

ISSN 2409-3777



В Е С Н І К

Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта
імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

1 (51)
2018

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонок (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс “Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова” ўключаны ў РІНЦ
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),
ліцэнзійны дагавор № 811–12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

ЗМЕСТ

ГАЛЬМАК А. М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$	4
ЛИПНИЦКИЙ В. А., СЕРГЕЙ А. И., СПИЧЕКОВА Н. В. Динамическое программирование в методе развертки решения третьей проблемы Кэмерона	11
ГАЛЬМАК А. М., РУСАКОВ А. Д. Критерии ассоциативности l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$	22
ЛАМЧАНОВСКАЯ М. В., САКОВИЧ Н. В., ШАМУКОВА Н. В. Двухсторонние оценки для количества точек с алгебраическими координатами в k -мерных кубах малой меры	28
РОМАНОВИЧ Л. А. Инвариантные связности в группоиде Ли $\Pi^k(B)$	35
ЧЕРНОВ С. М. Методика обработки результатов измерений в лабораторной работе “Изучение законов теплового излучения”	43
ОСТРИКОВ О. М. Влияние полипараксилиленовых тонких пленок на особенности пластической деформации при локальном деформировании поверхности аморфных сплавов на основе железа	49
ВАСИЛЕНКО А. Н., ПРИМАК И. У., ХОМЧЕНКО А. В. Оценка остаточных напряжений в стекле на основе анализа рассеянного света	58
ХОМЧЕНКО А. В. Поляризационная интерферометрия напряженных состояний в стекле	66
АКУЛИЧ Н. В., WOO J. E., СОРОКА А. В., СЯХОВИЧ В. Э. Апоптоз кардиомиоцитов: роль эндонуклеаз (экспериментальное исследование)	74
ОСТРОВСКИЙ А. М. О находках <i>Megascolia maculata</i> (Drury, 1773) (Hymenoptera: Scoliidae) на юго-востоке Беларуси	83
ТИХОНЧУК Г. Н., АНДРИЦА С. В. Структура и динамика активности жесткокрылых (coleoptera) насекомых лугов Оршанского района	91

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ В $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$

А. М. ГАЛЬМАК

доктор физико-математических наук

Могилевский государственный университет продовольствия

В статье изучается разрешимость уравнений в полиадическом группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, квазигруппа, группа, подстановка.

1. Введение

Полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ была определена в [1] на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η . Там же было доказано, что если n -арная операция η является ассоциативной, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ также является ассоциативной, то есть если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа. В связи с этим результатом возникает вопрос: *будет ли l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арной квазигруппой, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа?* Актуален также вопрос: *будет ли l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арной группой, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа.*

В некоторых частных случаях получены положительные ответы на эти вопросы. В [2] это сделано для n -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, которая совпадает с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$ при $s = 1, k = n - 1, \sigma = (12 \dots n - 1)$. В [2] это же сделано и для l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, которая является частным случаем ($n = 2$) l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$. Еще ранее Э. Пост получил [3] положительный ответ на сформулированный выше вопрос для двух частных случаев l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$. Первую из этих операций он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. В обоих случаях $l = n, k = n - 1, \sigma = (12 \dots n - 1)$.

В данной статье доказано, что если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная квазигруппа, то есть ответ на первый из поставленных выше вопросов – положительный. Если подстановка σ^{l-1} тождественная, то положительным будет ответ и на второй вопрос, то есть в этом случае свойство “быть полиадической группой” переносится с n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ на l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

2. Предварительные сведения

Информацию, приведенную в этом разделе, можно найти в книгах [2, 4 – 7].

Универсальную алгебру $\langle A, \eta \rangle$ с одной n -арной ($n \geq 2$) операцией $\eta: A^n \rightarrow A$ называют n -арной полугруппой, если операция η ассоциативна, то есть в A для любого $i = 1, 2, \dots, n - 1$ выполняется тождество ассоциативности

$$\eta(\eta(a_1 \dots a_n) a_{n+1} \dots a_{2n-1}) = \eta(a_1 \dots a_i \eta(a_{i+1} \dots a_{i+n}) a_{i+n+1} \dots a_{2n-1}).$$

Универсальную алгебру $\langle A, \eta \rangle$ с одной n -арной ($n \geq 2$) операцией $\eta: A^n \rightarrow A$ называют n -арной квазигруппой, если для всех $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо уравнение

$$\eta(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) = b.$$

Универсальную алгебру $\langle A, \eta \rangle$ с одной n -арной ($n \geq 2$) операцией $\eta: A^n \rightarrow A$ называют n -арной группой, если она является и n -арной полугруппой, и n -арной квазигруппой.

Ясно, что полугруппы (квазигруппы, группы) – это n -арные полугруппы (n -арные квазигруппы, n -арные группы) при $n = 2$.

Замечание 2.1. Исторически n -арные полугруппы и n -арные квазигруппы были определены значительно позже n -арных групп. Поэтому в оригинальном определении n -арной группы, принадлежащем В. Дёрнте [8], отсутствовали n -арные полугруппы и n -арные квазигруппы. В нем говорилось об ассоциативности n -арной операции и однозначной разрешимости соответствующих уравнений.

Замечание 2.2. Э. Пост заметил [3], что: 1) требование однозначной разрешимости уравнений в определении n -арной группы В. Дёрнте можно ослабить, потребовав только их разрешимость; 2) число уравнений можно уменьшить до двух, а при $n = 3$ даже до одного. После Э. Поста и В. Дёрнте было получено большое число новых определений n -арной группы. Со многими из них можно ознакомиться по книге [6]. Приведем здесь только два определения n -арной группы, наиболее интересные, на наш взгляд. В определении, принадлежащем А.Н. Скибе и В.И. Тютину [9], требуется для любых $a, b \in A$ разрешимость в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ либо двух уравнений

$$\eta(\underbrace{xa \dots a}_{n-1}) = b, \quad \eta(\underbrace{a \dots ax}_{n-1}) = b,$$

либо при $n \geq 3$ одного уравнения

$$\eta(\underbrace{a \dots ax}_{i-1} \underbrace{a \dots a}_{n-i}) = b.$$

А.М. Гальмак доказал [6], что n -арную группу можно определить как n -арную полугруппу $\langle A, \eta \rangle$, в которой либо для любых $a, b \in A$ в A разрешимы два уравнения

$$\eta(x_1 \dots x_{n-1} a) = b, \quad \eta(a y_1 \dots y_{n-1}) = b$$

с $n - 1$ неизвестными, либо при $n \geq 3$ для любых $a, b \in A$ в A разрешимо одно уравнение

$$\eta(a x_1 \dots x_{n-2} a) = b$$

с $n - 2$ неизвестными.

Определение 2.1 [1]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n) &= \eta_{1, \sigma, k}((a_{11}, \dots, a_{1k}) \dots (a_{n1}, \dots, a_{nk})) = \\ &= (\eta(a_{11} a_{2\sigma(1)} \dots a_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(a_{1k} a_{2\sigma(k)} \dots a_{n\sigma^{n-1}(k)})), \end{aligned}$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_l) &= \eta_{s, \sigma, k}((a_{11}, \dots, a_{1k}) \dots (a_{l1}, \dots, a_{lk})) = \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{a}_n \dots \mathbf{a}_{2(n-1)} \\ &\eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{a}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{a}_{(s-1)(n-1)} \\ &\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{a}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{a}_{s(n-1)+1})) \dots))). \end{aligned} \quad (2.1)$$

При $s = 1$ l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, \sigma, k}$.

Если в определении 2.1 положить $s = 1$, $k = n - 1$, $\sigma = (12 \dots n - 1)$, то n -арная операция $\eta_{1, \sigma, k}$ совпадает с n -арной операцией $\tilde{\eta}$ из [2].

Ясно, что для любого $t = 1, 2, \dots, s - 1$ равенство (2.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_l) &= \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{a}_n \dots \mathbf{a}_{2(n-1)} \\ &\eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{a}_{(t-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{a}_{t(n-1)} \\ &\eta_{s-t, \sigma, k}(\mathbf{a}_{t(n-1)+1} \dots \mathbf{a}_{s(n-1)+1})) \dots))). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Полагая в (2.2) $t = 1$, получим

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_l) = \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{n-1} \eta_{s-1, \sigma, k}(\mathbf{a}_n \dots \mathbf{a}_{s(n-1)+1})), \quad (2.3)$$

При $t = s - 1$ равенство (2.2) принимает вид (2.1).

Явный вид l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ описывает следующая

Теорема 2.1 [1]. Если

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i &= (a_{i1}, \dots, a_{ik}), \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_l) &= (y_1, \dots, y_k), \end{aligned}$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -я компонента y_j находится по формуле

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(a_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots a_{(2(n-1)\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ &\dots \eta(a_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots a_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)})) \dots))). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Замечание 2.3. Если n -арная операция η ассоциативна, то (2.4) может быть переписано следующим образом:

$$y_j = \eta(a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(a_{1j} a_{2\sigma(j)} \dots a_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Теорема 2.2 [1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.

Замечание 2.4. Равенство (2.3) показывает, что l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является суперпозицией (в смысле [7, с. 9]) n -арной операции $\eta_{1, \sigma, k}$ и операции $\eta_{s-1, \sigma, k}$ имеющей арность $(s-1)(n-1) + 1$.

В обозначениях В.Д. Белоусова равенства (2.1) – (2.3) могут быть переписаны, соответственно, следующим образом:

$$\eta_{s, \sigma, k} = \underbrace{\eta_{1, \sigma, k} + (\dots + (\eta_{1, \sigma, k} + (\eta_{1, \sigma, k} + \eta_{1, \sigma, k}) \dots))}_{s} ;$$

$$\eta_{s, \sigma, k} = \underbrace{\eta_{1, \sigma, k} + (\dots + (\eta_{1, \sigma, k} + (\eta_{1, \sigma, k} + \eta_{s-t, \sigma, k})) \dots)}_t ;$$

$$\eta_{s, \sigma, k} = \eta_{1, \sigma, k} + \eta_{s-1, \sigma, k}.$$

3. Основной результат

Теорема 3.1. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арная квазигруппа.

Доказательство. Пусть вначале $s = 1$, и покажем, что в $\langle A^k, \eta_{1, \sigma, k} \rangle$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ разрешимо уравнение

$$\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{x} \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_n) = \mathbf{b}, \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mk}) \in A^k, m \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\},$$

$$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k), \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k).$$

Так как $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ в $\langle A, \eta \rangle$ разрешимо уравнение

$$\eta(a_{ij} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} y_j a_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots a_{n\sigma^{n-1}(j)}) = b_j \tag{3.2}$$

единственное решение которого обозначим через $a_{\sigma^{i-1}(j)}$: $y_j = a_{\sigma^{i-1}(j)}$. Это возможно, так как при фиксированном значении i упорядоченный набор $\{\sigma^{i-1}(1), \dots, \sigma^{i-1}(k)\}$ – это перестановка множества $\{1, 2, \dots, k\}$.

Полагая $x_j = a_j$, где $j = 1, 2, \dots, k$, видим, что $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ является решением уравнения (3.1).

Допустим, что существует еще одно решение $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ уравнения (3.1), то есть

$$\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{c} \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_n) = \mathbf{b},$$

откуда, согласно определению операции $\eta_{1, \sigma, k}$, имеем

$$\eta(a_{ij} a_{2\sigma(j)} \dots a_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} c_{\sigma^{i-1}(j)} a_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots a_{n\sigma^{n-1}(j)}) = b_j$$

для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, то есть $c_{\sigma^{i-1}(j)}$ – решение уравнения (3.2). Так как $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то $a_{\sigma^{i-1}(j)} = c_{\sigma^{i-1}(j)}$, то есть $a_j = c_j$ для любого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Следовательно, $\mathbf{a} = \mathbf{c}$, то есть уравнение (3.1) разрешимо однозначно.

Предположим, что полиадическая операция $\eta_{s-1, \sigma, k}$ является квазигрупповой и применим индукцию по s .

Так как суперпозиция квазигрупповых операций арности n и m является квазигрупповой операцией арности $n + m - 1$ [7, с. 9], то операция $\eta_{s, \sigma, k}$ являющаяся, согласно замечанию 2.4, суперпозицией квазигрупповых операций $\eta_{1, \sigma, k}$ и $\eta_{s-1, \sigma, k}$ арностей соответственно n и $(s-1)(n-1) + 1$, является квазигрупповой операцией арности $l = s(n-1) + 1$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.1, $n = 2$, получим

Следствие 3.1. Если A – квазигруппа, то $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ l -арная квазигруппа.

Полагая в теореме 3.1 $s = 1$, получим

Следствие 3.2. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то $\langle A^k, \eta_{1, \sigma, k} \rangle$ – n -арная квазигруппа.

Полагая в следствии 3.2 $s = 1, k = n - 1, \sigma = (12 \dots n - 1)$, получим

Следствие 3.3 [2, теорема 5.2.1]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$ – n -арная квазигруппа.

Следующее следствие получается из теоремы 3.1, если в ней положить $n = 3$.

Следствие 3.4. Если $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная квазигруппа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – $(2s + 1)$ -арная квазигруппа.

4. Случай полиадических групп

Теоремы 2.2 и 3.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.1. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арная группа.

Если η – бинарная операция, то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.1 [2, теорема 3.6.2]. Если A – группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ l -арная группа.

Полагая в теореме 4.1 $s = 1$, получим

Следствие 4.2. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{1, \sigma, k} \rangle$ l -арная группа.

Так как для цикла $(12 \dots n - 1) \in S_{n-1}$ верно

$$(12 \dots n - 1)^l = (12 \dots n - 1)^{s(n-1)+1} = (12 \dots n - 1),$$

то, полагая в теореме 4.1 $k = n - 1, \sigma = (12 \dots n - 1)$, получим

Следствие 4.3. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, то $\langle A^{n-1}, \eta_{s, (12 \dots n-1), n-1} \rangle$ l -арная группа.

Если в теореме 4.1 положить $s = 1, k = n - 1, \sigma = (12 \dots n - 1)$ или в следствии 4.3 положить $s = 1$, то получим

Следствие 4.4 [2, теорема 5.4.1]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, то $\langle A^{n-1}, \tilde{\eta} \rangle$ – n -арная группа.

Если подстановка γ удовлетворяет условию $\gamma^l = \gamma$, то для обратной подстановки γ^{-1} верно соответствующее равенство $(\gamma^{-1})^l = \gamma^{-1}$. Поэтому из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.5. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка γ удовлетворяет условию $\gamma^l = \gamma, \sigma = \gamma^{-1}$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арная группа.

Из следствия 4.5 вытекает

Следствие 4.6. Если A – группа, подстановка γ удовлетворяет условию

$$\gamma^l = \gamma, \sigma = \gamma^{-1},$$

то $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ l -арная группа.

Если подстановки $\sigma, \tau \in S_k$ удовлетворяют условию

$$\sigma^l = \sigma, \tau^l = \tau, \sigma\tau = \tau\sigma,$$

то для подстановки $\sigma\tau$ верно соответствующее равенство $(\sigma\tau)^l = \sigma\tau$. Поэтому из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.7. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, σ и τ – подстановки, для которых $\sigma^l = \sigma, \tau^l = \tau, \sigma\tau = \tau\sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, \tau, k} \rangle$ – l -арная группа.

Из следствия 4.7 вытекает

Следствие 4.8. Если A – группа, σ и τ – подстановки, для которых $\sigma^l = \sigma, \tau^l = \tau, \sigma\tau = \tau\sigma$, то $\langle A^k, []_{l, \sigma, \tau, k} \rangle$ – l -арная группа.

Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, то она удовлетворяет и условию $\sigma^l = \sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$. Поэтому теорема 4.1 позволяет сформулировать еще одну теорему.

Теорема 4.2. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Заметим, что следствие 4.3 является частным случаем теоремы 4.2, если в ней положить $k = n - 1, \sigma = (12 \dots n - 1)$.

Замечание 4.1. Подстановка σ из S_k порядка m удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$ тогда и только тогда, когда m делит $l - 1$, то есть тогда и только тогда, когда $l = tm + 1$ для некоторого натурального t .

Напомним, что когда речь идет об l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, то, согласно определению этой операции, всегда $l = s(n - 1) + 1$.

Теорема 4.1 и замечание 4.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.3. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, σ – подстановка из S_k порядка m , m делит $l - 1$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Следствие 4.9. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, σ – цикл длины m из S_k , m делит $l - 1$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Следствие 4.10. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $(12 \dots m) \in S_k$, m делит $l - 1$, то $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ – l -арная группа.

Заметим, что следствие 4.3 вытекает из следствия 4.10 при $m = k = n - 1$.

Считая в теореме 4.3 и следствиях 4.9 и 4.10 η бинарной операцией, получим еще три следствия.

Следствие 4.11. Если A – группа, σ – подстановка из S_k порядка m , m делит $l - 1$, то $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Следствие 4.12. Если A – группа, σ – цикл длины m из S_k , m делит $l - 1$, то $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Следствие 4.13. Если A – группа, $(12 \dots m) \in S_k$, m делит $l - 1$, то $\langle A^k, []_{l, (12 \dots m), k} \rangle$ – l -арная группа.

Следующее следствие получается из теоремы 4.1, если в ней положить $n = 3$.

Следствие 4.14. Если $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – $(2s + 1)$ -арная группа.

Следствие 4.15. Если $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, σ – подстановка из S_k порядка 2, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – $(2s + 1)$ -арная группа.

Следствие 4.16. Если $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, σ – транспозиция из S_k , то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – $(2s + 1)$ -арная группа.

Следствие 4.17. Если $\langle A, \eta \rangle$ – тернарная группа, то $\langle A^k, \eta_{s, (12), k} \rangle$ – $(2s + 1)$ -арная группа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Гальмак, А. М.** О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. **Гальмак, А. М.** Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. **Post, E. L.** Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. **Русаков, С. А.** Алгебраические n -арные системы / С. А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
5. **Гальмак, А. М.** n -Арные группы. Часть 1 / А. М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
6. **Гальмак, А. М.** n -Арные группы. Часть 2 / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
7. **Белоусов, В. Д.** n -Арные квазигруппы / В. Д. Белоусов. – Кишинев : Штиинца, 1972. – 228 с.
8. **Dörnte, W.** Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
9. **Тютин, В. И.** К аксиоматике n -арных групп / В. И. Тютин // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 8. – С. 691–693.

Поступила в редакцию 01.11.2017 г.

Контакты: +375 222 47-79-35 (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A. ON EQUATIONS SOLVABILITY IN $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

The article focuses on the solvability of equation for the polyadic groupoid $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ with the l -nary operation $\eta_{s, \sigma, k}$ which is defined on the Cartesian degree of the A^k n -ary groupoid $\langle A, \eta \rangle$ by substituting the σ set $\{1, \dots, k\}$ and n -ary operation η .

Keywords: polyadic operation, groupoid, quasi-group, group, substitution.

УДК 519.688

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В МЕТОДЕ РАЗВЕРТКИ РЕШЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ ПРОБЛЕМЫ КЭМЕРОНА

В. А. Липницкий

доктор технических наук, профессор
Военная академия Республики Беларусь

А. И. СЕРГЕЙ

аспирант

Гродненский государственный университет имени Я. Купалы

Н. В. СПИЧЕКОВА

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Рассматривается модификация предложенного ранее авторами алгоритма развертки для вычисления количества орбит на множестве бинарных квадратных матриц порядка n , $n \geq 2$, содержащих в точности n единиц, которые образуются под действием квадрата S_n^2 симметрической группы S_n . Предлагаемая модификация алгоритма требует выполнения $O(p(n)n^4)$ арифметических операций, где $p(n)$ – количество неупорядоченных разбиений числа n .

Ключевые слова: бинарная матрица, симметрическая группа, орбита, мощность орбиты, третья проблема Питера Кэмерона, лемма Бёрнсайда, цикленный тип подстановки.

Введение

Матрицы относятся к важнейшим объектам математики [1, 2]. Бинарные (0, 1)-матрицы, то есть матрицы с элементами 0 и 1, нашли широкое применение в дискретной математике, теории графов и теории групп, теории информации и помехоустойчивом кодировании [3–6]. В начале XXI в. английский математик Питер Кэмерон обратил внимание на важность в математике класса P_n квадратных (0, 1)-матриц порядка n , $n \geq 2$, содержащих в точности n единиц, и приступил к их систематическим исследованиям [7–9]. Практически одновременно исследованием этого же класса матриц занялась белорусская школа помехоустойчивого кодирования [10–12]. Результаты проведенных исследований изложены в монографии [13].

Мощность класса P_n стремительно растет с ростом n . Для эффективной работы с этим классом следует выделять в P_n подклассы некоторым достаточно естественным образом. Приложения класса P_n показывают, что наиболее есте-

© Липницкий В. А., 2018

© Сергей А. И., 2018

© Спичекова Н. В., 2018

ственными преобразованиями матриц этого класса являются перестановки строк между собой или же перестановки столбцов между собой. Другими словами, наибольший интерес для пользователей представляют орбиты на множестве P_n , которые образуются под действием группы $G = S_n^2 = S_n \times S_n$ – квадрата симметрической группы S_n .

Группа S_n подстановок на n элементах, являясь старейшим объектом в теории групп, интенсивно исследуется с XVIII в. [14]. Уже в XXI в. Питер Кэмерон привлек внимание исследователей к этой классической области исследования, сформулировав свои 27 проблем в теории подстановок [15]. Третья из них выглядит следующим образом: найти общую формулу или алгоритм вычисления количества орбит α_n , на которые разбивается множество P_n под действием группы $G = S_n^2$.

В знак уважения многогранного вклада Питера Кэмерона в рассматриваемую область в дальнейшем матрицы множества P_n будем называть кэмероновскими.

Одним из возможных подходов к вычислению количества α_n , орбит множества P_n является использование формулы Бёрнсайда, которая применительно к рассматриваемой задаче может быть переписана [16] в виде

$$\alpha_n = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{l=1}^{(n)^2} |Inv(g_l)|. \quad (1)$$

Здесь $|Inv(g)|$ – это количество матриц из множества P_n , инвариантных относительно действия элемента $g \in G = S_n \times S_n$.

Непосредственное применение формулы (1) связано с перебором всех элементов группы $G = S_n^2$ и влечет за собой значительные вычислительные трудности. В [16] для вычисления α_n , предложен алгоритм развертки, который реализует идеи метода динамического программирования [17].

Динамическое программирование – это способ решения сложных задач путем разбиения их на вспомогательные, более простые задачи и последующего объединения решений подзадач в единое общее решение. Оно находит свое применение тогда, когда разные подзадачи используют решения одних и тех же подзадач. В алгоритме динамического программирования каждая подзадача решается только один раз, после чего ответ сохраняется. Это позволяет избежать повторных вычислений каждый раз, когда встречается данная, уже решенная подзадача.

В рамках предлагаемого в [16] алгоритма развертки количество реально вычисляемых слагаемых формулы (1) значительно ниже заявленного числа $(n!)^2$. Сокращение числа перебираемых слагаемых происходит за счет того, что $|Inv(g)|$ оказывается одинаковым для всех подстановок $g = (g_1, g_2) \in S_n^2$, имеющих один и тот же цикленный тип. В случае если известен цикленный тип подстановки g (т. е. последовательность $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ мощностей множеств циклов длиной $i, 1 \leq i \leq n$, в разложении подстановки g), то $|Inv(g)|$ может быть найдено по рекуррентной формуле. Цикленный тип подстановки g определяется по цикленным типам подстановок $g_1, g_2 \in S_n$. Сложность предложенного в [16]

алгоритма составляет $O(p^2(n)n^2 \log(n))$, здесь $p(n)$ – это число неупорядоченных разбиений числа n , т. е. количество способов представить n в виде суммы положительных целых чисел.

Данная работа является развитием идей и методов, изложенных в [16]. Ее целью является построение алгоритма вычисления количества α_n орбит множества P_n , имеющего меньшую вычислительную сложность, чем алгоритм, предложенный в [16].

Линейная развертка бинарных матриц и матричные подстановки.

Пусть $P_{i,j,k}$ – это множество бинарных матриц размера $i \times j$, которые содержат в точности k единиц. Очевидно, что $P_{n,n,n} = P_n$. На $P_{i,j,k}$ действует группа $G_{i,j} = S_i \times S_j$, где S_t – это симметрическая группа из t элементов.

Аналогично [16] для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_j \\ a_{j+1} & a_{j+2} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j(i-1)+1} & a_{j(i-1)+2} & \dots & a_j \end{pmatrix} \in P_{i,j,k}$$

легко построить ее линейную развертку – представить матрицу A в виде одной вектор-строки $\bar{x}_A = (a_1, a_2, \dots, a_j)$ из векторного пространства размерностью ij .

Возьмем произвольный элемент $g \in G_{i,j} = S_i \times S_j$. Тогда

$$g(A) = \begin{pmatrix} a_{m_1} & a_{m_2} & \dots & a_{m_j} \\ a_{m_{j+1}} & a_{m_{j+2}} & \dots & a_{m_{2j}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_{j(i-1)+1}} & a_{m_{j(i-1)+2}} & \dots & a_{m_j} \end{pmatrix} \in P_{i,j,k}$$

и элементу g можно поставить в соответствие подстановку

$$h(g) = \begin{pmatrix} \dots & m_1 & \dots & m_2 & \dots & m_{ij} & \dots \\ \dots & 1 & \dots & 2 & \dots & ij & \dots \end{pmatrix} \in S_i \times S_j. \tag{2}$$

Как и в [16], подстановку $h(g)$, задаваемую формулой (2), будем называть матричной подстановкой, построенной по элементу g . Любая матричная подстановка может быть представлена в виде произведения независимых циклов:

$$h(g) = C_1 C_2 \dots C_\alpha. \tag{3}$$

Свойства матричных подстановок для элементов из $G_{i,j}$ аналогичны подробно обсуждаемым в [16] свойствам матричных подстановок для элементов из множества $G = S_n \times S_n$. Сформулируем здесь только два предложения, которые понадобятся в дальнейшем.

Предложение 1. Пусть в разложении (3) присутствуют все циклы, то есть и циклы длиной 1. Тогда:

1) если l_i – длина цикла C_i , $1 \leq i \leq \alpha$, то $l_1 + l_2 + \dots + l_k = j$;

2) следовательно, для всякой матрицы $A \in P_{i,j,k}$ каждая координата вектора $\bar{x}_A = (a_1, a_2, \dots, a_j)$ принадлежит своему циклу C_i , $1 \leq i \leq \alpha$;

3) матрица $A \in P_{i,j,k}$ принадлежит $\text{Inv}(g)$ в том и только том случае, когда элементы матрицы A , соответствующие отдельному циклу C_j , $1 \leq i \leq \alpha$, равны между собой, т. е. либо все равны 0, либо все равны 1.

4) пусть матрица $A \in P_{i,j,k}$ принадлежит $\text{Inv}(g)$ а единицы этой матрицы принадлежат только циклам с номерами i_1, i_2, \dots, i_s ; в таком случае $l_{i_1} + l_{i_2} + \dots + l_{i_s} = k$.

Пусть $A \in P_{i,j,k}$, $g = (g_1, g_2) \in S_i \times S_j$ и $g_i = C_1^{g_i} \dots C_{k_i}^{g_i}$, $i = 1, 2$, – разложение g_i в произведение независимых циклов, содержащее в том числе и циклы длиной 1. Через $|C_i^{g_i}|$ будем обозначать длину цикла $C_i^{g_i}$.

Предложение 2. Пусть в разложении (3) матричной подстановки $h(g)$ в произведение независимых циклов присутствуют все циклы, то есть и циклы длиной 1. Тогда:

1) индексы элементов матрицы A , которые расположены на пересечении строк и столбцов, входящих в циклы $C_i^{g_1}$ и $C_j^{g_2}$, будут образовывать $\text{НОД}(|C_i^{g_1}|, |C_j^{g_2}|)$ циклов в разложении (3);

2) длина каждого цикла равна $\text{НОК}(|C_i^{g_1}|, |C_j^{g_2}|)$.

Формулировка и доказательства предложений 1 и 2 аналогичны формулировкам и доказательствам предложений 2 и 4 из [16].

Вычислим количество неподвижных точек для подстановок специального вида.

Пусть $g = (g_1, g_2) \in S_i \times S_j$, $g_1 = C_1^1 C_2^1 \dots C_s^1$, $g_2 = C_1^2$ – разложения g_1 и g_2 в произведение независимых циклов, содержащие в том числе и циклы длиной 1. Зафиксируем порядок следования циклов в разложении подстановки g_1 . Через $t_{g,i,j,k}$ условимся обозначать количество матриц из множества $P_{i,j,k}$, являющихся неподвижными точками для подстановки g , т. е. $t_{g,i,j,k} = |\text{Inv}(g)|$. Условимся считать, что $t_{g,0,j,0} = 1$. Из предложения 1 следует, что $t_{g,i,j,k}$ – это число способов, которыми можно выбрать циклы $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_s}$ из разложения (3) так, чтобы суммарная длина этих циклов равнялась k .

Предложение 3. Справедлива следующая рекуррентная формула:

$$t_{g,i,j,k} = \sum_{\substack{l \\ k \geq l \cdot \text{НОК}(|C_s^1|, |C_1^2|)}} C^l \text{НОД}(|C_s^1|, |C_1^2|) t_{\tilde{g}, i - |C_s^1|, j, k - l \cdot \text{НОК}(|C_s^1|, |C_1^2|)}, \quad (4)$$

где $|C_u^v|$ – длина цикла C_u^v , $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, g_2) \in S_{i-|C_s^1|} \times S_j$, $\tilde{g}_1 = C_1^1 C_2^1 \dots C_{s-1}^1$.

Доказательство. Пусть в разложении (3) матричной подстановки $h(g)$ в произведение независимых циклов присутствуют все циклы, в том числе и циклы длиной 1. Пусть матрица $A \in Inv(g)$. Из предложения 1 следует, что элементы матрицы A , соответствующие любому из циклов разложения (3), равны 0 или 1. Индексы элементов матрицы A , которые стоят на пересечении строк и столбцов, входящих в циклы C_s^1 и C_1^2 , в соответствии с предложением 2 образуют $НОД(|C_s^1|, |C_1^2|)$ циклов разложения (3), каждый цикл имеет длину $НОК(|C_s^1|, |C_1^2|)$. Пусть элементы матрицы A , соответствующие l из этих циклов, равны 1. Существует $C_{НОД(|C_s^1|, |C_1^2|)}^l$ способов выбрать эти циклы.

Из циклов разложения (3) удалим циклы, которые соответствуют элементам матрицы A , расположенным на пересечении строк и столбцов из C_s^1 и C_1^2 . Оставшиеся циклы $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \dots, C_{\alpha_k}$ образуют подстановку $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, g_2) \in S_{i-|C_s^1|} \times S_j$, $\tilde{g}_1 = C_1^1 C_2^1 \dots C_{s-1}^1$. Среди элементов матрицы A , соответствующих этим циклам, имеется $k - l \cdot НОК(|C_s^1|, |C_1^2|)$ единиц. Существует $t_{\tilde{g}, i-|C_s^1|, j, k-l \cdot НОК(|C_s^1|, |C_1^2|)}$ способов выбрать из $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \dots, C_{\alpha_k}$ циклы $C_{\beta_1}, C_{\beta_2}, \dots, C_{\beta_k}$ так, чтобы их суммарная длина была равна $k - l \cdot НОК(|C_s^1|, |C_1^2|)$.

Так как выбор l циклов, соответствующих элементам матрицы A , стоящим на пересечении строк и столбцов, входящих в C_s^1 и C_1^2 , и циклов $C_{\beta_1}, C_{\beta_2}, \dots, C_{\beta_k}$ не зависит друг от друга, то существует $A_l = C_{НОД(|C_s^1|, |C_1^2|)}^l t_{\tilde{g}, i-|C_s^1|, j, k-l \cdot НОК(|C_s^1|, |C_1^2|)}$ вариантов такого выбора. Для нахождения $t_{g, i, j, k}$ необходимо просуммировать A_l по всем допустимым l . Понятно, что имеет смысл рассматривать только те l , для которых $k - l \cdot НОК(|C_s^1|, |C_1^2|) \geq 0$. Доказательство завершено.

Алгоритм вычисления мощности $|Inv(g)|$ для матричных подстановок

Обозначим через $P_n(i, j)$ множество бинарных матриц размера $n \times i$, которые содержат в точности j единиц. Очевидно, что $P_n(i, j) = P_{n, i, j}$ и $P_n(n, n) = P_n$. На $P_n(i, j)$ действует группа $G_i = S_n \times S_i$.

Зафиксируем натуральное число $k \leq i$, подстановку $g \in S_n$ и порядок следования множителей в ее разложении $g = C_1^g C_2^g \dots C_v^g$ в произведение независимых циклов.

Рассмотрим множество $H_{g, i, k} = \{(g, h_k) | h_k \in S_i\} \subset G_i = S_n \times S_i$, где h_k из S_i удовлетворяет следующему условию: в разложении h_k в произведение независимых циклов число i входит в цикл длины k .

Пусть $h_{g, i, k} = (g, h_k) \in H_{g, i, k}$ и

$$h_k = C_1^{h_k} C_2^{h_k} \dots C_{\mu_{h_k}}^{h_k} \quad (5)$$

это разложения подстановки $h_k \in S_i$ в произведение независимых циклов, содержащее в том числе и все циклы длины 1. Далее будем считать, что в разложении (5) подстановки h_k множители упорядочены так, что число i входит в цикл $C_1^{h_k}$ длины k , т. е. $C_1^{h_k} = (h_1^{h_k}, h_2^{h_k}, \dots, h_{k-1}^{h_k}, i)$, где $h_1^{h_k}, h_2^{h_k}, \dots, h_{k-1}^{h_k}, i$ – некоторые натуральные числа, не превосходящие i . В дальнейшем элемент $h_{g,i,k}$ также будем записывать в виде $(C_1^g C_2^g \dots C_v^g, C_1^{h_k} C_2^{h_k} \dots C_{\mu_{h_k}}^{h_k})$.

Пусть

$$f_{g,i,j} = \sum_{h_{g,i,k} \in \bigcup_{k=1}^i H_{g,i,k}} |Inv(h_{g,i,k})|. \quad (6)$$

Будем считать, что $f_{g,0,0} = 1$. $f_{g,i,j}$ равно числу матриц из множества $P_n(i, j)$ которые являются неподвижными точками для подстановок из множества

$$H_{g,i} = \bigcup_{k=1}^i H_{g,i,k}.$$

Предложение 4. *Справедлива следующая рекуррентная формула:*

$$f_{g,i,j} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=0}^j A_{i-1}^{k-1} f_{g,i-k,j-l} t_{\tilde{g},n,k,l}, \quad (7)$$

где $t_{\tilde{g},n,k,l}$ равно количеству матриц из множества $P_{n,k,l}$, являющихся неподвижными точками для подстановки $\tilde{g} = (g, C^{h_k}) = (C_1^g C_2^g \dots C_v^g, C^{h_k}) \in S_n \times S_k$, где $C^{h_k} = (1, 2, \dots, k-1, k)$ – цикл длины k , и может быть найдено по формуле (4).

Доказательство. Из формулы (6) легко следует, что $f_{g,i,j} = \sum_{k=1}^i \sum_{h_{g,i,k} \in H_{g,i,k}} |Inv(h_{g,i,k})|$.

Пусть $h_{g,i,k} = (g, h_k) \in H_{g,i,k}$, $A_{g,i,k} \in Inv(h_{g,i,k})$ и (5) – это разложение h_k в произведение независимых циклов. В столбцах матрицы $A_{g,i,k}$ с номерами $h_1^{h_k}, h_2^{h_k}, \dots, h_{k-1}^{h_k}, i$, которые образуют цикл $C_1^{h_k}$, может содержаться от 0 до j единиц. Тогда множество $\bigcup_{h_{g,i,k} \in H_{g,i,k}} Inv(h_{g,i,k})$ может быть представлено в виде прямого объединения $j+1$ непересекающихся множеств $\bigcup_{h_{g,i,k} \in H_{g,i,k}} Inv(h_{g,i,k}) = \bigcup_{l=0}^j A_{h_{g,i,k}}^l$. При этом множество $A_{h_{g,i,k}}^l$ состоит из матриц $\tilde{A}_{h_{g,i,k}}^l$, удовлетворяющих следующим

двум условиям: 1) $\tilde{A}_{h_{g,i,k}}^l$ является неподвижной точкой для некоторого элемента $(C_1^g C_2^g \dots C_v^g, C_1^{h_k} C_2^{h_k} \dots C_{\mu}^{h_k}) \in H_{g,i,k}$, где $C_1^{h_k} = (h_1^{h_k}, h_2^{h_k}, \dots, h_{k-1}^{h_k}, i)$ – цикл длины k ; 2) столбцы матрицы $\tilde{A}_{h_{g,i,k}}^l$, номера которых образуют цикл $C_1^{h_k}$, содержат в точности l единиц. Поэтому

$$f_{g,i,j} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=0}^j |A_{h_{g,i,k}}^l|.$$

Зафиксируем k и l . Вычислим $\left| A_{h_{g,i,k}}^l \right|$. Для этого найдем количество способов, которыми можно сформировать матрицу $A_{h_{g,i,k}}^l$, удовлетворяющую условиям 1) и 2).

Рассмотрим цикл $C_1^{h_k} = (h_1^{h_k}, h_2^{h_k}, \dots, h_{k-1}^{h_k}, i)$. $C_1^{h_k}$ содержит число i . Остальные $k-1$ элемент этого цикла можно выбрать A_{i-1}^{k-1} способом, где A_n^k – это число размещений из n элементов по k . Зафиксируем цикл $C_1^{h_k} = \tilde{C}_1^{h_k}$ и рассмотрим множество подстановок

$$h_{g,i,k} = (g, h_k) = (C_1^g C_2^g \dots C_v^g, \tilde{C}_1^{h_k} C_2^{h_k} \dots C_{\mu_{h_k}}^{h_k}) \in H_{g,i,k}. \quad (8)$$

Пусть матрица $\tilde{A}_{h_{g,i,k}}^l$ является неподвижной точкой для подстановки $\tilde{h}_{g,i,k}$ вида (8). В столбцах этой матрицы, отличных от столбцов, номера которых образуют цикл $\tilde{C}_1^{h_k}$, размещается $j-l$ единиц. Количество таких столбцов равно $i-k$.

При вычислении $\tilde{h}_{g,i,k}(\tilde{A}_{h_{g,i,k}}^l)$ столбцы, входящие в циклы $\tilde{C}_1^{h_k}, C_2^{h_k}, \dots, C_{\mu_{h_k}}^{h_k}$, переставляются независимо друг от друга. Поэтому матрицу $\tilde{A}_{h_{g,i,k}}^l$ можно строить так: разместить вначале l единиц в столбцах, номера которых входят в цикл $\tilde{C}_1^{h_k}$ так, чтобы при перестановке столбцов в соответствии с циклом $\tilde{C}_1^{h_k}$ и строк в соответствии с подстановкой g результирующая матрица не изменялась. Количество таких возможных размещений равно количеству $t_{\tilde{g},n,k,l}$ матриц из множества $P_{n,k,l}$, являющихся неподвижными точками для подстановки $\tilde{g} = (g, C^{h_k}) = (C_1^g C_2^g \dots C_v^g, C^{h_k}) \in S_n \times S_k$, где $C^{h_k} = (1, 2, \dots, k-1, k)$ – цикл длины k . После расстановки l единиц в столбцах, которые образуют цикл $\tilde{C}_1^{h_k}$, нужно разместить $j-l$ единиц в $i-k$ столбцах, номера которых входят в циклы $C_2^{h_k}, \dots, C_{\mu_{h_k}}^{h_k}$, так, чтобы результирующая матрица не изменялась при перестановке столбцов в соответствии с циклами $C_2^{h_k}, \dots, C_{\mu_{h_k}}^{h_k}$, и строк в соответствии с подстановкой g . Количество таких размещений равно $f_{g,i-k,j-l}$. Поэтому для подстановок вида (8) имеется $f_{g,i-k,j-l} t_{\tilde{g},n,k,l}$ неподвижных точек.

Следовательно, $\left| A_{h_{g,i,k}}^l \right| = A_{i-1}^{k-1} f_{g,i-k,j-l} t_{\tilde{g},n,k,l}$ и $f_{g,i,j} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=0}^j A_{i-1}^{k-1} f_{g,i-k,j-l} t_{\tilde{g},n,k,l}$. Доказательство завершено.

Предложение 5. Вычисление $f_{g,n,n}$ по формуле (7) требует выполнения $O(n^4)$ операций.

Доказательство. Вычисление $f_{g,n,n}$ по формуле (7) требует нахождения величин $f_{g,i,j}$ и $t_{\tilde{g},i,j,k}$, каждой величины – по $O(n^2)$ значений. Использование формулы (7) требует выполнения $O(n^2)$ операций сложения и умножения для нахождения каждого $f_{g,i,j}$. Использование формулы (4) для нахождения $t_{\tilde{g},i,j,k}$ предполагает вычисление $O(n^3)$ величин $t_{\tilde{g},\alpha,\beta,\gamma}$ и требует $O(n)$ операций сложения. Следовательно, вычисление $f_{g,n,n}$ по формуле (7) требует выполнения $O(n^4)$ операций. Доказательство завершено.

Следствие. Количество орбит множества P_n может быть найдено за $O(p(n)n^4)$ операций.

Доказательство. Пусть p_i – это разбиение числа n . p_i задает цикленный тип подстановки $g_i \in S_n$. Зная цикленный тип подстановки g_i , по формуле (7) можно вычислить $f_{g_i, n, n}$ – количество матриц из множества $P_n(n, n) = P_n$, являющихся неподвижными точками для подстановок из множества

$$H_{g_i, n} = \bigcup_{k=1}^n H_{g_i, n, k} = \{(g_i, h_k) | h_k \in S_n\} \subset G = S_n \times S_n. \text{ Тогда формулу (1) для вычисления числа } \alpha_n \text{ орбит множества } P_n \text{ можно переписать так:}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{g \in S_n} f_{g, n, n}. \quad (9)$$

Если $g_i \in S_n$ и $g_j \in S_n$ – подстановки одного цикленного типа, то в силу предложения 5 из [16] подстановки $(g_i, h) \in S_n \times S_n$ и $(g_j, h) \in S_n \times S_n$ также являются подстановками одного цикленного типа, и поэтому $f_{g_i, n, n} = f_{g_j, n, n}$. Если k_{p_i} – это количество подстановок множества S_n , имеющих такой же цикленный тип, как и подстановка g_i , то, учитывая что в S_n количество различных цикленных типов подстановок совпадает с $p(n)$ (9) можно переписать так:

$$\alpha_n = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{i=1}^{p(n)} f_{g_i, n, n} k_{p_i}. \quad (10)$$

Так как, в соответствии с предложением 2, вычисление $f_{g, n, n}$ требует выполнения $O(n^4)$ операций и сумма в правой части формулы (10) содержит $p(n)$ слагаемых, то количество α_n орбит множества P_n требует выполнения $O(p(n)n^4)$ операций. Доказательство завершено.

Алгоритм развертки по вычислению количества орбит множества P_n , представленного в [16], требует выполнения $O(p_1)$ $p_1 = p^2(n)n^2 \log(n)$ арифметических операций. Алгоритм нахождения числа орбит множества P_n , предлагаемый в данной работе, предполагает выполнение $O(p_2)$, $p_2 = p(n)n^4$, арифметических операций. В следующей таблице представлены p_1 и p_2 при различных значениях n . При вычислении p_1 основание логарифма бралось равным 2.

n	p_1	p_2	p_1 / p_2
10	585988	420000	1.39521
50	$5.88489 \cdot 10^{14}$	$1.27641 \cdot 10^{12}$	461.049
10^2	$2.41283 \cdot 10^{21}$	$1.90569 \cdot 10^{16}$	126611
10^3	$5.76973 \cdot 10^{69}$	$2.40615 \cdot 10^{43}$	$2.39791 \cdot 10^{26}$
10^4	$1.73813 \cdot 10^{222}$	$3.61673 \cdot 10^{122}$	$4.8058 \cdot 10^{99}$
10^5	$1.255511301760969 \cdot 10^{704}$	$2.749351056977570 \cdot 10^{366}$	$4.56657325944103 \cdot 10^{337}$
10^6	$4.316892130888775 \cdot 10^{2227}$	$1.471684986358223 \cdot 10^{1131}$	$2.933299021804384 \cdot 10^{1096}$

Из таблицы следует, что, начиная с $n \geq 10^3$ предлагаемый в данной работе алгоритм дает довольно значительный выигрыш в количестве операций, которые необходимо выполнить при вычислении количества орбит множества P_n .

Пример. Вычислим α_n при $n = 4$. Для числа 4 существует пять разбиений: $p_1 = \{1,1,1,1\}$, $p_2 = \{2,1,1\}$, $p_3 = \{2,2\}$, $p_4 = \{3,1\}$, $p_5 = \{4\}$. Пусть цикленный тип подстановки $g_i \in S_4, i = 1,2,3,4,5$ задается множеством p_i . Для определенности будем считать, что $g_1 = (1)(2)(3)(4)$, $g_2 = (12)(3)(4)$, $g_3 = (12)(34)$, $g_4 = (123)(4)$, $g_5 = (1234)$. В соответствии с предложением 7 из [16], если в под-

становке из n элементов имеется c_i циклов длины $l_i, i = \overline{1, k}$, то количество подстановок такого же цикленного типа равно $n! \prod_{i=1}^k (c_i! l_i^{c_i})^{-1}$. Поэтому количество $k_{p_i}, i = 1,2,3,4,5$ подстановок множества S_4 , имеющих такой же цикленный

тип, как подстановка g_i , будет равно $k_{p_1} = \frac{4!}{4! \cdot 1^4} = 1$, $k_{p_2} = \frac{4!}{2! \cdot 1^2 \cdot 1! \cdot 2^1} = 6$, $k_{p_3} = \frac{4!}{2! \cdot 2^2} = 3$, $k_{p_4} = \frac{4!}{1! \cdot 1^2 \cdot 1! \cdot 3^1} = 8$, $k_{p_5} = \frac{4!}{1! \cdot 4^1} = 6$. Используя формулы (4)

и (7), найдем $f_{g_1,4,4} = 3192$, $f_{g_2,4,4} = 648$, $f_{g_3,4,4} = 312$, $f_{g_4,4,4} = 96$, $f_{g_5,4,4} = 72$. Применим формулу (10) для вычисления α_4 :

$$\alpha_4 = \frac{1}{(4!)^2} (3192 \cdot 1 + 648 \cdot 6 + 312 \cdot 3 + 96 \cdot 8 + 72 \cdot 6) = 16.$$

Полученное значение α_4 совпадает с четвертым членом последовательности A049311 [18].

Код программы на языке Python для вычисления α_n при различных n доступен по ссылке <https://github.com/NuM314/thesis-codes/tree/master/solution-pn-n4>.

Заключение

В работе рассматривается модификация предложенного ранее авторами алгоритма развертки для подсчета количества орбит α_n , на которые разбивается множество P_n квадратных $(0,1)$ -матриц под действием квадрата S_n^2 симметрической группы S_n . Предлагаемая модификация алгоритма имеет вычислительную сложность $O(p(n)n^4)$, в то время как вычислительная сложность исходного алгоритма составляет $O(p^2(n)n^2 \log(n))$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Кострикин, А. И.** Введение в алгебру / А. И. Кострикин. – Москва : Наука, 1977. – 496 с.
2. **Липницкий, В. А.** Высшая математика. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / В. А. Липницкий. – Минск : ВА РБ, 2015. – 229 с.

3. **Яблонский, С. В.** Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – Москва : Наука, 1986. – 384 с.
4. **Оре, О.** Теория графов / О. Оре. – Москва : Наука, 1980. – 336 с.
5. **Самсонов, Б. Б.** Теория информации и кодирование / Б. Б. Самсонов, Е. М. Плохов, А. И. Филоненков, Т. В. Кречет. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2002. – 288 с.
6. **Мак-Вильямс, Ф. Дж.** Теория кодов, исправляющих ошибки / Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн. – Москва : Связь, 1979. – 744 с.
7. **Cameron, P. J.** Sequences realized by oligomorphic permutation groups / P. J. Cameron // Integer Sequences, 2000. – Vol. 3(1). – Article 00.1.5. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL3/groups.html>. – Дата доступа: 07.02.2017.
8. **Cameron, P. J.** Asymptotics for incidence matrix classes / P. J. Cameron, T. Prellberg, D. Stark // The Electronic Journal of Combinatorics, 2006. – Vol. 13.1. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v13i1r85/pdf>. – Дата доступа: 07.02.2017.
9. **Cameron, P. J.** Product action / P. J. Cameron, D. A. Gewurz, F. Merola // Discrete Math., 2008. – No. 308. – Pp. 386–394.
10. **Конопелько, В. К.** Классификация векторов-ошибок при двумерном кодировании информации / В. К. Конопелько, О. Г. Смолякова // Доклады БГУИР, 2008. – № 7(37). – С. 19–28.
11. **Конопелько, В. К.** Действие квадрата симметрической группы на специальном классе $(0;1)$ -матриц. Отсутствие полных орбит / В. К. Конопелько, В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова // Доклады БГУИР, 2010. – № 5(54). – С. 40–46.
12. **Конопелько, В. К.** Классификация точечных образов и классическая проблема разбиения чисел / В. К. Конопелько, В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова // Доклады БГУИР, 2010. – № 8(57). – С. 127–154.
13. **Цветков, В. Ю.** Предсказание, распознавание и формирование образов многокурсных изображений с подвижных объектов / В. Ю. Цветков, В. К. Конопелько, В. А. Липницкий. – Минск : Издательский центр БГУ, 2014. – 224 с.
14. **Супруненко, Д. А.** Группы подстановок / Д. А. Супруненко. – Минск : Навука і тэхніка, 1996. – 368 с.
15. **Cameron, P. J.** Problems on permutation groups / P. J. Cameron. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/pgprob.html>. – Дата доступа: 07.02.2017.
16. **Липницкий, В. А.** Алгоритм развертки при подсчете количества S_n^2 -орбит кэмеровских матриц / В. А. Липницкий, А. И. Сергей, Н. В. Спичекова // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. – 2017. – № 2(50). – С. 23–37.
17. **Кормен, Т. Х.** Алгоритмы: построение и анализ / Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Риверст, К. Штайн. – Москва : ООО “И. Д. Вильямс”, 2013. – 1328 с.
18. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://oeis.org/>. – Дата доступа: 07.02.2017.

Поступила в редакцию 08.11.2017 г.

Контакты: valipnitski@yandex.ru (Липницкий Валерий Антонович)

Lipnitski V., Sergey A., Spichekova N. DYNAMIC PROGRAMMING IN UNWINDING ALGORITHM TO SOLVE THE THIRD CAMERON’S PROBLEM.

In the article a modification of the unwinding algorithm that was previously offered by the authors is constructed. The unwinding algorithm is designed to calculate number of orbits in the set of binary square matrices of the order n , $n \geq 2$, with n ones that are formed under the action of square S_n^2 of the symmetric group S_n . The algorithm proposed in this paper requires $O(p(n)n^4)$ of arithmetic operations where $p(n)$ equals to number of unordered partitions of n .

Keywords: binary matrix, symmetric group, orbit, orbit cardinality, the third Peter Cameron's problem, Burnside's lemma, orbital type of a substitution.

УДК 512.548

КРИТЕРИИ АССОЦИАТИВНОСТИ l-АРНОЙ ОПЕРАЦИИ $\eta_{s, \sigma, k}$

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук

Могилевский государственный университет продовольствия

А. Д. Русаков

аспирант

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

В данной статье получены новые критерии ассоциативности операции $\eta_{s, \sigma, k}$ для некоторых конкретных подстановок.

Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, полугруппа, группа, ассоциативность.

1. Введение

Полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ была определена в [1] следующим образом. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, σ – подстановка из S_k . Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11} x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k} x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \end{aligned}$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)})) \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)})) \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1} \dots)). \end{aligned}$$

При $s = 1$ l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, \sigma, k}$.

Если в определении операции $\eta_{s, \sigma, k}$ положить $n = 2$, то получим определение l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [2] на k -й декартовой степени A^k полугруппы A . Изучению операции $[\]_{l, \sigma, k}$ и некоторых ее обобщений посвящена книга [3]. При

$$k = m - 1, l = m, \sigma = (12 \dots m - 1), A = S_m$$

операция $[\]_{l, \sigma, k}$ совпадает с m -арной операцией Э. Поста, определенной в [4] на декартовой степени S_n^{m-1} симметрической группы S_n , а при $A = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ и тех же k , l и σ операция $[\]_{l, \sigma, k}$ совпадает с m -арной операцией Э. Поста, определенной в [4] на декартовой степени $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathbb{C})$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Таким

© Гальмак А.М., 2018

© Русаков А.Д., 2018

образом, и операция $[]_{l, \sigma, k}$ и обе отмеченные операции Э. Поста являются частными случаями операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

В [1] доказано, что если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ также является ассоциативной. Для n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$, содержащей более одного элемента и обладающей левой нейтральной последовательностью, верно обратное утверждение [5], то есть в этом случае ассоциативность операции $\eta_{s, \sigma, k}$ равносильна тождественности подстановки σ^{l-1} .

В данной статье получены новые критерии ассоциативности операции $\eta_{s, \sigma, k}$ для некоторых конкретных подстановок (в частности для циклических подстановок). Следствиями новых критериев являются критерии ассоциативности операции $[]_{l, \sigma, k}$ из [6].

2. Предварительные сведения

Напомним, что n -арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют ассоциативной, если в нем выполняется каждое из следующих $n - 1$ тождеств

$$[[x_1 \dots x_n]_{x_{n+1} \dots x_{2n-1}}] = [x_1[x_2 \dots x_{n+1}]_{x_{n+2} \dots x_{2n-1}}],$$

$$[[x_1 \dots x_n]_{x_{n+1} \dots x_{2n-1}}] = [x_1x_2[x_3 \dots x_{n+2}]_{x_{n+3} \dots x_{2n-1}}],$$

.....

$$[[x_1 \dots x_n]_{x_{n+1} \dots x_{2n-1}}] = [x_1 \dots x_{n-2}[x_{n-1} \dots x_{2n-2}]_{x_{2n-1}}],$$

$$[[x_1 \dots x_n]_{x_{n+1} \dots x_{2n-1}}] = [x_1 \dots x_{n-1}[x_n \dots x_{2n-1}]].$$

Если в $\langle A, \eta \rangle$ выполняется только последнее тождество, то n -арную операцию η называют полуассоциативной.

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его левой (правой) нейтральной последовательностью, если

$$\eta(e_1 \dots e_{n-1}x) = x \quad (\eta(xe_1 \dots e_{n-1}) = x)$$

для любого $x \in A$.

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его нейтральной последовательностью, если она является и левой нейтральной, и правой нейтральной.

Элемент e n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его единицей, если для любого $x \in A$ верно

$$\eta(\underbrace{xe \dots e}_{n-1}) = \eta(\underbrace{exe \dots e}_{n-2}) = \dots = \eta(\underbrace{e \dots exe}_{n-2}) = \eta(\underbrace{e \dots ex}_{n-1}) = x.$$

$$\text{Если } \underbrace{\eta(e \dots ex)}_{n-1} = x$$

для любого $x \in A$, то элемент e называют левой единицей n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$.

Теорема 2.1 [1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.

Теорема 2.2 [5]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, содержащая более одного элемента и обладающая левой нейтральной последовательностью; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

3. Основные результаты

Теорема 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, содержащая более одного элемента и обладающая левой нейтральной последовательностью; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{td + 1 \mid t = 1, 2, \dots, \}; \quad (3.1)$$

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{td + r \mid t = 0, 1, 2, \dots, ; r = 2, \dots, d\}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Множество всех натуральных чисел $l \geq 2$ может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся подмножеств, присутствующих в (3.1) и (3.2).

Так как подстановка σ имеет порядок d , то для всех l из (3.1) верно равенство $\sigma^l = \sigma$, а для всех l из (3.2) верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$.

1) Пусть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной, и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (3.1). Тогда l принадлежит множеству из (3.2) и верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 2.2 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ – неассоциативна, что противоречит ее ассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (3.1), то верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 2.1 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной.

2) Пусть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной, и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (3.2). Тогда l принадлежит множеству из (3.1) и верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 2.1 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ – ассоциативна, что противоречит ее неассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (3.2), то верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 2.2 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной. Теорема доказана.

Заметим, что в доказательстве теоремы 3.1 вместо теоремы 2.1 может быть использована и теорема 2.2.

В качестве подстановки σ в теореме 3.1 можно взять любую подстановку из S_k , представимую в виде произведения независимых циклов, длина каждого из которых равна d , в частности, любой цикл длины d из S_k ($d \leq k$). Так как любой цикл длины k из S_k имеет порядок k , то из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, содержащая более одного элемента и обладающая левой нейтральной последовательностью; σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{tk + 1 \mid t = 1, 2, \dots, \}; \quad (3.3)$$

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{tk + r \mid t = 0, 1, 2, \dots; r = 2, \dots, k\}. \quad (3.4)$$

Полагая в следствии 2.1 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, содержащая более одного элемента и обладающая левой нейтральной последовательностью. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.4).

Следующая теорема получается из теоремы 3.1, если в ней n -арную полугруппу заменить n -арной группой.

Теорема 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.1);

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.2).

Следующие два следствия могут быть извлечены как из теоремы 3.2, так и из следствий 3.1 и 3.2 соответственно.

Следствие 3.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, содержащая более одного элемента; σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.4).

Следствие 3.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, содержащая более одного элемента. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.4).

Сформулируем еще три следствия из теоремы 3.1.

Следствие 3.5. Пусть A – n -арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.1);

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.2).

Следствие 3.6. Пусть A – n -арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента; σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.4).

Следствие 3.7. Пусть A – n -арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.4).

Если в (3.1) и (3.2) положить $d = 2$, то множество всех l в (3.1) совпадает с множеством всех нечетных чисел без единицы, а множество всех l в (3.2) совпадает с множеством всех четных чисел. Если при этом учесть, что порядок любой транспозиции равен двум, то из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.8. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, содержащая более одного элемента и обладающая левой нейтральной последовательностью; σ – транспозиция из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное.

Аналогично из теоремы 3.2 или из следствия 3.8 вытекает

Следствие 3.9. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, содержащая более одного элемента; σ – транспозиция из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное.

Из следствия 3.8 вытекает также

Следствие 3.10. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента; σ – транспозиция из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное.

Полагая в следствиях 3.8 – 3.10 $\sigma = (12)$, получим еще три следствия.

Следствие 3.11. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, содержащая более одного элемента и обладающая левой нейтральной последовательностью. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное.

Следствие 3.12. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, содержащая более одного элемента. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное.

Следствие 3.13. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное.

Замечание 3.1. Если во всех утверждениях этого раздела положить $n = 2$, то получим новые утверждения, отличающиеся от прежних только тем, что в них вместо операции $\eta_{s, \sigma, k}$ будет присутствовать операция $[\]_{l, \sigma, k}$. Например, теоремам 3.1 и 3.2 соответствуют следующие два следствия.

Следствие 3.14 [6]. Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента, σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.1);

2) l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.2).

Следствие 3.15. Пусть A – группа, содержащая более одного элемента, σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.1);

2) l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (3.2).

Замечание 3.2. Понятно, что утверждения этого раздела останутся верными, если в них левую нейтральную последовательность заменить нейтральной последовательностью, а левую единицу – единицей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Гальмак, А. М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Гальмак, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. Русаков, А. Д. О неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ / А. Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1. – С. 68–72.
6. Гальмак, А. М. Об ассоциативности полиадических группоидов / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. Серыя, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2017. – № 1. – С. 4–11.

Поступила в редакцию 29.09.2017 г.

Контакты: +375 222 47 79 35 (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A., Rusakov A. ASSOCIATIVITY TESTS OF l -ARY OPERATION $\eta_{s, \sigma, k}$
The article reveals new associativity tests of the operation $\eta_{s, \sigma, k}$ for certain substitutions.

Keywords: polyadic operation, groupoid, semigroup, group, associativity.

УДК 511.42

ДВУХСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА ТОЧЕК С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ В K -МЕРНЫХ КУБАХ МАЛОЙ МЕРЫ

М. В. Ламчановская

кандидат физико-математических наук
Институт информационных технологий
Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники

Н. В. Сакович

кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Н. В. Шамукова

кандидат физико-математических наук, доцент
Университет гражданской защиты МЧС РБ

Понятие всюду плотного множества является фундаментальным математическим понятием. Множество рациональных чисел является всюду плотным множеством на действительной прямой. В последние 40 лет было доказано свойство всюду плотности множеств действительных и алгебраических чисел в \mathbb{R} . Нетрудно доказать, что множество точек с алгебраическими координатами всюду плотно в любом кубе $T \subset \mathbb{R}^k$. Задача значительно усложняется, если рассматривать точки с алгебраическими сопряженными координатами и кубы T малой меры. В данной работе продолжено изучение распределения алгебраических чисел. Доказано несколько теорем об оценках сверху и снизу количества действительных алгебраических чисел в коротких интервалах.

Ключевые слова: корень многочлена, алгебраические числа, система диофантовых неравенств, порядок приближения, покрытие множества.

Число α называется алгебраическим, если существует полином

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in Z, 0 \leq j \leq n, \quad (1)$$

для которого $P(\alpha) = 0$. Если $P(x)$ неприводим над \mathbb{Q} и $\text{НОД}(a_0, \dots, a_n) = 1$, то он называется минимальным полиномом числа α , а величины $n = \deg P = \deg \alpha$, $H = H(P) = H(\alpha)$ называются степенью и высотой полинома $P(x)$ и числа α соответственно. В этом случае полином $P(x)$ является минимальным полиномом и для остальных корней $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ полинома $P(x)$ такой же степени и высоты, как $\alpha = \alpha_1$.

© Ламчановская М. В., 2018

© Сакович Н. В., 2018

© Шамукова Н. В., 2018

Рассмотрим некоторый конечный интервал I длины μI . Для упрощения технических деталей будем считать, что $I \subset [0,1)$. Для $Q > 1$ рассмотрим класс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}. \quad (2)$$

Пусть задан некоторый интервал $I_1 \subset I$ длины $\mu I_1 = Q^{-\gamma}$, $\gamma \geq 0$. При каких условиях на \mathcal{Y} можно утверждать, что в классе $\mathcal{P}_n(Q)$ найдется полином $P(x)$, корень которого принадлежит I_1 ?

В дальнейшем через μA будем обозначать меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, $\#B$ – количество элементов конечного множества B , $c_1 = c_1(n), c_2(n), \dots$ – величины, зависящие только от n и не зависящие от H и Q . В работе [3] были доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Для любого рационального числа $\frac{p}{q}$ существует интервал I_2 с центром в точке $\frac{p}{q}$ и мерой $\mu I_2 = c_1 q^{-n} Q^{-1}$, не содержащий ни одного действительного алгебраического числа α степени $n \geq 1$ и высоты $H(\alpha) = Q$.

Теорема 2. Для $c_2 > c_0(n)$ и $Q > Q_0(n)$ в любом интервале I_3 , $\mu I_3 > c_2 Q^{-\gamma}$, $0 \leq \gamma \leq 1$, содержится не менее $c_3 Q^{n+1} \mu I_3$ алгебраических чисел α , $\deg \alpha = n$, $H(\alpha) \leq Q$.

В работе [1] были найдены оценки снизу для количества точек $z = (\alpha_1, \alpha_2)$ с действительными сопряженными алгебраическими числами α_1, α_2 , находящимися в полосе шириной $c_4 Q^{-\gamma_1}$, $0 \leq \gamma_1 \leq \frac{1}{2}$ возле гладкой кривой $y = f(x)$.

Отметим работу [2] где доказано, что существует не менее $c_5 Q^{\frac{n+1}{3}}$ полиномов, у которых два сопряженных корня находятся на расстоянии

$c_6 Q^{-\gamma_3}$, $0 \leq \gamma_3 \leq \frac{n+1}{3}$. Также найдены оценки снизу для количества полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ и пар полиномов $(T_1(x), T_2(x)) \in \mathcal{P}_n^2(Q)$ с заданными дискриминантами и результатами [3]. Отметим также [4; 5] обобщения указанных результатов на поля комплексных и p -адических чисел.

В работе [6] получены результаты о распределении алгебраических чисел второй и третьей степени. В данной работе будут получены новые результаты о распределении алгебраических точек, причем впервые будут получены оценки сверху для их количества.

Теорема 3. Существует величина c_6 , при которой в любом интервале I_4 , $\mu I_4 = Q^{-\gamma_3}$, $0 \leq \gamma_3 \leq 1$ лежит не более $c_6 Q^{n+1} \mu I_4$ алгебраических точек α полиномов из $\mathcal{P}_n(Q)$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha \in I_4$

$$\#\{P(x) \in \mathcal{P}_n(Q), P(\alpha) = 0\} > c_6 Q^{n+1} \mu I_4 = c_6 Q^{n+1-\gamma_3}. \quad (3)$$

Если полином $P(x)$ имеет на I_4 больше одного корня, оставим только один из них, от чего в неравенстве (3) несколько изменится только величина c_6 . Зафиксируем вектор $\vec{b}_1 = (a_n, \dots, a_1)$, состоящий из коэффициентов полинома $P(x)$, и обозначим через $\mathcal{P}_n(Q, \vec{b}_1)$ подкласс, состоящий из полиномов $P(x)$, у которых совпадают коэффициенты при x, x^2, \dots, x^n . Ясно, с учетом (3), что

$$\#\mathcal{P}_n(Q, \vec{b}_1) > c_7 Q^{1-\gamma_3}. \quad (4)$$

Разложим каждый полином $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, \vec{b}_1)$ на интервале I_4 в ряд Тейлора в окрестности корня $\alpha_1 = \alpha_1(P)$. Имеем

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P''(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1)^2 + \dots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1)^n. \quad (5)$$

Так как $|x - \alpha_1| \leq Q^{-\gamma_3}$, а $x \in [0, 1)$, то $|P'(\alpha_1)| < n^2 Q$,

$$|P'(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1)| < n^2 Q^{1-\gamma_3}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} |P''(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1)^2| \leq \frac{1}{2} n^3 Q^{1-2\gamma_3} < n Q^{1-\gamma_3}, \quad Q > Q_0(n). \quad (7)$$

Остальные члены разложения оцениваются правой частью в (7), и поэтому из (5)–(7) получаем при $\forall x \in I_4$ и достаточно большом Q

$$|P(x)| < 2n^2 Q^{1-\gamma_3}. \quad (8)$$

Занумеруем все полиномы из $\mathcal{P}_n(Q, \vec{b}_1)$ так $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$

$$k > \frac{1}{2} c_7 Q^{1-\gamma_3} \quad (9)$$

и образуем новые полиномы $R_j(x) = P_j(x) - P_0(x)$, $1 \leq j \leq k$. Полиномы $R_j(x)$ – различные целые числа, отличные от нуля, и

$$|R_j(x)| < 4n^2 Q^{1-\gamma_3}. \quad (10)$$

Из (9) следует, что среди них есть число l ,

$$|l| > \frac{1}{4} c_7 Q^{1-\gamma_3}. \quad (11)$$

Если $c_7 > 16n^2$, то неравенства (10) и (11) противоречивы, что доказывает противоречивость неравенства (3).

Теорема 4. Пусть β – действительный корень своего минимального полинома $T_k(x)$, $\deg T_k(x) = k$, $1 \leq k < n$, $H(T_k(x)) < Q^{\gamma_4}$, $0 \leq \gamma_4 \leq 1$. Тогда существует достаточно малая величина c_8 , при которой на интервале I_5 , $\mu I_5 = c_8 Q^{-\gamma_4 n - k}$ с центром в точке β нет корней многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$.

В доказательстве теоремы 4 будет использована следующая лемма [7].

Лемма. Пусть $P(x)$ – многочлен, $\deg P = n$, с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и старшим коэффициентом a_n . Тогда для любого набора корней $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$,

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, k \leq n$, справедливо неравенство

$$|\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}| < c_9 \cdot \frac{H(P)}{|a_n|}.$$

Доказательство теоремы 4.

Предположим, что корень $\alpha \neq \beta$ полинома $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ лежит на интервале I_4 . Тогда α – корень неприводимого многочлена $P_1(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Многочлены $T_k(x) = l_k x^k + \dots + l_1 x + l_0$ и $P_1(x) = d_n x^n + \dots + d_1 x + d_0$ не имеют общих корней, и поэтому их результат $R(P_1(x), T_k(x)) \neq 0$. Из определения результата имеем

$$1 \leq |R(P_1, T_k)| < l_k^n d_n^k \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} |\alpha_i - \beta_j|. \quad (12)$$

Для оценки произведения в (12) выделим сомножитель $|\alpha - \beta|$, а остальные сомножители оценим с помощью леммы.

Получим

$$1 \leq l_k^n d_n^k c_8 Q^{-\gamma_4 n - k} c_{10} \left(\frac{H(T_k)}{l_k} \right)^n c_{11} \left(\frac{H(P_1)}{d_n} \right)^k < c_8 c_{12} H(T_k)^n H(P_1)^k Q^{-\gamma_4 n - k} < < c_8 c_{12} Q^{\gamma_4 n + k} Q^{-\gamma_4 n - k} < c_8 c_{12}. \quad (13)$$

Возьмем $c_8 = c_{12}^{-1}$ и получим противоречие.

Теорема 4 может быть обобщена на многомерный случай.

Теорема 5. Существует величина c_{13} и куб $S \subset \mathbb{R}^k, 2 \leq k < n$ со стороны $c_{13} Q^{-1}$, внутри которого нет сопряженных алгебраических точек $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ никакого многочлена $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q), \deg P \geq k$.

Доказательство.

Возьмем точку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k+1} \right) \in \mathbb{R}^k$ и рассмотрим куб

$K = \left\{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_k) : \prod_{l=2}^{k+1} \left| x - \frac{1}{l} \right| < c_{13} Q^{-1} \right\}$. Пусть точка $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, порожденная многочленом $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, лежит в S . Тогда $\left| \alpha_{l-1} - \frac{1}{l} \right| < c_{13} \cdot Q^{-1}$.

Результат целочисленных многочленов

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{и} \quad T(x) = (k+1)! \cdot \prod_{l=2}^{k+1} \left| x - \frac{1}{l} \right|$$

отличен от нуля. Имеем

$$1 \leq |R(T, P)| \leq a_k^n (k!)^n \prod_{\substack{2 \leq l \leq k+1 \\ 1 \leq j \leq n}} \left| \frac{1}{l} - \alpha_j \right|. \quad (14)$$

Для оценки произведения в правой части (14) оценим

$$\left| \frac{1}{2} - \alpha_1 \right| \cdot \left| \frac{1}{3} - \alpha_2 \right| \cdots \left| \frac{1}{k+1} - \alpha_k \right| < c_{13}^k Q^{-k} .$$

Остальные сомножители оценим, как в (13), с помощью леммы. Получим

$$1 \leq c_{13}^k c_{14} Q^{-k} (k!)^n H(P)^k < c_{13}^k c_{15} Q^{-k+k} = c_{13}^k c_{15} . \quad (15)$$

При $c_{13} = 0,5 c_{15}^{-\frac{1}{k}}$ неравенство (15) противоречиво, что доказывает теорему 5.

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы 3.

Теорема 6. При любом $0 \leq \gamma_5 < 1$ в квадрате $T = I_1 \times I_2 \subset [0,1]^2$, $\mu_j = Q^{-\gamma_5}$ при подходящей величине c_{16} справедливо неравенство

$$\#\{\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in T : \exists P(x) \in \mathcal{P}_n(Q), P(\alpha_j) = 0, j = 1, 2\} < c_{16} Q^{n+1-2\gamma_5} . \quad (16)$$

Доказательство. Предположим, что верно неравенство, противоположное неравенству (16). Разложим многочлен $P(x)$ по каждой переменной x_j на интервале $I_j, j = 1, 2$ в ряд Тейлора.

$$P(x_j) = P(\alpha_j) + P'(\alpha_j) \cdot (x_j - \alpha_j) + \frac{1}{2} P''(\alpha_j) \cdot (x_j - \alpha_j)^2 + \dots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(\alpha_j) \cdot (x_j - \alpha_j)^n . \quad (17)$$

В (17) корень α_j лежит на отрезке $I_j, x_j \in I_j, 0 \leq x_j \leq 1$ и $P(\alpha_j) = 0, j = 1, 2$. Поэтому при достаточно большом Q

$$\begin{aligned} |P'(\alpha_j) \cdot (x - \alpha_j)| &< n^2 Q^{1-\gamma_5}, \\ \frac{1}{2} |P''(\alpha_j) \cdot (x - \alpha_j)^2| &< n^3 Q^{2(1-\gamma_5)} < n Q^{1-\gamma_5}, \\ \left| \frac{1}{s!} P^{(s)}(\alpha_j) \cdot (x - \alpha_j)^s \right| &< n^s Q^{s(1-\gamma_5)} < n Q^{1-\gamma_5}, 3 \leq j \leq n, \\ |P(x_j)| &< 2n^2 Q^{1-\gamma_5}. \end{aligned} \quad (18)$$

Зафиксируем вектор $\vec{b}_2 = (a_n, \dots, a_2)$, состоящий из коэффициентов многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. При достаточно большом Q верно неравенство

$$\#\{\vec{b}_2\} \leq (2Q+1)^n < 2^{n+1} Q^{n-1} . \quad (19)$$

Множество полиномов $P(x)$ с одним и тем же вектором \vec{b}_2 обозначим через $\mathcal{P}_n(Q, \vec{b}_2)$. Занумеруем все полиномы $P(x): P_0(x), P_1(x), \dots, P_s(x)$ из $\mathcal{P}_n(Q, \vec{b}_2)$. Согласно предположению в начале доказательства

$$s > 0,5c_{16}Q^{2(1-\gamma_s)}. \quad (20)$$

Образуем новые s полиномов. Это различные целочисленные полиномы, у которых, согласно определению $\mathcal{P}_n(Q, \vec{b}_2)$, коэффициенты при x^n, x^{n-1}, \dots, x^2 совпадают. Из (18) следует

$$|R_j(x)| < 4n^2Q^{1-\gamma_s}, \deg R_j(x) \leq 1, H(R_j) \leq 2Q, 1 \leq j \leq s. \quad (21)$$

Поскольку величина s по (20) велика, то среди коэффициентов $R_j(x) = a_jx + b_j$ должны быть коэффициенты, большие

$$\max(|a_j|, |b_j|) > 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}}Q^{1-\gamma_s}. \quad (22)$$

Возьмем многочлен $R_j(x)$, у которого один из коэффициентов удовлетворяет неравенству (22). Пусть это многочлен $ax + b$ и $a > 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}}Q^{1-\gamma_s}$. Воспользуемся (18) и составим систему неравенств

$$\begin{aligned} |ax_1 + b| &< 2n^2Q^{1-\gamma_s} \\ |ax_2 + b| &< 2n^2Q^{1-\gamma_s}, \quad a > 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}}Q^{1-\gamma_s}. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как по предположению координаты x_1 и x_2 отделены, $|x_1 - x_2| \geq \delta$, то заменим (23) системой уравнений

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= \Theta_1(x_1)Q^{1-\gamma_s} = t_1 \\ ax_2 + b &= \Theta_2(x_2)Q^{1-\gamma_s} = t_2, \quad |\Theta_j(x_j)| \leq 2n^2. \end{aligned}$$

По правилу Крамера имеем

$$\begin{aligned} 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}}Q^{1-\gamma_s} \leq |a| &= \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}} \leq \frac{4n^2Q^{1-\gamma_s}}{|\delta|} = 4n^2\delta^{-1}Q^{1-\gamma_s} \quad \text{и} \\ 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}} &< 4n^2\delta^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Неравенство (24) при $c_{16} > 2^8 n^4 \delta^{-2}$ противоречиво. Это означает, что теорема 6 верна при $c_{16} = 2^9 n^4 \delta^{-2}$.

Теорема 6 справедлива при любом $1 \leq k \leq n-1$, что можно доказать аналогично.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Кемеш О. Н.** О количестве точек с действительными алгебраическими координатами вблизи гладкой кривой / О. Н. Кемеш, И. М. Морозова, Н. В. Сакович // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. – № 1(49). – 2017. – С. 12–16.
2. **Бересневич, В. В.** Совместные приближения нуля целочисленным многочленом, его производной и малые значения дискриминантов / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гётце // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 2. – С. 26–27.
3. **Рыкова, О. В.** О количестве рациональных точек с ограниченными знаменателями в коротких интервалах различных типов / О. В. Рыкова, Н. В. Сакович, Н. В. Шамукова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. – № 1(47). – 2016. – С. 28–31.
4. **Берник, В. И.** Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. матем., 79:1 (2015), 21–42.
5. **Дудко, Д. В.** О малых значениях монических многочленов на коротких интервалах / Д. В. Дудко, Н. В. Сакович, Н. В. Шамукова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – № 1(29). – 2008. – С. 155–161.
6. **Шамукова, Н. В.** О распределении алгебраических чисел второй и третьей степени / Н. В. Шамукова, Н. В. Сакович // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – № 2(38). – 2011. – С. 36–43.
7. **Budarina N., Dickinson D., Jin Yuan.** On the number of polynomials with small discriminants in the euclidean and p-adic metrics // Acta Mathematica Sinica. – 2012. – Vol. 28, № 3. – P. 469–476.

Поступила в редакцию 19.12.2017 г.

Контакты: +375 222 28-35-85 (Сакович Наталья Владимировна)

+375 29 315 65 81 (Ламчановская Марина Валерьевна)

Lamchanovskaya M., Sakovich N., Shamukova N. TWO-SIDED EVALUATIONS FOR A NUMBER OF POINTS WITH ALGEBRAIC COORDINATES IN K -DIMENSIONAL CUBES OF SMALL SIZE.

The article views the upper bound for the real algebraic conjugate numbers (α_1, α_2) of a degree $n \geq 2$ and a height Q , which lie in the square $T \subset [0, 1]^2$ of the size $Q^{-\gamma}$, $0 \leq \gamma < 1$.

Keywords: root of polynomial, algebraic number, Diophantine inequality system, order of approximation, set cover.

УДК 514.76

ИНВАРИАНТНЫЕ СВЯЗНОСТИ В ГРУППОИДЕ ЛИ $P^k(V)$

Л. А. Романович

старший преподаватель,

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является теория структур высших порядков на гладких многообразиях. Среди геометрических структур особое внимание привлекают связности. Целью работы является описание инвариантных связностей в группоиде Ли k -струй локальных диффеоморфизмов гладкого многообразия. Исследование проводится методом Эресмана, основанном на использовании группоидов Ли и k -струй гладких отображений.

Ключевые слова: гладкое многообразие, группоид Ли, алгеброид Ли, инвариантная связность, оператор Спенсера, однородное пространство.

Введение

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является теория структур высших порядков на гладких многообразиях. Интенсивная научная работа в этом направлении проводится уже не первое десятилетие. Классический подход к исследованию геометрических структур на гладких многообразиях основан на понятиях главного и присоединенного расслоения. Сами структуры определяются как подрасслоения в главных расслоениях или как сечения присоединенных векторных расслоений и исследуются методом, основанном на изучении структурных уравнений указанных структур. Фундаментальным введением в этот раздел геометрии являются, например, двухтомная монография Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1], [2] или лекции по геометрии М. М. Постникова [3], [4]. Работы Э. Картана, Г.Ф. Лаптева, А.М. Васильева, Ю.Г. Лумисте и других математиков (см. например, [5], [6], [7]) по исследованию структур высших порядков на гладких многообразиях и связностей на этих структурах выполнены методом, основанном на изучении структурных уравнений.

С другой стороны, в работах Ш. Эресмана, П. Либерманн (см. например, [8], [9]) развит еще один подход к построению основ геометрии, который базируется на понятиях группоида Ли и k -струи гладкого отображения. Такой подход имеет свои преимущества. Во-первых, теория группоидов Ли имеет много аналогов с хорошо развитой теорией групп Ли. Появляется возможность использования таких фундаментальных понятий, как алгеброид Ли, экспоненциальное отображение. Например, применение алгеброидов Ли эффективно в теории связностей. Во-вторых, группоидный подход позволяет успешно использовать теорию k -струй гладких отображений. На основе k -струй строится

фундаментальное понятие дифференциального продолжения геометрических объектов. Примером использования такого подхода может служить построение связностей высших порядков, приведенное в работе Нго ван Кё [10]. Изложение основ дифференциальной геометрии, использующее группоиды Ли и алгебroidы Ли, приведено в монографии К. Маккензи [11]. В монографии И.В. Белько [12] осуществлено развитие этого направления исследования геометрических структур.

Среди геометрических структур на многообразиях особое место занимают связности первого и высших порядков. Основные идеи общей теории связностей восходят к Э. Картану и Ш. Эресману. Связности, введенные Э. Картаном, сейчас называют картановыми связностями. Они определяют картановы геометрии, которые можно рассматривать одновременно как обобщения римановой геометрии и однородных пространств. Актуальность исследования картановых геометрий подтверждается возросшим в последние годы интересом к ним, о чем свидетельствуют статьи Д. В. Алексеевского, П. Михора, Е. Альта, Ш. Франца (см., например, [13], [14]), монографии А. Чапа и Я. Словака [15]. Одним из обобщений понятия линейной связности в векторном расслоении, основанном на использовании группоидов Ли, является связность высшего порядка в группоиде Ли, построенная Ш. Эресманом. Примером использования метода Эресмана может служить построение связностей высших порядков, приведенное в работе Нго ван Кё [10]. Нго ван Кё установил связь между связностями высших порядков в группоидах Ли и расщеплениями присоединенных векторных расслоений. С помощью оператора Спенсера он поставил в соответствие произвольной связности высшего порядка дифференциальный оператор специального вида. Интерес представляет изучение связностей высшего порядка в группоидах Ли, согласованных с действиями продолженных подгруппоидов Ли. Такие связности можно определить, как инвариантные связности высшего порядка в группоидах Ли или как регулярные сечения расслоения элементов связностей порядка относительно действий продолженных подгруппоидов Ли. Согласованность связностей высшего порядка с действиями продолженных подгруппоидов Ли накладывает условия на соответствующие расщепления и дифференциальные операторы и, с другой стороны, позволяет однозначно определить такие связности через связности более низких порядков [16].

Общие результаты такого исследования можно применить к изучению структур высших порядков на гладких многообразиях и в векторных расслоениях, которые согласованы с некоторыми дополнительными структурами, заданными на многообразиях. В последние десятилетия прошлого века интенсивное развитие получила такая область современной геометрии, как геометрия однородных пространств. Одним из направлений исследований в этой области дифференциальной геометрии является изучение инвариантных структур. Наличие таких структур на однородном пространстве позволяет извлекать существенную информацию о геометрии однородных пространств. Известный пример – инвариантные связности на однородных пространствах, определенные транзитивным действием группы Ли G на гладком многообразии $B = G/H$, где H – замкнутая подгруппа в G . Целью работы является применение метода Эресмана

к описанию инвариантных связностей на гладком многообразии $B = G/H$. При исследовании используется группоид Ли $\Pi^k(B)$, элементами которого являются k -струи локальных диффеоморфизмов многообразия B , и его подгруппоид Ли $J^k\left(\frac{G \times G}{H}\right)$ [17, с. 146].

Основная часть

Пусть B – гладкое многообразие, (Ω, B) – группоид Ли над B , (Ω^k, B) – продолжение порядка k группоида Ли (Ω, B) , (E, p, B) – векторное расслоение, ассоциированное с группоидом Ли (Ω, B) , $(J^k E, p^k, B)$ – продолжение порядка k векторного расслоения (E, p, B) , $(Q^k(\Omega), \pi, B)$ – расслоение элементов связностей порядка k .

Группоид Ли (Ω^k, B) действует на векторном расслоении $(J^k E, p^k, B)$ [10, с. 170]. Локальная запись этого действия имеет вид:

$$Z \cdot X = j_x^k \sigma \cdot j_x^k S = j_y^k \left((\sigma(\beta \circ \sigma))^{-1} \right) \cdot s(\beta \circ \sigma)^{-1}, \tag{1}$$

где $Z = j_x^k \sigma \in \Omega^k$, $\alpha \circ \sigma = id$, $X = j_x^k S \in J_x^k E$, $y = \beta \circ \sigma(x)$.

Группоид Ли (Ω^k, B) действует на векторном расслоении $(J^k E, p^k, B)$ [12, с. 133]. Локальная запись этого действия имеет вид:

$$Z \cdot Y = j_x^k \sigma \cdot j_x^k f = j_y^k \left((\sigma(\beta \circ \sigma))^{-1} \right) \cdot f(\beta \cdot \sigma)^{-1} \cdot (\sigma(x))^{-1}, \tag{2}$$

где $Y = j_x^k f \in Q_x^k(\Omega)$.

Нго ван Кё каждой связности в группоиде Ли ставит в соответствие морфизм векторных расслоений [10, с. 190]

$$\lambda_k : E \rightarrow J^k E, \tag{3}$$

который расщепляет точную последовательность расслоений

$$0 \rightarrow J_0^k E \rightarrow J^k E \rightarrow E \rightarrow 0. \tag{4}$$

Пусть G – группа Ли, H – замкнутая подгруппа в G , $B = G/H$ – однородное пространство. Группа Ли G действует на гладком многообразии B

$$L_g : G \times B \rightarrow B : (g, x) \rightarrow gx. \tag{5}$$

Группоид Ли $\frac{G \times G}{H}$ действует на векторном расслоении (TB, p, B) , его продолжение порядка k – $J^k\left(\frac{G \times G}{H}\right)$ – подгруппоид Ли группоида Ли $\Pi^k(B)$, действует на векторном расслоении $(J^k TB, \pi, B)$.

Пусть $\Omega = \frac{G \times G}{H}$, $\Omega^k = J^k\left(\frac{G \times G}{H}\right)$. Группоид Ли $\Pi^k(B)$ действует на векторном расслоении $(J^k TB, p^k, B)$. Согласно (1), локальная запись этого действия имеет вид:

$$Z \cdot X = j_x^k \sigma \cdot j_x^k s = j_y^k \left((\sigma \circ \sigma)^{-1} \right) \cdot s (\beta \circ \sigma)^{-1}, \quad (6)$$

где $Z = j_x^k \sigma \in \Pi^k(B)$, $\alpha \circ \sigma = id$, $X = j_x^k s \in J_x^k TB$, $y = \beta \circ \sigma(x)$.

Действие группоида Ли $\Pi^k(B)$ на расслоении $(Q^k(\Omega), \pi, B)$ естественным образом определяет инвариантную связность относительно действия Ω^k .

Определение. Связность $c : B \rightarrow Q^k(\Omega)$ называется инвариантной, если для любого элемента $Z = j_x^k \sigma \in \Omega^k$ выполняется условие:

$$c(y) = Z \cdot c(x), \quad (7)$$

где $\alpha \circ \sigma(x) = x$, $y = \beta \circ \sigma(x)$.

Теорема 1. Пусть связность $c : B \rightarrow Q^k(\Omega)$ является инвариантной относительно действия группоида Ли Ω^k .

Тогда морфизм $\lambda_k : TB \rightarrow J^k TB$ удовлетворяет условию:

$$\lambda_k(\sigma(x) \cdot \mu(x)) = j_x^k \sigma \cdot \lambda_k(\mu(x)). \quad (8)$$

Доказательство.

Пусть $c : B \rightarrow Q^k(\Omega)$ – связность, инвариантная относительно действия группоида Ли Ω^k . Построение морфизма $\lambda_k : E \rightarrow J^k E$ [10, с. 189] в нашем случае ($E = TB$) осуществляется по следующей схеме.

Для всякого $x \in B$ элемент $c(x)$ представляется в виде $c(x) = j_x^k \pi$, где $\pi : U \rightarrow \Omega_x$ – сечение связности в точке x над выделенной окрестностью U .

Для всякого элемента $X \in T_x B$ отображение

$$\pi^* X : U \rightarrow TB : y \rightarrow \pi(y) \cdot X \quad (9)$$

является локальным сечением расслоения (TB, p, B) .

Так возникает морфизм векторных расслоений

$$\lambda_k : TB \rightarrow J^k TB : X \rightarrow j_x^k (\pi^* X). \quad (10)$$

Проверим выполнение условия (9):

$$\lambda_k(\sigma(x) \cdot X) = j_x^k (\pi^* (\sigma(x) \cdot X)) = j_x^k (\sigma(x) \cdot \pi^* X), \quad (11)$$

$$Z \cdot \lambda_k(X) = j_x^k \sigma \cdot j_x^k \pi = j_x^k (\sigma(x) \cdot \pi^* X). \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что условие инвариантности для морфизма λ_k выполняется.

Что и требовалось доказать.

Нго ван Кё с помощью дифференциального оператора Спенсера D , каждому морфизму (3) ставит в соответствие дифференциальный оператор специального вида [10, с. 192]:

$$\nabla_k = D \circ \lambda_k. \quad (13)$$

Построение соответствующего дифференциального оператора в нашем случае ($E = TB$) осуществляется по следующей схеме.

Дифференциальный оператор Спенсера D [17, с. 54] действует следующим образом:

$$D : \Gamma J^k(TB) \rightarrow \Gamma(J^{k-1}(TB) \otimes T^*B) : s \rightarrow J^1(\rho_{k-1} \circ s) - s. \quad (14)$$

Дифференциальный оператор ∇_k действует следующим образом:

$$\nabla_k : \Gamma TB \rightarrow \Gamma(J^{k-1}(TB) \otimes T^*B) : s \rightarrow \nabla_k(s) = D \circ \lambda_k(s). \quad (15)$$

Дифференциальный оператор ∇_k обладает свойствами [10, с. 192], позволяющими однозначно определить связность порядка k с помощью связности порядка $k - 1$.

Теорема 2. Пусть морфизм (10) удовлетворяет условию (8).

Тогда дифференциальный оператор (16) удовлетворяет условию:

$$\nabla_k(\sigma(x) \cdot \mu(x)) = j_x^k \sigma \cdot \nabla_k(\mu(x)).$$

Доказательство теоремы 2 следует из (13) и инвариантности оператора Спенсера.

Нго ван Кё [10, с. 192] доказал, что связность порядка k однозначно определяется связностью порядка $k - 1$ и дифференциальным оператором (13). Из теорем 1 и 2 следует, что аналогичный вывод можно сделать и для инвариантных связностей в группоиде Ли $\Pi^k(B)$.

В качестве примера исследованы инвариантные связности на двумерной сфере:

$$S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in R^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}. \quad (16)$$

Структура гладкого многообразия на S^2 определяется локальными тривиализациями:

$$U_1 : \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \mid x^3 > 0\}, \varphi_1(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2) \quad (17.1)$$

$$U_2 : \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \mid x^3 < 0\}, \varphi_2(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2) \quad (17.2)$$

$$U_3 : \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \mid x^1 > 0\}, \varphi_3(x^1, x^2, x^3) = (x^2, x^3) \quad (17.3)$$

$$U_4 : \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \mid x^1 < 0\}, \varphi_4(x^1, x^2, x^3) = (x^2, x^3) \quad (17.4)$$

$$U_5 : \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \mid x^2 > 0\}, \varphi_5(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^3) \quad (17.5)$$

$$U_6 : \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \mid x^2 < 0\}, \varphi_6(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^3). \quad (17.6)$$

Данное многообразие является однородным пространством

$$S^2 \sim O(3)/O(2), \quad (18)$$

на котором действует группа ортогональных матриц третьего порядка $O(3)$

$$O(3) \times S^2 \rightarrow S^2 : (\sigma_j^i, x^j) \rightarrow \sigma_j^i \cdot x^j. \quad (19)$$

Локальная запись действия (19) осуществлялась с помощью локальных тривиализаций (17.1–17.6). Локальная запись действия на J^1TS^2 и J^2TS^2 осуществлялась с помощью локальных тривиализаций [18], которые в нашем случае имеют вид:

$$J^1TS^2I_U \approx U \times (L_S^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \oplus L_S^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)), \quad (20)$$

$$J^2TS^2I_U \approx U \times (L_S^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \oplus L_S^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \oplus L_S^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)), \quad (21)$$

где $L_S^m(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ – пространство m -линейных симметричных отображений $\underbrace{\mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2}_{m \text{ раз}} \rightarrow \mathbb{R}^2$

Локальная запись условий инвариантности морфизмов (3) использована для вычисления функций инвариантной связности первого и второго порядков на S^2 .

Функции инвариантной связности первого порядка на S^2 относительно локальной карты (U_1, φ_1) вид (22.1–22.4):

$$\Gamma_{11}^1(x) = \frac{x^1(1-(x^2)^2)}{\rho^2}, \quad \Gamma_{22}^1(x) = \frac{x^1(1-(x^1)^2)}{\rho^2}, \quad (22.1)$$

$$\Gamma_{12}^1(x) = \frac{(x^1)^2 x^2}{\rho^2} = \Gamma_{21}^1(x), \quad (22.2)$$

$$\Gamma_{11}^2(x) = \frac{x^2(1-(x^2)^2)}{\rho^2}, \quad \Gamma_{22}^2(x) = \frac{x^2(1-(x^1)^2)}{\rho^2}, \quad (22.3)$$

$$\Gamma_{12}^2(x) = \frac{(x^2)^2 x^1}{\rho^2} = \Gamma_{21}^2(x), \quad (22.4)$$

где $\rho = \sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}$.

Функции инвариантной связности второго порядка на S^2 относительно локальной карты (U_1, φ_1) вид (23.1–23.6):

$$\Gamma_{111}^1(x) = \frac{(x^1)^2(1-(x^2)^2)}{\rho^4}, \quad \Gamma_{112}^1(x) = \frac{x^1 x^2(1-(x^2)^2)}{\rho^4}, \quad (23.1)$$

$$\Gamma_{121}^1(x) = \Gamma_{211}^1(x) = -\frac{(x^1)^2 x^2}{\rho^4}, \quad \Gamma_{122}^1(x) = \Gamma_{212}^1(x) = -\frac{(x^1)^2 (x^2)^2}{\rho^4}, \quad (23.2)$$

$$\Gamma_{221}^1(x) = \frac{(x^1)^2(1-(x^1)^2)}{\rho^4}, \quad \Gamma_{222}^1(x) = \frac{x^1 x^2(1-(x^2)^2)}{\rho^4}, \quad (23.3)$$

$$\Gamma_{111}^2(x) = \frac{x^1 x^2 (1 - (x^2)^2)}{\rho^4}, \quad \Gamma_{112}^2(x) = \frac{(x^1)^2 (1 - (x^2)^2)}{\rho^4}, \quad (23.4)$$

$$\Gamma_{121}^2(x) = \Gamma_{211}^1(x) = -\frac{(x^1)^2 (x^2)^2}{\rho^4}, \quad \Gamma_{122}^2(x) = \Gamma_{212}^2(x) = -\frac{x^1 (x^2)^2}{\rho^4}, \quad (23.5)$$

$$\Gamma_{221}^2(x) = \frac{x^1 x^2 (1 - (x^1)^2)}{\rho^4}, \quad \Gamma_{222}^2(x) = \frac{(x^2)^2 (1 - (x^1)^2)}{\rho^4}. \quad (23.6)$$

Заключение

Актуальность исследования картановых геометрий подтверждается возросшим в последние годы интересом к ним. В работе приведено описание инвариантных связностей в группоиде Ли k -струй локальных диффеоморфизмов гладкого многообразия $B = G/H$. В качестве примера дано локальное описание инвариантных связностей первого и второго порядков на двумерной сфере.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Кобаяси, Ш.** Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Москва : Наука, 1981. – Т. 1. – 344 с.
2. **Кобаяси, Ш.** Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Москва : Наука, 1981. – Т. 2. – 416 с.
3. **Постников, М. М.** Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия / М. М. Постников. – Москва : Наука, 1987. – 480 с.
4. **Постников, М. М.** Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия / М. М. Постников. – Москва : Наука, 1988. – 496 с.
5. **Картан, Э.** Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения / Э. Картан. – Москва : Издательство МГУ, 1962. – 237 с.
6. **Васильев, А. М.** Дифференциальные алгебры и дифференциально-геометрические структуры / А. М. Васильев // Труды геометрического семинара. Институт научной информации АН СССР. – 1978. – № 4. – С. 217–230.
7. **Лумисте, Ю. Г.** Однородные расслоения со связностью и их погружения / Ю. Г. Лумисте // Труды геометрического семинара. Институт научной информации АН СССР. – 1966. – № 1. – С. 191–236.
8. **Ehresmann, C.** Introduction a la theorie des structures infinitesimales et des pseudo-groupes de Lie / C. Ehresmann // Colloq. Geometr. Differ., Strastbourgs. – 1953. – P. 97–100.
9. **Libermann, P.** Sur la geometrie des prolongements des espaces fibres vectoriels / P. Libermann // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1964. – Т. 14, № 1. – P. 145–172.
10. **Ngo van Que.** Du prolongement des espaces fibres et des structures infinitesimales / Ngo van Que // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1967. – Т. 17, № 1. – P. 159–223.
11. **Mackenzie, K.** Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry / K. Mackenzie. – Cambridge : Universitu Press, 1987. – 327 p.
12. **Белько, И. В.** Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии / И. В. Белько. – Москва : Издательство УРСС, 2004. – 208 с.
13. **Alekseevsky, D. V.** Tanaka structures (non Holonomic G -structures) and Cartan connections / Dmitri V. Alekseevsky, Lianna David // Journal of Geometry and Physics. – 2015. – V. 91. – P. 88–100.

14. **Michor, P.** Tensor fields and connections on holomorphic orbit spaces of finite groups / A. Kriegl, M. Losik, P. Michor // Journal of Lie Theorie. – 2003. – № 13(2). – P. 519–534.
15. **Сар, А.** Parabolic Geometrie I: Background and General Theory / A. Сар, J. Slovák // AMS : Publishing House, 2009. – 628 p.
16. **Рамановіч, Л. А.** Інварыянтныя звязнасці ў групоідах Лі / Л. А. Рамановіч // Весці Беларускага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта. – 1998. – № 3. – С. 117–121.
17. **Романович, Л. А.** Геометрические структуры на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ / Л. А. Романович // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2008. – № 1(29). – С. 146–155.
18. **Пале, Р.** Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе / Р. Пале. – Москва : Издательство “Мир”, 1970. – 359 с.

Поступила в редакцию 20.12.2017 г.

Контакты: l_ramanovich@mail.ru (Романович Людмила Александровна)

Ramanovich L. INVARIANT CONNECTIONS IN LIE GROUPOID $\Pi^k(B)$.

The article explores invariant connections in the Lie groupoid's k -jets of local diffeomorphisms of differentiable manifolds $B = G/H$. The research is based on Ehresmann's method involving the Lie groupoid $\Pi^k(B)$ and subgroupoid $J^k\left(\frac{G \times G}{H}\right)$.

Keywords: smooth manifold, Lie groupoid, Lie algebroid, invariant connection, Spenser operator, homogeneous space.

УДК 530.1 (075.8)

МЕТОДИКА ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ “ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ”

С. М. ЧЕРНОВ

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В работе предложена процедура интерполяции дискретных измерений, полученных в лабораторной работе “Изучение законов теплового излучения”, в виде функций Планка и Вина. Обсуждается возможность экспериментальной проверки основных законов теплового излучения.

Ключевые слова: спектральная плотность излучения, законы Стефана-Больцмана и Вина, интерполяция функциями Планка и Вина.

Введение

Важное место в процессе изучения курса общей физики (квантовая физика) в вузах занимает комплекс лабораторных работ, среди которых важную роль играет лабораторная работа “Изучение законов теплового излучения”. В университетах РБ широкое распространение получило стандартное оборудование к данной лабораторной работе, разработанное и изготовленное научно-производственным республиканским унитарным предприятием “Актив БГУ” (г. Минск) [1; 2]. В данной лабораторной работе имеется возможность исследовать основные законы теплового излучения: измерять спектральную зависимость $V(\lambda, T)$; определять температуру нагревателя и сравнивать ее с паспортными данными установки; проводить проверку выполнения закона Стефана-Больцмана; определять длину волны λ_{\max} , соответствующей максимуму интенсивности излучения, и, следовательно, убедиться в справедливости выполнения закона смещения Вина.

Однако решение указанных проблем требует проведения процедуры интерполяции спектральной зависимости, полученной для дискретных значений λ_i , гладкой кривой $V(\lambda)$, которая не предусматривалась разработчиками. Без этого, например, невозможно корректно оценить параметр λ_{\max} . Поэтому в настоящей работе предложены способы соответствующей интерполяции с помощью системы Mathcad.

Основная часть

1. Блок-схема лабораторного оборудования.

Конструктивно установка выполнена в виде единого прибора, состоящего из оптико-механического и электронного блока. Блок-схема лабораторной установки для изучения законов теплового излучения представлена на рис. 1.

© Чернов С. М., 2018

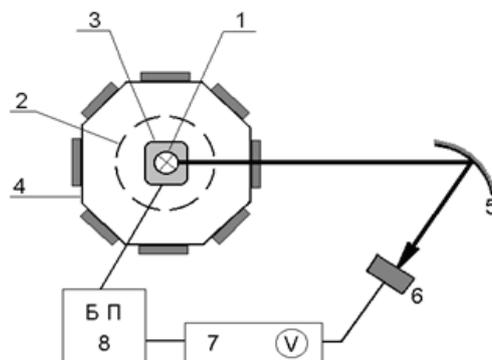


Рисунок 1. Схема лабораторной установки

Установка состоит из источника теплового излучения 1 (нихромовой спирали в форме цилиндра); механического модулятора светового потока, включающего в себя обтюратор 2 и электродвигатель 3; набора оптических инфракрасных фильтров 4; сферического зеркала 5; пироэлектрического приемника излучения 6; электронного блока обработки сигнала фотоприемника с цифровым вольтметром 7 и блока питания 8.

В приборе возможно устанавливать одну из трех температур нагрева спирали излучателя ($T = 630 \text{ K}, 740 \text{ K}, 900 \text{ K}$), что фиксируется свечением одного из светодиодов на лицевой панели. Смена оптических фильтров осуществляется поворотом барабана с фильтрами на фиксированный угол. Поток излучения от нихромовой спирали модулируется во времени, проходит через оптический фильтр и, отразившись от сферического зеркала, попадает на фотоприемник. Интерференционные фильтры позволяют выделить из падающего потока излучения энергию, приходящуюся на узкий спектральный диапазон. В лабораторной установке применяются семь инфракрасных узкополосных фильтров, способных пропускать тепловое излучение с длинами волн $2,1 \leq \lambda (\text{мкм}) \leq 8,5$. Величина сигнала на выходе фотоприемника пропорциональна величине светового потока, а, следовательно, и величине испускательной способности нагретого тела. Таким образом, показания цифрового индикатора вольтметра, выраженные в вольтах, пропорциональны величине спектральной плотности излучения ρ_λ : $V_\lambda \sim \rho_\lambda$.

2. Общая теория и процедура интерполяции.

Естественно предположить, что спектральная плотность излучения ρ_λ описывается формулой Планка [3]:

$$\rho_\lambda = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1}. \quad (1)$$

Запишем эту формулу иначе, введя безразмерный параметр:

$$x = \frac{hc}{kT\lambda} = \frac{\gamma}{\lambda}, \quad (2)$$

где $\gamma = \frac{hc}{kT} = \frac{1,439 \cdot 10^4}{T}$ (мкм). (3)

Тогда соотношение (1) примет вид:

$$\rho_\lambda = \frac{8\pi ch}{\gamma^5} \frac{x^5}{e^x - 1} = \frac{8\pi k^5}{h^4 c^4} T^5 \frac{x^5}{e^x - 1} = Af\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right). \quad (4)$$

Здесь введены обозначения:

$$A = \frac{8\pi k^5}{h^4 c^4} T^5; \quad f(x) = \frac{x^5}{e^x - 1}. \quad (5)$$

Важно отметить, что параметры A и γ зависят от абсолютной температуры T по закону: $A \sim T^5$, $\gamma \sim 1/T$ и $A\gamma \sim T^4$.

Как известно, из соотношения (1) следуют закон Стефана-Больцмана для энергетической светимости S [3]:

$$S = \frac{c}{4} \int_0^\infty \rho_\lambda d\lambda = \sigma \cdot T^4, \quad (6)$$

где постоянная Стефана-Больцмана σ равна:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 K^4}, \quad (7)$$

и закон смещения Вина:

$$\lambda_{\max} \cdot T = b, \quad (8)$$

где λ_{\max} – длина волны, соответствующая наибольшей интенсивности излучения, а постоянная Вина равна

$$b = \frac{hc}{4,97k} = 2,898 \cdot 10^3 \text{ мкм} \cdot K. \quad (9)$$

Интересно отметить, что в качестве интерполяционной функции вместо формулы (5) можно использовать функцию Вина, которая является предельным случаем (5) для $x \gg 1$ $\tilde{\rho}_\lambda = A\varphi(x)$; $\varphi(x) = x^5 e^{-x}$ (10)

Это обстоятельство связано с тем, что теория Вина и Планка дают близкие результаты, в частности: $\sigma_{\text{Планк}}/\sigma_{\text{Вин}} = 1,082$; $b_{\text{Планк}}/b_{\text{Вин}} = 1,007$. Кроме того, формула Вина (10) отличается от закона Планка (5) не более 10% в диапазоне длин волн $\lambda < 10 \text{ мкм}$, которое можно легко оценить из условия:

$$\frac{\rho_\lambda - \tilde{\rho}_\lambda}{\rho_\lambda} < 0,1.$$

В лабораторной работе измеряется величина сигнала на выходе фотоприемника, которая пропорциональна испускающей способности нагретого тела для данной температуры T . Таким образом, показания цифрового индикатора вольтметра V_λ , выраженные в вольтах, пропорциональны величине ρ_λ (4):

$$V_\lambda = V_0 f\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right). \quad (11)$$

В данной работе имеется также возможность измерения не только V_λ для одной длины волны λ , но и интегральный параметр V_T , равный суммарному сигналу для всех излучаемых волн при фиксированной температуре. Учитывая обозначение (2), т. е. $\lambda = \gamma/x$ и $d\lambda = -\gamma \cdot dx / x^2$, для V_T получим:

$$V_T = \int_0^\infty V_\lambda d\lambda = -V_0 \gamma \int_\infty^0 \frac{f(x) dx}{x^2} = V_0 \gamma \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = V_0 \gamma \frac{\pi^4}{15}. \quad (12)$$

В соответствии с планковской теорией следует ожидать, что интегральный параметр V_T имеет характер зависимости от температуры T вида: $V_T \sim V_0 \gamma \sim T^5 \cdot T^{-1} \sim T^4$. Таким образом, мы приходим к результату, аналогичному закону Стефана-Больцмана (6), который подлежит экспериментальной проверке:

$$\frac{V_T}{T^4} \sim \frac{V_0 \gamma}{T^4} = const. \quad (13)$$

Последовательно меняя фильтры, можно измерить V_λ для каждой из 7 длин волн и трех значений фиксированных температур. В качестве примера в таблице приведены результаты таких измерений для $T=900$ К.

Результаты измерений $V_\lambda(\lambda_i, T)$ при $T=900$ К

Номер фильтра	1	2	3	4	5	6	7
λ	2,1	2,5	3,2	3,9	4,5	6,2	8,5
V, B	1,31	1,94	2,32	2,14	1,73	1,01	0,40

По экспериментальной зависимости $V_i = V_\lambda(\lambda_i)$ можно получить интерполяционную функцию V_λ (11) путем нахождения оптимальных значений параметров V_0 и γ для планковской зависимости $f(x)$ вида (5). С этой целью построим функцию:

$$D(V_0, \gamma) = \sum_{i=1}^7 \left(V_0 f\left(\frac{\gamma}{\lambda_i}\right) - V_i \right)^2,$$

где $f(x)$ определяется условием (5), и численно найдем значения параметров V_0 и γ , обеспечивающие минимальное значение функции D (программа “Minimize(D, V_0, γ) с начальными условиями $V_0 \approx 0,1$; $\gamma \approx 20$ ”). В нашем примере получены значения $V_0 = 0,11B$; $\gamma = 15,98 мкм$. Результаты проведенной интерполяции изображены на рисунке 2.

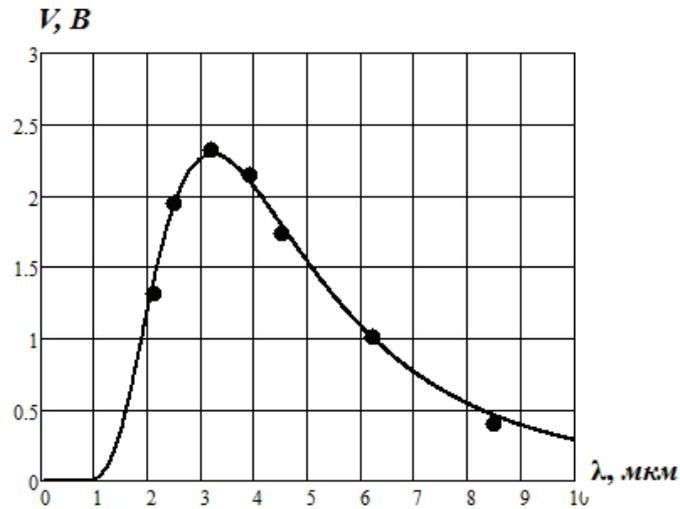


Рисунок 2. Результаты экспериментальных измерений и интерполяции зависимости $V_{\lambda}(\lambda, T)$ при $T = 900 \text{ К}$

Зная характер зависимости $V_{\lambda}(\lambda, T)$, можно определить цветовую температуру нагревателя $T_{\text{эксп}}$ по формуле (3) без использования закона смещения Вина. Для нашего примера получается температура $T_{\text{эксп.}} = 900,6 \text{ К}$ (для планковской функции (5)) и $T_{\text{эксп.}} = 890,2 \text{ К}$ (для функции Вина (10)- $V_0 = 0,109 \text{ В}$; $\gamma = 16,16 \text{ мкм}$). Далее можно определить длины волн λ_{max} , соответствующие максимумам кривых (программа “*Maximize*(V_{λ}, λ) с начальным условием $\lambda \approx 3$ ”) и интегральный параметр V_T (12). В результате получаются значения: $\lambda_{\text{max}}^{\text{Планк}} = 3,218 \text{ мкм}$ и $\lambda_{\text{max}}^{\text{Вин}} = 3,233 \text{ мкм}$. Это дает возможность проверить справедливость выполнения закона Вина (8) и Стефана-Больцмана (13), а также сравнить полученные значения температур с заданными в лабораторной установке.

Заключение

Предложенная схема позволяет для относительно небольшого числа экспериментально измеренных данных получить спектральную зависимость мощности теплового излучения в виде функций Планка и Вина. Это дает возможность оценивать цветовую температуру излучателя без использования закона смещения Вина. Следует подчеркнуть близость результатов интерполяции по теории Планка и Вина.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Изучение законов теплового излучения : методические указания к лабораторной работе по физике для студентов инженерно-технических специальностей / П. Г. Кужир [и др.]. – Минск : Учебное электронное издание БНТУ, 2011. – 15 с.

2. **Бондарь, В. А.** Общая физика : практикум / В. А. Бондарь, И. С. Ташлыков, В. А. Яковенко. – Минск : Вышэйшая школа, 2008. – 574 с.
3. **Чернов, С. М.** Общая физика. Квантовая физика : курс лекций / С. М. Чернов. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2016. – 164 с.

Поступила в редакцию 27.11.2017 г.

Контакты: stanislavchernof2011@yandex.by (Чернов Станислав Михайлович)

Chernov S. PROCESSING MEASUREMENT RESULTS IN THE LABORATORY WORK “STUDYING THE LAWS OF THERMAL RADIATION”.

The procedure of interpolation of discrete measurements obtained in the laboratory work “Studying the Laws of Thermal Radiation” in the form of Planck and Wien functions is presented. The possibility of experimental verification of basic laws of thermal radiation is considered.

Keywords: spectral density, Stefan-Boltzmann and Wien laws, interpolation by Planck and Wien functions.

УДК 548.0

ВЛИЯНИЕ ПОЛИПАРАКСИЛИЛЕНОВЫХ ТОНКИХ ПЛЕНОК НА ОСОБЕННОСТИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПОВЕРХНОСТИ АМОРФНЫХ СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ ЖЕЛЕЗА

О. М. Остриков

кандидат физико-математических наук, доцент

заведующий кафедрой инженерной графики

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

Изучено влияние полипараксилиленовых тонких пленок на закономерности формирования полос сдвига на поверхности аморфных сплавов на основе железа у концентратора напряжений. Установлено, что при наличии тонких пленок на поверхности процесс перехода пластической деформации от стадии формирования чешуйчатых навалов к стадии образования полос сдвига в виде лучей смещается в область более высоких нагрузок. Тонкие полипараксилиленовые пленки ППК способствуют смещению максимума числа полос сдвига в виде чешуйчатых навалов в область более высоких нагрузок на индентор, а максимума удаления указанных полос сдвига от отпечатка индентора – в область низких нагрузок.

Ключевые слова: аморфные сплавы на основе железа, полосы сдвига, полипараксилиленовые тонкие пленки.

Изучение влияния тонких пленок на механические свойства твердых тел является актуальным направлением в современной науке. Однако, не смотря на большое внимание к данной проблематике, многие вопросы остаются мало изученными. Так, например, в современной литературе ограничены сведения, касающиеся влияния тонких пленок на свойства аморфных материалов.

Целью данной работы стало изучение влияния полипараксилиленовых (ППК) тонких пленок на особенности пластической деформации аморфных сплавов на основе железа.

Методика эксперимента. Аморфные сплавы $Fe-Cr-Mo-V-B-Si$, $Fe-Cr-Mo-Ni-C-Mg-Al$, $Fe-Ni-Co-Cr-Mo-B-Si$, $Fe-P-C-Si-Al-B$ получались спиннингованием на наружную поверхность медного диска-кристаллизатора. В качестве тигля для плавления сплава применяли кварцевую трубку со щелевидным отверстием 0,25–0,3 мм при избыточном давлении аргона 0,2–0,5 МПа. Скорость охлаждения ленты составляла $8 \cdot 10^5$ °C/с. На поверхность аморфных лент наносилась тонкая пленка ППК различной толщины.

Полипараксилилен является линейным полимером с регулярной химической структурой $(-CH_2-C_6H_4-CH_2-)$ и молекулярной массой 200000 – 500000 ед.

Плотность ППК составляет $1,1 \text{ г/см}^3$, модуль упругости при растяжении 24500 кгс/см^2 , предел прочности при растяжении 630 кгс/см^2 .

ППК, осаждаемый на поверхности подложек, обычно имеет кристаллическую структуру, прозрачен в оптическом диапазоне, имеет высокие диэлектрические характеристики. Пленки конформны, являются равнотолщинными и ненапряженными. Адгезия ППК пленок к гладким поверхностям невелика, если не использованы различные методы предварительной обработки (например, плазмохимический).

ППК пленки на исследованных образцах получены по методу Горхэма, когда газ-мономер образуется в термическом реакторе в процессе пиролиза паров исходного димера – циклодипараксилола. Из высокотемпературного ($550\text{-}650^\circ\text{C}$) реактора затем газ-мономер поступает в низкотемпературную ($0\text{-}30^\circ\text{C}$) камеру нанесения пленок, где полимеризуется на поверхностях, имеющих температуру менее 30°C . Получение ППК пленок идет в проточном режиме при низких давлениях – от $0,1$ до 100 Па в различных технологических зонах установки.

Аморфные ленты помещались в вакуумную камеру установки получения ППК пленок, камера откачивалась до давления $0,1 \text{ Па}$, затем при давлении мономера в камере $3\text{-}5 \text{ Па}$ на образцах была получена пленка со средней скоростью 5 нм/мин . Толщина пленки составляла 10 и 100 нм . В плане исследования особенностей пластической деформации аморфных сплавов следует отметить такое достоинство получаемых покрытий, как прозрачность для световых волн.

Рентгеноструктурный и рентгенофазный анализы аморфных лент выполнены на дифрактометре ДРОН-3 в монохроматическом $\text{Cu}^{K\alpha}$ – излучении в следующем режиме: напряжение 30 кВ , ток 20 мА , скорость счетчика 2 град/мин .

Исследовались особенности пластической деформации аморфных сплавов *Fe-Cr-Mo-V-B-Si*, *Fe-Cr-Mo-Ni-C-Mg-Al*, *Fe-Ni-Co-Cr-Mo-B-Si*, *Fe-P-C-Si-Al-B* с нанесенными на их поверхности пленками ППК. Такими особенностями являлись полосы сдвига [1, 2], для обнаружения которых использовалось локальное деформирование поверхности. В качестве сосредоточенной нагрузки использовалась алмазная пирамида Виккерса прибора ПМТ-3. Эта методика позволяет дозировать величину деформации путем изменения нагрузки P на индентор. В данной работе она изменялась от $0,5$ до $2,0 \text{ Н}$, при этом глубина проникновения индентора не превышала 7 мкм . Измерялось удаление от отпечатка индентора полос сдвига в виде колец L . Фиксировалось их среднее число N . Велся статистический анализ измеренных параметров. Измерения велись на двух сторонах аморфных лент, то есть на стороне, соприкасавшейся при получении с медным диском кристаллизатором, и на стороне, соприкасавшейся с воздухом.

Результаты эксперимента и их обсуждение. Рентгеноструктурный и рентгенофазный анализы показали, что исследуемые материалы рентгеноаморфные.

Типичная деформационная картина, возникающая у отпечатка пирамиды Виккерса на поверхности аморфного сплава на основе железа, представлена на рис. 1. Наблюдается ансамбль полос сдвига двух типов: в виде колец или полуколец, окаймляющих отпечаток индентора, и в виде лучей, идущих от индентора. Следует отметить, что зависимость числа указанных дефектов от

нагрузки на индентор не однозначная. Согласно данным работы [2], полосы сдвига в виде колец возникают при малых нагрузках на индентор. Лучи же при отсутствии на поверхности пленки появляются при нагрузке на индентор выше 1 - 1,5 Н.

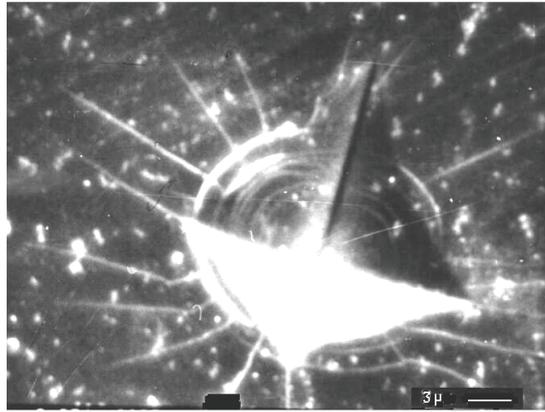


Рисунок 1. Типичная деформационная картина, возникающая на поверхности аморфного сплава у отпечатка пирамиды Виккерса. Снимок сделан с помощью растрового электронного микроскопа *Cam Scan-4*

На рис. 2, а и б представлены зависимости $N = f(P)$ и $L = f(P)$, полученные при испытаниях лент без пленок.

На рис. 2, а видно, что у сплава *Fe-Cr-Mo-V-B-Si* при испытаниях стороны, соприкасавшейся при получении ленты с воздухом (сторона 1), наблюдаются минимумы экспериментальной зависимости $N = f(P)$ при нагрузках на индентор 1 и 2 Н, а максимумы – при 0,5 и 1,5 Н. В целом на стороне 1 с ростом нагрузки на индентор число полос сдвига с ростом P убывает. На стороне, соприкасавшейся с медным диском-кристаллизатором (сторона 2), с ростом нагрузки на индентор число полос сдвига в виде чешуйчатых навалов плавно убывает, а после 1,5 Н число полос остается практически постоянным. Такой ход зависимости $N = f(P)$ говорит о том, что наиболее активно рассматриваемые полосы сдвига образуются при нагрузке на индентор, близкой к 0,5 Н. Далее процесс пластической деформации претерпевает переход к формированию полос сдвига в виде лучей, что приводит к перераспределению упругой энергии между двумя рассматриваемыми каналами пластической деформации, причем с ростом нагрузки на индентор больше энергии расходуется на формирование лучей. При этом чешуйчатые навалы, зародившись на некоторой промежуточной стадии внедрения индентора вминаются им в исследуемый материал. Наблюдение за вмятыми индентором полосами сдвига затруднительно и их число не учитывалось. Это отчасти и объясняет рассматриваемый спад значений N . Следует, однако, отметить, что в случае малых нагрузок на индентор, когда полосы сдвига в виде колец не вминаются в исследуемый материал, процесс их формирования существенно отличается от случая больших нагрузок. Отличие заключается в том, что при малых нагрузках формирование полос сдвига заканчивается при

прекращении проникновения индентора и при действии статических напряжений практически покоящегося индентора, находящегося под нагрузкой. При больших нагрузках на индентор формирование чешуйчатых навалов прекращается еще на стадии динамического деформирования, поэтому в данном случае рассматриваемый канал реализуется не в полной мере в плане использования энергии деформирования.

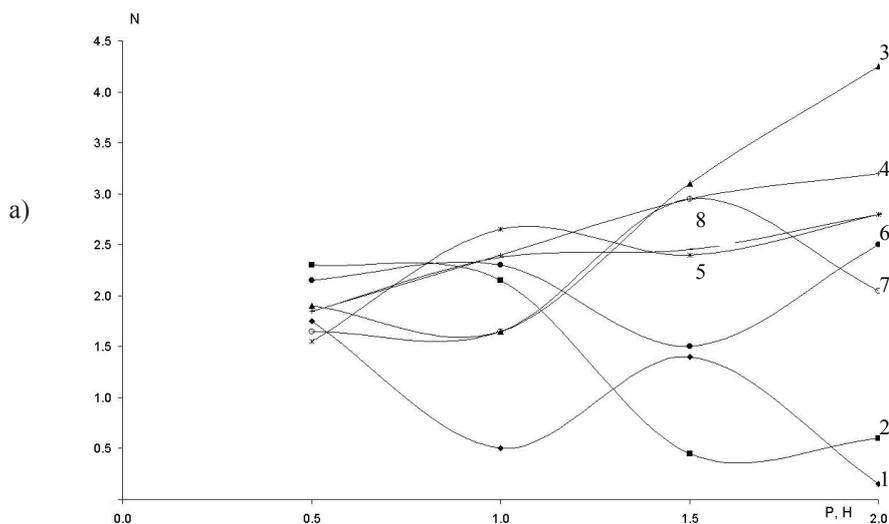


Рисунок 2. Зависимости среднего числа N полос сдвига и их удаления от грани отпечатка алмазной пирамиды L от нагрузки на индентор P : a и b – исходные образцы без пленки; $в$ и $г$ – с пленкой 10 нм; $д$ и $е$ – с пленкой 100 нм:

- 1 – *Fe-Cr-Mo-V-B-Si* (сторона 1);
- 2 – *Fe-Cr-Mo-V-B-Si* (сторона 2);
- 3 – *Fe-Cr-Mo-Ni-C-Mg-Al* (сторона 1);
- 4 – *Fe-Cr-Mo-Ni-C-Mg-Al* (сторона 2);
- 5 – *Fe-Ni-Co-Cr-Mo-B-Si* (сторона 1);
- 6 – *Fe-Ni-Co-Cr-Mo-B-Si* (сторона 2);
- 7 – *Fe-P-C-Si-Al-B* (сторона 1);
- 8 – *Fe-P-C-Si-Al-B* (сторона 2).

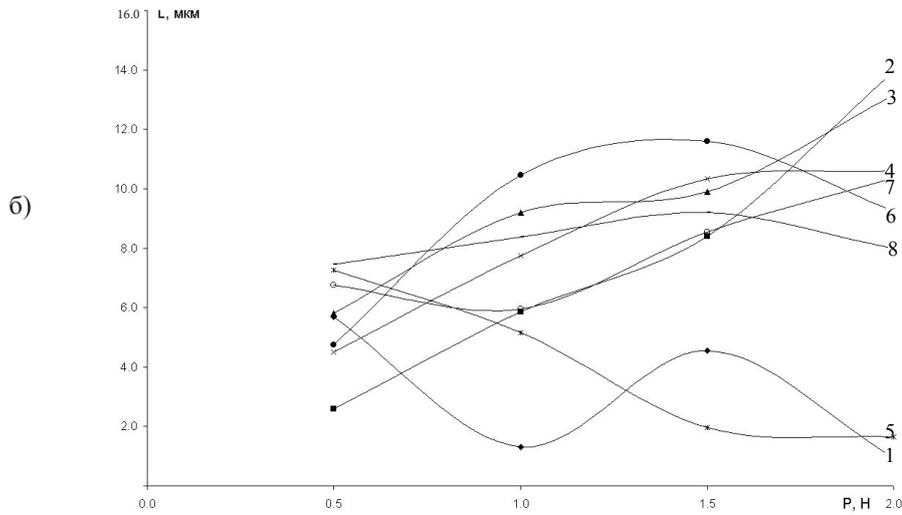
Сторона 1 контактировала при получении ленты с воздухом,
2 – с медным диском кристаллизатором

Совершенно иная картина наблюдается в случае сплава *Fe-Cr-Mo-Ni-C-Mg-Al* (см. рис. 2, а). В этом случае для обеих сторон ленты наблюдается рост N при увеличении P . Согласно развиваемым представлениям, это говорит о том, что стадия перехода пластической деформации от формирования чешуйчатых навалов к полосам сдвига в виде лучей находится в области больших нагрузок на индентор, чем в случае сплава *Fe-Cr-Mo-V-B-Si*.

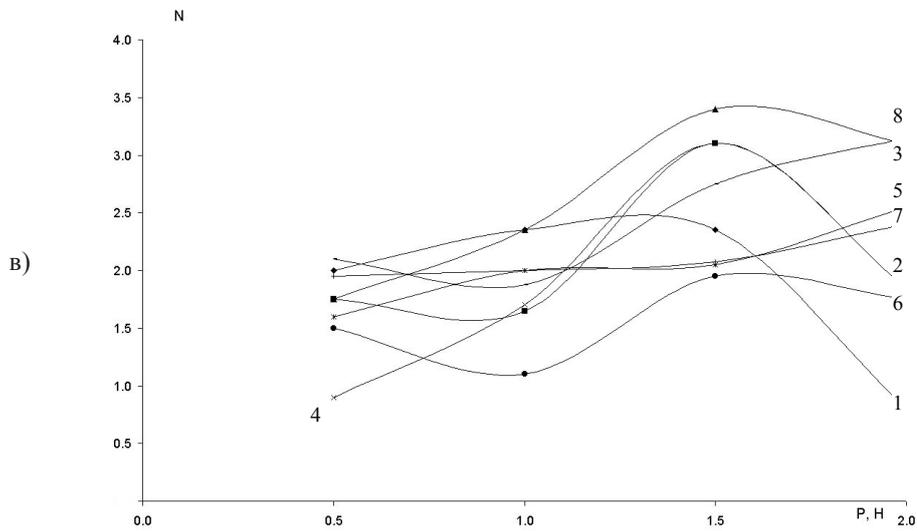
У сплавов *Fe-Ni-Co-Cr-Mo-B-Si* и *Fe-P-C-Si-Al-B* вид зависимости $N = f(P)$ более сглаженный и существенного изменения N с ростом P в исследуемом интервале нагрузок не наблюдалось.

Таким образом, в целом наибольшее число полос сдвига в виде чешуйчатых навалов наблюдается при нагрузках на индентор 1,5 и 2 Н у сплава *Fe-Cr-Mo-*

Ni-C-Mg-Al на стороне 1. При нагрузке 1 Н наибольшее число полос у сплава *Fe-Ni-Co-Cr-Mo-B-Si* на той же стороне, что и у предыдущей ленты. А при 0,5 Н больше дефектов на стороне 2 сплава *Fe-Cr-Mo-V-B-Si*. Следует отметить, что для исследуемых материалов разброс числа полос сдвига при нагрузке на индентор 0,5 Н невелик. Различие не превышает одной полосы сдвига. Однако с ростом нагрузки на индентор это различие существенно увеличивается и достигает максимума при 2 Н. При нагрузке 2 Н наименьшее число полос сдвига у сплава *Fe-Cr-Mo-V-B-Si*.



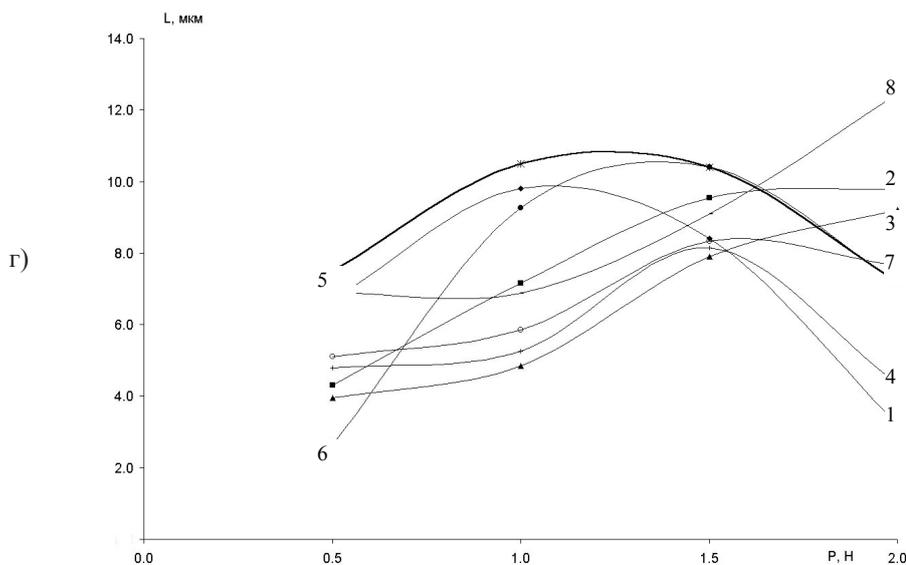
Продолжение рисунка 2



Продолжение рисунка 2

На рис. 2, б видно, что уменьшение числа чешуйчатых навалов с ростом нагрузки на индентор не всегда приводит к уменьшению удаления их от отпечатка индентора. Так у сплава $Fe-Cr-Mo-V-B-Si$ на стороне 2 (в отличие от стороны 1) на фоне уменьшения числа чешуйчатых навалов (см. рис. 2, а) наблюдается увеличение их удаленности от индентора с ростом нагрузки на него. Это говорит о том, что напряженное состояние и структура у двух поверхностей аморфной ленты различны. Вероятно, плотность дисклинаций на стороне 2 сплава $Fe-Cr-Mo-V-B-Si$ выше, чем на стороне 1. Являясь концентраторами внутренних напряжений, дисклинации способствуют активации процесса формирования полос сдвига. Более того, по данным работы [1], дисклинации в аморфных материалах активно взаимодействуют с дислокациями полос сдвига, что облегчает процессы генерации и развития полос сдвига. Аналогичная ситуация наблюдается и для двух сторон сплава $Fe-Ni-Co-Cr-Mo-B-Si$ (см. рис. 2, б).

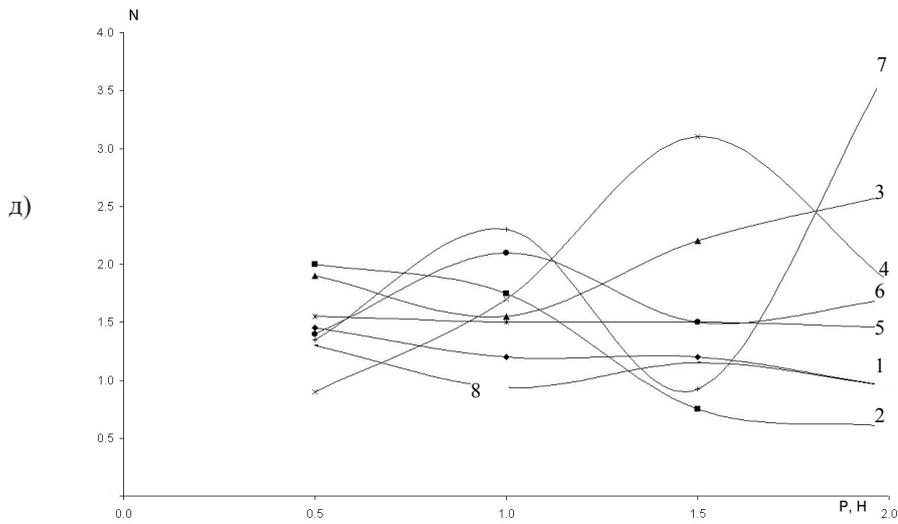
У сплава $Fe-Cr-Mo-Ni-C-Mg-Al$ с ростом нагрузки на индентор удаление от него полос сдвига в виде чешуйчатых навалов увеличивается на двух сторонах ленты. Практически аналогичная ситуация наблюдается и для сплава $Fe-P-C-Si-Al-B$ (см. рис. 2, б).



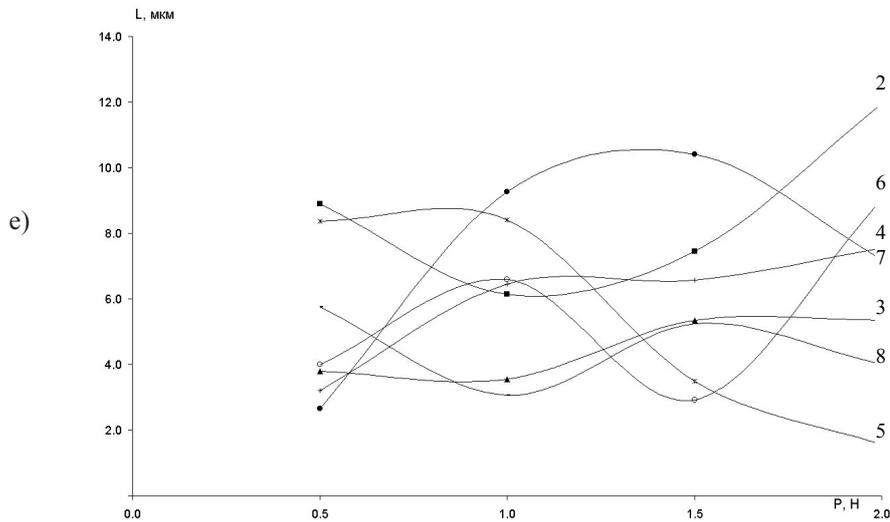
Продолжение рисунка 2

Особенностью формирования в аморфных лентах с нанесенными на их поверхности пленками ППК, полос сдвига в виде лучей является то, что их появление наблюдается при более высоких (порядка 2 Н) нагрузках на индентор, чем в случае лент без пленок. Это, вероятно, обусловлено тем, что необходимый уровень напряжений в областях зарождения лучей в материалах с пленками достигается позже, чем в сплавах без пленок. Об этом в частности свидетельствуют результаты измерений глубины проникновения индентора в зависимости от

нагрузки на него, проведенные в данной работе. Было установлено, что пленка действительно способствует уменьшению глубины проникновения индентора на величину порядка 3–5 мкм. Следовательно, пластическая деформация в исследуемых материалах с нанесенной на их поверхности пленкой проявляется менее интенсивно из-за меньшего объема материала подложки, вытиснутого индентором. А это в свою очередь приводит к тому, что стадия перехода пластической деформации от чешуйчатых навалов к лучам смещается в область более высоких нагрузок.



Продолжение рисунка 2



Окончание рисунка 2

Влияние пленок ППК на характер развития полос сдвига в виде колец представлено на рис. 2, в, г, д, е в виде зависимостей $N = f(P)$ и $L = f(P)$. В случае пленки 10 нм заметна общая тенденция смещения максимума числа рассматриваемых полос из области нагрузки 1 Н в область 1,5 Н (см. рис. 2, в). При наличии на поверхности аморфной ленты пленки толщиной 100 нм, ход зависимостей $N = f(P)$ более сглаженный (см. рис. 2, д), чем в случае пленки 10 нм. Это, вероятно, указывает, что в данном случае максимум числа полос сдвига смещен в область нагрузок на индентор больших 2 Н. Этим можно объяснить значительное увеличение N на стороне 1 сплава *Fe-P-C-Si-Al-B* с пленкой 100 нм при нагрузке на индентор 2 Н (см. рис. 2, д).

Для большинства исходных материалов, изучаемых в работе, максимальное удаление от отпечатка индентора полос сдвига типа колец наблюдается при нагрузке на 2 Н (см. рис. 2, б). На рис. 2, г, е наблюдается общая тенденция, указывающая на то, что наличие на поверхности тонкой пленки способствует смещению максимума удаления L в область более низких нагрузок на индентор. В случае пленки 10 нм (см. рис. 2, г) этот максимум находится в интервале 1 – 1,5 Н, а в случае пленки 100 нм – 0,5 – 1 Н. Хотя следует отметить, что такая ситуация наблюдается не для всех исследуемых сплавов. Отклонение от отмеченной тенденции смещения максимума L в область более низких нагрузок на индентор наблюдаются на сторонах, контактировавших при получении лент с медным диском-кристаллизатором.

Выводы. Изучено влияние тонких пленок ППК на закономерности формирования полос сдвига у отпечатка пирамиды Виккерса. Установлено, что при наличии тонких пленок на поверхности стадия перехода пластической деформации от формирования чешуйчатых навалов к образованию лучей смещается в область более высоких нагрузок. Более того, тонкие пленки ППК способствуют смещению максимума числа полос сдвига в виде чешуйчатых навалов в область более высоких нагрузок на индентор, а максимума удаления указанных полос сдвига от отпечатка индентора – в область низких нагрузок.

Автор благодарит М.Н. Верещагина за предоставленные образцы, Н.П. Глазырина – за помощь в нанесении покрытий и Д.Б. Зюкова – за помощь в проведении эксперимента.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Глезер, А. М.* Структура и механические свойства аморфных сплавов / А. М. Глезер, Б. В. Молотилов. – Москва : Металлургия, 1992. – 208 с.
2. *Верещагин, М. Н.* / М. Н. Верещагин, В. Г. Шепелевич, О. М. Остриков, С. Н. Цыбранкова // Труды X Российской конференции “Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов”. Т. IV: Взаимосвязь строения и свойств различных состояний (кристаллическое, квазикристаллическое, аморфное, жидкое). – Екатеринбург – Челябинск, 2001. – С. 3–6.

Поступила в редакцию 26.09.2017 г.

Контакты: oostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Ostrikov O. THE INFLUENCE OF POLYPARAXYLYLENE THIN FILMS ON PLASTIC DEFORMATION IN LOCAL DEFORMATION OF SURFACE OF AMORPHOUS ALLOYS BASED ON IRON.

The influence of polyparaxylylene thin films on the regularities in the formation of shear bands on the surface of amorphous iron-based alloys at the stress concentrator is studied. It has been established that in the presence of thin films on the surface, the process of the transition of plastic deformation from the stage of formation of flake bulk to the stage of formation of shear bands in the form of rays is shifted to the area of higher loads. Thin polyparaxylylene PPK films help to shift the maximum of the number of shear bands in the form of scaly bulk to the area of higher loads on the indenter, and the maximum removal of these shear bands from the indenter print is to the area of low loads.

Keywords: amorphous alloys based on iron, shear bands, polyparaxylylene thin films.

УДК 535.5 + 621.658.011 : 620.1

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕКЛЕ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА РАССЕЯННОГО СВЕТА

А. Н. ВАСИЛЕНКО

аспирант

И. У. ПРИМАК

кандидат физико-математических наук, доцент

А. В. ХОМЧЕНКО

доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой физики
Белорусско-Российский университет

На основе анализа распределения интенсивности рассеянного света предложен метод оценки напряжений в закаленном стекле. Исследовано ассиметричное распределение механических напряжений в поперечном сечении образца и сделаны оценки значений центральных напряжений.

Ключевые слова: остаточные напряжения, анизотропия показателя преломления, рассеяние света.

Введение

Применение закаленного стекла в технике и строительстве стимулирует исследования напряженных состояний в стекле и конструкциях на его основе, о чем свидетельствует существование ряда методов и технологий, используемых для их контроля и диагностики [1–7]. Механические и оптические характеристики такого стекла определяются характером и режимами закалки, поэтому измерение механических напряжений является способом контроля не только качества изделий, но и технологии их изготовления. Стекло при наличии в нем механических напряжений становится анизотропным, и измерения интенсивности поляризованного света, прошедшего через исследуемый образец, позволяют оценить двулучепреломление в таких объектах. С этой точки зрения методы поляриметрии, основанные на эффекте фотоупругости, представляют определенный интерес для исследования напряжений [8–11]. Измеряя распределение интенсивности света можно анализировать и оценивать двулучепреломление в отдельной точке или небольшой области стекла, но достаточно сложно это выполнить для протяженных анизотропных объектов. Поляризационно-оптический метод, предложенный в [12], позволяет визуализировать поля напряжений в большой области анализируемого объекта. Однако оценка величины поверхностных напряжений требует предварительного измерения центральных напряжений, что возможно, например, на основе анализа рассеяния света на неоднородностях распределения показателя преломления в стекле [13; 14].

© Василенко А. Н., 2018

© Примак И. У., 2018

© Хомченко А. В., 2018

В настоящей работе предлагается подход, основанный на анализе зарегистрированного пространственного распределения интенсивности рассеянного света и примененный для исследования распределения механических напряжений в поперечном сечении закаленного стекла.

Регистрация рассеянного света для измерения профиля механических напряжений

Известно, что разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами, распространяющимися в неоднородной анизотропной среде, связана с механическими напряжениями следующим соотношением [12]

$$\delta(x, y) = AkC \int_{-d/2}^{d/2} (\sigma_X(x, y, z) - \sigma_Y(x, y, z)) dz, \quad (1)$$

где σ_X и σ_Y – напряжения нормальные плоскостям OYZ и OXZ соответственно, C – фотоупругая постоянная материала, d – толщина образца в направлении распространения поляризованного света, A – некоторая константа, определяемая экспериментально.

Учитывая взаимосвязь фазы волны с напряжениями, можно воспроизвести поле механических напряжений. На практике распределение напряжений в поперечном сечении стекла описывают функцией вида [15; 16]

$$\sigma = \sigma_0(1 - 12(z/d)^2), \quad (2)$$

где σ_0 – напряжение при $z = 0$ (центральные напряжения растяжения).

Для нахождения значений остаточных напряжений в центре поперечного сечения образца и определения зависимости σ_x и σ_y от координат были выполнены измерения рассеянного излучения в процессе сканирования образца узким пучком в поперечном сечении стекла по его толщине. Наблюдение такого рассеяния позволяет визуализировать распространение света в анизотропном стекле. При этом, анализируя распределения интенсивности рассеянного света, можно практически локально исследовать анизотропию показателя преломления и напряжения в стекле. Рассмотрим процедуру измерения, используемую в таком подходе.

Схема, позволяющая регистрировать распределение рассеянного света, представлена на рисунке 1 (стр. 61). Линейно поляризованный световой пучок диаметром 180 мкм от источника 1 при нормальном падении на торец стекла 7 распространяется в нем. В качестве источника света использован твердотельный лазер с длиной волны 533 нм.

Наличие в закаленном стекле флуктуаций показателя преломления малых по сравнению с длиной волны зондирующего излучения является причиной рассеяния света [13]. Области таких флуктуаций, имеющие небольшие по сравнению с длиной волны излучения, действуют как диполи, рассеивая свет в направлении, перпендикулярном направлению их возбуждения световой волной. Рассеянный свет регистрируется в плоскости, перпендикулярной направлению распространения фоторегистрирующим устройством 5 (фотоприемник или матрица фотоприемников).

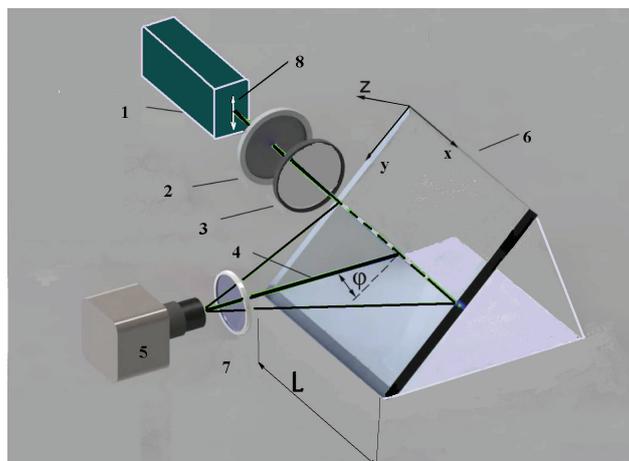


Рисунок 1. Принципиальная схема измерения: 1 – источник света, 2 – поляризатор, 3 – линза, 4 – регистрируемое излучение, 5 – фотокамера, 6 – исследуемый объект, 7 – фильтр, 8 – направление ориентации плоскости поляризации излучения, прошедшего через поляризатор

В анизотропном образце распространяются обыкновенная и необыкновенная волны, при этом обыкновенная волна поляризована в направлении главных напряжений σ_y , а необыкновенная – в направлении главных напряжений σ_x . Эти компоненты выделены как главные значения напряжений, определяющие направления, в которых поляризованы обыкновенная и необыкновенная волны. Вследствие того, что обыкновенная и необыкновенная волны имеют различные фазовые скорости в анизотропном материале, между ними возникает фазовая задержка. Интерференция между обыкновенной и необыкновенной волнами изменяет состояние поляризации вдоль распространения света в образце. Пространственная модуляция рассеянного света заметна в направлении, перпендикулярном направлению распространения зондирующего излучения в анизотропном образце.

При этом интенсивность рассеянного света определяется как [14]

$$I_{\perp}(z, x) = I_0 \cos^2(0,5k_0 C \sigma(z)x), \quad (3)$$

где I_0 – некоторая постоянная, k_0 – волновое число в вакууме, C – фотоупругая постоянная материала, $\sigma(z)$ – функция, описывающая распределение напряжения в стекле.

Анализ регистрируемых зависимостей $I_{\perp}(z, x)$, построенных при сканировании пучком света параллельно оси Ox , позволяет получать оценки зависимости напряжений $\sigma(z)$. Согласно [16] распределение напряжений в стекле по толщине $\sigma(z)$ имеет вид параболы. При этом только при полном соблюдении технологических условий закалки это распределение симметрично относительно оси Oy , на практике это условие обычно не выполняется. Поэтому представим распределение напряжений в стекле составной функцией вида:

$$\sigma(z) = \begin{cases} A_1 z^2 + \sigma_0 & \text{при } -0,5d \leq z \leq 0, \\ A_2 z^2 + \sigma_0, & \text{при } 0 < z \leq 0,5d, \end{cases} \quad (4)$$

где A_1 и A_2 – некоторые постоянные; d – толщина стекла, $d = d_1 + d_2$; $\sigma_0 = \sigma(z = 0)$ – максимальное значение напряжений растяжения (σ_0 – центральные напряжения в случае прямолинейного распространения света).

Так как распределение механических напряжений в стекле по толщине имеет вид параболы, т. е. представляет собой фактически линзу, то при распространении светового пучка в направлении OX (см. рисунок 1) он будет отклоняться в направлении увеличения показателя преломления. Последнее регистрируется на эксперименте: фотография светового пучка, распространяющегося в закаленном стекле толщиной 20 мм, приведена на рисунке 2. Так как при сканировании образца вдоль оси OZ световой пучок попадает в области с различным значением показателя преломления, то он на разных отрезках x_i отклоняется к поверхности образца.

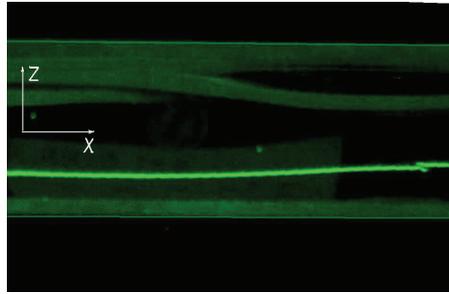


Рисунок 2. Изображение распространяющегося светового пучка вдоль образца (в направлении OX) при его регистрации в направлении OY

При этом пространственная модуляция рассеянного света, заметная в направлении, перпендикулярном направлению распространения зондирующего излучения в анизотропном образце, и обусловленная интерференцией между обыкновенной и необыкновенной волнами при их распространении в образце, прекращается при различных значениях координаты x_0 . На рисунке 3 приведены наложенные картины пространственной модуляции, полученные при различных координатах z_0 точки ввода излучения в образец.

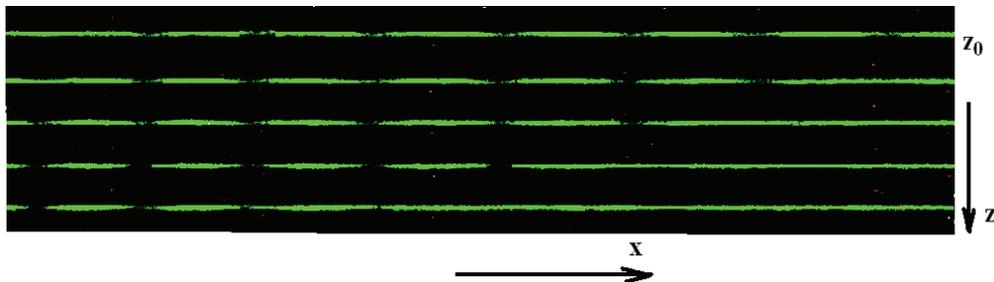


Рисунок 3. Изменение распределения интенсивности рассеянного света вдоль образца (в направлении OX) при его сканировании в поперечном сечении (в направлении OZ)

В общем случае траектория луча описывается уравнением [17]

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{n(z)} \frac{dn}{dz}, \quad (5)$$

где $n(z)$ и $\frac{dn}{dz}$ – функция и ее производная, описывающие распределение показателя преломления по толщине стекла.

Тогда значения коэффициентов A_1 и A_2 можно найти, проанализировав величину отклонения луча при сканировании стекла в поперечном сечении параллельно оси $0x$ (рисунок 4, а). Полагая, что $n(z) \approx n_0$ (n_0 – показатель преломления изотропного стекла),

$$\frac{dn}{dz} = \begin{cases} -2CA_1z & \text{при } -0,5d \leq z \leq 0, \\ -2CA_2z & \text{при } 0 < z \leq 0,5d, \end{cases} \quad (6)$$

и учитывая граничные условия $z(x=0) = 0$, $z(x=-\infty) = 0$ получаем решение уравнения (5).

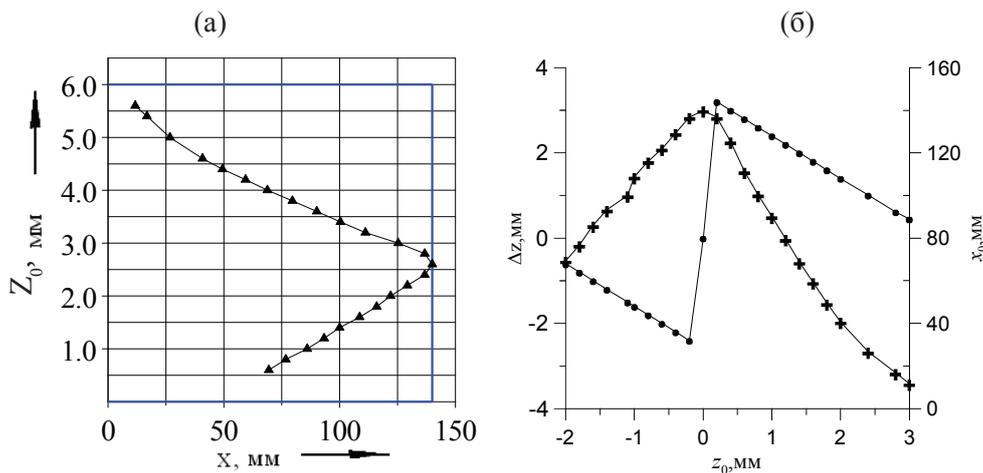


Рисунок 4. Зависимость расстояния x , на котором достигается отклонение Δz светового пучка от координаты его точки ввода в образец (а), и отклонения Δz (\bullet) и расстояния x_0 ($+$), на котором достигается это отклонение, от координаты точки ввода z_0 зондирующего пучка в образец (б); стекло толщиной 6 мм ($d_1 = 2,6$ мм, $d_2 = 3,4$ мм)

При этом величина отклонения от координаты точки ввода луча в стекло z_0 определяется как

$$\Delta z = z - z_0 = z_0 \left(\exp\left(\sqrt{-2n_0^{-1}CA_{1,2}}x_0\right) - 1 \right), \quad (7)$$

где x_0 – длина распространения светового пучка, при которой регистрируется данное отклонение, $A_{1,2}$ – постоянные A_1 или A_2 для соответствующей области $-0,5d \leq z \leq 0$ или $0 < z \leq 0,5d$.

Оценку σ_0 можно получить на основе анализа зарегистрированного пространственного распределения интенсивности рассеянного света $I_{\perp}(0, x)$. Как следует из данных, представленных на рисунке 3, эта зависимость $I_{\perp}(0, x)$ является периодической и значение $\sigma_0 = \sigma(z=0)$ – соответствует прямолинейному распространению света в стекле. Обработка такой зависимости позволяет определить период T функции $I_{\perp}(0, x)$.

После вычисления периода T функции $I_{\perp}(0, x)$ максимальные напряжения растяжения можно оценить, используя выражение

$$\sigma_0 = 2\pi / (k_0 CT). \quad (8)$$

В соответствии с результатами обработки данных, представленных на рисунке 3, распределение интенсивности при $z=0$ имеет период $T=6,1$ мм. При этом оцениваемое значение σ_0 составило 34 МПа. Учитывая выше сказанное и тот факт, что на обеих поверхностях стекла $\sigma_{II1} = \sigma(-d_1) = A_1 d_1^2 + \sigma_0$ и $\sigma_{II2} = \sigma(d_2) = A_2 d_2^2 + \sigma_0$ были получены значения $\sigma_{II1} = 340$ МПа, $\sigma_{II2} = 318$ МПа. Полученные значения остаточных напряжений на поверхности стекла и минимальных растягивающих напряжений позволяют восстановить распределение механических напряжений в поперечном сечении образца.

Заключение

Таким образом, используя предложенный подход, основанный на анализе зарегистрированного распределения интенсивности рассеянного света, можно оценить механические напряжения в закаленном стекле и исследовать асимметричное распределение механических напряжений в поперечном сечении образца и сделать оценки значений растягивающих и сжимающих напряжений в стекле, а также поверхностных напряжений. Показано, что распределение остаточных напряжений в закаленных стеклах является существенно неоднородным. На примерах стекол разной толщины исследована и продемонстрирована неоднородность распределения остаточных напряжений в поперечном сечении стеклянной пластины. Сравнение результатов измерений с данными теоретических расчетов указывает на их удовлетворительную корреляцию в центральной области стеклянной пластины. При удалении в направлении, перпендикулярном плоскости стекла (вдоль оси OZ), регистрируется отклонение профиля показателя преломления от параболического. Представленные результаты исследования оптических свойств закаленных стекол позволяют сделать вывод, что предложенный подход позволяет корректно оценивать пространственное распределение величины напряжений в анизотропных неоднородных объектах большой площади.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Bouchal, P.** Polarization sensitive phase-shifting Mirau interferometry using a liquid crystal variable retarder / Petr Bouchal, Radek Celechovsky, and Zdenek Bouchal // Optics Letters. – 2015. – Vol. 40, № 19. – P. 4567–4570.
2. A new method for tempering stress measurement in glass panels / H. Aben [at al] // Estonian J. of Engineering. – 2013. – Vol. 19, № 4. – P. 292–297.

3. **Хомченко, А. В.** Измерение распределения разности фаз при линейном двулучепреломлении в твердых телах с внутренними напряжениями / А. В. Хомченко, И. У. Примак, А. Н. Василенко // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2016. – Т. 96, № 3. – С. 124–130.
4. **Вишняков, Г. Н.** Измерение разности фаз при линейном двулучепреломлении в дифференциальном фазовом поляриметре с вращающимся анализатором / Г. Н. Вишняков, Г. Г. Левин, А. Г. Ломакин // Оптический журнал. – 2011. – Т. 78, № 9. – С. 76–81.
5. **Helen, S. S.** Achromatic phase shifting by a rotating polarizer / S. S. Helen, M. P. Kothiyal, R. S. Sirohy // Optics Communications – 1998. – Vol. 154, № 5-6. – P. 249–254.
6. Full-field heterodyne polariscope with an image signal processing method for principal axis and phase retardation measurements / Yu-Lung Lo [at al] // Applied Optics. – 2006. – Vol. 45, №. 31. – P. 8006–8012.
7. **Матяш, И. Е.** Модуляционная поляриметрия термоупругости, индуцированной тепловым излучением в стекле / И. Е. Матяш, И. А. Михайлова, О. Н. Мищук, Б. К. Сердега // ФТТ. – 2014. – Т. 56, вып. 7. – С. 1439–1445.
8. **Ajovalasit, A.** Measurement of edge residual stresses in glass by phase-shifting method / Ajovalasit A., Petrucci G., Scafidi N. // Optics and Lasers in Engineering. – 2011. – Vol. 49, № 5. – P. 652–657.
9. **Calvert, G.** Applications of modern automated photoelasticity to industrial problems / Calvert, G., Lesniak J., Honlet M. // Insight. – 2002. – Vol. 44, № 4. – P. 1–4.
10. **Kumar, Y. P.** Opaque optics thickness measurement using a cyclic path optical configuration setup and polarization phase shifting interferometry / Y. Pavan Kumar and Sanjib Chatterjee // Applied Optics. – 2012. – Vol. 51, № 9. – P. 1352–1356.
11. **Park, B. K.** Precision polarimetry with real-time mitigation on optical window birefringence / B. K. Park, A. O. Sushkov, D. Budker // Review of Scientific instruments. – 2009. – Vol. 79, № 013108. – P. 1–5.
12. **Хомченко, А. В.** Поляризационная интерферометрия сред с линейным двулучепреломлением / А. В. Хомченко, И. У. Примак, А. Н. Василенко // Сборник трудов: Прикладная оптика – 2016. Санкт-Петербург. 2016. – Т. 2. – С. 213–217.
13. **Hodemann, S.** Scattered laser light fringe patterns for stress profile measurement in tempered glass plates / S. Hodemann [at al] // European Journal Glass Scientific Technology, A. – 2014. – Vol. 55, № 3. – P. 90–95.
14. Gradient scattered light method for non-destructive stress profile determination in chemically strengthened glass / S. Hodemann [at al] // Journal Mater Scientific. – 2016. – Vol. 51. – P. 5962–5978.
15. On the inhomogeneity of residual stresses in tempered glass panels / J. Anton [at al] // Estonian Journal of Engineering. – 2012. – Vol. 18, №. 1. – P. 3–11.
16. Stress profile measurement in axially symmetric glass sample / N. Kreemer [at al] // Ceramics – Silikaty. – 2008. – Vol. 52, № 3. – P. 183–187.
17. **Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – Москва : Наука, 1973. – 716 с.

Поступила в редакцию 09.10.2017 г.

Контакты: avkh@mogilev.by (Хомченко Александр Васильевич)

Vasilenko A., Primak I., Khomchenko A. SCATTERED LIGHT MEASUREMENT FOR RESIDUAL-STRESS ESTIMATIONS IN GLASS.

The method based on the digital processing of recorded scattered light distribution is proposed enabling the measurement of the residual-stress profile in glass sample. The residual-stress distribution in cross-sections of sample is studied and the estimations of value of the central stress are made.

Keywords: stress measurement, polarimetry, birefringence distribution, residual stresses, scattered laser light.

УДК 535.5 + 621.658.011:620.1

ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ В СТЕКЛЕ

А. В. ХОМЧЕНКО

доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой физики
Белорусско-Российский университет

Продемонстрирована возможность измерения распределения двулучепреломления в неоднородных анизотропных средах методом поляризационной интерферометрии. Исследованы возможности и границы применения метода при анализе распределения величины механических напряжений в плоскости закаленного стекла.

Ключевые слова: поляриметрия, поляризационная интерферометрия, метод измерения, распределение двулучепреломления, остаточные напряжения, закаленные стекла.

Введение

Широкое применение закаленного стекла в технике и строительстве стимулирует исследования напряженных состояний в стекле и конструкциях на его основе, о чем свидетельствует существование ряда методов и технологий, используемых для их детектирования [1–2]. Механические и оптические характеристики такого стекла определяются характером и режимами закалки [3], поэтому измерение механических напряжений является способом контроля не только качества изделий, но и процесса их изготовления. Стекло при наличии в нем механических напряжений становится анизотропным, и измерения интенсивности поляризованного света, прошедшего через исследуемый образец, позволяют оценить двулучепреломление в таких объектах [4–6]. С этой точки зрения методы поляриметрии, основанные на эффекте фотоупругости, представляют определенный интерес для исследования напряжений [7–10]. При этом следует отметить, что измеряя распределение интенсивности света можно анализировать и оценивать двулучепреломление в отдельной точке или небольшой области стекла, но достаточно сложно это выполнить для протяженных анизотропных объектов. Отсутствие эффективных способов измерения остаточных напряжений осложняет управление процессами производства закаленного стекла. В то же время для оптимизации процессов закалки стекла и разработки соответствующего оборудования необходим анализ распределения внутренних механических напряжений во всем объеме контролируемого объекта.

Настоящая работа является развитием исследований [11], посвященных анализу распределения остаточных напряжений в протяженных анизотропных прозрачных объектах.

Поляризационная интерферометрия анизотропных сред

В настоящее время разработан ряд методов измерения механических напряжений. В качестве примера можно привести тензометрический метод, основанный на измерении с помощью тензодатчиков деформации возмущенного напряженно-деформированного состояния в окрестности создаваемых отверстий в анализируемом образце [12]. Обработка результатов измерения позволяет восстановить величину механических напряжений, существовавших в этих точках до создания отверстия. Достаточно эффективны такие неразрушающие методы измерения, как рентгеновский, акустический, магнитошумовой и др. [1]. Очевидно, что каждый из этих методов имеет свою область применения и предел чувствительности, например, рентгеновский метод непригоден для исследования закаленного стекла, а магнитошумовой – для немагнитных материалов.

В [13–15] описан метод измерения напряжений, получивший название голографической интерферометрии. Принципиальная оптическая схема записи голограмм известна и приведена, например, в [16]. При этом если совместить две голограммы объекта, записанные в различное время при разных состояниях анализируемого объекта, то результирующая интерферограмма отражает различие его состояний, а оси симметрии интерференционной картины совпадают с направлениями главных растягивающих или сжимающих напряжений. Величина напряжений пропорциональна числу интерференционных полос, причем цена полосы зависит от упругих свойств материала и определяется по калибровочным кривым, рассчитанным на основании решения задачи теории упругости.

Голографический метод оказался надежным и эффективным методом регистрации напряженных состояний. Но процесс записи и обработки голограмм довольно сложен и трудоемок. Использование современной цифровой системы видеорегистрации, сопряженной с персональным компьютером, существенно упростило процессы измерения. Этот метод, названный цифровой спекл-интерферометрией, во многом совпадает с голографической интерферометрией. Отличие состоит в том, что голография фиксирует полную информацию о геометрии тела, а спекл-интерферометрия использует двумерную электронную фотографию светового пучка, отраженного от объекта [17; 18]. Запись и сопоставление двух таких картин выявляют изменения в характеристиках анализируемого тела, как и в голографии.

Определенный интерес составляют методы оптической поляриметрии [8–10]. Существуют различные способы определения разности хода лучей [15; 19–21], однако в большинстве случаев они не применимы для исследования протяженных объектов. Поляризационно-оптический метод, предложенный в [11], позволяет визуализировать поля напряжений в большой области анализируемого объекта. Принципиальная схема установки, используемой для регистрации поляризационных интерферограмм, представлена на рисунке 1. Линейно поляризованный свет, проходя через неоднородную анизотропную среду 3, изменяет состояние поляризации в каждой точке плоскости (x, y) в разной степени. После этого пучок, прошедший через образец, анализатор 4,

скрещенный с поляризатором 2, попадает в фоторегистрирующее устройство 6, подключенное к компьютеру 7.

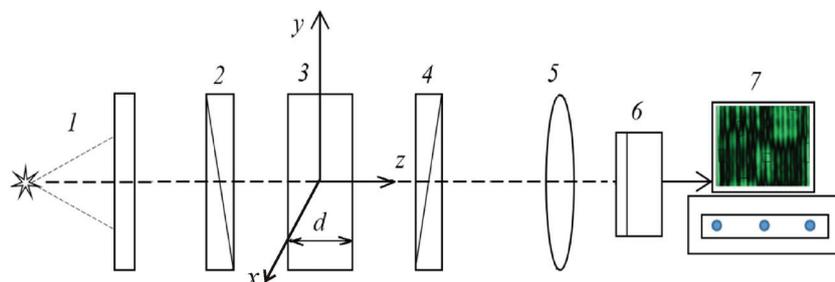


Рис. 1. Принципиальная оптическая схема установки, используемой для регистрации поляризационных интерферограмм: 1 – источник света, 2 – поляризатор, 3 – исследуемый объект, 4 – анализатор, 5 – фокусирующая линза, 6 – фоторегистрирующее устройство, 7 – компьютер

Использование цифровых фоторегистрирующих устройств позволяет сканировать распределение интенсивности излучения в плоскости (x, y) , фиксируемое матричным фотоприемником 5 (рисунок 2, а). При этом регистрируемая интенсивность света определяется выражением [5]

$$I(x, y) = I_p T (\cos^2 \chi - \sin 2\alpha \cdot \sin(2(\alpha - \chi)) \sin^2 \frac{\delta}{2}), \quad (1)$$

где $I(x, y)$ – регистрируемое распределение интенсивности света, прошедшего через неоднородный анизотропный образец; $I_p = I_p(x, y)$ – интенсивность света на выходе из поляризатора; $T = T(x, y)$ – коэффициент пропускания системы, учитывающий отражение света от поверхности образца; $\alpha = \alpha(x, y)$ – угол между оптической осью образца в точке (x, y) и плоскостью пропускания поляризатора; χ – угол между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора; $\delta = \delta(x, y)$ – разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами.

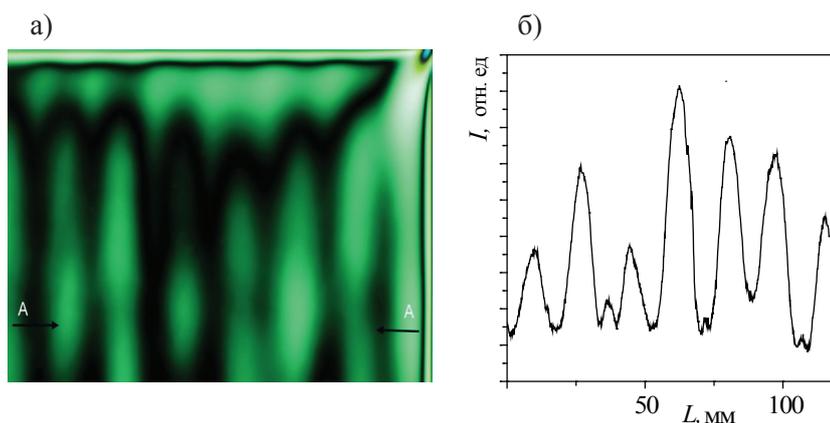


Рис. 2. Изображение закаленного стекла в поляризованном свете (а) и распределение вдоль линии А-А интенсивности излучения, прошедшего через стекло (б)

Распределение интенсивности поляризованного излучения с длиной волны 532 нм, прошедшего через стекло, приведено на рисунке 2, б. При прохождении линейно поляризованного излучения через исследуемое стекло, в котором присутствуют механические напряжения, меняется его состояние поляризации, при этом регистрируемая интенсивность света (см. рисунок 2) является функцией координат, зависит от ориентации образца относительно поляризатора и определяется выражением (1). Обработывая регистрируемые распределения интенсивности $I(x, y)$, можно восстановить разность фаз δ в отдельной точке стекла или небольшой его области и, учитывая ее взаимосвязь с напряжением, определить величину напряжений в некоторой точке с координатами (x, y) [4]. Однако это невозможно сделать для таких протяженных неоднородных анизотропных объектов как закаленные стекла. Кроме того, применение поляризационных методов ограничивается тем, что на регистрируемое распределение интенсивности накладываются так называемые изоклины, положение которых определяется распределением угла $\alpha = \alpha(x, y)$ вдоль поверхности стекла. Изоклины существенно искажают регистрируемую картину (рисунок 3), так, например, при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$ интенсивность прошедшего света $I = 0$ (даже если напряжения отличны от нуля), и не позволяют адекватно восстановить распределение напряжений.

Данную проблему можно решить для рассматриваемой отдельной точки исследуемого образца, устанавливая угол $\alpha = 45^\circ$ [5]. В этом случае из выражения (1) следует

$$I = I_p |T|^2 \sin^2(\delta/2), \quad (2)$$

но в протяженном неоднородном объекте, где направление главных напряжений в каждой точке различно, это невозможно выполнить для всего поля напряжений. Известные способы позволяют избавиться от изоклин только в отдельных точках, либо небольших областях восстанавливаемой картины путем использования четвертьволновых пластинок, которые размещают таким образом, что их оси наклонены под углом 45° к плоскости поляризатора и анализатора. Однако использование специальных компенсаторов существенно усложняет процесс проведения измерений для протяженных объектов [4; 10].

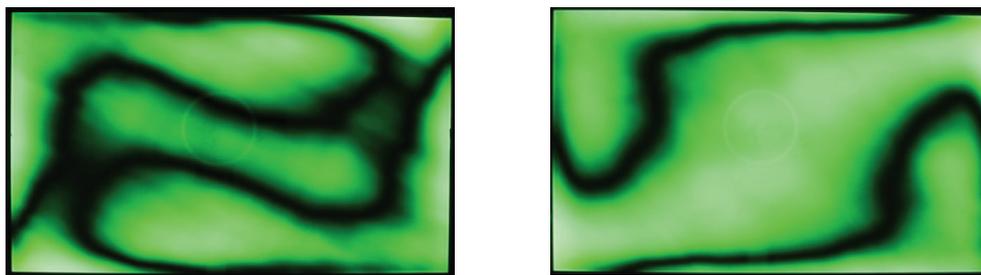


Рис. 3. Распределение интенсивности поляризованного излучения, прошедшего через анизотропный образец при его различной ориентации относительно плоскости пропускания поляризатора

Для установления оптимальных условий визуализации распределения двулучепреломления в протяженном объекте использован алгоритм, основанный на регистрации двух распределений интенсивности света, прошедшего через исследуемый образец и систему скрещенных анализатора и поляризатора: в случае произвольной ориентации анализируемого объекта относительно плоскости пропускания поляризатора I_1 (рисунок 4, а) и после поворота на угол 45° I_2 (рисунок 4, б).

На первом этапе регистрируется распределение I_1 для произвольно выбранной ориентации образца относительно плоскости пропускания поляризатора [8]:

$$I_1(x, y) = I_p T \sin^2[2\alpha(x, y)] \sin^2 \frac{\delta(x, y)}{2} \quad (3)$$

и распределение I_2 после поворота объекта на угол 45° :

$$I_2(x, y) = I_p T \cos^2[2\alpha(x, y)] \sin^2 \frac{\delta(x, y)}{2}. \quad (4)$$

При этом переход из начального положения, которое выбирают произвольным образом, во второе осуществляют путем синхронного поворота системы “поляризатор – анализатор” на 45° , а поляризатор и анализатор в обоих положениях оставляют ориентированными под углом 90° относительно друг друга.

Вычисляемое распределение $I(x, y) = I_1(x, y) + I_2(x, y)$, полученное компьютерным наложением двух зарегистрированных интерферограмм (рисунок 4, в), не зависит от распределения угла $\alpha(x, y)$

$$I(x, y) = I_1 + I_2 = I_p T \sin^2 \frac{\delta(x, y)}{2}. \quad (5)$$

Рассмотренная выше процедура фильтрации изоклин проста в реализации и может быть применена для объектов любых размеров.

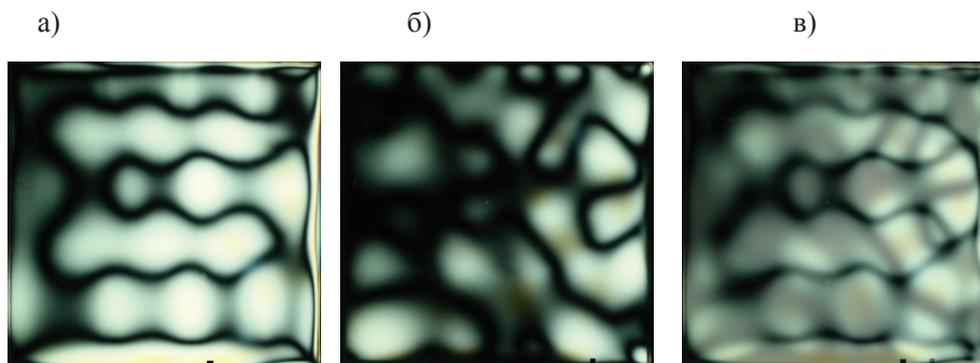


Рис. 4. Поляризационная интерферограмма (в), полученная наложением зарегистрированных распределений (а) и (б)

Методы определения разности фаз при линейном двулучепреломлении можно классифицировать на так называемые нулевые методы гашения и методы модуляционной поляриметрии [10]. Предложенный выше подход представляет собой новый метод измерения, названный нами поляризационной интерфе-

рометрий, и позволяет путем наложения двух поляризационных интерферограмм определить значение разности фаз $\delta(x, y)$ для каждой точки образца, а следовательно, и величину двулучепреломления $\Delta(x, y)$ при любой исходной ориентации образца относительно системы “поляризатор – анализатор”, используя измеренные параметры I_1, I_2, I_p, T :

$$\Delta(x, y) = \frac{\arcsin[(I/I_p T)^{1/2}]}{\pi d} \lambda = \frac{\arcsin[((I_1 + I_2)/I_p T)^{1/2}]}{\pi d} \lambda, \quad (6)$$

где λ – длина волны используемого излучения; d – толщина образца в направлении распространения света.

Следует отметить, что в предлагаемом подходе величину двулучепреломления $\Delta(x, y)$ определяют путем обработки распределения, полученного наложением двух поляризационных интерферограмм, зарегистрированных при определенных условиях. Высокую чувствительность метода демонстрируют результаты регистрации термоупругих напряжений, возникающих в образце закаленного стекла при его нагреве, представленные на рисунке 5.

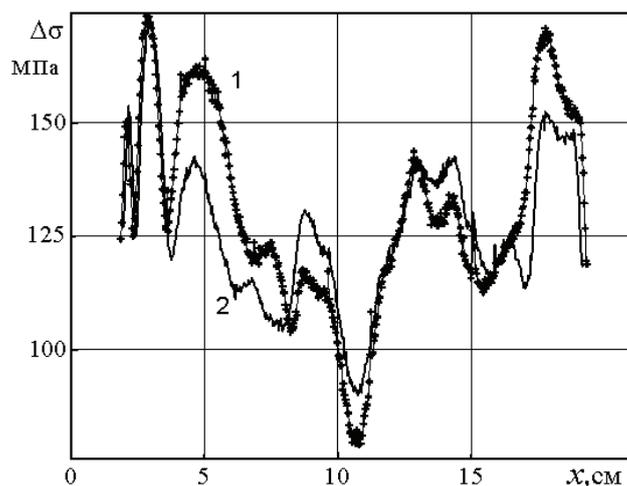


Рис. 5. Изменение распределения механических напряжений в закаленном многослойном стекле при его нагреве: кривая 1 – 25°C, кривая 2 – 45°C

Запись и сопоставление таких изображений, проводимые с помощью компьютера, выявляют изменения в характеристиках объекта, которые регистрируются в виде результирующей интерферограммы.

Заключение

Метод поляризационной интерферометрии, основанный на компьютерной обработке поляризационной интерферограммы, полученной в результате наложения двух распределений интенсивности света, зарегистрированных при определенных условиях и формируемых при интерференции поляризованного излучения, прошедшего через анализируемый образец, позволяет выявлять и фиксировать изменения в характеристиках анализируемого объекта с высокой точностью и чувствитель-

ностью. В частности, модификация традиционного поляризационно-оптического метода привела к увеличению его разрешающей способности при измерении термооптических постоянных, что позволяет ограничиться при измерении термоупругих напряжений перепадом температур в несколько градусов.

Таким образом, цифровая поляризационная интерферометрия представляет собой новый метод измерения напряжений в упругих телах, в котором объединены подходы голографической интерферометрии, разработанной для анализа остаточных напряжений, с преимуществами современной компьютерной техники.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Касаткин, Б. С.** Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений / Б. С. Касаткин, А. Б. Кудрин, Л. М. Лобанов. – К. : Наукова думка, 1981. – 370 с.
2. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах / Г. Н. Чернышев [и др.]. – Москва : Наука, Физматлит, 1996. – 240 с.
3. **Никоноров, Н. В.** Оптическое материаловедение: основы прочности оптического стекла / Н. В. Никоноров, С. К. Евстропьев. – СПб. : ГУ ИТМО, 2009. – 102 с.
4. **Миндлин, Р.** Изучение напряжений методом фотоупругости / Р. Миндлин // УФН. – 1940. – Т. 23, № 1. – С. 16–66.
5. Оптические свойства кристаллов / А.Ф. Константинова [и др.]. – Минск : Наука и техника. 1995. – С. 88–94.
6. **Абен, Х. К.** Интегральная фотоупругость / Х. К. Абен. – Таллинн : Валгус, 1975. – С. 95–112.
7. **Александров, А. Я.** Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела / А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов. – Москва : Наука, 1973. – 356 с.
8. **Helen, S. S.** Achromatic phase shifting by a rotating polarizer / S. S. Helen, M. P. Kothiyal, and R. S. Sirohy // Optics Communications. – 1998. – Vol. 154, № 5–6. – P. 249–254.
9. Full-field heterodyne polariscope with an image signal processing method for principal axis and phase retardation measurements / Yu-Lung Lo [et al] // Applied Optics. – 2006. – Vol. 45, № 31. – P. 8006–8012.
10. **Вишняков, Г. Н.** Измерение разности фаз при линейном двулучепреломлении в дифференциальном фазовом поляриметре с вращающимся анализатором / Г. Н. Вишняков, Г. Г. Левин, А. Г. Ломакин // Оптический журнал. – 2011. – Т. 78, № 9. – С. 76–81.
11. Оптические методы контроля распределения механических напряжений в автомобильных закаленных стеклах / А. В. Хомченко [и др.] // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2013. – № 4. – С. 125–132.
12. **Лаакконен, М.** Измерение напряжений в стекле и пластике методом сверления отверстий с оптическим контролем деформаций / М. Лаакконен // В мире неразрушающего контроля. – 2013. – № 1(59). – С. 62–64.
13. Single-shot polarization-imaging digital holography based on simultaneous phase-shifting interferometry / Tatsuki Tahara [et al] // Optics Letters. – 2011. – Vol. 36, № 16. – P. 3254–3256.
14. **Hariharan, P.** Digital phase-shifting interferometry: a simple error-compensating phase calculation algorithm / P. Hariharan, B. F. Orbel, and T. Eiju // Applied Optics. – 1987. – Vol. 26. – P. 2504–2505.
15. **Mujat, M.** Dogariu. Interferometric imaging polarimeter / Mircea Mujat, Erwan Baleine, and Aristide Dogariu // J. Opt. Soc. Am. A. – 2004. – Vol. 21, № 11 – P. 2244–2249.

16. **Островский, Ю. И.** Голографическая интерферометрия / Ю. И. Островский, М. М. Бутусов, Г. В. Островская. – Москва : Наука, 1977.
17. **Pechersky, M. J.** Residual stress measurements with laser speckle correlation interferometry and local heat treating / M. J. Pechersky, R. F. Miller, C. S. Vikram // Optical Engineering. – 1995. – Vol. 34, № 10. – P. 2964–2971.
18. Residual-stress analysis by local laser heating and speckle-correlation interferometry / C. S. Vikram [et al] // Experimental Techniques. – 1996. – Vol. 20. – № 6. – P. 27–30.
19. **Kumar, Y. P.** Opaque optics thickness measurement using a cyclic path optical configuration setup and polarization phase shifting interferometry / Y. Pavan Kumar and Sanjib Chatterjee // Applied Optics. – 2012. – Vol. 51, № 9. – P. 1352–1356.
20. **Bouchal, P.** Polarization sensitive phase-shifting Mirau interferometry using a liquid crystal variable retarder / Petr Bouchal, Radek Celechovsky, and Zdenek Bouchal // Optics Letters. – 2015. – Vol. 40, № 19. – P. 4567–4570.
21. **Park, B. K.** Precision polarimetry with real-time mitigation of optical-window birefringence / B. K. Park, A. O. Sushkov and D. Budker // Rev. Sci. Instrum. – 2008. – Vol. 79, 013108, P. 1–5.

Поступила в редакцию 07.07.2017 г.

Контакты: avkh@mogilev.by (Хомченко Александр Васильевич)

Khomchenko A. POLARIZATION INTERFEROMETRY OF STRESSED STATES IN GLASS.

The possibilities of the new polarization techniques to test the birefringence distribution in samples of big area are presented. The article reveals the possibility and application area of the method while testing the residual-stress distribution in tempered glass.

Keywords: polarimetry, polarization interferometry, measurement technique, birefringence distribution, tempered glass, residual stresses.

УДК 616.12; 616-92; 612.086

АПОПТОЗ КАРДИОМИОЦИТОВ: РОЛЬ ЭНДОНУКЛЕАЗ (экспериментальное исследование)¹

Н. В. Акулич

кандидат биологических наук, доцент
Национальная антидопинговая лаборатория (Минск, Беларусь)

J. E. Woo

главный научный сотрудник отдела медицинской промееотики
Корейский институт бионаук и биотехнологии

А. В. Сорока

кандидат биологических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В. Э. Сяхович

начальник отдела
Национальная антидопинговая лаборатория (Минск, Беларусь)

В статье изучены структурно-функциональные состояния кардиомиоцитов при моделировании острого инфаркта миокарда. С использованием световой микроскопии и проточной цитометрии проведено изучение роли эндонуклеазы G в апоптозе кардиомиоцитов.

Ключевые слова: Endo G, JC-1, кардиомиоцит, инфаркт миокарда, митохондриальный потенциал, транслокация, флуоресценция, ишемия, реперфузия.

Введение

В настоящее время в интервенционной кардиологии остается неразрешенным ряд проблем, связанных с технологией коронарных интервенций и их медикаментозной поддержкой [1]. В частности, актуальными являются исследования, направленные на минимизацию зоны повреждения миокарда.

В настоящее время оптимальной стратегией, направленной на уменьшение размеров инфаркта в остром периоде, является быстрая и эффективная коронарная реперфузия, которая в ряде случаев не только не приводит к оптимальной тканевой перфузии и нормализации сократительной функции миокарда, но и вызывает его реперфузионное повреждение [1]. Оно является одной из причин неудовлетворительных результатов лечения пациентов с острым инфарктом миокарда (ОИМ).

© Акулич Н. В., 2018

© Woo J. E., 2018

© Сорока А. В., 2018

© Сяхович В. Э., 2018

¹ Работа выполнена при финансировании Белорусского фонда фундаментальных исследований (договор с БРФФИ № М13КОРГ-008 от 01.04.2013 г.)

Показано, что при гипоксии, сопряженной с ишемическими и гипоксемическими нарушениями, изменяется роль митохондрий кардиомиоцитов, и развиваются нарушения в их функционировании. Выраженное расстройство микроциркуляции и генерализованное воспаление лежат в основе критических состояний при инфаркте миокарда, сопровождающихся значительными изменениями в метаболизме [1–3], приводя к апоптозу. Процент апоптотических кардиомиоцитов (КМЦ) при острых (инфаркт миокарда) и хронических (сердечная недостаточность) сердечно-сосудистых заболеваниях резко возрастает, что является одной из важнейших проблем медицины.

Индукция апоптоза и активация проапоптотических белков ведет к активации каспаз, расщепляющих внутриклеточные органеллы, приводя к фрагментации клетки на апоптотические тельца.

Помимо каспазного, в последнее время различают некаспазный механизм апоптотической гибели [4], при котором происходит миграция в ядро эндонуклеаз, вызывающих распад ядерной ДНК на крупные фрагменты.

Морфологически апоптоз кардиомиоцитов, в отличие от некроза, не характеризуется набуханием клетки и ее органелл, плазматическая мембрана интактна, не развивается воспалительный процесс. В настоящее время в клинике практически отсутствуют прямые методики детектирования апоптоза кардиомиоцитов, происходящего на всех стадиях инфаркта миокарда, ишемической болезни сердца, несмотря на доступность большинства не прямых.

С другой стороны, в настоящее время известно большое число различных фармакологических агентов, обладающих антиапоптотическим механизмом действия, но их применение ограничено лишь сферой экспериментальной науки. Предпринимаются попытки использования лекарственных средств с плеiotропным эффектом (например, статины) при проведении в комплексном лечении острых заболеваний сердца [5].

Для повышения эффективности оказания помощи пациентам с острым инфарктом миокарда необходим более детальный анализ клеточных механизмов апоптоза кардиомиоцитов для оптимизации технологии коронарных интервенций.

Таким образом, учитывая важность и значимость проблемы лечения пациентов с ОИМ, нам представляется актуальным и значимым выполнение исследования, направленного на изучение механизмов апоптоза кардиомиоцитов для оптимизации терапии пациентов с острым инфарктом миокарда.

Целью исследования является анализ структурно-функциональных свойств кардиомиоцитов при реализации каспаз-независимого апоптоза с участием эндонуклеаз.

Материалы и методы. Исследования проведены на препаратах изолированного сердца 16 беспородных крыс-самцов. Работа с лабораторными животными проводилась в соответствии с приказом Минздрава СССР № 755 от 12.08.1977. Сердце крысы изолировали по методу Лангендорфа. В препаратах сердца определяли величину объемной скорости коронарного потока, а также оценивали сократительную активность миокарда и интенсивность перфузии.

Сердце находилось в установке для перфузии изолированного сердца мелких лабораторных животных, оборудованной датчиками для измерения объемной скорости коронарного потока, аортального и развиваемого внутривентрикулярного давления. Все измерительное оборудование через АЦП было соединено с компьютером, на котором при помощи специализированного программного обеспечения проводились регистрация и обработка измеряемых показателей.

В контрольных опытах сердце перфузировали раствором Кребса-Хензельта. В опытной группе моделировали инфаркт миокарда с последующей реперфузией миокарда. Для моделирования инфаркта у животных выделяли заднюю межжелудочковую ветвь правой коронарной артерии, подводили под нее сосудистый зажим на 10–30 минут, формируя острую тотальную ишемию зоны миокарда, кровоснабжаемой этой артерией, после – восстанавливали кровоток.

Структурные особенности (полутонкие срезы) миокарда желудочка изучались в проходящем свете и методом флуоресценции. Для проведения гистологического и цитологического анализа полутонкие срезы подвергались стандартному гистологическому окрашиванию, галлоцианин-хромовыми красками для выявления хроматина кардиомиоцитов и 5,5', 6,6' – тетрахло-1,1', 3,3' – тетраэтилбензимидазол-карбоцианин йодидом (JC-1), который способен выявлять $\Delta\Psi_m$. Концентрация JC-1 составляла 3 мкг/мл. Накопление мономерной формы JC-1 свидетельствует о снижении $\Delta\Psi_m$ и указывает на наличие повреждений в мембране митохондрий. Красная флуоресценция JC-1 характеризует накопление агрегатной формы флуорохрома и свидетельствует об интактных мембранах митохондрий.

Для проведения иммуноцитохимического анализа полутонкие срезы подвергались окрашиванию Anti-Endo G (Anti-Endo G antibody -ab64668, Abcam, UK). Срезы миокарда фиксировались 100% метанолом, осуществляли демаскирование антигена, пермеабиллизацию. Затем срезы инкубировали в 1% растворе бычьего сывороточного альбумина в течение 1 ч; инкубация с антителами Anti-Endo G в течение 12 часов в темноте при 4°C. Вторичные конъюгированные с фикоэритрином антитела против кроличьего Ig G использовались в разведении 1/1000 в течение 1 часа. Окрашивания клеточных ядер осуществляли DAPI.

Оценку флуоресценции JC-1- и EndoG-позитивных клеток проводили при увеличении 400× в пяти случайно выбранных полях зрения по каждому препарату. Количество апоптоз-позитивных кардиомиоцитов вычисляли по $\Delta\Psi_m$ и ядерной локализации Endo G на 100 клеток. Митохондрии, в которых выявлялась транслокация Endo G, относили к категории “активных”; все прочие – характеризовались как “спокойные”.

Полученные данные подвергались статистической обработке с использованием пакета прикладных программ STATISTICA 7.0. Для определения степени достоверности полученных результатов и различий между ними использовали непараметрический критерий для независимых выборок U-test Манна-Уитни [6], а для определения зависимостей между различными физиологическими показателями применяли корреляционный анализ по Спирмену. Изменения считались статистически значимыми при $p < 0,05$.

Результаты исследования. В контрольной группе (крысы, которым перфузировали сердце раствором Кребса-Хензелята) выявлено незначительное число кардиомиоцитов, имеющих зеленую флуоресценцию JC-1. Признаков апоптоза (кариолизис) в клетках не выявлялось (рисунок 1).

В коронарных артериях крыс пристеночные тромбы не выявлены, явление коронаротромбоза не отмечалось. В периваскулярном пространстве нейтрофилов и макрофагов не зарегистрировано. В цитоплазме более 90% кардиомиоцитов имели красную флуоресценцию.

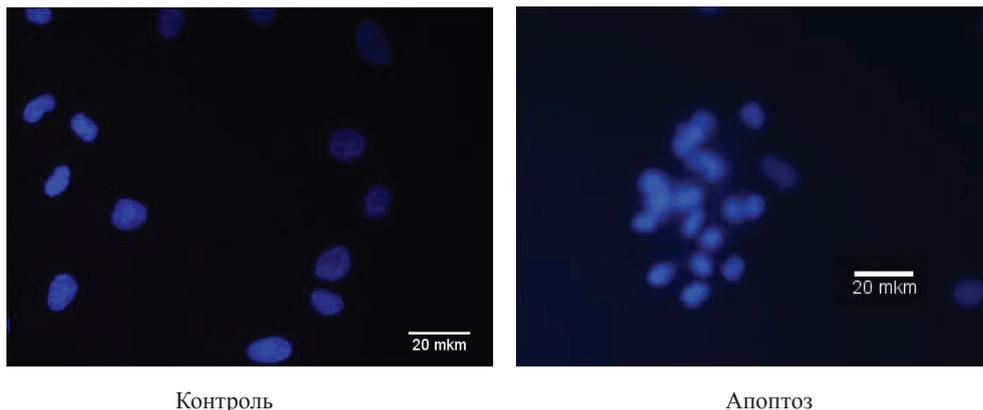


Рис. 1. Флуоресценция DAPI ядер кардиомиоцитов

В основной группе, где была реализована 30-минутная ишемия с последующей 60-минутной реперфузией, в срезах миокарда наблюдалось неравномерное кровенаполнение капилляров, выявлены очаги венозного полнокровия, отек стромы с появлением в ней единичных лейкоцитов. Отмечались резорбция апоптотических миоцитов в перифокальной зоне, некроз единичных КМЦ, выявлялись единичные макрофаги, лимфоциты, фибробласты. В зоне ишемии картина напоминала контрольную группу.

Установлено, что ишемия/реперфузия приводит к снижению доли агрегатных форм JC-1 в кардиомиоцитах, что является признаком снижения $\Delta\Psi_m$ и может рассматриваться как ранний признак апоптоза. Закономерностей в локализации кардиомиоцитов в перифокальной зоне с признаками апоптоза зарегистрировано не было. Хроматин 65% кардиомиоцитов при моделировании ишемии/реперфузии имел тенденцию к компактизации и увеличению оптической плотности. Более 57% кардиомиоцитов имели маргинальное расположение хроматина.

Среднее значение и мода красной флуоресценции в контроле в 3 и 4 раза, соответственно, превышали таковые в основной группе. Среднее значение зеленой флуоресценции в группах практически не отличались. Соотношение красная/зеленая флуоресценция, отражающее величину $\Delta\Psi_m$, в основной группе на 0,95 о.е. ($p < 0,02$) было ниже.

Исследование транслокации Endo G кардиомиоцитов крыс при моделировании острого инфаркта миокарда изучались методом флуоресцентной микроскопии. В контрольной группе Endo G имела равномерную локализацию, как в пределах исследуемых препаратов, так и в отдельной клетке (рисунок 2).

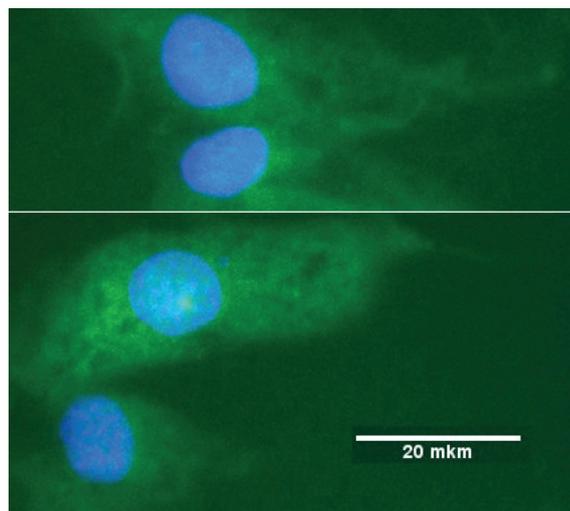


Рис. 2. Транслокация Endo G в кардиомиоцитах крыс

В контрольной группе порядка 30% кардиомиоцитов имели 2 ядра, а в основной – процент таких ядер был небольшим (менее 7%). Первые имеют четкую локализацию вблизи ядер, а вторые распределены диффузно. В этой группе выявлено, что после реперфузии происходит перераспределение активных (транслокация эндонуклеаз) и “спокойных” митохондрий.

Таким образом, ишемия/реперфузия является причиной транслокации эндонуклеаз к ядру кардиомиоцита.

Поскольку хроматин кардиомиоцитов при моделировании ишемии/реперфузии имел тенденцию к компактизации, увеличению оптической плотности и маргинальному расположению, можно предположить, что моделирование острой тотальной ишемии с последующей реперфузией приводит к активации сигнальных путей с участием, как минимум, одной из эндонуклеаз кардиомиоцитов миокарда крыс.

Как известно [7], эндонуклеазы – ферменты гидролиза нуклеиновых кислот. Они играют важную роль в жизнедеятельности клетки и животного организма, участвуя в процессах репликации, репарации и рекомбинации, активно вовлечены в нуклеиновый обмен, осуществляя деградацию нуклеиновых кислот до низкомолекулярных фрагментов и мононуклеотидов, которые утилизируются для ресинтеза новых молекул нуклеиновых кислот. Многие эндонуклеазы индуцируются или активируются при апоптозе, обладая способностью вызывать гидролиз ДНК до низкомолекулярных утилизируемых фрагментов.

Апоптоз – существенный и обязательный элемент развития животных. Нарушение процесса апоптоза делает невозможным нормальное развитие организма или приводит к различным заболеваниям. В апоптозных клетках прекращается синтез ядерной ДНК, конденсация и маргинация хроматина, межнуклеосомная фрагментация ДНК и сморщивание клеточной мембраны с последующим возникновением т. н. апоптозных телец, на которые распадается гибнущая клетка, эти тельца поглощаются макрофагами или другими клетками [8].

Об индукторах, сигнальных путях и механизмах инициации и протекания апоптоза накопилось уже довольно много данных [7–12]; существенно меньше сведений о завершающих этапах апоптоза.

Деструкция ДНК является одним из обязательных завершающих этапов апоптоза: она служит критичной для умирающей клетки точкой невозврата, а наблюдаемая при этом межнуклеосомная фрагментация ДНК – общепризнанным молекулярным маркером апоптоза. Такая деструкция ДНК – необходимое и обязательное условие сохранения гомеостаза организма в целом [10]. Наличие негидролизованной ДНК во внеклеточном пространстве вызывает иммунный ответ, который в дальнейшем может привести к возникновению аутоиммунных заболеваний.

В деградации ДНК при апоптозе участвуют многие нуклеазы, относящиеся к различным семействам. Эти ферменты могут быть разделены на две группы – автономные клеточные ДНК-азы, которые гидролизуют ДНК внутри гибнущей клетки, и “нуклеазы-мусорщики”, гидролизующие ДНК в фагоцитах и во внеклеточном пространстве. В зависимости от типа клеток, стадии их дифференцировки и/или внешних стимулов функционируют те или иные нуклеазы или наборы нуклеаз, однако, природа, свойства, механизмы и регуляция действия соответствующих эндонуклеаз в каждом конкретном случае все еще мало изучены [12].

Распад ДНК в апоптозных клетках начинается с расщепления ДНК на протяженные фрагменты длиной 50-300 т.п.н. по АТ-обогащенным сайтам (домены петель) в районах прикрепления ДНК к ядерной мембране, следствием чего является наблюдаемая конденсация хроматина [9]. Такие нуклеазы, осуществляющие расщепление ДНК на высокомолекулярные фрагменты, называют “доменными нуклеазами”. На роль “доменных нуклеаз” предлагались ДНК-аза I, ДНК-аза II, циклофиллины, однако, ни одна из них полностью не соответствовала критериям собственно апоптозных нуклеаз.

К настоящему времени идентифицирована единственная активируемая при апоптозе “крупнощепляющая” эндонуклеаза – гранзин А активируемая ДНК-аза (GAAD) или NM23-N1. Она присутствует в клетке в латентном состоянии и входит в состав “SET комплекса”, ассоциированного с эндоплазматическим ретикуломом. Под действием гранзинов А или К происходит расщепление белка SET и транслокация активированной эндонуклеазы NM23-N1 в ядро, где она вызывает однонитевые разрывы в цепях яДНК.

Апоптозная ДНК-аза – эндонуклеаза G (EndoG) впервые была обнаружена в клетках HeLa [9], и изначально идентифицирована в нормальных неапоптозных клетках как ядерный белок. Функционирование этой нуклеазы связывают с каспазозависимым апоптозом, индуцированным окислительным стрессом, гипоксией и ишемией.

Под действием EndoG образуются как дву-, так и одноцепочечные разрывы. Активность фермента относительно низка при физиологических значениях ионной силы, она значительно выше при гидролизе одноцепочечной, чем двуцепочечной ДНК. В двуцепочечных ДНК EndoG с наибольшей частотой расщепляет участки $(dG)_n(dC)_n$, а в одноцепочечных – $(dC)_n$, по которым преимущественно осуществляются разрывы в S участках ДНК.

ЭндоG – один из главных инструментов деградации ДНК при апоптозе. Она обладает выраженным процессивным характером действия. Сначала она расщепляет ДНК в хроматине на очень крупные домены, а затем осуществляет межнуклеосомную фрагментацию ДНК с последующим гидролизом до мелких фрагментов – олигонуклеотидов. Хроматин при апоптозе подвергается атаке множества нуклеаз с разной активностью и специфичностью действия.

Таким образом, в работе было установлено, что в возникновении ишемического повреждения сердца при моделировании тотальной ишемии центральную роль играют митохондрии. До настоящего времени сведений об их функции в условиях ишемии/реперфузии было недостаточно [7], поскольку большинство сведений о функции митохондрий получены в исследованиях на изолированных митохондриях.

Данные литературы свидетельствуют о том, что в сердечной мышце высокая плотность митохондрий, что связано с ее способностью к непрерывной работе.

Исследования проведены с целью изучения $\Delta\Psi_m$ в интактных клетках или тканях с использованием методов, основанных на клеточном распределении липофильных зондов [13]. К их числу относится JC-1, который позволяет оценивать $\Delta\Psi_m$: специфическое связывание JC-1 с агрегатами/мономерами приводит к флуоресценции на 590 и 530 нм, соответственно, а, в свою очередь, флуоресценция JC-1 коррелирует как с сократительной функцией кардиомиоцитов, так и с содержанием в них АТФ.

На культуре миоцитов показано [10], что в начале аноксии эмиссия на 590 нм начала уменьшаться, достигая плато в течение 16–25 мин. После этих изменений постепенно уменьшается амплитуда сокращения клеток, вплоть до остановки. При этом, клетки различались по степени дисфункции, которая зависела от содержания гликогена и/или уровня гликогенолиза. Так, в интервале от трех до пяти минут после остановки сокращений, клетки были в состоянии двух третей от их первоначальной длины, что соответствует истощению АТФ. До, или, в начале мышечной контрактуры эмиссия на длине волны 530 нм резко возростала, достигая плато при полностью развившейся контрактуре. Во время этой фазы эмиссия на 590 нм практически отсутствовала [14].

При поступлении кислорода, которое было восстановлено в течение короткого времени после контрактуры, миоциты повторно удлинились и постепенно восстановили способность сокращаться. Сразу же после реоксигенации эмиссия на длине волны 530 нм резко снизилась, а затем постепенно приблизилось к значениям, соответствующим фазе аноксии [11].

Эмиссия на длине волны 590 нм характеризовалась большей изменчивостью. Так в течение реоксигенации красная флуоресценция агрегатов практически не изменялась. С другой стороны, реваскуляризация вызывала быстрое, но непродолжительное увеличение эмиссии при 590 нм. При реоксигенации $\Delta\Psi_m$ частично восстанавливается, независимо от восстановления механической функции кардиомиоцитов.

В наших исследованиях получены данные, согласно которым и моделирование ишемии/реперфузии у крыс приводило к апоптозу относительно небольшого числа кардиомиоцитов. Это указывает, во-первых, на то, что реперфузия

миокарда инициирует целый ряд неблагоприятных метаболических изменений, способствующих повреждению и гибели кардиомиоцитов. С другой стороны, именно восстановление кровотока приводит к появлению градиента рН внеклеточного пространства за счет вымывания протонов водорода. В результате этого могут активироваться внутриклеточные механизмы коррекции кислотно-основного статуса, включающие обмен Na^+/H^+ и транспорт $\text{Na}^+/\text{HCO}_3^-$, что влечет за собой увеличение внутриклеточной концентрации натрия. Избыток натрия в цитоплазме ведет к электрической нестабильности миокарда, усиливает гидратацию клеток и активирует обмен $\text{Na}^+/\text{Ca}^{2+}$, что способствует дополнительному притоку кальция в клетку [12].

В погибших клетках нами обнаруживались – сжатие ядра, маргинация и конденсация хроматина. Эти результаты согласуются с данными литературы, где на клетках культуры кардиомиоцитов и на модели изолированных кардиомиоцитов желудочка сердца донор NO – SNAP (S-нитрозо-M-ацетилпеницилламин) приводил к коллапсу митохондриального дыхания [14]. При этом выявлялись признаки апоптоза: конденсация хроматина на периферии ядра, сжатие клетки.

С другой стороны, NO может оказывать противоишемический эффект, приводя к кардиопротекции через открытие митохондриальных АТФ-чувствительных калиевых каналов (mito_kATP) [15]. mito_kATP ингибируются физиологическими внутриклеточными концентрациями АТФ и открываются при его снижении. Таким образом, гипотетически следует предполагать, что в механизме реализации кардиопротекторного эффекта NO лежат АТФ-зависимые калиевые каналы.

На клетках культуры кардиомиоцитов исследовалось влияние аноксии и реоксигенации на индукцию апоптоза [12]. Установлено, что после действия реперфузии, следующей за часовой гипоксией, происходило “округление” клеток, которые в норме имели вытянутую форму. В таких клетках митохондрии располагались на периферии клетки, а актин саркомеров – в центре. После действия аноксии/реоксигенации в клетках культуры происходила разборка миофибрилл кардиомиоцитов, конденсация хроматина. Ингибирование каспаз частично отменяло процесс деформации клеток.

В ходе выполнения исследования установлено:

1. В качестве одной из причин, лежащих в основе гибели кардиомиоцитов в ишемических участках сердца, является реперфузия миокарда, инициирующая каспазезависимый апоптоз кардиомиоцитов.

2. Впервые обнаружена неизвестная ранее транслокация Endo G митохондрий как при экспериментальной ишемии/реперфузии.

3. На модели острого инфаркта миокарда, реализованной на изолированном сердце крысы, исследована функция митохондрий и состояние ядра кардиомиоцитов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Estimation of infarct size in man and its relation to prognosis / B. E. Sobel [et al.] // Circulation. – 1972. – Vol. 46. – P. 640–648.
2. Switch from Caspase-dependent to Caspase-independent Death during Heart Development Essential Role of Endonuclease G in Ischemia-Induced DNA Processing

- of Differentiated Cardiomyocytes / Núria Bahi [et al.] // The J. of Biological Chemistry. – 2006. – Vol. 281, № 32. – P. 22943–22952.
3. The relationships of left ventricular ejection fraction, end-systolic volume index and infarct size to six-month mortality after hospital discharge following myocardial infarction treated by Thrombolysis / R.J. Burns [et al.] // J. Am. Coll. Cardiol. – 2002. – Vol. 39. – P. 30–36.
 4. Apoptosis in myocytes in end stage heart failure / J. Narula [et al.] // N. Engl. J. Med. – 1996. – Vol. 335. – P. 1182–1189.
 5. Eloisa Arbustini, Agnese Brega, Jagat Narula. Ultrastructural definition of apoptosis in heart failure // Heart Fail Rev. 2008. 13:121–135.
 6. **Сергиенко, В. И.** Математическая статистика в клинических исследованиях / В. И. Сергиенко, И. Б. Бондарева. – Москва : ГЭОТАР – МЕД, 2001. – 256 с.
 7. **Holly, T. A.** Caspase inhibition reduces myocyte cell death induced by myocardial ischemia and reperfusion in vivo / T. A. Holly, A. Drincic, Y. Byun // J Mol Cell Cardiol. – 1999. – Vol. 31. – P. 1709–1715.
 8. Mitochondrial release of AIF and EndoG requires caspase activation downstream of Bax/Bak-mediated permeabilization / D. Arnoult [et al.] // EMBO J. – 2003. Vol. 22. – P. 4385–4399.
 9. **Li, L.Y.** Wang Endonuclease G is an apoptotic DNase when released from mitochondria / L.Y. Li, X. Luo // Nature. – 2001. – P. 412.
 10. **Yellon, D. M.** Myocardial reperfusion injury / D. M. Yellon, D. J. Hausenloy // N. Engl. J. Med. – 2007. – Vol. 357. – P. 1121–1135.
 11. **Chance, B.** The energy-linked reaction of calcium with mitochondria / B. Chance // J. Biol. Chem. – 1965 – № 240. – P. 2729–2748.
 12. **Mathur A., Hong Y., Kemp B.K., Barrientos A. A., Erusalimsky J. D.** Evaluation of fluorescent dyes for the detection of mitochondrial membrane potential changes in cultured cardiomyocytes // Cardiovasc. Res. – 2000.– № 46. – P. 126–138.
 13. **Chen, M.** Initiator caspases in apoptosis signaling pathways / M. Chen, J. Wang // Apoptosis. – 2002. – Vol. 7. – P. 313–319.
 14. Apoptosis in myocardial ischaemia and infarction / P. A. J. Krijnen [et al.] // J Clin Pathol. 2002. – Vol. 55. – P. 801–811/
 15. **Sato T, O'Rourke B., Marban E.** Modulation of mitochondrial ATP-dependent K⁺ channels by protein kinase C. Circ Res. 1998. – V. 83. – P. 110–114.

Поступила в редакцию 17.01.2018 г.

Контакты: akulichn@gmail.com (Акулич Николай Васильевич)

Akulich N., Woo J., Soroka A., Siahovich V. APOPTOSIS OF CARDIOMYOCYTES: THE ROLE OF ENDONUCLEASE (EXPERIMENTAL STUDY).

The structural and functional states of cardiomyocytes in the modeling of acute myocardial infarction have been studied. Using the light microscopy and flow cytometry, the role of endonuclease G in the apoptosis of cardiomyocytes has been defined.

Keywords: Endo G, JC-1, cardiomyocyte, myocardial infarction, mitochondrial potential, translocation, fluorescence, ischaemia, reperfusion.

УДК 595.794.16

О НАХОДКАХ *MEGASCOLIA MACULATA* (Drury, 1773) (HYMENOPTERA: SCOLIIDAE) НА ЮГО-ВОСТОКЕ БЕЛАРУСИ

А. М. Островский

магистр медицинских наук,

ассистент кафедры общественного здоровья и здравоохранения

Гомельский государственный медицинский университет

В статье приведены сведения о находках *Megascolia maculata* на юго-востоке Беларуси. Нами были установлены новые местонахождения данного вида на окраине д. Уза Гомельского района Гомельской области. Можно говорить о сформировавшейся на данный момент здесь локальной популяции *M. maculata*, которая на сегодняшний день, вероятно, является наиболее северной границей ареала вида в пределах нашей республики.

Ключевые слова: юго-восток Беларуси, *Megascolia maculata*, находки, экология, распространение.

Введение

Семейство сколий (Scoliidae) охватывает группу жалящих перепончатокрылых, которые глубоко в почве находят и парализуют личинок пластинчатых жесткокрылых (Scarabaeidae) и откладывают на них яйца. Вышедшая из яйца личинка сколии развивается на живом, хотя и парализованном хозяине. Взрослые насекомые являются антофилами, т. е. питаются нектаром различных цветковых растений, одновременно являясь их опылителями [1, с. 43–47; 2, с. 537–539; 3, с. 1451–1479; 4, с. 422–428]. Мировая фауна ос-сколий в настоящее время насчитывает более 400 видов, в Палеарктике известно 76 видов, распространенных преимущественно в южных регионах [4, с. 422–428; 5, с. 191].

По последним данным [6, с. 55] в Беларуси обитает 3 вида сколий. Одна из них – сколия-гигант (*Megascolia maculata* Drury) – занесена в 4-е издание Красной книги Республики Беларусь [7, с. 248–249]. Статус – III категория национального природоохранного значения. Вид также включен в национальную и региональные Красные книги Украины [8, с. 227; 9, с. 18; 10, с. 72; 11, с. 212; 12, с. 118; 13, с. 205; 14, с. 30; 15, с. 95], Казахстана [16, с. 148], Республики Молдова [17, с. 382] и некоторых субъектов Российской Федерации [18, с. 340; 19, с. 156; 20, с. 360; 21, с. 70; 22, с. 186; 23, с. 223; 24, с. 261; 25, с. 72; 26, с. 198; 27, с. 178; 28, с. 58; 29, с. 203; 30, с. 64; 31, с. 379]. Считается, что основным фактором угрозы существованию популяций данного вида является снижение численности ее хозяина (жуков-носорогов), связанное с разрушением естественных местообитаний в результате хозяйственной деятельности человека.

M. maculata распространена на территории Северной Африки, Южной Европы, Ближнего Востока, Средней Азии, в Крыму. Эту осу можно встретить на юге европейской части России, в Украине и на Кавказе. В XX в. северная граница ареала вида находилась на широте Киев – Харьков – Воронеж – Тамбов – Пенза – Ульяновск – Самара – Уфа (степная и лесостепная зоны) [32, с. 114]. Однако сравнительно недавнее обнаружение *M. maculata* на территории Владимирской [33, с. 56–60], Нижегородской [34, с. 92–105], Липецкой [35, с. 60] и Калужской [36, с. 52] областей России, а также Черниговской области Украины [5, с. 191] может свидетельствовать о некотором расширении ареала вида на север. В этой связи новые находки *M. maculata* важны для оценки ее численности и современного распространения на территории не только нашей республики, но и Юго-Восточной Европы в целом.

Материал и методы исследования.

В течение вегетационных периодов 2006–2016 гг. нами проводились исследования по уточнению мест обитания редких и охраняемых видов насекомых на территории Гомельской области с главной целью – последующей разработкой специалистами комплекса охранных мер [37, с. 84–87]. Видовая принадлежность ос определялась с помощью определителя [38, с. 51–54] и каталога [6, с. 55] при использовании бинокулярного микроскопа МБС–10; создан фотоархив. Собранный материал находится в коллекции автора.

Результаты и их обсуждение.

Первая для Беларуси находка *M. maculata* была зафиксирована 01/VII. 2007 г. на территории Полесского радиационно-экологического заповедника (4 экз. сачком на приусадебном участке в д. Бабчин Хойникского района Гомельской области) (О. Прищепчик).

Нами были установлены новые местонахождения данного вида. 21/VI. 2015 г. на окраине д. Уза Гомельского района Гомельской области в районе свалки на участке добычи глины в песчаном карьере был замечен, отловлен и сфотографирован самец *M. maculata* (рис. 1). Там же в теплую солнечную погоду с конца мая по конец июня 2016 г. среди древесно-кустарниковой растительности неоднократно наблюдался активный лет самцов сколии-гиганта (8–10 особей) с посещением соцветий синяка обыкновенного (*Echium vulgare* L.), который в данной местности довольно обычен, обладая в то же время удобной для питания формой цветка. В 2017 г. существование популяции *M. maculata* в типичном местообитании было подтверждено новыми находками.



Рис. 1. Самец *Megascolia maculata* (Drury, 1773)



Рис. 2. Участок обитания *Megascolia maculata* на окраине деревни Уза Гомельского района Гомельской области:
песчаный карьер с зарослями *Salix alba* и *Robinia pseudoacacia* (А)
и органикой в виде перепревших навозных куч и гниющих древесных отходов (Б),
в которых массово развиваются личинки *Oryctes nasicornis* – хозяина *M. maculata*

Характерной особенностью данного биотопа является наличие зарослей ивы белой (*Salix alba* L.) и белой акации (*Robinia pseudoacacia* L.), на многих участках длительное время находятся (и постоянно пополняются) компостные ямы и кучи с навозом и гниющими древесными опилками, завезенные из близлежащих деревень (рис. 2). В данном субстрате живут многочисленные личинки жука-носорога (*Oryctes nasicornis* L.), который широко распространен на юго-востоке Беларуси, являясь здесь гемисинантропным видом. “Дикие” популяции *O. nasicornis* в Гомельской области обнаружены единично, а “синантропные” – приурочены к населенным пунктам, где связаны со старыми гниющими кучами древесных опилок на лесопилках и кучами навоза.

Выводы

Таким образом, вышеперечисленные факты свидетельствуют о сформировавшейся на окраине д. Уза Гомельского района Гомельской области локальной

популяции *M. maculata*, которая на сегодняшний день, вероятно, является наиболее северной границей ареала вида в пределах нашей республики.

Анализ географии поимок *M. maculata* на территории Гомельской области и близлежащих регионов соседних государств позволяет предположить, что сколия-гигант имеет более широкую область распространения, однако везде является редким видом. Новые находки *M. maculata* на юго-востоке Беларуси подтверждают процесс продолжающейся экспансии этого вида в северном направлении, что может быть связано с возникновением благоприятных условий обитания вследствие глобального изменения климата [39, с. 60], а также увеличения численности ее хозяина (жуков-носорогов).

В связи с поселением *M. maculata* даже в зонах интенсивного ведения сельского хозяйства (в непосредственной близости от областного центра) представляет практическую ценность разработка маршрута экологической тропы для воспитания и обучения учащейся молодежи.

Необходимо продолжить изучение распространения вида на территории республики с целью сохранения естественных мест обитания.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Штейнберг, Д. М.** Сем. сколии (Scoliidae) / Д. М. Штейнберг // Фауна СССР: Новая серия; № 84. Насекомые перепончатокрылые. – Т. 8. – М.-Л. : Издательство АН СССР, 1962. – 186 с.
2. **Osten, T.** Die Scoliiden des Mittelmeer-Gebietes und angrenzender Regionen (Hymenoptera) Ein Bestimmungsschlüssel / T. Osten // Linz. biol. Beitr. – 2000. – Bd. 32, Hf. 2. – S. 537–539.
3. **Osten, T.** Die Scoliiden-Fauna Mittelasien (Hym., Scoliidae) (Kasakhstan, Turkmenistan, Uzbekistan, Tadjhikistan, Kirgistan) Ein Bestimmungsschlüssel / T. Osten // Ibid. – 2005. – Bd. 37, Hf. 2. – S. 1451–1479.
4. **Osten, T.** Kritische Liste der palaearktischen Scoliiden (Hymenoptera, Scoliidae) / T. Osten // Entomofauna. – 1999. – Bd. 20, Hf. 27. – S. 422–428.
5. **Шешурак, П. Н.** Осы сколии (Hymenoptera: Scoliidae) в Черниговской области (Украина) / П. Н. Шешурак // Красная книга Республики Беларусь: состояние, проблемы, перспективы : материалы Международной научной конференции, Витебск, 13–15 декабря 2011 г. / Вит. гос. ун-т ; редкол.: В. Я. Кузьменко (отв. ред.) [и др.]. – Витебск : ВГУ им. П. М. Машерова, 2011. – С. 191–193.
6. **Шляхтенюк, А. С.** Аннотированный каталог ос (Hymenoptera, Aprocrita, Aculeata) Беларуси / А. С. Шляхтенюк ; Нац. акад. наук Беларуси, Науч.-практ. центр по биоресурсам. – Минск : Беларус. навука, 2013. – 259 с.
7. Красная книга Республики Беларусь. Животные: редкие и находящиеся под угрозой исчезновения виды диких животных / Министерство природных ресурсов и охраны окружающей среды Республики Беларусь, Национальная академия наук Беларуси ; гл. редкол.: И. М. Качановский (предс.), М. Е. Никифоров, В. И. Парфенов [и др.]. – 4-е изд. – Минск : Беларус. Энцыкл. імя П. Броўкі, 2015. – 320 с.
8. Червона книга України. Тваринний світ / Міністерство охорони навколишнього природного середовища України, Національна академія наук України ; редкол.: Г. Г. Філіпчук (гол.), М. М. Мовчан, І. А. Акімов [та інш.]. – Київ : Глобалконсалтинг, 2009. – 600 с.

9. **Бойко, М. Ф.** Червоний список Херсонської області: Рідкісні та зникаючі види рослин, грибів та тварин / М. Ф. Бойко, М. М. Подгайний. – 2-е вид. – Херсон, 2002. – 32 с.
10. **Чередарик, М. І.** Рідкісні тварини Буковини та проблеми їх охорони: сторінками Червоної книги України / М. І. Чередарик, Л. М. Хлус, І. В. Скільський. – Чернівці : Золоті литаври, 2001. – 176 с.
11. Червона книга Дніпропетровської області. (Тваринний світ) / Дніпропетровська обласна державна адміністрація, Дніпропетровська обласна організація Всеукраїнської екологічної ліги, Дніпропетровський нац. ун-т ім. Олеся Гончара ; редкол.: О. Є. Пахомов (гол.), В. Я. Гаспо, К. К. Голобородько [та інш.]. – Дніпропетровськ : ТОВ “Новий друк”, 2011. – 488 с.
12. **Хлус, Л. М.** “Червона книга” Буковини. Тваринний світ / Л. М. Хлус, М. І. Чередарик, І. В. Скільський, В. Ф. Череватов. – Чернівці : Золоті литаври, 2002. – Т. 1. – 144 с.
13. Червона книга Харківської області. Тваринний світ / Харківська обласна рада, Харківський нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна, Державне управління охорони навколишнього природного середовища у Харківській області ; редкол.: В. А. Токарський (гол.), Т. А. Атемасова, Г. О. Шандиков [та інш.]. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2013. – 472 с.
14. По страницам Красной книги г. Краматорска (Животный мир). Справочник – путеводитель / Отдел экологии и рационального природопользования Краматорского городского совета ; редкол.: М. О. Высочин, А. И. Тупиков. – Краматорск, 2010. – 104 с.
15. **Баумта, А.-Т. В.** Рідкісні види тварин Львівської області / А.-Т. В. Башта, Ю. В. Канарський, О. С. Решетило [та інш.]. – Львів, 2006. – 220 с.
16. Красная книга Казахстана. – Т. 1 : Животные. Ч. 2 : Беспозвоночные / Комитет информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан [и др.] ; редкол.: И. Д. Митяев, Р. В. Яценко. – 3-е изд. – Алматы : Кнер, 2006. – 232 с.
17. Cartea Rosie a Republicii Moldova = The Red Book of the Republic of Moldova / Min. Mediului al Rep. Moldova, Acad. de Stiinte a Moldovei, Gradina Botanica & Inst. de Zoologie, Comisia Nat.: Valeriu Munteanu [et al.] ; col. red.: Gheorghe Duca (presedinte) [et al.]. – ed. a 3-a – Ch. : I.E.P. Stiinta, 2015 (Combinatul Poligr.) – 492 p.
18. Красная книга Саратовской области. Грибы. Лишайники. Растения. Животные / Комитет охраны окружающей среды и природопользования Саратовской области ; редкол.: В. С. Белов (предс.), Г. В. Шляхтин (науч. ред.), В. В. Аникин [и др.]. – Саратов : Изд-во Торгово-промышленной палаты Саратовской области, 2006. – 528 с.
19. Красная книга Тамбовской области. Животные / Управление по охране окружающей среды и природопользованию Тамбовской области ; редкол.: Н. П. Петрова (предисл.), Г. А. Лада, А. С. Соколов [и др.]. – Тамбов : ООО “Изд-во Юлис”, 2012. – 352 с.
20. Красная книга Белгородской области. Редкие и исчезающие растения, грибы, лишайники и животные. Официальное издание / Управление Росприроднадзора по Белгородской области, Белгородский гос. ун-т, ГУ “Экологический фонд Белгородской обл.” ; редкол.: В. В. Пучков (предс.), Е. Г. Глазунов, Л. Я. Дятченко [и др.]. – Белгород, 2004. – 532 с.
21. Красная книга Воронежской области : в 2 т. – Т. 2 : Животные / Правительство Воронеж. обл. ; Упр. по экол. и природопользованию Воронеж. обл. ; Воронеж.

- гос. ун-т ; редкол.: О. П. Негробов (предс.), С. О. Негробов, А. Д. Нумеров. – Воронеж : МОДЭК, 2011. – 424 с.
22. Красная книга Астраханской области. Редкие и находящиеся под угрозой исчезновения объекты животного и растительного мира / Служба природопользования и охраны окружающей среды Астраханской области, Астраханский гос. ун-т ; редкол.: В. Н. Пилипенко [и др.]. – Астрахань : Астраханский государственный университет, Издательский дом “Астраханский университет”, 2014. – 2-е изд. – 413 с.
 23. Красная книга Краснодарского края (животные) / Адм. Краснодар. края [и др.] ; редкол.: В. А. Бабешко (предс.), К. В. Ларионов, А. С. Замотайлов [и др.]. – 2-е изд. – Краснодар : Центр развития ПТР Краснодар. края, 2007. – 504 с.
 24. Красная книга Нижегородской области. – Т. 1 : Животные / Министерство экологии и природных ресурсов Нижегородской области ; редкол.: Г. А. Ануфриев, А. И. Бакка, С. В. Бакка [и др.]. – 2-е изд. – Нижний Новгород : ДЕКОМ, 2014. – 448 с.
 25. Красная книга Пензенской области. – Т. 2 : Животные / Правительство Пензенской области ; редкол.: В. Ю. Ильин (науч. ред.) [и др.]. – Пенза : ОАО ИПК “Пензенская правда”, 2005. – 208 с.
 26. Красная книга Республики Адыгея: Редкие и находящиеся под угрозой исчезновения объекты животного и растительного мира : в 2 ч. – Ч. 2 : Животные / Управление по охране окружающей среды, природным ресурсам и чрезвычайным ситуациям Республики Адыгея ; редкол.: А. С. Замотайлов (отв. ред.), В. И. Щуров, М. И. Шаповалов [и др.]. – 2-е изд. – Майкоп : Качество, 2012. – 376 с.
 27. Красная книга Республики Ингушетия: Растения. Животные / Ингушский гос. ун-т, Государственный природный заповедник “Эрзи” Республики Ингушетия ; редкол.: А. М. Мартазанов (предс.), Т. Ю. Точиев, Б. У.-Г. Баркинхоев [и др.]. – Магас : Изд-во “Сердало”, 2007. – 368 с.
 28. Красная книга Республики Калмыкия : в 2 т. – Т. 1 : Животные / Министерство природных ресурсов и охраны окружающей среды Республики Калмыкия, Калмыцкий гос. ун-т ; редкол.: Н. Л. Очиров (предс.), В. М. Музаев, Б. И. Убушаев [и др.]. – Элиста : ЗАО “НПП «Джангар»”, 2013. – 200 с.
 29. Красная книга Самарской области. – Т. 2 : Редкие виды животных / Ин-т экологии Волжского бассейна РАН, Правительство Самарской области, Министерство природных ресурсов и охраны окружающей среды Самарской области ; редкол.: Д. И. Азаров (предс.), Г. С. Розенберг, С. В. Саксонов [и др.]. – Тольятти : Касандра, 2009. – 332 с.
 30. Красная книга Ставропольского края. Редкие и находящиеся под угрозой исчезновения виды растений и животных. – Т. 2 : Животные / Министерство природных ресурсов Российской Федерации, Комитет природных ресурсов по Ставропольскому краю ; редкол.: А. Л. Черногоров (предс.), В. Ф. Гаркуша, Н. С. Панасенко [и др.]. – Ставрополь : ОАО “Полиграфсервис”, 2002. – 216 с.
 31. Красная книга Ульяновской области / Правительство Ульяновской области, Департамент природных ресурсов и экологии ; редкол.: Д. В. Федоров (предс.), А. В. Масленников, И. В. Благовещенский [и др.]. – М. : Изд-во “Буки Веди”, 2015. – 550 с.
 32. **Полумордвинов, О. А.** Фауна и экология ос семейства сколий (Scolioidea, Scoliidae) на территории Пензенской области / О. А. Полумордвинов // Энтомологические и паразитологические исследования в Поволжье. – 2004. – Вып. 3. – Саратов : СГУ. – С. 111–116.

33. **Муханов, А. В.** Результаты первичного изучения энтомофауны в Государственном природном заказнике “Муромский” / А. В. Муханов // Друзья заповедного леса : сборник научно-практических материалов межрегиональной научно-практической конференции, Муром, 7–8 декабря 2005 г. / Департамент природопользования и охраны окружающей среды администрации Владимирской области [и др.]. – Муром : НОУ СЮН, 2005. – С. 56–60.
34. **Мокроусов, М. В.** Критический обзор видов перепончатокрылых насекомых (Insecta, Hymenoptera) нуждающиеся в охране на территории Нижегородской области / М. В. Мокроусов, В. А. Зрянин // Редкие виды живых организмов Нижегородской области : сборник рабочих материалов Комиссии по Красной книге Нижегородской области. – Вып. 2. – Нижний Новгород, 2010. – С. 92–105.
35. **Цуриков, М. Н.** Первые находки сколии-гиганта *Megascolia maculata* (Drury, 1773) (Hymenoptera: Scoliidae) для территории Липецкой области / М. Н. Цуриков // Эверсманния. Энтомологические исследования в России и соседних регионах. – 2013. – Вып. 34. – С. 60.
36. **Алексеев, С. К.** Первые находки сколий *Megascolia maculata* (Drury, 1773) и *Scolia hirta* (Schrank, 1781) (Hymenoptera: Scoliidae) в Калужской области / С. К. Алексеев, С. Ю. Матвеев // Эверсманния. Энтомологические исследования в России и соседних регионах. – 2017. – Вып. 50. – С. 52.
37. **Островский, А. М.** Новые находки редких и охраняемых видов насекомых на территории Гомельской области / А. М. Островский // Современные экологические проблемы развития Полесского региона и сопредельных территорий: наука, образование, культура : материалы VII Международной заочной научно-практической конференции, Мозырь, 28 октября 2016 г. / МГПУ им. И. П. Шамякина. – Мозырь, 2016. – С. 84–87.
38. Определитель насекомых Европейской части СССР : в 5 т. / редкол.: О. А. Скарлато (гл. ред.) [и др.]. – Л. : Наука, 1964. – Том III : Перепончатокрылые. Первая часть / под общ. ред. Г. С. Медведева. – 584 с.
39. **Ясюкевич, В. В.** Влияние наблюдаемого и ожидаемого изменения климата на распространение насекомых / В. В. Ясюкевич, Е. А. Давидович // Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. – 2010. – Т. 23. – Москва : ИГКЭ. – С. 316–333.

Поступила в редакцию 14.10.2017 г.

Контакты: arti301989@mail.ru (Островский Артем Михайлович)

Ostrovsky A. ON THE FINDINGS OF *MEGASCOLIA MACULATA* (DRURY, 1773) (HYMENOPTERA: SCOLIIDAE) IN THE SOUTH-EAST OF BELARUS

The article presents the data on the findings of *Megascolia maculata* in the south-east of Belarus. New locations of this species on the edge of the village Uza in Gomel district have been identified. A characteristic feature of this biotope is the presence of thickets of *Salix alba* and *Robinia pseudoacacia*. In many places compost pits and heaps of manure and rotting sawdust brought from the nearby villages have been located for a long time (and have been constantly replenished). In this substrate numerous larvae of *Oryctes nasicornis* live, which, in their turn, serve as a place to parasitize for the larvae of *M. maculata*. It is possible to state there is a local population of *M. maculata*, which today is probably the northernmost point of the species range within the limits of our Republic.

The analysis of the geography of findings of *M. maculata* in Gomel District and the nearby regions of neighboring states suggests that *Scolia maculata* has a wider distribution area, but is still a rare species. New findings of *M. maculata* in the south-east of Belarus prove continuing expansion of the species in the northern direction, which may be associated with favourable habitat conditions due to the global climate change and increase of the population of its owner (rhinoceros beetles).

Keywords: south-east of Belarus, *Megascolia maculata*, discoveries, ecology, distribution.

УДК 595.762

СТРУКТУРА И ДИНАМИКА АКТИВНОСТИ ЖЕСТКОКРЫЛЫХ (*COLEOPTERA*) НАСЕКОМЫХ ЛУГОВ ОРШАНСКОГО РАЙОНА

Г. Н. Тихончук

кандидат биологических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

С. В. Андрица

учитель биологии ГУО “СШ № 42 г. Могилева”

Проведены исследования по определению эколого-фаунистического состояния жесткокрылых насекомых лугов окрестностей г. п. Ореховск Оршанского района Витебской области.

Различные аспекты сезонной динамики активности жуужелиц привлекают внимание исследователей, поскольку эти насекомые являются удобным объектом для экологического мониторинга. На сильно увлажненных лугах жуужелицы имеют один пик численности. Устойчивость населения биотопов зависит не только от температуры воздуха, количества выпавших осадков, но и от почвенно-гидрологических условий.

Ключевые слова: Coleoptera, влажный луг, статистические индексы, сезонная динамика, температура, осадки.

Введение

Жесткокрылые насекомые (Coleoptera) являются важными компонентами трофических и топических взаимодействий, многие из них имеют серьезное практическое значение. Изучение жесткокрылых позволяет полнее раскрывать роль и значение этих беспозвоночных в трансформированных экосистемах. На текущий момент в фауне Беларуси зарегистрировано более 3600 видов жесткокрылых, разнообразие которых в нашей стране ежегодно увеличивается.

Луг – прекрасная зона для обитания и жизни жуков, что подтверждается их разнообразием и количеством. Луга, как и другие биогеоценозы, находятся под воздействием различных факторов: атмосферных, гидрологических, биогенных, антропогенных. Особенно велико значение воздействия на них различных форм влияния человека, использующего их как пастбища и сенокосы. Для многих типов лугов решающим является воздействие гидрологических факторов (дополнительное увлажнение почвенно-грунтовыми и полыми водами), нередко определяющее возможность существования лугов в регионах с небольшим количеством атмосферных осадков.

Степень изученности фауны и экологии жесткокрылых – обитателей луговых экосистем на территории районов Беларуси различна. Кроме того, усиление работы краеведческого направления в общеобразовательных школах приводит

© Тихончук Г. Н., 2018

© Андрица С. В., 2018

к необходимости более полного изучения фауны и флоры вблизи территорий учреждений образования.

Основная цель данной работы – изучить эколого-фаунистическую характеристику луговых жесткокрылых (*Coleoptera*), обитающих на территории Оршанского района Витебской области.

Результаты исследований

С целью изучения эколого-фаунистической характеристики луговой колеоптерофауны в течение 2014–2015 гг. был проведен целый ряд исследований вблизи г. п. Ореховск Оршанского района Витебской области.

По характеру рельефа в районе выделяется два подрайона: Оршанская возвышенность на севере и западе района, Оршанско-Могилевская равнина на юго-востоке района. Оршанская возвышенность – это часть моренной гряды, наследие ледника, о действиях которого напоминают валуны разной величины на полях Оршанщины. Климат Оршанского района умеренно континентальный, среднегодовая температура января $-7,8^{\circ}\text{C}$, июля $+23^{\circ}\text{C}$. Осадков выпадает за год 627 мм. Vegetационный период составляет 184 дня.

Средние суточные температуры в летние месяцы колеблются в незначительных пределах. Температура во время сборов колебалась и не всегда соответствовала среднестатистической.

Почвы на территории района дерново-подзолистые, заболоченные, дерновые, пойменные, торфяно-болотные. Большая часть территории района занята пойменными, суходольными лугами и кустарниками. В районе находятся 14 водоемов, из них – 9 озер, 2 водоема и 3 пруда. Самые большие по площади озера – Большое Ореховское, Девинское, Кузьмино, Каресиное, Перевалочное. Площадь водоохранных зон водоемов на территории района равна 4294,4 гектара, что составляет 2,6% от общей площади района.

На территории района находятся два городских поселка. Территория вокруг одного из них – Ореховска – была выбрана для исследования.

Выборку материала производили еженедельно с 1 мая по 31 августа в 2014 и 2015 гг. в окрестностях г. п. Ореховск Оршанского района Витебской области на 4 стационарных точках влажного луга, где два биотопа имели небольшие “зеркала” воды и заболоченные почвы.

При сборе жесткокрылых в качестве ловушек использовались пластиковые стаканчики диаметром 6 см и объемом 200 мл, на 1/3 заполненные раствором 4% формальдегида либо 9% уксусной кислоты.

В результате двухлетних исследований (2014–2015 гг.) в луговой фауне окрестностей г. п. Ореховск Оршанского района Витебской области зарегистрировано 65 видов жесткокрылых (*Carabus coriaceus* L. занесен в Красную книгу Республики Беларусь), относящихся к 15 семействам: *Carabidae* – 18, *Hydrophilidae* – 1, *Staphylinidae* – 1, *Silphidae* – 3, *Cantharididae* – 3, *Cleridae* – 1, *Elateridae* – 3, *Coccinellidae* – 8, *Oedemeridae* – 1, *Lagriidae* – 1, *Cerambycidae* – 6, *Chrysomelidae* – 8, *Curculionidae* – 5, *Scarabaeidae* – 5, *Attelabidae* – 1. В целом следует отметить, что представители жесткокрылых, обнаруженные на территории Оршанского района в окрестностях

г.п. Ореховск, относятся к видам обычно встречающимся на территории Беларуси, Европы, России [1; 2].

Луга являются экосистемами наиболее подверженными вытаптыванию и выкашиванию в весенне-летний сезон заготовки кормов, поэтому знание особенностей сезонной активности насекомых важно для возможного проведения мероприятий по сохранению их стабильной численности. Сдвиги сроков сенокосов на несколько дней позволяют повысить уровень выживаемости насекомых с их последующим успешным размножением в дальнейшем.

Тип размножения, температура воздуха, количество выпавших осадков, гидрологические условия оказывают огромное влияние на распределение сезонной динамики активности жесткокрылых [3]. Сезонная динамика активности была изучена на доминирующих видах жужелиц, так как они, являясь наиболее многочисленной группой, обладая широким спектром питания, способностью быстрого заселения биотопов, играют важную роль в естественных и измененных хозяйственной деятельностью человека экосистемах.

Встречаемость жужелиц, косвенно отражающая особенности их пространственного распределения, оценивалась нами как динамическая плотность (ДП) – величина, отражающая число экземпляров жуков, попавших в ловчий стаканчик в пересчете на 1 ловушко-суток.

Кривые изменения общей активности жужелиц представляют собой прежде всего совокупность кривых изменений активности доминирующих видов. Сезонная динамика была прослежена на доминантных видах: *Agonum mulleri*, *Amara aenea*, *Loricera pilicornis*, *Poecilus cupreus*, *Harpalus distiguendus* в период 2015 г. Количество выше названных представителей составило более 80% от общего числа жуков в сборах.

На влажном лугу в мае активность жужелиц была невысока, что, очевидно, связано с высокой влажностью биотопов после ухода весенней воды. Пик численности пришелся на I декаду июля и обусловлен многочисленностью жужелиц I поколения. В июле температура воздуха приближалась к норме, а количество выпавших осадков было ниже нормы. Напочвенная активность жуков начинает проявляться при достижении среднесуточной t° воздуха $+14-15^\circ\text{C}$ и постепенно повышается, совпадая в максимуме пика практически с максимальной среднесуточной t° воздуха (рисунок 1). Величина уловов жужелиц заметно изменялась в соответствии с температурой воздуха. Кривая активности повторяла ход кривой температуры воздуха.

При сравнении динамики активности жужелиц с количеством выпавших осадков наблюдается ярко выраженная обратная зависимость (рисунок 2): со снижением количества выпавших осадков активность жужелиц постепенно возрастает.

Таким образом, сезонная активность доминантных видов жужелиц имеет в данном биоценозе 1 пик численности в I декаде июля. Очевидно, это связано с сильным увлажнением стационарных точек сбора, которые характеризуются частичным заболачиванием. Вероятно, что структура пика активности жужелиц может изменяться в разные годы в одних и тех же биотопах.

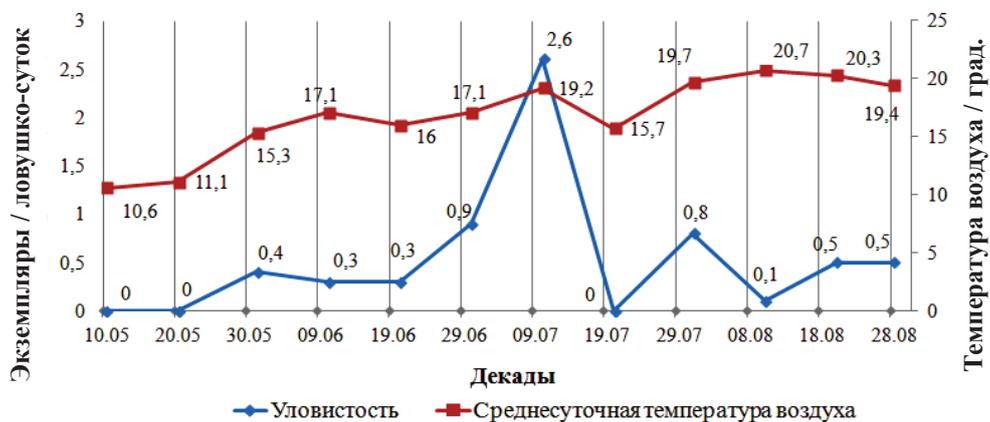


Рис. 1. Влияние температуры воздуха на сезонную динамику активности жужелиц (2015 год)



Рис. 2. Влияние количества выпавших осадков на сезонную динамику активности жужелиц (2015 год)

Для информационной оценки карабидокомплексов были рассчитаны индексы Шеннона-Уивера, индекс концентрации доминирования Симпсона, стандартная ошибка.

В четырех биотопах показатели индексов соответственно были:

1) $H' = 2,99 \pm 0,073$; $C = 0,061$; 2) $H' = 2,83 \pm 0,080$; $C = 0,067$; 3) $H' = 2,39 \pm 0,018$; $C = 0,120$; 4) $H' = 1,80 \pm 0,213$; $C = 0,213$.

Высокие показатели индекса Шеннона-Уивера при низких мерах индекса Симпсона говорят об устойчивости биотопов № 1, 2, в которых гидрологический режим более благоприятен для жуков. Индексы, рассчитанные для сильно увлажненных и частично заболоченных биотопов (№ 3, 4), свидетельствуют о менее устойчивом их состоянии по сравнению с предыдущими точками.

Заклучение

В результате исследований на увлажненных лугах Оршанского района обнаружено 65 видов жесткокрылых, принадлежащих к 15 семействам. Наиболее разнообразным и массовым явилось семейство Carabidae: было зафиксировано 18 видов относящихся к 6 родам.

При анализе структуры доминирования было выявлено 5 доминантных видов: *Agonum mulleri*, *Amara aenea*, *Loricera pilicornis*, *Poecilus cupreus*, *Harpalus distiguendus*.

Сезонная динамика активности доминантных видов показывает пик в I декаде июля, что говорит о существенном влиянии почвенно-гидрологических условий на динамическую плотность жуков. Повышение среднесуточной температуры воздуха увеличивает активность, а выпадение атмосферных осадков снижает уловистость жуков.

Наиболее увлажненные и заболоченные биотопы показывают меньшую устойчивость к различным факторам среды.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Андрица, С. В.** Качественный состав жесткокрылых насекомых лугов Оршанского района / С. В. Андрица // Молодая наука – 2016 : материалы Регион. науч.-практ. конф. студентов и аспирантов вузов Могилевской области, Могилев, 28 апреля 2016 г. / МГУ имени А. А. Кулешова ; редкол.: Д. А. Роговцов [и др.]. – Могилев, 2016. – С. 62–63.
2. **Тихончук, Г. Н.** Разнообразие луговых сообществ насекомых Оршанского района / Г.Н. Тихончук, С.В. Андрица // Проблемы устойчивого развития регионов Республики Беларусь и сопредельных стран : сб. материалов IV Междунар. науч.-практ. конференции, Могилев, 2 апреля 2015 г. / МГУ имени А. А. Кулешова ; ред. сов. : И. Н. Шаруха, Д. А. Роговцов [и др.]. – Могилев, 2015. – С. 285–287.
3. **Андрица, С. В.** Сезонная динамика активности луговых жужелиц Оршанского района / С. В. Андрица // Дни студенческой науки : материалы XLVI студ. науч.-практ. конф., Гомель, 11–12 мая 2017 г.: в 2 ч. / Гомельский гос. ун-т. им. Ф. Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко [и др.]. – Гомель, 2017. – Ч. 1. – С. 76.

Поступила в редакцию 10.01.2018 г.

Контакты: +375 222 25 19 27 (Тихончук Галина Николаевна)

Tsikhanchuk G.N., Andritsa S.V. STRUCTURE AND DYNAMICS OF ACTIVITY OF MEADOW COLEOPTERA INSECTS IN ORSHA DISTRICT.

The studies have been carried out to determine the ecological and faunal state of the coleoptera insects of meadows in the vicinity of the settlement of Orekhovsk, Orsha District, Vitebsk Region.

Various aspects of the seasonal dynamics of ground beetle activity attract the attention of researchers since these insects are a convenient object for environmental monitoring. Ground beetles have one peak in abundance in wet meadows. The stability of the biotope population depends not only on the air temperature, the amount of precipitation, but also on the soil-hydrological conditions.

Keywords: Coleoptera, wet meadow, statistical indices, seasonal dynamics, temperature, precipitation, species composition.

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў
на англійскую мову
Я.В. Рубанав

Тэхнічны рэдактар *А.Л. Пазнякоў*
Камп'ютарны набор і вёрстка *А.Л. Пазнякоў*
Карэктар *І.Г. Латушкіна*

Падпісана да друку 15.03.2018 г.
Фармат 70x108^{1/16}. Папера афсетная. Гарнітура Times New Roman.
Ум.-друк. арк. 8,4. Ул.-выд. арк. 9,0. Тыраж 100 экз. Заказ 2885.

Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А.А. Куляшова”, 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства
“Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля”
ЛП № 02330/23 ад 30.12.2013 г.
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў