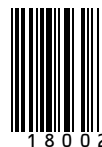


ISSN 2409-3777



ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта
імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

2 (52)
2018

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонок (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс “Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова” ўключаны ў РІНЦ
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),
ліцэнзійны дагавор № 811–12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

ЗМЕСТ

ГАЛЬМАК А. М. О тотальной неассоциативности полиадических операций	4
МОЖЕЙ Н. П. Симметрические однородные пространства неразрешимых групп Ли и связности на них	15
РОГОЛЕВ Д. В. К анализу периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати	23
БОНДАРЕВ А. Н. Конструктивный анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова на основе правосторонней декомпозиции	33
КАШПАР А. И. О построении решения краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка	45
ГАЛЬМАК А. М., КУЛАЖЕНКО Ю. И. О не n -полуабелевых полиадических группоидах специального вида	55
ЮРЕВИЧ В. А. Излучение тонкого инвертированного слоя в условиях квазирезонансной поляризации	62
МАЛЫШЕВ В. Л. Испарение жидкости из сферического объема через одноуровневые противолежащие капилляры в поле сил тяжести	70
ЛЕСОТА А. В., РУБАНИК В. В., РУБАНИК В. В. мл. Термокинетическая ЭДС в медицинском сплаве никелида титана Ti-50,8at.%Ni	79
СИМАНОВИЧ Н. М., ОСТРИКОВ О. М., КУЛЬГЕЙКО М. П. Влияние скорости скрайбирования на особенности формирования двойников в монокристалле висмута	87
БЕЛЫЙ П. Н., ЦУРИКОВ А. Г., ГОЛУБКОВ В. В. Ключ для определения лишайников рода <i>Xanthoparmelia</i> (Parmeliaceae, Ascomycota) Беларуси	98
БАЛАЕВА-ТИХОМИРОВА О. М., КАЦНЕЛЬСОН Е. И. Морфометрические показатели пресноводных легочных моллюсков природных водоемов Витебской области	104
МАРТУСЕВИЧ Н. О. Динамика сенсомоторных реакций на различных этапах тренировочного процесса у спортсменов-гребцов	111

О ТОТАЛЬНОЙ НЕАССОЦИАТИВНОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

А. М. ГАЛЬМАК

доктор физико-математических наук

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

В статье изучаются тотально неассоциативные полиадические операции вида $\eta_{s, \sigma, k}$, которые определяются на k -й декартовой степени n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η . В частности, доказано существование тотально неассоциативных l -арных квазигрупп вида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, где $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $l = s(n-1) + 1$.

Ключевые слова: полиадическая операция, n -арный группоид, n -арная группа, ассоциативность.

1. Введение

В работе [1] Э. Поста определил и изучал две полиадические операции. Одна из них была определена им на $(m-1)$ -й декартовой степени симметрической группы всех подстановок конечного множества из n элементов. Вторую операцию Э. Поста определил на $(m-1)$ -й декартовой степени полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Обе отмеченные полиадические операции Э. Поста имеют арность, равную m , и в определении каждой из них неявно присутствует цикл $\sigma = (12 \dots m-1)$.

Конструкция, которую Э. Поста использовал при построении своих m -арных операций, допускает различные обобщения. Одно из таких обобщений может быть осуществлено заменой в конструкции Э. Поста конкретных – симметрической и полной линейной групп, произвольной группой и даже произвольным группоидом. Еще одно обобщение конструкции Э. Поста можно осуществить, заменив в ней цикл $\sigma = (12 \dots m-1)$ любой подстановкой из S_{m-1} . Указанные обобщения реализованы в статье [2]. В ней для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ на k -й декартовой степени A^k полугруппы A определена l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$, которая при

$$k = m-1, l = m, \sigma = (12 \dots m-1), A = S_n$$

совпадает с операцией Э. Поста, определенной на декартовой степени S_n^{m-1} симметрической группы S_n , а при $A = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ и тех же k, l и σ операция $[\]_{l, \sigma, k}$ совпадает с операцией Э. Поста,

определенной на декартовой степени $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathbb{C})$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Изучению операции $[\]_{l, \sigma, k}$ посвящена книга [3].

Обе отмеченные выше m -арные операции Э. Поста и почти все их обобщения характеризуются тем, что в определении каждой из них присутствует бинарная операция. В связи с этим возникла необходимость определения и изучения обобщений, в которых бинарная операция заменяется полиадической операцией арности больше двух. К числу таких обобщений относится полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$, которая была определена в [4] на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η .

В [4] доказано, что если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma' = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ также является ассоциативной. В связи с этим результатом возникает естественная задача нахождения достаточных условий неассоциативности

2. Предварительные сведения

n -Арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют *ассоциативной*, если в нем выполняется каждое из следующих $n - 1$ тождеств

Более кратко, n -арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют ассоциативной, в нем для любого $i = 2, \dots, n$ выполняется тождество

Если указанное тождество выполняется для $i = n$, то n -арную операцию η называют *полуассоциативной*. Таким образом, n -арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют *полуассоциативной*, если в нем выполняется тождество

Понятно также, что следствиями указанных выше $n - 1$ тождеств, определяющих ассоциативность n -арной операции η , являются следующие тождества

где $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Если $i \neq j$, то таких тождеств ровно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Согласно W. Dörnte [6], универсальная алгебра $\langle A, \eta \rangle$ с одной n -арной ($n \geq 2$) операцией $\eta: A^n \rightarrow A$ называется n -арной группой, если операция η ассоциативна и для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и всех $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо уравнение

n-Арной квазигруппой называют универсальную алгебру $\langle A, \eta \rangle$, в которой для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и всех $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо последнее уравнение.

Ясно, что группы (полугруппы, квазигруппы) – это n -арные группы (n -арные полугруппы, n -арные квазигруппы) при $n = 2$.

$$\eta_{l, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) = \eta_{l, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) =$$

$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)} \\ &\eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \\ &\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}) \dots))). \end{aligned}$$

При $s = 1$ l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, \sigma, k}$.

Если η – бинарная операция, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с l -арной операцией [] из [3].

Явный вид l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ описывает следующая

Теорема 2.1 [4]. Если

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l, \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -я компонента y_j находится по формуле

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{2(n-1)\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ &\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Замечание 2.1. Если n -арная операция η ассоциативна, то (2.2) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Теорема 2.2 [4]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.

Лемма 2.1 [3, 7]. Пусть A – множество, $k \geq 2$, σ – подстановка из S_k , f_σ – преобразование декартовой степени A^k по правилу

$$f_\sigma: (x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}).$$

Тогда:

1) f_σ – биекция;

2) для любого $i \geq 2$ преобразование f_σ^i множества A^k осуществляется по правилу

$$f_\sigma^i: (x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_{\sigma^i(1)}, x_{\sigma^i(2)}, \dots, x_{\sigma^i(k)});$$

3) $f_\sigma^i = f_{\sigma^i}$ для любого $i \geq 2$;

4) если $a \in A$, $\mathbf{a} = (\underbrace{a, \dots, a}_k)$, то $\mathbf{a}^{f_\sigma} = \mathbf{a}$;

5) если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, то f_σ – автоморфизм n -арного группоида $\langle A^k, \eta \rangle$ с n -арной операцией η , которая определяется покомпонентно с помощью операции η :

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \eta((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11} \dots x_{n1}), \dots, \eta(x_{1k} \dots x_{nk})); \end{aligned}$$

в частности, если $\langle A, * \rangle$ – группоид, то f_σ – автоморфизм группоида $\langle A^k, * \rangle$ с операцией

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_k) * (y_1, \dots, y_k) = (x_1 * y_1, \dots, x_k * y_k).$$

Лемма 2.2 [5]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, σ – подстановка из S_k ,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l.$$

Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(x_1 x_2 \dots x_l) = \eta(x_1 x_2^{\sigma} \dots x_{l-1}^{\sigma^{l-2}} x_l^{\sigma^{l-1}}) = \eta(x_1 x_2^{\sigma} \dots x_{l-1}^{\sigma^{l-2}} x_l^{\sigma^{l-1}}).$$

Замечание 2.2. Ясно, что для n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ n -арная операция, определенная на декартовой степени A^k покомпонентно с помощью n -арной операции η и обозначаемая тем же символом η , совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, \varepsilon, k}$, где ε – тождественная подстановка. Поэтому, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, то по теореме 1.2 $\langle A^k, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа. В этом можно убедиться и непосредственно, не используя теорему 1.2. Аналогично, несложно убедиться и в том, что если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, то $\langle A^k, \eta \rangle$ – n -арная группа.

Лемма 2.3 [3]. Пусть множество A содержит более одного элемента, $k \geq 2$, σ и τ – подстановки из S_k . Если $x^{\sigma} = x^{\tau}$ для любого $x \in A^k$, то $\sigma = \tau$.

Теорема 2.3 [5]. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество

$$\eta_{s, \sigma, k}(\eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_l) x_{l+1} \dots x_{2l-1}) = \eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_{l-1} \eta_{s, \sigma, k}(x_l \dots x_{2l-1})). \quad (2.3)$$

Теорема 2.4 [5]. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Теорема 2.5 [8]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная квазигруппа.

3. Случай n -арной группы

Приведем пример, показывающий, что в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ могут не выполняться все $\frac{n(n-1)}{2}$ тождества вида (2.1) для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, в том числе и все $n-1$ тождества, определяющие его ассоциативность.

Пример 3.1. Положим в определении 1.1: $A = \{(12), (13), (23)\}$ – множество всех нечетных подстановок множества $\{1, 2, 3\}$; η – тернарная операция, производная от операции умножения подстановок;

$$n = 3, s = 1, k = 3, \sigma = (123) \in S_3.$$

Так как $(123)^3$ – тождественная подстановка, то $(123)^3 \neq (123)$.

Легко проверяется, что $\langle A, \eta \rangle$ – идемпотентная тернарная группа, в которой нет единиц.

Определим на A^3 тернарную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, (123), 3}(xyz) &= \eta_{1, (123), 3}((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)) = \\ &= (\eta(x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)}), \eta(x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)}), \eta(x_3 y_{\sigma(3)} z_{\sigma^2(3)})) = \\ &= (\eta(x_1 y_2 z_3), \eta(x_2 y_3 z_1), \eta(x_3 y_1 z_2)). \end{aligned}$$

Пусть x, y и z – те же, что и выше,

$$u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3).$$

Согласно определению 2.1,

$$\begin{aligned} \eta_{1, (123), 3}(\eta_{1, (123), 3}(xyz)uv) &= \eta_{1, (123), 3}((\eta(x_1 y_2 z_3), \eta(x_2 y_3 z_1), \eta(x_3 y_1 z_2))uv) = \\ &= (\eta(x_1 y_2 z_3 u_2 v_3), \eta(x_2 y_3 z_1 u_3 v_1), \eta(x_3 y_1 z_2 u_1 v_2)), \\ \eta_{1, (123), 3}(x\eta_{1, (123), 3}(yzu)v) &= \eta_{1, (123), 3}(x(\eta(y_1 z_2 u_3), \eta(y_2 z_3 u_1), \eta(y_3 z_1 u_2))v) = \\ &= (\eta(x_1 y_2 z_3 u_1 v_3), \eta(x_2 y_3 z_1 u_2 v_1), \eta(x_3 y_1 z_2 u_3 v_2)), \\ \eta_{1, (123), 3}(xy\eta_{1, (123), 3}(zuv)) &= \eta_{1, (123), 3}(xy(\eta(z_1 u_2 v_3), \eta(z_2 u_3 v_1), \eta(z_3 u_1 v_2))) = \end{aligned}$$

$$= (\eta(x_1 y_2 z_3 u_1 v_2), \eta(x_2 y_3 z_1 u_2 v_3), \eta(x_3 y_1 z_2 u_3 v_1)).$$

Если

$$x_1 = y_2 = z_3 = u_2 = v_3 = (12), u_1 = (13),$$

то

$$\eta(x_1 y_2 z_3 u_2 v_3) = (12), \eta(x_1 y_2 z_3 u_1 v_3) = (12)(13)(12) = (23),$$

откуда

$$\eta(x_1 y_2 z_3 u_2 v_3) \neq \eta(x_1 y_2 z_3 u_1 v_3).$$

Следовательно, в тернарном группоиде $\langle A^3, \eta_{1, (123), 3} \rangle$ не выполняется тождество

$$\eta_{1, (123), 3}(\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) \neq \eta_{1, (123), 3}(\mathbf{x}\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}).$$

Если

$$x_1 = y_2 = z_3 = u_1 = v_3 = (12), v_2 = (13),$$

то

$$\eta(x_1 y_2 z_3 u_1 v_3) = (12), \eta(x_1 y_2 z_3 u_1 v_2) = (13),$$

откуда

$$\eta(x_1 y_2 z_3 u_1 v_3) \neq \eta(x_1 y_2 z_3 u_1 v_2).$$

Следовательно, в тернарном группоиде $\langle A^3, \eta_{1, (123), 3} \rangle$ не выполняется тождество

$$\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{x}\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}) = \eta_{1, (123), 3}(\mathbf{x}\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{zuv})).$$

По теореме 2.3 в тернарном группоиде $\langle A^3, \eta_{1, (123), 3} \rangle$ не выполняется и тождество

$$\eta_{1, (123), 3}(\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) \neq \eta_{1, (123), 3}(\mathbf{x}\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{zuv})).$$

Таким образом, в тернарном группоиде $\langle A^3, \eta_{1, (123), 3} \rangle$ не выполняются все тождества вида (2.1) для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, то есть операция $\eta_{1, (123), 3}$ является totally неассоциативной.

Заметим, что невыполнимость в тернарном группоиде $\langle A^3, \eta_{1, (123), 3} \rangle$ последнего тождества можно доказать без использования теоремы 2.3, проведя соответствующие вычисления.

Покажем, что если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, то неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ является достаточным условием для невыполнимости в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ всех тождеств вида (2.1) для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$. Утверждение о невыполнимости тождества полуассоциативности (2.3) гарантирует теорема 2.3.

Теорема 3.1. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда универсальная алгебра $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является n -арной квазигруппой, в которой для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{i-1} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{l+i-1}) \mathbf{x}_{l+i} \dots \mathbf{x}_{2l-1}) = \\ = \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{j-1} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_{l+j-1}) \mathbf{x}_{l+j} \dots \mathbf{x}_{2l-1}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

то есть $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – totally неассоциативная l -арная квазигруппа.

Доказательство. По теореме 2.5 $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная квазигруппа.

Пусть для определенности $i < j$. Если предположить выполнимость в A^k тождества из условия теоремы, то ввиду леммы 2.2,

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \eta(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_{i+1}^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}} \mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^l} \dots \mathbf{x}_{l+j-2}^{f_\sigma^{j-2}} \mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{j-1}} \mathbf{x}_{l+j}^{f_\sigma^j} \dots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) = \\ = \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{j-1}^{f_\sigma^{j-2}} \eta(\mathbf{x}_j \mathbf{x}_{j+1}^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}} \mathbf{x}_{l+j}^{f_\sigma^j} \dots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}), \end{aligned}$$

откуда в силу утверждения 5) леммы 2.1, следует

$$\eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_i^{f_\sigma^{l-1}} \mathbf{x}_{i+1}^{f_\sigma^l} \dots \mathbf{x}_{l+i-1}^{f_\sigma^{l-1}} \mathbf{x}_{l+i}^{f_\sigma^l} \dots \mathbf{x}_{l+j-1}^{f_\sigma^{j-1}} \mathbf{x}_{l+j}^{f_\sigma^j} \dots \mathbf{x}_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) =$$

$$= \eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_{j-1}^{f_\sigma^{j-2}} x_j^{f_\sigma^{j-1}} x_{j+1}^{f_\sigma^j} \dots (x_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{j-1}} x_{l+j}^{f_\sigma^j} \dots x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}). \quad (3.2)$$

Для любого $a \in A$ положим

$$x_1 = \dots = x_{l+j-2} = x_{l+j} = \dots x_{2l-1} = a = \underbrace{a, \dots, a}_k.$$

Тогда в силу утверждения 4) леммы 2.1, равенство (3.2) принимает вид

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{l+j-2} x_{l+j-1}^{f_\sigma^{j-1}} \underbrace{a \dots a}_{l-j}) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{l+j-2} (x_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{j-1}} \underbrace{a \dots a}_{l-j}).$$

Так как $\langle A^k, \eta \rangle$ – n -арная группа, то из последнего равенства вытекает

$$x_{l+j-1}^{f_\sigma^{j-1}} = (x_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{j-1}}. \quad (3.3)$$

А так как f_σ^{j-1} – автоморфизм n -арной группы $\langle A^k, \eta \rangle$, то из этого равенства следует равенство

$$x_{l+j-1} = x_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

которое равносильно равенству

$$x_{l+j-1}^{f_\varepsilon} = x_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

где ε – тождественная подстановка. В свою очередь, из этого равенства, в силу утверждения 3) леммы 2.1, следует

$$x_{l+j-1}^{f_\varepsilon} = x_{l+j-1}^{f_\sigma^{l-1}}.$$

Так как элемент x_{l+j-1} выбран в A^k произвольно, то, применив к полученному равенству лемму 2.3, получим $\varepsilon = \sigma^{l-1}$, то есть $\sigma^l = \sigma$, что невозможно. Теорема доказана.

Таким образом, согласно теореме 3.1, всякая n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ и любая подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$, определяют totally неассоциативную l -арную квазигруппу $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Полагая в теореме 3.1 $n = 2$, получим

Следствие 3.1 [9]. Пусть группа A содержит более одного элемента, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество

$$[x_1 \dots x_{j-1} [x_j \dots x_{l+j-1}]_{l, \sigma, k} x_{l+j} \dots x_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = [x_1 \dots x_{i-1} [x_i \dots x_{l+i-1}]_{l, \sigma, k} x_{l+i} \dots x_{2l-1}]_{l, \sigma, k},$$

то есть l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ является totally неассоциативной.

Замечание 3.1. Ясно, что в теореме 3.1 и во всех утверждениях, в формулировках которых присутствует неравенство $\sigma^l \neq \sigma$, подстановка σ не может быть тождественной, так как для тождественной подстановки σ указанное неравенство неверно.

4. Следствия из теоремы 3.1

Напомним, что согласно определению l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, ее арность имеет вид $l = s(n-1) + 1$, где $s \geq 1$. Если σ – подстановка порядка $t \geq 2$ из S_k , $s(n-1) + 1 = tr$ для некоторых целых $s \geq 1$, $r \geq 1$, то подстановка σ^l является тождественной, то есть отлична от σ . Поэтому теорема 3.1 позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.1. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, σ – подстановка порядка $t \geq 2$ из S_k , $s(n-1) + 1 = tr$ для некоторых целых $s \geq 1$, $r \geq 1$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l = tr\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество (3.1), то есть tr -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является totally неассоциативной.

Так как любой цикл длины t из S_k имеет порядок t , то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.1. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, $2 \leq t \leq k$, σ – цикл длины t из S_k , $s(n-1)+1 = tr$ для некоторых целых $s \geq 1, r \geq 1$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l = tr\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество (3.1), то есть tr -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной.

Полагая в следствии 4.1 $\sigma = (12 \dots t)$, получим

Следствие 4.2. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, $s(n-1)+1 = tr$ для некоторых целых $s \geq 1, r \geq 1, 2 \leq t \leq k$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots t), k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, tr\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} \eta_{s, (12 \dots t), k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{t-1} \eta_{s, (12 \dots t), k}(\mathbf{x}_t \dots \mathbf{x}_{tr+t-1}) \mathbf{x}_{tr+i} \dots \mathbf{x}_{2tr-1}) = \\ = \eta_{s, (12 \dots t), k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{j-1} \eta_{s, (12 \dots t), k}(\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_{tr+j-1}) \mathbf{x}_{tr+j} \dots \mathbf{x}_{2tr-1}), \end{aligned}$$

то есть tr -арная операция $\eta_{s, (12 \dots t), k}$ является тотально неассоциативной.

Полагая в следствиях 4.1 и 4.2 $r = 1$, получим

Следствие 4.3. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, $s(n-1)+1 \leq k$ для некоторого целого $s \geq 1$, σ – цикл длины $l = s(n-1)+1$ из S_k . Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество (3.1), то есть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной.

Следствие 4.4. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, $l = s(n-1)+1 \leq k$ для некоторого целого $s \geq 1$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots l), k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество.

$$\begin{aligned} \eta_{s, (12 \dots l), k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1} \eta_{s, (12 \dots l), k}(\mathbf{x}_l \dots \mathbf{x}_{l+l-1}) \mathbf{x}_{l+i} \dots \mathbf{x}_{2l-1}) = \\ = \eta_{s, (12 \dots l), k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{j-1} \eta_{s, (12 \dots l), k}(\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_{l+j-1}) \mathbf{x}_{l+j} \dots \mathbf{x}_{2l-1}), \end{aligned}$$

то есть l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots l), k}$ является тотально неассоциативной.

Полагая в следствиях 4.1 и 4.2 $t = 3$, получим

Следствие 4.5. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, $k \geq 3$, σ – цикл длины 3 из S_k , $s(n-1)+1 = 3r$ для некоторых целых $s \geq 1, r \geq 1$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l = 3r\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество (3.1), то есть $3r$ -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной.

Следствие 4.6. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, $k \geq 3$, $s(n-1)+1 = 3r$ для некоторых целых $s \geq 1, r \geq 1$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, (123), k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 3r\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} \eta_{s, (123), k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1} \eta_{s, (123), k}(\mathbf{x}_l \dots \mathbf{x}_{3r+l-1}) \mathbf{x}_{3r+i} \dots \mathbf{x}_{6r-1}) = \\ = \eta_{s, (123), k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{j-1} \eta_{s, (123), k}(\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_{3r+j-1}) \mathbf{x}_{3r+j} \dots \mathbf{x}_{6r-1}), \end{aligned}$$

то есть $3r$ -арная операция $\eta_{s, (123), k}$ является тотально неассоциативной.

Полагая в следствии 4.6 $k = 3$, получим

Следствие 4.7. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, $s(n-1)+1 = 3r$ для некоторых целых $s \geq 1, r \geq 1$. Тогда в $\langle A^3, \eta_{s, (123), 3} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 3r\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} \eta_{s, (123), 3}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1} \eta_{s, (123), 3}(\mathbf{x}_l \dots \mathbf{x}_{3r+l-1}) \mathbf{x}_{3r+i} \dots \mathbf{x}_{6r-1}) = \\ = \eta_{s, (123), 3}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{j-1} \eta_{s, (123), 3}(\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_{3r+j-1}) \mathbf{x}_{3r+j} \dots \mathbf{x}_{6r-1}). \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{s, (123), 3}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_r) = \\ = \eta_{s, (123), 3}((x_{11}, x_{12}, x_{13})(x_{21}, x_{22}, x_{23}) \dots (x_{(3r)1}, x_{(3r)2}, x_{(3r)3})) = \\ = (x_{11} x_{22} x_{33} \dots x_{(3r-2)1} x_{(3r-1)2} x_{(3r)3}, \\ x_{12} x_{23} x_{31} \dots x_{(3r-2)2} x_{(3r-1)3} x_{(3r)1}, \\ x_{13} x_{21} x_{32} \dots x_{(3r-2)3} x_{(3r-1)1} x_{(3r)2}), \end{aligned}$$

то есть $3r$ -арная операция $\eta_{s, (123), 3}$ является тотально неассоциативной.

Полагая в следствии 4.7 $s = 1, r = 1$, получим

Следствие 4.8. Пусть тернарная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента. Тогда в $\langle A^3, \eta_{1, (123), 3} \rangle$ не выполняются все три тождества, определяющие ассоциативность тернарной операции $\eta_{1, (123), 3}$,

$$\eta_{1, (123), 3}(\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) = \eta_{1, (123), 3}(\mathbf{x}\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}),$$

$$\eta_{1, (123), 3}(\eta_{3, (123), 3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) = \eta_{1, (123), 3}(\mathbf{x}\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{zu})\mathbf{v}),$$

$$\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{x}\eta_{3, (123), 3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}) = \eta_{1, (123), 3}(\mathbf{x}\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{zu})\mathbf{v}),$$

где

$$\eta_{1, (123), 3}(\mathbf{xyz}) = \eta_{1, (123), 3}((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)) = (x_1 y_2 z_3, x_2 y_3 z_1, x_3 y_1 z_2),$$

то есть тернарная операция $\eta_{1, (123), 3}$ является тотально неассоциативной.

Полагая в следствии 4.5 $\sigma = (132)$, получим

Следствие 4.9. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, $k \geq 3, s(n-1) + 1 = 3r$ для некоторых целых $s \geq 1, r \geq 1$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, (132), k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 3r\}, i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} \eta_{s, (132), k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{i-1} \eta_{s, (132), k}(\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{3r+i-1}) \mathbf{x}_{3r+i} \dots \mathbf{x}_{6r-1}) = \\ = \eta_{s, (132), k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{j-1} \eta_{s, (132), k}(\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_{3r+j-1}) \mathbf{x}_{3r+j} \dots \mathbf{x}_{6r-1}), \end{aligned}$$

то есть $3r$ -арная операция $\eta_{s, (132), k}$ является тотально неассоциативной.

Полагая в следствии 4.9 $k = 3$, получим

Следствие 4.10. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, $s(n-1) + 1 = 3r$ для некоторых целых $s \geq 1, r \geq 1$. Тогда в $\langle A^3, \eta_{s, (132), 3} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 3r\}, i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} \eta_{s, (132), 3}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{i-1} \eta_{s, (132), 3}(\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{3r+i-1}) \mathbf{x}_{3r+i} \dots \mathbf{x}_{6r-1}) = \\ = \eta_{s, (132), 3}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{j-1} \eta_{s, (132), 3}(\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_{3r+j-1}) \mathbf{x}_{3r+j} \dots \mathbf{x}_{6r-1}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{s, (132), 3}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_r) = \\ = \eta_{s, (132), 3}((x_{11}, x_{12}, x_{13})(x_{21}, x_{22}, x_{23}) \dots (x_{(3r)1}, x_{(3r)2}, x_{(3r)3})) = \\ = (x_{11} x_{23} x_{32} \dots x_{(3r-2)1} x_{(3r-1)3} x_{(3r)2}, \\ x_{12} x_{21} x_{33} \dots x_{(3r-2)2} x_{(3r-1)1} x_{(3r)3}, \\ x_{13} x_{22} x_{31} \dots x_{(3r-2)3} x_{(3r-1)2} x_{(3r)1}), \end{aligned}$$

то есть $3r$ -арная операция $\eta_{s, (132), 3}$ является тотально неассоциативной.

Полагая в следствии 4.10 $s = 1, r = 1$, получим

Следствие 4.11. Пусть тернарная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента. Тогда в $\langle A^3, \eta_{1, (132), 3} \rangle$ не выполняются все три тождества, определяющие ассоциативность тернарной операции $\eta_{1, (132), 3}$,

$$\eta_{1, (132), 3} \eta_{1, (132), 3}((\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) = \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{x} \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}),$$

$$\eta_{1, (132), 3}(\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{xyz})\mathbf{uv}) = \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{x} \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{zu})\mathbf{v}),$$

$$\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{x} \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{yzu})\mathbf{v}) = \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{x} \eta_{1, (132), 3}(\mathbf{zu})\mathbf{v}),$$

где

$$\eta_{1, (132), 3}(\mathbf{xyz}) = \eta_{1, (132), 3}((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)) = (x_1 y_3 z_2, x_2 y_1 z_3, x_3 y_2 z_1),$$

то есть тернарная операция $\eta_{1, (132), 3}$ является тотально неассоциативной.

Полагая следствиях 4.1 и 4.2 $t = 2$, получим

Следствие 4.12. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, σ – транспозиция из $S_k, s(n-1) + 1 = 2r$ для некоторых целых $s \geq 1, r \geq 1$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ для

любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l = 2r\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество (3.1), то есть $2r$ -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной.

Следствие 4.13. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, $s(n-1) + 1 = 2r$ для некоторых целых $s \geq 1$, $r \geq 1$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, (12), k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 2r\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} & \eta_{s, (12), k}(x_1 \dots x_{i-1} \eta_{s, (12), k}(x_i \dots x_{2r+i-1}) x_{2r+i} \dots x_{4r-1}) = \\ & = \eta_{s, (12), k}(x_1 \dots x_{j-1} \eta_{s, (12), k}(x_j \dots x_{2r+j-1}) x_{2r+j} \dots x_{4r-1}), \end{aligned}$$

то есть $2r$ -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ является тотально неассоциативной.

Полагая в следствии 4.13 $k = 2$, получим

Следствие 4.14. Пусть n -арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента, $s(n-1) + 1 = 2r$ для некоторых целых $s \geq 1$, $r \geq 1$. Тогда в $\langle A^2, \eta_{s, (12), 2} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 2r\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} & \eta_{s, (12), 2}(x_1 \dots x_{i-1} \eta_{s, (12), 2}(x_i \dots x_{2r+i-1}) x_{2r+i} \dots x_{4r-1}) = \\ & = \eta_{s, (12), 2}(x_1 \dots x_{j-1} \eta_{s, (12), 2}(x_j \dots x_{2r+j-1}) x_{2r+j} \dots x_{4r-1}). \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & \eta_{s, (12), 2}(x_1 x_2 \dots x_{2r}) = \\ & = \eta_{s, (12), 2}((x_{11}, x_{12})(x_{21}, x_{22}) \dots (x_{(2r-1)1}, x_{(2r-1)2})(x_{(2r)1}, x_{(2r)2})) = \\ & = (x_{11} x_{22} x_{31} x_{42} \dots x_{(2r-3)1} x_{(2r-2)2} x_{(2r-1)1} x_{(2r)2}) \cdot \\ & \quad x_{12} x_{21} x_{32} x_{41} \dots x_{(2r-3)2} x_{(2r-2)1} x_{(2r-1)2} x_{(2r)1}), \end{aligned}$$

то есть $2r$ -арная операция $\eta_{s, (12), 2}$ является тотально неассоциативной.

Полагая в следствии 4.14 $s = 1$, $r = 2$, получим

Следствие 4.15. Пусть 4-арная группа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента. Тогда в $\langle A^2, \eta_{1, (12), 2} \rangle$ не выполняются все шесть тождеств, определяющих ассоциативность 4-арной операции $\eta_{1, (12), 2}$

$$\begin{aligned} & \eta_{1, (12), 2}(\eta_{1, (12), 2}(xyzu) vwp) = \eta_{1, (12), 2}(x \eta_{1, (12), 2}(yzuv) wp), \\ & \eta_{1, (12), 2}(\eta_{1, (12), 2}(xyzu) vwp) = \eta_{1, (12), 2}(xy \eta_{1, (12), 2}(zuvw) p), \\ & \eta_{1, (12), 2}(\eta_{1, (12), 2}(xyzu) vwp) = \eta_{1, (12), 2}(xyz \eta_{1, (12), 2}(uvw p)), \\ & \eta_{1, (12), 2}(x \eta_{1, (12), 2}(yzuv) wp) = \eta_{1, (12), 2}(xy \eta_{1, (12), 2}(zuvw) p), \\ & \eta_{1, (12), 2}(x \eta_{1, (12), 2}(yzuv) wp) = \eta_{1, (12), 2}(xyz \eta_{1, (12), 2}(uvw p)), \\ & \eta_{1, (12), 2}(xy \eta_{1, (12), 2}(zuvw) p) = \eta_{1, (12), 2}(xyz \eta_{1, (12), 2}(uvw p)), \end{aligned}$$

где

$$\eta_{1, (12), 2}(xyzu) = \eta_{1, (12), 2}((x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)) = (x_1 y_2 z_1 u_2, x_2 y_1 z_2 u_1),$$

то есть 4-арная операция $\eta_{1, (12), 2}$ является тотально неассоциативной.

5. Случай n -арной полугруппы с единицей

Покажем, что в теореме 3.1 можно отказаться от однозначной разрешимости соответствующих уравнений в n -арном группоиде $\langle A, \eta \rangle$, потребовав наличия в нем единицы.

Справедливость следующей леммы устанавливается простой проверкой.

Лемма 5.1. Если e – единица (идемпотент) n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, то

$$e = (\underbrace{e, \dots, e}_k)$$

– единица (идемпотент) n -арного группоида $\langle A^k, \eta \rangle$.

Теорема 5.1. Пусть неоднородная n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает единицей, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество (3.1), то есть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является тотально неассоциативной.

Доказательство. Если предположить выполнимость в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тождества (3.1), то верно (3.2).

По условию теоремы в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ существует единица e . Если положить

$$x_1 = \dots = x_{l+j-2} = x_{l+j} = \dots = x_{2l-1} = e = (\underbrace{e, \dots, e}_k),$$

то в силу утверждения 4) леммы 2.1, равенство (3.2) принимает вид

$$\eta(\underbrace{e \dots e}_{l+j-2} x_{l+j-1}^{f_{\sigma}^{j-1}} \underbrace{e \dots e}_{l-j}) = \eta(\underbrace{e \dots e}_{l+j-2} (x_{l+j-1}^{f_{\sigma}^{l-1}})^{f_{\sigma}^{j-1}} \underbrace{e \dots e}_{l-j}).$$

Так как, согласно лемме 5.1, e – единица n -арной полугруппы $\langle A^k, \eta \rangle$, то из последнего равенства вытекает (3.3).

Далее, дословно повторяя соответствующий фрагмент доказательства теоремы 3.1, получим $\sigma' = \sigma$, что невозможно. Теорема доказана.

Замечание 5.1. Для теоремы 5.1 можно сформулировать утверждения, аналогичные теореме 4.1 и следствиям 4.1 – 4.15.

Заметим, что пример 3.1 не может служить иллюстрацией теоремы 5.1, так как в тернарной группе $\langle A, \eta \rangle$ из этого примера нет единиц.

Приведенный ниже пример показывает, что если n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ не обладает единицей, то в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ могут выполняться некоторые тождества ассоциативности вида (2.1). Поэтому теорема 5.1 будет неверной, если из ее формулировки исключить требование о наличии в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ единицы.

В связи с теоремой 5.1 возникает вопрос: *останется ли утверждение теоремы 5.1 верным, если в ее условии единицу заменить идемпотентом?*

В пользу существования положительного ответа на этот вопрос может служить пример 3.1, так как в тернарной группе $\langle A, \eta \rangle$ из этого примера все элементы являются идемпотентами. Однако следующий пример показывает, что ответ на поставленный выше вопрос является отрицательным.

Пример 5.1. Положим в определении 2.1: A – множество, содержащее более одного элемента; η – 4-арная операция, производная от операции в полугруппе A с операцией $ab = b$ для любых $a, b \in A$;

$$n = 4, s = 1, k = 2, \sigma = (12) \in S_2.$$

Так как $(12)^4$ – тождественная подстановка, то $(12)^4 \neq (12)$.

Ясно, что $\langle A, \eta \rangle$ – идемпотентная 4-арная полугруппа без единицы с 4-арной операцией $\eta(xyzu) = u$.

Определим на A^2 4-арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}\mathbf{u}) &= \eta_{1, (12), 2}((x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)) = \\ &= (\eta(x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)} u_{\sigma^3(1)}), \eta(x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)} u_{\sigma^3(2)})) = (\eta(x_1 y_2 z_1 u_2), \eta(x_2 y_1 z_2 u_1)). \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ и $\mathbf{u}$ – те же, что и выше,

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2), \mathbf{p} = (p_1, p_2).$$

Согласно определению 2.1,

$$\begin{aligned} \eta_{1, (12), 2}(\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}\mathbf{u})\mathbf{v}\mathbf{w}\mathbf{p}) &= \eta_{1, (12), 2}((u_2, u_1)\mathbf{v}\mathbf{w}\mathbf{p}) = \\ &= (\eta(u_2 v_2 w_1 p_2), \eta(u_1 v_1 w_2 p_1)) = (p_2, p_1), \\ \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w}\mathbf{p})) &= \\ &= \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}(\eta(u_1 v_2 w_1 p_2), \eta(u_2 v_1 w_2 p_1))) = \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}(p_2, p_1)) = \\ &= (\eta(x_1 y_2 z_1 p_1), \eta(x_2 y_1 z_2 p_2)) = (p_1, p_2). \end{aligned}$$

Так как A содержит более одного элемента, то p_1 и p_2 можно выбрать так, что $p_1 \neq p_2$. В этом случае

$$\eta_{1, (12), 2}(\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}\mathbf{u})\mathbf{v}\mathbf{w}\mathbf{p}) \neq \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{x}\mathbf{y}\mathbf{z}\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{w}\mathbf{p})).$$

Из этого неравенства вытекает, что 4-арная операция $\eta_{1, (12), 2}$ не является полуассоциативной, а

значит и ассоциативной.

Кроме того, так как

$$\eta_{1,(12),2}(\mathbf{x}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{yzuv})\mathbf{wp}) = (p_2, p_1),$$

$$\eta_{1,(12),2}(\mathbf{x}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{zuvw})\mathbf{p}) = (p_2, p_1),$$

то в 4-арном группоиде $\langle A^2, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ выполняются тождества

$$\eta_{1,(12),2}(\eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyzu})\mathbf{vwp}) = \eta_{1,(12),2}(\mathbf{x}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{yzuv})\mathbf{wp}),$$

$$\eta_{1,(12),2}(\eta_{1,(12),2}(\mathbf{xyzu})\mathbf{vwp}) = \eta_{1,(12),2}(\mathbf{x}\eta_{1,(12),2}(\mathbf{zuvw})\mathbf{p}).$$

Пример 5.1 показывает, что наличие в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ идемпотентов и не-тождественность подстановки σ^{l-1} не исключают выполнимость некоторых тождеств вида (2.1). При этом 4-арная операция $\eta_{1,(12),2}$ из этого примера не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P.208 – 350.
2. Гальмак, А. М. Многместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28 – 34.
3. Гальмак, А. М. Многместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
5. Русаков, А. Д. О неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ / А. Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1. – С. 68–72.
6. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
7. Гальмак, А. М. О неполуассоциативности полиадического группоиды $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Веснік МДУ ім. А. А. Куляшова. – 2017. – № 2. – С. 38–48.
8. Гальмак, А. М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2018. – № 1. – С. 4–12.
9. Гальмак, А. М. О тождествах ассоциативности полиадической операции $[\]_{l,\sigma,k}$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2017. – № 2. – С. 4–12.

Поступила в редакцию 12.04.2018 г.

Контакты: +375 222 47-79-35 (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A. ON TOTAL ASSOCIATIVITY OF THE POLYADIC OPERATIONS.

The article focuses on total nonassociative polyadic operations $\eta_{s,\sigma,k}$, which are determined on a k -th Cartesian power of the n -ary groupoid $\langle A, \eta \rangle$ with the substitution σ of the set $\{1, \dots, k\}$ and n -ary operation η . In particular, the existence of totally nonassociative l -ary quasigroups $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$, where $\langle A, \eta \rangle$ is a n -ary group, $l = s(n-1) + 1$, is proved.

Keywords: polyadic operation, n -ary groupoid, n -ary group, associativity.

УДК 514.765.1

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ И СВЯЗНОСТИ НА НИХ

Н. П. Можей

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Цель работы – классификация трехмерных симметрических однородных пространств, описание всех инвариантных аффинных связностей на таких пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, канонических связностей и естественных связностей без кручения. Рассмотрены пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований с неразрешимым стабилизатором. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Ключевые слова: каноническая связность, группа преобразований, симметрическое пространство, алгебра голономии.

Введение

Симметрическое пространство – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении (см. [1]). Геодезическая симметрия относительно любой точки такого пространства есть автоморфизм, заданная аффинная связность переходит в себя. Примерами симметрических пространств могут служить пространства постоянной кривизны, классические области в комплексном аффинном пространстве и т. д. Симметрические римановы пространства впервые исследовал П. А. Широков [2]. Э. Картан показал, какую существенную роль играют симметрические пространства в теории полупростых групп Ли, им получена классификация римановых симметрических пространств и локальная классификация симметрических однородных пространств с простыми компактными основными группами. Найдена также классификация симметрических пространств с простыми некомпактными основными группами (см. [3], [4]). В [5] можно ознакомиться с понятиями канонической связности и естественной связности без кручения. Трехмерные редуцированные однородные пространства с неразрешимой группой преобразований, допускающие нормальные связности, изучались в работе [6]. В данной работе изучаются симметрические однородные пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований с неразрешимым стабилизатором.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M, \bar{G})$ равносильна классификации пар групп Ли $(\bar{G}, G)$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (см., например, [7]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве $T_x M$ – это фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s \cdot (x + \mathfrak{g}) = (Ad_s)(x) + \mathfrak{g}$ для всех $s \in G$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_x M = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ следующим образом: $x \cdot (y + \mathfrak{g}) = [x, y] + \mathfrak{g}$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$, $x \in M$ на $T_x M$ имеет нулевое ядро.

© Можей Н. П., 2018

Аффинной связностью на паре $(\bar{g}, g)$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(m)$, что его ограничение на g – изотропное представление подалгебры, а все отображение является g -инвариантным. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [5]. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [8]) с аффинными связностями на паре $(\bar{g}, g)$. Поскольку $M = \bar{G}/G$ редуکتивно (а $\bar{G}$ транзитивна), для классификации симметрических пространств достаточно рассматривать только изотропно-точные пространства. Симметрическое пространство есть тройка $(\bar{G}, G, \sigma)$, состоящая из связной группы Ли $\bar{G}$, замкнутой подгруппы G и инволютивного автоморфизма σ такого, что $\sigma(g) = s_o \circ g \circ s_o^{-1}$ для $g \in \bar{G}$, где s_o – симметрия для M в o . Пусть $(\bar{g}, g, \sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и -1 , а g – собственное подпространство для 1. Пусть m – собственное подпространство для -1 . Разложение $\bar{g} = g + m$ называется *каноническим разложением* для $(\bar{g}, g, \sigma)$. Если $\bar{g} = g + m$ – каноническое разложение симметрической алгебры Ли $(\bar{g}, g, \sigma)$, то $[g, g] \subset g$, $[g, m] \subset m$, $[m, m] \subset g$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G , то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензоры кручения $T \in \text{Inv} T_2^1(m)$ и кривизны $R \in \text{Inv} T_3^1(m)$ для всех $x, y \in \bar{g}$ имеют вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m, \quad R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]).$$

Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к g в $\bar{g}$, и фактор-пространство $m = \bar{g}/g$.

Односвязное многообразие M с аффинной связностью такой, что $T = \nabla R = 0$, порождает симметрическое пространство $(\bar{G}, G, \sigma)$ такое, что $M = \bar{G}/G$. Верно и обратное, если $(\bar{G}, G, \sigma)$ – симметрическое пространство, то однородное пространство $\bar{G}/G$ допускает инвариантную аффинную связность с $T = \nabla R = 0$. Инвариантная связность, определяемая равенством

$\Lambda|_m = 0$, называется *канонической связностью* для $(\bar{G}, G, \sigma)$ или $\bar{G}/G$ (относительно разложения $\bar{g} = g + m$), ее также называют *канонической связностью второго рода*. Поскольку для симметрического пространства $[m, m] \subset g$, то каноническая связность совпадает с *естественной связностью без кручения* (единственной инвариантной аффинной связностью без кручения, имеющей те же геодезические, что и каноническая связность: $\Lambda_m(x)y = 1/2[x, y]_m$, $x, y \in m$; ее также называют *канонической связностью первого рода*), и мы имеем $T = \nabla R = 0$. Если $(\bar{G}, G, \sigma)$ – симметрическое пространство, то каноническая связность есть единственная аффинная связность на $M = \bar{G}/G$, которая инвариантна при действии симметрий для M .

Переформулируем теорему Вана об алгебре голономии инвариантной связности: *алгебра* Ли группы *голономии* связности $\Lambda: \bar{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{g}, g)$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{g}), V] + [\Lambda(\bar{g}), [\Lambda(\bar{g}), V]] + \dots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{g}\}$.

Основная часть

Будем описывать пару $(\bar{g}, g)$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{g}$. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{g}$ ($n = \dim \bar{g}$). Будем полагать, что подалгебра Ли g порождается векторами $e_1, \dots, e_{n-3}$, а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис m . Для нумерации подалгебр используем запись d, n , а для нумерации пар – запись d, n, m , соответствующие приведенным в [9], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{g}, g)$. Поскольку ограничение $\Lambda: \bar{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(m)$ на g – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на m . Выпишем ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, запишем тензор кривизны R его значениями $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1, u_2)$, $T(u_2, u_3)$, $T(u_1, u_3)$.

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$.

Теорема 1. Все трехмерные симметрические тривиальные однородные пространства, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, локально имеют вид $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{g}$ (подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$) сопряжена только одной из следующих подалгебр:

$$\begin{aligned}
 & 3.3. \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}; 3.4. \begin{bmatrix} x & y \\ z & y \\ & z & -x \end{bmatrix}; 3.5. \begin{bmatrix} & y & x \\ -y & & z \\ -x & -z & \end{bmatrix}; \\
 & 4.1. \begin{bmatrix} x & z \\ u & y \end{bmatrix}; 4.2. \begin{bmatrix} \lambda x + y & z \\ u & \lambda x - y \\ & & x \end{bmatrix}; 4.3. \begin{bmatrix} x + y & z \\ u & x & z \\ & u & x - y \end{bmatrix}; 4.5. \begin{bmatrix} x & z & y \\ -z & x & u \\ -y & -u & x \end{bmatrix}; \\
 & 5.1. \begin{bmatrix} x & u \\ v & y \\ & & z \end{bmatrix}; 5.2. \begin{bmatrix} x & u & v \\ z & -x & u \\ & & \end{bmatrix}; 5.3. \begin{bmatrix} u & v \\ x & y \\ z & -x \end{bmatrix}; \\
 & 6.1. \begin{bmatrix} x & z & w \\ u & y & v \end{bmatrix}; 6.2. \begin{bmatrix} \lambda x + y & z & w \\ u & \lambda x - y & v \\ & & x \end{bmatrix}; 6.3. \begin{bmatrix} v & w \\ x & z \\ y & u \end{bmatrix}; 6.4. \begin{bmatrix} x & v & w \\ \lambda x + y & z \\ u & \lambda x - y \end{bmatrix}; \\
 & 7.1. \begin{bmatrix} x & u & t \\ v & y & w \\ & & z \end{bmatrix}; 7.2. \begin{bmatrix} x & w & t \\ y & u \\ v & z \end{bmatrix}; 8.1. \begin{bmatrix} x & z & v \\ w & y - x & u \\ t & s & -y \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Также при $\dim \mathfrak{g} = 9$ подалгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Здесь подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметра λ , не сопряжены друг другу, предполагается, что параметры пробегает все $\mathbb{R}$, также предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$. Базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Доказательство. Все тривиальные однородные пространства являются симметрическими. Все неразрешимые подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ (см. [9]) выписаны в теореме.

Теорема 2. Все трехмерные симметрические нетривиальные однородные пространства, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, локально имеют следующий вид:

3.4.2	$ \begin{array}{c cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & e_2 & -e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & -e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & e_1 & e_3 & 0 \end{array} $	$ \begin{array}{c cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & u_1 & 0 & -u_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 & u_1 & u_2 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & u_2 & u_3 & 0 \\ u_1 & -u_1 & 0 & -u_2 & 0 & -e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & -u_3 & e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & u_3 & -u_2 & 0 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array} $	$ \begin{array}{c cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & -e_2 & 0 & e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & -e_1 & -e_3 & 0 \end{array} $
-------	---	---	---

3.4.3	$ \begin{array}{c cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & e_1 & e_3 & 0 \end{array} $	$ \begin{array}{c cccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -u_2 & u_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 & -u_3 & u_2 \\ u_1 & u_3 & u_2 & 0 & 0 & e_2 & e_1 \\ u_2 & 0 & -u_1 & u_3 & e_2 & 0 & -e_3 \\ u_3 & -u_1 & 0 & -u_2 & e_1 & e_3 & 0 \end{array} $
-------	---	---

5.2.2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	e_4+u_1
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_5+u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-u_1$
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	$-u_2$
u_3	0	0	0	$-e_4-u_1$	$-e_5-u_2$	u_1	u_2	0

5.2.3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_4$
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	$-e_5$
u_3	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_4	e_5	0

6.1.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	e_5
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	e_6
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_5$	$-e_6$	0

6.1.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_5$
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_6$
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_5	e_6	0

Замечание. В случае 5.2.2 базис $\mathfrak{m}$ в каноническом разложении имеет вид $\{u_1 + e_4, u_2 + e_5, u_3\}$, в остальных случаях – стандартный базис $\{u_1, u_2, u_3\}$. Далее используется базис канонического разложения. Если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются некоторые дополнительные условия, то они записаны сразу после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегает все $\mathbb{R}$.

Доказательство. Сначала найдены все трехмерные изотропно-точные пары. Для этого классифицированы подалгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{l}(3, \mathbb{R})$ с точностью до сопряженности, а далее найдены (с точностью до эквивалентности) все пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$; такие пары $\text{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g} = 3$ выписаны в [9]. Из них выбраны симметрические пары с неразрешимыми алгебрами $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$, т. е. те, для которых $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = \mathbf{0}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ – неразрешимая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g} \mathfrak{l}(3, \mathbb{R})$ такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ нетривиальная симметрическая, а $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, то $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из подалгебр 3.4, 3.5, 5.2, 6.1. Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары.

Рассмотрим, например, пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 3.4. Пусть $\mathfrak{h}$ (нильпотентная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$) порождена вектором

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}u_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}u_3$, $[u_1, u_2] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})$, $[u_1, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})$, $[u_2, u_3] \in \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})$, тогда $[u_1, u_2] = a_2 e_2 + \alpha_1 u_1$, $[u_1, u_3] = b_1 e_1 + \beta_2 u_2$, $[u_2, u_3] = c_3 e_3 + \gamma_3 u_3$. Используя тождество Якоби, получим, что $[u_1, u_3] = -a_2 e_1 + \alpha_1 u_2$, $[u_2, u_3] = -a_2 e_3 + \alpha_1 u_3$. Положим $p = a_2 + \alpha_1^2 / 4$. Рассмотрим следующие случаи:

1° $p = 0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре при помощи отображения $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_1 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1, 3}$, $\pi(u_1) = u_1 - (\alpha_1 / 2)e_2$, $\pi(u_3) = u_3 + (\alpha_1 / 2)e_3$. $\pi(u_3) = u_3 + (\alpha_1 / 2)e_3$.

2° $p > 0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.4.2 посредством $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1, 3}$, $\pi(u_1) = p^{-1/2}(u_1 - (\alpha_1 / 2)e_2)$, $\pi(u_2) = p^{-1/2}(u_2 + (\alpha_1 / 2)e_1)$, $\pi(u_3) = p^{-1/2}(u_3 + (\alpha_1 / 2)e_3)$.

3° $p < 0$. Эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 3.4.3 показывается при помощи $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_3 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1, 3}$, $\pi(u_1) = (-p)^{1/2}(u_1 - (\alpha_1 / 2)e_2)$, $\pi(u_2) = (-p)^{-1/2}(u_2 + (\alpha_1 / 2)e_1)$, $\pi(u_3) = (-p)^{-1/2}(u_3 + (\alpha_1 / 2)e_3)$.

Поскольку $\dim \tau(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \dim \tau(\bar{\mathfrak{g}}_2)$ и $\dim \tau(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \dim \tau(\bar{\mathfrak{g}}_3)$, пара $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$ не эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ и паре $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}_3$ – простая алгебра Ли ($\bar{\mathfrak{g}}_3 \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$), а алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$ не проста ($\bar{\mathfrak{g}}_2 \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$), пары $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ не эквивалентны.

Рассмотрим пару типа 3.5. В силу тождества Якоби (с учетом того, что $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли) $[u_1, u_2] = a_2 e_2 + \alpha_3 u_3$, $[u_1, u_3] = a_2 e_1 - \alpha_3 u_2$, $[u_2, u_3] = a_2 e_3 + \alpha_3 u_1$. Положим $p = |a_2 - \alpha_3^2 / 4|^{-1/2}$ при $a_2 \neq \alpha_3^2 / 4$.

1° $4a_2 = \alpha_3^2$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре посредством $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_1 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1, 3}$, $\pi(u_1) = u_1 + (\alpha_3 / 2)e_3$, $\pi(u_2) = u_2 - (\alpha_3 / 2)e_1$, $\pi(u_3) = u_3 + (\alpha_3 / 2)e_2$.

2° $4a_2 > \alpha_3^2$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.5.2 при помощи отображения $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1, 3}$, $\pi(u_1) = p(u_1 + (\alpha_3 / 2)e_3)$, $\pi(u_2) = p(u_2 - (\alpha_3 / 2)e_1)$, $\pi(u_3) = p(u_3 + (\alpha_3 / 2)e_2)$.

3° $4a_2 < \alpha_3^2$. Эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 3.5.3 определяется посредством $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_3 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i) = e_i$, $i = \overline{1, 3}$, $\pi(u_1) = p(u_1 + (\alpha_3 / 2)e_3)$, $\pi(u_2) = p(u_2 - (\alpha_3 / 2)e_1)$, $\pi(u_3) = p(u_3 + (\alpha_3 / 2)e_2)$.

Поскольку $\tau(\bar{\mathfrak{g}}_1) \neq \{0\}$ и $\tau(\bar{\mathfrak{g}}_2) = \tau(\bar{\mathfrak{g}}_3) = \{0\}$, ни одна из пар 3.5.2 и 3.5.3 не эквивалентна тривиальной паре. Заметим, что алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$ проста ($\bar{\mathfrak{g}}_2 \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$), а алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_3$ не проста ($\bar{\mathfrak{g}}_3 \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$). Отсюда следует, что пары 3.5.2 и 3.5.3 не эквивалентны.

Рассмотрим теперь случай 5.2. Разложение Леви $\mathfrak{g}$ имеет вид $\{\{-e_5, e_4\}, \{2e_2, -2e_3 - 2e_5, e_1 + e_4\}\}$, $\mathfrak{h}$ порождена e_1 . Так как $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) \oplus \bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})$, где $\bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_5 \oplus \mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}u_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}e_2$, имеем $[u_1, u_2] = a_1 e_1 + \alpha_3 u_3$, $[u_1, u_3] = b_4 e_4 + \beta_1 u_1$, $[u_2, u_3] = c_5 e_5 + \gamma_2 u_2$. Используя тождество Якоби, определим, что $[u_1, u_2] = 0$, $[u_1, u_3] = \alpha_4 e_4 + \beta u_1$, $[u_2, u_3] = \alpha_5 e_5 + \beta u_2$. 1° $\alpha = \beta = 0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре.

2° $\beta^2 + 4\alpha \geq 0$. Пара эквивалентна 5.2.2 посредством $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(u_1) = e_4 + u_1$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(u_2) = e_5 + u_2$, $\pi(e_3) = e_3$, $\pi(u_3) = \lambda u_3$, $\pi(e_4) = \lambda e_4$, $\pi(e_5) = \lambda e_5$, а $\lambda = (\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}) / 2 \neq 0$. Полученная пара является редуктивной, но не является симметрической при $\lambda \neq -1$, при $\lambda = -1$ пара симметрическая, разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}} = \{\{-2e_4, -2u_1, u_3, -2u_2, -2e_5\}, \{-4e_1 + 2e_5 - 4e_2 - 2e_4, -4e_3\}\}$.

3° $\beta^2 + 4\alpha < 0$. Эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и 5.2.3 показывает $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_3 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1) = e_1$, $\pi(u_1) = u_1 + (\beta \lambda / 2)e_4$, $\pi(e_2) = e_2$, $\pi(u_2) = u_2 + (\beta \lambda / 2)e_5$, $\pi(e_3) = e_3$, $\pi(u_3) = \lambda^{-1} u_3$, $\pi(e_4) = \lambda e_4$, $\pi(e_5) = \lambda e_5$, а $\lambda = 2 / \sqrt{-\beta^2 - 4\alpha}$. Полученная пара не является симметрической при $\lambda \neq 0$, при $\lambda = 0$ пара симметрическая, разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}} = \{\{u_3, -2u_2, -2u_1, -2e_5, -2e_4\}, \{-4e_1 + 2e_5, -4e_2 - 2e_4, -4e_3\}\}$.

Пусть $\bar{\tau}_i$ – радикал $\bar{\mathfrak{g}}_i$ для $i = \overline{1, 3}$. Рассмотрим $f_i: \bar{\mathfrak{g}}_i \rightarrow \mathfrak{g}(4, \mathbb{R})$, где $f_i(x)$ – матрица $ad_{\bar{\tau}_i} x$ в базисе $\{e_4, e_5, u_1, u_2\}$ пространства $\bar{\tau}_i$, $x \in \bar{\mathfrak{g}}_i$. Поскольку $f_i(\bar{\mathfrak{g}}_i)$ не сопряжены, пары не эквивалентны.

Рассмотрим случай 6.1, тогда разложение Леви $\mathfrak{g} = \{-2e_3, e_4, -2e_6\}, \{-4e_1+2e_6, -4e_2-2e_3, -4e_3\}$, а $[u_1, u_2] = 0, [u_1, u_3] = b_5 e_5 + \beta_1 u_1, [u_2, u_3] = c_6 e_6 + \gamma_2 u_2$. Используя тождество Якоби, определим, что $[u_2, u_3] = b_5 e_6 + \beta_1 u_2$. Отображение $\pi: \bar{\mathfrak{g}}' \rightarrow \bar{\mathfrak{g}} \quad \pi(e_i) = e_i, \quad i=1, 6, \quad \pi(u_1) = u_1 + (\beta_1/2)e_5, \quad \pi(u_2) = u_2 + (\beta_1/2)e_6, \quad \pi(u_3) = u_3 - (\beta_1/2)e_4$, установит эквивалентность тривиальной пары и пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}')$. При $b_5 = 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}')$ эквивалентна тривиальной паре. При $b_5 > 0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}')$ и 6.1.2 определяется при помощи $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}', \quad \pi(e_i) = e_i, \quad i=1, 6, \quad \pi(u_j) = \sqrt{b_5} u_j, \quad j=1, 3$. При $b_5 < 0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}')$ эквивалентна паре 6.1.3 посредством $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}', \quad \pi(e_i) = e_i, \quad i=1, 6, \quad \pi(u_j) = \sqrt{-b_5} u_j, \quad j=1, 3$. Обозначим $\mathfrak{a}_i$ радикал $D\bar{\mathfrak{g}}_i, \quad i=1, 3$. Рассмотрим $f_i: \bar{\mathfrak{g}}_i \rightarrow \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$, где $ad_{\mathfrak{a}_i} x$ – матрица $ad_{\mathfrak{a}_i} x$ в базисе $\{e_6, e_6, u_1, u_2\}, \quad x \in \bar{\mathfrak{g}}_i$. Поскольку $f_i(\bar{\mathfrak{g}}_i)$ не сопряжены, пары $(\bar{\mathfrak{g}}_i, \mathfrak{a}_i), \quad i=1, 3$, не эквивалентны друг другу. Разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ в случае 6.1.2 имеет вид $\{e_4, -2u_2, -2e_6, -2u_1, -2e_3, u_3\}, \quad \{-4e_1+2e_6, -4e_2-2e_3, -4e_3\}$, а в случае 6.1.3 – $\{-2u_2, -2u_1, -2e_6, -2e_3, u_3, e_4\}, \quad \{-4e_1+2e_6, -4e_2-2e_3, -4e_3\}$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Для найденных пар выписываем аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, находим канонические связности, а также естественные связности без кручения. Прямыми вычислениями получаем, что аффинная связность имеет вид:

Пара	Аффинная связность
3.4.2, 3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$
3.5.2, 3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & -p_{2,3} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_{2,3} & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6.1.2, 6.1.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + p_{1,3} \end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + q_{2,3} + 1 \end{pmatrix}$
5.2.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,1} + q_{2,3} \end{pmatrix}$

Тензоры кривизны и кручения на симметрических пространствах:

Пара	Тензор кривизны
3.4.2	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2 + 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.4.3	$\begin{pmatrix} 0 & p_{1,2}^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p_{1,2}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^2 + 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{1,2}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{1,2}^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.5.2	$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}^2 - 1 & 0 \\ p_{2,3}^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}^2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}^2 + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}^2 - 1 \\ 0 & p_{2,3}^2 + 1 & 0 \end{pmatrix}$
3.5.3	$\begin{pmatrix} 0 & -p_{2,3}^2 + 1 & 0 \\ p_{2,3}^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p_{2,3}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{2,3}^2 - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_{2,3}^2 + 1 \\ 0 & p_{2,3}^2 - 1 & 0 \end{pmatrix}$
6.1.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Пара	Тензор кривизны
6.1.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,3}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3}^2 + 2q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}^2 + 2q_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5.2.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{2,3}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,3}^2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Пара	Тензор кручения
3.4.2	$(2p_{1,2}, 0, 0), (0, 2p_{1,2}, 0), (0, 0, 2p_{1,2})$
3.4.3	$(2p_{1,2}, 0, 0), (0, 2p_{1,2}, 0), (0, 0, 2p_{1,2})$
3.5.2	$(0, 0, -2p_{2,3}), (0, 2p_{2,3}, 0), (-2p_{2,3}, 0, 0)$
3.5.3	$(0, 0, -2p_{2,3}), (0, 2p_{2,3}, 0), (-2p_{2,3}, 0, 0)$
6.1.2	$(0, 0, 0), (-p_{1,3} + r_{1,1}, 0, 0), (0, -p_{1,3} + r_{1,1}, 0)$
6.1.3	$(0, 0, 0), (-p_{1,3} + r_{1,1}, 0, 0), (0, -p_{1,3} + r_{1,1}, 0)$
5.2.2	$(0, 0, 0), (q_{2,3} - r_{1,1} + 1, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{1,1} + 1, 0)$
5.2.3	$(0, 0, 0), (q_{2,3} - r_{1,1}, 0, 0), (0, q_{2,3} - r_{1,1}, 0)$

Алгебры голономии указанных связностей имеют вид:

Пара	Алгебра голономии		Пара	Алгебра голономии
3.4.2	$p_{1,2}^2 \neq 1$	$\begin{pmatrix} p_2 & p_1 & 0 \\ p_3 & 0 & p_1 \\ 0 & p_3 & -p_2 \end{pmatrix}$	3.4.3	$\begin{pmatrix} p_2 & p_1 & 0 \\ p_3 & 0 & p_1 \\ 0 & p_3 & -p_2 \end{pmatrix}$
	$p_{1,2}^2 = 1$	нулевая		
3.5.3	$p_{2,3}^2 \neq 1$	$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ p_1 & 0 & -p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$	3.5.2	$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ p_1 & 0 & -p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{pmatrix}$
	$p_{2,3}^2 = 1$	нулевая		

Пара	Алгебра голономии		Пара	Алгебра голономии	
6.1.2	$p_{1,3}^2 \neq 1$	$\mathfrak{p}$	5.2.2	$q_{2,3} \neq 0, -2$	$\mathfrak{p}$
	$p_{1,3}^2 = 1$	нулевая		$q_{2,3} = 0, -2$	нулевая
6.1.3		$\mathfrak{p}$	5.2.3		$\mathfrak{p}$

Здесь $\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Связность является канонической, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$. Выпишем, при каких условиях связность имеет те же геодезические, что и каноническая:

3.4.2, 3.4.3	p_{12} - любое
3.5.2, 3.5.3	p_{23} - любое
5.2.2, 5.2.3	$r_{11} = -q_{23}$
6.1.2, 6.1.3	$r_{11} = -p_{13}$

Связность является естественной связностью без кручения, если все параметры нулевые.

Заключение

Таким образом, найдены инвариантные аффинные связности на трехмерных симметрических однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Полученные результаты

могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также могут найти приложения в теории относительности, которая с математической точки зрения базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Картан, Э.** Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – Москва : Москов. ун-т, 1960. – 307 с.
2. **Широков, П. А.** Симметрические пространства первого класса / П. А. Широков // Избранные работы по геометрии. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1966. – С. 366–383.
3. **Картан, Э.** Геометрия групп Ли и симметрические пространства / Э. Картан // Сборник работ. – Москва, 1949. – 384 с.
4. **Хелгасон, С.** Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – Москва, 1964. – 608 с.
5. **Кобаяси, Ш.** Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Москва : Наука, 1981. – Т. 2.
6. **Можей, Н. П.** Трехмерные редуктивные пространства неразрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 7–17.
7. **Онищик, А. Л.** Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – Москва : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.
8. **Nomizu, K.** Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, no. 1. – P. 33–65.
9. **Можей, Н. П.** Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них / Н. П. Можей. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

Поступила в редакцию 08.03.2017 г.

Контакты mozheynatalya@mail.ru (Можей Наталья Павловна)

Mozhey N. SYMMETRIC HOMOGENEOUS SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS AND CONNECTIONS ON THEM.

The purpose of the article is to classify three-dimensional symmetric homogeneous spaces, to describe all invariant affine connections on those spaces together with their curvature and torsion tensors, holonomy algebras, canonical connections and natural torsion-free connections. The case of the unsolvable Lie group of transformations with an unsolvable stabilizer is considered. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. The studies are based on the use of properties of Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character. The peculiarity of techniques presented in the work is the application of purely algebraic approach, as well as the combination of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces.

Keywords: canonical connection, transformation group, symmetric space, holonomy algebra.

УДК 517.925

К АНАЛИЗУ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ

Д. В. Роголев

кандидат физико-математических наук
Белорусско-Российский университет, Могилев

Получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати. Предложен алгоритм построения решения.

Ключевые слова: периодическая краевая задача, матричное уравнение Риккати.

Введение

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A_1(t)X + XB_1(t) + X(S_1(t)X + S_2(t)Y) + F_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = A_2(t)Y + YB_2(t) + Y(P_1(t)X + P_2(t)Y) + F_2(t), \quad (2)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (3)$$

$$Y(0) = Y(\omega), \quad (4)$$

где $t \in [0, \omega]$, $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, матрицы $A_i(t)$, $B_i(t)$, $S_i(t)$, $P_i(t)$, $F_i(t)$ ($i=1,2$) определены и непрерывны на промежутке $[0, \omega]$; $\omega > 0$.

Матричные дифференциальные уравнения относятся к многомерным системам специального вида, включая уравнения Ляпунова, Риккати, играющие важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1–10].

Задачи типа (1)–(4) рассмотрены в [2, 11]. В случае, когда коэффициенты в (1), (2) постоянные, получим систему типа [9] теории дифференциальных игр.

Основная часть

В данной работе задача (1)–(4) изучается с помощью метода [10, гл. 3]. Примем следующие обозначения:

$$D = \{(t, X, Y) : 0 \leq t \leq \omega, \|X\| \leq \rho_1, \|Y\| \leq \rho_2\}, \quad \tilde{B}_i(\omega) = \int_0^\omega B_i(\tau) d\tau, \quad \tilde{\gamma}_i = \|\tilde{B}_i^{-1}(\omega)\|,$$

$$\alpha_i = \max_t \|A_i(t)\|, \quad \beta_i = \max_t \|B_i(t)\|, \quad \delta_i = \max_t \|S_i(t)\|, \quad \mu_i = \max_t \|P_i(t)\|, \quad h_i = \max_t \|F_i(t)\|, \quad \|T\|_C = \max_t \|T(t)\|,$$

$$p_{11} = \tilde{\gamma}_1 \left[\frac{1}{2} \beta_1 (\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \omega^2 + (\alpha_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \omega \right], \quad p_{21} = \tilde{\gamma}_2 \mu_1 \rho_2 \omega \left(\frac{1}{2} \beta_2 \omega + 1 \right),$$

$$p_{21} = \tilde{\gamma}_2 \mu_1 \rho_2 \omega \left(\frac{1}{2} \beta_2 \omega + 1 \right),$$

$$p_{22} = \tilde{\gamma}_2 \left[\frac{1}{2} \beta_2 (\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \omega^2 + (\alpha_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \omega \right],$$

где $t \in [0, \omega]$, $0 < \rho_1, \rho_2 < \infty$, $\|\cdot\|$ – подходящая норма матриц, например, одна из таких норм, введенных в [12, с. 21].

Сначала изучим вопрос разрешимости задачи (1)–(4).

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

$$1) \det \tilde{B}_i(\omega) \neq 0 \quad (i=1,2), \quad (5)$$

$$2) \tilde{\gamma}_1 \left\{ \frac{1}{2} \beta_1 [(\alpha_1 + \beta_1) \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1] \omega^2 + \right. \\ \left. + [\alpha_1 \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1] \omega \right\} \leq \rho_1, \quad (6)$$

$$\tilde{\gamma}_2 \left\{ \frac{1}{2} \beta_2 [(\alpha_2 + \beta_2) \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2] \omega^2 + \right. \\ \left. + [\alpha_2 \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2] \omega \right\} \leq \rho_2,$$

$$3) p_{11} < 1, \det(E - P) > 0, \quad (7)$$

где $E = \text{diag}(1, 1)$, $P = (p_{ij})$. Тогда задача (1)–(4) однозначно разрешима в области D .

Доказательство. Используя условие (5), сначала выведем систему матричных интегральных уравнений, эквивалентную задаче (1)–(4).

Из уравнения (1) на основании условия (3) имеем

$$\int_0^\omega X(\tau) B_1(\tau) d\tau = - \int_0^\omega [A_1(\tau) X(\tau) + X(\tau)(S_1(\tau) X(\tau) + S_2(\tau) Y(\tau)) + F_1(\tau)] d\tau.$$

Воспользуемся тождеством типа [10, с. 47]

$$\int_0^\omega X(\tau) B_1(\tau) d\tau = X(t) \int_0^\omega B_1(\tau) d\tau - \int_0^t (dX(\tau)) \left(\int_0^\tau B_1(\sigma) d\sigma \right) + \\ + \int_t^\omega (dX(\tau)) \left(\int_\tau^\omega B_1(\sigma) d\sigma \right). \quad (8)$$

Тогда на основе (8) в силу (1) получим последовательно

$$X(t) \tilde{B}_1(\omega) = \int_0^t [A_1(\tau) X(\tau) + X(\tau) B_1(\tau) + \\ X(\tau)(S_1(\tau) X(\tau) + S_2(\tau) Y(\tau)) + F_1(\tau)] \left(\int_0^\tau B_1(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \\ - \int_t^\omega [A_1(\tau) X(\tau) + X(\tau) B_1(\tau) + \\ X(\tau)(S_1(\tau) X(\tau) + S_2(\tau) Y(\tau)) + F_1(\tau)] \left(\int_\tau^\omega B_1(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \\ - \int_0^\omega [A_1(\tau) X(\tau) + X(\tau)(S_1(\tau) X(\tau) + S_2(\tau) Y(\tau)) + F_1(\tau)] d\tau. \quad (9)$$

Так как, согласно (5), $\det \tilde{B}_1(\omega) \neq 0$, то уравнение (9) можно привести к виду

$$X(t) = \left\{ \int_0^t [A_1(\tau) X(\tau) + X(\tau) B_1(\tau) + \right. \\ \left. X(\tau)(S_1(\tau) X(\tau) + S_2(\tau) Y(\tau)) + F_1(\tau)] \left(\int_0^\tau B_1(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \right. \\ \left. - \int_t^\omega [A_1(\tau) X(\tau) + X(\tau) B_1(\tau) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& X(\tau)(S_1(\tau)X(\tau) + S_2(\tau)Y(\tau)) + F_1(\tau) \left[\int_{\tau}^{\omega} B_1(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \\
& - \int_0^{\omega} \left[A_1(\tau)X(\tau) + X(\tau)(S_1(\tau)X(\tau) + S_2(\tau)Y(\tau)) + F_1(\tau) \right] d\tau \Big\} \tilde{B}_1^{-1}(\omega). \quad (10)
\end{aligned}$$

Аналогично получим уравнение

$$\begin{aligned}
Y(t) = & \left\{ \int_0^t \left[A_2(\tau)Y(\tau) + Y(\tau)B_2(\tau) + \right. \right. \\
& Y(\tau)(P_1(\tau)X(\tau) + P_2(\tau)Y(\tau)) + F_2(\tau) \left. \right] \left[\int_0^{\tau} B_2(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \\
& - \int_t^{\omega} \left[A_2(\tau)Y(\tau) + Y(\tau)B_2(\tau) + \right. \\
& Y(\tau)(P_1(\tau)X(\tau) + P_2(\tau)Y(\tau)) + F_2(\tau) \left. \right] \left[\int_{\tau}^{\omega} B_2(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \\
& \left. - \int_0^{\omega} \left[A_2(\tau)Y(\tau) + Y(\tau)(P_1(\tau)X(\tau) + P_2(\tau)Y(\tau)) + F_2(\tau) \right] d\tau \right\} \tilde{B}_2^{-1}(\omega). \quad (11)
\end{aligned}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение системы матричных интегральных уравнений (10), (11) является решением задачи (1)–(4). Это можно показать с помощью несложных выкладок.

Исследуем разрешимость системы уравнений (10), (11). Эту систему запишем в операторной форме:

$$X = \mathcal{L}_1(X, Y), \quad (12)$$

$$Y = \mathcal{L}_2(X, Y), \quad (13)$$

где через $\mathcal{L}_i$ ($i=1, 2$) обозначены соответствующие интегральные операторы в (10), (11). Эти операторы действуют на множестве $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n})$.

Покажем, что из условий (6)–(7) следует выполнение обобщения [10, § 3.4] типа [13, с. 94] принципа Банаха – Каччиопполи [14, с. 605] сжимающих отображений на множестве $\tilde{D} = \{(X(t), Y(t)) : \|X\|_C \leq \rho_1, \|Y\|_C \leq \rho_2\}$.

Сначала покажем, что $(\mathcal{L}_1(X, Y), \mathcal{L}_2(X, Y)) \in \tilde{D}$, если $(X, Y) \in \tilde{D}$. Выполнив оценки по норме в (12), (13), имеем последовательно

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_1(X, Y)\| & \leq \|\tilde{B}_1^{-1}(\omega)\| \left\| \int_0^t \left[A_1(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_1(\tau) + \right. \right. \\
& + X(\tau)(S_1(\tau)X(\tau) + S_2(\tau)Y(\tau)) + F_1(\tau) \left. \right] \left[\int_0^{\tau} B_1(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \\
& - \int_t^{\omega} \left[A_1(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_1(\tau) + \right. \\
& X(\tau)(S_1(\tau)X(\tau) + S_2(\tau)Y(\tau)) + F_1(\tau) \left. \right] \left[\int_{\tau}^{\omega} B_1(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \\
& - \int_0^{\omega} \left[A_1(\tau)X(\tau) + X(\tau)(S_1(\tau)X(\tau) + S_2(\tau)Y(\tau)) + F_1(\tau) \right] d\tau \Big\| \leq \\
& \leq \tilde{\gamma}_1 \left\{ \int_0^t \|A_1(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_1(\tau) + X(\tau)(S_1(\tau)X(\tau) + S_2(\tau)Y(\tau)) + \right. \\
& \left. + X(\tau)(S_1(\tau)X(\tau) + S_2(\tau)Y(\tau)) + F_1(\tau)\| \left\| \int_{\tau}^{\omega} B_1(\sigma) d\sigma \right\| d\tau + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +X(\tau)(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau))+F_1(\tau)\left\|\int_{\tau}^{\infty}B_1(\sigma)d\sigma\right\|d\tau+ \\
& +\int_0^{\infty}\left\|A_1(\tau)X(\tau)+X(\tau)(S_1(\tau)X(\tau)+S_2(\tau)Y(\tau))+F_1(\tau)\right\|d\tau\Big\}\leq \\
& \leq\tilde{\gamma}_1\left\{\int_0^t\left\|B_1(\sigma)\right\|d\sigma\right\}\left[\left\|A_1(\tau)\right\|\left\|X(\tau)\right\|+\left\|X(\tau)\right\|\left\|B_1(\tau)\right\|+\left\|X(\tau)\right\|\left\|S_1(\tau)\right\|\left\|X(\tau)\right\|+\right. \\
& +\left\|X(\tau)\right\|\left\|S_2(\tau)\right\|\left\|Y(\tau)\right\|+\left\|F_1(\tau)\right\|\Big]d\tau+\int_t^{\infty}\left\|B_1(\sigma)\right\|d\sigma\left[\left\|A_1(\tau)\right\|\left\|X(\tau)\right\|+\right. \\
& +\left\|X(\tau)\right\|\left\|B_1(\tau)\right\|+\left\|X(\tau)\right\|\left\|S_1(\tau)\right\|\left\|X(\tau)\right\|+\left\|X(\tau)\right\|\left\|S_2(\tau)\right\|\left\|Y(\tau)\right\|+\left\|F_1(\tau)\right\|\Big]d\tau+ \\
& +\int_0^{\infty}\left[\left\|A_1(\tau)\right\|\left\|X(\tau)\right\|+\left\|X(\tau)\right\|\left\|S_1(\tau)\right\|\left\|X(\tau)\right\|+\left\|X(\tau)\right\|\left\|S_2(\tau)\right\|\left\|Y(\tau)\right\|+\left\|F_1(\tau)\right\|\right]d\tau\Big\}\leq \\
& \leq\tilde{\gamma}_1\left\{\int_0^t\beta_1\tau\left[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]d\tau+ \right. \\
& +\int_t^{\infty}\beta_1(\omega-\tau)\left[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]d\tau+ \\
& \left. +\int_0^{\infty}\left[\alpha_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]d\tau\right\}= \\
& =\tilde{\gamma}_1\left\{\frac{1}{2}\beta_1\left[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]\left[t^2+(\omega-t)^2\right]+ \right. \\
& \left. +\left[\alpha_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]\omega\right\}\leq \\
& \leq\tilde{\gamma}_1\left\{\frac{1}{2}\beta_1\left[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]\omega^2+ \right. \\
& \left. +\left[\alpha_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]\omega\right\}, \tag{14}
\end{aligned}$$

Аналогичные оценки выполним для оператора $\mathcal{L}_2$:

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{L}_2(X,Y)\right\|\leq\tilde{\gamma}_2\left\{\frac{1}{2}\beta_2\left[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right]\omega^2+ \right. \\
\left. +\left[\alpha_2\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right]\omega\right\}. \tag{15}
\end{aligned}$$

Из (14), (15) на основании условия (6) следуют соотношения

$$\left\|\mathcal{L}_1(X,Y)\right\|_C\leq\rho_1, \tag{16}$$

$$\left\|\mathcal{L}_2(X,Y)\right\|_C\leq\rho_2. \tag{17}$$

Далее из (12) имеем для произвольных $(\tilde{X},\tilde{Y}),(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{Y}})\in\tilde{D}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{Y}})-\mathcal{L}_1(\tilde{X},\tilde{Y})=& \int_0^t\left[A_1(\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X})+(\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X})B_1+(\tilde{\tilde{X}}S_1\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}S_1\tilde{X})+ \right. \\
& \left. +(\tilde{\tilde{X}}S_2\tilde{\tilde{Y}}-\tilde{X}S_2\tilde{Y})\right]\left(\int_0^{\tau}B_1d\sigma\right)d\tau- \\
& -\int_t^{\infty}\left[A_1(\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X})+(\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X})B_1+(\tilde{\tilde{X}}S_1\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}S_1\tilde{X})+(\tilde{\tilde{X}}S_2\tilde{\tilde{Y}}-\tilde{X}S_2\tilde{Y})\right]\left(\int_{\tau}^{\infty}B_1d\sigma\right)d\tau-
\end{aligned}$$

$$-\int_0^{\omega} \left[A_1(\tilde{X} - \tilde{X}) + (\tilde{X}S_1\tilde{X} - \tilde{X}S_1\tilde{X}) + (\tilde{X}S_2\tilde{Y} - \tilde{X}S_2\tilde{Y}) \right] d\tau \Big\} \tilde{B}_1^{-1}(\omega).$$

Преобразуем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{X}S_1\tilde{X} - \tilde{X}S_1\tilde{X} &= (\tilde{X}S_1\tilde{X} - \tilde{X}S_1\tilde{X}) + (\tilde{X}S_1\tilde{X} - \tilde{X}S_1\tilde{X}) = \\ &= \tilde{X}S_1(\tilde{X} - \tilde{X}) + (\tilde{X} - \tilde{X})S_1\tilde{X}, \\ \tilde{X}S_2\tilde{Y} - \tilde{X}S_2\tilde{Y} &= (\tilde{X}S_2\tilde{Y} - \tilde{X}S_2\tilde{Y}) + (\tilde{X}S_2\tilde{Y} - \tilde{X}S_2\tilde{Y}) = \\ &= \tilde{X}S_2(\tilde{Y} - \tilde{Y}) + (\tilde{X} - \tilde{X})S_2\tilde{Y}, \end{aligned}$$

а затем оценим их по норме

$$\begin{aligned} \|\tilde{X}S_1\tilde{X} - \tilde{X}S_1\tilde{X}\| &\leq 2\delta_1\rho_1 \|\tilde{X} - \tilde{X}\|, \\ \|\tilde{X}S_2\tilde{Y} - \tilde{X}S_2\tilde{Y}\| &\leq \delta_2\rho_2 \|\tilde{X} - \tilde{X}\| + \delta_2\rho_1 \|\tilde{Y} - \tilde{Y}\|. \end{aligned}$$

Используя эти оценки, получим далее

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_1(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \mathcal{L}_1(\tilde{X}, \tilde{Y})\| &\leq \left\| \int_0^{\omega} \left[A_1(\tilde{X} - \tilde{X}) + (\tilde{X} - \tilde{X})B_1 + (\tilde{X}S_1\tilde{X} - \tilde{X}S_1\tilde{X}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\tilde{X}S_2\tilde{Y} - \tilde{X}S_2\tilde{Y}) \right] \left(\int_0^{\tau} B_1 d\sigma \right) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\tau}^{\omega} \left[A_1(\tilde{X} - \tilde{X}) + (\tilde{X} - \tilde{X})B_1 + (\tilde{X}S_1\tilde{X} - \tilde{X}S_1\tilde{X}) + (\tilde{X}S_2\tilde{Y} - \tilde{X}S_2\tilde{Y}) \right] \left(\int_{\tau}^{\omega} B_1 d\sigma \right) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\omega} \left[A_1(\tilde{X} - \tilde{X}) + (\tilde{X}S_1\tilde{X} - \tilde{X}S_1\tilde{X}) + (\tilde{X}S_2\tilde{Y} - \tilde{X}S_2\tilde{Y}) \right] d\tau \right\| \|\tilde{B}_1^{-1}(\omega)\| \leq \\ &\leq \tilde{\gamma}_1 \left\{ \int_0^{\omega} \left[\|A_1(\tilde{X} - \tilde{X})\| + \|(\tilde{X} - \tilde{X})B_1\| + \|\tilde{X}S_1(\tilde{X} - \tilde{X})\| + \|(\tilde{X} - \tilde{X})S_1\tilde{X}\| + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|\tilde{X}S_2(\tilde{Y} - \tilde{Y})\| + \|(\tilde{X} - \tilde{X})S_2\tilde{Y}\| \right] \left(\int_0^{\tau} \|B_1\| d\sigma \right) d\tau + \int_{\tau}^{\omega} \left[\|A_1(\tilde{X} - \tilde{X})\| + \|(\tilde{X} - \tilde{X})B_1\| + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|\tilde{X}S_1(\tilde{X} - \tilde{X})\| + \|(\tilde{X} - \tilde{X})S_1\tilde{X}\| + \|\tilde{X}S_2(\tilde{Y} - \tilde{Y})\| + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|(\tilde{X} - \tilde{X})S_2\tilde{Y}\| \right] \left(\int_{\tau}^{\omega} \|B_1\| d\sigma \right) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\omega} \left[\|A_1(\tilde{X} - \tilde{X})\| + \|\tilde{X}S_1(\tilde{X} - \tilde{X})\| + \|(\tilde{X} - \tilde{X})S_1\tilde{X}\| + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|\tilde{X}S_2(\tilde{Y} - \tilde{Y})\| + \|(\tilde{X} - \tilde{X})S_2\tilde{Y}\| \right] d\tau \right\} \leq \\ &\leq \tilde{\gamma}_1 \left\{ \left[\frac{1}{2}\beta_1(\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega^2 + (\alpha_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega \right] \|\tilde{X} - \tilde{X}\|_C + \right. \\ &\quad \left. \delta_2\rho_1\omega \left(\frac{1}{2}\beta_1\omega + 1 \right) \|\tilde{Y} - \tilde{Y}\|_C \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_1(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \mathcal{L}_1(\tilde{X}, \tilde{Y})\|_C &\leq \tilde{\gamma}_1 \left\{ \left[\frac{1}{2}\beta_1(\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\alpha_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2)\omega \right] \|\tilde{X} - \tilde{X}\|_C + \left[\frac{1}{2}\beta_1\delta_2\rho_1\omega^2 + \delta_2\rho_1\omega \right] \|\tilde{Y} - \tilde{Y}\|_C \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогично из (13) имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L}_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \mathcal{L}_2(\bar{X}, \bar{Y}) \right\|_C \leq \tilde{\gamma}_2 \left\{ \mu_1 \rho_2 \omega \left(\frac{1}{2} \beta_2 \omega + 1 \right) \left\| \tilde{X} - \bar{X} \right\|_C + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} \beta_2 (\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \omega^2 + (\alpha_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \omega \right] \left\| \tilde{Y} - \bar{Y} \right\|_C \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Запишем (18), (19) в матричном виде

$$\tilde{K} \leq PK, \quad (20)$$

где

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \left\| \mathcal{L}_1(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \mathcal{L}_1(\bar{X}, \bar{Y}) \right\|_C \\ \left\| \mathcal{L}_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \mathcal{L}_2(\bar{X}, \bar{Y}) \right\|_C \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} \left\| \tilde{X} - \bar{X} \right\|_C \\ \left\| \tilde{Y} - \bar{Y} \right\|_C \end{pmatrix}.$$

Используя условие (7), можно показать на основании [15, с. 370], что характеристические числа положительной матрицы P расположены внутри единичного круга с центром в начале координат. Таким образом, на множестве $\tilde{D}$ имеют место соотношения (16)–(19), являющиеся условием обобщения [10, с. 172] типа [13, с. 94] принципа Банаха – Каччиопполи [14, с. 605] сжимающих отображений применительно к системе уравнений (12), (13). На основании этого заключаем, что решение $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ этой системы на множестве $\tilde{D}$ существует и единственно. В конечном счете это означает, что задача (1)–(4) однозначно разрешима в области D . Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Вместо условия (7) можно принять условие $\|P\| < 1$, более удобное для применения.

Для построения решения системы матричных интегральных уравнений (10), (11) воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [14, с. 605])

$$\begin{aligned} X_k(t) = & \int_0^t \left[A_1(\tau) X_{k-1}(\tau) + X_{k-1}(\tau) B_1(\tau) + \right. \\ & + X_{k-1}(\tau) (S_1(\tau) X_{k-1}(\tau) + S_2(\tau) Y_{k-1}(\tau)) + F_1(\tau) \left. \right] \left[\int_0^\tau B_1(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \\ & - \int_t^\omega \left[A_1(\tau) X_{k-1}(\tau) + X_{k-1}(\tau) B_1(\tau) + \right. \\ & + X_{k-1}(\tau) (S_1(\tau) X_{k-1}(\tau) + S_2(\tau) Y_{k-1}(\tau)) + F_1(\tau) \left. \right] \left[\int_\tau^\omega B_1(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \\ & - \int_0^\omega \left[A_1(\tau) X_{k-1}(\tau) + \right. \\ & + X_{k-1}(\tau) (S_1(\tau) X_{k-1}(\tau) + S_2(\tau) Y_{k-1}(\tau)) + F_1(\tau) \left. \right] d\tau \Big\} \tilde{B}_1^{-1}(\omega), \quad (21) \\ Y_k(t) = & \int_0^t \left[A_2(\tau) Y_{k-1}(\tau) + Y_{k-1}(\tau) B_2(\tau) + \right. \\ & + Y_{k-1}(\tau) (P_1(\tau) X_{k-1}(\tau) + P_2(\tau) Y_{k-1}(\tau)) + F_2(\tau) \left. \right] \left[\int_0^\tau B_2(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \\ & - \int_t^\omega \left[A_2(\tau) Y_{k-1}(\tau) + Y_{k-1}(\tau) B_2(\tau) + \right. \\ & + Y_{k-1}(\tau) (P_1(\tau) X_{k-1}(\tau) + P_2(\tau) Y_{k-1}(\tau)) + F_2(\tau) \left. \right] \left[\int_\tau^\omega B_2(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \\ & - \int_0^\omega \left[A_2(\tau) Y_{k-1}(\tau) + \right. \end{aligned}$$

$$+Y_{k-1}(\tau)(P_1(\tau)X_{k-1}(\tau)+P_2(\tau)Y_{k-1}(\tau))+F_2(\tau)]d\tau\}\tilde{B}_2^{-1}(\omega), \quad k=1,2,\dots, \quad (22)$$

где $X_0(t)$, $Y_0(t)$ – произвольные матричные функции класса $\mathbb{C}[0, \omega]$, принадлежащие множеству $\tilde{D}$.

Используя условия (6), нетрудно показать, что все приближенные решения, полученные по алгоритму (21), (22), принадлежат множеству $\tilde{D}$.

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему (см., например, [16]), этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости рядов

$$Y_0 + (Y_1 - Y_0) + \dots + (Y_k - Y_{k-1}) + \dots, \quad (23)$$

$$Y_0 + (Y_1 - Y_0) + \dots + (Y_k - Y_{k-1}) + \dots \quad (24)$$

Докажем равномерную по $t \in [0, \omega]$ сходимость рядов (23), (24). Для этого построим специальный сходящийся матричный степенной ряд, который мажорирует на $[0, \omega]$ указанные матричные функциональные ряды. Из (21), (22) имеем соответственно

$$\begin{aligned} X_{k+1} - X_k = & \int_0^t [A_1(X_k - X_{k-1}) + (X_k - X_{k-1})B_1 + (X_k S_1 X_k - X_{k-1} S_1 X_{k-1}) + \\ & + (X_k S_2 Y_k - X_{k-1} S_2 Y_{k-1})] \left(\int_0^\tau B_1 d\sigma \right) d\tau - \int_t^\omega [A_1(X_k - X_{k-1}) + (X_k - X_{k-1})B_1 + \\ & + (X_k S_1 X_k - X_{k-1} S_1 X_{k-1}) + (X_k S_2 Y_k - X_{k-1} S_2 Y_{k-1})] \left(\int_\tau^\omega B_1 d\sigma \right) d\tau - \\ & - \int_0^\omega [A_1(X_k - X_{k-1}) + (X_k S_1 X_k - X_{k-1} S_1 X_{k-1}) + \\ & + (X_k S_2 Y_k - X_{k-1} S_2 Y_{k-1})] d\tau \} \tilde{B}_1^{-1}(\omega), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} Y_{k+1} - Y_k = & \int_0^t [A_2(Y_k - Y_{k-1}) + (Y_k - Y_{k-1})B_2 + (Y_k P_1 X_k - Y_{k-1} P_1 X_{k-1}) + \\ & + (Y_k P_2 Y_k - Y_{k-1} P_2 Y_{k-1})] \left(\int_0^\tau B_2 d\sigma \right) d\tau - \int_t^\omega [A_2(Y_k - Y_{k-1}) + (Y_k - Y_{k-1})B_2 + \\ & + (Y_k P_1 X_k - Y_{k-1} P_1 X_{k-1}) + (Y_k P_2 Y_k - Y_{k-1} P_2 Y_{k-1})] \left(\int_\tau^\omega B_2 d\sigma \right) d\tau - \\ & - \int_0^\omega [A_2(Y_k - Y_{k-1}) + (Y_k P_1 X_k - Y_{k-1} P_1 X_{k-1}) + \\ & + (Y_k P_2 Y_k - Y_{k-1} P_2 Y_{k-1})] d\tau \} \tilde{B}_2^{-1}(\omega), \quad k=1,2,\dots \end{aligned} \quad (26)$$

Выполнив оценки по норме в (25), (26), получим оценки типа (18), (19):

$$\begin{aligned} \|X_{k+1} - X_k\|_C \leq & \tilde{\gamma}_1 \left\{ \left[\frac{1}{2} \beta_1 (\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \omega^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\alpha_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \omega \right] \|X_k - X_{k-1}\|_C + \left[\frac{1}{2} \beta_1 \delta_2 \rho_1 \omega^2 + \delta_2 \rho_1 \omega \right] \|Y_k - Y_{k-1}\|_C \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \|Y_{k+1} - Y_k\|_C \leq & \tilde{\gamma}_2 \left\{ \mu_1 \rho_2 \omega \left(\frac{1}{2} \beta_2 \omega + 1 \right) \|X_k - X_{k-1}\|_C + \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{2} \beta_2 (\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \omega^2 + (\alpha_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \omega \right] \|Y_k - Y_{k-1}\|_C \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Запишем оценки (27), (28) в матричной форме

$$k = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

где

$$\mathbf{Z}_k = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k\|_C \\ \|\mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{Y}_k\|_C \end{pmatrix}.$$

Далее на основании рекуррентной оценки (29) имеем явную оценку

$$\mathbf{Z}_k \leq \mathbf{P}^k \mathbf{Z}_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (30)$$

Поскольку характеристические числа матрицы $\mathbf{P}$ расположены внутри единичного круга, то, используя оценку (30) и соответствующие мажоранты для рядов (23), (24), можно установить, что на основании [12, 14] последовательность $\{\mathbf{X}_i(t), \mathbf{Y}_i(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in [0, \omega]$ к решению системы интегральных уравнений (10), (11), при этом имеет место оценка

$$\tilde{\mathbf{Z}}_i \leq (\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^i \mathbf{Z}_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (31)$$

где

$$\tilde{\mathbf{Z}}_i = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\|_C \\ \|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_i\|_C \end{pmatrix}.$$

Используя оценку (30), нетрудно получить оценку области локализации решения задачи (1)–(4), определяемую алгоритмом (21), (22):

$$\left(\|\mathbf{I}\|_C \right), \quad (32)$$

где

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_0 = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}_0\|_C \\ \|\mathbf{Y}_0\|_C \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Используя условия (6), (7), аналогичную оценку можно получить, исходя из системы интегральных уравнений (10), (11).

В самом деле, выполнив оценки по норме в тождествах (10), (11), получим

$$\mathbf{Z} \leq \mathbf{P}\mathbf{Z} + \mathbf{G}, \quad (33)$$

где $\mathbf{G} = \text{colon}(g_1, g_2)$;

$$g_1 = \tilde{\gamma}_1 h_1 \omega \left(\frac{1}{2} \beta_1 \omega + 1 \right), \quad g_2 = \tilde{\gamma}_2 h_2 \omega \left(\frac{1}{2} \beta_2 \omega + 1 \right).$$

Используя положительную обратимость матрицы $\mathbf{E} - \mathbf{P}$, из (33) получим оценку

$$\mathbf{Z} \leq (\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{G}. \quad (34)$$

Как видно, оценка (34) является коэффициентной. Чтобы воспользоваться оценкой (32), следует получить оценки для $\mathbf{Z}_0$, $\tilde{\mathbf{Z}}_0$, т. е. эта оценка менее удобная для применения, чем оценка (34). Однако в случае $\mathbf{X}_0 = 0$, $\mathbf{Y}_0 = 0$ имеем $\mathbf{Z}_0 \leq \mathbf{G}$, то есть (32), (34) дают одинаковые оценки.

Оценка (34), очевидно, будет эффективной, если $(\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1} \mathbf{G} \leq \mathbf{R} = \text{colon}(\rho_1, \rho_2)$.

Замечание 3. Отметим, что если в соответствии с замечанием 1 принять $\|\mathbf{P}\| < 1$, то оценка области локализации решения может быть получена в виде $\|\mathbf{Z}\| \leq \|\mathbf{G}\| / (1 - \|\mathbf{P}\|)$. И эта оценка будет эффективной, если $\|\mathbf{G}\| / (1 - \|\mathbf{P}\|) \leq \|\mathbf{R}\|$. При этом вместо множества $\tilde{D}$ следует принять множество $D^* = \{(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{Z}\| \leq \|\mathbf{R}\|\}$. Здесь принята следующая норма: $\|\mathbf{Z}\| = \|\mathbf{X}\|_C + \|\mathbf{Y}\|_C$.

Аналогичная оценка имеет место для $\tilde{\mathbf{Z}}_i$:

$$\|\tilde{\mathbf{Z}}_i\| \leq \frac{\|\mathbf{P}\|^i \|\mathbf{Z}_0\|}{1 - \|\mathbf{P}\|}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Замечание 4. Приближенные решения, построенные по алгоритму (21), (22), не обязаны удовлетворять краевым условиям (3), (4). В связи с этим следует получить соответствующие оценки для $\|\mathbf{X}_{k+1}(\omega) - \mathbf{X}_{k+1}(0)\|$, $\|\mathbf{Y}_{k+1}(\omega) - \mathbf{Y}_{k+1}(0)\|$. На основании (21) имеем

$$\begin{aligned} & [A_1(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)B_1(\tau) + \\ & + X_k(\tau)(S_1(\tau)X_k(\tau) + S_2(\tau)Y_k(\tau) + F_1(\tau))]d\tau = dX_{k+1}(\tau). \end{aligned} \quad (35)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & [A_1(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)(S_1(\tau)X_k(\tau) + S_2(\tau)Y_k(\tau)) + F_1(\tau)]d\tau = \\ & = dX_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)B_1(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (36)$$

Подставляя (35), (36) в правую часть (21) и выполнив затем интегрирование по частям, получим

$$X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0) = - \int_0^\omega (X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau))B_1(\tau)d\tau. \quad (37)$$

Аналогично на основании (22) получим следующее соотношение:

$$Y_{k+1}(\omega) - Y_{k+1}(0) = - \int_0^\omega (Y_{k+1}(\tau) - Y_k(\tau))B_2(\tau)d\tau. \quad (38)$$

Выполнив оценки по норме в (37), (38), получим

$$\begin{aligned} \|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\| & \leq \beta_1 \omega \|X_{k+1} - X_k\|_C, \\ \|Y_{k+1}(\omega) - Y_{k+1}(0)\| & \leq \beta_2 \omega \|Y_{k+1} - Y_k\|_C. \end{aligned} \quad (39)$$

Из (39) на основании (29), (30) имеем

$$\Delta_{k+1} \leq \Omega P^k Z_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (40)$$

где $\Delta_{k+1} = \text{colon}(\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\|, \|Y_{k+1}(\omega) - Y_{k+1}(0)\|)$, $\Omega = \text{diag}(\beta_1 \omega, \beta_2 \omega)$.

Соотношение (40) представляет собой оценку погрешностей в условиях (3), (4) для приближенных решений, определяемых согласно алгоритму (21), (22).

Заключение

Результаты данной работы заключаются в следующем:

- развита конструктивная методика получения эквивалентной системы интегральных уравнений для исследуемой краевой задачи в невырожденном случае с правосторонней регуляризацией;
- получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости указанной системы;
- исследован алгоритм построения решения задачи, основанный на классической вычислительной схеме;
- выведены коэффициентные оценки области локализации решения.

Перечисленные результаты составляют основу конструктивного метода анализа задачи (1)–(4) в рассмотренном случае. Они могут быть использованы при решении соответствующих задач теории управления.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Еругин, Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н. П. Еругин. – Минск : Изд-во АН БССР, 1963. – 272 с.
2. Zubov, V. И. Лекции по теории управления / В. И. Zubov. – Москва : Наука, 1975. – 496 с.
3. Калоджеро, Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния / Ф. Калоджеро. – Москва : Мир, 1972. – 296 с.
4. Ларин, В. Б. Управление шагающими аппаратами / В. Б. Ларин. – Киев : Наукова думка, 1980. – 168 с.
5. Murty, K. N. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl., 1992. – V. 167. – P. 505–515.
6. Параев, Ю. И. Уравнения Ляпунова и Риккати / Ю. И. Параев. – Томск : Томский госуниверситет, 1989. – 166 с.
7. Розо, М. Нелинейные колебания и теория устойчивости / М. Розо. – Москва : Наука, 1971. – 288 с.
8. Ройтенберг, Я. Н. Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. – Москва : Наука, 1978. – 552 с.

9. *Jódar, L.* Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games / L. Jódar // Applied Mathematics Letters. – 1990. – V. 3, №. 4. – P. 9–12.
10. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
11. *Анисович, В. В.* Об одном подходе к решению задач оптимального управления / В. В. Анисович, Б. И. Крюков, В. М. Мадорский // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 251, № 2. – С. 265–268.
12. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.
13. *Красносельский, М. А.* Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – Москва : Наука, 1969. – 455 с.
14. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.
15. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва : Наука, 1967. – 576 с.
16. *Бибииков, Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибииков. – Москва : Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 08.05.2018 г.

Контакты: +375 44 711 62 28 (Роголев Дмитрий Владимирович)

Rogolev D. ON THE ANALYSIS OF PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF RICCATI MATRIX DIFFERENTIAL EQUATIONS.

Coefficient sufficient conditions of one-valued solvability of the periodic boundary value problem for the system of Riccati matrix differential equations are obtained. The algorithm of solution construction is given.

Keywords: periodic boundary value problem, Riccati matrix equation.

УДК 517.925

КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА НА ОСНОВЕ ПРАВСТОРОННЕЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

А. Н. БОНДАРЕВ

старший преподаватель

Белорусско-Российский университет, Могилев

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова на основе правосторонней декомпозиции коэффициентов. Разработан итерационный алгоритм с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений построения решений.

Ключевые слова: матричное уравнение Ляпунова, многоточечная краевая задача, существование и единственность решения, алгоритм, сходимость.

Введение

Рассмотрим краевую задачу для матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (1)$$

с условием

$$\sum_{i=1}^k M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = \omega, \quad (2)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0, \omega]$ соответствующих размерностей, M_i – заданные постоянные $(n \times n)$ -матрицы.

В данной работе, являющейся продолжением [1, 2] и развитием [3], задача (1), (2) исследуется на основе расщепления (декомпозиции) матрицы $B(t)$ в виде

$$B(t) = B_1(t) + B_2(t), \quad (3)$$

где матрицы $B_1(t)$, $B_2(t)$ выбираются определенным способом (например, согласно, [4, гл. 1]).

Случай, когда используется декомпозиция $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$, изучен в [1]. Однако для определенного типа краевых задач результаты [1] могут оказаться неэффективными, при этом декомпозиция (3) для таких задач вполне приемлема, например, в смысле скорости сходимости соответствующего алгоритма. Очевидно, интерес для исследования представляет двойная декомпозиция, т. е. $A(t)$ и $B(t)$. В рамках настоящей работы этот случай не рассматривался.

Основная часть

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_t \|B_2(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|,$$

$$\mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_t \|V^{-1}(t)\|, \quad v_i = \|V_i\|, \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

$$q = \gamma\mu_1\mu_2(\alpha + \beta_2)\omega \sum_{i=1}^k m_i v_i, \quad N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h \sum_{i=1}^k m_i v_i,$$

где $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [5, с. 21], Φ – линейный матричный оператор типа [6], $\Phi Y \equiv \sum_{i=1}^k M_i Y V_i$; $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения

$$\frac{dV}{dt} = V B_1(t). \quad (4)$$

Теорема. Пусть оператор Φ обратим и выполнено условие

$$q < 1. \quad (5)$$

Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима; ее решение $X(t)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка

$$\|X\|_c \leq \frac{N}{1-q}. \quad (6)$$

Доказательство. Сначала выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2). На основании (3) уравнение (1) запишем в виде

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + X B_1(t) + X B_2(t) + F(t). \quad (7)$$

Пусть $X(t)$ – решение задачи (1), (2). На основе (1), (4) имеем

$$X(t) = X(t_i) V^{-1}(t_i) V(t) + \int_{t_i}^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V(t). \quad (8)$$

Из (8) получим

$$X(t_i) = X(t) V^{-1}(t) V_i - \int_{t_i}^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (2), получим матричное интегральное уравнение

$$\sum_{i=1}^k M_i X(t) V^{-1}(t) V_i = \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i. \quad (10)$$

Запишем уравнение (10) в следующем виде:

$$\Phi \{X(t) V^{-1}(t)\} = \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i. \quad (11)$$

Поскольку оператор Φ обратим, то из (11) имеем сначала

$$X(t) V^{-1}(t) = \Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\},$$

а затем

$$X(t) = \left[\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau V_i \right\} \right] V(t). \quad (12)$$

Таким образом, решение задачи (1), (2) удовлетворяет интегральному уравнению (12).

Теперь установим, что всякое непрерывное решение уравнения (12) является решением задачи (1), (2). Для этого рассмотрим уравнение (10) (либо (11)), эквивалентное уравнению (12).

Дифференцируя обе части тождества (10), получим последовательно

$$\sum_{i=1}^k M_i \left[\frac{dX(t)}{dt} - X(t)B_1(t) \right] V^{-1}(t)V_i = \sum_{i=1}^k M_i [A(t)X(t) + X(t)B_2(t) + F(t)]V^{-1}(t)V_i,$$

$$\sum_{i=1}^k M_i \left[\frac{dX(t)}{dt} - A(t)X(t) - X(t)B(t) - F(t) \right] V^{-1}(t)V_i = 0,$$

$$\Phi \left\{ \left[\frac{dX(t)}{dt} - A(t)X(t) - X(t)B(t) - F(t) \right] V^{-1}(t) \right\} = 0.$$

Отсюда, используя обратимость оператора Φ , получим тождество

$$\frac{dX(t)}{dt} - A(t)X(t) - X(t)B(t) - F(t) = 0. \quad (13)$$

Тем самым установлено, что матрица-функция $X(t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Теперь докажем, что $X(t)$ удовлетворяет краевому условию (2). Из (13) имеем

$$[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]d\tau = dX(\tau) - X(\tau)B_1(\tau)d\tau. \quad (14)$$

Используя (14), запишем уравнение (10) в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^k M_i X(t)V^{-1}(t)V_i = \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [dX(\tau) - X(\tau)B_1(\tau)d\tau]V^{-1}(\tau)V_i. \quad (15)$$

Выполнив интегрирование по частям в (15), получим после несложных выкладок

$$\sum_{i=1}^k M_i X(t)V^{-1}(t)V_i = \sum_{i=1}^k M_i [X(t)V^{-1}(t)V_i - X_i]$$

или

$$\Phi \{ X(t)V^{-1}(t) \} = \Phi \{ X(t)V^{-1}(t) \} - \sum_{i=1}^k M_i X_i.$$

Очевидно, условие (2) для решения $X(t)$ выполняется.

Уравнение (10) (или (12)) относится к типу уравнений [6, 7] и представляет собой весьма непростой объект для конструктивного исследования ввиду отсутствия явного представления оператора Φ^{-1} . Случай $k=2$ в научной литературе достаточно хорошо изучен. В общем случае в работе [6] предложены два формальных способа построения Φ^{-1} : в одном из них используется алгебраический аппарат, другой фактически основан на методе малого параметра.

Замечание 1. Матричное уравнение $\Phi Z = H$ с $(n \times n)$ -матрицами M_i и $(m \times m)$ -матрицей V равносильно обычному векторно-матричному уравнению $\tilde{\Phi} \tilde{Z} = \tilde{H}$, где $\tilde{\Phi}$ – квадратная матрица порядка nm , $\tilde{Z}$, $\tilde{H}$ – nm -векторы, определяемые на основе матриц Z , H . Очевидно, в случае $\det \tilde{\Phi} \neq 0$ оператор Φ однозначно обратим; это подразумевается в данной работе.

Исследуем разрешимость уравнения (12) с помощью принципа сжимающих отображений, согласно которому применим метод последовательных приближений с классической вычислительной схемой [8, 9]:

$$X_p(t) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau)X_{p-1}(\tau) + X_{p-1}(\tau)B_2(\tau) + \right. \right.$$

$$+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau V_i\bigg\}V(t), \quad p=1,2,\dots \quad (16)$$

В качестве начального приближения принимаем произвольную матрицу $X_0(t) \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times m})$. Очевидно, алгоритм (16) определяет последовательность $\{X_p(t)\}_0^\infty \subset \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times m})$, при этом $\{X_p(t)\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^{n \times m})$.

Сначала докажем, что функции $X_p(t)$ удовлетворяют краевому условию (2). На основании (16) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dX_p(t)}{dt} &= X_p(t)B_1(t) + \\ &+ \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i [A(t)X_{p-1}(t) + X_{p-1}(t)B_2(t) + F(t)]V^{-1}(t)V_i \right\} \right) V(t) = \\ &= X_p(t)B_1(t) + \left(\Phi^{-1} \{ \Phi [A(t)X_{p-1}(t) + X_{p-1}(t)B_2(t) + F(t)]V^{-1}(t) \} \right) V(t) = \\ &= X_p(t)B_1(t) + [A(t)X_{p-1}(t) + X_{p-1}(t)B_2(t) + F(t)]V^{-1}(t)V(t) = \\ &= X_p(t)B_1(t) + [A(t)X_{p-1}(t) + X_{p-1}(t)B_2(t) + F(t)]. \end{aligned}$$

Таким образом, получили соотношение

$$\frac{dX_p(t)}{dt} = X_p(t)B_1(t) + [A(t)X_{p-1}(t) + X_{p-1}(t)B_2(t) + F(t)]. \quad (17)$$

Из (17) имеем

$$[A(\tau)X_{p-1}(\tau) + X_{p-1}(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]d\tau = dX_p(\tau) - X_p(\tau)B_1(\tau)d\tau. \quad (18)$$

Используя (18), соотношение (16) запишем в следующем виде:

$$X_p(t) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [dX_p(\tau) - X_p(\tau)B_1(\tau)d\tau]V^{-1}(\tau)V_i \right\} \right) V(t). \quad (19)$$

Выполнив в (19) интегрирование по частям, получим последовательно

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [dX_p(\tau) - X_p(\tau)B_1(\tau)d\tau]V^{-1}(\tau)V_i \right\} \right) V(t) = \\ &= \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t (dX_p(\tau))V^{-1}(\tau)V_i - \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau V_i \right\} \right) V(t) = \\ &= \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \left(X_p(\tau)V^{-1}(\tau) \Big|_{t_i}^t + \int_{t_i}^t X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau \right) V_i - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau V_i \right\} \right) V(t) = \\ &= \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \left(X_p(t)V^{-1}(t) - X_p(t_i)V^{-1}(t_i) + \int_{t_i}^t X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau \right) V_i - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t X_p(\tau)B_1(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau V_i \right\} \right) V(t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k \left(M_i X_p(t) V^{-1}(t) V_i - M_i X_p(t_i) + M_i \int_{t_i}^t X_p(\tau) B_1(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t X_p(\tau) B_1(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t) = \\
&= \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i X_p(t) V^{-1}(t) V_i - \sum_{i=1}^k M_i X_p(t_i) + \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t X_p(\tau) B_1(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t X_p(\tau) B_1(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t) = \\
&= \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i X_p(t) V^{-1}(t) V_i - \sum_{i=1}^k M_i X_p(t_i) \right\} \right) V(t) = \\
&= \left(\Phi^{-1} \left\{ \Phi[X_p(t) V^{-1}(t)] - \sum_{i=1}^k M_i X_p(t_i) \right\} \right) V(t) = \\
&= \left(\Phi^{-1} \Phi[X_p(t) V^{-1}(t)] - \Phi^{-1} \sum_{i=1}^k M_i X_p(t_i) \right) V(t) = \\
&= \left(X_p(t) V^{-1}(t) - \Phi^{-1} \sum_{i=1}^k M_i X_p(t_i) \right) V(t) = \\
&= X_p(t) - \left(\Phi^{-1} \sum_{i=1}^k M_i X_p(t_i) \right) V(t).
\end{aligned}$$

Отсюда имеем соотношение

$$\left(\Phi^{-1} \sum_{i=1}^k M_i X_p(t_i) \right) V(t) = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^k M_i X_p(t_i) = 0. \quad (20)$$

Стало быть, все члены последовательности $\{X_p(t)\}_1^\infty$ удовлетворяют краевому условию (2).

Замечание 2. По-видимому, более наглядным является следующий способ получения соотношения (20). Запишем (16) в виде

$$\begin{aligned}
&\Phi(X_p(t) V^{-1}(t)) = \\
&= \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau) X_{p-1}(\tau) + X_{p-1}(\tau) B_2(\tau) + F(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i. \quad (21)
\end{aligned}$$

Дифференцируя обе части соотношения (21), получим с учетом перестановочности оператора дифференцирования и оператора Φ :

$$\begin{aligned}
&\Phi \left(\frac{dX_p(t)}{dt} V^{-1}(t) - X_p(t) B_1(t) V^{-1}(t) \right) = \\
&= \Phi([A(t) X_{p-1}(t) + X_{p-1}(t) B_2(t) + F(t)] V^{-1}(t)). \quad (22)
\end{aligned}$$

На основании обратимости оператора Φ из (22) имеем (17).

Далее в (21) воспользуемся (18), а затем выполним интегрирование по частям

$$\begin{aligned}
\Phi(X_p(t) V^{-1}(t)) &= \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [dX_p(\tau) - X_p(\tau) B_1(\tau) d\tau] V^{-1}(\tau) V_i = \\
&= \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t (dX_p(\tau)) V^{-1}(\tau) V_i - \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t X_p(\tau) B_1(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^k M_i \left[X_p(\tau) V^{-1}(\tau) \Big|_{t_i}^t + \int_{t_i}^t X_p(\tau) B_1(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau \right] V_i - \\
&\quad - \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t X_p(\tau) B_1(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i = \\
&= \sum_{i=1}^k M_i [X_p(t) V^{-1}(t) - X_p(t_i) V^{-1}(t_i)] V_i + \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t X_p(\tau) B_1(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i - \\
&\quad - \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t X_p(\tau) B_1(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i = \\
&= \sum_{i=1}^k M_i X_p(t) V^{-1}(t) V_i - \sum_{i=1}^k M_i X_p(t_i) = \Phi(X_p(t) V^{-1}(t)) - \sum_{i=1}^k M_i X_p(t_i).
\end{aligned}$$

Отсюда имеем (20).

Изучим вопрос сходимости построенной последовательности. Следуя известному приему (см., например, [8, 9]), этот вопрос заменим вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + \dots + (X_p(t) - X_{p-1}(t)) + \dots \quad (23)$$

и докажем его равномерную по $t \in [0, \omega]$ сходимость путем построения соответствующего мажорантного сходящегося числового ряда.

Из (16) имеем

$$X_{p+1}(t) - X_p(t) = \mathfrak{L}(X_p) - \mathfrak{L}(X_{p-1}), \quad p = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

где

$$\mathfrak{L}(Y) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau) Y(\tau) + Y(\tau) B_2(\tau) + F(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t).$$

Выполним оценки по норме в (24):

$$\begin{aligned}
&\|X_{p+1}(t) - X_p(t)\| = \|\mathfrak{L}(X_p) - \mathfrak{L}(X_{p-1})\| \leq \\
&\leq \left\| \Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau)(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)) B_2(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right\| \|V(t)\| \leq \\
&\leq \|\Phi^{-1}\| \left\| \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau)(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)) + \right. \\
&\quad \left. + (X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)) B_2(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\| \|V(t)\| \leq \\
&\leq \|\Phi^{-1}\| \left\| \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau)(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)) + \right. \\
&\quad \left. + (X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)) B_2(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\| \|V(t)\| \leq \\
&\leq \|\Phi^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \left\| \int_{t_i}^t [A(\tau)(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)) + \right. \\
&\quad \left. + (X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)) B_2(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau \right\| \|V_i\| \|V(t)\| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\Phi^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \left\| \int_{t_i}^t [A(\tau)(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)) + \right. \\
&\quad \left. + (X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau))B_2(\tau)]V^{-1}(\tau) d\tau \right\| \|V_i\| \|V(t)\| \leq \\
&\leq \|\Phi^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \left\| \int_{t_i}^t [A(\tau)(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)) + \right. \\
&\quad \left. + (X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau))B_2(\tau)]V^{-1}(\tau) d\tau \right\| \|V_i\| \|V(t)\| \leq \\
&\leq \|\Phi^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \|V_i\| \|V(t)\| \int_0^\omega [\|A(\tau)\| + \|B_2(\tau)\|] \|X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)\| \|V^{-1}(\tau)\| d\tau \leq \\
&\leq \|\Phi^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \|V_i\| \|V(t)\| \int_0^\omega [\|A(\tau)\| + \|B_2(\tau)\|] \|V^{-1}(\tau)\| d\tau \|X_p - X_{p-1}\|_C \leq \\
&\leq \gamma \sum_{i=1}^k m_i v_i \mu_i \mu_2 (\alpha + \beta_2) \omega \|X_p - X_{p-1}\|_C = q \|X_p - X_{p-1}\|_C.
\end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\|X_{p+1} - X_p\|_C \leq q \|X_p - X_{p-1}\|_C, \quad p = 1, 2, \dots \quad (25)$$

На основе (25) имеем явную оценку

$$\|X_p - X_{p-1}\|_C \leq q^p \|X_1 - X_0\|_C, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (26)$$

при этом $\|X_1 - X_0\|_C = \|\mathcal{L}(X_0) - X_0\|_C$.

Используя (26), можно доказать с помощью соответствующей методики (например, [8, 9]), что ряд (23), а значит и последовательность $\{X_r\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (12), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_r\|_C \leq \frac{q^r}{1-q} \|X_1 - X_0\|_C, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

На основе (26) имеем оценку области локализации решения $X(t)$, определяемую согласно алгоритму (16):

$$\|X\|_C \leq \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q}. \quad (28)$$

Очевидно, из (28) при $X_0 \equiv 0$ следует оценка (6), при этом

$$\|X_1 - X_0\|_C = \|X_1\|_C = \|\mathcal{L}(0)\|_C.$$

Получим оценку для $\|\mathcal{L}(0)\|$:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(0)\| &= \left\| \Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t F(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right\| V(t) \leq \\
&\leq \left\| \Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t F(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right\| \|V(t)\| \leq \\
&\leq \|\Phi^{-1}\| \left\| \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t F(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\| \|V(t)\| \leq \\
&\leq \|\Phi^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \int_{t_i}^t \|F(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i\| \|V(t)\| \leq \\
&\leq \|\Phi^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \left\| \int_{t_i}^t F(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau \right\| \|V_i\| \|V(t)\| \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \|\Phi^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \|V_i\| \left\| \int_{t_i}^t F(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau \right\| \|V(t)\| \leq$$

$$\leq \|\Phi^{-1}\| \sum_{i=1}^k \|M_i\| \|V_i\| \int_0^{\omega} \|F(\tau) V^{-1}(\tau)\| d\tau \|V(t)\| \leq \gamma \sum_{i=1}^k m_i v_i \mu_1 \mu_2 \omega h = N.$$

Очевидно, из (28) следует оценка (6). Теорема полностью доказана.

Теперь рассмотрим краевую задачу с параметром $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{dX}{dt} = (A_0(t) + \lambda A_1(t))X + XB(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^k M_i X(t_i, \lambda) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = \omega, \quad (30)$$

дополнив принятые выше обозначения

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha_i = \max_t \|A_i(t)\| \quad (i = 0, 1), \quad q(\varepsilon) = q_0 + \varepsilon q_1,$$

где

$$q_0 = \gamma \mu_1 \mu_2 (\alpha_0 + \beta_2) \omega \sum_{i=1}^k m_i v_i, \quad q_1 = \gamma \mu_1 \mu_2 \alpha_1 \omega \sum_{i=1}^k m_i v_i.$$

Следствие. Пусть оператор Φ обратим и

$$q_0 < 1. \quad (31)$$

Тогда в области (значений параметра λ)

$$|\lambda| < (1 - q_0)/q_1 \quad (32)$$

задача (29), (30) однозначно разрешима; ее решение $X(t, \lambda)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением типа (16) и удовлетворяющих условию (30), при этом справедлива оценка

$$\|X(t, \lambda)\| \leq \frac{N}{1 - q(\varepsilon)}. \quad (33)$$

Доказательство. Согласно методу, используемому при доказательстве теоремы, имеем эквивалентное интегральное уравнение

$$X(t, \lambda) = \left\{ \Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [(A_0(\tau) + \lambda A_1(\tau))X(\tau, \lambda) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + X(\tau, \lambda)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right\} V(t). \quad (34)$$

По доказанной теореме, уравнение (34) однозначно разрешимо при выполнении условия $q(\varepsilon) = q_0 + \varepsilon q_1 < 1$. Отсюда на основании (31) получим соотношение (32). Оценка (33) следует из оценки (6). Таким образом, следствие доказано.

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрим задачу (1), (2) в случае $n = 2$, $k = 4$, полагая

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0,02 \cdot t & 0 \\ 0 & -0,02 \cdot t \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0,03 \cdot t^2 & 0 \\ 0 & 0,03 \cdot t^2 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix},$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2}{5}, \quad t_3 = \frac{7}{10}, \quad t_4 = 1.$$

Примем следующую норму матриц: $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

Применительно к этой задаче имеем

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} 0,03 \cdot t^2 & 0 \\ 0 & 0,03 \cdot t^2 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} e^{0,01t^3} & 0 \\ 0 & e^{0,01t^3} \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1,0006402048436978 \\ -1,010050167084168 & 1,0034358891813724 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 0,02, \quad \beta_2 = 0, \quad h = 1,5, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 1, \quad m_4 = 1,$$

$$\gamma = 0,9979730589745677, \quad \mu_1 = 1,010050167084168, \quad \mu_2 = 1, \quad v_1 = 1,$$

$$v_2 = 1,0006402048436978, \quad v_3 = 1,0034358891813724, \quad v_4 = 1,010050167084168,$$

$$\det \Phi = 2,0141326952748853, \quad q = 0,08092501462758205.$$

Алгоритм построения решения данной задачи имеет вид

$$X_p(t) = V(t) \Phi^{-1} \sum_{i=1}^4 M_i \int_{t_i}^t [A(\tau) X_{p-1}(\tau) + X_{p-1}(\tau) B_2(\tau) + F(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i, \quad (35)$$

$$p = 1, 2, \dots$$

По формуле (35) получены приближенные решения $X_1(t)$, $X_2(t)$, которые здесь не приведены ввиду их громоздкости. В качестве начального приближения $X_0(t)$ принята нулевая матрица второго порядка. Вычислено приближенное решение $X_2(t)$ в точках $t_i = 0,1 \cdot i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 10$). Результаты приведены в таблицах 1, 2.

Таблица 1 – Элементы $X_{2(11)}(t)$, $X_{2(12)}(t)$ приближенного решения

t_i	$X_{2(11)}(t_i)$	$X_{2(12)}(t_i)$
0	-0,10179388782334228	-0,5838894000199764
0,1	-0,0968046871534001	-0,4839460877569011
0,2	-0,08183731975426259	-0,3841038540449341
0,3	-0,05688440696723698	-0,28433079811881606
0,4	-0,02192538144399908	-0,18457708667219275
0,5	0,02307713816593243	-0,08477491750304711
0,6	0,07818101961212265	0,01516158634196249
0,7	0,14346836234729732	0,1153365683907367
0,8	0,21904934644363855	0,215872733422614
0,9	0,3050662209655689	0,31691176252671405
1	0,40169747313432796	0,4186148669733551

Таблица 2 – Элементы $X_{2(21)}(t)$, $X_{2(22)}(t)$ приближенного решения

t_i	$X_{2(21)}(t_i)$	$X_{2(22)}(t_i)$
0	-0,2982596385986007	0,6644909739602713
0,1	-0,19823859888148043	0,6594316126087342
0,2	-0,09820507239546045	0,6442822518533989
0,3	0,00181005644474786	0,6190871825696718
0,4	0,10179388782334212	0,5838894000199765
0,5	0,2017514645811606	0,538727002118997
0,6	0,30170572597991074	0,48362961890278755
0,7	0,401697473134328	0,41861486697335504
0,8	0,501785361965581	0,34368481827528063
0,9	0,6020459394613651	0,2588224681881494
1	0,7025737390337498	0,16398818355686567

Точное решение данной задачи имеет вид

$$X(t) = U(t)X(0)V(t) + U(t) \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau V(t),$$

где

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^{0,01t^2} & 0 \\ 0 & e^{-0,01t^2} \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} e^{0,01t^3} & 0 \\ 0 & e^{0,01t^3} \end{pmatrix},$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} -0,10179095066151522 & -0,5838825176210544 \\ -0,2982606622859577 & 0,6644868488044693 \end{pmatrix}.$$

Достаточно точное численное решение в точках $t_i = 0,1 \cdot i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 10$) приведено в таблицах 3, 4.

Таблица 3 – Элементы $X_{11}(t)$, $X_{12}(t)$ точного численного решения

t_i	$X_{11}(t_i)$	$X_{12}(t_i)$
0	-0,10179095066151522	-0,5838825176210544
0,1	-0,09680186827157113	-0,48393933123572014
0,2	-0,08183486123693787	-0,3840975024903627
0,3	-0,05688256473759989	-0,2843251955677172
0,4	-0,02192442480916995	-0,18457264870389334
0,5	0,02307694179671822	-0,08477210621080478
0,6	0,07817944092047348	0,01516231907437127
0,7	0,1434652734616924	0,11533486961579609
0,8	0,2190448179909899	0,2158684705051872
0,9	0,30506065977249996	0,316905178257176
1	0,40169180812604094	0,41860677005676594

Таблица 4 – Элементы $X_{21}(t)$, $X_{22}(t)$ точного численного решения

t_i	$X_{21}(t_i)$	$X_{22}(t_i)$
0	-0,2982606622859577	0,6644868488044693
0,1	-0,19823973648939586	0,6594272676726507
0,2	-0,0982065622657202	0,6442772867156984
0,3	0,00180796205332806	0,6190813113345198
0,4	0,10179095066151528	0,5838825176210544
0,5	0,20174752022050518	0,5387192356804867
0,6	0,30170077567366616	0,4836213584840102
0,7	0,40169180812604083	0,41860677005676605
0,8	0,5017797209780046	0,3436777822982678
0,9	0,6020417005358595	0,2588175652424226
1	0,7025731474363291	0,1639865510591174

Для сравнения полученного приближенного решения с точным приведены таблицы 5, 6.

Таблица 5 – Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$ X_{11}(t_i) - X_{2(11)}(t_i) $	$ X_{12}(t_i) - X_{2(12)}(t_i) $
0	$2,937161827060164 \cdot 10^{-6}$	$6,882398921992383 \cdot 10^{-6}$
0,1	$2,818881828972608 \cdot 10^{-6}$	$6,75652118098391 \cdot 10^{-6}$
0,2	$2,4585173247215764 \cdot 10^{-6}$	$6,35155457140435 \cdot 10^{-6}$
0,3	$1,84222963709596 \cdot 10^{-6}$	$5,602551098882191 \cdot 10^{-6}$
0,4	$9,566348291301097 \cdot 10^{-7}$	$4,437968299408901 \cdot 10^{-6}$
0,5	$1,9636921420873588 \cdot 10^{-7}$	$2,8112922423328968 \cdot 10^{-6}$
0,6	$1,5786916491705716 \cdot 10^{-6}$	$7,327324087758047 \cdot 10^{-7}$
0,7	$3,0888856049071656 \cdot 10^{-6}$	$1,698774940606107 \cdot 10^{-6}$

Окончание таблицы 5

t_i	$ X_{11}(t_i) - X_{2(11)}(t_i) $	$ X_{12}(t_i) - X_{2(12)}(t_i) $
0,8	$4,528452648644432 \cdot 10^{-6}$	$4,262917426806068 \cdot 10^{-6}$
0,9	$5,561193068936987 \cdot 10^{-6}$	$6,584269538034704 \cdot 10^{-6}$
1	$5,665008287025763 \cdot 10^{-6}$	$8,096916589150904 \cdot 10^{-6}$

Таблица 6 – Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$ X_{21}(t_i) - X_{2(21)}(t_i) $	$ X_{22}(t_i) - X_{2(22)}(t_i) $
0	$1,0236873569935412 \cdot 10^{-6}$	$4,12515580205941 \cdot 10^{-6}$
0,1	$1,13760791542461 \cdot 10^{-6}$	$4,344936083477968 \cdot 10^{-6}$
0,2	$1,4898702597465618 \cdot 10^{-6}$	$4,965137700541078 \cdot 10^{-6}$
0,3	$2,0943914198004454 \cdot 10^{-6}$	$5,871235151944099 \cdot 10^{-6}$
0,4	$2,9371618268381194 \cdot 10^{-6}$	$6,882398922103405 \cdot 10^{-6}$
0,5	$3,9443606554279143 \cdot 10^{-6}$	$7,766438510303786 \cdot 10^{-6}$
0,6	$4,950306244588809 \cdot 10^{-6}$	$8,26041877328304 \cdot 10^{-6}$
0,7	$5,665008287192297 \cdot 10^{-6}$	$8,09691658898437 \cdot 10^{-6}$
0,8	$5,640987576382983 \cdot 10^{-6}$	$7,0359770128480825 \cdot 10^{-6}$
0,9	$4,238925505606339 \cdot 10^{-6}$	$4,902945726803498 \cdot 10^{-6}$
1	$5,91597420607215 \cdot 10^{-7}$	$1,6324977482606862 \cdot 10^{-6}$

Оценка погрешностей вычислений, полученная на основании подробных таблиц типа 5, 6, имеет вид

$$\|X(t) - X_2(t)\| \leq 8,29216543374312 \cdot 10^{-6}.$$

Заметим, что соответствующая оценка, полученная на основе теоретической оценки (27), грубее этой оценки, а именно

$$\|X(t) - X_2(t)\| \leq 0,00685218192745706.$$

Заключение

Анализ полученных теоретических результатов с учетом выполненных расчетов для модельной задачи показывает, что они могут быть достаточно эффективно использованы при решении соответствующих прикладных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Бондарев, А. Н.** Анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова на основе конструктивного метода регуляризации / А. Н. Бондарев // Весн. Магілёўскага дзярж. ўн-та імя А. А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2011. – № 1(37). – С. 19–30.
2. **Bondarev, A. N.** Multipoint Boundary Value Problem for the Linear Matrix Lyapunov Equation with Parameter / A. N. Bondarev // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations “QUALITDE – 2015”: abstracts, Tbilisi, 27–29 Dec. 2015 / A. Razmadze Mathem. Inst. ; ed.: I. Kiguradze [et al.]. – Tbilisi, 2015. – P. 32–35.
3. **Бондарев, А. Н.** Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий / А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 776–784.
4. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
5. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.
6. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.
7. **Зубов, В. И.** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва : Наука, 1975. – 496 с.
8. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.

9. **Бибиков, Ю. Н.** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – Москва : Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 28.02.2018 г.

Контакты: alex-bondarev@tut.by (Бондарев Александр Николаевич)

Bondarev A. CONSTRUCTIVE ANALYSIS OF THE MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LYAPUNOV MATRIX EQUATION BASED ON THE RIGHT-SIDED DECOMPOSITION.

Constructive sufficient conditions for one-valued solvability of the multipoint boundary value problem for the Lyapunov matrix equation are obtained on the basis of the right-sided decomposition of coefficients. The iterative algorithm with a computational scheme of the classical method of successive approximations of solution construction is developed.

Keywords: Lyapunov matrix equation, multipoint boundary value problem, existence and uniqueness of solution, algorithm, convergence.

УДК 517.925

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. И. КАШПАР

старший преподаватель,
Белорусско-Российский университет (Могилев)

Разработан итерационный алгоритм построения решения двухточечной краевой задачи для матричного уравнения второго порядка, представляющего собой обобщение классического уравнения Ляпунова. Изучены вопросы его сходимости, скорости сходимости и выведена оценка области локализации решения.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, краевая задача, алгоритм построения решения.

Рассмотрим краевую задачу [1]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{X}(t)}{dt^2} = \mathbf{A}(t) \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} \mathbf{B}(t) + \lambda (\mathbf{A}_1(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{X}(t) \mathbf{B}_1(t)) + \\ + \lambda \left(\mathbf{A}_2(t) \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} \mathbf{B}_2(t) \right) + \mathbf{F}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{X}(0, \lambda) = \mathbf{M}, \quad (2)$$

$$\mathbf{X}(\omega, \lambda) = \mathbf{N}, \quad (3)$$

где $t \in [0, \omega]$, $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$ ($i = 1, 2$) – матрицы класса $C[0, \omega]$ соответствующих размерностей; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы.

Краевые задачи для матричных дифференциальных уравнений встречаются, прежде всего, в теории управления, а также в различных прикладных задачах (см., например, [2–4]). Задачи типа (1)–(3) в скалярном случае играют важную роль в теплофизике [5, 6].

В данной работе предлагается итерационный алгоритм построения решения задачи 1–3 на основе соответствующей эквивалентной задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{Y}, \\ \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}(t) + \tilde{\mathbf{H}}(t, \lambda, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tilde{\mathbf{H}}(t, \lambda, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \lambda (\mathbf{A}_1(t) \mathbf{X}(t, \lambda) + \mathbf{X}(t, \lambda) \mathbf{B}_1(t)) + \lambda (\mathbf{A}_2(t) \mathbf{Y}(t, \lambda) +$

$+\mathbf{Y}(t, \lambda) \mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{H}(t, \lambda)$.

В работе [1] установлено, что задача (2)–(4) эквивалентна интегральной задаче

$$\mathbf{X}(t, \lambda) = \mathbf{M} + \int_0^t \mathbf{Y}(\tau, \lambda) d\tau. \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t, \lambda) = \mathbf{U}(t) \left(\Phi^{-1} (\mathbf{N} - \mathbf{M}) \right) \mathbf{V}(t) + \\ + \mathbf{U}(t) \Phi^{-1} \left(\int_0^\omega \mathbf{U}(\tau) \left(\int_\tau^t \mathbf{U}^{-1}(s) \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) \mathbf{V}(\tau) d\tau \right) \mathbf{V}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где $U(t), V(t)$ – интегральные матрицы уравнений

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \quad U(0) = E_n, \quad \frac{dV(t)}{dt} = V(t)B(t), \quad V(0) = E_m;$$

E_k – единичная матрица порядка k , Φ – матричный оператор,

$$\Phi Z(t) = \int_0^{\omega} U(\tau) Z(t) V(\tau) d\tau.$$

Запишем систему уравнений (5), (6) в следующем виде:

$$X(t, \lambda) = M + P_{UV}(t) +$$

$$+ \int_0^t U(\varphi) \Phi^{-1} \left(\int_0^{\omega} U(\tau) \left(\int_{\tau}^{\varphi} U^{-1}(s) H(s, \lambda) V^{-1}(s) ds \right) V(\tau) d\tau \right) V(\varphi) d\varphi, \quad (7)$$

$$Y(t, \lambda) = Q_{UV}(t) + U(t) \Phi^{-1} \left(\int_0^{\omega} U(\tau) \left(\int_{\tau}^t U^{-1}(s) H(s, \lambda) V^{-1}(s) ds \right) V(\tau) d\tau \right) V(t), \quad (8)$$

где

$$P_{UV}(t) = \int_0^t U(\tau) (\Phi^{-1}(N - M)) V(\tau) d\tau, \quad Q_{UV}(t) = dP_{UV}(t) dt = U(t) (\Phi^{-1}(N - M)) V(t).$$

В [1] на основе исследования задачи (7), (8) получены условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3), которые нам понадобятся далее по ходу изложения. Примем обозначения [1]:

$$\alpha_i = \max_t \|A_i(t)\|, \quad \beta_i = \max_t \|B_i(t)\| \quad (i = 1, 2; \quad t \in [0, \omega]),$$

$$\tilde{P}_{UV} = M + P_{UV} + \mathcal{L}_1(0, 0), \quad \tilde{Q}_{UV} = Q_{UV} + \mathcal{L}_2(0, 0), \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$

$$\lambda_U = \max_{0 \leq s \leq t \leq \omega} \|U(\tau) U^{-1}(s)\|, \quad \lambda_V = \max_{0 \leq s \leq t \leq \omega} \|V^{-1}(s) V(\tau)\|, \quad a_1 = \frac{\omega^3}{3} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 (\alpha_1 + \beta_1),$$

$$b_1 = \gamma \frac{\omega^3}{3} \lambda_U^2 \lambda_V^2 (\alpha_2 + \beta_2), \quad a_2 = \frac{\omega^2}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 (\alpha_1 + \beta_1), \quad b_2 = \frac{\omega^2}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 (\alpha_2 + \beta_2),$$

$$D = \{t \in [0, \omega], |\lambda| < \lambda_0, \|X\| < \infty, \|Y\| < \infty\}, \quad \lambda_0 = 1 / (a_1 + b_2)$$

$$Z = \begin{pmatrix} \|X\|_c \\ \|Y\|_c \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad H_0 = \begin{pmatrix} \|\tilde{P}_{UV}\|_c \\ \|\tilde{Q}_{UV}\|_c \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ – интегральные операторы, определяемые на основе (7), (8), $\|S\|_c = \max_t \|S(t)\|$; $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц.

Теорема [1]. Пусть оператор Φ обратим и выполнено условие

$$\varepsilon(a_1 + b_2) < 1. \quad (9)$$

Тогда задача – однозначно разрешима в области D .

Замечание 1. Поскольку исследуется однозначная разрешимость данной задачи, то, очевидно, подразумевается однозначная обратимость оператора Φ . Некоторые способы обращения этого оператора предложены в [7]. Там же изложены все результаты исследования задачи (1)–(3).

Для построения решения задачи (7), (8) воспользуемся алгоритмом итерационного типа с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений (см., например, [8, 9]). Для удобства изложения задачу (7), (8) запишем в операторном виде

$$X = M + P_{UV} + \mathcal{L}_1(X, Y) \equiv \tilde{\mathcal{L}}_1(X, Y), \quad (10)$$

$$Y = Q_{UV} + \mathcal{L}_2(X, Y) \equiv \tilde{\mathcal{L}}_2(X, Y), \quad (11)$$

где через $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ обозначены соответствующие линейные интегральные операторы в (7), (8). Эти операторы действуют на множестве $G = \{(\mathbf{X}(t, \lambda), \mathbf{Y}(t, \lambda)) \in \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} : \|\mathbf{X}\|_C < \infty, \|\mathbf{Y}\|_C < \infty\}$, где $(t, \lambda) \in [0, \omega] \times \mathbb{R}$.

Применительно к задаче (10), (11) этот алгоритм дается соотношениями

$$\mathbf{X}_{m+1} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{UV} + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m), \quad (12)$$

$$\mathbf{Y}_{m+1} = \mathbf{Q}_{UV} + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(t, \lambda)$, $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_0(t, \lambda)$ – произвольные непрерывные матричные функции (в частности $\mathbf{X}_0 = 0, \mathbf{Y}_0 = 0$).

Теорема. Пусть оператор Φ обратим и выполнено условие (9). Тогда задача (2)–(4) однозначно разрешима в области D , ее решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности $\{\mathbf{X}_m(t, \lambda), \mathbf{Y}_m(t, \lambda)\}_1^\infty$, члены которой определяются рекуррентными соотношениями (12), (13) и удовлетворяют условиям (2), (3).

Доказательство. Сначала исследуем сходимость и скорость сходимости последовательности $\{\mathbf{X}_m(t, \lambda), \mathbf{Y}_m(t, \lambda)\}_1^\infty$. Следуя известному приему (см., например [8, 9]), вместо этой последовательности рассмотрим матричные функциональные ряды

$$\mathbf{X}_0(t) + (\mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_0(t)) + \dots + (\mathbf{X}_k(t) - \mathbf{X}_{k-1}(t)) + \dots, \quad (14)$$

$$\mathbf{Y}_0(t) + (\mathbf{Y}_1(t) - \mathbf{Y}_0(t)) + \dots + (\mathbf{Y}_k(t) - \mathbf{Y}_{k-1}(t)) + \dots \quad (15)$$

Равномерную сходимость этих рядов установим на основе построения соответствующих мажорантных числовых рядов. Из (12) имеем

$$\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k = \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k) - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) =$$

$$= \int_0^t \mathbf{U}(\varphi) \Phi^{-1} \left(\int_0^\omega \int_\tau^\varphi \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right) d\tau \mathbf{V}(\varphi) d\varphi, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\mathbf{K}_U(\tau, s) = \mathbf{U}(\tau) \mathbf{U}^{-1}(s)$, $\mathbf{K}_V(s, \tau) = \mathbf{V}^{-1}(s) \mathbf{V}(\tau)$,

$$\Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) = \lambda \left[\mathbf{A}_1(s) (\mathbf{X}_k(s, \lambda) - \mathbf{X}_{k-1}(s, \lambda)) + (\mathbf{X}_k(s, \lambda) - \mathbf{X}_{k-1}(s, \lambda)) \mathbf{B}_1(s) + \right. \\ \left. + \mathbf{A}_2(s) (\mathbf{Y}_k(s, \lambda) - \mathbf{Y}_{k-1}(s, \lambda)) + (\mathbf{Y}_k(s, \lambda) - \mathbf{Y}_{k-1}(s, \lambda)) \mathbf{B}_2(s) \right].$$

Выполнив оценки по норме в (16), получим последовательно

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k\| &= \|\mathcal{L}_1(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k) - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1})\| \leq \\ &\leq \int_0^t \left\| \mathbf{U}(\varphi) \Phi^{-1} \left(\int_0^\omega \int_\tau^\varphi \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right) d\tau \mathbf{V}(\varphi) \right\| d\varphi \leq \\ &\leq \int_0^t \|\mathbf{U}(\varphi)\| \left\| \Phi^{-1} \left(\int_0^\omega \int_\tau^\varphi \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right) d\tau \right\| \|\mathbf{V}(\varphi)\| d\varphi \leq \\ &\leq \int_0^t \|\mathbf{U}(\varphi)\| \|\mathbf{V}(\varphi)\| \left\| \Phi^{-1} \left(\int_0^\omega \int_\tau^\varphi \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right) d\tau \right\| d\varphi \leq \\ &\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^t \int_0^\omega \left\| \int_\tau^\varphi \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right\| d\tau d\varphi \leq \\ &\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^t \int_0^\omega \left\| \int_\tau^\varphi \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right\| d\tau d\varphi \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^t \int_0^\omega \left| \int_\tau^\varphi \left\| \mathbf{K}_U(\tau, s) \right\| \left\| \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \right\| \left\| \mathbf{K}_V(s, \tau) \right\| ds \right| d\tau d\varphi \leq \\
&\leq \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \int_0^\omega \int_0^\varphi \left\| \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \right\| ds d\tau d\varphi.
\end{aligned} \tag{17}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
\left\| \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \right\| &= \left| \lambda \right| \left\| \mathbf{A}_1(s) (\mathbf{X}_k(s, \lambda) - \mathbf{X}_{k-1}(s, \lambda)) + (\mathbf{X}_k(s, \lambda) - \mathbf{X}_{k-1}(s, \lambda)) \mathbf{B}_1(s) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{A}_2(s) (\mathbf{Y}_k(s, \lambda) - \mathbf{Y}_{k-1}(s, \lambda)) + (\mathbf{Y}_k(s, \lambda) - \mathbf{Y}_{k-1}(s, \lambda)) \mathbf{B}_2(s) \right\| \leq \\
&\leq \varepsilon \left(\left\| \mathbf{A}_1(s) (\mathbf{X}_k(s, \lambda) - \mathbf{X}_{k-1}(s, \lambda)) \right\| + \left\| (\mathbf{X}_k(s, \lambda) - \mathbf{X}_{k-1}(s, \lambda)) \mathbf{B}_1(s) \right\| + \right. \\
&\quad \left. + \left\| \mathbf{A}_2(s) (\mathbf{Y}_{k-1}(s, \lambda) - \mathbf{Y}_k(s, \lambda)) \right\| + \left\| (\mathbf{Y}_k(s, \lambda) - \mathbf{Y}_{k-1}(s, \lambda)) \mathbf{B}_2(s) \right\| \right) \leq \\
&\leq \varepsilon \left(\left(\left\| \mathbf{A}_1(s) \right\| + \left\| \mathbf{B}_1(s) \right\| \right) \left\| \mathbf{X}_k(s, \lambda) - \mathbf{X}_{k-1}(s, \lambda) \right\| + \left(\left\| \mathbf{A}_2(s) \right\| + \left\| \mathbf{B}_2(s) \right\| \right) \left\| \mathbf{Y}_k(s, \lambda) - \mathbf{Y}_{k-1}(s, \lambda) \right\| \right) \leq \\
&\leq \varepsilon \left((\alpha_1 + \beta_1) \left\| \mathbf{X}_k(s, \lambda) - \mathbf{X}_{k-1}(s, \lambda) \right\| + (\alpha_2 + \beta_2) \left\| \mathbf{Y}_k(s, \lambda) - \mathbf{Y}_{k-1}(s, \lambda) \right\| \right) \leq \\
&\leq \varepsilon (\alpha_1 + \beta_1) \left\| \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \right\|_C + \varepsilon (\alpha_2 + \beta_2) \left\| \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \right\|_C,
\end{aligned} \tag{18}$$

то продолжая оценки в (17), получим

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k \right\| &= \left\| \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k) - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) \right\| \leq \\
&\leq \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \int_0^\omega \int_0^\varphi \int_\tau^\varphi \left(\varepsilon (\alpha_1 + \beta_1) \left\| \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \right\|_C + \varepsilon (\alpha_2 + \beta_2) \left\| \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \right\|_C \right) ds d\tau d\varphi \leq \\
&\leq \varepsilon \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \left((\alpha_1 + \beta_1) \left\| \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \right\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \left\| \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \right\|_C \right) \int_0^\omega \int_0^\varphi \int_\tau^\varphi d\varphi d\tau d\varphi \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \left((\alpha_1 + \beta_1) \left\| \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \right\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \left\| \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \right\|_C \right) \int_0^\omega \left(\varphi^2 + (\omega - \varphi)^2 \right) d\varphi \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon \omega^3}{3} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \left((\alpha_1 + \beta_1) \left\| \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \right\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \left\| \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \right\|_C \right) \leq \\
&\leq \varepsilon a_1 \left\| \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \right\|_C + \varepsilon b_1 \left\| \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \right\|_C.
\end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\left\| \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k \right\|_C \leq \varepsilon a_1 \left\| \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \right\|_C + \varepsilon b_1 \left\| \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \right\|_C. \tag{19}$$

Аналогичные оценки выполним на основе (13). Из (13) имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{Y}_k &= \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k) - \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) = \\
&= \mathbf{U}(t) \Phi^{-1} \left(\int_0^\omega \int_\tau^\varphi \left\| \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) \right\| ds d\tau \right) \mathbf{V}(t).
\end{aligned} \tag{20}$$

Производя оценки по норме в (20), получим с использованием (18)

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{Y}_k \right\| &= \left\| \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k) - \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_{k-1}, \mathbf{Y}_{k-1}) \right\| \leq \\
&\leq \left\| \mathbf{U}(t) \right\| \left\| \Phi^{-1} \left(\int_0^\omega \int_\tau^\varphi \left\| \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) \right\| ds d\tau \right) \right\| \left\| \mathbf{V}(t) \right\| \leq \\
&\leq \lambda_U \lambda_V \left\| \Phi^{-1} \left(\int_0^\omega \int_\tau^\varphi \left\| \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) \right\| ds d\tau \right) \right\| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^\omega \left\| \int_\tau^t \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right\| d\tau \leq \\
&\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^\omega \left\| \int_\tau^t \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) \right\| ds d\tau \leq \\
&\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^\omega \left\| \int_\tau^t \mathbf{K}_U(\tau, s) \right\| \left\| \Delta \mathbf{H}_{k-1}(s, \lambda) \right\| \left\| \mathbf{K}_V(s, \tau) \right\| ds d\tau \leq \\
&\leq \varepsilon \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \left((\alpha_1 + \beta_1) \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}\|_C \right) \int_0^\omega |t - \tau| d\tau \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon \omega^2}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \left((\alpha_1 + \beta_1) \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}\|_C \right) \leq \\
&\leq \varepsilon a_2 \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|_C + \varepsilon b_2 \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}\|_C.
\end{aligned} \tag{21}$$

Из следует оценка

$$\|\mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{Y}_k\|_C \leq \varepsilon a_2 \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|_C + \varepsilon b_2 \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}\|_C. \tag{22}$$

Рекуррентные оценки (19), (22) запишем в матричном виде

$$\mathbf{Z}_k = \varepsilon \mathbf{K} \mathbf{Z}_{k-1}, \tag{23}$$

где $\mathbf{Z}_i = colon(\|\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i\|_C, \|\mathbf{Y}_{i+1} - \mathbf{Y}_i\|_C)$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

На основе имеем явную оценку

$$\mathbf{Z}_m = (\varepsilon \mathbf{K})^m \mathbf{Z}_0, \tag{24}$$

с помощью которой получим оценку области локализации решения задачи (1)–(3)

$$\mathbf{Z} \leq \mathbf{Z}_0^* + (\mathbf{E} - \varepsilon \mathbf{K})^{-1} \mathbf{Z}_0,$$

где $\mathbf{Z}_0^* = colon(\|\mathbf{X}_0\|_C, \|\mathbf{Y}_0\|_C)$.

Используя условие (9), можно установить с помощью [10, с. 370], что характеристические числа положительной матрицы $\varepsilon \mathbf{K}$ расположены внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат, при этом матрица $\mathbf{E} - \varepsilon \mathbf{K}$ положительно обратима. Стало быть на множестве G имеют место соотношения (19), (22), являющиеся условием модификации [11, гл. 3] обобщенного принципа [12, с. 94] сжимающих отображений применительно к системе интегральных уравнений (10), (11). На основании этого заключаем, что ряды (14), (15) сходятся равномерно по $t \in [0, \omega]$ к решению $\mathbf{X}(t, \lambda)$, $\mathbf{Y}(t, \lambda)$ системы уравнений (10), (11). Единственность решения очевидна, поскольку операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, а значит и $\tilde{\mathcal{L}}_1$, $\tilde{\mathcal{L}}_2$, удовлетворяют условию обобщенного сжатия на основании (9). Теорема полностью доказана.

Используя (24), получим оценку погрешности приближенного решения $\mathbf{X}_m(t, \lambda)$, $\mathbf{Y}_m(t, \lambda)$:

$$\tilde{\mathbf{Z}}_m = (\varepsilon \mathbf{K})^m (\mathbf{E} - \varepsilon \mathbf{K})^{-1} \mathbf{Z}_0, \tag{25}$$

где $\tilde{\mathbf{Z}}_m = colon(\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_m\|_C, \|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_m\|_C)$.

Замечание 2. Равномерную сходимость последовательности $\{\mathbf{X}_m(t, \lambda), \mathbf{Y}_m(t, \lambda)\}_1^\infty$ к решению системы (10), (11) можно доказать другим известным способом. Из систем (7), (8), (10), (11) получим последовательно

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{m+1} - \mathbf{X} + \mathbf{X} &= \mathbf{M} + \mathbf{P}_{UV} + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m) - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \\
\mathbf{Y}_{m+1} - \mathbf{Y} + \mathbf{Y} &= \mathbf{Q}_{UV} + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m) - \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \\
\mathbf{X} - \mathbf{M} - \mathbf{P}_{UV} - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \mathbf{X} - \mathbf{X}_{m+1} + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m) - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\mathbf{Y} - \mathbf{Q}_{UV} - \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_{m+1} + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m) - \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \tag{27}$$

Выполнив оценки по норме в (26), (27) получим

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{X} - \mathbf{M} - \mathbf{P}_{UV} - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\| &= \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{m+1} + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m) - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\| \leq \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{m+1}\| + \\
&+ \|\mathcal{L}_1(\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m) - \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\| \leq \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{m+1}\|_C + \varepsilon a_1 \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_m\|_C + \varepsilon b_1 \|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_m\|_C,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|Y - Q_{UV} - \mathcal{L}_2(X, Y)\| &= \|Y - Y_{m+1} + \mathcal{L}_2(X_m, Y_m) - \mathcal{L}_2(X, Y)\| \leq \|Y - Y_{m+1}\| + \\ &+ \|\mathcal{L}_2(X_m, Y_m) - \mathcal{L}_2(X, Y)\| \leq \|Y - Y_{m+1}\|_C + \varepsilon a_2 \|X - X_m\|_C + \varepsilon b_2 \|Y - Y_m\|_C, \end{aligned}$$

или в матричном виде:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \|X - M - P_{UV} - \mathcal{L}_1(X, Y)\| \\ \|Y - Q_{UV} - \mathcal{L}_2(X, Y)\| \end{pmatrix} &\leq \begin{pmatrix} \|X - X_{m+1}\|_C \\ \|Y - Y_{m+1}\|_C \end{pmatrix} + \varepsilon K \begin{pmatrix} \|X - X_m\|_C \\ \|Y - Y_m\|_C \end{pmatrix} \leq \\ &\leq \varepsilon^{m+1} (E - \varepsilon K)^{-1} K^{m+1} Z_0 + \varepsilon K \varepsilon^m (E - \varepsilon K)^{-1} K^m Z_0 = \\ &= 2(\varepsilon K)^{m+1} (E - \varepsilon K)^{-1} Z_0. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{pmatrix} \|X - M - P_{UV} - \mathcal{L}_1(X, Y)\|_C \\ \|Y - Q_{UV} - \mathcal{L}_2(X, Y)\|_C \end{pmatrix} \leq 2(\varepsilon K)^{m+1} (E - \varepsilon K)^{-1} Z_0. \quad (28)$$

Соотношение выполняется при $m = 0, 1, 2, \dots, k$. На основании условия (9) в пределе при $k \rightarrow \infty$ имеем $\|X - M - P_{UV} - \mathcal{L}_1(X, Y)\| \equiv 0$, $\|Y - Q_{UV} - \mathcal{L}_2(X, Y)\| \equiv 0$, то есть (X, Y) – решение системы уравнений (12), (13).

Замечание 3. В качестве начального приближения можно принять произвольные непрерывные матричные функции $X_0(t, \lambda)$, $Y_0(t, \lambda)$.

Для иллюстрации применения результатов рассмотрим модельную одномерную задачу

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda \left(2a \frac{dx}{dt} + 3ax \right) + \sin t \quad (29)$$

при граничных условиях

$$x(0, \lambda) = 0, \quad x(\pi, \lambda) = 2, \quad \lambda, a \in \mathbb{R}. \quad (30)$$

Данная задача имеет точное решение в конечном виде, что позволяет достаточно полно выполнять анализ условий разрешимости задачи и алгоритмов построения его решений.

Имеем одномерный вариант задачи Валле-Пуссена (1)–(3). При этом:

$$F(t) = \sin t, \quad A(t) = 0, \quad B(t) = 0, \quad A_1(t) = 3a, \quad A_2(t) = 2a, \quad B_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad M = 0, \quad N = 2,$$

$$\omega = \pi, \quad \alpha_1 = 3a, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2a, \quad \beta_2 = 0, \quad \lambda_U = 1, \quad \lambda_V = 1, \quad \gamma = 1/\pi, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$

$$a_1 = \frac{\pi^3}{3} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 (\alpha_1 + \beta_1) = 0.0987, \quad b_1 = \gamma \frac{\pi^3}{3} \lambda_U^2 \lambda_V^2 (\alpha_2 + \beta_2) = 0.0658,$$

$$a_2 = \frac{\pi^2}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 (\alpha_1 + \beta_1) = 0.04712, \quad b_2 = \frac{\pi^2}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 (\alpha_2 + \beta_2) = 0.03142.$$

Для нахождения решения задачи воспользуемся изложенным методом.

Учитывая, что $A(t) = 0$, $B(t) = 0$, сведем задачу (29), (30) к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t y(\tau) d\tau, \\ y(t) &= \frac{2}{\pi} + \int_0^\pi \varphi(t, \tau) [\lambda (3ax(\tau) + 2ay(\tau)) + \sin \tau] d\tau, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\varphi(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\pi}, & 0 \leq \tau \leq t \leq \pi, \\ \frac{\tau}{\pi} - 1, & 0 \leq t < \tau \leq \pi. \end{cases}$$

Решение $x(t), y(t)$ системы будем называть системным решением. Используя изложенный алгоритм, приближенное системное решение получим в виде

$$\begin{aligned}x_m(t, \lambda) &= x_0(t) + \lambda x_1(t) + \dots + \lambda^k x_m(t), \\y_m(t, \lambda) &= y_0(t) + \lambda y_1(t) + \dots + \lambda^k y_m(t),\end{aligned}\quad (32)$$

где

$$\begin{aligned}y_0(t) &= \frac{2}{\pi} - \cos t, \quad x_0(t) = \int_0^t y_0(\tau) d\tau, \\y_k(t) &= \int_0^{\omega} \varphi(t, \tau) (3ax_{k-1}(\tau) + 2ay_{k-1}(\tau)) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

В данном случае имеем

$$\begin{aligned}y_0(t) &= \frac{2}{\pi} - \cos t, \quad x_0(t) = \frac{2t}{\pi} - \sin t, \\y_1(t) &= \frac{a}{\pi} (3t^2 + 4t + 3\pi \cos t - 2\pi \sin t - \pi^2 - 2\pi + 4), \\x_1(t) &= \frac{a}{\pi} (t^3 + 2t^2 - \pi^2 t + (4 - 2\pi)t + 2\pi \cos t + 3\pi \sin t - 2\pi).\end{aligned}$$

Рассмотрим приближенное системное решение рассматриваемой задачи

$$\tilde{x}(t) \approx \tilde{x}_1(t) = x_0(t) + \lambda x_1(t), \quad \tilde{y}(t) \approx \tilde{y}_1(t) = y_0(t) + \lambda y_1(t).$$

Далее найдем точное решение задачи (29), (30) при $\lambda = 1$, $a \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$:

$$x(t) = \frac{2a \cos t - (3a+1) \sin t}{13a^2 + 6a + 1} + \frac{(26a^2 + 14a + 2)(e^{k_1 t} - e^{k_2 t}) + 2a(e^{k_2 t + k_1 \pi} - e^{k_1 t + k_2 \pi})}{(13a^2 + 6a + 1)(e^{k_2 \pi} - e^{k_1 \pi})},$$

где $k_1 = a - \sqrt{a(a+3)}$, $k_2 = a + \sqrt{a(a+3)}$.

Заметим, что при $k_1 = k_2$, ($a = 0$, $a = -3$) точное решение задачи представимо в виде

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{3}{50} e^{-3t} + \frac{97e^{3\pi} - 3}{50\pi} t e^{-3t} + \frac{2}{25} \sin t - \frac{3}{50} \cos t \quad (a = -3), \\x(t) &= \frac{2t}{\pi} - \sin t \quad (a = 0).\end{aligned}$$

Приближенное $\tilde{x}_1(t)$ и точное решения в узлах $t_i = 0.3i$ ($i = 0, 1, \dots, 10$) и при $t = \pi$ сведем в таблицу 1.

Таблица 1 – Значения в узлах $t_i = 0.3i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 10$) приближенного и точного решений при $a = 0.01$; сравнение их

t	$x(t)$	$\tilde{x}_1(t)$	$x(t) - \tilde{x}_1(t)$
0	0.000000	0.000000	0.000000
0.3	-0.107249	-0.107508	0.000260
0.6	-0.188963	-0.189455	0.000493
0.9	-0.221091	-0.221775	0.000685
1.2	-0.183821	-0.184640	0.000819
1.5	-0.063304	-0.064184	0.000880
1.8	0.147157	0.146299	0.000858
2.1	0.446559	0.445810	0.000749
2.4	0.826335	0.825772	0.000563
2.7	1.271178	1.270850	0.000328
3	1.760453	1.760362	0.000091
π	2.000000	2.000000	0.000000

Запишем относительную погрешность

$$\sigma = \max_i \left| \frac{x(t_i) - \tilde{x}_1(t_i)}{x(t_i)} \right| \cdot 100\% = 1.39\%,$$

при этом оценка максимальной абсолютной погрешности, полученная путем непосредственного оценивания по таблице приближенного и точного решений, характеризуется неравенством

$$\max_{0 \leq t_i \leq \pi} |x(t) - \tilde{x}_1(t)| \leq 0.00088.$$

Заметим, что соответствующая теоретическая оценка, полученная на основе (25), более грубая, а именно:

$$|x(t) - \tilde{x}_1(t)| \leq 0.036.$$

Аналогично вычислим приближенное и точное значения $\tilde{y}_1(t)$ и $y(t)$. В узлах $t_i = 0.3i$ ($i = 0, 1, \dots, 10$) результаты сведем в таблицу 2:

Таблица 2 – Значения в узлах $t_i = 0.3i$ ($i = 0, 1, \dots, 10$) приближенных и точной производной при $a = 0.01$; сравнение их

t	$y(t)$	$\tilde{y}_1(t)$	$ y(t) - \tilde{y}_1(t) $
0	-0.371169	-0.372064	0.000895
0.3	-0.329143	-0.329971	0.000829
0.6	-0.202138	-0.202855	0.000717
0.9	-0.000945	-0.001498	0.000553
1.2	0.257172	0.256838	0.000334
1.5	0.550025	0.549956	0.000069
1.8	0.852483	0.852703	0.000221
2.1	1.138722	1.139223	0.000501
2.4	1.384538	1.385261	0.000723
2.7	1.569510	1.570330	0.000820
3	1.678834	1.679547	0.000714

Запишем относительную погрешность для производной:

$$\delta = \max_i \left| \frac{y(t_i) - \tilde{y}_1(t_i)}{y(t_i)} \right| \cdot 100\% = 0.355\%$$

при этом оценка максимальной абсолютной погрешности по таблице приближенного и точной производной дается соотношением

$$\max_{0 \leq t_i \leq \pi} |y(t) - \tilde{y}_1(t)| \leq 0.0009.$$

Соответствующая теоретическая оценка имеет вид

$$|y(t) - \tilde{y}_1(t)| \leq 0.017.$$

Замечание 4. Теоретические оценки (22) выведены для общего случая, поэтому естественно, что они грубее оценок, полученных для конкретной задачи.

Замечание 5. При $\lambda = 1$ соответствующая однородная задача со спектральным параметром a для уравнений (29), (30) имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a \left(2 \frac{dx}{dt} + 3x \right), \quad (33)$$

$$x(0) = x(\pi) = 0. \quad (34)$$

Значения параметра a в рассматриваемых алгоритмах построения (при $\lambda = 1$) решения неоднородной задачи (29), (30) в виде рядов по степеням параметра a подчинены оценке $0 \leq |a| < |a_1|$, где a_1 – первый ненулевой корень уравнения $e^{k_1\pi} - e^{k_2\pi} = 0$: $a_1 = (-3 + \sqrt{5})/2$; это первое собственное значение задачи (33), (34). Задача для уравнения (33), (34) имеет нулевое решение при всех значениях a , за исключением собственных значений $a_{1,2} = (-3 \pm \sqrt{5})/2$, которым соответствуют решения

$$x_1(t) = c_1 e^{a_1 t} \sin t, \quad x_2(t) = c_2 e^{a_2 t} \sin t,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Заключение

Результаты работы заключаются в следующем:

- предложен способ редукции рассмотренной задачи Валле-Пуссена к эквивалентной системе интегральных уравнений;
- получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и алгоритм построения решения задачи;
- выведена оценка области локализации решения;
- дана иллюстрация применения полученных результатов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Кашпар, А. И.** Исследование разрешимости краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // *Вестник МДУ им. А. А. Куляшова. Сер. В. Природонаука и наука (математика, физика, биология)*. – № 2. – Могилев : МГУ, 2016. – С. 17–29.
2. **Зубов, В. И.** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва : Наука, 1975. – 496 с.
3. **Калоджеро, Ф.** Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния / Ф. Калоджеро. – Москва : Мир, 1972. – 292 с.
4. **Ларин, В. Б.** Управление шагающими аппаратами / В. Б. Ларин. – Киев : Наукова думка, 1980. – 168 с.
5. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдеевский [и др.]. – Москва : Машиностроение, 1975. – 624 с.
6. Теория тепломассообмена : учебник для вузов / С. И. Исаев, И. А. Кожин, В. И. Кофанов и др. ; под ред. А. И. Леонтьева. – Москва : Высшая школа, 1979. – 495 с.
7. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка, Часть I / В. Н. Лаптинский, А. И. Кашпар. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – 48 с. – (Препринт / Ин-т технол. металлов НАН Беларуси; № 35).
8. **Бибииков, Ю. Н.** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибииков. – Москва : Высш. шк., 1991. – 304 с.
9. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.
10. **Гантмахер, Ф. Р.** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва : Наука, 1967. – 576 с.
11. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
12. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – Москва : Наука, 1969. – 456 с.

Поступила в редакцию 08.05.2018 г.

Контакты: e-mail: alex.kashpar@tut.by (Кашпар Александр Иванович)

Kashpar A. ON THE CONSTRUCTION OF SOLUTION OF DE LA VALLEE POUSSIN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LYAPUNOV LINEAR MATRIX OF SECOND ORDER.

The iterative algorithm for constructing the solution of a two-point boundary value problem for a second-order matrix equation is developed, which is a generalization of the classical Lyapunov equation.

The questions of its convergence, the rate of convergence are studied and the estimate of the domain of the solution localization is derived.

Keywords: matrix differential equation, boundary value problem, algorithm for constructing a solution.

УДК 512.548

О НЕ n -ПОЛУАБЕЛЕВЫХ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук

Могилевский государственный университет продовольствия

Ю. И. Кулаженко

доктор физико-математических наук,

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

В статье изучается перестановочность элементов в полиадических группоидах с полиадической операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая определяется на k -й декартовой степени n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η . Найдены достаточные условия не n -полуабелевости l -арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$. В частности, доказано существование полуабелевых, но не n -полуабелевых полиадических группоидов вида $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$.

Ключевые слова: полиадическая операция, n -арный группоид, n -арная полугруппа, n -арная группа, полуабелевость.

1. Введение

Полиадическим группоидом специального вида называют универсальную алгебру $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ с одной l -арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s(n-1) + 1$, которая определяется [1] на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η . Саму операцию $\eta_{s,\sigma,k}$ называют полиадической операцией специального вида. В [1] было доказано, что если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s,\sigma,k}$ также является ассоциативной.

Частными случаями ($n = 2$) полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ являются l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на k -й декартовой степени A^k полугруппы A , и две полиадические операции Э. Поста [3], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, а вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Обе операции Э. Поста являются полиадическими операциями вида $[]_{l,\sigma,k}$, так как для них $l = k + 1$, а роль подстановки σ в обоих случаях играет цикл $(12 \dots k)$. Таким образом, и операция $[]_{l,\sigma,k}$ и обе отмеченные операции Э. Поста являются полиадическими операциями специального вида. Изучению операции $[]_{l,\sigma,k}$ и некоторых ее обобщений посвящена книга [4].

В данной статье найдены достаточные условия не n -полуабелевости l -арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$. Доказано также существование полуабелевых, но не n -полуабелевых полиадических группоидов специального вида.

2. Предварительные сведения

Напомним, что если в n -арном группоиде $\langle A, \eta \rangle$ для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ выполняется тождество

$$\eta(x_1 x_2 \dots x_n) = \eta(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}),$$

то n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ и n -арная операция η называются *абелевыми*.

n -Арный группоид $\langle A, \eta \rangle$, в котором выполняется тождество

$$\eta(xx_1 \dots x_{n-2}y) = \eta(yx_1 \dots x_{n-2}x),$$

называется *полуабелевым*. Полуабелевой в этом случае называется и сама n -арная операция η .

© Гальмак А. М., 2018

© Кулаженко Ю. И., 2018

Пусть $l = s(n-1) + 1, s \geq 1$. l -Арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ называется n -полуабелевым, если в нем для любых $t = 0, 1, \dots, s-1$ выполняется тождество

$$\begin{aligned} & \eta(x_1 \dots x_{t(n-1)} x_{t(n-1)+1}^{\mathbf{r}} x_{t(n-1)+2}^{\mathbf{r}} \dots x_{s(t+1)(n-1)}^{\mathbf{r}} \\ & \quad x_{s(t+1)(n-1)+1}^{\mathbf{r}} x_{s(t+1)(n-1)+2}^{\mathbf{r}} \dots x_{s(n+1)}^{\mathbf{r}}) = \\ & = \eta(x_1 \dots x_{t(n-1)} x_{t(n-1)+1}^{\mathbf{r}} x_{t(n-1)+2}^{\mathbf{r}} \dots \\ & \dots x_{s(t+1)(n-1)}^{\mathbf{r}} x_{s(t+1)(n-1)+1}^{\mathbf{r}} x_{s(t+1)(n-1)+2}^{\mathbf{r}} \dots x_{s(n+1)}^{\mathbf{r}}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \eta(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n x_{n+1} \dots x_{s(n-1)+1}) = \\ & = \eta(x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n x_{n+1} \dots x_{s(n-1)+1}), \end{aligned} \quad (2.2)$$
$$\begin{aligned} & [x_1 x_2 \dots x_{(s-1)(n-1)} x_{(s-1)(n-1)+1} x_{(s-1)(n-1)+2} \dots x_{s(n-1)} x_{s(n-1)+1}] = \\ & = [x_1 x_2 \dots x_{(s-1)(n-1)} x_{s(n-1)+1} x_{(s-1)(n-1)+2} \dots x_{s(n-1)} x_{(s-1)(n-1)+1}]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если положить

$$\alpha_i = x_{(i-1)(n-1)+2} \dots x_{i(n-1)}, i = 1, \dots, s,$$

$$\begin{aligned} & [x_1 \alpha_1 x_n \dots x_{(t-1)(n-1)+1} \alpha_t x_{t(n-1)+1} \alpha_{t+1} x_{(t+1)(n-1)+1} \alpha_{t+2} \dots \alpha_s x_l] = \\ & = [x_1 \alpha_1 x_n \dots x_{(t-1)(n-1)+1} \alpha_t x_{t(n-1)+1} \alpha_{t+1} x_{t(n-1)+1} \alpha_{t+2} \dots \alpha_s x_l]. \end{aligned}$$
$$\eta(x_1 x_2 x_3 \dots x_l) = \eta(x_2 x_1 x_3 \dots x_l),$$

$$\eta(x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_l) = \eta(x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_l).$$

$$\eta(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots x_i) = \eta(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots x_i),$$

$$\eta(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots x_i) = \eta(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots x_i),$$

$$\eta(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots x_i) = \eta(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots x_i),$$

$$\eta(x_1 x_2 \dots x_{l-3} x_{l-2} x_{l-1} x_l) = \eta(x_1 x_2 \dots x_{l-3} x_{l-1} x_{l-2} x_l),$$

$$\eta(x_1 x_2 \dots x_{l-2} x_{l-1} x_l) = \eta(x_1 x_2 \dots x_{l-2} x_l x_{l-1}).$$

n -Арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют *ассоциативной*, если в нем для любого $i = 2, \dots, n$ выполняется тождество

$$\eta(\eta(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1} \dots \mathbf{x}_{2n-1}) = \eta(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{i-1}\eta(\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{i+n-1})\mathbf{x}_{i+n} \dots \mathbf{x}_{2n-1}).$$

Согласно W. Dörnte [5], n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ называется n -арной группой, если операция η ассоциативна и для всех $i = 1, 2, \dots, n$ и всех $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо уравнение

$$\eta(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) = b.$$

Универсальную алгебру $\langle A, \eta \rangle$ с ассоциативной n -арной операцией η называют n -арной полугруппой.

Ясно, что группы (полугруппы) – это n -арные группы (n -арные полугруппы) при $n = 2$.

Определение 2.1 [1]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$. Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11} x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k} x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \end{aligned}$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)} \\ &\quad \eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \\ &\quad \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}) \dots))). \end{aligned}$$

При $s = 1$ l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, \sigma, k}$.

Если η – бинарная операция, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с l -арной операцией $[\]_{l, \sigma, k}$ из [4].

Явный вид l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ описывает следующая

Теорема 2.1 [1]. Если

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -я компонента y_j находится по формуле

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1)\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ &\quad \dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \end{aligned}$$

Замечание 2.1. Если n -арная операция η ассоциативна, то последнее равенство может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Теорема 2.2 [1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.

Теорема 2.3 [6]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Теорема 2.4 [7]. Если n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ является полуабелевой, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная полугруппа $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ также является полуабелевой.

3. Основные результаты

Теорема 3.1. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$ и отличным от e_{n-1} элементом a , подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Доказательство. Так как подстановка σ^{n-1} не является тождественной, то существует $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ с условием $\sigma^{n-1}(j) \neq j$.

Положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = e_{n-1}, \dots, a_{j-1} = e_{n-1}, a_j = a, a_{j+1} = e_{n-1}, \dots, a_k = e_{n-1}),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\underbrace{e_1 \dots e_1}_k), \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2 \dots e_2}_k), \dots, \mathbf{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1} \dots e_{n-1}}_k), \\ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-2} \mathbf{e}_{n-1} \underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}) &= (y_1, y_2, \dots, y_k), \\ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-2} \mathbf{a} \underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}) &= (z_1, z_2, \dots, z_k). \end{aligned}$$

Тогда ввиду замечания 2.1,

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(a_j e_1 \dots e_{n-2} e_{n-1} \underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}), \\ z_j &= \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} a_{\sigma^{n-1}(j)} \underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}). \end{aligned}$$

Так как $e_1 \dots e_{n-1}$ — правая нейтральная последовательность n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$, то $y_j = a_j = a$. А так как $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, то $a_{\sigma^{n-1}(j)} = e_{n-1}$, откуда

$$z_j = \eta(e_{n-1} e_1 \dots e_{n-2} e_{n-1} \underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}).$$

Снова, используя правую нейтральность последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$, получаем $z_j = e_{n-1}$. Из $y_j = a, z_j = e_{n-1}, a \neq e_{n-1}$ следует $y_j \neq z_j$, откуда

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-2} \mathbf{e}_{n-1} \underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}) &\neq \\ \neq \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-2} \mathbf{a} \underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}), \end{aligned}$$

то есть в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество вида (2.2). Следовательно, l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым. Теорема доказана.

Теорема 3.2. Пусть n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает левой нейтральной последовательностью $e_1 \dots e_{n-1}$ и отличным от e_1 элементом a , подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Доказательство. Так как подстановка σ^{n-1} не является тождественной, то

$$\sigma^{(s-1)(n-1)} \neq \sigma^{s(n-1)}.$$

Поэтому существует $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ с условием

$$\sigma^{(s-1)(n-1)}(j) \neq \sigma^{s(n-1)}(j).$$

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ — те же, что и в теореме 3.1, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = e_1, \dots, a_{\sigma^{s(n-1)}(j)} = e_1, a_{\sigma^{s(n-1)}(j)} = a, a_{\sigma^{s(n-1)}(j)+1} = e_1, \dots, a_k = e_1),$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{a}) = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1} \mathbf{a} \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{e}_1) = (z_1, z_2, \dots, z_k).$$

Тогда ввиду замечания 2.1,

$$y_j = \eta(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1} e_1 e_2 \dots e_{n-1} a_{\sigma^{s(n-1)}(j)}),$$

$$z_j = \eta(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1} a_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} e_2 \dots e_{n-1} e_1).$$

Так как $e_1 \dots e_{n-1}$ – левая нейтральная последовательность n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$, то

$$y_j = a_{\sigma^{s(n-1)}(j)} = a.$$

А так как

$$\sigma^{(s-1)(n-1)}(j) \neq \sigma^{s(n-1)}(j),$$

то

$$a_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} = e_1,$$

откуда

$$z_j = \eta(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1} e_1 e_2 \dots e_{n-1} e_1).$$

Снова, используя левую нейтральность последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$, получаем

$z_j = e_1$. Из

$$y_j = a, z_j = e_1, a \neq e_1$$

следует $y_j \neq z_j$, откуда

$$\begin{aligned} & \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1} e_1 e_2 \dots e_{n-1} a) \neq \\ & \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1} a e_2 \dots e_{n-1} e_1), \end{aligned}$$

то есть в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество вида (2.3). Следовательно, l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым. Теорема доказана.

Теоремы 3.1 и 3.2 были анонсированы в [8].

Пример 3.1. Пусть $\mathbf{T}_3$ – множество всех нечетных подстановок на трех символах. Определим на $\mathbf{T}_3$ тернарную операцию $\eta(\alpha\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma$. Тогда $\langle \mathbf{T}_3, \eta \rangle$ – полуабелева тернарная группа третьего порядка, не являющаяся абелевой [9]. Согласно теореме 2.4, для любого $s \geq 1$ универсальная алгебра $\langle \mathbf{T}_3^2, \eta_{s, (12), 2} \rangle$ является полуабелевой $(2s+1)$ -арной полугруппой девятого порядка. В частности, $\langle \mathbf{T}_3^2, \eta_{1, (12), 2} \rangle$ – полуабелева тернарная полугруппа девятого порядка.

Положим

$$\tau = (12) \in \mathbf{S}_2, \mathbf{a} = (\alpha, \alpha), \mathbf{x} = (x_1, x_2),$$

где α может быть любым из трех элементов множества $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{x}$ – произвольный элемент из $\mathbf{T}_3^2$. Так как α^2 и τ^2 – тождественные подстановки, то

$$\begin{aligned} \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{aax}) &= \eta_{1, (12), 2}((\alpha, \alpha)(\alpha, \alpha)(x_1, x_2)) = \\ &= (\alpha\alpha x_{\tau^2(1)}, \alpha\alpha x_{\tau^2(2)}) = (x_1, x_2) = \mathbf{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{xaa}) &= \eta_{1, (12), 2}((x_1, x_2)(\alpha, \alpha)(\alpha, \alpha)) = \\ &= (x_1\alpha\alpha, x_2\alpha\alpha) = (x_1, x_2) = \mathbf{x}, \end{aligned}$$

то есть

$$\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{aax}) = \mathbf{x}, \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{xaa}) = \mathbf{x}.$$

Следовательно, $\mathbf{aa}$ – нейтральная последовательность тернарной полугруппы $\langle \mathbf{T}_3^2, \eta_{1, (12), 2} \rangle$.

Считая в определении l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ (определение 2.1)

$$A = \mathbf{T}_3^2, \eta = \eta_{1, (12), 2}, n = 3, k = 4, \sigma = (1234) \in \mathbf{S}_4,$$

определим на $(\mathbf{T}_3^2)^4$ операцию $\eta_{s, (1234), 4}$ арности $2s+1$.

Если $s = 2t$, где $t \geq 1$, то

$$(1234)^{2s+1} = (1234)^{4t+1} = (1234).$$

А так как, кроме того, $(1234)^3 \neq (1234)$, то согласно теореме 3.1 (теореме 3.2), универсальная

алгебра $\langle (\mathbf{T}_3^2)^4, \eta_{2t, (1234), 4} \rangle$ является полуабелевой $(4t + 1)$ -арной полугруппой порядка 3^8 , не являющейся 3-полуабелевой. В частности, $\langle (\mathbf{T}_3^2)^4, \eta_{2, (1234), 4} \rangle$ – полуабелева 5-арная полугруппа порядка 6561, не являющаяся 3-полуабелевой.

Пример 3.2. Пусть $\mathbf{D}_n$ – диэдральная группа, $\mathbf{B}_n$ – подмножество всех ее отражений. Определим на $\mathbf{B}_n$ тернарную операцию $\eta(\varphi\psi\theta) = \varphi\psi\theta$. Тогда $\langle \mathbf{B}_n, \eta \rangle$ – полуабелева тернарная группа порядка n , не являющаяся абелевой [9]. Согласно теореме 2.4, для любого $s \geq 1$ универсальная алгебра $\langle \mathbf{B}_n^2, \eta_{s, (12), 2} \rangle$ является полуабелевой $(2s + 1)$ -арной полугруппой порядка n^2 . В частности, $\langle \mathbf{B}_n^2, \eta_{1, (12), 2} \rangle$ – полуабелева тернарная полугруппа порядка n^2 .

Так же как в примере 3.1, устанавливается, что для любого отражения $\alpha \in \mathbf{B}_n$ последовательность $(\alpha, \alpha)(\alpha, \alpha)$ является нейтральной в $\langle \mathbf{B}_n^2, \eta_{1, (12), 2} \rangle$.

Считая в определении l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ (определение 2.1)

$$A = \mathbf{B}_n^2, \eta = \eta_{1, (12), 2}, n = 3, k = 4, \sigma = (1234) \in \mathbf{S}_4,$$

определим на $(\mathbf{B}_n^2)^4$ операцию $\eta_{s, (1234), 4}$ арности $2s + 1$. Тогда для любого $t \geq 1$, согласно теореме

3.1 (теореме 3.2), универсальная алгебра $\langle (\mathbf{B}_n^2)^4, \eta_{2t, (1234), 4} \rangle$ является полуабелевой $(4t + 1)$ -арной полугруппой порядка n^8 , не являющейся 3-полуабелевой. В частности, $\langle (\mathbf{B}_n^2)^4, \eta_{2, (1234), 4} \rangle$ – полуабелева 5-арная полугруппа порядка n^8 , не являющаяся 3-полуабелевой.

Полагая в теоремах 3.1 и 3.2 $n = 2$, получим

Следствие 3.1. Пусть A – неоднородная полугруппа с правой (левой) единицей. Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, то l -арный группоид $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Следствие 3.2. [4, предложение 3.5.1]. Пусть A – неоднородная полугруппа с единицей. Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, то l -арный группоид $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

Так как в любой n -арной группе существуют нейтральные последовательности, то для n -арных групп имеет место

Теорема 3.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуабелевым.

Из теоремы 3.3 при $n = 2$ вытекает

Следствие 3.3. Пусть A – неединичная группа. Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, то l -арный группоид $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым.

В связи с предложением 2.1 возникает вопрос: существуют ли полуабелевы l -арные группоиды вида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, не являющиеся n -полуабелевыми?

Если в теоремах 3.1 – 3.3 условие $\sigma^n \neq \sigma$ дополнить условием $\sigma^l = \sigma$, то ответ на этот вопрос будет положительным.

Теоремы 3.1, 3.2, 2.2 и 2.4 позволяют сформулировать следующие две теоремы, дающие положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 3.4. Пусть неоднородная полуабелева n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает правой нейтральной последовательностью, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева, но не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Теорема 3.5. Пусть неоднородная полуабелева n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает левой нейтральной последовательностью, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева, но не n -полуабелева l -арная полугруппа.

Теоремы 3.3, 2.3 и 2.4 позволяют сформулировать еще одну теорему, дающую положительный ответ на тот же вопрос.

Теорема 3.6. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная полуабелева n -арная группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева, но не n -полуабелева l -арная группа.

Полагая в теоремах 3.4 и 3.5 $n = 2$, получим

Следствие 3.4. Пусть A – неодноэлементная коммутативная полугруппа с правой единицей (левой единицей, единицей), нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева, но неабелева l -арная полугруппа.

Полагая в теореме 3.6 $n = 2$, получим

Следствие 3.5. Пусть A – неединичная абелева группа, нетождественная подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева, но неабелева l -арная группа.

Замечание 3.1. Согласно теореме 2.3, универсальные алгебры $\langle T_3^2, \eta_{s, (12), 2} \rangle$ и $\langle B_n^2, \eta_{s, (12), 2} \rangle$ из примеров 3.1 и 3.2 являются полуабелевыми $(2s + 1)$ -арными группами. Поэтому для доказательства не 3-полуабелевости универсальных алгебр $\langle (T_3^2)^4, \eta_{2t, (1234), 4} \rangle$ и $\langle (B_n^2)^4, \eta_{2t, (1234), 4} \rangle$ можно вместо теорем 3.1 и 3.2 воспользоваться теоремой 3.3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Гальмак, А. М. Многместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Гальмак, А. М. Многместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
5. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
6. Гальмак, А. М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2018. – № 1. – С. 34–38.
7. Гальмак, А. М. Перестановочность элементов в полиадических группоидах специального вида / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3. – С. 68–72.
8. Гальмак, А. М. О не n -полуабелевости полиадических группоидов специального вида / А. М. Гальмак, Ю. И. Кулаженко // XII школа-конференция по теории групп. – Геленджик, 2018. – С. 35–40.
9. Гальмак, А. М. Тернарные группы отражений / А. М. Гальмак, Г. Н. Воробьев. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 128 с.

Поступила в редакцию 12.04.2018 г.

Контакты: (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A.M., Kulazhenko Y.I. ON NON n -SEMIABELIAN SPECIAL POLYADIC GROUPOIDS.

The article highlights the permutability of elements in polyadic groupoids with the polyadic operation $\eta_{s, \sigma, k}$ which is determined on a k -th Cartesian power of the n -ary groupoid $\langle A, \eta \rangle$ with the substitution σ of the set $\{1, \dots, k\}$ and n -ary operation η . Sufficient conditions of the semiabelian operations $\eta_{s, \sigma, k}$ which are not n -semiabelian have been found. In particular, the existence of the semiabelian polyadic groupoids $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ which are not n -semiabelian is proved.

Keywords: polyadic operation, n -ary groupoid, n -ary semigroup, n -ary group, semiability.

УДК 532.88 + 621.378

ИЗЛУЧЕНИЕ ТОНКОГО ИНВЕРТИРОВАННОГО СЛОЯ В УСЛОВИЯХ КВАЗИРЕЗОНАНСНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

В. А. ЮРЕВИЧ

доктор физико-математических наук, профессор
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В приближении однородного поля получены аналитические решения уравнений генерации в виде фазово-модулированных импульсов, происходящей в тонком слое усиливающей среды со сложной энергетической структурой образующих ее элементарных излучателей. С учетом конечности времени фазовой релаксации дипольных частиц и поглощения в квазирезонансных переходах формулируется закон сохранения вектора Блоха.

Ключевые слова: Тонкий слой резонансных атомов, когерентное взаимодействие, резонансная оптическая нелинейность, сверхкороткие импульсы, нелинейный дрейф частоты.

Введение

Поверхностные пленки из активных материалов с сильным нелинейным откликом на резонансное световое поле в диапазоне оптических частот можно эффективно использовать в пассивных устройствах модуляции излучения для управления световыми потоками [1]. В этом качестве предпочтительно применять квантоворазмерные полупроводниковые структуры [2], которые способны оказаться особо активными в области спектра, соответствующей экситонным переходам. Между тем известно, что в тонких резонансных слоях могут быть реализованы режимы самовозбуждения [3]. Это явление перспективно к использованию для получения импульсной генерации в лазерных устройствах, где усиливающий элемент представляет собой тонкий слой резонансной среды, в которой возможно достичь высокого уровня инверсии. Именно такие среды представлены используемыми в оптике и лазерной физике полупроводниковыми структурами [4, 5]. Подобного рода материалы применяют в лазерах с вертикальными резонаторами (или поверхностно излучающих лазерах), где активные элементы образованы тонкими планарными слоями [6].

Известно, что пропусканию и отражению особо тонких активных граничных слоев свойственна зависимость от резонансных компонент поляризованности [7]. Переизлученное поляризованными атомами тонкого слоя оптическое поле в силу однородности представляется результатом когерентного эффекта сверхизлучения (СИ). СИ развивается как процесс взаимного согласования фаз (фазировки) элементарных излучателей, образующих активную среду, через излучаемое ими поле. Установление коллективного СИ-состояния в результате фазировки активных диполей подразумевает возникновение макроскопической поляризации, которая предполагает формирование упорядоченного состояния в ансамбле диполей [8]. Для возникновения СИ среда должна быть максимально инвертирована, возможность обратимого процесса изменения населенности при сбросе инверсии не рассматривается. В полупроводниковых средах СИ происходит как коллективная спонтанная рекомбинация. Динамика компонентов отклика среды в режиме СИ определяет процесс генерации излучения в случае достижения пороговой инверсии в тонком слое, которому естественно присуще состояние фазировки диполей в условиях однородности поля по толщине слоя – в направлении распространения излучения [9]. Задача об энергообмене среды и светового поля решается далее в приближении сверхтонкого граничного слоя, в сущности, для пленки, образованной активными дипольными центрами в структуре материала и излучающей с поверхности.

СИ представляет собой эффект сверхбыстрого взаимодействия излучения с веществом, когда характерная длительность импульсов значительно меньше времени действия релаксационных механизмов в среде. Тогда в излучении формируется интенсивный импульс, мощность которого имеет особую зависимость от инверсии заселенности – характерное время СИ обратно пропорционально числу активных диполей. Поэтому представляется логичной постановка задачи из-

учения проявления закономерностей кинетики генерации в тонком граничном слое с резонансной поляризацией с учетом двух факторов, влияющих на ход фазировки атомных диполей. Первый из них – естественная фазовая релаксация в их ансамбле, время которой в предлагаемой работе предполагается меньшим, но сравнимым с характерным временем СИ, и которая обуславливает однородное уширение спектральной линии. Вторым отличием от уже решенных задач по тематике СИ является рассмотрение проблемы с учетом влияния квазирезонансной поляризуемости, то есть поглощения излучения в переходах, соседних с основным и способных реагировать на резонансное излучение. Его следствия удобно анализировать в рамках обобщенной двухуровневой схемы [10, 11]. Влияние квазирезонансной поляризуемости ведет к резонансной нелинейной рефракции, к возникновению автомодуляционного дрейфа переизлученного или генерируемого поля, соответственно, к нарушению резонансного характера взаимодействия [12]. Этими факторами определяется зависимость кинетики от уровня мощности светового поля (начального уровня и степени сброса инверсии). Подобной особенностью выражается возможность возникновения обратной связи, поэтому применительно к тонким усиливающим элементам и следует говорить именно о генерации с характерностью процесса СИ. При анализе ее закономерностей в рамках допущения об особо тонком слое допускается использование граничных электродинамических условий для плосковолновых полей в уравнениях Максвелла вместо волновых уравнений [11, 13, 14].

Исходные уравнения

Рассматривается планарная граничная пленка толщиной l , значительно меньшей длины волны света $\lambda = 2\pi c/\omega$, находящаяся на поверхности линейной оптической среды. Типичные для допущения о сверхтонком слое условия для проекций напряженности световых полей на границе раздела, известны, например, из работы [13]:

$$E = \frac{2}{\eta + 1} E_i + \frac{l}{\varepsilon_0(\eta + 1)c} \frac{dP_s}{dt}, \quad E_r = -\frac{\eta - 1}{\eta + 1} E_i + \frac{l}{\varepsilon_0(\eta + 1)c} \frac{dP_s}{dt}, \quad (1)$$

где ε_0 – диэлектрическая постоянная;

c – скорость света;

η – нерезонансный показатель преломления среды слоя.

Следуя соотношениям (1), очевидно, что отклик двухуровневой среды на действие падающего поля с напряженностью E_i проявляется в обеих составляющих светового поля – в прошедшей и отраженной. В выражениях связи напряженностей E и E_r – прошедшей (то есть, действующей на активные центры в среде слоя) и отраженной волн – содержатся дополнительные к френелевым динамические резонансные компоненты. Эти компоненты прямо пропорциональны скорости поверхностной поляризованности среды P_s (току поляризации, нелинейно зависящему от поля) – их именуют сверхизлучательными [7].

Дальнейшая модификация представляющих суть приближения сверхтонкого слоя уравнений (1) состоит в следующем. Соотношения связи полей записываются для относительно медленных огибающих напряженностей поля и поляризации (E , E_r и P – крайне мало изменяющихся за время периода световой волны), а также с учетом того, что слой является усиливающим – в его веществе существует начальное поле люминесценции на частоте резонанса, и из него в среде с инверсией “стартует” генерация. Поэтому вместо френелева компонента, описывающего прошедшее в среду поле, запишем величину начального поля люминесценции $\Lambda(t)$ (возникающего из флуктуаций начальной поляризованности). Кроме этого, представление поляризованности в соответствии с целью исследования включает квазирезонансную составляющую поляризации. Результирующая медленная огибающая может быть записана в виде, предложенном и использованном в [10, 11]:

$$P(t) = N [\rho + 2\pi\Delta\alpha\varepsilon_0(n-1)E], \quad (2)$$

где ρ и n – вероятностные переменные резонансной поляризованности и инверсной заселенности (значения этих величин в пересчете на один активный центр);

N – плотность активных центров (в единице объема);

μ – средняя величина их дипольного момента;

$\Delta\alpha$ – разность поляризуемостей активных центров в основном и возбужденном состояниях (дефект поляризуемости).

Преобразованные с учетом представления (2) соотношения (1) аналогично [10–14] решаются совместно с квантовомеханическими уравнениями Блоха для переменных ρ и n . Для оптических сред уравнения записываются для электрических моментов атомов, представляемых двухуровневыми диполями [8]. Образованная таким образом расчетная модель генерации образует замкнутую самосогласованную систему уравнений, в которой генерируемое поле зависит от резонансных свойств активных центров в приповерхностном слое и, в свою очередь, определяет их динамику в условиях одноквантового резонанса. В общем случае рассматриваемого в дальнейшем взаимодействия учитывается конечность времени фазовой (поперечной) релаксации T_2 отклика среды слоя, в итоге формулируемая модель записывается в следующем виде:

$$E = A + \frac{Nl\omega}{(\eta + 1)c} \left[\frac{\mu}{\epsilon_0} \rho + i 2\pi\Delta\alpha (1 - n) E \right], \quad E_r = \frac{\mu Nl\omega}{\epsilon_0(\eta + 1)c} \rho, \quad (3)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \left[1 - i \left(\Delta\omega + \frac{\Delta\alpha}{\hbar} \pi\epsilon_0 T_2 |E|^2 \right) \right] \frac{\rho}{T_2} = \frac{\mu}{\hbar} nE, \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{\mu}{2\hbar} (\rho^* E + \rho E^*),$$

где $\Delta\omega = (\omega - \omega_0)T_2$ – нормированная линейная отстройка несущей частоты поля (частоты генерации ω) от частоты основного перехода ω_0 (дефект резонанса). Нелинейная отстройка резонанса в уравнении для поляризованности в схеме (3) выражает известный оптический эффект Штарка – смещение центральной частоты перехода в интенсивном поле развивающегося в среде светового импульса; коэффициент нелинейности оказывается связанным с параметром разности поляризуемостей. Перераспределение дипольных частиц по уровням в условиях различия поляризуемостей также приводит к встречному в отношении штарковского смещения центра линии автомодуляционному дрейфу частоты. Его величина выражена мнимым компонентом в выражении для действующего поля в схеме (3). Нелинейная расстройка резонанса как нарушение резонансного условия усиления неизбежно становится фактором обратной связи в схеме генерации в среде тонкого слоя и способна обусловить определенные динамические особенности процесса.

Кинетические уравнения и интеграл модели взаимодействия

Отметим далее, что поле генерации выражается величиной отраженного поля в схеме (3), то есть линейно связана с вероятностью резонансной поляризованности. Помимо этой составляющей действующее на атомы (эффективное или прошедшее в представлении (1)) поле обусловлено также квазирезонансной составляющей, включаемой в выражение для поляризованности (2), которая линейно определяется резонансной вариацией инверсной заселенности $(1 - n)$ и определяет нелинейное (в силу насыщения n) смещение частоты поля. Поле развивающихся при сбросе инверсии импульсов довольно велико по пиковой мощности, поэтому далее в системе (3) величиной фактора Λ будем пренебрегать. В схеме расчета генерации обычно исходят из существования начального минимального уровня мощности и рассматривают случай усиления слабого сигнала на резонансной частоте, определяя этот уровень в начальных условиях. Динамическая модель (2) поэтому формально упрощается, и в результате масштабирования временной координаты и переменных поля путем замены:

$$\tau = \frac{t}{T_2}, \quad e = \frac{\mu}{\hbar} T_2 E,$$

а также введения параметров $\kappa = T_2/\tau_R$, $\tau_R = \hbar c \epsilon_0 (\eta + 1) \mu^2 N l \omega$, $\beta = 2\pi\Delta\alpha N l \omega / (\eta + 1)c$, расчетная кинетическая схема генерации для случая точного резонанса ($\omega = \omega_0$) представляется автономной системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \left[\frac{\kappa n}{1 + \beta^2 (1 - n)^2} - 1 \right] \rho + i\beta\kappa \frac{\rho}{1 + \beta^2 (1 - n)^2} \left[n(1 - n) - \frac{1}{2} |\rho|^2 \right], \quad (4)$$

$$\frac{dn}{d\tau} = -\frac{\kappa |\rho|^2}{1 + \beta^2 (1 - n)^2}, \quad S = |e_r|^2 = \frac{\kappa^2 |\rho|^2}{1 + \beta^2 (1 - n)^2},$$

где S – нормированная интенсивность генерации. Временной параметр τ_R известен как время

сверхизлучения (в отсутствие релаксации им определяется длительность импульса СИ [7]), безразмерная величина κ принимает смысл показателя усиления слоя.

Следует сразу отметить, что в уравнениях для вероятностной переменной инверсной заселенности, входящих в систему (3) или (4), отсутствует релаксационная компонента, описывающая спонтанные переходы – в схеме возможны только вынужденные переходы (со сбросом инверсии). Также не включена составляющая, характеризующая возможность обратимости населенности, то есть, например, нарастания инверсии в процессе накачки. Поэтому решением (3) или (4) для вынужденного излучения должны быть непрерывные кривые, описывающие ограниченные во времени изолированные единичные выбросы интенсивности.

Отметим далее, что при рассмотрении кинетики оптических когерентных эффектов, то есть динамики когерентного излучения без адиабатического исключения поляризованности, удобно применять формализм вектора Блоха [8]. Координаты вектора Блоха рассматриваются соответственно как $\text{Re}\rho$, $\text{Im}\rho$, n . В этих переменных несложно записать интеграл системы (4), представляемый в виде нелинейного алгебраического соотношения:

$$|\rho|^2 + n^2 = 1 - \frac{2}{\kappa}(1-n) - \frac{2\beta^2}{3\kappa}(1-n)^3. \quad (5)$$

Равенство (5) интересно тем, что фактически выражает формулировку закона сохранения вектора Блоха с учетом специфики рассматриваемых эффектов однородного и автомодуляционного уширения спектральной линии усиления. В плоскости переменных $(|\rho|, n)$ уравнением (5) описывается замкнутая кривая (в отсутствие эффектов уширения “классическому” или исходному аналогу (5), то есть уравнению $|\rho|^2 + n^2 = 1$ [8], соответствует окружность с радиусом 1). Нетрудно убедиться, что минимальное значение $n_{\min} > -1$, то есть, в анализируемом случае из-за уширения полного сброса инверсии при формировании выброса интенсивности вынужденного излучения не происходит. В случае усложняющего эффект уширения нелинейного автомодуляционного смещения центра линии сброс инверсии должен быть еще в меньшей степени результативен. Пиковая мощность высвечиваемого импульса, соответственно, должна понижаться.

Аналитическое решение системы и расчет временной развертки излучения

Соотношение (5) дает возможность записать уравнение для инверсной населенности из системы (4) в виде:

$$\kappa \frac{dn}{d\tau} = - \frac{1 + \beta^2(1-n)^2}{(1-n) \left[1 - 2/\kappa + n - 2\beta^2(1-n)^2/3\kappa \right]},$$

и в неявном виде получить его решение:

$$2(\kappa-1)\tau + F = \ln(1-n) - \frac{3\kappa-2}{2} \ln \left[1 + n - 2/\kappa - 2\beta^2(1-n)^2/3\kappa \right] - \frac{3\kappa-4}{2\sqrt{D}} \ln \frac{\sqrt{D} + 1 + 4\beta^2(1-n)/3\kappa}{\sqrt{D} - 1 - 4\beta^2(1-n)/3\kappa}, \quad D = 1 + \frac{16}{3} \left(\frac{\beta}{\kappa} \right)^2 (\kappa-1). \quad (6)$$

Здесь F – константа интегрирования, в расчетах ее можно положить равной нулю. Особенно-стью вычисления зависимостей $n(\tau, |\rho(\tau)|)$, а также $S(\tau)$ в рамках использованного приближения является то, что выражение (6) допускает параметрический расчет. Из соотношения (5) следует, что в момент, когда достигнута полная инверсия, то есть $n_{\max} = 1$, а это и выполняется в начальный момент ($n(\tau=0) = 1$), резонансная поляризованность равна нулю – $|\rho(\tau=0)| = 0$. По мере фазировки диполей и нарастания, а затем снижения поляризованности, происходит формирование импульса и, соответственно, сброс инверсии до значения $n_{\min}$, устанавливаемого решением (5). Расчет зависимости, выражаемой (6), в пределах $(n_{\min}, 1)$ изменения n как непрерывно нарастающего параметра и параллельный расчет поляризованности $|\rho(\tau)|$ согласно (5) или нормированной интенсивности

$$S = \frac{\kappa^2(1-n)}{1 + \beta^2(1-n)^2} \left[1 + n - \frac{2}{\kappa} - \frac{2\beta^2}{3\kappa}(1-n)^2 \right] \quad (7)$$

(как функций n) дает возможность построить временную картину излучения.

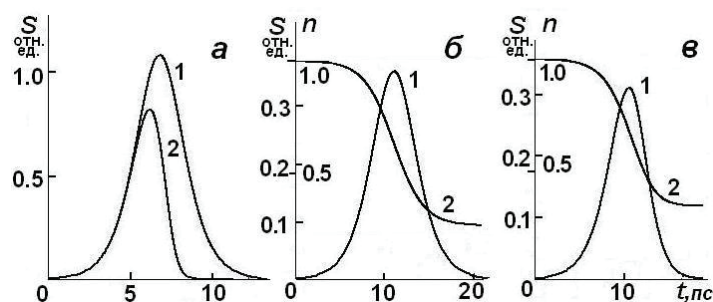


Рисунок 1. Зависимость интенсивности (*а* – кривые 1, 2; *б, в* – кривые 1) и инверсной заселенности (*б, в* – кривые 2) от времени; $T_2 = 5 \cdot 10^{-12}$ с;
а – $\kappa = 1.6$, $\beta = 0$ (кривая 1), $\beta = 0.1$ (2);
б – $\kappa = 1.5$, $\beta = 0$; *в* – $\kappa = 1.5$, $\beta = 0.08$

Примеры расчета временного хода нормированной интенсивности S и вероятностной переменной инверсной заселенности n на основе (6), (7) приведены прежде всего на рисунке 1. На фрагменте 1, *а* принципиально сравниваются форма, продолжительность и развиваемая пиковая амплитуда импульсов для случая только однородного уширения и для случая автомодуляционного смещения, вызванного квазирезонансной поляризуемостью. Зависимости на фрагментах 1, *б* и 1, *в* на фоне различия формы импульсов в обоих случаях демонстрируют разницу в темпе и уровне сброса инверсии.

Расчеты (6), (7) по параметрам и коэффициентам примерно соответствовали масштабу исследуемого явления – вынужденного излучения и особенностей уширения его спектральной линии в режиме высвечивания коротких световых импульсов, происходящем в тонких слоях полупроводниковых квантоворазмерных структур. Значения параметров выбирались из известного по литературным источникам [15, 16] диапазона: $\mu \sim 1.0 \dots 1.3 \cdot 10^{-28}$ Кл·м, $N \sim 4 \dots 8 \cdot 10^{18}$ см $^{-3}$, $\Delta\alpha \sim 4 \dots 7 \cdot 10^{-21}$ см 3 , $\lambda \sim 1.25 \dots 1.3 \cdot 10^{-6}$ м. Излучаемая интенсивность должна находиться примерно в пределах $1 \dots 10 \cdot 10^7$ Вт/м 2 .

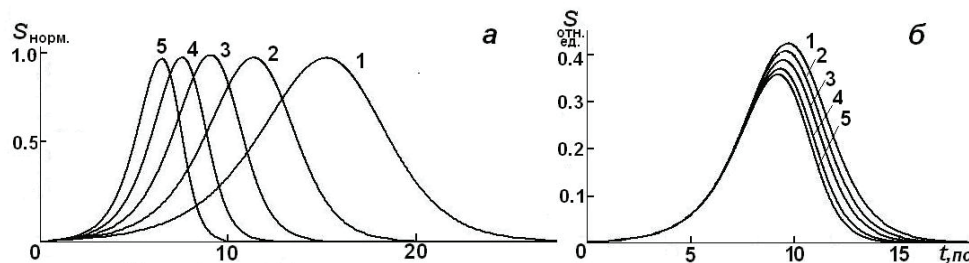


Рисунок 2. Зависимость интенсивности (на фрагменте *а* – нормированной по отношению к пиковой мощности, соответствующей кривой 1) от времени; $T_2 = 5 \cdot 10^{-12}$ с;
а – $\kappa = 1.4$ (кривая 1), 1.55 (2), 1.7 (3), 1.85 (4), 2.0 (5), $\beta = 0.07$;
б – $\kappa = 1.75$, $\beta = 0.03$ (1), 0.04 (2), 0.05 (3), 0.07 (4), 0.08 (5)

Сразу отметим, что влияние квазирезонансной поляризуемости должно проявляться в особом изменении формы рассчитываемого всплеска интенсивности – импульс приобретает асимметрию фронтов. Примеры расчетов, проведенные для детализации выводов об этом изменении, приведены на рисунке 2. Судя по ходу кривых на фрагменте 2, *а*, характерное для возникающей асимметрии сокращение заднего фронта должно сильнее проявляться при большем уровне усиления, устанавливаемом за счет изменения неравновесной концентрации экситонов. Согласно иллюстрированным на фрагменте рисунка 2, *б* вариантам расчета (6), (7) для различных значений дефекта поляризуемости $\Delta\alpha$, с увеличением уровня автомодуляционного смещения относительно снижается пиковая мощность импульса и сильнее “обрезается” его задний фронт. Общей причиной отмеченных изменений является нелинейная отстройка частоты, на которой происходит

вынужденное излучение, от центра линии усиления и соответствующее снижение эффективного усиления, которое, естественно, максимально в резонансе. Это снижение в силу особенностей динамики расфазировки поля и поляризации в условиях нелинейности неоднородно на времени продолжительности импульса.

Динамика частотной отстройки, как следует из уравнения для поляризации в схеме [4], описывается изменением его мнимой составляющей. Смещение частоты как функция времени может быть выражено формально зависимостью от инверсной заселенности:

$$\Delta\nu = \frac{1}{\pi T_2} \frac{\kappa\beta(1-n)}{1+\beta^2(1-n)^2} \left[\frac{1}{\kappa} - \frac{1-n}{2} + \frac{\beta^2}{3\kappa}(1-n)^2 \right]$$

и параметрически рассчитано совместно с (6).

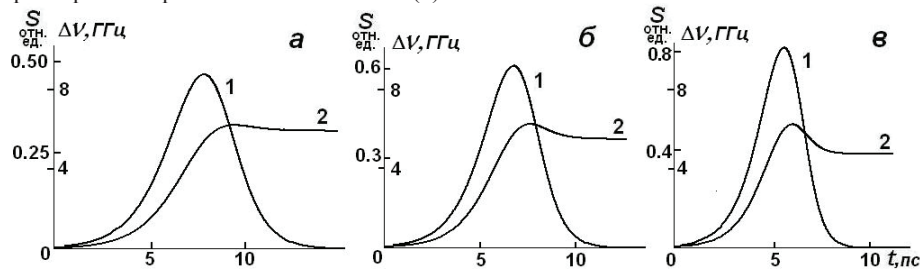


Рисунок 3. Форма импульсов (кривые 1) и динамика дрейфа частоты (кривые 2);

$$T_2 = 5 \cdot 10^{-12} \text{ с};$$

а – $\kappa = 1.73$, $\beta = 0.07$; б – $\kappa = 1.85$, $\beta = 0.075$; в – $\kappa = 2.0$, $\beta = 0.082$

Рисунок 3 иллюстрирует ход автомодуляционной частотной отстройки на фоне развивающегося всплеска мощности для разного уровня усиления. Сдвиг частоты характеризует дефазировку поля и поляризации, величина этого дрейфа при использованных модельных параметрах может составлять до десятка гигаГерц. В области заднего фронта импульса отмечается максимум, и далее величина отстройки выходит на насыщение, поскольку, в основном, определена резонансной вариацией инверсии.

Получение фазово-модулированных импульсов, вообще, представляет нетривиальную экспериментальную задачу. В этой особенности динамики световых импульсов заложена возможность дальнейшего их преобразования в направлении изменения формы и сокращения длительности. В многокаскадной схеме преобразования импульсов обычно используют селективные по частоте устройства, которые позволяют ограничивать фронты развития излучения с сильными проявлениями фазовой модуляции, которую могут стимулировать активными средствами. В этом случае задача может быть решена в рамках применения следствий автомодуляционных явлений – за счет собственной нелинейности, реализующейся в области резонанса усиления (поглощения) и безынерционной по отношению к интенсивности.

Заключение

Проведенное моделирование и аналитическая оценка динамики вынужденного излучения в приближении особо тонкого слоя инверсной среды позволили характеризовать зависимость формирования коротких световых импульсов от материальных параметров в условиях относительно быстрых процессов резонансного взаимодействия излучения. Условия СИ создать в реальных средах довольно сложно. Процессы уширения неизбежно сопровождают его ход и снижают эффективность характерной для него самофазировки диполей. В так называемых плотных резонансных средах в этом отношении действенно также фазовое смещение, обусловленное диполь-дипольным взаимодействием [11], влияние которого с учетом рассматриваемых факторов представляет предмет отдельного изучения. Когерентность высвечиваемого поля и поляризованности тонкого слоя, частично нарушаемая процессами уширения, включая автомодуляционные, позволяет считать явление вынужденного излучения с его рассмотренными выше особенностями, близкими к СИ, и представлять как основу способа получения сверхкоротких импульсов с относительно невысокой пиковой мощностью в элементах пониженной размерности.

В диапазоне ИК частот до сих пор отмечается отсутствие электрооптических материалов, позволяющих применять стандартные методы модуляции добротности и сокращения длительности импульсов. Поэтому в настоящее время исследование лазерной генерации интенсивно развивается применительно к технологиям формирования коротких и сверхкоротких импульсов именно в этой спектральной области. Результаты приведенных в статье расчетов динамики излучения с фазовой автомодуляцией будут полезными для разработки методов получения или профилирования сверхкоротких световых импульсов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Timoschenko, E. V.** Resonance reflection of light by a thin layer of a dense nonlinear medium / E. V. Timoschenko, V. A. Yurevich, Yu. V. Yurevich // *Technical Physics*. – 2013. – Vol. 58, No 2. – P. 251–254.
2. **Афоненко, А. А.** Оптические свойства и генерация излучения в квантоворазмерных лазерных гетероструктурах : дисс. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.21 / А. А. Афоненко. – Минск : Институт физики НАН Беларуси, 2009. – 200 с.
3. **Петров, Н. С.** Лазерная генерация тонких инверсных слоев / Н. С. Петров, А. Б. Зимин // *Журн. прикл. спектр.* – 2010. – Т. 77, № 1. – С. 69–73.
4. **Васильев, П. П.** Роль сильного усиления среды в возникновении сверхизлучения и наблюдения когерентных эффектов в полупроводниковых лазерах / П. П. Васильев // *Квант. электрон.* – 1999. – Т. 29, № 1. – С. 4–8.
5. **Васильев, П. П.** Сравнение когерентных свойств сверхизлучения и лазерного излучения в полупроводниковых структурах / П. П. Васильев, Р. В. Пенти, И. Х. Уайт // *Квант. электрон.* – 2012. – Т. 42, № 12. – С. 1081–1086.
6. **Захаров, С. М.** Оптоэлектронные интегральные схемы с применением вертикально излучающих лазеров // С. М. Захаров, В. Б. Федоров, В. В. Цветков // *Квант. электрон.* – 1999. – Т. 28, № 3. – С. 189–206.
7. **Гадомский, О. Н.** Эхо-спектроскопия поверхности / О. Н. Гадомский, Р. А. Власов. – Минск : Навука і тэхніка, 1990. – 216 с.
8. **Аллен, Л.** Оптический резонанс и двухуровневые атомы / Л. Аллен, Дж. Эберли. – Москва : Мир, 1978. – 224 с.
9. **Юревич, Ю. В.** Импульсы сверхизлучения в тонком инверсном слое / Ю. В. Юревич, В. А. Юревич // *Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі.* – 2015. – № 2 (46). – С. 45–52.
10. **Юревич, В. А.** Об особенностях отражения света от тонкого слоя нелинейной среды / В. А. Юревич // *Квантовая электроника.* – 1994. – Т. 21, № 10. – С. 959–961.
11. Local-field effects in a dense ensemble of resonant atoms: Model of a generalized two-level system / A.A. Afanas'ev [et al.] // *Phys. Rev. A*. – 1999. – Vol. 60, № 2. – P. 1523–1529.
12. **Юревич, Ю. В.** Светомодуляционные свойства приповерхностных резонансно поляризуемых слоев : дисс. ... канд. физ.-мат. наук : 01.04.05 / Ю. В. Юревич. – Гомель : ГГУ имени Ф. Скорины, 2017. – 168 с.
13. **Рупасов, В. И.** О граничных задачах в нелинейной оптике резонансных сред / В. И. Рупасов, В. И. Юдсон // *Квант. электрон.* – 1982. – Т. 9, № 11. – С. 2179–2186.
14. **Башаров, А. М.** Тонкая пленка двухуровневых атомов – простая модель оптической бистабильности и самопульсаций / А. М. Башаров // *ЖЭТФ.* – 1988. – Т. 94, вып. 9. – С. 12–18.
15. Гетероструктуры с квантовыми точками: получение, свойства, лазеры / Ж. И. Алферов [и др.] // *ФТП.* – 1998. – Т. 32, № 4. – С. 385–410.
16. **Garmire, E.** Resonant optical nonlinearities in semiconductors / E. Garmire // *IEEE Journ. Sel. Top. Quant. Electron.* – 2000. – Vol. 6, № 6. – P. 1094–1110.

Поступила в редакцию 08.05.2018 г.

Контакты: va_yurevich@mail.ru (Юревич Владимир Антонович)

Yurevich V. RADIATION EMISSION BY THIN INVERTED LAYER OF MEDIUM WITH QUASIRESONANT POLARIZATION.

With the uniform field approximation the analytical solutions of equations of lasing in the shape of phase modulation pulses are received. The lasing is arising in an inverted subsurface thin layer of the gain medium with a complicated power structure of elementary atom dipoles. Taking into account the extremity of time of dipolar particles phase relaxation and light absorption in quasiresonant transitions the Bloch vector conservation law is formulated.

Keywords: thin layer of resonant atoms, coherent interaction, resonant optical nonlinearity, ultra-short light pulses, nonlinear frequency drift.

УДК 532.516:669.015.23

ИСПАРЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ СФЕРИЧЕСКОГО ОБЪЕМА ЧЕРЕЗ ОДНОУРОВНЕВЫЕ ПРОТИВОЛЕЖАЩИЕ КАПИЛЛЯРЫ В ПОЛЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ

В. Л. МАЛЫШЕВ

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет продовольствия

Моделью периодической структуры, состоящей из последовательности сферических полостей, объединенных набором тонких прямых капилляров, является конфузорный капилляр термометрической формы, представляющий собой полую сферу, испаряющую жидкость через узкий цилиндрический канал. В принятой ранее базовой модели теоретически рассмотрено встречное движение менисков из сферической полости через соосные противолежащие цилиндрические капилляры произвольной длины и радиуса. Результаты исследования базовой модели позволили авторам прийти к заключению о малоэффективности осушения нагреванием материалов, содержащих каверны. С целью проверки данного вывода рассмотрен другой возможный сценарий высокотемпературного парообразования в полостях, учитывающий влияние силы тяжести.

Ключевые слова: моделирование пористых сред, интенсивный массоперенос, многофазные системы.

Введение

В пористых материалах одной из распространенных периодических структур (графов) является система полостей (каверн), связанных между собой микро- или макрокапиллярами. Впервые период такой системы был смоделирован в виде прямого цилиндрического капилляра, переходящего в частично или целиком заполненный жидкостью сферический объем. Конфузорная [1–3] термометрическая модель получила развитие в базовом варианте [4], состоящем в исследовании встречного движения менисков через соосные противолежащие цилиндрические каналы произвольной длины и радиуса. В настоящей работе было дополнительно учтено возникновение в полости под влиянием силы тяжести газового пузыря.

Физический смысл модели состоит в учете стекания жидкости в нижнюю часть объема после завершения осушения капилляров. Освобождающееся пространство в верхней части объема заполняется молекулами воздуха, всегда имеющегося в растворенном виде в жидкости, а также молекулами самой испаряющейся жидкости до состояния насыщенного пара. Таким образом, образуется пузырь с паровоздушной смесью, называемый в дальнейшем для краткости газовым (рис. 1).

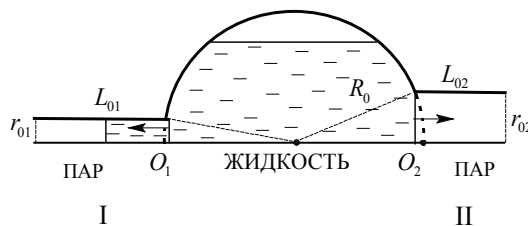


Рис. 1. Схема возникновения в полости газового пузыря после осушения одного из капилляров ($i=2$). Принятые обозначения:

r_{oi} — радиусы капилляров, i — номер капилляра ($i = 1, 2$),
 L_{oi} — длины капилляров, R_o — радиус сферической полости

Возникновение газового пузыря

Найдем в пузыре высоту h_0 сферического сегмента, соответствующего испарившейся через II капилляр массе жидкости за время t_0 до осушения I капилляра (рис. 2).

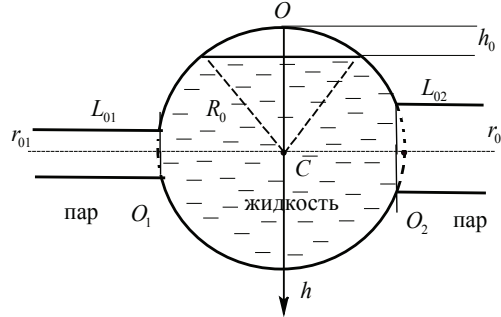


Рис. 2. Максимальный размер газового пузыря высотой h_0 , возникшего за счет испарения из сферы только через II капилляр

Рассматриваются температурные условия, соответствующие течениям в режиме сплошной среды ($Kn \ll 1$): Kn – число Кнудсена, $Kn = \lambda / R_0$, λ – длина свободного пробега, R_0 – характерный размер объема.

Как известно, при перегреве жидкостей сверх точки кипения ($T > T_{\text{кип}}$) в микрообъемах капилляров вскипания не происходит, а течение паров соответствует вязкому режиму [5–7]:

$$M_i = \frac{r_{oi}^2 (P_s^2 - P_0^2)}{16\eta R T l},$$

где M_i – молярная плотность потока пара, r_{oi} – радиус канала, P_s – давление насыщенного пара при температуре термостатирования T , P_0 – давление окружающей среды, η – коэффициент динамической вязкости, R – универсальная газовая постоянная, l – расстояние от устья канала ($x = 0$) до мениска, поверхность которого полагается практически плоской [8].

Эксперименты показывают, что даже в этих условиях характерное время испарения жидкости значительно больше времени диффузионной релаксации, что соответствует малым числам Рейнольдса и делает применимым квазистационарное рассмотрение [9, 10], предполагающее, что положение мениска в любой момент времени можно считать установившимся.

Согласно закону сохранения массы, скорость движения мениска зависит от количества испарившейся жидкости:

$$\frac{dm}{\mu dt} = M_2 \pi r_{02}^2, \quad (1)$$

где $M_i = \frac{r_{oi}^2 P_0^2 (c_s^2 - 1)}{16\eta R T L_{0i}}$ при $i = 2$, c_s – относительная концентрация насыщенного пара при температуре T , $c_s = P_s / P_0$, m – масса испарившейся жидкости, μ – молярная масса жидкости, t – время испарения.

$$\frac{\rho dV}{\mu dt} = \frac{r_{02}^2}{L_{02}} \cdot \frac{P_0^2 (c_s^2 - 1)}{16\eta R T} \pi r_{02}^2, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости, V – объем испаряющейся жидкости.

$$\int_0^{V_{\text{своб}}} dV = \frac{r_{02}^4}{L_{02}} B F \pi \int_0^{t_0} dt, \quad (3)$$

где $B = \frac{(c_s^2 - 1)}{\eta T} \left(\frac{M \cdot c}{\kappa_2 K} \right)$ – молекулярный коэффициент испарения;

$F = \frac{P_0^2 \mu}{16R\rho} \left(\frac{\kappa z K}{M \cdot c^2} \right)$ – термический коэффициент испарения.

Объем шарового сегмента

$$V_{\text{сегм}} = \frac{r_{02}^4}{L_{02}} BF \pi t_0 = \frac{\gamma_{02}^4}{z_{02}} BF \pi R_0^3 t_0, \quad (4)$$

где t_0 из (3), $z_{0i} = L_{0i}/R_0$, $\gamma_{0i} = r_{0i}/R_0$.

Введем относительную величину $\theta_0 = \frac{h_0}{R_0}$, $0 \leq \theta_0 \leq 1$.
Тогда

$$V_{\text{сегм}} = \pi h_0^2 \left(R_0 - \frac{1}{3} h_0 \right) = \pi R_0^3 \cdot \theta_0^2 \left(1 - \frac{1}{3} \theta_0 \right). \quad (5)$$

Приравняем (4) и (5)

$$\frac{\gamma_{02}^4}{z_{02}} BF \pi R_0^3 t_0 = \pi R_0^3 \theta_0^2 \left(1 - \frac{1}{3} \theta_0 \right) \quad (6)$$

и с учетом (3) получим

$$\frac{\gamma_{02}^4}{z_{02}} \cdot \frac{BF}{2BF} \left(\frac{z_{01}^2}{\gamma_{01}^2} - \frac{z_{02}^2}{\gamma_{02}^2} \right) = \theta_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0}{3} \right). \quad (7)$$

После сокращений найти h_0 можно, решив уравнение

$$\theta_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0}{3} \right) = \frac{\gamma_{02}^4}{2z_{02}} \left(\frac{z_{01}^2}{\gamma_{01}^2} - \frac{z_{02}^2}{\gamma_{02}^2} \right), \quad (8)$$

Рост газового пузыря

После завершения массопереноса в левом капилляре рост газового пузыря в сферическом объеме будет происходить за счет испарения уже с двух поверхностей, являющихся основаниями капилляров I и II в сечениях (O_1, O_2) .

Определим объем испарившейся жидкости на участке от h_0 до горизонтальной оси (C):

$$V_{\text{шар.сфера}} = V_{\text{полусферы}} - V_{\text{сегм.}}, \quad (9)$$

$$V_{\text{полусферы}} = \frac{4}{6} \pi R_0^3, \quad (10)$$

$$V_{\text{сегм}} = \frac{\gamma_{02}^4}{z_{02}} BF \pi R_0^3 t_0. \quad (11)$$

Свяжем геометрические характеристики со временем испарения через закон сохранения массы

$$\frac{dm}{\mu dt} = M_1 \pi r_{01}^2 + M_2 \pi r_{02}^2. \quad (12)$$

Подставляя из (1) M_i при $i = 1, 2$, получим:

$$\frac{\rho dV}{\mu dt} = \frac{r_{01}^4 \pi P_0^2 (c_s^2 - 1)}{16 \eta RTL_{01}} + \frac{r_{02}^4 \pi P_0^2 (c_s^2 - 1)}{16 \eta RTL_{02}}, \quad (13)$$

$$\int_0^{V_{ис.с.}} dV = \left[\frac{r_{01}^4 \pi P_0^2 (c_s^2 - 1) \mu}{16 \eta R T L_{01} \rho} + \frac{r_{02}^4 \pi P_0^2 (c_s^2 - 1) \mu}{16 \eta R T L_{02} \rho} \right] \int_0^{t_1} dt. \quad (14)$$

С целью приведения линейных величин к относительному виду делим и умножаем правую часть (14) на R_0^4 , после чего интегрируем:

$$V_{ис.с.} = \pi R_0^3 B F \left(\frac{\gamma_{01}^4}{z_{01}} + \frac{\gamma_{02}^4}{z_{02}} \right) t_1. \quad (15)$$

Подставляем в (15) выражения (9) – (11):

$$\frac{4}{6} \pi R_0^3 - \frac{\gamma_{02}^4}{z_{02}} B F \pi R_0^3 t_0 = \pi R_0^3 B F \left(\frac{\gamma_{01}^4}{z_{01}} + \frac{\gamma_{02}^4}{z_{02}} \right) t_1, \quad (16)$$

а затем сокращаем (16) на πR_0^3 :

$$\frac{4}{6} - \frac{\gamma_{02}^4}{z_{02}} \frac{B F}{2 B F} \left(\frac{z_{01}^2}{\gamma_{01}^2} - \frac{z_{02}^2}{\gamma_{02}^2} \right) = B F \left(\frac{\gamma_{01}^4}{z_{01}} + \frac{\gamma_{02}^4}{z_{02}} \right) t_1. \quad (17)$$

Найдем время испарения t_1 через осушенные I и II капилляры на участке от h_0 до осевой горизонтальной линии (рис. 3) с помощью уравнения

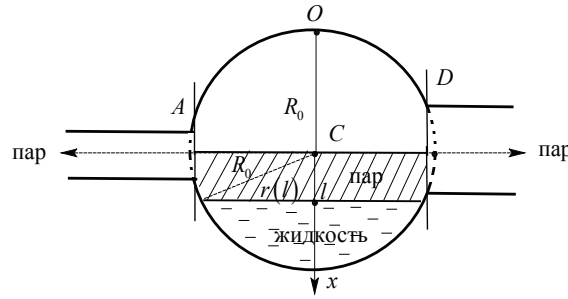


Рис. 3. Схема послойного осушения нижней (донной) части полости

$$\frac{4}{6} - \frac{\gamma_{02}^4}{2 z_{02}} \left(\frac{z_{01}^2}{\gamma_{01}^2} - \frac{z_{02}^2}{\gamma_{02}^2} \right) = B F \left(\frac{\gamma_{01}^4}{z_{01}} + \frac{\gamma_{02}^4}{z_{02}} \right) t_1. \quad (18)$$

Испарение от центра сферы до дна

Скорость удаления испарившейся массы жидкости

$$\frac{dm}{\mu dt} = M_1 \pi r_{01}^2 + M_2 \pi r_{02}^2. \quad (19)$$

Изменение объема испарившейся жидкости

$$dV = \frac{\mu}{\rho} [M_1 \pi r_{01}^2 + M_2 \pi r_{02}^2] dt. \quad (20)$$

Объем каждого слоя – левая часть (20)

$$dV = \pi r^2(l) \cdot dl, \quad (21)$$

где $r(l)$ – убывающий радиус плоской поверхности парообразования, l – расстояние от испаряющей поверхности до центра сферы (С).

Для участка $R_0 \leq l \leq 2R_0$:

$$r^2(l) = R_0^2 - (R_0 - l)^2. \quad (22)$$

Подстановка M_1 и M_2 из (1) в (20) с учетом (21), (22)

$$\left[R_0^2 - (R_0 - l)^2 \right] dl = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{r_{01}^4 P_0^2 (c_s^2 - 1)}{16\eta RT (L_{01} + l - R_0)} + \frac{r_{02}^4 P_0^2 (c_s^2 - 1)}{16\eta RT (L_{02} + l - R_0)} \right] dt. \quad (23)$$

Приведение правой части (23) к более компактной форме с использованием комплексов B и F :

$$\left[R_0^2 - (R_0 - l)^2 \right] dl = BF \left[\frac{r_{01}^4}{(L_{01} + l - R_0)} + \frac{r_{02}^4}{(L_{02} + l - R_0)} \right] dt. \quad (24)$$

Здесь расстояния от границы фазового перехода до капиллярных устьев определяется как $(L_{01} + l - R_0)$ и $(L_{02} + l - R_0)$. Расстояние от центра сферы (т. С) до оснований капилляров (O_1 и O_2) к учету не принимается, поскольку пар, заполняя представленный объем, равномерно распределяется по ширине каждого слоя, а его концентрация меняется лишь по вертикали, начиная с концентрации насыщения C_s над межфазной поверхностью и убывая до единицы в устьях капилляров.

Приведение в (24) линейных величин к относительному виду делением обеих частей уравнения на R_0^4 :

$$\left[1 - (1 - z)^2 \right] dz = BF \left[\frac{\gamma_{01}^4}{(z_{01} + z - 1)} + \frac{\gamma_{02}^4}{(z_{02} + z - 1)} \right] dt, \quad (25)$$

где $z = \frac{l}{R_0}$.

Приведение правой части к общему знаменателю:

$$\left\{ \frac{\gamma_{01}^4 [(z_{02} - 1) + z] + \gamma_{02}^4 [(z_{01} - 1) + z]}{[(z_{01} - 1) + z] \cdot [(z_{02} - 1) + z]} \right\} = \frac{\gamma_{01}^4 (z_{02} - 1) + \gamma_{01}^4 z + \gamma_{02}^4 (z_{01} - 1) + \gamma_{02}^4 z}{(z_{01} - 1)(z_{02} - 1) + (z_{02} - 1)z + (z_{01} - 1)z + z^2} =$$

$$= \frac{[\gamma_{01}^4 (z_{02} - 1) + \gamma_{02}^4 (z_{01} - 1)] + (\gamma_{01}^4 + \gamma_{02}^4)z}{z^2 (z_{01} + z_{02} - 2)z + (z_{01} - 1)(z_{02} - 1)} = \frac{a_1 + b_1 z}{z^2 + a_2 z + b_2},$$

где $a_1 = [\gamma_{01}^4 (z_{02} - 1) + \gamma_{02}^4 (z_{01} - 1)]$, $b_1 = (\gamma_{01}^4 + \gamma_{02}^4)$, $a_2 = (z_{01} + z_{02} - 2)$, $b_2 = (z_{01} - 1)(z_{02} - 1)$.

Разделение переменных:

$$\frac{(z^2 + a_2 z + b_2) [1 - (1 - z)^2] dz}{(a_1 + b_1 z)} = BF dt. \quad (26)$$

Преобразование числителя в левой части (26):

$$\frac{(\alpha z + \beta z^2 + \omega z^3 - z^4) dz}{(a_1 + b_1 z)} = BF dt, \quad (27)$$

где $\alpha \equiv 2b_2$, $\beta \equiv (2a_2 - b_2)$, $\omega \equiv (2 - a_2)$.

Раскрываем скобку в числителе (27):

$$\frac{\alpha z dz + \beta z^2 dz + \omega z^3 dz - z^4 dz}{(a_1 + b_1 z)} = BF dt. \quad (28)$$

Интегрирование левой части (28):

$$\begin{aligned} \alpha \int_1^2 \frac{z dz}{(a_1 + b_1 z)} &= \frac{\alpha}{b_1^2} \left[(a_1 + b_1 z) - a_1 \ln |a_1 + b_1 z| \right]_1^2 = \frac{2b_2}{b_1^2} \left[(a_1 + b_1 z) - a_1 \ln |a_1 + b_1 z| \right]_1^2 \\ \beta \int_1^2 \frac{z^2 dz}{(a_1 + b_1 z)} &= \frac{\beta}{b_1^3} \left[\frac{(a_1 + b_1 z)^2}{2} - 2a_1(a_1 + b_1 z) + a_1^2 \ln |a_1 + b_1 z| \right]_1^2 = \\ &= \frac{2a_2 - b_2}{b_1^3} \left[\frac{(a_1 + b_1 z)^2}{2} - 2a_1(a_1 + b_1 z) + a_1^2 \ln |a_1 + b_1 z| \right]_1^2; \\ \omega \int_1^2 \frac{z^3 dz}{(a_1 + b_1 z)} &= \frac{\omega}{b_1^4} \left[\frac{(a_1 + b_1 z)^3}{3} - \frac{3a_1(a_1 + b_1 z)^2}{2} + 3a_1^2(a_1 + b_1 z) - a_1^3 \ln |a_1 + b_1 z| \right]_1^2 = \\ &= \frac{(2 - a_2)}{b_1^4} \left[\frac{(a_1 + b_1 z)^3}{3} - \frac{3a_1(a_1 + b_1 z)^2}{2} + 3a_1^2(a_1 + b_1 z) - a_1^3 \ln |a_1 + b_1 z| \right]_1^2 \\ \int_1^2 \frac{z^4 dz}{(a_1 + b_1 z)} &= \frac{1}{b_1^5} \left[\frac{(a_1 + b_1 z)^4}{4} - \frac{4a_1(a_1 + b_1 z)^3}{3} + \frac{6a_1^2(a_1 + b_1 z)^2}{2} - 4a_1^3(a_1 + b_1 z) + a_1^4 \ln |a_1 + b_1 z| \right]_1^2. \end{aligned}$$

Общее решение при интегрировании левой части (26):

$$\begin{aligned} &\frac{2b_2}{b_1^2} \left[(a_1 + b_1 z) - a_1 \ln |a_1 + b_1 z| \right]_1^2 + \frac{(2a_2 - b_2)}{b_1^3} \left[\frac{(a_1 + b_1 z)^2}{2} - 2a_1(a_1 + b_1 z) + a_1^2 \ln |a_1 + b_1 z| \right]_1^2 + \\ &+ \frac{(2 - a_2)}{b_1^4} \left[\frac{(a_1 + b_1 z)^3}{3} - \frac{3a_1(a_1 + b_1 z)^2}{2} + 3a_1^2(a_1 + b_1 z) - a_1^3 \ln |a_1 + b_1 z| \right]_1^2 - \\ &- \frac{1}{b_1^5} \left[\frac{(a_1 + b_1 z)^4}{4} - \frac{4a_1(a_1 + b_1 z)^3}{3} + \frac{6a_1^2(a_1 + b_1 z)^2}{2} - 4a_1^3(a_1 + b_1 z) + a_1^4 \ln |a_1 + b_1 z| \right]_1^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Для краткости обозначим его как $[INT]$, тогда

$$[INT]_1^2 = B F t_2, \quad (30)$$

где t_2 – время осушения нижней части полости.

Таким образом, полное время осушения сферы определяется величиной

$$t_{полн} = t_0 + t_1 + t_2. \quad (31)$$

Численные оценки

Проведем оценку времени осушения сферического объема (31) согласно приведенной модели.

Рассматривается испарение воды из полости радиуса R_0 через соосные противоположные капилляры (табл. 1).

Таблица 1 – Геометрические параметры капилляров, м

r_{01}	r_{02}	L_{01}	L_{01}
$2 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$

Перегретая жидкость ($378 \leq T \leq 413\text{ K}$) испаряется в атмосферу с давлением воздуха P_0 (табл. 2)

Таблица 2 – Теплофизические параметры системы вода – водяной пар – воздух ($\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 0,018 \text{ кг/моль}$, $P_{\text{атм}} = 10^5 \text{ Па}$)

$T, \text{ K}$	$\eta \cdot 10^{-5}, \text{ Па} \cdot \text{с}$	$P_s \cdot 10^5, \text{ Па}$	c_s	$B, \text{ Па} \cdot \text{с} \cdot \text{ K}$
378	1,6699	1,21	1,21	73,52240334
383	1,6497	1,43	1,43	165,3765482
388	1,6306	1,69	1,69	293,3694984
393	1,6141	1,99	1,99	466,655396
398	1,6006	2,32	2,32	687,9181973
403	1,5906	2,7	2,7	981,2609688
408	1,5838	3,13	3,13	1361,266615
413	1,5803	3,61	3,61	1843,532578

Связь времени осушения системы с температурой процесса и размерами полости представлена таблицей 3.

Таблица 3 – Общее время испарения воды из полости, сут

$R_0, \text{ м}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
$T, \text{ K}$					
378	0,661588669	8,381656	43,495752	148,7201528	395,68662
383	0,29412628	3,726281	19,337157	66,11737381	175,91268
388	0,165803157	2,1005575	10,900629	37,27130162	99,164473
393	0,104234494	1,3205451	5,548727	23,4311296	62,341145
398	0,070708391	0,8958034	4,6486809	15,89471408	42,289667
403	0,049570492	0,6280078	3,2589824	11,14307346	29,647395
408	0,035732595	0,4526957	2,3492181	8,03241844	21,371149
413	0,02638499	0,334271	1,7346654	5,931147185	15,780481

Таким образом, результаты расчетов, проведенных на основе модели, учитывающей влияние силы тяжести на массоперенос (рис. 4–6) при высокотемпературном парообразовании в сферических полостях радиусами более $0,004 \text{ м}$, связанных со средой двумя соосными противолежащими капиллярами, подтверждают вывод, сделанный при исследовании базовой модели в пренебрежении вкладом гравитационного поля, о малоэффективности интенсификации процесса путем избыточного нагрева системы.

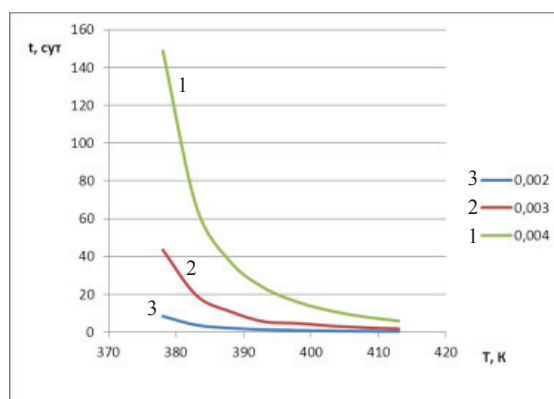


Рис. 4. Зависимость времени испарения от температуры процесса для полостей различных размеров

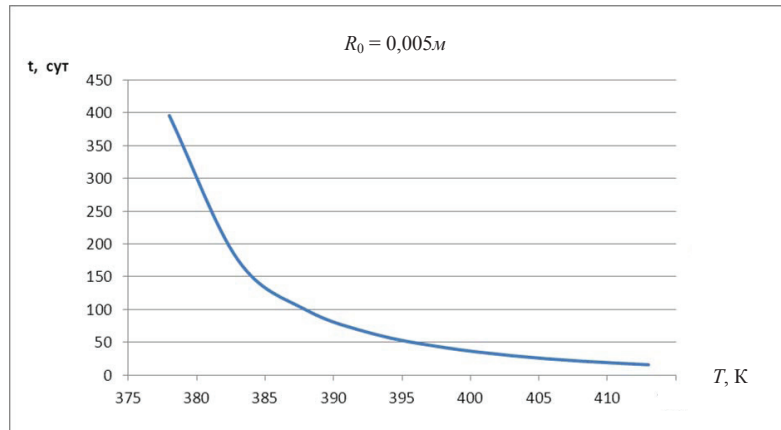


Рис. 5. Зависимость времени испарения от температуры процесса

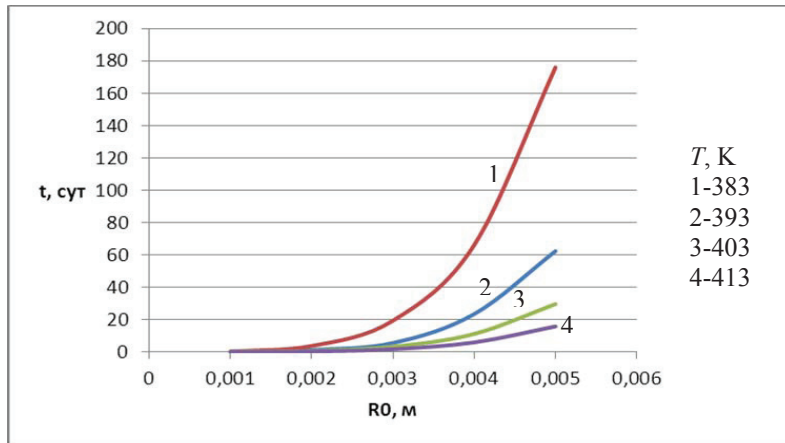


Рис. 6. Изотермы времени осушения полостей в зависимости от их линейных размеров

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Малышев, В. Л.** Вязкий режим испарения жидкостей из капилляров конфузторного типа / В. Л. Малышев // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2008. – № 3. – С. 127–134.
2. **Malyshev, V. L.** The Effect of the Structure of Heterogeneous Media on the Evaporation of Liquids under Intensive Thermal Stimulation / V. L. Malyshev // High Temperature. – 2009. – Vol. 47, № 4. – P.p. 554–558.
3. **Малышев, В. Л.** Интенсивность испарения перегретых жидкостей из конических каналов / В. Л. Малышев // Весці НАНБ. Серыя фізіка-тэхнічных навук. – 2010. – № 1. – С. 71–76.
4. **Малышев, В. Л.** Испарение метастабильной жидкости из полости через бинарную систему капилляров / В. Л. Малышев // Весці НАНБ. Серыя фізіка-тэхнічных навук. – 2014. – № 3. – С. 37–42.
5. **Ландау, Л.** Механика сплошных сред / Л. Ландау, Е. Лифшиц. – Москва : Гостехиздат, 1954. – 765 с.
6. **Гайдуков М. Н.** К теории испарения жидкостей из капилляров при температуре, превышающей температуру кипения / М. Н. Гайдуков, Н. В. Чураев, Ю. И. Яламов // ЖТФ. – 1976. – Т. 46, № 10. – С. 2142–2147.

7. **Уварова, Л. А.** Математическая теория высокотемпературного парообразования неоднородных жидкостей в капиллярах / Л. А. Уварова, В. Л. Малышев. – Могилев : МГТИ, 2002. – 128 с.
8. **Ершова, Г. Ф.** Температурная зависимость толщины полимолекулярных адсорбционных пленок воды на поверхности кварца / Г. Ф. Ершова, З. М. Зорин, Н. В. Чураев // Колл. журн. – 1975. – Т. 37, № 1. – С. 208–210.
9. **Гамаюнов, Н. И.** О переходном режиме высокоинтенсивного испарения жидкостей из капилляров / Н. И. Гамаюнов, В. Л. Малышев, А. С. Фельдблюм // ИФЖ. – 1983. – Т. 44, № 2. – С. 231–235.
10. **Малышев, В. Л.** Испарение перегретых жидкостей из тонких капилляров / В. Л. Малышев, Н. И. Гамаюнов // ТВТ. – 1984. – Т. 22, № 1. – С. 184–186.

Поступила в редакцию 02.05.2018 г.

Контакты: vmalyshev@tut.by (Малышев Владимир Львович)

Malyshev V. LIQUID EVAPORATION FROM SPHERICAL VOLUME THROUGH EQUIL-LEVEL CONTRA LAIN CAPILLARIES IN GRAVITY FIELD.

High-temperature vaporization from porous media with spherical cavities in the gravity field is studied.

Keywords: porous media modeling, intensive mass transfer, multiphase systems.

УДК 53.09

ТЕРМОКИНЕТИЧЕСКАЯ ЭДС В МЕДИЦИНСКОМ СПЛАВЕ НИКЕЛИДА ТИТАНА Ti-50,8at.%Ni

А. В. ЛЕСОТА

аспирант

Институт технической акустики НАН Беларуси, Витебск

В. В. РУБАНИК

доктор технических наук, член-корреспондент НАН Беларуси

Институт технической акустики НАН Беларуси, Витебск

В. В. РУБАНИК МЛАД.

доктор технических наук

Институт технической акустики НАН Беларуси, Витебск

В статье установлено, что величина наводимой термокинетической ЭДС в медицинском сплаве Ti-50,8at.% Ni не зависит от скорости движения зоны охлаждения в диапазоне от 5 до 40 мм/с и от термоциклирования (вплоть до 70 термоциклов), в то время как заданная деформация не линейно снижает ее величину. При прохождении зоной охлаждения пластически деформированного участка наблюдается увеличение и последующее снижение величины термокинетической ЭДС.

На основании результатов данных исследований разработан метод и устройство определения неоднородных участков протяженных TiNi изделий, находящихся в аустенитном фазовом состоянии.

Ключевые слова: TiNi сплавы, термокинетическая ЭДС, прямое фазовое превращение, пластическая деформация.

Введение

Термоэлектрические явления возможны как в разнородных материалах (эффекты Пельтье, Зеебека, Томсона), так и в однородных металлах (эффект Бенедикса) [1, 2]. Примером возникновения движущей силы ЭДС в однородных материалах служит наведение термокинетической ЭДС, при перемещении локальной зоны нагрева вдоль проволочного железного образца или вольфрамовой пленки [3], при этом обязательным условием возникновения такого рода ЭДС является реализация фазового превращения в локальной зоне нагрева. Например, в результате инициирования аллотропных фазовых превращений в железе при температуре 700-800°C. В ряде материалов фазовые превращения могут протекать при значительно более низких температурах, например, в сплавах, обладающих эффектом памяти формы. При реализации термоупругих фазовых превращений инициирование ЭДС в этом случае возможно как при перемещении участка нагрева по проводнику [4], так и при перемещении локального участка охлаждения [5]. При этом нагрев в локальной зоне проводника инициирует обратный фазовый переход ($T \geq A_c$), а охлаждение – прямой ($T \leq M_s$). Однако остается не изученным вопрос о влиянии пластической деформации на величину термокинетической ЭДС, а также условий наведения данной ЭДС (скорость движения зоны охлаждения, термоциклирование, пластическая деформация) на ее величину.

Основная часть

Исследования по изучению влияния пластической деформации, а также условий наведения данной ЭДС на ее значение проводили на проволочных образцах Ti-50,8at.%Ni, отожженных 700°C на воздухе. TiNi образцы длиной 420 мм закрепляли на специальной установке, позволяющей

© Лесота А. В., 2018

© Рубаник В. В., 2018

© Рубаник В. В., 2018

перемещать зону охлаждения с постоянной скоростью 0,4 см/с, в которой инициировался прямой фазовый переход из аустенита в мартенсит ($A \rightarrow M$). Перемещение зоны охлаждения осуществляли последовательно в противоположных направлениях. Места контакта образца с подводящими проводами термоизолировали, сигнал с милливольтметра выводили на персональный компьютер (рис. 1) [6].

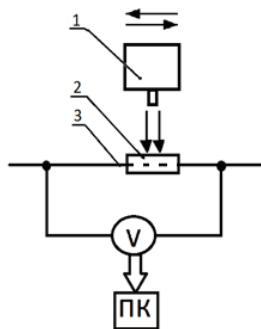


Рис. 1. Схема измерительной установки: 1 – устройство охлаждения; 2 – зона охлаждения; 3 – проволоочный TiNi образец

Для изучения влияния пластической деформации на величину термокинетической ЭДС, TiNi образец предварительно локально деформировали изгибом, через цилиндрическую оправку диаметром 1,5 мм. При прохождении зоной охлаждения места деформации значение термокинетической ЭДС резко возрастает до 0,37 мВ с последующим уменьшением до 0,17 мВ, после прохождения участка деформации ЭДС возвращается к прежнему уровню $\approx 0,2$ мВ и стабилизируется (рис. 2). При этом увеличение количества деформированных участков не меняет кинетику процесса на каждом из них.

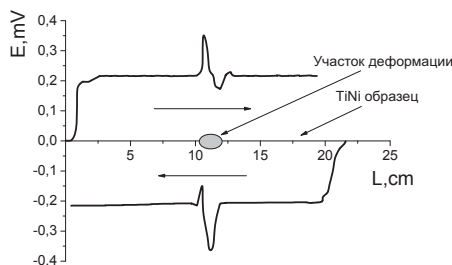


Рис. 2. Распределение термокинетической ЭДС вдоль TiNi образца, содержащего участок деформации. Стрелками указано направление движения зоны охлаждения

Резкое увеличение термокинетической ЭДС в месте деформации связано с тем, что при деформировании материала возникают различного рода дефекты (дислокации, мартенситный наклеп и т. д.), которые влияют на электрические свойства материала, что как следствие изменяет величину наводимой термокинетической ЭДС.

Для изучения влияния степени пластической деформации на изменения термокинетической ЭДС образцы никелида титана локально деформировали изгибом через оправки различного диаметра, таким образом, задавая в месте изгиба разную по величине деформацию.

Как видно (рис. 3), при увеличении величины пластической деформации проволоочного TiNi образца увеличивается и величина изменения термокинетической ЭДС.

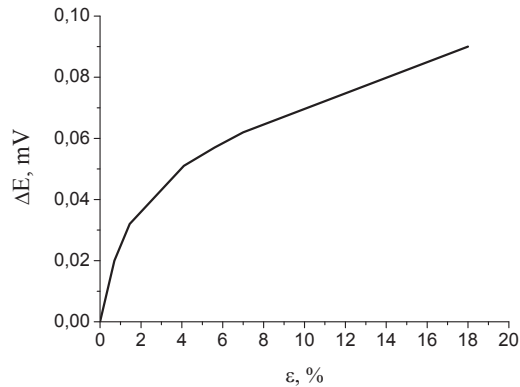


Рис. 3. Зависимость величины изменения термокинетической ЭДС от степени пластической деформации изгибом

Было выдвинуто предположение, что величина термокинетической ЭДС при увеличении локальной деформации будет увеличиваться до определенного значения, после чего она стабилизируется. Для подтверждения данного предположения был проведен эксперимент, в котором проволоочный образец никелида титана локально деформировали изгибом через оправку и разгибали, механическое циклирование повторяли 20 раз на оправках различного диаметра (рис. 4).

При этом степень единичной деформации (ε) при изгибе определяли как $\varepsilon = \frac{d_{\text{пр.}}}{D_{\text{опр.}}} \cdot 100\%$, где $d_{\text{пр.}}$ – диаметр проволоочного образца, $D_{\text{опр.}}$ – диаметр цилиндрической оправки.

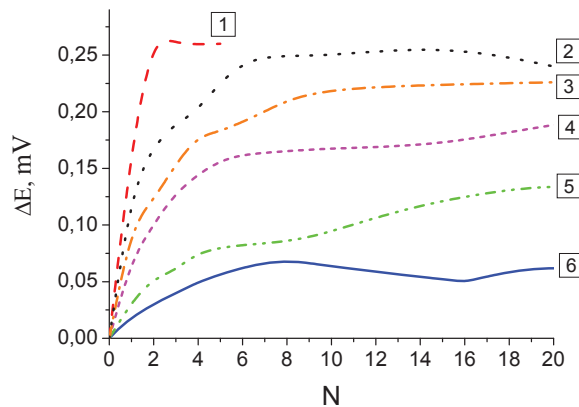


Рис. 4. Зависимость изменения величины ЭДС от количества циклов при механическом циклировании через оправки диаметром:

1) 1,1 мм (31%); 2) 2,61 мм (13,4%); 3) 3,5 мм (10%); 4) 4,9 мм (7,1%); 5) 6,8 мм (5,1%); 6) 12 мм (2,9%)

По данным, полученным в результате эксперимента, для механического циклирования через оправку 12 мм (единичная деформация 2,9%) можно констатировать, что с увеличением количества циклов значение изменения термокинетической ЭДС (ΔE) увеличивается до 0,05 мВ, после чего происходит ее насыщение. При дальнейшем механическом циклировании величина термокинетической ЭДС стабилизируется. Данная зависимость наблюдается при механическом циклировании проволоочных образцов через оправки и других диаметров, т. е. для различной степени деформации.

Также стоит отметить наличие зависимости между величиной изменения термокинетической ЭДС и задаваемой деформацией в первом цикле. Так при задании деформации 2,9 % величина

изменения наводимой термокинетической ЭДС составляет 0,02 мВ, а при деформации 5,1% – 0,05 мВ. При последующем увеличении степени деформации, величина термокинетической ЭДС увеличивается. Таким образом, при увеличении значения задаваемой единичной деформации в первом цикле, увеличивается величина изменения термокинетической ЭДС.

Также можно отметить зависимость между величиной деформации при механическом циклировании и уровнем насыщения термокинетической ЭДС. Так при механическом циклировании через оправку 12 мм (задаваемая деформация в первом цикле 2,9%) величина термокинетической ЭДС стабилизируется при значениях 0,07 мВ, в то время как при механическом циклировании через оправку 6,8 мм (величина единичной деформации 5,1%) величина насыщения ЭДС достигает 0,12 мВ. То есть чем больше значение задаваемой единичной деформации при механическом циклировании, тем больше величина насыщения ЭДС.

При исследовании факторов, влияющих на величину наводимой термокинетической ЭДС, рассматривались такие факторы, как скорость движения зоны охлаждения, термоциклирование и деформация TiNi образца.

При проведении исследований влияния скорости движения зоны охлаждения на величину термокинетической ЭДС локальную зону охлаждения перемещали вдоль образца в диапазоне скоростей от 5 мм/с до 40 мм/с.

Независимость величины термокинетической ЭДС в сплавах TiNi от скорости движения зоны охлаждения (рис. 5), в отличие от результатов работ [3], объясняется тем, что при мартенситном превращении в никелиде титана не обнаруживаются признаки термически активируемой кинетики, процесс является существенно неаррениусовским [7]. Это приводит к тому, что доля мартенситной фазы оказывается однозначной функцией температуры и не зависит от скорости охлаждения в широком интервале значений этих скоростей.

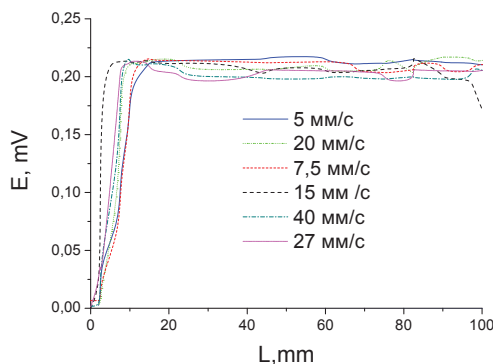


Рис. 5. Распределения термокинетической ЭДС по длине TiNi образца, при различных скоростях перемещения зоны охлаждения

Известно [8], что при термоциклировании сплава никелида титана эквиатомного состава, после каждого термоцикла, значение термокинетической ЭДС падает, и уже после 70-го цикла как таковой термокинетической ЭДС не наблюдается. Представляло интерес изучить подобное явление в проволочных образцах медицинского сплава Ti-50,8ат.% Ni, находящихся в аустенитном фазовом состоянии при комнатной температуре, для этого в данных образцах наведение термокинетической ЭДС в результате перемещения зоны охлаждения вдоль TiNi образца повторяли 70 раз, фактически подвергая материал термоциклированию и измеряли величину наводимой термокинетической ЭДС. В процессе проведения исследования установлено, что термоциклирование медицинского сплава Ti-50,8ат.% Ni в отличие от эквиатомного Ti-50ат.% Ni, на величину термокинетической ЭДС не влияет (рис. 6).

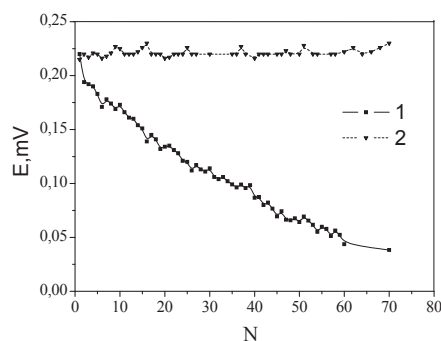


Рис. 6. Изменение термокинетической ЭДС при термоциклировании: 1) сплава эквиаомного состава Ti-50ат.%Ni; 2) медицинского сплава Ti-50,8ат.% Ni

Данное поведение Ti-50ат.%Ni образцов при термоциклировании объясняется тем, что характеристические температуры в данном сплаве при термоциклировании уменьшаются в среднем на 20-25°C. При этом для исследуемого эквиаомного сплава температура окончания прямого фазового перехода M_s становится ниже комнатной, т. е. материал при охлаждении не переходит полностью в мартенситное состояние. Таким образом, в данном образце при термоциклировании не происходит полного фазового превращения, как прямого ($A \rightarrow M$) при остывании образца, так и обратного при последующем нагреве ($M \rightarrow A$), что как следствие приводит к уменьшению и последующему исчезновению термокинетической ЭДС. В случае термоциклирования медицинского сплава Ti-50,8ат.% характеристические температуры прямого фазового превращения не изменяются (рис. 7) и как следствия величина наводимой термокинетической ЭДС не зависит от термоциклирования в широком диапазоне количества термоциклов.

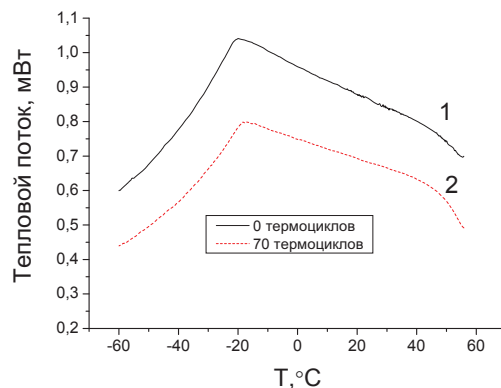


Рис. 7. Калориметрические кривые сплава Ti-50,8ат.%Ni: 1) после отжига; 2) после 70 термоциклов, через температуры прямого фазового превращения

В данной работе также проводили исследования влияния предварительной деформации TiNi образца на наводимую в нем термокинетическую ЭДС. Для изучения данного влияния проволоочные Ti-50,8ат.%Ni образцы жестко фиксировали в испытательной машине ИП 5158-5 и растягивали на определенную длину, таким образом, задавая образцу разную по величине деформацию, после чего в образце наводили термокинетическую ЭДС. Установлено, что чем больше деформация, тем меньше значение наводимой термокинетической ЭДС (величина ЭДС уменьшается от 0,15 мВ до 0, при увеличении деформации до 10%).

Как видно (рис. 8), зависимость термокинетической ЭДС от деформации не линейна и ее можно разделить на три участка с разными наклонами кривой: на первом участке деформация,

находится в диапазоне от 1-2% (рис. 9), что соответствует сверхупругому состоянию проволоочного TiNi образца; на втором участке деформация составляет 2,5-6,5%, данный участок соответствует фазовому пределу текучести, в образце происходит образование мартенсита деформации; на третьем участке деформация составляет более 7%, что свидетельствует о развитии пластической деформации.

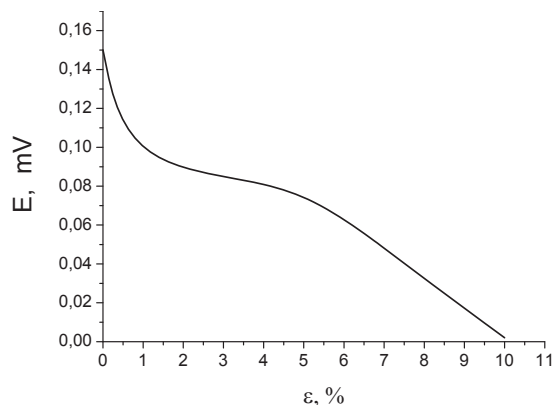


Рис. 8. Зависимость наведенной термокинетической ЭДС от степени деформации

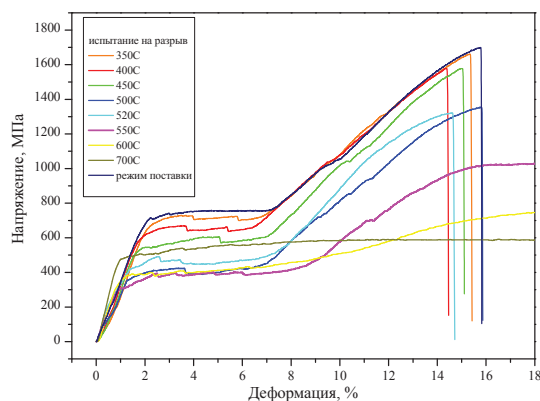


Рис. 9. Диаграммы деформирования сплава Ti-50.8 ат.%Ni для разных температур отжига

Таким образом, уменьшение величины термокинетической ЭДС от степени предварительной деформации не линейно и определяется процессами, протекающими для данной деформации в TiNi образце.

На основании результатов данных исследований предложен метод и устройство определения неоднородных участков протяженных изделий TiNi, находящихся при комнатной температуре в аустенитном фазовом состоянии. Метод определения неоднородных деформационных участков заключается в протягивании протяженного TiNi изделия с постоянной скоростью через устройство, в котором оно локально подвергается охлаждению ниже температуры перехода материала в мартенситное состояние, с непрерывным измерением термокинетической ЭДС, возникающей в проволоочном изделии. В случае существования неоднородных участков наблюдается резкий скачок значения термокинетической ЭДС. Таким образом, по изменению термокинетической ЭДС определяются участки изделия, несоответствующие по физическим свойствам, и подлежат выбраковке. Устройство, реализующее предложенный способ контроля (рис. 10), состоит из подающего и принимающего блоков 1 и 7, термостатной камеры 4 и вольтметра 3 с двумя роликовыми контактами 2 и 5, соединяющими с протяженным изделием из никелида титана 6.

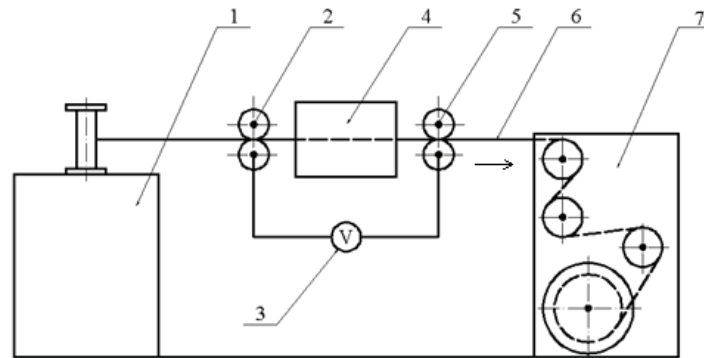


Рис. 10. Устройство контроля качества протяженных изделий из никелида титана

Преимуществом предложенного способа и устройства контроля однородности протяженных TiNi изделий перед существующими аналогами [9, 10] является: снижение технологической трудоемкости и энергоемкости (существующие аналоги имеют ряд термостатных камер, в то время как предложенное устройство – одну); повышение точности контроля качества изделия, например точность определения дефектных участков, отличающихся свойствами от заданных.

Заключение

Наведение термокинетической ЭДС в никелиде титана обусловлено протеканием термоупругих фазовых превращений в зоне температурного воздействия, и, как следствие, возникновении контактной разности потенциалов на участках, находящихся в двухфазном состоянии. Величина наводимой термокинетической ЭДС в медицинском сплаве Ti-50,8at.% Ni не зависит от скорости движения зоны охлаждения в диапазоне от 5–40 мм/с и от термоциклирования (вплоть до 70 термоциклов), в то время как деформация TiNi образца не линейно снижает ее величину (вплоть до ≈ 0 мВ при $\epsilon = 10\%$).

При прохождении зоной охлаждения пластически деформированного участка наблюдается увеличение и последующее снижение величины термокинетической ЭДС, после прохождения участка деформирования ЭДС возвращается к прежнему уровню и стабилизируется, при этом, чем больше степень пластической деформации, тем больше изменения величины термокинетической ЭДС. При механическом циклировании изгибом проволоочных TiNi образцов с разной степенью деформации величина изменения термокинетической ЭДС растет до определенного значения, после чего стабилизируется.

На основании результатов данных исследований разработан метод и устройство определения неоднородных участков протяженных TiNi изделий, находящихся в аустенитном фазовом состоянии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Benedicks, C.** Tetziger Stand grundlegenden Keuntrisse der Thermoelektrizität. Erg. Exact. Naturwiss., 1929. – Bd.8. – P. 26–67.
2. Thermoelectric Phenomena under Large Temperature Gradients / L. I. Anatychuk, L. P. Bulat // Thermoelectrics Handbook: Macro to Nano-Structured Materials, CRC Press: New York, London, Tokyo, 2005. – Chapter 3.
3. **Фурмаков, Е. Ф.** Датчик термокинетической ЭДС / Е.Ф. Фурмаков // Сборник тезисов одиннадцатой Международной конференции “Крым 2004”. – Судак, 2004. – С. 11–12.
4. **Rubaniĳ, V. V.** Peculiarities of thermoelectric force behaviour in nikelide titane under unsteady heating / V. V. Rubaniĳ, V. V. Rubaniĳ Jr., O. A. Petrova-Burkina // European Symposium on Martensitic Transformations (ESOMAT 2012), Saint-Petersburg, Russia, September 9–16, 2012. – Russia : Saint-Petersburg. – P. 40.
5. **Рубаниĳ, В. В. млад.** Влияние пластической деформации TiNi проволоки на термокинетическую ЭДС / В. В. Рубаниĳ млад., А. В. Лесота // Вектор науки ТГУ. – 2017. – № 3(41). – С. 97–102.

6. **Рубаник, В. В.** Термокинетическая ЭДС в сплаве TiNi при инициировании прямого фазового перехода // В. В. Рубаник, В. В. Рубаник млад., А. В. Лесота // Вестник Тамбовского государственного университета имени Г. Р. Державина. Естественные и технические науки. – 2015. – Т. 20, вып. 2. – С. 490–493.
7. Никелид титана. Медицинский материал нового поколения / В. Э. Гюнтер [и др.]. – Томск : Изд-во МИЦ, 2006. – 296 с.
8. **Петрова-Буркина, О. А.** Термо-ЭДС в никелиде титана при нестационарном нагреве / О. А. Петрова-Буркина, В. В. Рубаник млад. // “Микромеханизмы пластичности, разрушения и сопутствующих явлений” : IV Всероссийская молодежная конференция, Тольятти, 26 сентября – 1 октября 2011 г. / отв. ред. А. А. Викарчук, Д. Л. Мерсон. – Тольятти : ТГУ, 2011. – С. 132–135.
9. Способ и устройство для непрерывного контроля качества проволоки из сплава с памятью формы: RU 2372612, G01N25/ Сальваго Джованни, Тоя Лука ; Саес Геттерс, 10.11.2009.
10. Method of heat treatment and/or inspection of functional mechanical properties, particularly transformation strain and/or strength, of shape memory alloy filaments and apparatus for the application of this method: US 20120018413 A1/ Jan Pilch, Petr Sittner, Jan. 26, 2012.

Поступила в редакцию 08.06.2018 г.

Контакты: ann20zv@tut.by (Лесота Анна Викторовна)

+375 (212) 24 04 53 (Рубаник Василий Васильевич)

+375 (212) 24 04 53 (Рубаник Василий Васильевич млад.)

Lesota A., Rubanik V., Rubanik V. Jr. THERMOKINETIC EMF IN THE MEDICAL ALLOY OF TITANIUM NICKELIDE Ti-50,8at.%Ni.

The article proves that the value of the thermokinetic EMF in the medical alloy of Ti-50.8 at.% Ni is independent of the velocity of the cooling zone in the range 5-40 mm/s and of the thermal cycling (up to 70 thermocycles). The deformation applied to TiNi sample does not linearly reduce the thermokinetic EMF value. When the cooling zone passes through the deformation zone, the EMF value increases sharply, after which its decrease is observed.

Based on the results of these studies, a method and a device to determine inhomogeneous sections of extended TiNi articles in the austenite phase state have been developed.

Keywords: TiNi alloys, thermokinetic EMF, direct phase transformation, plastic deformation.

УДК 548.0

ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ СКРАЙБИРОВАНИЯ НА ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ДВОЙНИКОВ В МОНОКРИСТАЛЛЕ ВИСМУТА

Н. М. СИМАНОВИЧ

аспирант

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

О. М. ОСТРИКОВ

кандидат физико-математических наук, доцент

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

М. П. КУЛЬГЕЙКО

кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой механики

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

Методом скрайбирования поверхности алмазным индентором установлены средние статистические характеристики двойникования в зависимости от скорости образования царапины при различной нагрузке на индентор и длине скрайбирования. Выявлено, что при сложной неоднозначной характеристике образования двойников при скрайбировании имеется общая тенденция увеличения количества двойников, их геометрических параметров и степени некогерентности двойниковых границ с увеличением скорости скрайбирования и нагрузки на индентор.

Ключевые слова: механическое двойникование, скрайбирование, висмут.

Введение

Двойникование является одним из основных видов пластической деформации твердых тел и проявляется преимущественно в условиях затруднительной реализации процесса скольжения [1–4]. Роль механического двойникования в процессах разрушения материалов достаточно противоречива. В одних условиях двойники способствуют зарождению трещин и являются причиной разрушения, в других – являются резервом пластичности материалов [3–6]. В связи со значительной неопределенностью роли двойникования в разрушении и деформировании металлов и сплавов важной задачей является изучение закономерностей образования двойниковых ансамблей в условиях воздействия различных факторов деформационного нагружения. Исследование механического двойникования является актуальным также в связи с перспективой развития принципа инженерии границ зерен, основанного на конкуренции различных механизмов пластической деформации [7].

Основные механические характеристики материалов (модуль упругости, предел текучести, предел прочности, пластичность и трещиностойкость) с точки зрения современных теорий связаны с различными микромеханизмами локальной деформации, в том числе с зарождением, движением и аннигиляцией дислокаций, разориентацией и изменением структуры кристаллической решетки, микропластичностью [8]. В то же время отмечается [8], что прогнозирование механических характеристик материалов с использованием моделей, в основе которых лежат указанные механизмы, имеют большую неопределенность.

Пластическая деформация путем механического двойникования осуществляется при различных видах и способах нагружения [2–4], которые возможны в реальных условиях эксплуатации технических систем. Процессы двойникования наблюдаются при разных видах деформирования образцов (растяжении, сжатии, кручении и др.) и при различном воздействии на поверхность металла более твердым телом, например, путем вдавливания, царапания и т. п. Двойникование может проявляться при квазистатическом, динамическом, вибрационном,

© Симанович Н. М., 2018

© Остриков О. М., 2018

© Кульгейко М. П., 2018

циклическом и других способах нагружения. То есть условия, при которых исследуются процессы двойникования, имитируют различные процессы нагружения и разрушения деталей машин и механизмов.

В работе [3] обобщены результаты многочисленных экспериментальных исследований процессов двойникования при квазистатическом и динамическом нагружении в широком диапазоне скоростей деформирования и других факторов воздействия. Отмечается, что на двойникование наряду с температурой существенное влияние оказывает скорость нагружения и кристаллографическая ориентация образца [1, 3], и, следовательно, к максимальному эффекту пластичности при двойниковании может привести некоторое определенное сочетание данных факторов. При этом следует отметить, что представленные закономерности и выводы были установлены на основе изучения двойникования, преимущественно, в условиях растяжения и индентирования. Очевидно, что в других условиях нагружения сочетание факторов, сопровождающих двойникование, может быть иным.

Исследование двойникования при скрайбировании и сопутствующих ему деформационных явлениях позволяет значительно расширить понимание таких процессов разрушения, как царапание при трении, микрорезание и т. п. То есть при изучении скрайбирования как аналога указанных процессов представляется возможным установить закономерности пластической деформации и разрушения поверхности, а следовательно, иметь информацию для изменения и управления ее свойствами [4]. В ранее выполненных исследованиях [9, 10] установлены некоторые закономерности зарождения и развития двойников в зависимости от условий скрайбирования и особенности формирования двойниковых ансамблей в различных областях царапины. При скрайбировании картина двойникования отличается большей многофакторностью, и, следовательно большей неопределенностью по сравнению с образованием двойниковых ансамблей при вдавливании индентора. Наиболее значительные особенности двойникования наблюдаются вдоль границ царапины. Отмечается также зависимость формирования двойников от кристаллографического направления скрайбирования и геометрических параметров царапины.

Цель работы – исследование особенностей образования двойников при различных скоростях скрайбирования поверхности монокристалла висмута.

Методика проведения исследований

Экспериментальные исследования проводились на монокристаллах висмута, выращенных горизонтальным методом Бриджмена. Образцы получали раскалыванием выращенных монокристаллов вдоль плоскости спайности (111). В качестве индентора использовалась алмазная пирамида Виккерса микротвердомера ПМТ-3. Исследования проводились в условиях последовательного воздействия на конденсированную систему комбинированной нагрузкой: вначале вдавливанием индентора нагрузкой $P = 0.1, 0.2$ и 0.3 Н, а затем скрайбированием в направлении ребра пирамиды. Скрайбирование осуществляли длиной $L_c = 50, 100$ и 150 мкм со скоростью $V = 16.65, 33.35$ и 50 мкм/с под углом $\alpha = 0^\circ, 15^\circ$ и 30° относительно выделенного направления двойникования. Геометрия, форма и расположение двойников и сопутствующая им деформационная картина изучались методом оптической микроскопии. Аналогично [9, 10] анализ двойниковых ансамблей выполняли с выделением трех областей образования и развития двойников: область отпечатка при опускании индентора; область вдоль границ царапины; область остановки индентора.

Решение поставленной задачи осуществлялось на основе математической модели процесса двойникования. Учитывая сложную многофакторную зависимость процесса, исследования проводились с использованием планирования эксперимента и математической обработки данных. На основе ранее выполненных исследований [10] установлено, что геометрические параметры имеют нелинейную зависимость от факторов воздействия, а одномерные зависимости функций выхода представляют собой кривые близкие к кривым второго порядка. Поэтому искомую зависимость находили в виде уравнения регрессии второй степени

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2,$$

где y – выборочная оценка функции отклика, b_0, b_1, b_{ij}, b_{ii} – выборочные коэффициенты регрессии, x_i, x_j – кодированные значения факторов, k – число независимых факторов.

С целью снижения трудоемкости эксперимента при числе факторов $k = 4$ для определения параметров математической модели был принят некомпозиционный план второго порядка [11]. Значимость коэффициентов регрессии определялась по критерию Стьюдента, а проверку адекватности модели проводили по F -критерию Фишера. Далее уравнение регрессии представляли в натуральных значениях факторов и строили графические зависимости параметров двойников от факторов воздействия. В представленной работе выполнен анализ формирования двойниковых ансамблей вдоль границ царапины, образованной под углом $\alpha = 0^\circ$ относительно выделенного направления двойникового направления.

Результаты и их обсуждение

На рис. 1-4 представлены графики зависимости исследуемых параметров двойниковых ансамблей, образованных вдоль границ царапины, от скорости скрайбирования при $\alpha = 0^\circ$. Графики геометрической интерпретации результатов исследований показывают зависимость средних значений количественных параметров: число двойников $N_{об}$, толщина двойников у устья $H_{об}$, длина двойников $L_{об}$ и степень некогерентности двойниковых границ $\eta = H_{об} / L_{об}$ – от изменения скорости образования царапины для нескольких значений нагрузки P на индентор при фиксированном значении длины скрайбирования L_c .

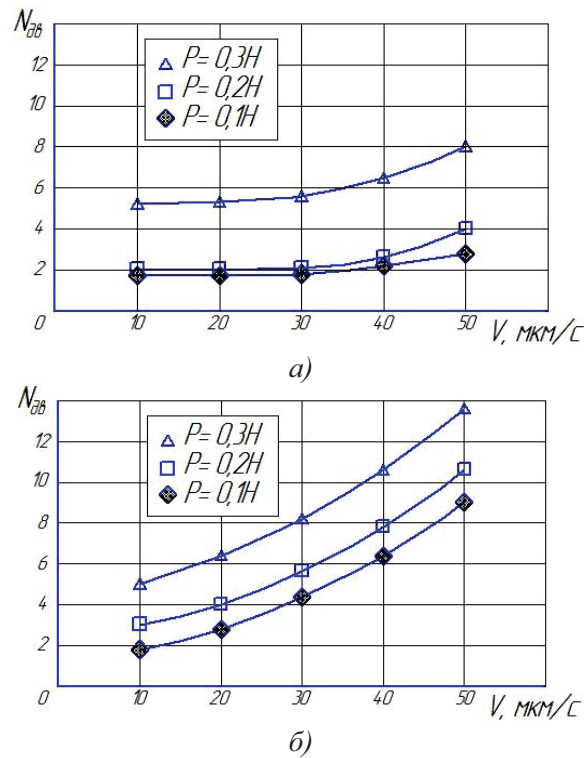
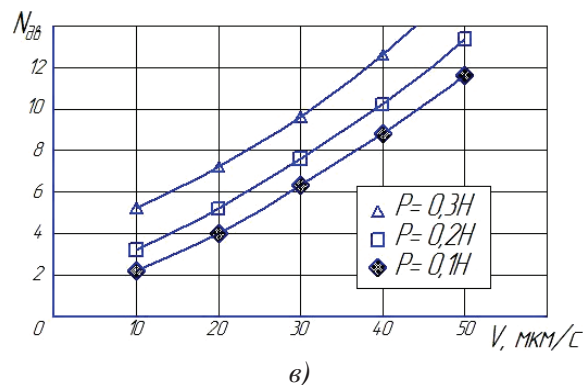


Рис. 1. Зависимость количества двойников $N_{об}$ от скорости скрайбирования:
а – $L_c = 50$ мкм; б – $L_c = 100$ мкм; в – $L_c = 150$ мкм



Продолжение рисунка 1

С увеличением скорости скрайбирования количество двойников увеличивается для всех P и L_c (рис. 1). Однако при небольшой длине скрайбирования ($L_c = 50$ мкм) количество двойников увеличивается незначительно, и для $P=0,1$ и $0,2$ Н график $N = f(V)$ начинает заметно возрастать только при $V > 40$ мкм/с (рис. 1, а). Более интенсивно возрастает число двойников $N_{об}$ с увеличением V при длине скрайбирования $L_c = 100$ мкм (рис. 1, б) и особенно резкое повышение $N_{об}$ отмечается для $L_c = 150$ мкм (рис. 1, в).

Следует отметить, что при большой длине скрайбирования L_c не просто увеличивается количество двойников (что логично объясняется увеличением длины царапины, т. е. области возможного образования двойников), а увеличение числа двойников $N_{об}$ сопровождается повышением скорости V скрайбирования, т. е. увеличение $N_{об}$ вызвано увеличением V . Об этом свидетельствует, например, тот факт, что при малой скорости скрайбирования (V до 20 мкм/с) количество двойников вдоль царапины остается практически постоянным для различных значений L_c (см. графики на рис. 1, б и в).

Таким образом, количество образовавшихся двойников вдоль царапины зависит от многих факторов: нагрузки на индентор, кристаллографического направления, длины пути и скорости скрайбирования. С увеличением нагрузки P на индентор число двойников $N_{об}$ увеличивается, при этом характер зависимости $N_{об} = f(P)$ остается практически постоянным при прочих равных условиях.

Нагрузка на индентор оказывает значительное влияние на процесс образования двойников [3, 4], особенно при скрайбировании [9, 10], так как определяет напряженно-деформированное состояние материала монокристалла, в том числе вдоль границ царапины. В работе [12] отмечается, что рост внешней нагрузки при индентировании также приводит к увеличению количества двойников. И увеличение скорости деформирования при других видах нагружения способствует двойникованию [3].

На основании многочисленных исследований в работах [1, 3] утверждается, что наряду с температурой на двойникование существенное влияние оказывает скорость нагружения и кристаллографическая ориентация образца. И к максимальному эффекту пластичности при двойниковании может привести некоторое оптимальное сочетание этих факторов.

Для кристаллографического направления $\alpha = 0^\circ$ с увеличением скорости скрайбирования при $L_c = 50$ мкм число двойников остается практически постоянным (рис. 1, а) и растет при $L_c = 100$ мкм (рис. 1, б) и более значительно при $L_c = 150$ мкм (рис. 1, в). Однако следует отметить, что при направлениях скрайбирования $\alpha = 15^\circ$ и 30° зависимость $N_{об} = f(V)$ при различной длине скрайбирования имеет иной характер, т. е. результаты исследования свидетельствуют о существовании зависимости $N_{об}$ от направления скрайбирования. Подробный анализ зависимости $N_{об} = f(\alpha)$ рассматривается в отдельной работе. Здесь же следует отметить, что результаты исследований подтверждают тот факт, что при скрайбировании на активность процесса двойникования влияет ориентационный фактор, который определяется взаимной ориентацией направления деформирования и плоскостей двойникования, а также энергетический фактор, который определяет характер

конкурирующих механизмов деформации – скольжения и двойникования. В то же время вид кривых (рис. 1), их близкое к эквидистантному расположение иллюстрирует малую значимость совместного влияния факторов V и P , что определяется сравнительно небольшим коэффициентом регрессии при парном произведении факторов. То есть в качестве энергетического источника двойникования при скрайбировании выступает преимущественно тот и (или) другой фактор независимо друг от друга.

Исследования В.А. Федорова и сотрудников показали [13–15], что при различных видах деформирования в изучаемом интервале скоростей при комнатной температуре количество двойников возрастает с увеличением скорости деформирования. Авторы утверждают, что при малых скоростях деформирования зародыши двойникования диссоциируют на скользящие дислокации, тогда как при больших скоростях деформирования релаксация напряженного состояния происходит преимущественно двойникованием, так как мал промежуток времени деформирования в сравнении с инкубационным периодом активации диссоциации зародыша двойника [15].

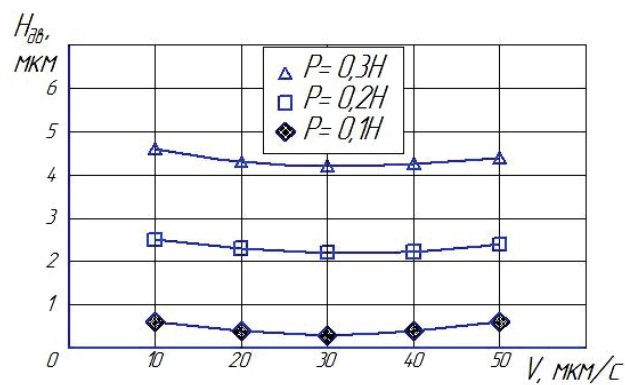
Характерной особенностью двойникования при скрайбировании является образование серповидных двойников вдоль границ царапины [9]. Искривление двойников обусловлено особенностями напряженно-деформированного состояния вдоль границ царапины, созданного движущимся индентором. В выполненных исследованиях деформацию образцов осуществляли в условиях, когда при образовании царапин “заведомо преобладали процессы пластической деформации, а не разрушения” [16]. С увеличением нагрузки на индентор и длины скрайбирования в кристалле возникают механические напряжения, под действием которых пластическая деформация приводит к искривлению плоскостей двойникования. Поэтому зарождение двойнивающих дислокаций и их распространение в области, прилегающей к границам царапины, происходит в условиях искаженной кристаллической решетки по искривленным кристаллографическим направлениям. В результате в области взаимодействия двойников с пластически деформированными областями материала наблюдаются существенные особенности формы двойников [4], выражающиеся в искривлении двойниковых границ, вызванном деформацией кристаллической решетки.

В работе [17] отмечается явление механического двойникования как вероятный механизм пластической деформации, осуществляющий развороты кристаллической структуры. А так как двойникование является “одним из самых радикальных и оптимальных способов снятия напряжений”, то оно приводит к такому развороту структуры, при котором происходит накопление напряжений, которые способствуют периодическому повторению процесса двойникования. В результате происходит изменение количественных характеристик двойникования. Образование деформированных областей – первопричина зарождения двойников, и такой причиной может быть состояние дефектной структуры в объеме воздействия концентрированного напряжения [12].

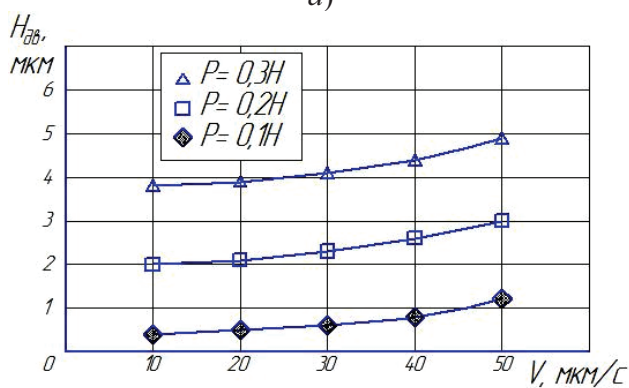
Увеличение длины скрайбирования в сочетании с увеличением скорости приводит к повышению интенсивности пластической деформации, что способствует накоплению упругой энергии в материале за счет генерации дефектов кристаллического строения. Накопленная упругая энергия преобразуется в поверхностную энергию новых границ и вызывает образование двойниковых ансамблей вдоль границ царапины. При небольшой скорости скрайбирования (до 10–20 мкм/с) увеличение длины скрайбирования приводит к незначительному увеличению числа двойников, и существенный рост двойников отмечается с возрастанием скорости V до 40–50 мкм/с при L_c больше 100 мкм (рис. 1, б и в). По-видимому, рост числа двойников свидетельствует о пластифицирующем действии фактора [17], в данном случае, скорости скрайбирования.

В исследуемом интервале скоростей и нагрузок отсутствует экстремум функций. То есть в данных условиях у двойникования нет конкурирующих процессов, в частности, скольжения, и двойникование протекает более активно. При более энергетических условиях скрайбирования (увеличение скорости и нагрузки), когда энергии деформирования достаточно для активирования скольжения, возможно блокирование последним источников двойнивающих дислокаций [18]. Следует ожидать, что увеличение числа двойников начнет замедляться, когда напряжения в области царапины достигнут величин, при которых преобладающее значение будут иметь процессы скольжения и разрушения границ царапины, а не пластическая деформация. Тогда возможно предположить появление экстремума функции $N_{ос} = f(V)$ при увеличении нагрузки P и смещение его на графике вправо.

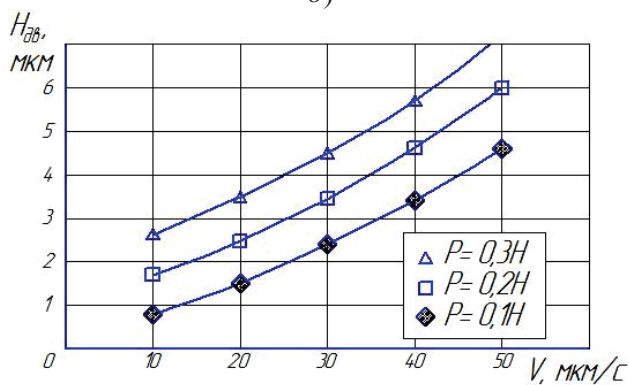
Зависимость средних значений толщины двойников $H_{об}$ от скорости скрайбирования при нагрузке на индентор P для различной длины скрайбирования L_c представлены на рис. 2. Прежде всего следует отметить практически эквидистантное расположение графиков $H_{об} = f(V)$ при различных значениях P для конкретной длины скрайбирования, что свидетельствует о малой значимости совместного влияния P и V на интенсивность образования двойников в пределах исследуемых значений факторов.



а)



б)

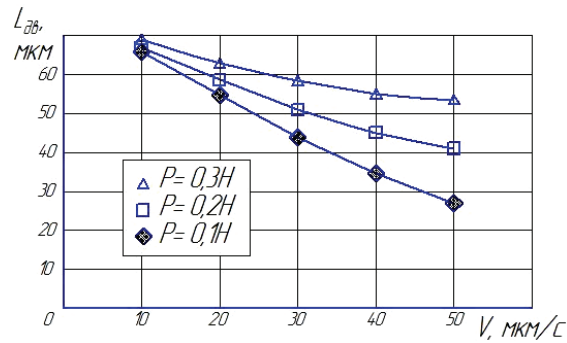


в)

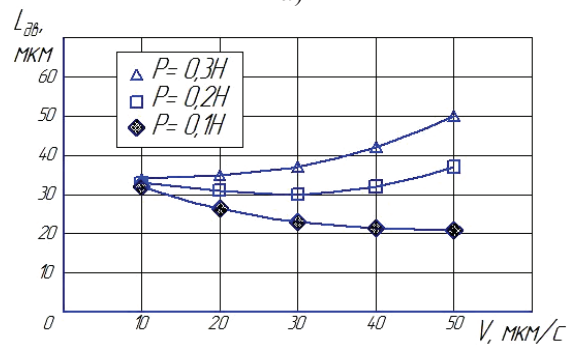
Рис. 2. Зависимость толщины двойников у устья $H_{об}$ от скорости скрайбирования (обозначения – см. рис. 1)

Начальные значения графиков при одних и тех же значениях P для различной длины скрайбирования L_c лежат практически на одном и том же уровне (см. рис. 2, а, б, в), т. е. при минимальной скорости скрайбирования ($V = 10$ мкм/с) толщина двойников зависит только от нагрузки на индентор. Это свидетельствует о квазистатических условиях скрайбирования, соответствующих напряженно-деформационному состоянию в условиях статического вдавливания индентора.

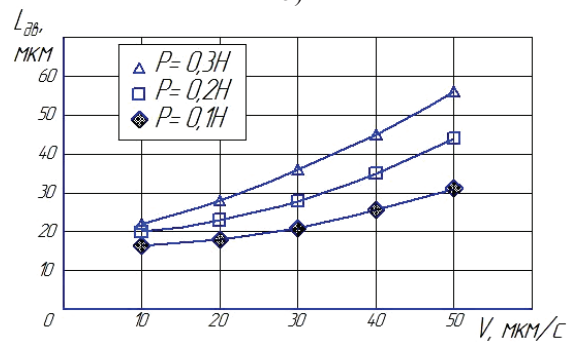
При небольшой длине L_c скорость скрайбирования практически не влияет на средние значения толщины двойников $H_{об}$ (рис. 2, а), хотя количество двойников при V более 30 мкм/с начинает увеличиваться (см. рис. 1, а). При $L_c = 100$ мкм/с толщина двойников $H_{об}$ несколько возрастает с увеличением V (рис. 2, б), но медленнее, чем увеличивается общее количество двойников $N_{об}$ (см. рис. 1, б), и быстрое увеличение $H_{об}$ (аналогично $N_{об}$) наблюдается при длине скрайбирования $L_c = 150$ мкм/с (см. рис. 1, в и 2, в).



а)



б)



в)

Рис. 3. Зависимость длины двойников $L_{об}$ от скорости скрайбирования (обозначения — см. рис. 1)

Некоторые соображения по объяснению установленных зависимостей изложены выше при анализе зависимостей $N_{\text{де}} = f(V)$. При этом определенно установлено, что для всех условий скрайбирования двойники имеют большую толщину при увеличении нагрузки на индентор. Интенсификация внешнего воздействия, повышение скорости скрайбирования, увеличение длины скрайбирования и нагрузки на индентор стимулирует работу источников двойникообразующих дислокаций. Увеличение плотности двойникообразующих дислокаций ведет к увеличению степени некогерентности границ, проявляющемся в увеличении толщины двойников $N_{\text{де}}$ [4]. В работе [17] также отмечается, что увеличение толщины двойников свидетельствует об увеличении количества двойникообразующих дислокаций.

В отличие от графиков зависимостей $N_{\text{де}} = f(V)$ и $H_{\text{де}} = f(V)$, которые имеют сравнительно схожий вид, зависимости средних значений длины двойников $L_{\text{де}}$ от скорости скрайбирования имеют существенно иной характер изменения (рис. 3). Практически зависимости $L_{\text{де}} = f(V)$ представляют графики в виде так называемого “веера” с общим полюсом [13]. Величина координат полюса показывает, что при квазистатических условиях скрайбирования средняя длина двойников имеет близкие значения при различной величине нагрузки P и уменьшается с увеличением длины скрайбирования, что объясняется интенсификацией напряженно-деформированного состояния вблизи границ царапины (см. рис. 1, а, б, в). Далее с увеличением скорости скрайбирования V наблюдается тенденция уменьшения $L_{\text{де}}$ для $L_c = 50$ мкм, стабилизации $L_{\text{де}}$ для $L_c = 100$ мкм и увеличения $L_{\text{де}}$ для $L_c = 150$ мкм. При этом происходит расхождение “веера” кривых и большие значения $L_{\text{де}}$ наблюдаются при увеличении нагрузки P .

Таким образом, изменение геометрических размеров двойников $H_{\text{де}} = f(V)$ и $L_{\text{де}} = f(V)$ с изменением исследуемых факторов скрайбирования представляют сложные неоднозначные зависимости. При определенных условиях скрайбирования возможно уменьшение средней толщины двойников у устья $H_{\text{де}}$ при увеличении $L_{\text{де}}$ или уменьшение среднего значения длины двойников $L_{\text{де}}$ с увеличением их толщины $H_{\text{де}}$, а также другие сочетания геометрических параметров двойников. Однако в целом все же можно отметить тенденцию пропорционального изменения размеров двойников не только с увеличением нагрузки, что отмечалось в работе [1], но также и с увеличением скорости скрайбирования. А увеличение внешней нагрузки приводит к увеличению не только количества (см. рис. 1), но и линейных размеров двойников, что также наблюдалось в работе [12].

На рис. 4 представлены графики зависимости параметра $H_{\text{де}} / L_{\text{де}} = f(V)$, характеризующего некогерентность двойников. Степень некогерентности двойниковых границ η является важным параметром, определяющим уровень внутренних напряжений на границе двойника. В целом степень некогерентности двойниковых границ с увеличением скорости скрайбирования V и нагрузки на индентор P имеет тенденцию увеличения. Однако для небольшой длины скрайбирования ($L_c = 50$ мкм) увеличение зависимости $\eta = f(V)$ практически незначимо, его можно считать в пределах погрешности эксперимента. Это соответствует заметному уменьшению средних значений длины двойников $L_{\text{де}}$ с увеличением V (см. рис. 3, а) при практически постоянном значении $H_{\text{де}}$ (см. рис. 2, а). Для $L_c = 100$ мкм с увеличением скорости V отношение $H_{\text{де}} / L_{\text{де}}$ несколько уменьшается при $P = 0,3$ Н, остается практически постоянным при $P = 0,2$ Н и возрастает при $P = 0,1$ Н, т. е. в общем зависимость $\eta = f(V)$ с изменением нагрузки имеет сложную неоднозначную характеристику. Такая же неоднозначная зависимость при той же длине скрайбирования наблюдается и для $L_{\text{де}} = f(V)$ (см. рис. 3, б) в отличие от зависимости $H_{\text{де}} = f(V)$, которая имеет близкие к эквидистантным графики для различных значений P (рис. 2, б).

При больших длинах скрайбирования с увеличением скорости отмечается возрастание $H_{\text{де}}$ и $L_{\text{де}}$, а так как рост толщины двойников опережает увеличение их длины, то соответственно увеличивается и параметр $\eta = H_{\text{де}} / L_{\text{де}} = f(V)$. Кроме того, для различных значений нагрузки P графики $\eta = f(V)$ стремятся к единому “полюсу” при $V \approx 50$ мкм/с (рис. 3, в), т. е. происходит схождение “веера” кривых. Отмеченная зависимость свидетельствует о том, что в районе координат полюса наблюдаются конкурирующие с двойникообразованием процессы, которые блокируют процесс зарождения двойников при $V \approx 50$ мкм/с, и образующиеся двойники имеют один и тот же уровень некогерентности при различной нагрузке P на индентор. В этом случае характер роста двойников при скрайбировании аналогичен отмечаемому в работе [1]: “С увеличением внешней концентрированной нагрузки размеры упругого клиновидного двойника растут непрерывно, плавно, пропорционально нагрузке, отношение h/L остается постоянным на протяжении всего роста”.

Однако, как свидетельствуют результаты выполненных исследований, при скрайбировании зависимость $\eta = f(V)$ имеет более сложный неоднозначный характер изменения и отношение $H_{\text{де}} / L_{\text{де}}$ не остается постоянным с изменением условий скрайбирования. Изменение размеров двойников, утолщение двойниковой прослойки ($H_{\text{де}} / L_{\text{де}}$), различие плотности двойникоующих дислокаций и других эффектов связаны с изменением структурного состояния материала под воздействием внешнего напряжения в условиях деформирования материала путем скрайбирования. А так как при скрайбировании двойники вдоль царапины образуются, как правило, группами [9, 10], то развитие двойников происходит в условиях взаимодействия с другими скоплениями двойникоующих дислокаций соседних двойников. И такое взаимодействие усиливается при увеличении внешних напряжений с повышением нагрузки и скорости скрайбирования.

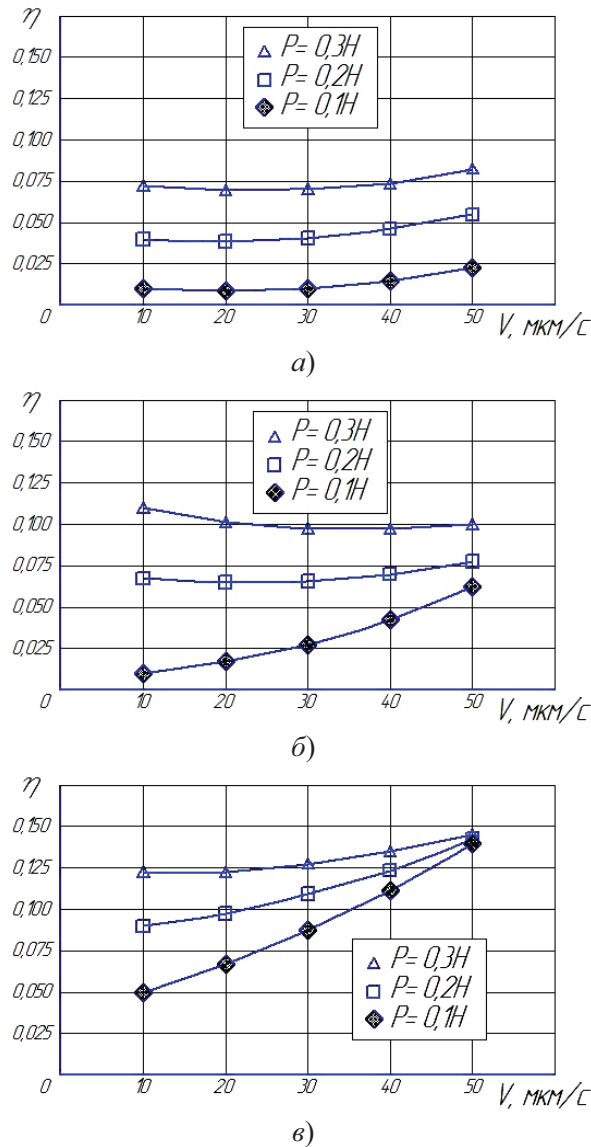


Рис. 4. Зависимость степени некогерентности двойников η от скорости скрайбирования (обозначения – см. рис. 1)

Заклучение

В целом результаты исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Дислокационная теория упругого двойникования кристаллов применима для количественного анализа закономерностей образования двойников при деформировании поверхности материала путем скрайбирования.

2. Количественный анализ механического двойникования при скрайбировании представляет определенные сложности из-за значительного статистического разброса параметров образования двойников и их изменения с изменением напряженно-деформированного состояния материала.

3. На количественные характеристики образования двойников оказывает влияние ряд факторов: скорость скрайбирования, нагрузка на индентор и длина скрайбирования. Установлены средние статистические характеристики двойникования в зависимости от скорости образования царапины при различной нагрузке на индентор и длине скрайбирования.

4. При сложной неоднозначной характеристике образования двойников при скрайбировании отмечается общая тенденция увеличения количества двойников, их геометрических параметров и степени некогерентности с увеличением скорости скрайбирования и нагрузки на индентор.

Авторы благодарят В.С. Мурашко за помощь в компьютерной обработке результатов эксперимента.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Класен-Неклюдова, М. В.** Механическое двойникование кристаллов / М. В. Класен-Неклюдова – Москва : Изд-во АН СССР, 1960. – 261 с.
2. **Бойко, В. С.** Обратимая пластичность кристаллов / В. С. Бойко, Р. И. Гарбер, А. М. Косевич. – Москва : Наука, 1991.
3. **Федоров, В. А.** Дислокационные механизмы разрушения двойникующихся материалов / В. А. Федоров, Ю. И. Тялин, В. А. Тялина. – Москва : Издательство Машиностроение-1, 2004. – 336 с.
4. **Остриков, О. М.** Механика двойникования твердых тел / О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 301 с.
5. **Владимиров, В. И.** Физическая природа разрушения металлов / В. И. Владимиров. – Москва : Металлургия, 1984. – 280 с.
6. **Финкель, В. М.** Физика разрушения / В. М. Финкель. – Москва : Металлургия, 1970. – 367 с.
7. **Глезер, А. М.** Принципы создания многофункциональных конструкционных материалов нового поколения / А. М. Глезер // Актуальные проблемы прочности: сборник тезисов LVII Междунар. конф., Севастополь, 24–27 мая 2016 г. – Севастополь, 2016. – С. 3.
8. **Полянский, В. А.** Пределы оценки механических характеристик материалов / В. А. Полянский, А. М. Полянский, Ю. А. Яковлев // Фазовые превращения и прочность кристаллов : сборник тезисов Девятой Международной конференции, Черногловка, 7–11 ноября 2016 г. – Черногловка, 2016. – С. 166.
9. **Кульгейко, Н. М.** Особенности двойникования монокристалла висмута при скрайбировании его поверхности (111) индентором Виккерса / Н. М. Кульгейко, О. М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2015. – № 2 (61). – С. 42–50.
10. **Кульгейко, Н. М.** Закономерности образования двойников у границ царапины при скрайбировании поверхности (111) монокристалла висмута индентором Виккерса / Н. М. Кульгейко, О. М. Остриков // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – 2016. – № 1(47). – С. 74–81.
11. **Ящерицын, П. И.** Планирование эксперимента в машиностроении / П. И. Ящерицын, Е. И. Махаринский. – Минск : Выш. школа, 1985. – 286 с.
12. **Камышанченко, Н. В.** Исследование динамики двойникования в титане BT1-0 методом акустической эмиссии / Н. В. Камышанченко, И. С. Никулин, М. С. Кунгурцев // Перспективные материалы. – 2010. – № 5. – С. 93–98.
13. **Федоров, В. А.** Влияние температуры и скорости нагружения на двойникование поликристаллического ОЦК сплава Fe +3,25% Si / В. А. Федоров, С. Н. Плужников // XIV Петербургские чтения по проблемам прочности. Санкт-Петербург, 12–14 марта 2003 г. : сборник тезисов. – СПб., 2003. – 280 с. – С. 206–207.

14. Двойникование, сопутствующее разрушению поликристаллического ОЦК сплава Fe +3,25% Si / В. А. Федоров [и др.] // Актуальные проблемы прочности : сборник тезисов XLIV Международной конференции (3–7 октября 2005г., Вологда). – Вологда, 2005. – 232 с. – С. 11.
15. Характеристики двойникования, сопутствующего разрушению ОЦК сплава Fe +3,25% Si / В. А. Федоров [и др.] // XVI Петербургские чтения по проблемам прочности. – Санкт-Петербург, 14–16 марта 2006 г. : сборник тезисов. – СПб., 2006. – 254 с. – С. 27.
16. Роль двойникования в процессах пластической деформации / М. Ш. Акчурин [и др.] // Кристаллография. – 2010, том 55, № 4. – С. 663–668.
17. **Пинчук, А. И.** Двойникование в кристаллах сурьмы в условиях воздействия сосредоточенной нагрузки и постоянного магнитного поля / А. И. Пинчук, С. Г. Слесарев // XVI Петербургские чтения по проблемам прочности : сборник тезисов, Санкт-Петербург, 14–16 марта 2006 г. – СПб., 2006. – С. 120.
18. **Остриков, О. М.** Закономерности механического двойникования мартенситной фазы монокристалла Ni₂MnGa при деформировании его поверхности (100) пирамидой Виккерса / О. М. Остриков, Е. В. Шматок // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2013. – № 3. – С. 37–42.

Поступила в редакцию 20.04.2018 г.

Контакты: omostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Simanovich N., Ostrikov O., Kulgeiko M. THE IMPACT OF SCRIBING SPEED ON THE FORMATION OF BISMUTH SINGLE CRYSTAL TWINS.

With the help of the method of scribing surfaces with a diamond indenter average statistical characteristics of twinning are defined regarding the speed of scribing with different loads on the indenter and scribing length. The general tendency of the increasing number of twins, their geometrical parameters and the degree of incoherent twin boundaries with the growing speed of scribing and indenter loading is revealed.

Keywords: mechanical twinning, scribing, bismuth.

УДК 582.293.378(476)

КЛЮЧ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛИШАЙНИКОВ РОДА *XANTHOPARMELIA* (PARMELIACEAE, ASCOMYCOTA) БЕЛАРУСИ

П. Н. БЕЛЫЙ

Центральный ботанический сад Национальной академии наук Беларуси

А. Г. ЦУРИКОВ

кандидат биологических наук, доцент

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

В. В. ГОЛУБКОВ

Институт экспериментальной ботаники

Национальной академии наук Беларуси

Проведенная ревизия лишайников рода *Xanthoparmelia* показала, что в настоящее время род представлен в Беларуси 6 видами. Наиболее распространены: *Xanthoparmelia conspersa*, *X. verruculifera*, *X. delisei*, *X. loxodes* и *X. pulla*. Еще один вид – *Xanthoparmelia angustiphylla* является редким. Ревизия гербарного материала по роду *Xanthoparmelia* в Беларуси позволила дополнить данные о видовом разнообразии по рассматриваемому роду. Получены новые данные о видовом разнообразии лишайников рода *Xanthoparmelia* в республике. На основании изучения образцов лишайников рода *Xanthoparmelia*, хранящихся в ботанических коллекциях Беларуси и за рубежом составлен дихотомический ключ для определения видов рода и уточненные диагнозы таксонов.

Ключевые слова: хемотаксономия, лишенизированные грибы, *Parmeliaceae*, Беларусь.

Введение

Род *Xanthoparmelia* (Vain.) Hale (Parmeliaceae) к настоящему времени является самым крупным среди листоватых лишайников в мире и насчитывает более 800 видов, из которых 32 произрастают в Европе [1, 2]. Характерными признаками рода являются наличие особых полисахаридов клеточной стенки с лишенианом *Xanthoparmelia*-типа, голые лопасти, отсутствие истинных псевдоцифелл, наличие пор в коровом слое, короткие, с сужением в центре конидии и простые ризины [3]. Кроме этого, представители рода характеризуются значительной химической вариабельностью, образуя более 90 различных вторичных метаболитов и более 40 хемосиндромов [4]. Существует ряд вопросов, касающихся таксономии рода *Xanthoparmelia* [5–8]. В связи с критическим пересмотром трактования морфологически схожих видов, а также меняющимися взглядами на систематику, сведения о видовом разнообразии рода на территории Беларуси устарели, в связи с чем не представляется возможным проанализировать и адекватно оценить данные о разнообразии, распространении и экологии отдельных видов на территории республики. Кроме того, отсутствие современного ключа по лишайникам рода *Xanthoparmelia* Беларуси значительно затрудняет работу и, в ряде случаев, делает публикуемые флористические данные не корректными для таксономических обобщений.

Цель настоящей работы – составление ключа для определения видов рода *Xanthoparmelia*, встречающихся в Беларуси, на основании ревизии всех доступных образцов, хранящихся в гербариях республики и стран ближнего зарубежья, с комментариями относительно основных диагностических признаков таксонов, а также морфологически или химически близких к ним видов. Настоящий ключ значительно облегчит последующие работы по изучению и определению лишайников данного рода в Беларуси.

© Белый Н. П., 2018

© Цуриков А. Г., 2018

© Голубков В. В., 2018

Материал и методы исследований

Материалом для данного исследования послужили образцы лишайников рода *Xanthoparmelia*, хранящиеся в гербариях Белорусского государственного университета (MSKU), Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины (GSU), Института экспериментальной ботаники НАН Беларуси (MSK-L), Центрального ботанического сада НАН Беларуси (MSKH) и Ботанического института им. В.Л. Комарова РАН (LE). Всего было изучено 206 гербарных образцов сборов 1905–2017 гг. Дублетные сборы, хранящиеся в разных гербариях, принимали за один гербарный образец. В том случае, если в гербарном пакете находилось более одного вида, каждый таксон учитывался как отдельный образец. Отличительные морфологические признаки образцов изучались с помощью стереомикроскопа Nikon SMZ-745. Состав вторичных метаболитов всех образцов был изучен методом тонкослойной хроматографии в системе растворителей “С” [9].

Результаты и их обсуждение

В Беларуси первыми найденными лишайниками рода *Xanthoparmelia* оказались *Xanthoparmelia conspersa* (Ehrh. ex Ach.) Hale и *X. pulla* (Ach.) O. Blanco, A. Crespo, Elix, D. Hawksw. & Lumbsch, указанные в 1913 году Г.К. Крейером под названиями *Parmelia conspersa* (Ehrh.) Ach. и *P. proluxa* (Ach.) Nyl., соответственно [10]. В 1920 году Е. и Фр. Бахманны привели *X. verruculifera* (Nyl.) O. Blanco, A. Crespo, Elix, D. Hawksw. & Lumbsch (как *Parmelia glomellifera* Nyl.) [11]. Четвертый вид лишайников этого рода – *X. stenophylla* (Ach.) Ahti & D. Hawksw. – был приведен в 1992 г. В.В. Голубковым сначала как *Parmelia taractica* [12], а затем как *Xanthoparmelia moliuscula* (Ach.) Hale [13]. Позже, этот вид был также указан для Березинского биосферного заповедника как *X. somloënsis* (Gyeln.) Hale [14]. Пятый вид, *X. loxodes* (Nyl.) O. Blanco, A. Crespo, Elix, D. Hawksw. & Lumbsch, был указан в 1997 году В.В. Голубковым для Минской возвышенности под названием *Neofuscelia loxodes* (Nyl.) Essl. [15]. Кроме этого, в обобщающей сводке пармелиоидных лишайников Европы для территории Беларуси упомянут вид *X. pokornyi* (Körb.) O. Blanco, A. Crespo, Elix, D. Hawksw. & Lumbsch [1]. Таким образом, до настоящего времени в Беларуси было известно 6 видов лишайников группы рода *Xanthoparmelia*: *Xanthoparmelia conspersa*, *X. loxodes*, *X. pulla*, *X. pokornyi*, *X. stenophylla* и *X. verruculifera*.

В результате обработки 206 образцов лишайников рода *Xanthoparmelia*, собранных в Беларуси в период с 1905 по 2017 гг. было установлено, что большинство определений вышеупомянутых видов являлось не верным, поскольку для их идентификации использовались устаревшие методы, основанные исключительно на морфологических признаках – окраске верхней поверхности слоевища, наличии или отсутствии соредий и изидий и др. [16]. Применение химических методов, в частности, тонкослойной хроматографии, позволило выявить, что *Xanthoparmelia pokornyi* и *X. stenophylla* ошибочно указывались для территории Республики. В частности, образцы, определенные ранее как *X. stenophylla*, содержат норстиковую и комплекс веществ из группы стиктовой кислоты, и в действительности принадлежат другому виду – *X. angustiphylla* (Gyeln.) Hale. Произрастание *X. pokornyi* на территории Беларуси не было подтверждено в ходе ревизии, а поскольку единственное указание этого вида в литературе [1] является ошибочным (Т. Ahti, персональное сообщение), оба упомянутых вида должны быть исключены из списка лишайников Беларуси. Два вида – *Xanthoparmelia angustiphylla* и *X. delisei* (Duby) O. Blanco, A. Crespo, Elix, D. Hawksw. & Lumbsch – не приводились ранее в литературных источниках и являются новыми для Республики Беларусь.

Таким образом, в настоящее время на территории республики встречается 6 видов этого рода: *Xanthoparmelia angustiphylla*, *X. conspersa*, *X. delisei*, *X. loxodes*, *X. pulla* и *X. verruculifera*. К наиболее распространенным видам относятся *Xanthoparmelia conspersa*, представленный 75 образцами (36,4% общего числа исследованных), *X. verruculifera* (48, или 23,3%), *X. delisei* (36, или 17,5%), *X. loxodes* (28, или 13,6%) и *X. pulla* (15, или 7,3%). Еще один вид – *Xanthoparmelia angustiphylla* – представлен только четырьмя образцами (1,9% общего числа исследованных) и является редким в Беларуси.

Подробный анализ анатомо-морфологических и химических характеристик показал, что в пределах данного рода можно выделить группы видов – химические “двойники”, имеющие одинаковый состав вторичных метаболитов, но отличающиеся по морфологическим признакам, и морфологические “двойники”, схожие по набору внешних признаков, но четко отличающиеся

по набору лишайниковых кислот [17]. Именно наличие второй группы видов (морфологических “двойников”) затрудняет определение видов этого рода и зачастую приводит к ошибкам при их идентификации.

Среди идентифицированных в ходе исследования лишайников можно выделить две группы видов. К первой группе относятся виды *Xanthoparmelia*, содержащие усниновую кислоту: *X. angustiphylla* и *X. conspersa*. Ко второй группе принадлежат коричнево окрашенные представители (*Xanthoparmelia delisei*, *X. loxodes*, *X. pulla* и *X. verruculifera*), ранее относимые к роду *Neofuscelia* Essl.

В пределах каждой из групп можно выделить пары видов-двойников. Так, светлоокрашенные виды *Xanthoparmelia angustiphylla* и *X. conspersa* характеризуются идентичным химическим составом и являются химическими “двойниками”. Поэтому при определении видовой принадлежности образцов из этой группы основными критериями служат особенности морфологии образцов: *Xanthoparmelia angustiphylla* характеризуется полным отсутствием пропарул вегетативного размножения (изидий и соредий), в то время как изидии – характерный (хотя и не всегда хорошо выраженный) отличительный признак *X. conspersa*. Среди видов, не зарегистрированных в настоящее время в республике, но известных в соседних странах [18], *Xanthoparmelia protomatrae* (Gyeln.) Hale и *X. stenophylla* имеют сходные с *X. angustiphylla* морфологические характеристики, однако данные виды отличаются содержанием фумарпропотоцтаровой и салациновой кислот соответственно. *Xanthoparmelia cumberlandia* (Gyeln.) Hale имеет схожий химический состав, но отличается светлой нижней поверхностью таллома. *Xanthoparmelia plittii* (Gyeln.) Hale – изидиозный таксон, сходный по химическому составу с *Xanthoparmelia angustiphylla* и *X. conspersa*. От *Xanthoparmelia conspersa* отличается более светлой нижней поверхностью: светло-коричневого либо коричневого (но никогда не черного) цвета [6, 19]. Еще один вид, известный из приграничных с Беларусью территорий, – *Xanthoparmelia mougeotii* (Schaer. ex D. Dietr.) Hale, имеет идентичный химический состав, однако отличается от видов, продуцирующих усниновую кислоту, образованием соредий на поверхности слоевища [18].

Среди темноокрашенных видов рода *Xanthoparmelia* выделяют 2 пары химических “двойников”. Виды *X. delisei* и *X. loxodes* характеризуются содержанием гломелловой, гломеллиферовой, перлатоловой и в некоторых случаях гирофоровой кислот. Для *X. pulla* и *X. verruculifera* характерно наличие стеноспоровой, диварикатовой и перлатоловой кислот в качестве основных веществ, часто сопровождаемых гирофоровой, леканоровой, 4-О-деметилстеноспоровой и оксостеноспоровой кислотами и атранорином, присутствующими в незначительной концентрации (иногда гирофоровая кислота содержится в высокой концентрации). В пределах каждой химической пары виды отличаются морфологически – *X. loxodes* и *X. verruculifera* всегда образуют изидии на поверхности таллома, но при этом часто неотличимы друг от друга при визуальном осмотре. Эти виды называют морфологическими «двойниками», четко отличающимися только своим химическим составом. *Xanthoparmelia delisei* и *X. pulla* являются второй парой морфологических «двойников», отличающихся от вышеупомянутых видов отсутствием пропарул вегетативного размножения. Такая морфологическая схожесть обычно не позволяет однозначно установить видовую принадлежность определяемого образца, поэтому различия в химическом составе являются определяющим критерием при разграничении указанных морфологических пар.

Тем не менее, образцы *Xanthoparmelia delisei*, по сравнению с *X. pulla*, имеют, как правило, более светлую окраску желтоватых оттенков, а также чуть более широкие лопасти [20]. Также отмечено, что *X. loxodes* в некоторых случаях отличается от *X. verruculifera* более светлой поверхностью таллома, несколько более широкими лопастями и более крупными изидиями [21]. Однако эти морфологические характеристики в значительной степени зависят от условий произрастания лишайников, варьируют в широких пределах и не являются достаточными для определения видовой принадлежности образцов. Поэтому разграничить эти виды можно только по результатам изучения состава вторичных метаболитов.

Ниже приводится ключ для определения видов рода *Xanthoparmelia* Беларуси. Поскольку данный род включает ряд химически и морфологически близких видов, большое значение при идентификации образцов имеет изучение состава вторичных лишайниковых метаболитов (лишайниковых веществ) методом тонкослойной хроматографии, а также тщательное изучение диагностических признаков слоевища в случае слабо развитых образцов.

Ключ для определения видов рода *Xanthoparmelia* Беларуси:

1. Таллом светлый, желтовато-зеленый, содержит усниновую кислоту 2
 – Таллом темный, коричневый, усниновая кислота отсутствует 3
2. Изидии никогда не развиваются, нижняя поверхность лопастей темная
 (черная в центральной части слоевища) *X. angustiphylla*
 – Изидии всегда развиваются на поверхности слоевища,
 нижняя поверхность лопастей черная *X. conspersa*
3. Изидии и соредии не развиваются на поверхности слоевища,
 апотеции встречаются часто 4
 – Изидии развиваются на поверхности слоевища, соредии не развиваются,
 апотеции встречаются редко 5
4. Таллом желтовато-коричневый до темно-коричневого, содержит гломелловую
 и гломеллиферовую кислоты *X. delisei*
 – Таллом темно-коричневый до черновато-коричневого (редко светлых оттенков),
 содержит стеноспоровую и дивариковую кислоты *X. pulla*
5. Таллом желтовато-коричневый до темно-коричневого с лопастями до 3 мм шириной,
 содержит гломелловую и гломеллиферовую кислоты *X. loxodes*
 – Таллом коричневый до черно-коричневого (редко светлых оттенков)
 с лопастями до 2 мм шириной, содержит стеноспоровую и дивариковую
 кислоты *X. verruculifera*

Заключение

Ревизия гербарного материала по роду *Xanthoparmelia* в Беларуси позволила дополнить данные о видовом разнообразии по рассматриваемому роду. Установлено, что в настоящее время род на территории республики представлен шестью видами. К наиболее распространенным видам относятся *Xanthoparmelia conspersa* (75 образцов, или 36,4% общего числа исследованных образцов), *X. verruculifera* (48, или 23,3%), *X. delisei* (36, или 17,5%), *X. loxodes* (28, или 13,6%) и *X. pulla* (15, или 7,3%). Еще один вид – *Xanthoparmelia angustiphylla* – представлен только четырьмя образцами (1,9% общего числа исследованных образцов). *Xanthoparmelia delisei* и *X. angustiphylla* являются новыми для Беларуси.

На основании анализа анатомо-морфологических и химических характеристик образцов лишайников рода *Xanthoparmelia*, хранящихся в ботанических коллекциях Беларуси и ближнего зарубежья, составлен ключ для определения указанных видов.

Благодарность. Авторы выражают глубокую благодарность профессору Т. Ahti (Хельсинкский университет) за информацию по виду *Xanthoparmelia pokornyi*, а также к.с.-х.н., доценту В.Д. Поликсеновой и С.М. Дробышевской (БГУ) за предоставленную возможность работы в гербарии БГУ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. A first checklist of parmelioid and similar lichens in Europe and some adjacent territories, adopting revised generic circumscriptions and with indications of species distributions / D. L. Hawksworth [et al.] // The Lichenologist. – 2008. – Vol. 40, № 1. – P. 1–21.
2. A review of the lichen family *Parmeliaceae* – history, phylogeny and current taxonomy / A. Thell [et al.] // Nordic Journal of Botany. – 2012. – Vol. 30, № 6. – P. 641–664.
3. Major clades of parmelioid lichens (*Parmeliaceae*, *Ascomycota*) and the evolution of their morphological and chemical diversity / O. Blanco [et al.] // Molecular Phylogenetics and Evolution. – 2006. – Vol. 39, № 1. – P. 52–69.
4. **Culberson, C. F.** Chemosyndromic variation in the *Parmelia pulla* group / C. F. Culberson, W. L. Culberson, T. L. Esslinger // The Bryologist. – 1977. – Vol. 80, № 1. – P. 125.
5. **Hale, M. E.** *Bulbothrix*, *Parmelina*, *Relicina* and *Xanthoparmelia*, four new genera in the *Parmeliaceae* / M. E. Hale // Phytologia. – 1974. – Vol. 28. – P. 479–490.
6. **Hale, M. E.** A synopsis of the lichen genus *Xanthoparmelia* (Vainio) Hale (*Ascomycotina*, *Parmeliaceae*) / M. E. Hale // Smithsonian Contributions to Botany. – 1990. – Vol. 74. – P. 1–250.

7. A new classification of parmelioid lichens containing *Xanthoparmelia*-type lichenan (Ascomycota: Lecanorales) based on morphological and molecular evidence / O. Blanco [et al.] // Taxon. – 2004. – Vol. 53, № 4. – P. 959.
8. **Esslinger, T. L.** A new status for the brown Parmeliae / T. L. Esslinger // Mycotaxon. – 1978. – Vol. 7. – P. 45–54.
9. **Orange, A.** Microchemical methods for the identification of lichens / A. Orange, P. W. James, F. J. White. – London: British Lichen Society, 2001. – 101 p.
10. **Крейер, Г. К.** К флоре лишайников Могилевской губернии. Сборы 1908–1910 годов / Г. К. Крейер // Труды Императорского С.-Петербургского Ботанического Сада. – 1913. – Т. 31, № 2. – С. 263–440.
11. **Bachmann, E.** Litauische Flechten / E. Bachmann, F. Bachmann // Hedwigia. – 1920. – Vol. 61, № 6. – P. 308–342.
12. **Голубков, В. В.** Лишайники охраняемых природных территорий Беларуси (флористическая и эколого-географическая характеристика) : дис. ... канд. биол. наук. 03.00.05; 03.00.24 / В. В. Голубков. – Минск, 1992. – 503 л.
13. **Голубков, В. В.** Влияние антропогенной трансформации ландшафтов на особенности распространения и разнообразия лишайников в Белорусском Поозерье / В. В. Голубков // Сохранение биологического разнообразия Белорусского Поозерья : тезисы докладов региональной научно-практической конференции, Витебск, 25–26 апреля 1996 г. / ВГУ; редкол.: А. М. Дорофеев [и др.]. – Витебск, 1996. – С. 81–82.
14. **Белый, П. Н.** Дополнение к лишайнофлоре Березинского биосферного заповедника / П. Н. Белый, В. В. Голубков // Сб. науч. тр. / Ин-т эксперимент. бот. НАН Беларуси. – Минск, 2012. – Вып. 41 : Ботаника (исследования). – С. 84–98.
15. **Голубков, В. В.** Предварительные данные по лишайникам Минской возвышенности / В. В. Голубков, С. М. Есис // Актуальные проблемы природознаўства : матэрыялы юбілейнай навуковай канферэнцыі, прысвечанай 25-годдзю факультэта прыродазнаўства, 2–4 красавіка 1996 г. / БДПУ імя М. Танка ; рэдкал.: А. Р. Александровіч [и др.]. – Мінск, 1997. – С. 66–73.
16. **Горбач, Н. В.** Лишайники Белоруссии. Определитель / Н. В. Горбач. – Минск : Наука и техника, 1973. – 368 с.
17. Хемотаксономические исследования видов рода *Xanthoparmelia* (Parmeliaceae, Lecanorales, Ascomycota) в Центральном Черноземье России / Е. Э. Мучник [и др.] // Растительные ресурсы. – 2013. – № 46(3). – С. 423–434.
18. The lichen family Parmeliaceae in Poland. *Xanthoparmelia* species containing usnic acid / P. Kanigowski [et al.] // Herzogia. – 2016. – Vol. 29. – P. 108–119.
19. The lichen genus *Xanthoparmelia* (Ascomycotina, Parmeliaceae) in Italy / P. Giordani [et al.] // The Lichenologist. – 2002. – № 34. – P. 189–198.
20. Thell, A. Nordic lichen flora. Vol. 4. Parmeliaceae / A. Thell, R. Moberg. – Göteborg : Zetterqvist tryckeri, 2011. – 184 p.
21. **Szczepańska, K.** The lichen-forming fungi of the *Xanthoparmelia pulla* group (Parmeliaceae, Ascomycota) in Poland / K. Szczepańska, Kossowska // Acta Societatis Botanicorum Poloniae. – 2014. – Vol. 83, № 1. – P. 59–65.

Поступила в редакцию 02.05.2018 г

Контакты: pavel.bely@tut.by (Белый Павел Николаевич)

tsurykau@gmail.com (Цуриков Андрей Геннадьевич)

vgolubkov@tut.by (Голубков Владимир Владимирович)

Bely P., Tsurikov A., Golubkov V. THE KEY TO THE LICHEN GENUS *XANTHOPARMELIA* (PARMELIACEAE, LICHENIZED ASCOMYCOTA) IN BELARUS.

The main aim of the study is to provide a key to the *Xanthoparmelia* species occurring in Belarus. The study is based on specimens collected in Belarus during 1905–2017 and deposited in the main herbaria of the country and abroad. Two hundred and six lichen specimens of *Xanthoparmelia* have been studied regarding their chemical (thin layer chromatography, solvent system “C”) and

morphological characteristics. Six species of *Xanthoparmelia* have been identified, of which *X. conspersa*, *X. verruculifera*, *X. delisei*, *X. loxodes* and *X. pulla* appear to be common species in Belarus, while *Xanthoparmelia angustiphylla* is a rare species. The revision allowed to obtain the data on species diversity within the genus in Belarus. The dichotomous key to the *Xanthoparmelia* species is compiled.

Keywords: chemotaxonomy, lichenized fungi, *Parmeliaceae*, Belarus

УДК 594.3:574.5(476.5)

МОРФОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ПРЕСНОВОДНЫХ ЛЕГОЧНЫХ МОЛЛЮСКОВ ПРИРОДНЫХ ВОДОЕМОВ ВИТЕБСКОЙ ОБЛАСТИ

О. М. БАЛАЕВА-ТИХОМИРОВА

кандидат биологических наук, доцент

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

Е. И. КАЦНЬЕЛЬСОН

аспирант

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

Легочные пресноводные моллюски представляют собой тест-организмы для биоэкологических исследований путем изучения компонентов среды их обитания на морфометрические показатели. Легочные моллюски используются для экологического тестирования природных и искусственных водоемов, действия различных физических, химических и биологических факторов. На морфометрические показатели легочных пресноводных моллюсков оказывают влияние сезоны года и местообитание. Это позволяет сформировать представление об особенностях изменения морфометрических показателей моллюсков, обитающих в природных водоемах, на которые оказывают влияние различные антропогенные факторы окружающей среды.

Ключевые слова: легочные моллюски, *Lymnaea stagnalis*, *Planorbarius corneus*, морфометрические показатели, высота раковина, ширина устья, объем забранной гемолимфы, масса особей.

Введение

Морфометрические показатели моллюсков тесно связаны с условиями биотопов: разнообразием растительности, температурным режимом, кормовой базой, рельефом местности, степенью неблагоприятного воздействия внешних факторов среды. В настоящее время большую значимость имеет оценка экологического состояния биотопов, с использованием в качестве биоиндикаторов легочных моллюсков [1–2].

Легочные моллюски, прудовик обыкновенный и катушка роговая, широко распространены в пресных водоемах Витебской области и характеризуются высокой адаптационной способностью, изменчивостью морфометрических показателей. *Lymnaea stagnalis* и *Planorbarius corneus* являются модельными видами, которые используются в биомониторинге и биоиндикации поверхностных вод.

Объекты исследования – прудовик обыкновенный (*Lymnaea stagnalis*) и катушка роговая (*Planorbarius corneus*).

Planorbarius corneus имеет длину тела до 4 см, раковину в виде спирали, завернутую в одной плоскости темно-коричневого цвета. Обитает на дне, в стоячих водоемах, с обильной водной растительностью. Зимуют на глубине 1–1,5 м. Жизненный цикл 2-летний, при котором моллюски размножаются в начале и в конце второго года жизни. *Lymnaea stagnalis* имеет раковину длиной до 7 см и шириной до 3,5 см, спирально закрученную с 4-5 оборотами, с одной стороны она заканчивается острой вершиной, а с другой имеет отверстие. Обитает в прибрежной полосе постоянных и временных, проточных и стоячих водоемов, в зарослях водной растительности. Имеет 2-летний жизненный цикл, при котором размножение становится возможным на второй год после первой зимовки [3–9].

Цель работы – изучить особенности морфометрических показателей *Lymnaea stagnalis* и *Planorbarius corneus*, обитающих в природных водоемах Витебской области.

Наиболее широко используется методика измерения раковины моллюсков, предложенная Е.М. Хейсиным [10], согласно данной методике стандартные промеры, употребляемые при опи-

© Балаева-Тихомирова О. М., 2018

© Кацнельсон Е. И., 2018

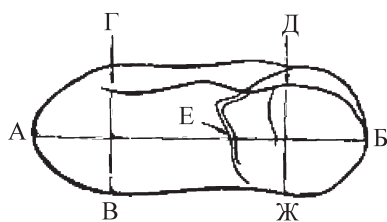
сании и определении видов брюхоногих моллюсков – диаметр раковины, ширина устья, высота устья, высота раковины.

Материал и методы. Опыты поставлены на 162 легочных пресноводных моллюсках, разделенных на две группы: 81 особь *Lymnaea stagnalis* (прудовик обыкновенный) и 81 особь *Planorbarius corneus* (роговая катушка). Моллюски собирались весной (апрель–май), летом (июль) и осенью (сентябрь–октябрь) из водоемов шести районов Витебской области (таблица 1). Водоемы выбранных районов находились на расстоянии не более 30–40 км от областного центра. В каждой исследовательской подгруппе содержалось по 9 моллюсков.

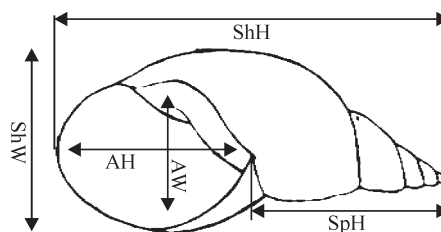
Таблица 1 – Места отбора моллюсков

Район сбора моллюсков	Место сбора	Название водоема
Витебский р-н	г. Витебск	р. Витьба
Дубровенский р-н	д. Ляды	оз. Бордовье
Бешенковичский р-н	д. Соколово	оз. Малое
Ушачский р-н	д. Дубровка	оз. Дубровское
Шумилинский р-н	а/г Башни	оз. Будовесть
Сенненский р-н	г. Сенно	оз. Сенненское

Забор гемолимфы проводили после взвешивания особей, посредством раздражения ноги иголкой шприца. Гемолимфу собирали и измеряли ее объем с помощью автоматических пипеток. Морфометрические показатели легочных моллюсков определяли по методике Е.М. Хейсина [10].



АБ – диаметр раковины; ВГ – высота раковины;
ДЖ – высота устья;
БЕ – ширина устья
Рисунок 1 – Схема измерений
раковины катушки роговой [10]



ShH – высота раковины;
AN – высота устья; ShW – ширина раковины;
AW – ширина устья; SpH – высота завитка
Рисунок 2 – Схема измерений раковины
прудовика озерного [10]

Массу моллюсков устанавливали, взвешивая на весах фирмы Scout Pro. Ширину и высоту раковины измеряли с помощью линейки (ГОСТ-17435-72) и штангенциркуля (ГОСТ 166-89). Математическую обработку полученных результатов проводили методами непараметрической статистики с использованием STATISTICA 12.5.

Полученные результаты представлены в виде медианы и интерквартильной широты (25 процентиль – 75 процентиль). Так как исследуемые выборки маленькие ($n = 9$), то используя тест Колмогорова-Смирнова было установлено что распределение является ненормальным, поэтому для оценки достоверности различий между независимыми выборками использовали тест Манна-Уитни, для парных выборок использовали однофакторный дисперсионный анализ Фридмана (ANOVA).

Результаты и их обсуждение. На размеры моллюсков оказывает влияние местообитание, сезон года и тип водоема (с проточной или стоячей водой). Из шести исследованных водоемов к проточным относится один – р. Витьба, пять имеют стоячий тип водообеспечения.

Статистически значимых отличий в высоте и ширине раковины *Planorbarius corneus* между особями, обитающими в проточной и стоячей водах обнаружено у моллюсков из Бешенковичского, Шумилинского и Сенненского районов в весенний период сбора, из Дубровенского, Ушачского и Сенненского районов в летний период сбора и из Ушачского, Шумилинского и Сенненского районов в осенний период сбора (таблица 2).

Масса особей, обитающих в стоячей воде Ушачского, Шумилинского, Сенненского районов была больше 1,2 раза, а у особей из Дубровенского и Бешенковичского районов масса была меньше в 1,2 в сравнении с особями из реки Витьба (летний и осенний периоды сбора моллюсков). Снижение массы особей *Planorbarius corneus* в данных районах привело к снижению объема забранной гемолимфы 1,4 раза в летний период и в 1,2 раза в осенний период сбора. Масса особей ниже в Дубровенском районе 1,2 раза и объем отобранной гемолимфы в 1,3 раза. Масса *Planorbarius corneus* выше в Шумилинском, Сенненском районах сбора моллюсков была больше 1,2 раза объем отобранной гемолимфы в 1,3 раза.

При сопоставлении данных между сезонами года выявлены следующие изменения. По сравнению с показателями *Planorbarius corneus* собранных в летний сезон года статистически значимые отличия получены в сравнении с весенним сезоном по следующим показателям: в 1,2 раз по ширине и высоте устья (Шумилинский район); по объему забранной гемолимфы в 1,5 раза – Ушачский район, 1,75 раза – Шумилинский район.

При сравнении летнего и осеннего сезонов сбора моллюсков по показателям: по массе в 1,2 раза больше в Бешенковичском и Ушачском районах, объему забранной гемолимфы у в 1,5 раза больше в Ушачском районе и в 1,4 раза в Шумилинском (таблица 2).

Таблица 2 – Морфометрические показатели *Planorbarius corneus*, обитающих в природных водоемах, отловленных в летнее, весеннее и осеннее время года (Ме) [25%; 75%]

Район сбора моллюсков, (n = 9)	Высота, см	Ширина, см	Масса, г	Объем гемолимфы, мл
Весна				
Витебский р-н	2,40 [2,20-2,60]	3,00 [2,90-3,20]	6,50 [5,20-7,80]	1,00 [0,85-1,40]
Дубровенский р-н	2,25 [2,05-2,45]	2,95 [2,70-3,30] ² p=0,019111	5,50 [4,30-6,10] ¹ p=0,028366	0,75 [0,50-1,10] ¹ p=0,025749
Бешенковичский р-н	2,15 [2,00-2,20]	2,65 [2,60-3,10] ¹ p=0,001008 ² p=0,002497 ³ p=0,001008	6,20 [5,00-7,60] ² p=0,037636 ³ p=0,010166	0,85 [0,40-1,40]
Ушачский р-н	2,35 [1,75-3,05] ² p=0,005796 ³ p=0,017258	3,00 [2,45-3,45] ² p=0,004587 ³ p=0,009109	7,30 [5,10-8,20] ³ p=3,137105	1,00 [0,50-1,20] ² p=0,000246
Шумилинский р-н	2,15 ¹ p=0,000670 ² p=0,000183 ³ p=0,000183	2,70 [2,50-2,80] ¹ p=0,000183 ² p=0,000183 ³ p=0,000183	8,05 [6,65-8,40] ¹ p=0,002827	1,00 [0,40-1,30] ² p=0,007285
Сенненский р-н	2,45 [2,30-2,60] ² p=0,049367 ³ p=0,049367	3,20 [3,10-3,50] ¹ p=0,017258 ² p=0,023343	8,20 [6,80-8,70] ¹ p=0,002827	1,28 [1,00-1,40] ¹ p=0,037636
Лето				
Витебский р-н	2,50 [2,20-2,80]	3,10 [2,70-3,20]	6,55 [5,80-7,10]	1,15 [0,90-1,60]

Окончание таблицы 2

Район сбора моллюсков, (n = 9)	Высота, см	Ширина, см	Масса, г	Объем гемолимфы, мл
Дубровенский р-н	2,30 [1,95-2,75] ¹ p=0,049367	3,20 [2,80-3,40] ³ p=0,019111	5,43 [4,80-6,10] ¹ p=0,000330	0,83 [0,55-1,05] ¹ p=0,001706
Бешенковический р-н	2,40 [1,85-3,05]	2,95 [2,75-3,25] ³ p=0,031210	5,40 [4,35-6,55] ¹ p=0,002202	0,80 [0,70-0,95] ¹ p=0,000769
Ушачский р-н	2,80 [2,40-3,00] ¹ p=0,004587 ³ p=0,019111	3,30 [3,10-3,70] ¹ p=0,037636	7,75 [6,90-9,00] ¹ p=0,000246 ³ p=0,001706	1,40 [1,15-1,85] ¹ p=0,011330 ³ p=0,000381
Шумилинский р-н	2,48 [2,40-2,65] ³ p=0,001706	3,20 [2,90-3,60]	7,70 [6,45-8,95] ¹ p=0,002202	1,40 [0,80-1,70] ¹ p=0,037636 ³ p=0,003611
Сенненский р-н	2,55 [2,40-2,70]	3,40 [3,20-3,70] ¹ p=0,002827	7,90 [7,70-9,50] ¹ p=0,000183	1,30 [1,10-1,50]
Осень				
Витебский р-н	2,40 [2,20-2,60]	3,10 [2,90-3,20]	6,30 [5,30-7,70]	1,00 [0,80-1,30]
Дубровенский р-н	2,30 [2,00-2,50]	2,95 [2,70-3,30] ² p=0,019111	5,40 [4,40-6,60] ¹ p=0,007285	0,80 [0,40-1,00] ¹ p=0,007285
Бешенковический р-н	2,40 [1,90-3,10]	3,10 [2,70-3,30] ² p=0,031210	5,14 [4,20-6,20] ¹ p=0,004072	0,70 [0,40-1,40] ¹ p=0,004072
Ушачский р-н	2,60 [2,30-2,80] ¹ p=0,009109 ² p=0,019111	3,20 [2,85-3,75] ¹ p=0,037636	6,60 [5,50-7,70] ² p=0,001706	1,00 [0,50-1,30] ² p=0,000381
Шумилинский р-н	2,70 [2,44-2,95] ¹ p=0,000507 ² p=0,001706	3,30 [2,90-3,50] ¹ p=0,006502	7,55 [6,90-9,30] ¹ p=0,006502	1,00 [0,90-1,20] ² p=0,003611
Сенненский р-н	2,45 [2,30-2,60]	3,30 [3,20-3,65] ¹ p=0,003197	7,70 [7,40-9,65] ¹ p=0,005159	1,23 [0,90-1,55] ¹ p=0,015565

Примечание – ¹p < 0,05 по сравнению с Витебским районом (р. Витьба) в весеннее время сбора; ²p < 0,05 по сравнению с летним периодом сбора моллюсков; ³p < 0,05 по сравнению с осенним периодом сбора моллюсков

Статистически значимых отличий в высоте раковины *Lymnaea stagnalis* между особями, обитающими в проточной и стоячей водах обнаружено в весенний период в Ушачском, Шумилинском и Сенненском районах, в летний в Бешенковичском, Ушачском и Шумилинском районах и в осенний период сбора моллюсков в Бешенковичском, Ушачском и Сенненском районах (таблица 3). Ширина раковин особей, обитающих в стоячей воде Шумилинского района была в 1,2 раза меньше, а Бешенковичского и Ушачского районов больше в 1,3 раза, в сравнении с особями из реки Витьба (весенний, летний и осенний периоды сбора моллюсков). Масса особей, обитающих в стоячей воде Ушачского района была больше 1,2 раза в сравнении с особями из реки Витьба (летний и осенний периоды сбора моллюсков).

Увеличение массы особей *Lymnaea stagnalis* в Ушачском районе привело к увеличению объема забранной гемолимфы 1,9 раза в летний период и в 1,7 раза в осенний период сбора. Снижение массы особей в Шумилинском районе в 1,7 раза привело к снижению объема отобранной гемолимфы в 2,4 раза (в осенний период сбора). Масса *Lymnaea stagnalis* выше в Шумилинском, Сенненском районах сбора моллюсков была больше 1,2 раза объем отобранной гемолимфы в 1,3 раза.

При сопоставлении данных между сезонами года выявлены следующие изменения. Масса особей *Lymnaea stagnalis*, обитающих в водоёме Ушачского и Шумилинского районов в летний период была больше в 1,2 раза в сравнении с особями из тех же водоемов в осенний период сбора. Объем забранной гемолимфы в Ушачском районе в летний период был больше в 2,4 раза по сравнению с весенним периодом сбора. Ширина раковины моллюсков, обитающих в Бешенковичском, Ушачском и Шумилинском районах в летний период была больше в 1,4 и 1,6 раза соответственно по сравнению с особями из данных районов в весеннее время сбора.

Таблица 3 – Морфометрические показатели *Lymnaea stagnalis*, обитающих в природных водоемах, отловленных в летнее, весеннее и осеннее время года (Ме), [25%; 75%]

Район сбора моллюсков, (n = 9)	Высота, см	Ширина, см	Масса, г	Объем гемолимфы, мл
Весна				
Витебский р-н	5,05 [4,90-5,70]	1,75 [1,70-2,00] ² p=0,034294	8,57 [7,67-8,80]	1,60 [1,40-1,90]
Дубровенский р-н	5,00 [4,60-5,30]	1,80 [1,55-2,05]	8,65 [7,60-9,10]	1,80 [1,40-1,90]
Бешенковичский р-н	5,10 [4,20-5,70]	1,70 [1,40-1,90] ² p=0,000183 ³ p=0,000183	8,89 [8,45-9,96] ¹ p=0,005159 ² p=0,000183	1,55 [1,08-2,00] ² p=0,000183 ³ p=0,000246
Ушачский р-н	5,20 [4,30-5,30] ² p=0,000246	1,60 [1,10-1,90] ¹ p=0,045155 ² p=0,000183 ³ p=0,000183	7,98 [7,50-8,54] ² p=0,000285 ³ p=0,000583	1,50 [1,20-1,70] ² p=0,000183 ³ p=0,000183
Шумилинский р-н	5,00 [4,50-5,40] ² p=0,037636 ³ p=0,007285	1,42 [1,30-1,54] ¹ p=0,000183 ² p=0,000183 ³ p=0,000183	7,10 [7,04-7,42] ¹ p=0,000440 ² p=0,000583 ³ p=0,000183	1,80 [1,40-2,30] ³ p=0,000183
Сенненский р-н	5,15 [4,80-5,40]	1,64 [1,50-1,80] ¹ p=0,045155 ² p=0,000583	7,24 [7,06-8,28] ¹ p=0,000440 ² p=0,000330 ³ p=0,003611	1,79 [1,50-2,20] ² p=0,023343
Лето				
Витебский р-н	4,85 [4,50-5,40]	1,90 [1,70-2,30]	8,47 [8,05-9,15]	1,80 [1,20-2,40]

Окончание таблицы 3

Район сбора моллюсков, (n = 9)	Высота, см	Ширина, см	Масса, г	Объем гемолимфы, мл
Дубровенский р-н	5,10 [4,60-5,30]	1,90 [1,80-2,30]	8,30 [8,05-8,90]	1,80 [1,30-2,60]
Бешенковический р-н	5,35 [4,10-5,80] ¹ p=0,025749	2,38 [2,26-2,40] ¹ p=0,000381	8,65 [8,30-9,40] ³ p=0,000246	2,55 [2,20-2,70] ¹ p=0,000381 ³ p=0,000183
Ушачский р-н	5,75 [5,40-6,20] ¹ p=0,000212 ³ p=0,000183	2,40 [2,35-2,55] ¹ p=0,000183	9,75 [8,90-12,00] ¹ p=0,000246	3,40 [3,20-3,60] ¹ p=0,000183 ³ p=0,005796
Шумилинский р-н	5,20 [5,10-5,30] ¹ p=0,037636 ³ p=0,000183	2,30 [2,00-2,50] ¹ p=0,001315 ³ p=0,049367	8,35 [7,50-10,20] ³ p=0,000183	2,00 [1,70-2,75] ¹ p=0,000183 ³ p=0,000183
Сенненский р-н	5,30 [4,60-5,40] ¹ p=0,028366	1,90 [1,70-2,10] ³ p=0,000670	8,65 [8,00-9,05] ³ p=0,025749	1,98 [1,90-2,60] ³ p=0,012612
Осень				
Витебский р-н	4,75 [4,50-5,30]	1,79 [1,74-2,19]	8,10 [7,60-9,30]	1,95 [1,00-2,60]
Дубровенский р-н	4,90 [4,70-5,40]	1,83 [1,70-2,10]	8,25 [7,75-9,25]	2,00 [1,00-2,20]
Бешенковический р-н	5,40 [4,90-5,50] ¹ p=0,003197	2,35 [2,05-2,70] ¹ p=0,001008	7,60 [6,83-8,36] ¹ p=0,003611 ² p=0,000246	0,85 [0,40-1,20] ¹ p=0,000769 ² p=0,000183
Ушачский р-н	5,20 [5,10-5,30] ² p=0,000183	2,41 [2,35-2,60] ¹ p=0,000183	9,48 [8,45-10,40] ¹ p=0,000670	3,05 [2,60-3,40] ¹ p=0,000212 ² p=0,005796
Шумилинский р-н	4,70 [4,50-4,90] ² p=0,000183	1,94 [1,70-2,45] ² p=0,049367	5,00 [4,20-5,50] ¹ p=0,000183 ² p=0,000183	0,80 [0,50-0,90] ¹ p=0,000183 ² p=0,000183
Сенненский р-н	5,10 [4,60-5,40]	1,65 [1,40-1,85] ¹ p=0,010166 ² p=0,000670	7,85 [7,30-9,10] ² p=0,025749	1,55 [1,30-2,00] ² p=0,012612

Примечание – ¹p < 0,05 по сравнению с Витебским районом (р. Витьба) в весеннее время сбора; ²p < 0,05 по сравнению с летним периодом сбора моллюсков; ³p < 0,05 по сравнению с осенним периодом сбора моллюсков

Масса особей, обитающих в водоёме Бешенковического и Шумилинского районов в летний период была больше в 1,2 и 1,7 раза, а объем забранной гемолимфы в 3,2 и 2,9 раза соответственно в сравнении с особями из водоема в осенний период. Масса особей, обитающих в водоеме Бешенковического и Шумилинского районов в осенний период была меньше в 1,2 и 1,5 раза в сравнении с особями в весенний период сбора, а объём забранной гемолимфы был меньше в 1,9 и 2,5 раза соответственно. В Ушачском районе в осенний период объём забранной гемолимфы увеличился в 2,1 раза по сравнению с весенним периодом сбора. Ширина раковины моллюсков, обитающих в Бешенковичском, Шумилинском и Ушачском районах в осенний период была больше в 1,5 раза по сравнению с особями из данных районов в весеннее время сбора.

Заключение

Проанализировав морфометрические показатели пресноводных лёгочных моллюсков, можно сказать о том, что их показатели изменяются относительно сезонов года, районов и условий их обитания. Это связано с тем с изменением содержание кислорода в воде в течение года, изменением кормовой базы. По морфометрическим показателям моллюсков из разных водоемов можно судить о степени их зарастания относительно друг друга.

Обыкновенный прудовик и катушка роговая, легко культивируются и поэтому являются удобной группой организмов для проведения экологических исследований, так как отличается устойчивой численностью, большим видовым разнообразием и быстрой реакцией на изменение окружающей среды. Полученные данные являются основой для создания алгоритма для мониторинга водных объектов, на основе исследования морфометрических показателей *Lymnaea stagnalis* и *Planorbarius corneus*.

Таким образом, проведенные исследования показали, что морфометрические показатели у двух видов легочных пресноводных моллюсков, закономерно зависят от сезона и может отличаться в связи с особенностями состава водной среды обитания.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Никаноров, А. М.** Системы мониторинга поверхностных вод / А. М. Никаноров, В. В. Циркунов. – СПб. : Гидрометиздат, 1994. – 197 с.
2. **Дромашко, С.Е.** Биотестирование – составной элемент системы оценки состояния окружающей среды : учеб.-метод. пособие / С. Е. Дромашко, С. Н. Шевцова. – Минск : ИПНК, 2012. – 82 с.
3. **Абакумов, В. А.** Гидробиологический мониторинг пресноводных экосистем и пути его совершенствования / В. А. Абакумов, Л. М. Сушеня // Экологические модификации и критерии экологического нормирования: труды международного симпозиума. – Москва, 1991. – С. 41–51.
4. **Андреева, С. И.** Определитель пресноводных брюхоногих моллюсков Западной Сибири / С. И. Андреева, М. В. Андреев, М. В. Винарский. – Омск, 2010. – 340 с.
5. **Анистратенко, В. В.** Фауна Украины / В. В. Анистратенко, О. Ю. Анистратенко. – Киев : Велес, 2001. – 240 с.
6. **Асачаков, А. А.** К методике измерения длины тела артропод / А. А. Асачаков // Гидробиологический журнал. – 1993. – Т. 29. № 2. С. 90–93.
7. **Круглов, Н. Д.** Моллюски семейства прудовиков Европы и Северной Азии. Смоленск: Изд-во СГПУ/ Н. Д. Круглов. – 2005. – 508 с.
8. **Надточий, В. А.** Атлас брюхоногих моллюсков дальневосточных морей России / В. А. Надточий, К. М. Прокопенко. – Владивосток : Дюма, 2006. – 98 с.
9. **Цалолихин, С. Я.** Определитель пресноводных беспозвоночных России и сопредельных территорий / С. Я. Цалолихин. – СПб. : Наука, 2004. – Т. 6 : Моллюски, полихеты, немуртины. – 396 с.
10. **Хейсин, Е. М.** Краткий определитель пресноводной фауны. – 2-е изд. – М. : Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР. – 1962. – 148 с.

Поступила в редакцию 12.04.2018 г.

Контакты: olgabal.tih@gmail.com (Балаева-Тихомирова Ольга Михайловна)

kate_kaznelson@tut.by (Кацнельсон Екатерина Иосифовна)

Balayeva-Tikhomirova O., Katsnelson E. MORPHOMETRIC INDICATORS OF FRESH-WATER PULMONARY MOLLUSCS OF NATURAL WATERS OF VITEBSK REGION.

Freshwater pulmonary molluscs are test organisms for bioecological research and display the impact of their habitat components on morphometric indices. Pulmonary molluscs are used for ecological testing of natural and artificial reservoirs, influence of various physical, chemical and biological factors. Morphometric parameters of freshwater pulmonary molluscs are affected by the seasons and habitats. This allows scientists to form ideas about changes in the morphometric parameters of molluscs living in natural reservoirs which are influenced by various anthropogenic factors.

Keywords: pulmonary mollusks, *Lymnaea stagnalis*, *Planorbarius corneus*, total protein, RNA, DNA, uric acid, urea.

УДК 612.821:796

ДИНАМИКА СЕНСОМОТОРНЫХ РЕАКЦИЙ НА РАЗЛИЧНЫХ ЭТАПАХ ТРЕНИРОВОЧНОГО ПРОЦЕССА У СПОРТСМЕНОВ-ГРЕБЦОВ

Н. О. МАРТУСЕВИЧ

кандидат биологических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Исследование было проведено с целью изучения динамики психофизиологических показателей в подготовительном и предсоревновательном периодах подготовки гребцов. Психофизиологическое тестирование включало оценку показателей простой и сложной (реакция различения) сенсомоторных реакций. Выявленные закономерности изменения зрительно-моторных реакций (показатели функционального состояния ЦНС) позволяют использовать их для оценки адаптационного потенциала и психофункциональных возможностей спортсмена с целью своевременного проведения коррекции неблагоприятных психических состояний, обусловленных чрезмерной нагрузкой.

Ключевые слова: зрительно-моторные реакции, адаптация, спорт.

Введение

Актуальность проблемы контроля психофизического состояния спортсменов, деятельность которых требует устойчивого внимания, быстрой реакции, стабильной работы всех функциональных систем, несомненна. В противном случае будет сохраняться остаточная усталость и, как результат, быстрее наступать утомление. Недостаточное восстановление организма будет способствовать развитию патологических состояний.

Эффективное отслеживание тренировочного процесса и принятие научно обоснованных решений по его оптимизации невозможно без проведения всестороннего психофизиологического обследования спортсменов. Однако в подавляющем большинстве программ медико-психологического обеспечения спортивной подготовки основное внимание уделяется результатам тестирования физической работоспособности и психического состояния, в то время как занятия разными видами спорта требуют от спортсменов организации специфичных моторных программ, реализуемых с участием различных сенсорных систем [1, 2]. Именно поэтому так важна оценка параметров деятельности и способов взаимодействия сенсорных систем, в том числе, в условиях помех.

Основная часть

Цель исследования – изучение динамики зрительно-моторных реакций спортсменов-гребцов (16–21 года) в подготовительном и предсоревновательном периодах подготовки для комплексного контроля текущего состояния ЦНС.

Работа проводилась с использованием компьютерного комплекса для психофизиологического исследования “НС-Психотест” (фирма “НейроСофт” г. Иваново). Данный комплекс включает в себя психофизиологический тестер и IBM-совместимый персональный компьютер. Исследовались показатели простой и сложной (реакция различения) зрительно-моторных реакций.

Как показывают многочисленные исследования, наиболее объективна оценка функционального состояния организма по времени простой сенсомоторной реакции. Методика “Простая зрительно-моторная реакция” (ПЗМР) предназначена для диагностики скорости простой зрительно-моторной реакции. Обследуемому последовательно предъявляются световые сигналы одного цвета. При появлении сигнала необходимо как можно быстрее нажать на соответствующую кнопку, стараясь при этом не допускать ошибок (ошибками считаются преждевременное нажатие кнопки и пропуск сигнала). Световой сигнал подается в достаточно случайные моменты времени, чтобы не выработывался рефлекс на время, и в то же время достаточно регулярно, чтобы каждый очередной сигнал был ожидаем.

Простая зрительно-моторная реакция состоит из двух последовательных компонентов: сенсорного (латентного) периода и моторного периода. Латентный период включает в себя восприятие и идентификацию стимульного сигнала и имеет несколько составляющих (возбуждение рецепторов сетчатки, проведение нервных импульсов по афферентным волокнам, обработка сигнала центральными отделами нервной системы). Моторный период – выполнение движения.

При выполнении теста ПЗМР регистрируется ряд показателей: время реакции, стандартное отклонение, коэффициент точности Уиппла, уровень функциональных возможностей (УФВ) и др. Время реакции служит индикатором развития моторики и скорости переработки информации. Величина стандартного отклонения позволяет судить об уравновешенности нервных процессов.

Реакция различения является разновидностью сложной сенсомоторной реакции. В отличие от простой реакции, реакция различения осуществляется на один определенный стимул из нескольких разнообразных сигналов. Поэтому процесс обработки сенсорной информации центральной нервной системой происходит не только по принципу наличия или отсутствия сигнала, но и по принципу различения сигналов, отбора сигналов определенного цвета из общего их числа и формирования реакции на заданный вид сигнала [3].

Методика “Реакция различения” предназначена для измерения подвижности нервных процессов в ЦНС. Обследуемому последовательно предъявляются разноцветные световые сигналы. В ответ на предъявление каждого из световых сигналов определенного цвета обследуемый должен быстро нажать на соответствующую кнопку на зрительно-моторном анализаторе, стараясь не допускать ошибок. Интервалы между предъявляемыми сигналами различны, диапазон значений интервала между сигналами составляет от 0,5 до 2,5 с. Последовательность цветов также случайна.

Анализ полученных результатов осуществляется на основании среднего значения времени реакции и стандартного отклонения. Кроме того, необходимо учитывать число ошибок и показатель коэффициента точности (коэффициент Уиппла) – отражает способность к концентрации внимания. Обследование по методике “Реакция различения” рекомендуется проводить в сочетании с обследованием по методике “Простая зрительно-моторная реакция”. Так, разность между средним временем реакции различения и средним временем ПЗМР отражает скорость протекания нервных процессов в центральной нервной системе (“время принятия решения”) [3].

Большая часть спортсменов на протяжении всего периода подготовки к соревнованиям отличалась стабильностью сенсомоторного реагирования (таблицы 1-5) за исключением спортсмена № 1. В конце предсоревновательного периода у него отмечалось снижение скорости простой зрительно-моторной реакции на 19 мс по сравнению с периодом отдыха (таблица № 1). Большинство авторов [3, 4, 5] такая динамика рассматривается как неблагоприятная и указывает на снижение тренированности и адаптации к длительным физическим нагрузкам. Вместе с тем, среднее значение времени реакции у спортсмена № 1 было ниже, чем у его товарищей по команде (таблица 1). Причем тест он выполнял не только быстрее всех, но и достаточно качественно (низкие значения коэффициента Уиппла). В последующем именно он продемонстрировал наилучший результат во время выступления. Отсюда напрашивается вывод: решающее значение имеет не динамика психофизиологических показателей (этот показатель скорее позволяет отследить насколько правильно организован тренировочный процесс), а природные способности спортсмена. Такой показатель как скорость ответной реакции на световой или другой сигнал является генетически детерминированной и практически не тренируемой. Наименьшие значения коэффициента Уиппла (минимальное количество ошибок) обнаружены у спортсмена под № 4, причем на всех этапах подготовки, на фоне низких значений времени реакции (таблица № 4). Это обстоятельство мы связываем с высокой техничностью данного спортсмена (мастер спорта), что позволяет ему успешно выступать на престижных соревнованиях (отобрался на чемпионат Европы по гребным видам спорта среди юниоров).

Таблица 1 – Показатели психофизиологического тестирования спортсмена-гребца (спортсмен № 1 (мастер спорта)) в подготовительном и предсоревновательном периодах

Показатели	Период отдыха	Начало подготовитель- ного периода	Окончание подготови- тельного периода	Начало предсоревнова- тельного периода	Окончание предсорев- новательного периода
ПЗМР					
Время реакции, мс	190 ± 42	183 ± 33,1	181 ± 24,7	193 ± 35,9	209 ± 37,2
коэффициент Уиппла	0,04	0,05	0,07	0,04	0,04
УФВ, усл. ед.	3,9	4,3	4,3	3,9	3,7
Реакция различения					
Время реакции, мс	256 ± 51,6	261 ± 54,9	241 ± 67,3	268 ± 60	275 ± 59,5
коэффициент Уиппла	0,09	0,17	0,1	0,08	0,09
Время принятия решения, мс	66	78	60	75	66

Таблица 2 – Показатели психофизиологического тестирования спортсмена-гребца (спортсмен № 2 (мастер спорта)) в подготовительном и предсоревновательном периодах

Показатели	Период отдыха	Начало подготовительного периода	Окончание подготовительного периода	Начало предсоревновательного периода	Окончание предсоревновательного периода
ПЗМР					
Время реакции, мс	204 ± 28,1	196 ± 35,5	198 ± 28,8	196 ± 32	204 ± 29,7
коэффициент Уиппла	0,08	0,04	0,07	0,09	0,03
УФВ, усл. ед.	3,9	3,9	4,1	4,4	4,1
Реакция различения					
Время реакции, мс	300 ± 54,8	270 ± 73,1	301 ± 77,3	307 ± 56,2	285 ± 71,5
коэффициент Уиппла	0,18	0,29	0,1	0,1	0,13
Время принятия решения, мс	96	74	103	111	81

Таблица 3 – Показатели психофизиологического тестирования спортсмена-гребца (спортсмен № 3 (мастер спорта)) в подготовительном и предсоревновательном периодах

Показатели	Период отдыха	Начало подготовительного периода	Окончание подготовительного периода	Начало предсоревновательного периода	Окончание предсоревновательного периода
ПЗМР					
Время реакции, мс	215 ± 29,1	199 ± 32,6	200 ± 23,1	185 ± 18,6	204 ± 27,3
коэффициент Уиппла	0,06	0,08	0,05	0,11	0,01
УФВ, усл. ед.	3,1	4,5	3,7	4,2	3,7
Реакция различения					
Время реакции, мс	321 ± 70,6	320 ± 66,1	273 ± 57,8	329 ± 73,4	315 ± 105,7
коэффициент Уиппла	0,1	0,2	0,1	0,2	0,15
Время принятия решения, мс	106	121	73	144	121

Таблица 4 – Показатели психофизиологического тестирования спортсмена-гребца (спортсмен № 4 (мастер спорта)) в подготовительном и предсоревновательном периодах

Показатели	Период отдыха	ПЗМР				Начало предсоревновательного периода	Конец предсоревновательного периода
		Начало подготовительного периода	Конец подготовительного периода	Начало предсоревновательного периода	Конец предсоревновательного периода		
Время реакции, мс	190 ± 24,4	187 ± 27,3	192 ± 30	223 ± 59,1	198 ± 26,2		
коэффициент Уиппла	0,01	0,03	0,01	0,01	0,01		
УФВ, усл. ед.	3,7	3,8	4,1	2,5	3,2		
Реакция различения							
Время реакции, мс	294 ± 69,5	332 ± 71,2	347 ± 67,8	323 ± 62,9	306 ± 78,2		
коэффициент Уиппла	0,14	0,2	0,04	0,04	0,15		
Время принятия решения, мс	104	145	155	100	108		

Таблица 5 – Показатели психофизиологического тестирования спортсмена-гребца (спортсмен № 5 (кандидат в мастера спорта)) в подготовительном и предсоревновательном периодах

Показатели	Период отдыха	Начало подготовительного периода	Окончание подготовительного периода	Начало предсоревновательного периода	Окончание предсоревновательного периода
ПЗМР					
Время реакции, мс	217 ± 34,8	218 ± 44,3	221 ± 26,6	242 ± 39,6	224 ± 40,2
коэффициент Уиппла	0,03	0,07	0,06	0,14	0,03
УФВ, усл. ед.	3,7	3,4	3,2	3,9	3,6
Реакция различения					
Время реакции, мс	347 ± 99,1	358 ± 111,2	329 ± 86,2	359 ± 90,5	322 ± 72
коэффициент Уиппла	0,13	0,16	0,14	0,1	0,05
Время принятия решения, мс	130	140	108	117	98

Следует отметить, что не все спортсмены справлялись с тренировочными нагрузками. Так, у спортсмена под № 3 на всех этапах подготовки мы наблюдали состояние “психического пресыщения” [1] – увеличение времени ПЗМР при снижении времени реакции различения, что является показателем неблагоприятного состояния центральных регуляторных механизмов (таблица № 3). Признаком наступления пресыщения является потеря интереса к работе и аффективные расстройства. Данные подтвердились и результатами экспресс-оценки эмоционального состояния спортсмена. В последующем это негативно скажется на результатах выступления (наихудший результат). Причем ранее этот спортсмен показывал неплохие результаты (мастер спорта) и по мнению тренера является перспективным. Аналогичная картина, но только в предсоревновательном периоде наблюдалась у спортсмена под № 2 (таблица 2). По свидетельству тренера, спортсмен № 2 обладает высокой физической работоспособностью и без труда справляется с нагрузками. Возможно, причина неудовлетворительного психического состояния данных спортсменов кроется в особенностях их темперамента. Спортсмены № 2 и № 3, у которых было обнаружено состояние “психического пресыщения”, оказались амбивалентами (опросник Айзенка). Этим лицам свойственна двойственность переживаний, выражающаяся в том, что один и тот объект вызывает у человека одновременно два противоположных чувства. Тогда как другие члены команды оказались экстравертом (спортсмен № 1) и интровертами (спортсмен № 4 и № 5). На наш взгляд, спортсмены-амбиваленты в силу высокой эмоциональной нестабильности требуют постоянного внимания психолога и тренера. Своевременно проведенная психокоррекция позволяет нивелировать негативные последствия эмоциональной неустойчивости и добиться высоких результатов на соревнованиях, что мы и наблюдали в последующем. Спортсмен под № 3 занимал призовые места на престижных республиканских соревнованиях, спортсмен под № 2 отобрался на чемпионат Европы по гребным видам спорта среди юниоров.

Одним из важных показателей состояния нервной системы является уровень функциональных возможностей, который характеризует способность обследуемого формировать адекватную заданию функциональную систему и достаточно длительно ее удерживать. У спортсменов под номерами 1, 2, и 3 этот показатель в среднем составил свыше 4 усл.ед., у спортсменов № 4 и 5 – 3,5 усл.ед. Однако следует учитывать не только среднее значение этого показателя, но и его изменение в ходе тренировочного процесса. Об адекватной реакции организма на нагрузку свидетельствуют незначительные изменения этого показателя в ходе подготовки к соревнованиям. Следует отметить, что самая неблагоприятная картина по этому показателю складывалась у спортсмена под № 3 – к концу каждого из периодов подготовки отмечалось заметное ухудшение данного показателя (таблица 3). При анализе показателя УФВ, следует проводить сравнительный анализ показателей, полученных по методикам “Простая зрительно-моторная реакция” и “Помехоустойчивость”. Спортсмены, у которых значения УФВ по методике “Помехоустойчивость”, превышают значения УФВ по методике ПЗМР являются очень талантливыми. Однако ни у одного из обследованных нами спортсменов-гребцов зафиксировать эту особенность не удалось.

Обследование по методике “Реакция различения” проводят в сочетании с обследованием по методике ПЗМР. Разность между средним временем реакции различения и средним временем ПЗМР, так называемое «время центральной задержки» отражает скорость обработки информации центральными отделами сенсорной системы. При анализе такого показателя, как “время центральной задержки” (или “время принятия решения”) установлено, что наилучший результат по этому показателю показал спортсмен под № 1, среднее время у него менее 70 мс и спортсмен под № 2 (90 мс), (таблицы 1, 2). Наихудший результат по этому показателю у спортсмена № 4 – свыше 127 мс, таблица 4. О благоприятной динамике функционального состояния ЦНС свидетельствует уменьшение времени центральной задержки в процессе адаптации к физическим нагрузкам, что мы наблюдали у спортсменов под номерами 1, 2 (в предсоревновательном периоде), 3 и 5, таблицы 1, 2, 3, 5.

Заключение

Анализ динамики сенсомоторного реагирования на различных этапах подготовки спортсменов-гребцов показал, что наилучшие результаты на соревнованиях показывают те спортсмены, которые имеют высокую скорость реагирования на предъявляемые световые сигналы (показатель развития моторики). Низкие показатели времени сенсомоторного реагирования, как при вы-

полнении простых (методика “Простая зрительно-моторная реакция”), так и сложных реакций (методика “Реакция различения”) у этой категории спортсменов указывают на высокую скорость проведения нервных импульсов, что в свою очередь является обязательным условием развития такого физического качества как быстрота.

При изучении результатов психофизиологического тестирования важное диагностическое значение имеют такие показатели, как точность реагирования (коэффициент Уиппла) и значения среднеквадратичного отклонения.

Изучение динамики результатов психофизиологического тестирования в ходе тренировочного процесса позволяет своевременно выявить и устранить нарушения в работе ЦНС, препятствуя трансформации функциональных расстройств в тяжелые соматические заболевания. При организации тренировочного процесса следует также учитывать тип темперамента спортсмена.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Ильин, Е. П.** Психология спорта / Е. П. Ильин. – СПб. : Питер, 2008. – 352 с.
2. **Akarsu, S.** Athletes have faster eye-hand visual reaction times and higher scores on visuospatial intelligence than nonathletes / S. Akarsu, S. Dane, E. Ciliskan // Turk. J. Med. Sci. – 2009. – V. 39 (6). – P. 871–874.
3. **Чарыкова, И. А.** Динамика психофизиологических показателей спортсменов на разных этапах подготовки / И. А. Чарыкова // Военная медицина. – Минск, 2009. – № 3. – С. 133–136.
4. **Таймазов, В. А.** Психофизиологическое состояние спортсмена (Методы оценки и коррекции) / В. А. Таймазов, Я. В. Голуб. – СПб. : Издательство “Олимп СПб”, 2004. – 400 с.
5. **Сурнина, О. Е.** Половые и возрастные различия времени реакции на движущийся объект у детей и взрослых / О. Е. Сурнина // Физиология человека. – 2001. – Т. 27. – № 4. – С. 56–60.

Поступила в редакцию 20.04.2018 г.

Контакты: +375 44 708-13-81 (Мартусевич Наталья Олеговна)

Martusevich N. DYNAMICS OF SENSORY-MOTOR REACTIONS AT DIFFERENT STAGES OF ROWING TRAINING.

The research has been conducted with the aim to reveal the dynamics of psychophysiological indicators at the preparatory and precontest stages of rowing training. The psychophysiological testing included the assessment of simple and complex sensory-motor reactions. The revealed changes of visual-motor reactions (the functional indices of CNS) help to assess rowers' adaptive potential and psycho-functional opportunities in order to correct unfavourable psychic reactions to excess training.

Keywords: visual-motor reactions, adaptation, sport.

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў
на англійскую мову
Я.В. Рубанава

Тэхнічны рэдактар *А.Л. Пазнякоў*
Камп'ютарны набор і вёрстка *А.Л. Пазнякоў*
Карэктар *І.Г. Латушкіна*

Падпісана да друку 14.08.2018 г.
Фармат 70x108^{1/16}. Папера афсетная. Гарнітура Times New Roman.
Ум.-друк. арк. 10,5. Ул.-выд. арк. 11,0. Тыраж 100 экз. Заказ 5315.

Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А.А. Куляшова”, 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства
“Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля”
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/24 ад 12.12.2013 г.
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў