирующим звеном и с высокой скоростью реагирует на изменение условий окружающей среды, служит показателем качества воды и состояния экосистемы в целом.

Цель исследования: дать оценку микробиологическому и химическому составу сточных вод, отобранных для исследования на территории города Гомеля и Гомельского района.

© Дегтярева Е. И., 2019

© Науменко Е. М., 2019

© Сотникова В. В., 2019

© Волчек В. С., 2019

Объект исследования. Материалы и методы

Исследования проводились на базе УЗ “Гомельский областной центр гигиены, эпидемиологии и охраны здоровья”. В период с 2013 по 2016 год с целью отбора проб воды осуществлялись многократные выезды к коллекторам города Гомеля и Гомельского района с целью изучения их гигиенического состояния на основании наличия и количества содержащейся микробиоты, а также химического состава.

Отбор проводился со среднего горизонта с учетом требований асептики. Перед посевом пробы тщательно, без образования пены, перемешивали не менее 30 секунд и фламбировали край емкости. Исследуемые пробирки и чашки маркировали. Новые порции воды для анализа тщательно перемешивали.

Перед посевом раствор для разведения (физиологический) разливали по 9 мл в пробирки с соблюдением правил стерильности. Затем, в первую пробирку с 9 мл раствора вносили 1 мл анализируемой воды. При этом наконечник не должен быть опущен ниже поверхности воды, чтобы избежать смывания бактерий с наружной стороны. Другой стерильной пипеткой или дозатором тщательно перемешивали содержимое пробирки, отбирали из нее 1 мл и переносили в чашку Петри, что соответствовало посеву 0,1 мл анализируемой воды. Другой стерильной пипеткой делали посев 1 мл из второй пробирки, что соответствовало посеву 0,01 мл анализируемой воды. В случаях высокого уровня загрязнения воды разбавление продолжали аналогично, каждый раз меняя пипетку или наконечник. Время от момента приготовления разведения и заливки питательным агаром не должно превышать 30 минут [1].

Микробиологическую чистоту воды, принятой для исследования, определяли при помощи фуксин-сульфитной среды Эндо. Пробы, которые дали положительный результат, далее исследовали при помощи лактозной питательной среды для подтверждения способности ферментировать лактозу до кислоты и газа.

Стоит отметить, что сточные воды не имеют нормированных показателей чистоты.

В ходе исследований учитывались следующие показатели: количество проведенных исследований, положительные исследования, количество проб, положительные пробы.

Количество проведенных исследований – исследования, проведенные со всеми поступившими образцами.

Количество проб – исследования, проведенные на подозрительных и положительных образцах, выявленных отбором из общих исследований, проведенных на всех поступивших образцах.

Положительные исследования – количество исследований от общего количества, давших положительную реакцию (наличие колоний на среде Эндо).

Положительные пробы – количество исследований, из числа положительных, давших положительный результат при исследовании в реакции кислота/газ.

Кроме того, был произведен расчет удельного веса (процента) положительных исследований и проб от общего количества, соответственно.

Полученные экспериментальные данные статистически обработаны и в статье представлены в виде цифр, таблиц и графиков.

Результаты исследований и их анализ

Изучение микробиологического и химического состава сточных вод города Гомеля и Гомельского района в период с 2013 по 2016 год

Результаты проведенного исследования по изучению микробиологического и химического состава сточных вод представлены в таблицах 1–2 и на рисунках 1–2.

Таблица 1 – Микробиологическое состояние сточной воды города Гомеля и Гомельского района в период с 2013 по 2016 год

Показатель/ Год	2013 год	2014 год	2015 год	2016 год
Количество исследований, шт.	294	418	519	418
Количество положительных исследований, шт.	79	88	81	79
Удельный вес положительных исследований, %	43,4	21,1	15,6	18,9
Количество проб, шт.	170	182	220	193
Количество положительных проб, шт.	44	54	52	49
Удельный вес положительных проб, %	25,9	29,7	23,6	25,4

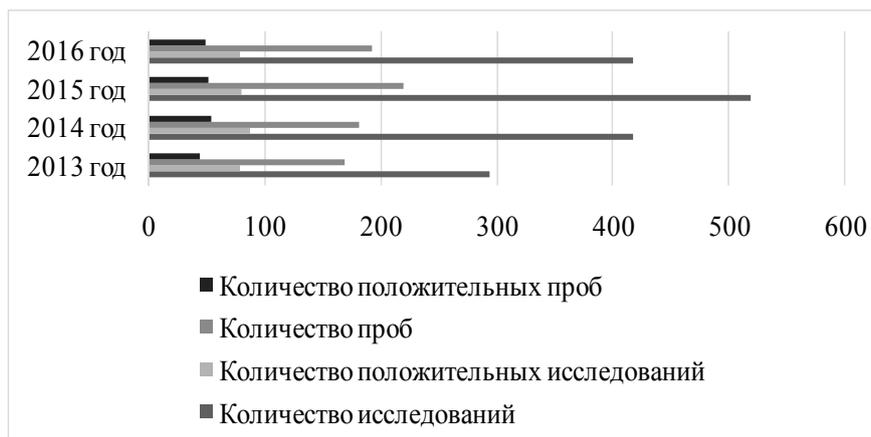


Рис. 1. Динамика изменения количества исследований и проб, а также их положительных результатов, проведенных со сточными водами города Гомеля и Гомельского района в период с 2013 по 2016 год



Рис. 2. Динамика изменения удельного веса исследований и проб, проведенных со сточными водами города Гомеля и Гомельского района в период с 2013 по 2016 год

Согласно данным, представленным в таблице 1 и на рисунке 1, количество отбираемых проб из источников сточных вод с каждым годом возрастало в сравнении с предыдущим (в 2013 г. – 284 проведенных исследования, в 2015 г. – 519). Однако количество положительных проб практически не изменялось и в среднем составило 26,15%. Данное обстоятельство вероятнее всего объясняется тем, что сточные воды ежегодно имеют одни и те же источники фекального загрязнения.

Таблица 2 – Химический состав сточных вод города Гомеля и Гомельского района в период с 2013 по 2016 год

Показатель Исследуемый год	Средняя концентрация			
	2013 год	2014 год	2015 год	2016 год
Железо, мг/дм ³	1,210	9,038	1,522	1,724
Марганец, мг/дм ³	0,036	0,076	0,113	0,053
Алюминий, мг/дм ³	0,354	0,465	0,251	0,600
БПК 5, мгО ₂ /дм ³	22,808	1,870	20,162	8,000
АПАВ, мг/дм ³	0,433	0,339	0,222	0,282
Азот аммонийный, мг/дм ³	10,63	0,224	7,635	6,282
Азот нитратов, мг/дм ³	5,500	7,535	13,005	9,377
Азот нитритов, мг/дм ³	0,073	0,009	0,082	0,006
Водородный показатель (рН)	7,648	7,767	7,729	7,628
Взвешенные вещества, мг/дм ³	5,236	7,522	8,450	8,656
Кадмий, мг/дм ³	0,000	-	0,000	-
Кобальт, мг/дм ³	-	-	0,000	-
Медь, мг/дм ³	0,001	-	0,007	0,006
Молибден, мг/дм ³	-	-	0,000	-
Нефтепродукты	0,423	1,028	0,216	0,680
Никель, мг/дм ³	0,000	-	0,000	-
Нитраты, мг/дм ³	43,340	5,266	0,852	4,727
Нитриты, мг/дм ³	0,025	-	0,424	0,393
Ортофосфаты и полифосфаты, мг/дм ³	2,569	0,370	2,405	0,170
Свинец, мг/дм ³	-	-	0,000	-
Сульфаты, мг/дм ³	18,428	40,544	49,446	30,201
Сухой остаток, мг/дм ³	354,985	267,394	417,030	266,591
Фосфор фосфатов, мг/дм ³	0,133	0,041	3,730	2,379
Фториды, мг/дм ³	-	-	-	0,351
ХПК, мгО ₂ /дм ³	148,667	125,784	71,034	153,905
Хлориды, мг/дм ³	38,593	31,925	507,653	111,809
Хром, мг/дм ³	0,000	-	0,000	-
Цинк, мг/дм ³	0,336	-	0,035	0,100
Итого проведено исследований	615	480	696	714

Согласно данным, представленным в таблице 2, следует, что, наибольшую значимость среди всех изученных химических соединений как факторов, загрязняющих сточные воды, представляют следующие: железо, биологическое потребление кислорода, “азотистая триада”, взвешенные вещества, ортофосфаты / полифосфаты, сульфаты, сухой остаток, химическое потребление кислорода и хлориды.

1. Железо

В природных водах может содержаться железо в разных формах. Чаще всего встречается двух- и трехвалентное железо. Содержание железа в воде выше 1-2 мг Fe /дм³ значительно ухудшает органолептические свойства, придавая ей неприятный вязущий

вкус, и делает воду малоприспособленной для использования даже в технических целях. Значительные количества железа поступают с подземным стоком и со сточными водами предприятий металлургической, металлообрабатывающей, текстильной, лакокрасочной промышленности и сельскохозяйственными стоками.

Повышенное содержание железа в воде создает благоприятные условия для развития *железобактерий*. Эти микроорганизмы образуют ветвящиеся колонии, которые осложняют работу гидротехнических сооружений. Продукты жизнедеятельности железобактерий являются канцерогенами. Железобактерии внутри труб – идеальная среда для развития кишечной палочки, гнилостных бактерий, различных других микроорганизмов. Все это ухудшает химические и бактериологические показатели воды [2].

Согласно данным, приведенным в таблице 2, следует, что наибольшая концентрация железа наблюдалась в 2014 г. (9,038 мг/дм³), наименьшая – в 2013 г. (1,210 мг/дм³). Наиболее вероятно, что высокие концентрации железа в сточных водах наблюдаются по причине того, что Гомель является крупным промышленным городом Республики Беларусь.

2. Биохимическое потребление кислорода (БПК 5)

БПК является одним из важнейших критериев уровня загрязнения водоема органическими веществами, он определяет количество легкоокисляющихся органических загрязняющих веществ в воде.

Особенностью биохимического окисления органических веществ в воде является сопутствующий ему процесс нитрификации, искажающий характер потребления кислорода.

Нитрификация протекает под воздействием особых нитрифицирующих бактерий – *Nitrosomonas*, *Nitrobacter* и др. Эти бактерии обеспечивают окисление азотсодержащих соединений, которые обычно присутствуют в загрязненных природных и некоторых сточных водах, и тем самым способствуют превращению азота сначала из аммонийной в нитритную, а затем и нитратную формы.

В поверхностных водах величина БПК 5 колеблется в пределах от 0,5 до 5,0 мг/л; она подвержена сезонным и суточным изменениям, которые, в основном, зависят от изменения температуры и от физиологической и биохимической активности микроорганизмов. Весьма значительны изменения БПК 5 природных водоемов при загрязнении сточными водами [3], что обуславливает актуальность исследования.

Согласно данным, приведенным в таблице 2, следует, что наибольшее количество БПК 5 наблюдалось в 2013 г. (22,808 мг О₂/дм³). Наименьшее значение данного показателя наблюдалось в 2014 г. (1,870 мг О₂/дм³).

3. “Азотистая триада”

Важным показателем загрязнения воды является так называемая “азотистая триада” (аммиак, нитриты и нитраты). При обнаружении данных веществ (в особенности при большой окисляемости воды), что наблюдалось в 2013, 2015 и 2016 гг., можно точно сказать, что вода загрязнена органическими веществами животного происхождения.

Аммиак является начальным продуктом гниения, а, следовательно, его присутствие в воде говорит о свежем органическом загрязнении. Нитриты указывают на давность загрязнения водоисточника, так как для того, чтобы прошла начальная стадия минерализации аммиака, необходимо некоторое время. Нитраты – конечный продукт минерализации органических веществ, а, следовательно, их присутствие – это показатель более давнего загрязнения источника водоснабжения. Следовательно, наличие только их, без высокой БПК 5, и остальных показателей “азотистой триады” может говорить о безопасности воды.

Эти обстоятельства позволяют дифференциально подходить к оценке биологического загрязнения воды. Так, если в воде был обнаружен только аммиак, а при повторном анализе его там не оказалось, то можно сделать вывод о прекратившемся загрязнении воды. Если одновременно с аммиаком обнаруживаются соли азотистой или азотной кислоты, то это указывает на явное неблагополучие водоисточника.

Следует учитывать, что аммонийные соли встречаются иногда в чистых, преимущественно подземных водах как результат восстановления селитры, содержащейся в почве.

Содержание в воде солей азотной кислоты представляет самостоятельный интерес. Потребление воды, богатой нитратами, вызывает у детей грудного и дошкольного возраста тяжелое заболевание, выражающееся в патологических явлениях со стороны слизистых оболочек глаз, губ и кожных покровов (посинение), кишечника и иногда сердечно-сосудистой системы. Главным признаком заболевания является появление в крови метгемоглобина: нитраты под влиянием микрофлоры переходят в нитриты, которые, всасываясь в кровь, ведут к образованию метгемоглобина, наличие последнего уменьшает в той или иной степени снабжение тканей кислородом [4].

Содержание таких веществ “азотистой триады”, как азот аммонийный и нитраты, согласно данным, приведенным в таблице 2, было максимально в 2013 г. (10,630 и 43,340 мг/л, соответственно), нитритов – в 2015 (0,424 мг/л). Это говорит о том, что в исследуемый период времени (2013–2016 гг.) данный водоисточник является неблагоприятным (одновременное присутствие солей азотной кислоты и аммиака (азота аммонийного)).

4. Взвешенные вещества

Сточные воды являются сложной неоднородной системой, содержащей загрязнения различного характера. Вещества представлены в растворимом и нерастворимом, органическом и неорганическом виде. Концентрация соединений бывает различной, в частности, органические загрязнения в бытовых стоках представлены в виде белков, углеводов, жиров и продуктов биологической переработки. Кроме того, стоки содержат довольно крупные примеси – отходы растительного происхождения, такие как бумага, тряпки, волосы и синтетические вещества. Неорганические соединения представлены ионами фосфатов, в состав которых может входить азот, кальций, магний, калий, сера и другие соединения.

Содержание взвешенных веществ в сточных водах, согласно данным, приведенным в таблице 2, увеличивается с каждым годом и достигает максимума в 2016 г. (8,656 мг/л).

5. Ортофосфаты / полифосфаты

Главным источником полифосфатов являются современные моющие средства, поэтому концентрация фосфатов увеличивается с ростом употребления данных средств. Но благодаря работе бактерий, полифосфаты превращаются в годные для потребления ортофосфаты.

Согласно литературным источникам органический фосфор в основном связан с твердыми частицами, а полифосфаты и ортофосфаты присутствуют в растворенном виде [5].

Концентрация ортофосфатов и полифосфатов достигала максимума в 2013 г. (2,569 мг/л), минимума – в 2016 г. (0,170 мг/л) (таблица 2).

6. Сульфаты

Сульфаты присутствуют практически во всех водах. Главным естественным источником сульфатов являются процессы химического выветривания и растворения серосодержащих минералов, в основном гипса, а также окисления сульфидов и серы. Значительные количества сульфатов поступают в водоемы в процессе отмирания живых организмов, окисления наземных и водных веществ растительного и животного происхождения.

Сульфаты участвуют в круговороте серы. При отсутствии кислорода под действием бактерий они восстанавливаются до сероводорода и сульфидов, которые при появле-

нии в природной воде кислорода снова окисляются до сульфатов. Растения и бактерии извлекают растворенные в воде сульфаты для построения белкового вещества. После отмирания живых клеток в процессе разложения сера протеинов выделяется в виде сероводорода, легко окисляемого до сульфатов в присутствии кислорода.

Повышенные содержания сульфатов ухудшают органолептические свойства воды и оказывают физиологическое воздействие на организм человека – они обладают слабительными свойствами.

Главным источником сероводорода и сульфидов в поверхностных водах являются восстановительные процессы, протекающие при бактериальном разложении и биохимическом окислении органических веществ естественного происхождения и веществ, поступающих в водоем со сточными водами (хозяйственно-бытовыми, предприятий пищевой, металлургической, химической промышленности, производства сульфатной целлюлозы).

Согласно проведенному исследованию (таблица 2) следует, что наибольшая концентрация сульфатов наблюдалась в 2016 г. (30,201 мг/л), наименьшая – в 2013 г. (18,428 мг/л).

7. Химическое потребление кислорода (ХПК)

ХПК – показатель содержания органических веществ в воде, выражается в миллиграммах кислорода (или другого окислителя в пересчете на кислород), пошедшего на окисление органических веществ, содержащихся в литре (1 дм³) воды. Является одним из основных показателей степени загрязнения питьевых, природных и сточных вод органическими соединениями [6].

Согласно данным, приведенным в таблице 2, следует, что наибольшее количество ХПК наблюдалось в 2016 г. (153,905 мг О₂/дм³). Наименьшее значение данного показателя наблюдалось в 2015 г. (71,034 мг О₂/дм³).

8. Сухой остаток

Одним из основных показателей качества питьевой воды является сухой остаток, то есть степень минерализации воды.

Сухой остаток характеризует общую загрязненность сточных вод органическими и минеральными примесями в различных агрегативных состояниях (в мг/л). Определяется этот показатель после выпаривания и дальнейшего высушивания при $t = 105^{\circ}\text{C}$ пробы сточной воды. После прокаливания (при $t = 600^{\circ}\text{C}$) определяется зольность сухого остатка. По этим двум показателям можно судить о соотношении органической и минеральной частей загрязнений в сухом остатке [7].

Данные, приведенные в таблице 2, свидетельствуют о том, что наибольшее количество сухого остатка наблюдалось в 2015 г. (417,030 мг/л), наименьшее – в 2016 г. (266,591 мг/л).

9. Хлориды

Количество хлоридов в сточных водах не имеет существенного значения ни для физико-химических процессов очистки воды, ни для биохимических. Можно говорить лишь о верхнем пределе концентрации хлоридов, которым определяется возможность существования бактерий. По данным разных исследователей, порог существования микроорганизмов определен в 5000-20000 мг/л хлоридов. Такие высокие концентрации хлоридов в сточных водах города практически не встречаются и наблюдаются лишь в отдельных видах производственных стоков, в частности в стоках нефтехимических производств. В городских стоках концентрация хлоридов находится на уровне 150-300 мг/л.

Согласно данным, приведенным в таблице 2, следует, что наибольшие концентрации данный показатель достигал в 2015 г. (507,653 мг/л), наименьшей – в 2014 г. (31,925 мг/л).

Заклученне

• Количество отбираемых проб из коллекторов г. Гомеля и Гомельского района в период с 2013 по 2016 год увеличивалось, однако удельный вес положительных проб оставался практически неизменным, что, вероятно, связано с одним и тем же источником загрязнения.

• По данным химического исследования сточных вод города Гомеля и Гомельского района установлено, что в 2013–2016 гг. наблюдалась наибольшая концентрация следующих химических веществ:

- железо (наибольшая концентрация – в 2014 г., наименьшая – в 2013 г.);
- биологическое потребление кислорода (наибольшее потребление – в 2013 г., наименьшее – в 2014 г.);
- “азотистая триада” (концентрация азота аммонийного и нитратов была максимальной в 2013 г., нитритов – в 2015 г. Минимальные концентрации приведенных веществ наблюдались: для нитритов – в 2014 г., для нитратов – в 2015 г., для нитритов – в 2013 г.);
- взвешенные вещества (концентрация была максимальной в 2016 г., минимальна – в 2013 г.);
- ортофосфаты / полифосфаты (концентрация ортофосфатов и полифосфатов достигала максимума в 2013 г., минимума – в 2016 г.);
- сульфаты (наибольшая концентрация сульфатов наблюдалась в 2016 г., наименьшая – в 2013 г.);
- сухой остаток (наибольшее количество сухого остатка наблюдалось в 2015 г., наименьшее – в 2016 г.);
- химическое потребление кислорода (наибольшее количество ХПК наблюдалось в 2016 г., наименьшее значение данного показателя – в 2015 г.);
- хлориды (наибольшей концентрации данный показатель достиг в 2015 г., наименьшей – в 2014 г.).

Употребление данной воды для любых целей является небезопасным.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Сероокая, Т. И.* Санитарно-бактериологический, санитарно-вирусологический и санитарно-паразитологический анализ воды поверхностных водных объектов: инструкция по применению / Т. И. Сероокая [и др.]; Респ. центр гигиены, эпидемиологии и общ. здоровья [и др.]. – Минск, 2009. – 51 с.
2. Национальный Интернет-портал Республики Беларусь [Электронный ресурс] / ГУ “Минский областной центр гигиены, эпидемиологии и общественного здоровья”. – Минск. – Режим доступа: <http://gigiena.minsk-region.by/gu/obraz/statyi?id=1064>. – Дата доступа: 09.01.2018.
3. *Муравьев, А. Г.* Руководство по определению показателей качества воды полевыми методами / А. Г. Муравьев. – 3-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Кримас+, 2004. – 248 с.
4. *Азевич, З. Ф.* Руководство к практическим занятиям по определению по методам санитарно-гигиенических исследований: учеб. пособие / З. Ф. Азевич, А. И. Громов, А. А. Галич [и др.]; под ред. Л. Г. Плодуновой. – Москва: Медицина, 1990. – 304 с.: ил.
5. *Клименко, А. И.* Удаление фосфора и процессы энергосбережения при химико-биологической очистке сточных вод / А. И. Клименко. – С. 114–118.
6. *Лурье, Ю. Ю.* Аналитическая химия промышленных сточных вод. – Москва: Химия, 1984. – С. 73–81.
7. *Комиссаров, А. В.* Методические указания по выполнению лабораторных работ (часть 2) / А. В. Комиссаров. – Орел: ОрелГТУ, 1996.

Поступила в редакцию 29.01.2018 г.

Контакты: elena.degtyarova@tut.by (Дегтярева Елена Ивановна)

Degtyaryova E., Naumenko E., Sotnikova V., Volchek V. CHARACTERISTICS OF WASTEWATER COMPOSITION SELECTED FOR MICROBIOLOGICAL AND CHEMICAL RESEARCH IN GOMEL AND GOMEL DISTRICT FROM 2013 TO 2016.

The article presents the data of a retrospective analysis of the microbiological and chemical composition of sewage taken from reservoirs located in the city of Gomel and Gomel District from 2013 to 2016.

Practically unchanged amounts of positive water samples taken from the wastewater sewers of the region under study allow to state the existence of a constant source of fecal pollution between 2013 and 2016.

It has been established that the microbiological and chemical composition of wastewater in this region is unsafe for the population health (especially children) living in the study area, therefore, the use of this water for any purpose is not recommended.

Keywords: sewage, Gomel, Gomel District, microbiological composition, chemical composition.

УДК 504.3.054:574.21:581.491(476.6)

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТЬИЧНОГО АППАРАТА БЕРЕЗЫ ПОВИСЛОЙ (*BETULA PENDULA*) В ЗОНЕ ВЛИЯНИЯ ВЫБРОСОВ ЩЕЛОЧНОГО ТИПА

М. Н. ВАШКЕВИЧ

научный сотрудник

Центральный ботанический сад Национальной академии наук Беларуси

П. Н. БЕЛЫЙ

кандидат биологических наук, ведущий научный сотрудник

Центральный ботанический сад Национальной академии наук Беларуси

Введение. Изучение количественных характеристик устьичного аппарата растений относятся к одному из наиболее информативных, наглядных и простых в применении в практике мониторинговых исследований. Цель настоящей работы – изучение количественных характеристик устьичного аппарата березы повислой (*Betula pendula* Roth) как одного из критериев морфологической устойчивости растений и потенциального индикатора техногенной нагрузки в зоне влияния выбросов щелочного типа.

Материал и методы. Объектом исследования являлась береза повислая в пределах заложённых временных пробных площадей вокруг предприятий по производству цемента на территории Гродненской и Могилевской областей. Изучение устьичного аппарата проводили методом отпечатков по Полаччи.

Результаты и их обсуждение. Установлено изменение числа устьиц и их размеров у березы повислой в условиях повышенной атмосферической нагрузки. У всех исследованных образцов, отобранных в зонах влияния выбросов, проявлялась “классическая” ответная реакция, выражающаяся в возрастании плотности устьиц в условиях атмосферного загрязнения. Размерные характеристики замыкающих клеток в условиях загрязнения не всегда показывали четко выраженные различия в сравнении с фоновыми.

Заключение. Изученные показатели (плотность устьиц, размеры устьиц) отражают реакцию древесных растений на степень загрязнения окружающей среды в условиях щелочного загрязнения и их можно рекомендовать, как для оценки состояния лесных сообществ, примыкающих к источникам загрязнения, так и защитных зеленых насаждений (в системе мониторинга урбоэкосистем).

Ключевые слова: экологический мониторинг, *Betulaceae*, эпидермальный комплекс листа, цементное производство, Волковысский район, Костюковичский район.

Введение

Изучение динамики флоры, прогнозирование процессов развития экосистем – важнейшая задача, которая позволяет осуществить один из вариантов биомониторинга, наблюдение за состоянием биологического разнообразия растений, так как они являются важнейшим санитарно-гигиеническим, градостроительным и эстетическим компонентом ландшафта. Цементная промышленность – базовая отрасль в комплексе отраслей, производящих строительные материалы. Роль цемента в современном строительстве очень велика, его ничем невозможно равноценно заменить. Несмотря на всю важность цементного производства, оно имеет ряд недостатков, в том числе, и в экологическом

плане. Прежде всего, она характеризуется значительными объемами как твердых, так и газообразных загрязняющих веществ. Количество пыли, ежегодно осаждающейся на поверхности ассимилирующих органов деревьев и кустарников, почвы и живого напочвенного покрова, может достигать 10% от всего производства цемента и составлять до 0,25 т на 1 км² [1]. Цементная пыль содержит от 10 до 40% кальция в виде оксида, карбоната, легкогидролизующихся силикатов, до 2,0–2,2% калия и характеризуется высокой мелиорирующей способностью, особенно на кислых почвах легкого гранулометрического состава [2]. Выбросы цементных производств оказывают влияние на все компоненты природной среды. Цементные частицы имеют слабощелочную реакцию, и при взаимодействии с осадками образуется щелочь, нарушающая биохимические процессы в хлоропластах, а образующаяся впоследствии цементная корка резко нарушает тепловой баланс органов ассимиляции и увеличивает потери растений на дыхание [3]. Поэтому по степени фитотоксичности некоторые исследователи [4] располагают цементную пыль сразу за пылью цинкового и алюминиевого производств.

Одним из главных индикаторов влияния промышленных выбросов на окружающую природную среду является растительность, так как именно она, благодаря высокой чувствительности к антропогенному воздействию, первой принимает на себя воздействие техногенного пресса. Пылевые частицы забивают устьичный аппарат растений, приводят к ухудшению их жизненного состояния, что отражается в темпах роста и развития растений [5]. Изучению влияния на древесной и их компоненты техногенных загрязнителей, имеющих кислую химическую реакцию, у нас в республике посвящены многочисленные исследования [6–8]. Оценка влияния промышленных щелочных загрязнений на все компоненты лесных биогеоценозов в Беларуси ранее не выполнялась.

В оценке степени техногенного воздействия на природные экосистемы нельзя рассчитывать лишь на физико-химические показатели атмосферного воздуха и почв, т.к. эти данные не дают полного представления о состоянии окружающей среды. Необходимо использовать принципы биомониторинга, которые предполагают проведение комплексных исследований с применением, в качестве тест-объектов, живых организмов, у которых прослеживается четкая закономерность изменения определенных показателей, в зависимости от интенсивности техногенной нагрузки [9].

Для листьев цветковых растений свойственен закономерно организованный микрорельеф поверхности. Такая ситуация может свидетельствовать как о случайном проявлении того или иного типа микрорельефа, так и о его тканеспецифическом характере, когда в ходе гистогенеза эпидермы складываются определенные морфогенетические и морфофункциональные корреляции, отражением которых и является микрорельеф [10]. Стабильность микрорельефа, по мнению некоторых исследователей [11; 12], говорит о неслучайном характере его развития. Указанная особенность позволяет использовать характеристики организации микрорельефа в качестве одного из диагностических признаков в различного рода исследованиях [13–17]. К примеру, широко используются такие признаки, как тип устьичного аппарата и устьичный индекс, размер и форма клеток [18; 19].

Длительное или постоянное воздействие техногенных загрязнителей на растительность вызывает серьезные изменения анатомического строения листьев растений и увеличение их ксерофитизации, которое проявляется в изменении размеров листьев, клеток, толщины эпидермиса, мезофилла, в более мощном развитии механической ткани, увеличении числа устьиц на 1 мм² поверхности листа, уменьшении размеров устьиц [20; 21]. Указанные признаки используются растениями для обеспечения устойчивости к неблагоприятным техногенным факторам [22]. Отмеченные изменения ассимиляционных органов (повышенная плотность размещения устьиц на листовой пластинке, уменьшение их размеров)

являются следствием подавления стадии растяжения клеток из-за недостатка ассимилянтов и нарушения гормональной регуляции роста, вызванного неблагоприятными условиями, в том числе высокими уровнями загрязнения атмосферного воздуха [23; 24]. По этим же причинам у растений происходит замедление роста осевых и боковых побегов, листьев, в целом, хвои (снижение ее сухого и сырого веса, площади), изреживание кроны деревьев вследствие повреждения и опадения листьев, уменьшение возраста листьев на дереве [25]. Степень описанных изменений в анатомическом строении ассимиляционных органов зависит от концентрации и токсичности загрязняющих веществ, а также от длительности их действия и чувствительности видов. Изучение количественных характеристик устьичного аппарата растений относят к одному из наиболее информативных, наглядных и простых в применении в практике мониторинговых исследований. При этом к признакам, наиболее часто используемым для оценки, можно отнести количество устьиц, приходящихся на 1 мм² поверхности листовой пластинки и размеры замыкающих клеток устьиц. Использование указанных стоматографических характеристик листа подкреплено еще и тем, что выявлена статистически достоверная связь между газоустойчивостью растений и числом устьиц на 1 мм² поверхности листьев [26]. Так, у березы повислой в условиях промышленного загрязнения в листовом аппарате, наряду со снижением суммы хлорофиллов, каротиноидов и снижением фотосинтетической активности, наблюдается явление ксероморфоза, проявляющееся в увеличении количества устьиц на 1 мм², а также числа закрытых устьиц [27]. В работе [28] установлено, что устьичный индекс растений березы повислой, произрастающих в черте г. Красноярска, выше, чем у деревьев, произрастающих на удалении 25 км от городской черты; а размеры замыкающих клеток устьиц меньше, нежели в незагрязненных условиях. Кроме того, в этой же работе показано, что влияние техногенных нагрузок проявляется также в ослаблении зависимости между стоматографическими признаками березы повислой.

Применение характеристики устьичного аппарата растений в исследовании влияния выбросов цементных производств представляется полезным в плане того, что не всегда ответные реакции растений на данный тип загрязнения являются однонаправленными и, кроме того, проявляются не сразу, а в течение длительного периода воздействия. Так, попытки экспериментального внесения высоких доз (3–20 т/га) извести в качестве мелиоранта в целях поддержания газоустойчивости и восстановления лесных экосистем часто приводили к отрицательным результатам на уровне всего биогеоценоза: происходили коренные изменения в структуре популяций грибов, бактерий, почвенной фауны, происходило полное исчезновение мохообразных и лишайников, трансформировался видовой состав напочвенного покрова (повышалась доля участия степных видов) [29]. Влияние известкования на продуктивность древостоя было не однонаправленным. Положительный эффект чаще всего наблюдался в молодых древостоях, отрицательный – в старовозрастных. Часто положительное влияние на древостой было краткосрочным: положительный эффект в последствии пропадал независимо от вносимой дозы (2–10 т/га) [30].

Цель исследования – изучение количественных характеристик устьичного аппарата березы повислой (*Betula pendula Roth*) как одного из критериев морфологической устойчивости растений и потенциального индикатора техногенной нагрузки (на основании морфологических изменений устьиц) в зоне влияния выбросов щелочного типа ОАО “Красносельскстройматериалы” (Гродненская обл.) и ОАО “Белорусский цементный завод” (Могилевская обл.).

Материал и методы исследований

Исследования осуществлялись на территории Гродненской и Могилевской областей, где расположены промышленные предприятия по производству цемента –

ОАО “Красносельскстройматериалы” (КСМ) и ОАО “Белорусский цементный завод” (БЦЗ). КСМ – старейшее и самое большое предприятие цементной промышленности Беларуси по многим параметрам, но, в первую очередь, по объему производства цемента и ширине ассортимента выпускаемой продукции. В мае 2012 г. введены новые линии по производству цемента “сухим” способом, поэтому в структуре производства цемента 90% приходится на портландцемент, около 10% – на другие его виды. Особенность Белорусского цементного завода заключается в том, что производство цемента здесь ведется “сухим” способом на мергелях 22–32%-ой влажности, которые добываются в собственных карьерах “Высокое” и “Коммунары западные”.

Объектом исследования являлась береза повислая – одна из наиболее распространенных лесообразующих пород на территории Республики Беларусь.

Для получения комплексной информации о влиянии хронического щелочного загрязнения воздуха на состояние природной среды, вокруг заводов КСМ и БЦЗ была заложена серия временных пробных площадей с преобладанием сосны обыкновенной III–IV класса возраста. Контрольные стационары, имеющие сходные лесорастительные условия и таксационные характеристики, располагались для КСМ – в пределах Национального парка “Беловежская Пуща” (вблизи северо-восточной границы заповедной территории) при удаленности от завода около 40 км (52°54'39"N, 24°20'55"E), для БЦЗ – на территории Хотимского лесничества ГЛХУ “Костюковичский лесхоз” при удаленности от завода около 40 км (53°20'60"N, 32°35'35"E) (таблица 1). Пробы растительного материала были отобраны на различном удалении от КСМ и БЦЗ по трем направлениям: север, юг и юго-восток. С целью нивелирования влияния условий местопроизрастания растений на изучаемые характеристики эпидермального комплекса березы повислой растительные образцы для анализа отбирались преимущественно в пределах организованных временных стационаров. В каждой исследуемой точке листья отбирались как минимум с 3-х особей, находящихся в генеративном онтогенетическом состоянии. Для анализа отбирали взрослые, закончившие фазу интенсивного роста, листья.

Таблица 1 – Места отбора растительных образцов для определения показателей состояния устьичного аппарата

П/П	Расположение
БЦЗ, Ю, 50 м	Могилевская обл., Костюковичский р-н, БЦЗ, 50 м к югу от завода
БЦЗ, Ю, 100 м	Могилевская обл., Костюковичский р-н, БЦЗ, 100 м к югу от завода
БЦЗ, Ю, 150 м	Могилевская обл., Костюковичский р-н, БЦЗ, 150 м к югу от завода
БЦЗ, Ю, 200 м	Могилевская обл., Костюковичский р-н, БЦЗ, 200 м к югу от завода
БЦЗ, Ю, 700 м	Могилевская обл., Костюковичский р-н, БЦЗ, 700 м к югу от завода
БЦЗ, Ю, 1000 м, опушка	Могилевская обл., Костюковичский р-н, БЦЗ, 1 км к югу от завода, опушка леса
БЦЗ, Ю, 1100 м	Могилевская обл., Костюковичский р-н, БЦЗ, 1 км 100 м к югу от завода
БЦЗ, ЮВ, 100 м	Могилевская обл., Костюковичский р-н, БЦЗ, 100 м к юго-востоку от завода
БЦЗ, ЮВ, 1700 м, опушка	Могилевская обл., Костюковичский р-н, БЦЗ, 1 км 700 м к юго-востоку от завода, опушка леса
БЦЗ, ЮВ, 1750 м, за опушкой	Могилевская обл., Костюковичский р-н, БЦЗ, 1 км 750 м к юго-востоку от завода, за опушкой леса
БЦЗ, ЮВ, 2000 м	Могилевская обл., Костюковичский р-н, БЦЗ, 2 км к юго-востоку от завода
БЦЗ, контроль	Могилевская обл., Хотимский р-н, ГЛХУ “Костюковичский лесхоз”, Хотимское л-во, 40 км к востоку от БЦЗ

Окончание таблицы 1

ПП	Расположение
КСМ, Ю, 50 м	Гродненская обл., Волковысский р-н, КСМ, 50 м к югу от завода
КСМ, Ю, 100 м	Гродненская обл., Волковысский р-н, КСМ, 100 м к югу от завода
КСМ, Ю, 350 м	Гродненская обл., Волковысский р-н, КСМ, 350 м к югу от завода
КСМ, ЮВ, 30 м	Гродненская обл., Волковысский р-н, КСМ, 30 м к юго-востоку от завода
КСМ, ЮВ, 150 м	Гродненская обл., Волковысский р-н, КСМ, 150 м к юго-востоку от завода
КСМ, ЮВ, 750 м	Гродненская обл., Волковысский р-н, КСМ, 750 м к юго-востоку от завода
КСМ, ЮВ, 1500 м	Гродненская обл., Волковысский р-н, КСМ, 1500 м к юго-востоку от завода
КСМ, С, 350 м	Гродненская обл., Волковысский р-н, КСМ, 350 м к северу от завода
КСМ, С, 500 м	Гродненская обл., Волковысский р-н, КСМ, 500 м к северу от завода
КСМ, С, 1000 м	Гродненская обл., Волковысский р-н, КСМ, 1 км к северу от завода
КСМ, контроль	Гродненская обл., Свислочский р-н, ГПУ «НП “Беловежская Пуща”», Порозовское л-во

Из каждой партии листьев рандомизированно отбиралось 10 экземпляров, у которых в дальнейшем изучались стоматографические характеристики эпидермиса. Изучение устьичного аппарата проводили методом отпечатков по Полаччи [31]. Слепки эпидермы предварительно просматривали под микроскопом Daffodil MCX100 (Micros, Austria) при увеличении 10×10 в проходящем свете, затем фотографировали с помощью цифровой камеры Levenhuk M1400 PLUS (Levenhuk, USA). Учет количества устьиц, приходящихся на 1 мм^2 поверхности листовой пластинки, проводили на нижней стороне листа. Для получения достоверных данных о числе устьиц, приближающихся к средним значениям, изучали слепки средней трети части листа между краем и центральной жилкой [32]. Помимо подсчета количества устьиц на единицу площади исследовали еще 2 признака: длину и ширину устьиц. Замеры устьиц осуществляли на микрофотографиях с помощью программы Levenhuk ToupView (Levenhuk, USA). Определение количества устьиц в эпидермисе листа производилось в 30-кратной повторности, размеров устьиц – в 50-кратной повторности для каждого образца. Статистическую обработку проводили с помощью общепринятых методов [33].

Результаты и их обсуждение

В ходе проведенных исследований было установлено, что у березы повислой по мере возрастания уровня техногенной нагрузки в некоторых случаях наблюдается тенденция к увеличению устьичного количества устьиц. Так, по мере приближения к заводу КСМ в юго-восточном направлении, количество устьиц возрастало с $110,90\pm 3,79$ шт/мм² (на расстоянии 750 м от завода) и достигало максимальных значений в непосредственной близости от завода – $139,40\pm 10,66$ шт/мм² (на расстоянии 30 м) (таблица 2). Несмотря на то, что в южном направлении от завода КСМ данная закономерность не наблюдалась, значение показателей плотности устьиц было достоверно выше, нежели в контрольных условиях.

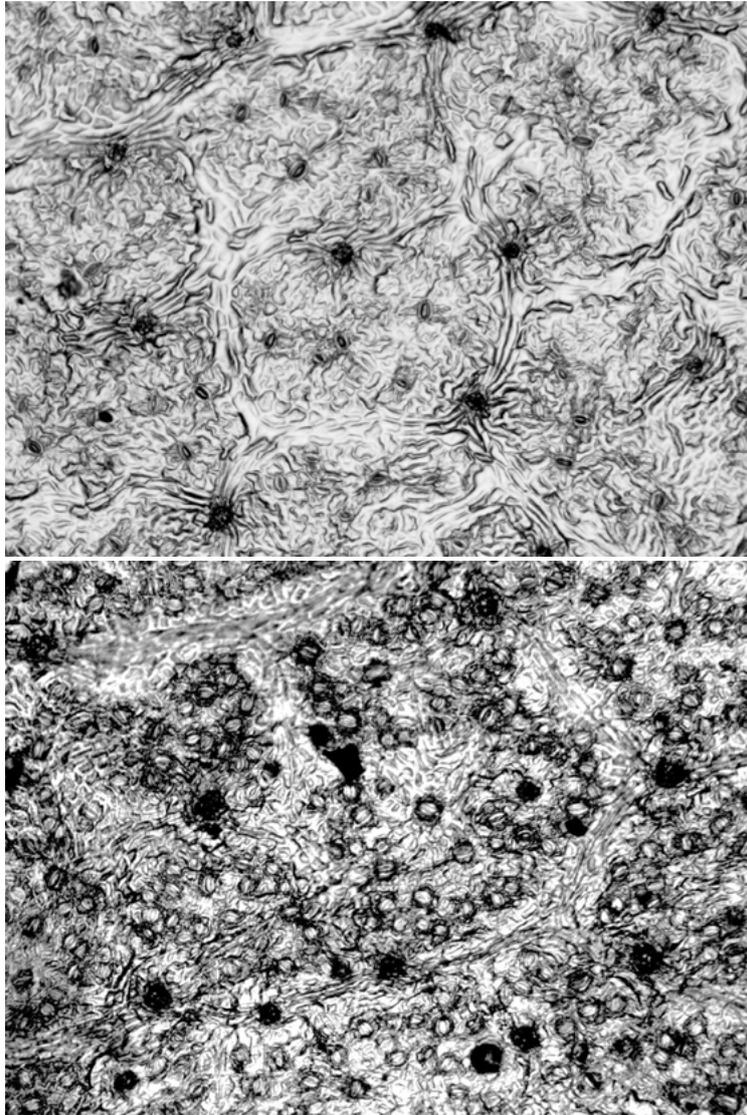
Таблица 2 – Количественные характеристики устьичного аппарата березы повислой на различном удалении от цементных заводов

П/П	Количество устьиц, шт/мм ² , среднее	Размеры устьиц, мкм	
		Длина	Ширина
КСМ, Ю, 100 м	115,40±7,30	29,50±0,53*	19,80±0,48*
КСМ, Ю, 350 м	121,80±7,09	32,30±0,64*	20,80±0,43*
КСМ, ЮВ, 30 м	139,40±10,66	33,40±0,78	21,30±0,53*
КСМ, ЮВ, 150 м	131,10±5,67	37,60±0,87	26,16±0,55
КСМ, ЮВ, 750 м	110,90±3,79	37,80±0,66	23,98±0,44
КСМ, С, 350 м	128,50±3,05	32,30±0,74*	21,24±0,49*
КСМ, С, 500 м	139,30±6,63	32,50±0,75*	22,67±0,38
КСМ, контроль	93,20±4,43	31,00±0,58	20,12±0,51
БЦЗ, Ю, 50 м	138,52±6,62	34,32±0,53	22,11±0,36
БЦЗ, Ю, 100 м	111,76±2,41	31,66±0,78	18,62±0,47*
БЦЗ, Ю, 150 м	131,86±4,53	34,44±0,92	19,80±0,55
БЦЗ, Ю, 200 м	126,48±3,09	33,50±0,66	21,12±0,53
БЦЗ, Ю, 700 м	127,10±4,36	32,27±0,88	20,36±0,45
БЦЗ, Ю, 1000 м, опушка	119,71±2,28	30,15±0,71	19,42±0,36
БЦЗ, Ю, 1100 м	109,33±2,32	32,23±0,91	22,04±0,64
БЦЗ, ЮВ, 100 м	134,81±3,23	34,77±0,54	23,94±0,59
БЦЗ, ЮВ, 1700 м, опушка	146,86±2,86	34,27±0,57	21,13±0,37
БЦЗ, ЮВ, 1750 м, за опушкой	121,62±4,77	35,07±0,65	21,59±0,37
БЦЗ, ЮВ, 2000 м	122,76±3,38	35,90±0,72	21,05±0,34
БЦЗ, контроль	104,62±3,38	27,01±0,51	17,57±0,48

Примечание: * – статистически не значимые по t-критерию Стьюдента различия с контролем

Сходная тенденция повышения значений плотности устьиц была характерна также для березы повислой, произрастающей в окрестностях БЦЗ (таблица 2): в южном направлении от завода количество устьиц варьировало от 109,33±2,32 (на удалении 1 км 100 м) до 138,52±6,62 шт/мм² (в непосредственной близости от завода – 50 м), в юго-восточном направлении количество устьиц на единицу поверхности повышалось по мере приближения к источнику выбросов от 122,76±3,38 (2 км от завода) до 134,81±3,23 шт/мм² (100 м).

Необходимо отметить, что количество устьиц достигало минимальных значений именно в контрольных условиях Порозовского лесничества Беловежской Пуши (93,20±4,43 шт/мм²), а также Хотимского лесничества Костюковичского лесхоза (104,62±3,38 шт/мм²) и было достоверно ниже, чем в окрестностях изученных цементных заводов (таблица 2, рисунок). Очевидно, что для нормализации газообмена в условиях повышенных уровней загрязнения плотность устьиц возрастает.



Эпидермис нижней стороны листа *Betula pendula* в фоновых условиях (вверху)
и в зоне воздействия выбросов цементных производств (внизу)
(примечание: площадь изображенного фрагмента эпидермиса – 1 мм²)

В отличие от значений плотности устьиц размерные характеристики замыкающих клеток устьичного аппарата березы повислой в условиях загрязнения выбросами КСМ и контрольных условиях не показали значительных различий (таблица 2). Размеры устьиц достоверно отличались от контрольных значений, причем в большую сторону, только в юго-восточном направлении от завода. У деревьев, произрастающих в южном направлении от завода КСМ, не было выявлено достоверных различий в размерных характеристиках устьиц по сравнению с контрольными значениями.

В окрестностях БЦЗ, напротив, значения длины и ширины устьиц оказались значительно больше, чем в контрольных условиях (таблица 2). Вероятно, что данная тенденция

связана с адаптационными механизмами, обеспечивающими большую эффективность в регуляции транспирации растениями (при одновременном увеличении числа устьиц) в условиях техногенного воздействия.

Заключение

Впервые в условиях Беларуси изучены характеристики устьичного аппарата березы повислой в зоне влияния выбросов цементных производств, проведена ординация стоматографических параметров вдоль фактора загрязнения. Установлено изменение числа устьиц и их размеров у березы повислой в условиях повышенной атмосферической нагрузки. У всех исследованных образцов, отобранных в зонах влияния выбросов, проявлялась “классическая” ответная реакция, выражающаяся в увеличении значений плотности устьиц в условиях атмосферного загрязнения. При усилении загрязнения наблюдалось увеличение числа устьиц: с 93 до 139 шт/см² (КСМ) и с 104 до 146 шт/см² (БЦЗ). Данная особенность, очевидно, обусловлена тем, что при повышении уровня загрязнения происходит нарушение процесса газообмена листьев с окружающей средой. Увеличение же количества устьиц на единицу площади может являться компенсаторным механизмом, повышающим эффективность регуляции интенсивности газообмена в условиях техногенной нагрузки.

Размерные характеристики замыкающих клеток устьичного аппарата березы повислой в условиях загрязнения выбросами КСМ и контрольных условиях не показали четко выраженных различий размеров в условиях загрязнения щелочного типа. Только в условиях БЦЗ значения длины и ширины устьиц оказались значительно больше (30,15(35,90)×19,42(21,05) мкм), чем в контрольных условиях (27,01×17,57 мкм). Адаптационный потенциал исследованного вида реализуется на различных структурно-функциональных уровнях организации. При увеличении степени промышленного загрязнения происходит усиление ксероморфности листовой пластинки, проявляющееся в возрастании плотности устьиц. Формирование определенной плотности устьиц и, в некоторых случаях, увеличение их размеров связано прежде всего с обеспечением и регулированием процессов газообмена и транспирации, направленных на поддержание оптимальной продуктивности фотосинтеза в условиях загрязнения.

На основании проведенных исследований можно заключить, что изученные показатели отражают реакцию древесных растений на степень загрязнения окружающей среды в условиях щелочного загрязнения и их можно рекомендовать, как для оценки состояния лесных сообществ, примыкающих к источникам загрязнения, так и защитных зеленых насаждений (в системе мониторинга урбоэкосистем). По изменениям стоматографических характеристик в будущем можно судить о снижении либо повышении уровня техногенной нагрузки. Результаты исследований могут послужить основой при оценке современного состояния растительности и в целом природной среды, а также при разработке научно-практических рекомендаций по защите природной среды в зоне влияния цементных производств.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Оценка удельных выбросов тяжелых металлов по категориям источников. Цементное производство / С. В. Какарека [и др.] // Выбросы тяжелых металлов в атмосферу: опыт оценки удельных показателей. – Минск : Ин-т геолог. наук НАН Беларуси, 1998. – С. 85–94.
2. *Шелуха, В. П.* Изменение сосновых биогеоценозов зоны широколиственных лесов при хроническом воздействии веществ щелочного типа : автореф. дис. ... д-ра с.-х. наук : 06.03.03 ; 03.00.16 / В. П. Шелуха ; Брянская гос. инж.-техн. акад. – Брянск : БГИТА, 2003. – 34 с.
3. *Соколов, Г. И.* Усыхание лесов около г. Сатки Челябинской области от промышленных воздействий АО “Магнезит” / Г. И. Соколов // Влияние атмосферных загрязнений и других

- антропогенных и природных факторов на дестабилизацию состояния лесов Центральной и Восточной Европы : тез. докл. Междунар. науч. конф. : в 2 т. – М. : МГУЛ, 1996. – Т. 2. – С. 35–37.
4. **Griess, O.** Nachweis zusätzlicher Immissionswirkungen durch das DKN-Zoltweg und ihre Quantifizierung in einem Talgebiet des Murwaldes / O. Griess // Mitt. Forstl. Bundesversuchsanst. – Wien, 1980. – 131. – P. 185–188.
 5. **Горчакова, А. Ю.** О сезонном развитии злаков Республики Мордовия / А. Ю. Горчакова // Ботанический журнал. – 2013. – Т. 98. – № 5. – С. 605–621.
 6. Промышленные загрязнения, оценка состояния и оптимизация природной среды городских экосистем / Е. А. Сидорович [и др.] ; под общ. ред. В. Ф. Логинова. – Минск : Белорус. наука, 2007. – 198 с. : ил.
 7. **Сергейчик, С. А.** Экологическая физиология хвойных пород Беларуси в техногенной среде / С. А. Сергейчик, Е. А. Сидорович, А. А. Сергейчик. – Минск : Белорусская наука, 1998. – 198 с.
 8. Техногенное загрязнение лесных экосистем Беларуси / Е. Г. Бусько [и др.] ; под общ. ред. Е. А. Сидоровича. – Минск : Наука и техника, 1995. – 319 с.
 9. **Бухарина, И. Л.** Биоэкологические особенности травянистых и древесных растений в городских насаждениях / И. Л. Бухарина, А. А. Двоглазова. – Ижевск : Удмуртский университет, 2010. – 184 с.
 10. **Паутов, А. А.** Строение и функции перистоматических колец в эпидерме листа цветковых растений / А. А. Паутов, О. В. Яковлева, Ю. О. Сапач // Фундаментальные и прикладные проблемы ботаники в начале XXI века : материалы всероссийской конференции (Петрозаводск, 22–27 сентября 2008 г.). – Ч. 1 : Структурная ботаника. Эмбриология и репродуктивная биология ; редкол.: Т. Б. Батыгина [и др.]. – Русское ботаническое общество, Отделение биологических наук Российской академии наук, Карельский научный центр РАН, Санкт-Петербургский научный центр РАН, Петрозаводский государственный университет. – Петрозаводск : Карельский научный центр РАН, 2008. – С. 67–69.
 11. **Ahmad, K. J.** Cuticular striation in *Cestrum* / K. J. Ahmad // Current science. – 1962. – Vol. 31. – P. 388–390.
 12. **Сапач, Ю. О.** К вопросу о постоянстве микрорельефа поверхности листа цветковых растений / Ю. О. Сапач // Герценовские чтения : материалы межвузовской конференции молодых ученых. – Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена (Герценовский университет). – СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2005. – С. 30–31.
 13. **Dilcher, D. L.** Approaches to the identification of angiosperm leaf remains / D. L. Dilcher // The Botanical review. – 1974. – Vol. 40, № 1. – P. 1–157.
 14. **Stace, C. A.** The taxonomic importance of the leaf surface / C. A. Stace // Syst. Assoc. – 1984. – Vol. 25. – P. 67–94.
 15. **Wu, H.** Comparative observation on leaf anatomy and pollen of *Vernicia* Lour. and *Aleurites* J. R. et G. Forst / H. Wu // Acta phytotaxon. – 1985. – Vol. 23, № 3. – P. 188–191.
 16. **Головнева, Л. Б.** Позднемеловая флора Сибири : дис. ... д-ра биол. наук : 03.00.05 / Л. Б. Головнева ; Ботанический институт им. В. Л. Комарова РАН. – СПб., 2004. – 495 с.
 17. **Veeramahad, R.** Macromorphological and micromorphological studies of four selected *Passiflora* species in Peninsular Malaysia / R. Veeramahad, N. W. Haron // Pak. J. Bot. – 2015. – Vol. 47(2). – P. 485–492.
 18. **Баранова, М. А.** Признаки устьиц в систематике / М. А. Баранова, Т. А. Остроумова // Итоги науки и техники. Сер. Ботаника. – 1987. – Т. 6, вып. 1. – С. 173–192.
 19. **Паутов, А. А.** Структура листа в эволюции тополей / А. А. Паутов. – Санкт-Петербург : Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2002. – 163 с.
 20. **Князева, Е. И.** Газоустойчивость растений в связи с их систематическим положением и морфолого-анатомическими и биологическими особенностями / Е. И. Князева // Дымоустойчивость растений и дымоустойчивые сортаменты : сб. работ / Горьков. гос. ун-т, Акад. коммун. хоз-ва им. К. Д. Памфилова ; под общ. ред. Н. П. Красинского. – Москва-Горький, 1950. – С. 111–179.
 21. **Николаевский, В. С.** Биологические основы газоустойчивости растений / В. С. Николаевский. – Новосибирск : Наука, 1979. – 280 с.

22. **Гетко, Н. В.** Растения в техногенной среде: Структура и функция ассимиляционного аппарата / Н. В. Гетко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 208 с.
23. **Илькун, Г. М.** Загрязнители атмосферы и растения / Г. М. Илькун. – Киев : Наукова думка, 1978. – 248 с.
24. **Ярмишко, В. Т.** Сосна обыкновенная и атмосферное загрязнение на Европейском Севере / В. Т. Ярмишко. – СПб., 1997. – 210 с.
25. **Федорков, А. Л.** Изменчивость анатомического строения хвои сосны и ее устойчивость к техногенному и климатическому стрессу / А. Л. Федорков // Экология. – 2002. – № 1. – С. 70–72.
26. **Николаевский, В. С.** О показателях газоустойчивости растений // Труды Института биологии УФАИ. – 1963. – Вып. 31. – С. 31–33.
27. **Неверова, О. А.** Основные пути изменения жизнедеятельности древесных растений в условиях промышленного города / О. А. Неверова // Экология промышленного производства. – 2001. – № 4. – С. 10–14.
28. **Шемберг, М. А.** Морфо-анатомическая структура городских насаждений березы повислой / М. А. Шемберг, Л. Е. Жарко // Ботанические исследования в Сибири. – 1994. – № 2. – С. 151–156.
29. **Лукина, Н. В.** Оптимизация питательного режима почв как фактор восстановления нарушенных лесных экосистем севера / Н. В. Лукина, В. В. Никонов // Лесоведение. – 1999. – № 2. – С. 57–67.
30. **Павлов, И. Н.** Древесные растения в условиях техногенного загрязнения / И. Н. Павлов ; под ред. Р. Н. Матвеевой. – Улан-Удэ : БНЦ СО РАН, 2005. – 370 с.
31. Практикум по физиологии растений / под ред. И. И. Гунара. – М. : Колос, 1972. – 168 с.
32. **Баранов, П. А.** К методике количественно-анатомического изучения растения. Распределение устьиц / П. А. Баранов // Бюл. Среднеаз. гос. ун-та. – 1924. – № 7. – С. 1–6.
33. **Лакин, Г. Ф.** Биометрия : учеб. пособие / Г. Ф. Лакин ; под ред. В. Е. Дерябина. – М. : Высшая школа, 1990. – 352 с.

Поступила в редакцию 28.02.2019 г.

Контакты: marivashkevich@yandex.by (Вашкевич Марина Николаевна)

pavel.bely@tut.by (Белый Павел Николаевич)

Vashkevich M., Bely P. QUANTITATIVE CHARACTERISTICS OF SILVER BIRCH (*BETULA PENDULA*) STOMATAL APPARATUS UNDER THE INFLUENCE OF ALKALINE EMISSIONS.

Introduction. *The study of the quantitative characteristics of the stomatal apparatus of plants is considered to be one of the most informative, visual and easy to use in the practice of monitoring studies. The aim of the work is to study the quantitative characteristics of the stomatal apparatus of silver birch (*Betula pendula* Roth) as one of the criteria of plant morphological stability and a potential indicator of technogenic load in the zone under the influence of alkaline emissions.*

Material and methods. *The object of the study is the hanging birch within the temporarily laid test plots around the cement production enterprises in Grodno and Mogilev regions. To study stomatal apparatus the method of fingerprints by Polacchi has been used.*

Findings and their discussion. *The changes in the number of silver birch stomata and their size under the elevated atmospheric load have been found. All the studied samples taken in the emission zones demonstrated a “classical” response resulting in an increase in the stomatal density under the influence of atmospheric pollution. The size characteristics of the guard cells under pollution conditions did not always display clear differences in comparison with the background ones.*

Conclusion. *The studied indicators (stomatal density, stomatal size) reflect the reaction of woody plants to the degree of environmental pollution (alkaline pollution) and can be recommended for assessing the state of forest communities and protective green plantations adjacent to the sources of pollution.*

Keywords: ecological monitoring, *Betulaceae*, leaf epidermal complex, cement production, Volkovysk District, Kostyukovichy District.