

ISSN 2409-3777



ВЕСНИК

Магілёўскага дзяржаўнага
універсітэта
імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца с снежня 1998 года

Серый В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

2 (50)
2017

Галоўная рэдакцыйная камегія:

д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лайрыновіч(галоўны рэдактар)
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)

*Научно-методический журнал “Веснік Магілёўскага дзяржунівага
універсітэта імя А. А. Куляшова” включен в РИНЦ
(Российский индекс научного цитирования),
лицензионный договор № 811-12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫИ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

ЗМЕСТ

ГАЛЬМАК А.М. О тождествах ассоциативности полиадической операции $[]_{l, \sigma, k}$	4
ЯСЮКОВИЧ Э. И. Разработка алгоритма и программного обеспечения детерминированной машины Тьюринга.....	13
ЛИПНИЦКИЙ В. А., СЕРГЕЙ А. И., СПИЧЕКОВА Н. В. Алгоритм развертки в подсчете количества S_n^2 -орбит кэмероновских матриц.....	23
ГАЛЬМАК А. М., РУСАКОВ А. Д. О неполуассоциативности полиадического группоида $\langle A^k, \eta, \sigma, k \rangle$	38
МОРОЗОВА И. М., КЕМЕШ О. Н., САКОВИЧ Н. В. Метод обнаружения нулей гладких функций, основанный на теореме Минковского о линейных формах	49
ДРОБЫШЕВСКАЯ Т. В., ОСТРИКОВ О. М. Влияние единичного клиновидного двойника на напряженное состояние, обусловленное криволинейными границами зерна поликристалла	55
ОСТРИКОВ О. М. Некоторые особенности взаимодействия механических микродвойников и микротрецин друг с другом и микровключениями при одноосном сжатии монокристаллов висмута	63
МЯЛИК А. Н. Особенности биоморфологической структуры адвентивных видов флоры Припятского полесья	68
ШОРЕЦ М. А., БАЛАЕВА-ТИХОМИРОВА О. М. Загрязнение тяжелыми металлами почвенного покрова Республики Беларусь на примере почв областных центров	75

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

О ТОЖДЕСТВАХ АССОЦИАТИВНОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ $[]_{l, \sigma, k}$

A.M. Гальмак

доктор физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

Доказано, что наличие единицы в полугруппе, на k -й декартовой степени которой с помощью подстановки σ определяется l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ и нетождественность подстановки σ^{l-1} гарантируют невыполнимость всех тождеств, определяющих ассоциативность этой полиадической операции. Установлено также, что замена в указанном результате единицы левой единицей не исключает выполнимость некоторых из указанных тождеств.

Ключевые слова: l -арная операция, полугруппа, ассоциативность, единица.

1. Введение

Основным объектом изучения в данной работе является l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [1] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ на k -й декартовой степени A^k полугруппы A . Частными случаями этой l -арной операции являются две полиадические операции Э. Поста из [2]. Одну из них он определил на декартовой степени симметрической группы. Вторую операцию Э. Пост определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. В определении своих операций Э. Пост использовал в качестве подстановки σ цикл $(12 \dots l-1)$.

В [1] доказано, что если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной. Для полугруппы с единицей верно и обратное утверждение [3], то есть если полугруппа A обладает единицей, то l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда $\sigma^l = \sigma$. В частности это справедливо для групп. Примерами ассоциативных l -арных операций вида $[]_{l, \sigma, k}$ являются обе отмеченные выше l -арные операции Э. Поста, так как $(l-1)$ -я степень цикла $(12 \dots l-1)$ является тождественной подстановкой.

В данной статье доказано, что наличие единицы в полугруппе, на k -й декартовой степени которой с помощью подстановки σ определяется l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ и нетождественность подстановки σ^{l-1} гарантируют невыполнимость всех тождеств, определяющих ассоциативность этой полиадической операции. Установлено также, что замена в указанном результате единицы левой единицей не исключает выполнимость некоторых из указанных тождеств.

потентом не исключает выполнимость некоторых из указанных тождеств. Настоящую статью можно рассматривать как продолжение статьи [3].

2. Предварительные сведения

Напомним определения некоторых понятий, используемых в работе.

Элемент e l -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют его *единицей*, если для любого $x \in A$ и любого $i = 1, 2, \dots, l$ верно

$$[x \underbrace{e \dots e}_{n-1}] = [ex \underbrace{e \dots e}_{n-2}] = \dots = [\underbrace{e \dots ex}_n] = [\underbrace{e \dots ex}_{n-1}] = x.$$

Первыми примерами l -арных группоидов с единицами были l -арные группы В. Дернте [4].

l -Арную операцию $[]$ l -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют *ассоциативной*, если в нем выполняется каждое из следующих $l - 1$ тождеств

$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}] = [x_1[x_2 \dots x_{l+1}]x_{l+2} \dots x_{2l-1}],$$

$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}] = [x_1x_2[x_3 \dots x_{l+2}]x_{l+3} \dots x_{2l-1}],$$

$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}] = [x_1 \dots x_{l-2}[x_{l-1} \dots x_{2l-2}]x_{2l-1}],$$

$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}] = [x_1 \dots x_{l-1}[x_l \dots x_{2l-1}]].$$

Более кратко, l -арную операцию $[]$ l -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют *ассоциативной*, если в нем для любого $i = 2, \dots, l$ выполняется тождество

$$[[x_1 \dots x_i]x_{i+1} \dots x_{2l-1}] = [x_1 \dots x_{i-1}[x_i \dots x_{i+l-1}]x_{i+1} \dots x_{2l-1}].$$

Если указанное тождество выполняется для $i = l$, то l -арную операцию $[]$ называют *полуассоциативной*. Таким образом, l -арную операцию $[]$ l -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют *полуассоциативной*, если в нем выполняется тождество

$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}] = [x_1 \dots x_{l-1}[x_l \dots x_{2l-1}]].$$

Ясно, что ассоциативная l -арная операция является и полуассоциативной.

Понятно также, что следствиями указанных выше $l - 1$ тождеств, определяющих ассоциативность l -арной операции $[]$, являются следующие тождества

$$[x_1 \dots x_{i-1}[x_i \dots x_{i+n-1}]x_{i+n} \dots x_{2n-1}] = [x_1 \dots x_{j-1}[x_j \dots x_{j+n-1}]x_{j+n} \dots x_{2n-1}], \quad (2.1)$$

для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$. Если $i \neq j$, то таких тождеств ровно $\frac{l(l-1)}{2}$.

Замечание 2.1. Иногда ассоциативную l -арную операцию определяют как l -арную операцию, для которой выполняются все тождества вида (2.1).

Определение 2.1 [1, 5]. Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k . Определим на A^k l -арную операцию $[]_{l, \sigma, k}$ следующим образом

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, \dots, y_k),$$

где

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l,$$

$$y_r = x_{1r}x_{2\sigma(r)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(r)}, r = 1, \dots, k.$$

Теорема 2.1 [1, 5]. *Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ ассоциативна.*

Теорема 2.2 [3]. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента, σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:*

- 1) *l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;*
- 2) *l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;*
- 3) *подстановка σ^{l-1} – тождественная.*

3. Основной результат

Существуют примеры l -арных группоидов вида $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, в которых не выполняется по крайней мере одно из тождеств (2.1), определяющих ассоциативность полиадической операции $[]_{l, \sigma, k}$. В связи с этим возникает естественный

Вопрос 3.1. *Существуют ли в классе всех l -арных группоидов вида $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ l -арные группоиды, в которых не выполняются все $l - 1$ тождество, определяющих ассоциативность l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$? Более обще, существуют ли в классе всех l -арных группоидов вида $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ l -арные группоиды, в которых не выполняются все тождества вида (2.1) для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}, i \neq j$.*

Для ответа на поставленный вопрос нам понадобится следующая лемма из [5]. В приведенной здесь формулировке, в отличие от формулировки, приведенной в [5], не используется преобразование f_σ .

Лемма 3.1 [5]. *Пусть множество A содержит более одного элемента, $k \geq 2$, σ и τ – подстановки из S_k . Если*

$$(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = (x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(k)})$$

для любого $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in A^k$, то $\sigma = \tau$.

Следующая теорема дает положительный ответ на вопрос 3.1.

Теорема 3.1. *Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}, i \neq j$ не выполняется тождество*

$$\begin{aligned} & [x_1 \dots x_{i-1} [x_i \dots x_{l+i-1}]_{l, \sigma, k} x_{l+i} \dots x_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = \\ & = [x_1 \dots x_{j-1} [x_j \dots x_{l+j-1}]_{l, \sigma, k} x_{l+j} \dots x_{2l-1}]_{l, \sigma, k}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Доказательство. Пусть для определенности $i < j$.

Предположим выполнимость в A^k тождества из условия теоремы и положим

$$x_1 = \dots = x_{l+j-2} = x_{l+j} = \dots = x_{2l-1} = e = (\underbrace{e, \dots, e}_k),$$

где e – единица полугруппы A . Тогда

$$\begin{aligned} & [\underbrace{e \dots e}_{i-1} [\underbrace{e \dots e}_l]_{l, \sigma, k} \underbrace{e \dots e}_{j-i-1} \underbrace{e \dots e}_{l-j}]_{l, \sigma, k} = \\ & = [\underbrace{e \dots e}_{j-1} [\underbrace{e \dots e}_{l-1} x_{l+j-1}]_{l, \sigma, k} \underbrace{e \dots e}_{l-j}]_{l, \sigma, k}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Положим:

$$\begin{aligned} & [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{i-1} \underbrace{[\mathbf{e} \dots \mathbf{e}]}_l]_{l, \sigma, k} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{j-i-1} \mathbf{x}_{l_{j-1}} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-j}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k), \\ & [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{j-1} \underbrace{[\mathbf{e} \dots \mathbf{e}]}_{l-1} \mathbf{x}_{l_{j-1}}]_{l, \sigma, k} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-j}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k), \\ & [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1} \mathbf{x}_{l_{j-1}}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k), \\ & \mathbf{x}_{l_{j-1}} = (x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

Тогда согласно определению 2.1, для любого $r = 1, 2, \dots, k$ имеем:

$$\begin{aligned} u_r &= \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l+j-2} x_{\sigma^{j-1}(r)} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-j}, \\ v_r &= \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l+j-2} s_{\sigma^{j-1}(r)} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-j} = \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l+j-2} (\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1} x_{\sigma^{j-1}(\sigma^{j-1}(r))}) \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-j} = \\ &= \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{2l+j-3} x_{\sigma^{l-j-2}(r)} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-j}. \end{aligned}$$

А так как e – единица полугруппы A , то

$$u_r = x_{\sigma^{j-1}(r)}, v_r = x_{\sigma^{l-j-2}(r)},$$

откуда и из (3.2) следует

$$x_{\sigma^{j-1}(r)} = x_{\sigma^{l-j-2}(r)}.$$

Так как последнее равенство верно для любого $r = 1, 2, \dots, k$, то по лемме 3.1

$$\sigma^{j-1} = \sigma^{l-j-2},$$

откуда $\sigma^l = \sigma$, что противоречит неравенству $\sigma^l \neq \sigma$ из условия теоремы. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Ясно, что в теореме 3.1 подстановка σ не может быть тождественной, а арность l не может быть равной единице, так как и для тождественной подстановки σ , и для арности $l = 1$ указанное неравенство неверно.

В связи с теоремой 3.1 возникает естественный вопрос: *останется ли утверждение теоремы 3.1 верным, если в ее условии единицу заменить левой единицей или идемпотентом?*

Следующий пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Пример 3.1. Положим в определении 2.1: A – полугруппа с операцией $ab = b$ для любых $a, b \in A$;

$$l = 4, k = 2, \sigma = (12) \in S_2,$$

Так как $(12)^4$ – тождественная подстановка, то $(12)^4 \neq (12)$, то есть условие $\sigma^l = \sigma$ не выполняется.

Ясно, что в полугруппе A все элементы являются одновременно и левыми единицами и идемпотентами.

Определим согласно определению 2.1 на A^2 4-арную операцию

$$\begin{aligned}
 [xyzu]_{4,(12),2} &= [(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)]_{4,(12),2} = \\
 &= (x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)} u_{\sigma^3(1)}, x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)} u_{\sigma^3(2)}) = \\
 &= (x_1 y_2 z_1 u_2, x_2 y_1 z_2 u_1) = (u_2, u_1).
 \end{aligned}$$

Положим также

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2), \mathbf{p} = (p_1, p_2).$$

По теореме 2.2 в 4-арном группоиде $\langle A^2, [\]_{4,(12),2} \rangle$ не выполняется тождество

$$[[xyzu]_{4,(12),2} \mathbf{v} \mathbf{w} \mathbf{p}]_{4,(12),2} = [xyz[\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{w} \mathbf{p}]]_{4,(12),2}$$

то есть 4-арная операция $[\]_{4,(12),2}$ не является полуассоциативной. Это можно установить и непосредственно, проведя соответствующие вычисления, согласно которым

$$\begin{aligned}
 [[xyzu]_{4,(12),2} \mathbf{v} \mathbf{w} \mathbf{p}]_{4,(12),2} &= (p_2, p_1), \\
 [xyz[\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{w} \mathbf{p}]]_{4,(12),2} &= (p_1, p_2).
 \end{aligned}$$

Кроме того, так как

$$\begin{aligned}
 [x[yzuv]]_{4,(12),2} \mathbf{w} \mathbf{p}]_{4,(12),2} &= (p_2, p_1), \\
 [xy[zuvw]]_{4,(12),2} \mathbf{p}]_{4,(12),2} &= (p_2, p_1),
 \end{aligned}$$

то в 4-арном группоиде $\langle A^2, [\]_{4,(12),2} \rangle$ выполняются тождества:

$$\begin{aligned}
 [[xyzu]_{4,(12),2} \mathbf{v} \mathbf{w} \mathbf{p}]_{4,(12),2} &= [x[yzuv]]_{4,(12),2} \mathbf{w} \mathbf{p}]_{4,(12),2}, \\
 [[xyzu]_{4,(12),2} \mathbf{v} \mathbf{w} \mathbf{p}]_{4,(12),2} &= [xy[zuvw]]_{4,(12),2} \mathbf{p}]_{4,(12),2}.
 \end{aligned}$$

Пример 3.1 показывает, что наличие в полугруппе A левых единиц и нетождественность подстановки σ^{l-1} не исключают выполнимость некоторых из $n - 1$ тождеств, определяющих ассоциативность полиадической операции $[\]_{l,\sigma,k}$. При этом теорема 2.2 гарантирует невыполнимость тождества полуассоциативности.

4. Следствия

Следствие 3.1. Пусть группа A содержит более одного элемента, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, [\]_{l,\sigma,k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество (3.1).

Так как для любого цикла σ длины t из S_k и любого целого $s \geq 1$ подстановка σ^{ts} является тождественной, то есть отлична от σ при $t \geq 2$, то из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.2. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$, σ – цикл длины $t \geq 2$ из S_k . Тогда в $\langle A^k, [\]_{ts,\sigma,k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, ts\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned}
 [x_1 \dots x_{i-1} [x_i \dots x_{ts+i-1}]_{ts,\sigma,k} x_{ts+i} \dots x_{2ts-1}]_{ts,\sigma,k} &= \\
 &= [x_1 \dots x_{j-1} [x_j \dots x_{ts+j-1}]_{ts,\sigma,k} x_{ts+j} \dots x_{2ts-1}]_{ts,\sigma,k}.
 \end{aligned}$$

Полагая в следствии 3.2 $\sigma = (12 \dots t)$, получим

Следствие 3.3. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$. Тогда в $\langle A^k, [\]_{ts,(12 \dots t),k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, ts\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{i-1} [\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{ts+i-1}]_{ts, (12 \dots t), k} \mathbf{x}_{ts+i} \dots \mathbf{x}_{2ts-1}]_{ts, (12 \dots t), k} = \\ = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{j-1} [\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_{ts+j-1}]_{ts, (12 \dots t), k} \mathbf{x}_{ts+j} \dots \mathbf{x}_{2ts-1}]_{ts, (12 \dots t), k}.$$

Полагая в следствии 3.3 $t = k, s = 1$, получим

Следствие 3.4. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента. Тогда в $\langle A^k, []_{k, (12 \dots k), k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j$ не выполняется тождество

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{i-1} [\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{k+i-1}]_{k, (12 \dots k), k} \mathbf{x}_{k+i} \dots \mathbf{x}_{2k-1}]_{k, (12 \dots k), k} = \\ = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{j-1} [\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_{k+j-1}]_{k, (12 \dots k), k} \mathbf{x}_{k+j} \dots \mathbf{x}_{2k-1}]_{k, (12 \dots k), k}.$$

Полагая в следствии 3.2 $t = 3$, получим

Следствие 3.5. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$, σ – цикл длины 3 из S_k . Тогда в $\langle A^k, []_{3s, \sigma, k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 3s\}, i \neq j$ не выполняется тождество

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{i-1} [\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{3s+i-1}]_{3s, \sigma, k} \mathbf{x}_{3s+i} \dots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s, \sigma, k} = \\ = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{j-1} [\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_{3s+j-1}]_{3s, \sigma, k} \mathbf{x}_{3s+j} \dots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s, \sigma, k}.$$

Полагая в следствии 3.3 $t = 3$ или в следствии 3.5 $\sigma = (123)$, получим

Следствие 3.6. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$. Тогда в $\langle A^k, []_{3s, (123), k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 3s\}, i \neq j$ не выполняется тождество

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{i-1} [\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{3s+i-1}]_{3s, (123), k} \mathbf{x}_{3s+i} \dots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s, (123), k} = \\ = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{j-1} [\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_{3s+j-1}]_{3s, (123), k} \mathbf{x}_{3s+j} \dots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s, (123), k}.$$

Полагая в следствии 3.6 $k = 3$, получим

Следствие 3.7. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$. Тогда в $\langle A^3, []_{3s, (123), 3} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 3s\}, i \neq j$ не выполняется тождество

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{i-1} [\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{3s+i-1}]_{3s, (123), 3} \mathbf{x}_{3s+i} \dots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s, (123), 3} = \\ = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{j-1} [\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_{3s+j-1}]_{3s, (123), 3} \mathbf{x}_{3s+j} \dots \mathbf{x}_{6s-1}]_{3s, (123), 3},$$

где

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{3s}]_{3s, (123), 3} = \\ = [(x_{11}, x_{12}, x_{13})(x_{21}, x_{22}, x_{23}) \dots (x_{(3s)1}, x_{(3s)2}, x_{(3s)3})]_{3s, (123), 3} = \\ = (x_{11} x_{22} x_{33} \dots x_{(3s-2)1} x_{(3s-1)2} x_{(3s)3}, \\ x_{12} x_{23} x_{31} \dots x_{(3s-2)2} x_{(3s-1)3} x_{(3s)1}, \\ x_{13} x_{21} x_{32} \dots x_{(3s-2)3} x_{(3s-1)1} x_{(3s)2}).$$

Полагая в следствии 3.4 $t = 3$ или в следствии 3.7 $s = 1$, получим

Следствие 3.8. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента. Тогда в $\langle A^3, []_{3, (123), 3} \rangle$ не выполняются все три тождества, определяющих ассоциативность тернарной операции $[]_{3, (123), 3}$,

$$\begin{aligned} [[xyz]]_{3, (123), 3} uv &= [x[yzu]]_{3, (123), 3} v \\ [[xyz]]_{3, (123), 3} uv &= [xy[zuv]]_{3, (123), 3} \\ [x[yzu]]_{3, (123), 3} v &= [xy[zuv]]_{3, (123), 3} \end{aligned}$$

где

$$[xyz]_{3, (123), 3} = [(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)]_{3, (123), 3} = (x_1 y_2 z_3, x_2 y_3 z_1, x_3 y_1 z_2).$$

Полагая в следствии 3.5 $\sigma = (132)$, получим

Следствие 3.9. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$. Тогда в $\langle A^k, [\]_{3s, (132), k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 3s\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} [x_1 \dots x_{i-1} [x_i \dots x_{3s+i-1}]_{3s, (132), k} x_{3s+i} \dots x_{6s-1}]_{3s, (132), k} &= \\ = [x_1 \dots x_{j-1} [x_j \dots x_{3s+j-1}]_{3s, (132), k} x_{3s+j} \dots x_{6s-1}]_{3s, (132), k}. \end{aligned}$$

Полагая в следствии 3.9 $k = 3$, получим

Следствие 3.10. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$. Тогда в $\langle A^3, [\]_{3s, (132), 3} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 3s\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} [x_1 \dots x_{i-1} [x_i \dots x_{3s+i-1}]_{3s, (132), 3} x_{3s+i} \dots x_{6s-1}]_{3s, (132), 3} &= \\ = [x_1 \dots x_{j-1} [x_j \dots x_{3s+j-1}]_{3s, (132), 3} x_{3s+j} \dots x_{6s-1}]_{3s, (132), 3}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &[x_1 x_2 \dots x_{3s}]_{3s, (132), 3} = \\ &= [(x_{11}, x_{12}, x_{13})(x_{21}, x_{22}, x_{23}) \dots (x_{(3s)1}, x_{(3s)2}, x_{(3s)3})]_{3s, (132), 3} = \\ &= (x_{11} x_{23} x_{32} \dots x_{(3s-2)1} x_{(3s-1)3} x_{(3s)2}, \\ &\quad x_{12} x_{21} x_{33} \dots x_{(3s-2)2} x_{(3s-1)1} x_{(3s)3}, \\ &\quad x_{13} x_{22} x_{31} \dots x_{(3s-2)3} x_{(3s-1)2} x_{(3s)1}). \end{aligned}$$

Полагая в следствии 3.10, $s = 1$, получим

Следствие 3.11. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента. Тогда в $\langle A^3, [\]_{3, (132), 3} \rangle$ не выполняются все три тождества, определяющих ассоциативность тернарной операции $[\]_{3, (132), 3}$,

$$\begin{aligned} [[xyz]]_{3, (132), 3} uv &= [x[yzu]]_{3, (132), 3} v \\ [[xyz]]_{3, (132), 3} uv &= [xy[zuv]]_{3, (132), 3} \\ [x[yzu]]_{3, (132), 3} v &= [xy[zuv]]_{3, (132), 3} \end{aligned}$$

где

$$[xyz]_{3, (132), 3} = [(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)(z_1, z_2, z_3)]_{3, (132), 3} = (x_1 y_2 z_3, x_2 y_3 z_1, x_3 y_1 z_2).$$

Полагая в следствии 3.2 $t = 2$, получим

Следствие 3.12. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$, σ – транспозиция из S_k . Тогда в $\langle A^k, [\]_{2s, \sigma, k} \rangle$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 2s\}$, $i \neq j$ не выполняется тождество

$$[x_1 \dots x_{i-1} [x_i \dots x_{2s+i-1}]_{2s, \sigma, k} x_{2s+i} \dots x_{4s-1}]_{2s, \sigma, k} =$$

$$= [x_1 \dots x_{j-1} [x_j \dots x_{2s+j-1}]_{2s, \sigma, k} x_{2s+j} \dots x_{4s-1}]_{2s, \sigma, k}$$

Полагая в следствии 3.3 $t = 2$ или в следствии 3.12 $\sigma = (12)$, получим

Следствие 3.13. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$. Тогда $v < A^k, []_{2s, (12), k} >$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 2s\}, i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} &[x_1 \dots x_{i-1} [x_i \dots x_{2s+i-1}]_{2s, (12), k} x_{2s+i} \dots x_{4s-1}]_{2s, (12), k} = \\ &= [x_1 \dots x_{j-1} [x_j \dots x_{2s+j-1}]_{2s, (12), k} x_{2s+j} \dots x_{4s-1}]_{2s, (12), k}. \end{aligned}$$

Полагая в следствии 3.13 $k = 2$, получим

Следствие 3.14. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента, $s \geq 1$. Тогда $v < A^2, []_{2s, (12), 2} >$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, 2s\}, i \neq j$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} &[x_1 \dots x_{i-1} [x_i \dots x_{2s+i-1}]_{2s, (12), 2} x_{2s+i} \dots x_{4s-1}]_{2s, (12), 2} = \\ &= [x_1 \dots x_{j-1} [x_j \dots x_{2s+j-1}]_{2s, (12), 2} x_{2s+j} \dots x_{4s-1}]_{2s, (12), 2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &[x_1 x_2 \dots x_{2s}]_{2s, (12), 2} = \\ &= [(x_{11}, x_{12})(x_{21}, x_{22}) \dots (x_{(2s-1)1}, x_{(2s-1)2})(x_{(2s)1}, x_{(2s)2})]_{2s, (12), 2} = \\ &= (x_{11} x_{22} x_{31} x_{42} \dots x_{(2s-3)1} x_{(2s-2)2} x_{(2s-1)1} x_{(2s)2}, \\ &\quad x_{12} x_{21} x_{32} x_{41} \dots x_{(2s-3)2} x_{(2s-2)1} x_{(2s-1)2} x_{(2s)1}). \end{aligned}$$

Полагая в следствии 3.14 $s = 2$, получим

Следствие 3.15. Пусть полугруппа A с единицей содержит более одного элемента. Тогда $v < A^2, []_{4, (12), 2} >$ не выполняются все шесть тождеств, определяющих ассоциативность 4-арной операции $[]_{4, (12), 2}$

$$\begin{aligned} &[[xyzu]]_{4, (12), 2} vwp = [x[yzuv]]_{4, (12), 2} wp, \\ &[[xyzu]]_{4, (12), 2} vwp = [xy[zuvw]]_{4, (12), 2} p, \\ &[[xyzu]]_{4, (12), 2} vwp = [xyz[uvwp]]_{4, (12), 2}, \\ &[x[yzuv]]_{4, (12), 2} wp = [xy[zuvw]]_{4, (12), 2} p, \\ &[x[yzuv]]_{4, (12), 2} wp = [xyz[uvwp]]_{4, (12), 2}, \\ &[xy[zuvw]]_{4, (12), 2} p = [xyz[uvwp]]_{4, (12), 2}, \end{aligned}$$

где

$$[xyzu]_{4, (12), 2} = [(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)]_{2s, (12), 2} = (x_1 y_2 z_1 u_2, x_2 y_1 z_2 u_1).$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
2. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Гальмак, А. М. Об ассоциативности полиадических группоидов / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2017. – № 1. – С. 4–11.

4. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
5. Гальмак, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Поступила в редакцию 12.05.2017 г.

Контакты: +375 222 47-79-35 (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A. ON IDENTITIES OF ASSOCIATIVITY OF POLYADIC OPERATION

[]_{l, σ, k}

The article focuses on the further investigation of the polyadic operation []_{l, σ, k}. In particular it has been found out that the availability of the left identity in the semigroup A guarantees the equality of associativity and semiassociativity for this operation.

Keywords: polyadic operation, semigroup, associativity, identity.

УДК 681.5.01.512

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ МАШИНЫ ТЬЮРИНГА

Э. И. Ясюкович

кандидат технических наук, доцент,
Белорусско-Российский университет (г. Могилев)

В статье рассматривается разработанное программное обеспечение анимации детерминированной машины Тьюринга, позволяющее выполнить несложные вычисления в унарной, двоичной, четверичной и других системах счисления. Интерфейс программного средства разработан на основе UserForm, которая содержит ленту для отображения исходного числа и результатов вычисления, флагшки для выбора необходимых состояний и алфавита, поля со списками для формирования команд, а также командные кнопки для управления программой и ее выполнения.

Ключевые слова: машина Тьюринга, лента, головка чтения-записи, алфавит, команда, состояния, алфавит, программа, цифра, интерфейс, пользовательская форма, элементы управления, типовые задачи, алгоритм, программное обеспечение.

Введение

В настоящее время работы по машинам Тьюринга не потеряли своей актуальности [1; 2; 3; 4], поэтому в настоящей работе рассмотрим технологию разработки программного обеспечения для ее анимации.

Машина Тьюринга (МТ), рис. 1, представляет собой абстрактное вычислительное устройство, содержащее: бесконечную в обе стороны и разделенную на ячейки ленту; головку чтения-записи (Γ) и программируемый автомат, называемый также устройством управления (УУ) [2].

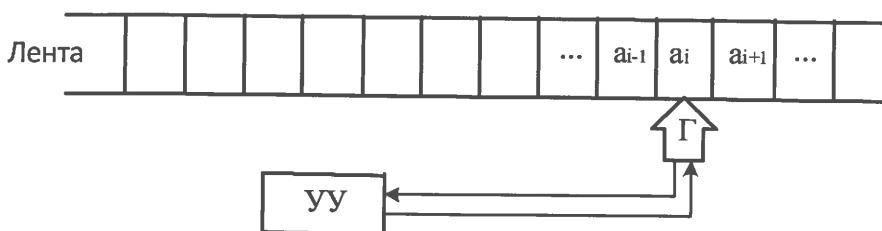


Рис. 1. Структура машины Тьюринга

Лента МТ выполняет роль внешней памяти, а головка – устройства ввода-вывода. В каждый момент работы УУ МТ может находиться в одном из состояний q_i , принадлежащих внутреннему алфавиту Q . Например, внутренний ал-

фавит МТ, может быть таким: q_i – автомат ищет крайний правый символ на ленте; q_2 – автомат увеличивает число на 1, проходя его справа налево. УУ имеет также терминальное состояние q_0 , являющееся конечным или состоянием останова. Работает УУ по правилам перехода, которые определяются программой, и в зависимости от текущего состояния и наблюдаемого в текущей ячейке символа определяют действие: запись нового символа, переход в новое состояние и перемещение головки на одну ячейку вправо или влево.

Множество символов, с которыми работает МТ, называют внешним алфавитом A , а последовательности символов из A – его цепочками. Например, алфавит МТ, работающей с двоичными цифрами включает цифры 0, 1 и пробел В, т. е. $A=\{0, 1, B\}$.

Задать машину Тьюринга можно в табличном или графическом виде, либо в виде программы. В настоящей работе рассматривается технология задания МТ в виде программы, каждая команда которой имеет вид

$$q_i a_s \rightarrow q_j a_n P,$$

где q_i – текущее состояние УУ; a_s – символ над головкой; q_j – новое состояние; a_n – новый символ; P – направление перемещения головки чтения-записи: R – на ячейку вправо, L – на ячейку влево, N – оставаться на месте.

Для каждой конфигурации $q_i a_s$ имеется только одно правило за исключением конфигурации, содержащей заключительное состояние q_0 , для которого правила нет, т. к. попав в него МТ останавливается.

При задании МТ необходимо указать также начальное и конечное состояния УУ, начальную конфигурацию цепочки и начальное положение головки на ленте.

Краткий обзор существующих проектных решений

На сайте <http://matinf.vsgao.com/simulator/tm.html> размещена детерминированная МТ, которая работает в Online режиме и позволяет решать значительный перечень задач, рис. 2.



Рис. 2. Детерминированная МТ

Известны также Online МТ, работающие по программам, заданным в форме таблицы, например, МТ, приведенная на рис. 3, https://otvet.imgsmail.ru/download/e41aa109be532ccd37c293f1b9d22a4c_h-5.jpg.

The screenshot shows a Deterministic Turing Machine (MT) interface. At the top, there is a horizontal tape with binary digits from -19 to 19. Below the tape, a row of four boxes contains the sequence 1 1 1 1. To the left of the tape, there is a section labeled 'Алфавит' (Alphabet) with the value '01'. To the right, there is a section labeled 'Комментарий' (Comment). The main part of the interface is a state transition table:

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
0	$0 \rightarrow Q_1$	$_ \leftarrow Q_3$	$0 \leftarrow Q_5$	$1 \leftarrow Q_5$	$0 \downarrow Q_2$
1	$3 \rightarrow Q_1$	$_ \leftarrow Q_4$	$2 \leftarrow Q_5$	$3 \leftarrow Q_5$	$1 \downarrow Q_2$
_	$_ \leftarrow Q_2$	$1 \downarrow \circlearrowleft$	$1 \downarrow \circlearrowleft$	$_ \leftarrow \circlearrowleft$	$_ \leftarrow \circlearrowleft$

Рис. 3. Детерминированная МТ с табличной формой представления программы

При большом количестве преимуществ этих МТ их существенным недостатком является неудобный ввод программ для них и только единственный пример задачи. В связи с этим было принято решение разработать МТ, лишенную отмеченных недостатков.

Разработка алгоритма и программного обеспечения машины Тьюринга

Предлагаемый алгоритм реализации МТ предусматривает два режима работы, рис. 4: решение типовой задачи с заранее подготовленной и сохраненной программой и решение оригинальной задачи, для которой требуется составить и ввести новую программу.



Рис. 4. Укрупненная схема алгоритма

Решение задач на представляющей МТ выполняется с помощью разработанного блока “Процессор МТ”, схема алгоритма которого представлена на рис. 5.

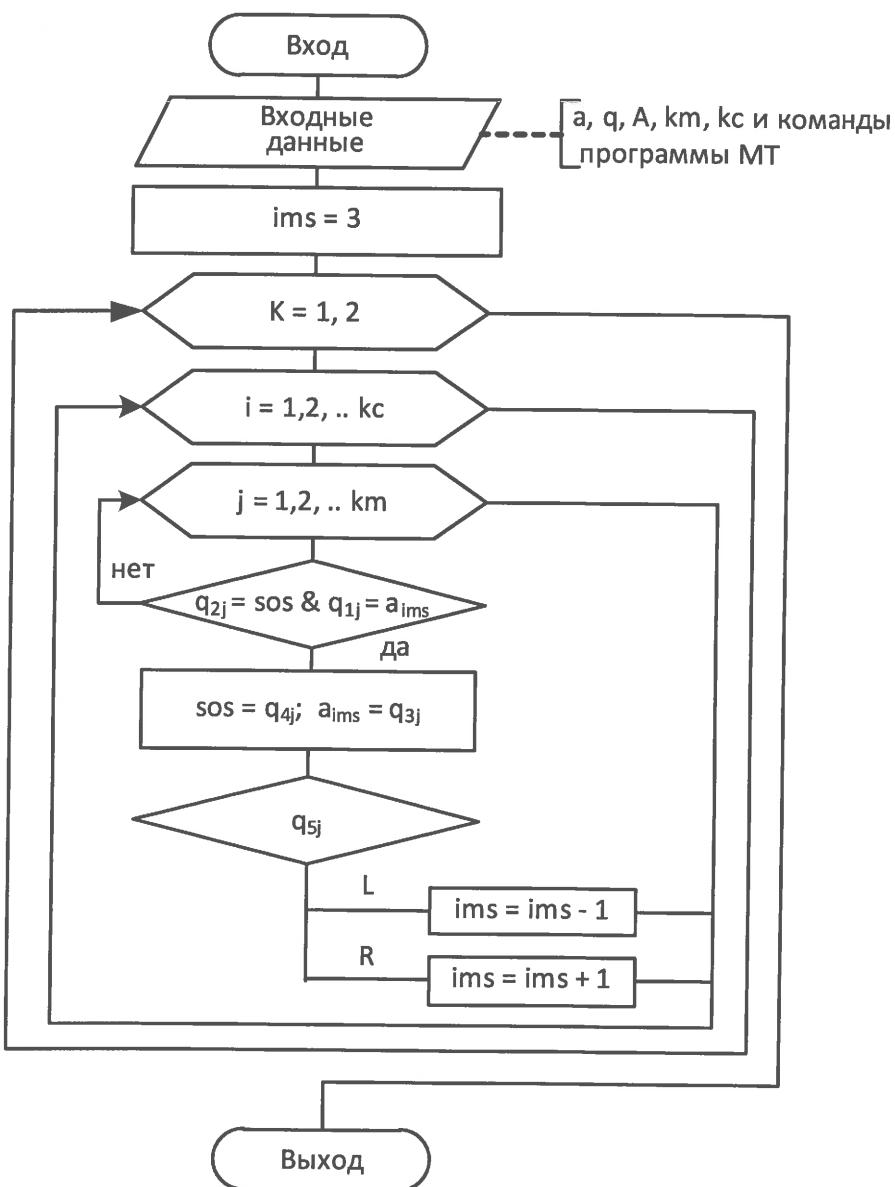


Рис. 5. Схема алгоритма блока “Процессор МТ”

Данный блок принимает шесть параметров: а – входная цепочка или число, q – используемые в задаче состояния, А – алфавит необходимых цифр, km – число команд в программе и kc – количество цифр в исходной цепочке, а также программу обработки цепочки цифр. В следующем блоке переменной ims , определяющей текущий номер символа в указанной цепочке, присваивается значение три. Далее организованы три вложенных цикла: по переменной k – номер прохода при просмотре цепочки (1 – слева направо, 2 – обратно, справа налево), по переменной i – номер символа цепочки, по переменной j – номер команды программы.

Во внутреннем цикле по j , как правило, выполняется досрочный выход, так как он работает до момента обнаружения команды, соответствующей состоянию, обрабатываемому символу цепочки и направлению перемещения головки МТ. При обнаружении всех перечисленных условий рабочее состояние МТ запоминается в переменной sos , символ на ленте меняется в соответствии с выполняемой командой, а переменная ims уменьшается или увеличивается на единицу в зависимости от направления перемещения головки МТ.

Таким образом, процессор МТ, приняв на входе обрабатываемую цепочку, программу, значения отмеченных состояний и выбранных в соответствии с решаемой задачей цифр, выполняет решение задачи. Результатом работы данного блока является цепочка цифр, равная результату выполнения операции.

Программный блок процессора МТ имеет следующий вид

```

sos = cmd(1, 4):      ims = 3
For k = 1 To 2      'k=1 - Движение вправо; 2 - назад; в ms1 - рез-т
    For i = 1 To kc - 2
        For j = 1 To km  'km - число команд в программе МТ
            If cmd(j, 2) = sos And cmd(j, 1) = ms1(ims) Then
                sos = cmd(j, 4):  ms1(ims) = cmd(j, 3)
                Select Case cmd(j, 5)
                    Case "L": ims = ims - 1
                    Case "R": ims = ims + 1
                End Select
                Exit For
            End If
        Next j
    Next i
Next k

```

Разработанная МТ предусматривает два режима работы, в каждом из которых решается соответствующий тип задач – типовые и оригинальные. Схемы алгоритмов блоков решения названных типов задач представлены на рис. 6 и 7.

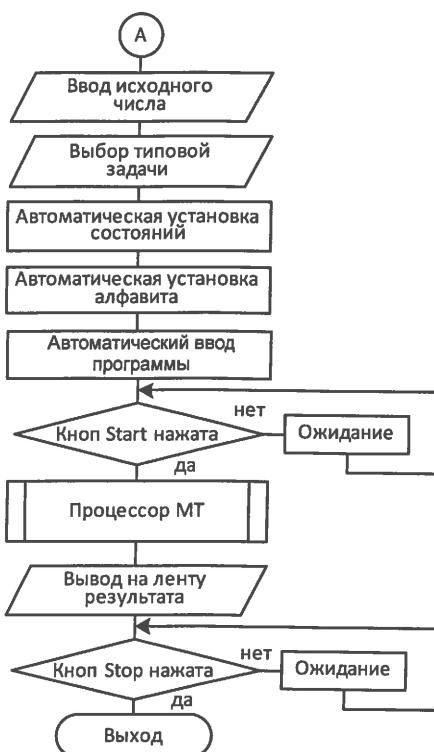


Рис. 6. Укрупненная схема алгоритма блока решения типовых задач



Рис. 7. Укрупненная схема алгоритма блока решения оригинальных задач

В первом режиме МТ способна решать следующие шесть типовых задач: инвертирование цепочки двоичных цифр, увеличение на единицу унарной цепочки, увеличение двоичной цепочки на единицу, уменьшение на единицу унарной цепочки, уменьшение двоичной цепочки на единицу и увеличение четверичного числа на два. Схема алгоритма блока решения типовых задач представлена на рис. 6.

Работа данного алгоритма начинается с ввода задаваемого пользователем в поле “Исходное число” числа. Затем пользователь должен в поле со списком “Типовые задачи” выбирать задачу для решения. Далее в соответствии с выбранной задачей на форме автоматически отмечаются используемые состояния и алфавит, загружается соответствующая, защищая в МТ программа, а из формы для упрощения интерфейса исчезают кнопки “Add” и “Ввод С-А-ИЧ”. Кнопкой “Start” выбранная задача запускается, а после ее выполнения результат выводится на ленту.

Разработанная программа предусматривает также решение задач с использованием разрабатываемых пользователем программ. В этом случае целесообразно сначала составить программу на бумаге вручную, затем установить необходимые состояния, цифры алфавита и ввести в соответствующее поле исходное число. После этого в полях со списками ввода команд программы окажутся только необходимые, выбранные значения состояний и цифр, что значительно упрощает процесс ввода программы. Схема алгоритма блока решения оригинальных задач представлена на рис. 7.

Далее, после нажатия кнопки Start, происходит считывание из окна "Программа" введенных пользователем операторов программы и их выполнение, а полученный результат выводится на ленту.

Программное обеспечение задачи разработано в среде Visual Studio на языке Visual Basic.

Структура интерфейса задачи

Ввод исходных данных, формирование структуры МТ и вывод результатов задачи выполняется разработанным на основе формы UserForm с названием "МашинаТьюринга" блоком интерфейса, который содержит соответствующие элементы управления, рис. 6.

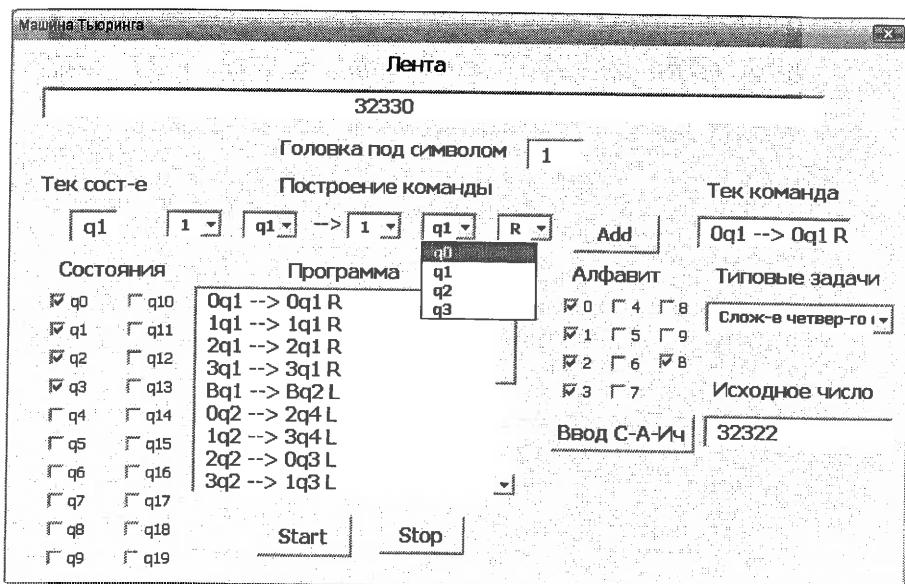


Рис. 6. Интерфейс программы МТ

В верхней части интерфейса МТ размещена лента длиной до 231 символов, построенная на основе элемента управления TextBox с линейкой прокрутки, которая появляется, когда число требует больше позиций на ленте, чем ее ширина на форме. В начале работы в свойство "Text" этого элемента переписывается число из TextBox "Исходное число" при щелчке на кнопке "Ввод С-А-ИЧ" – "Состояние-Алфавит-Исходное число". После завершения работы программы на ленту выводится результат решения задачи.

Под лентой расположено поле TextBox "Головка под символом", указывающее номер цифры исходного числа на ленте, под которой находится головка в процессе выполнения программы.

Следующей группой элементов интерфейса являются: поле TextBox "Тек. сост-е", отображающее текущее состояние, в котором находится УУ в начале или в конце работы программы; пять элементов ComboBox "Построение команды" с раскрывающимися списками, позволяющие сформировать любую ко-

манду программы. В каждом выпадающем списке этих элементов выводятся только те значения цифр и состояний, которые отмечены в группах элементов “Состояния” и “Алфавит”. В этой же строке на форме расположена кнопка “Add”, используемая для ввода в программу очередной сформированной команды.

Следующая группа элементов “Состояния” из 20 элементов CheckBox предназначена для выбора состояний, необходимых для формирования команд, а группа “Алфавит” из 11 элементов, справа от области ListBox “Программа” – для выбора используемых в программе символов алфавита (цифр).

Справа на форме расположены: элемент TextBox, отображающий текущую выполняемую команду программы; поле со списком ComboBox “Типовые задачи” для выбора задачи из заранее подготовленного списка типовых задач.

Кнопка “Ввод S-A-ИЧ” предназначена для запоминания отмеченных состояний и цифр алфавита и ввода исходного числа на ленту. Эта кнопка активна только при ручном вводе команд программы в окне “Программа”. При выборе типовой задачи в поле со списком “Типовые задачи” кнопки “Ввод S-A-Чи” и “Add” из формы исчезают, т. к. значение исходного числа должно быть введено до выбора типовой задачи, а значения состояний и алфавита устанавливаются автоматически, в зависимости от выбранной типовой задачи.

Ручной ввод команд программы следует выполнять в следующем порядке: ввести исходное число в текстовое поле “Исходное число”, в блоке “Состояния” отметить все используемые в программе состояния, в блоке “Алфавит” отметить используемые в программе цифры алфавита, нажать кнопку “Add” чтобы заполнились списки элементов ComboBox строки команды, ввести заранее составленную программу в окно LictBox и после ее визуальной проверки нажать кнопку “Start”. Если в программе отсутствуют ошибки, то на ленте формы появится результат.

Вариант программы для МТ и его результаты

Рассмотрим пример программы решения задачи “Сложение числа в четверичной системе счисления с числом два”. Для решения этой задачи необходимо пять состояний: q_0, q_1, q_2, q_3 и q_4 , а также пять символов алфавита: цифры “0”, “1”, “2”, “3” и пробел “B”. Программа имеет вид, приведенный в таблице, а лента МТ с результатом – на рис. 7.

Программы сложения четверичного числа с цифрой два

	Команда		Команда		Команда		Команда
1	$0q_1 \rightarrow 0q_1R$	6	$0q_2 \rightarrow 2q_4L$	11	$0q_3 \rightarrow 1q_4L$	16	$0q_4 \rightarrow 0q_4L$
2	$1q_1 \rightarrow 1q_1R$	7	$1q_2 \rightarrow 3q_4L$	12	$1q_3 \rightarrow 2q_4L$	17	$1q_4 \rightarrow 1q_4L$
3	$2q_1 \rightarrow 2q_1R$	8	$2q_2 \rightarrow 0q_3L$	13	$2q_3 \rightarrow 3q_4L$	18	$2q_4 \rightarrow 2q_4L$
4	$3q_1 \rightarrow 3q_1R$	9	$3q_2 \rightarrow 1q_3L$	14	$3q_3 \rightarrow 0q_3L$	19	$3q_4 \rightarrow 3q_4L$
6	$Bq_1 \rightarrow Bq_1L$	10	$Bq_2 \rightarrow Bq_5L$	15	$Bq_3 \rightarrow 1q_4L$	20	$Bq_4 \rightarrow Bq_0R$

В качестве исходного числа было введено число 32322_8 , а после сложения его с цифрой 2_8 был получен результат – четверичное число 32330_8 , рис. 5.

Таким образом, приведенные результаты и другие выполненные расчеты, подтверждают работоспособность разработанных алгоритма и программного обеспечения детерминированной машины Тьюринга.

Разработанное программное обеспечение используется в учебном процессе при выполнении лабораторных работ по дисциплине “Теория формальных языков” студентами профиля “Разработка программно-информационных систем” в Белорусско-Российском университете.

Заключение

По результатам выполнения настоящей работы можно сделать следующие выводы:

1. Разработан универсальный алгоритм, позволяющий выполнять арифметические действия над числами в различных системах счисления – унарной, двоичной, четверичной, восьмеричной, десятеричной.
2. Разработана универсальная программная процедура – процессор МТ, позволяющая выполнять любые арифметические операции в различных системах счисления.
3. Разработан программный интерфейс машины Тьюринга на основе формы, не требующий дополнительных инструкций по работе с ней и позволяющий значительно упростить и ускорить процесс ввода команд программы и выполнения операций.
4. Включение в интерфейс МТ набора типовых программ с защищенными программами позволяет значительно упростить и ускорить процесс ее изучения.
5. Разработанное программное средство не предъявляет высоких требований к аппаратному и базовому программному обеспечению компьютера, что значительно расширяет диапазон ее применения, особенно в образовательных целях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Чистяков И. А. Детерминированные машины Тьюринга и искусственный интеллект / И. А. Чистяков // Философские науки. – № 4. – 2013. / <http://www.ngmu.ru/cozo/mos/article/pdf.php?id=1041>
2. Литвинов В. П. Актуальность задачи Тьюринга / В. П. Литвинов // Философские проблемы информационных технологий и киберпространства. Сборник научных статей. Выпуск 3. – Пятигорск : Изд-во Пятигорского государственного лингвистического университета, 2012. – С. 93–100. http://cyberspace.pglu.ru/upload/cyberspace/issues/2012/Litvinov_V_P.pdf
3. Тьюринг А. М. Может ли машина мыслить. / С приложением статьи Дж. фон Неймана. Общая и логическая теория автоматов / А. М. Тьюринг / пер. с англ. Ю. А. Данилова. – ГИ физ.-мат. лит-ры. – Москва, 1960. – 67 с.
4. Детерминированная машина Тьюринга / <http://matinf.vsgao.com/simulator/tm.html>

Поступила в редакцию 30.03.2017 г.

Контакты: ed50@tut.by (Ясиukovich Эдвард Игнатьевич)

Yasiukovich E. ALGORITHM DESIGN AND SOFTWARE SUPPORT OF THE DETERMINISTIC TURING MACHINE.

The article deals with the developed animation software for the deterministic Turing machine, which makes it possible to perform simple calculations in the unary, binary,

quaternary, and other number systems. The interface of the software is developed on the basis of UserForm, which contains a tape for displaying the original number and results of the calculation, checkboxes for selecting the necessary states and alphabet, list boxes for forming commands, and command buttons for controlling the program and its execution.

Keywords: Turing machine, tape, read-write head, alphabet, command, state, alphabet, program, numeral, interface, user form, controls, common tasks, algorithm, software.

УДК 519.688

АЛГОРИТМ РАЗВЕРТКИ В ПОДСЧЕТЕ КОЛИЧЕСТВА S_n^2 -ОРБИТ КЭМЕРОНОВСКИХ МАТРИЦ

В. А. Липницкий,доктор технических наук, профессор,
Военная академия Республики Беларусь***А. И. Сергей***аспирант,
Гродненский государственный университет имени Я. Купалы***Н. В. Спичекова***кандидат физико-математических наук, доцент,
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

В рамках решения третьей проблемы Кэмерона предложен алгоритм подсчета количества орбит на множестве бинарных квадратных матриц порядка n , $n \geq 2$, содержащих в точности n единиц, которые образуются под действием квадрата S_n^2 симметрической группы S_n . Количество орбит вычисляется на основе леммы Бёрнсайда. Для нахождения числа матриц, инвариантных относительно действия фиксированной подстановки, используется линейная развертка бинарной матрицы.

Ключевые слова: (0; 1)-матрицы, симметрическая группа, действие группы на множестве, орбита, мощность орбиты, третья проблема Питера Кэмерона, лемма Бёрнсайда, циклленный тип подстановки.

1. Введение. Матрицы как двумерные массивы информации относятся к базовым объектам высшей математики [1; 2]. Бинарные матрицы, то есть матрицы с элементами 0 и 1, приобрели важное значение в дискретной математике, теории графов и теории групп, теории информации и помехоустойчивом кодировании [3–6]. Английский математик Питер Кэмерон в начале XXI в. обратил внимание на существенную роль в математике класса P_n квадратных (0, 1)-матриц порядка n , $n \geq 2$, содержащих в точности n единиц, занялся с коллегами систематическим их исследованием [7–9]. Параллельно на исследование этого же класса матриц вышла белорусская школа помехоустойчивого кодирования [10–12]. Определенные общие итоги проведенных исследований подведены в монографии [13].

Мощность класса P_n стремительно растет с ростом n . Для эффективной работы с этим классом его следует делить на подклассы каким-то достаточно

© Липницкий В. А., 2017

© Сергей А. И., 2017

© Спичекова Н. В., 2017

естественным образом. Одним из общеизвестных систематизаторов здесь является ранг матрицы – классическая матричная характеристика. Однако на классе P_n она оказалась достаточно грубой и весьма неравномерной характеристикой, как показали исследования.

С середины XIX в. в математике приобрела массовое применение идея разбиения множеств на орбиты – классы эквивалентности под действием на этих множествах тех или иных групп. Математические и технические приложения класса P_n показывают, что наиболее естественными преобразованиями матриц этого класса являются перестановки строк между собой или же перестановки столбцов между собой. Иными словами, наибольший интерес для пользователей представляют орбиты на множестве P_n , которые образуются под действием группы $G = S_n^2 = S_n \times S_n$ – квадрата симметрической группы S_n .

Группа S_n подстановок на n элементах – старейший объект в теории групп, исследуется с XVIII в. [14]. Питер Кэмерон уже в XXI вдохнул в эту классическую область новый мощный исследовательский импульс, сформулировав свои 27 проблем в теории подстановок [15]. Третья из них выглядит следующим образом:

Найти общую формулу или алгоритм вычисления количества α_n орбит, на которые разбивается множество P_n под действием группы $G = S_n^2$.

В [16] представлена краткая, но интенсивная история исследования сформулированной проблемы. Решающий рывок здесь принадлежит А.И. Сергею, вычислившему α_n для значений n от 29 до 102. Данная работа посвящена изложению идей, методов и алгоритмов, позволивших получить данный результат, имеющих важное теоретическое и практическое значение. Да и вычислительный их эффект еще далеко не исчерпан. В знак уважения многогранного вклада Питера Кэмерона в рассматриваемую область в дальнейшем матрицы множества P_n будем называть кэмероновскими.

2. Действие группы на множестве. Необходимые сведения. Пусть M – произвольное непустое множество. Через $Simm(M)$ обозначаем симметрическую группу на M , то есть множество всевозможных биекций, взаимно однозначных отображений из множества M в себя, образующих группу относительно операции композиции отображений. Когда M – конечное множество из n элементов, $Simm(M)$ является классической симметрической группой S_n на n элементах, имеющей порядок $n!$, не коммутативной при условии $n > 2$.

Пусть G – произвольная группа. Действием группы G на множестве M называется всякий гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow Simm(M)$. Другими словами, каждый элемент $g \in G$ определяет взаимно однозначное отображение $\varphi(g) : M \rightarrow M$. В частности, в силу свойств гомоморфизмов, образ $\varphi(e_G)$ нейтрального элемента e_G группы G действует тождественно на множестве M для каждого $x \in M$ ($\varphi(e_G))(x) = x$). Конечно, существует определенная вариативность в выборе гомоморфизма φ , то есть в выборе определения действия группы G на множестве M , широта этого выбора определяется спектром нормальных делителей группы G [1, 14].

Мы, однако, за рамки заданного конкретного гомоморфизма φ выходить не будем, будем им пользоваться как незыблевой данностью, и вовсе будем

забывать о стоящем где-то у истоков некоем гомоморфизме φ . Поэтому образ точки $x \in M$ при действии $g \in G$ в дальнейшем будем просто обозначать символом $g(x)$.

Для каждой точки $x \in M$ через $St(x)$ обозначаем множество всех тех $g \in G$, для которых $g(x) = x$ и называем его стабилизатором точки x . Легкая проверка критерия подгруппы показывает, что $St(x)$ подгруппа группы G .

Действие G на множестве M определяет естественное бинарное отношение R_G на M : пара элементов $(x, y) \in M \times M$ находится в бинарном отношении R_G , если найдется такое $g \in G$, что $g(x) = y$. Отношение R_G рефлексивно: $e(x) = x$ симметрично в силу наличия взаимно обратных элементов в группе G , транзитивно, благодаря наличию алгебраической операции в группе G . Следовательно, бинарное отношение R_G есть отношение эквивалентности на множестве M .

Всякое отношение эквивалентности на множестве определяет разбиение этого множества на попарно непересекающиеся классы эквивалентности. Классы эквивалентности, определяемые отношением R_G , в теории групп называются орбитами или, если требуется уточнение, G -орбитами. Каждая G -орбита M_i однозначно определяется любым своим фиксированным представителем $x_i \in M_i$: $M_i = \{g(x_i) | g \in G\}$, то есть M_i состоит из всех элементов $g(x_i)$ множества M , которые получаются действием на x_i всех элементов $g \in G$. Тем самым оправдано и другое обозначение G -орбиты M_i – символом $\langle x_i \rangle$.

Итак, под действием группы G на множестве M каждая точка $x \in M$ образует два объекта: подгруппу $St(x)$ в группе G и G -орбиту $\langle x \rangle$. При этом, как легко видеть, мощности этих двух объектов оказываются тесно взаимосвязанными – мощность орбиты $\langle x \rangle$ совпадает с индексом стабилизатора $St(x)$ в группе G

$$|\langle x \rangle| = [G : St(x)]. \quad (1)$$

Может оказаться, что $St(x_i) = \{e\}$ для нейтрального элемента e группы G . Тогда $|M_i| = |G|$ – имеет максимально возможное значение, такая орбита, обычно, называется полной.

Из формулы (1) и из теоремы Лагранжа о конечных группах вытекает следующий факт: для всякой конечной группы G мощность любой ее G -орбиты либо совпадает с $|G|$, либо является делителем порядка $|G|$. Отметим также, что стабилизаторы элементов, принадлежащих одной G -орбите, сопряжены друг с другом: если $y = g(x_i) \in M_i$ для некоторого $g \in G$, то $St(y) = gSt(x_i)g^{-1}$. Отсюда, в частности, следует, что стабилизаторы точек одной G -орбиты равномощны.

Множество M совпадает с объединением своих орбит: $M = \bigcup M_i$. Следовательно, в случае конечного множества M имеет место равенство для мощностей: $|M| = \sum |M_i|$. Получаем выражение мощности множества M полностью через параметры группы G

$$|M| = \sum [G : St(x_i)]. \quad (2)$$

В отдельных ситуациях орбита может совпасть со всем множеством M . Тогда говорят, что группа G действует транзитивно на множестве M . В нашем же случае подобное невозможно, поскольку $|P_n| = C_{n^2}^n = \frac{n^2!}{n!(n^2-n)!} > |S_n^2| = (n!)^2$ для всех $n \geq 2$.

3. Общие формулы для числа орбит при действии конечной группы на конечном множестве. Индекс подгруппы H в конечной группе G вычисляется в силу теоремы Лагранжа весьма просто: $[G:H] = |G| : |H|$. Подставим эту формулу в (1). Получим соотношение

$$|\langle x_i \rangle| |St(x_i)| = |G|. \quad (3)$$

Просуммируем равенство (3) по всем орбитам, полагая их количество равным числу m . Получим равенство

$$\sum_{i=1}^m |\langle x_i \rangle| \cdot |St(x_i)| = m |G|. \quad (4)$$

Пусть $m(i)$ мощность G -орбиты $\langle x_i \rangle$, пусть сама орбита $\langle x_i \rangle$ состоит из точек $x_i = x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im(i)}$. Как уже отмечалось, $|St(x_i)| = |St(x_{ij})|$ для каждого целого j , $1 \leq j \leq m(i)$. Поэтому равенство (3) превращается в следующую сумму

$$|\langle x_i \rangle| |St(x_i)| = \sum_{j=1}^{m(i)} |St(x_{ij})| = |G|. \quad (5)$$

Подставим (5) в (4). Получим двойную сумму

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m(i)} |St(x_{ij})| = m |G|. \quad (6)$$

Левая часть формулы (6) представляет собой сумму мощностей стабилизаторов всех точек множества M . Изменим нумерацию слагаемых в этой части формулы. Тогда формула (6) приобретет более прозрачную форму:

$$\sum_{k=1}^{|M|} |St(x_k)| = m |G|. \quad (7)$$

Из равенства (7) непосредственно следует первая формула для числа G -орбит – количество орбит равно средневзвешенной мощности стабилизаторов точек множества M :

$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{k=1}^{|M|} |St(x_k)|. \quad (8)$$

Левая часть формулы (7) по-прежнему остается двойной суммой (из формулы (6)). Перемена порядка суммирования в ней приводит к новому объекту в действии группы на множестве – множеству неподвижных точек: для каждого $g \in G$ через $Inv(g)$ обозначаем множество всех точек $x \in M$, которые g оставляет на месте: $g(x) = x$.

Тогда формулу (7) можно переписать в виде

$$\sum_{l=1}^{|G|} |Inv(g_l)| = m|G|. \quad (9)$$

Из равенства (9) непосредственно следует вторая формула для числа G -орбит – количество орбит равно средневзвешенной мощности множеств неподвижных точек элементов группы G :

$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{l=1}^{|G|} |Inv(g_l)|. \quad (10)$$

Формула (10) носит в литературе название леммы Бёрнсайда.

Уильям Бёрнсайд (2.07.1852 – 21.08.1927) – знаменитый английский математик-алгебраист, шотландского происхождения, один из создателей теории представлений и характеров в теории групп, теории конечных групп [17]. Второе издание этой книги, значительно расширенное, дополненное главой о характеристиках групп, стало эталоном на многие десятилетия в теории конечных групп. Две сформулированные У. Бернсайдом проблемы о конечных группах будоражили математические умы весь двадцатый век [18].

Лемма о числе орбит, о которой шла выше речь, опубликована уже в первом издании книги [17]. Однако она была давно известна в математических кругах, так как существовали ее доказательства, принадлежавшие перу немецкого математика Фердинанда Георга Фробениуса (26.10.1849 – 3.08.1917) – доказательство 1887 г., а также перу великого французского математика и механика Огюстена Луи Коши (21.08.1789 – 23.05.1857) – доказательство 1845 г. Собственно, У. Бернсайд и не претендовал на ее авторство. Однако же первая публикация, оттенившая роль данного утверждения, имеет, как правило, свою магию и свои законы. Поэтому не удивительно, что некоторые щепетильные математики в своих монографиях и учебниках иногда именуют обсуждаемое утверждение вполне справедливо “леммой не Бернсайда”.

Именно формулу (10) мы берем в качестве основной для вычисления количества $m = \alpha_n$ орбит множества $M = P_n$

$$\alpha_n = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{l=1}^{(n!)^2} |Inv(g_l)|. \quad (11)$$

Главное достоинство формулы (11) в унификации и стандартизации вычисляемого параметра – для каждого элемента $g \in G = S_n \times S_n$ мы должны вычислить $Inv(g)$ – количество кэмероновских матриц, инвариантных относительно действия g . Ниже мы убедимся, что количество реально вычисляемых слагаемых формулы (11) существенно ниже заявленного числа $(n!)^2$. Но сначала мы проведем еще одну унификацию – ликвидируем различие между строками и столбцами, вложив группу $G = S_n \times S_n$ в стандартную симметрическую группу S_{n^2} .

4. Лінійна розвертка кэмeronовських матриц и квадрата симметрическої групи. Откажемся от традиционной двойной индексации элементов кэмeronовских матриц.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n(n-1)+1} & a_{n(n-1)+2} & \dots & a_{n^2} \end{pmatrix} \in P_n. \quad (12)$$

Имея на руках такую запись матрицы, несложно осуществить ее линейную развертку – представить матрицу A в виде одной вектор-строки $\bar{x}_A = (a_1, a_2, \dots, a_{n^2})$ из векторного пространства размерностью n^2

Возьмем произвольный элемент $g \in G = S_n \times S_n$. Тогда

$$g(A) = \begin{pmatrix} a_{m_1} & a_{m_2} & \dots & a_{m_n} \\ a_{m_{n+1}} & a_{m_{n+2}} & \dots & a_{m_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_{n(n-1)+1}} & a_{m_{n(n-1)+2}} & \dots & a_{m_{n^2}} \end{pmatrix} \in P_n \text{ и элементу } g \text{ можно поставить в соответствие подстановку}$$

$$h(g) = \begin{pmatrix} \dots & m_1 & \dots & m_2 & \dots & m_{n^2} & \dots \\ \dots & 1 & \dots & 2 & \dots & n^2 & \dots \end{pmatrix} \in S_{n^2}. \quad (13)$$

Подстановку $h(g)$ задаваемую формулой (13), будем называть матричной подстановкой, построенной по элементу g . Множество всех матричных подстановок образует подгруппу $h(G)$ в группе S_{n^2} , разумеется, изоморфную группе G . В силу классических результатов теории подстановок [1, 14, 19] имеет место

Предложение 1. Для всякой подстановки $g = g_1 \cdot g_2 \in G = S_n \times S_n$ и разложения сомножителей в произведения независимых циклов:

$$g_1 = C_1^1 C_2^1 \dots C_k^1; \quad g_2 = C_1^2 C_2^2 \dots C_\mu^2 \quad (14)$$

подстановка $h(g)$ имеет точно такое же разложение в $n(k + \mu)$ зависимых циклов; каждая n -ка этих циклов имеет длину, совпадающую с длиной одного из циклов разложения (14). Верно и обратное.

Пример 1. Пусть $n = 4$, $g = (g_1, g_2) \in S_n \times S_n$, где $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Здесь $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix} \in P_n$ и $g(A) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_4 & a_2 \\ a_5 & a_7 & a_8 & a_6 \\ a_{13} & a_{15} & a_{16} & a_{14} \\ a_9 & a_{11} & a_{12} & a_{10} \end{pmatrix}$.

Равенства (14) в данном случае имеют вид: $g_1 = (3\ 4)$; $g_2 = (2\ 4\ 3)$. Тогда в соответствии с предложением 1 имеем: Перемножим эти циклы между собой. Получим типичную подстановку из группы S_{16}

$$h(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 & 8 & 6 & 7 & 13 & 16 & 14 & 15 & 9 & 12 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Как элемент S_{16} разложим эту подстановку в произведение независимых циклов. Получим $h(g) = (1)(5)(2\ 4\ 3)(6\ 8\ 7)(9\ 13)(10\ 16\ 11\ 14\ 12\ 15)$.

Аналогично примеру 1 строится разложение в произведение независимых циклов любой матричной подстановки

$$h(g) = C_1 C_2 \cdot \dots \cdot C_k. \quad (15)$$

Если матрица $A \in P_n$, то вектор $\bar{x}_A = (a_1, a_2, \dots, a_{n^2})$ содержит в точности n единиц. Любая матричная подстановка, как и любая подстановка из S_{n^2} только переставит их местами, не меняя их количества. Более того, имеет место

Предложение 2. Пусть в разложении (15) присутствуют все циклы, в частности, и циклы длиной 1. Тогда:

1) если l_i длина цикла C_i , $1 \leq i \leq k$, то $l_1 + l_2 + \dots + l_k = n^2$;

2) следовательно, для всякой матрицы $A \in P_n$, каждая координата вектора $\bar{x}_A = (a_1, a_2, \dots, a_{n^2})$ принадлежит в точности своему одному единственному циклу C_i , $1 \leq i \leq k$;

3) матрица $A \in P_n$, принадлежит $Inv(g)$ в том и только том случае, когда все элементы матрицы A , соответствующие отдельно взятому циклу C_j , $1 \leq j \leq k$, равны между собой, то есть либо все равны 0, либо все они равны 1.

4) если матрица $A \in P_n$, принадлежит $Inv(g)$, а элементы 1 этой матрицы принадлежат только циклам с номерами i_1, i_2, \dots, i_s , то в таком случае

$$l_{i_1} + l_{i_2} + \dots + l_{i_s} = n. \quad (16)$$

Соотношение (16) является довольно жестким и не всегда может выполняться. Свидетельством сказанному является

Пример 2. Пусть $n=5$, $g=(g_1, g_2) \in S_5 \times S_5$, где $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$,

$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Вычисления показывают, что здесь

$h(g) = (1\ 7\ 13\ 16\ 22\ 3\ 6\ 12\ 18\ 21\ 2\ 8\ 11\ 17\ 23)(4\ 10\ 14\ 20\ 24\ 5\ 9\ 15\ 19\ 25)$ – произведение двух независимых циклов длиной 10 и 15. Следовательно, $Inv(g)$ пусто для данной подстановки g .

Из предложения 2 непосредственно вытекает следующий способ вычисления мощности $|Inv(g)|$: имеем полный список всех длин циклов

$$\{l_1, l_2, \dots, l_k\} \quad (17)$$

из равенства (15) (включая и все циклы длиной 1, в этом списке может быть много одинаковых чисел), из чисел этого списка длин следует составить все возможные, отличающиеся друг от друга хотя бы одним индексом, суммы (16). Количество таких сумм будет совпадать с величиной $|Inv(g)|$.

Рассмотрим более подробно методику вычисления мощности $|Inv(g)|$ множества $Inv(g)$, базирующуюся на разложении подстановки $h(g)$ в произведение независимых циклов.

5. Алгоритм вычисления мощности матричных подстановок на основе их цикленного разложения. Зафиксируем величину n и подстановку $g \in G$. Подобно тому, как в вычислениях с целыми числами используется не просто разложение натурального числа в произведение простых множителей, а более точное каноническое разложение этого числа, так и здесь, вместо разложений (14) и (15) мы будем опираться на их более точные варианты.

Пусть в равенстве (15) присутствуют все циклы, в том числе и длиной 1, пусть эти циклы упорядочены по возрастанию их длин так, что $l_i \geq 1$; $l_i \leq l_j$ при $i < j$. Как показывает пример 1, в разложении (15) может встречаться достаточно много циклов одинаковой длины. Пусть в (15) присутствуют циклы t различных длин, $1 \leq t \leq k$. Пусть циклы C_1, C_2, \dots, C_{i_1} имеют длину $l_1 = l_2 = \dots = l_{i_1} \geq 1$, циклы $C_{i_1+1}, C_{i_1+2}, \dots, C_{i_2}$ имеют длину $l_{i_1+1} = l_{i_1+2} = \dots = l_{i_2} > l_{i_1}$, и так далее, циклы $C_{i_{t-1}+1}, C_{i_{t-1}+2}, \dots, C_{i_t} = C_k$ имеют длину $l_{i_{t-1}+1} = l_{i_{t-1}+2} = \dots = l_{i_t} = l_k > l_{i_{t-1}}$.

Также детализируем обозначение элементов последовательности (17) символами $l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1c_1}, \dots, l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_c}, \dots, l_{s1}, l_{s2}, \dots, l_{sc_s}$, где $l_{ii} = l_{i2} = \dots = l_{ic_i}$; $1 \leq i \leq s \leq k$. Через L_i , $1 \leq i \leq k$, условимся в дальнейшем обозначать множество $L_i = \{l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1c_1}, \dots, l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_c}\}$ – часть циклов последовательности (17), длины которых находятся в пределах от 1 до i включительно.

Через $f_{i,j}$ обозначим количество способов представить число j в виде суммы, используя в качестве слагаемых только числа множества L_i , причем каждый элемент множества L_i может входить в упомянутую сумму не более одного раза. Будем полагать, что $f_{0,0} = 1$, $f_{i,0} = 1$, $i > 1$, $f_{0,j} = 0$, $j \neq 0$. Для вычисления $f_{i,j}$ все способы представления числа j можно разбить на непересекающиеся классы в зависимости от того, сколько слагаемых, равных l_{ii} , будет содержать результирующая сумма. Если при этом результирующая сумма содержит q слагаемых, равных l_{ii} , то количество способов представить j в требуемом виде будет равно $C_{c_i}^q f_{i-1, j-ql_{ii}}$, поскольку число ql_{ii} уже выбрано, а из чисел множества L_{i-1} нужно набрать сумму, равную $j - ql_{ii}$. Множитель $C_{c_i}^q$ равен числу способов выбрать q из c_i циклов длиной l_{ii} для размещения в них единиц. Так как рассматриваемые классы не пересекаются, то получаем следующую рекуррентную формулу

$$f_{i,j} = \sum_{q, j-ql_{ii} \geq 0} C_{c_i}^q f_{i-1, j-ql_{ii}}. \quad (18)$$

Из вышесказанного следует

Предложение 3. $|Inv(g)| = f_{s,n}$, где s – это количество различных длин циклов в разложении (15), не превосходящих n .

В силу формулы (18) на практике вычисление осуществляется последовательно, составлением таблицы значений $f_{i,j}$, начиная с $f_{0,0}$, постепенно наращивая значения i и j до достижения значения $f_{s,n}$ из предложения 3. Для надежности, можно вычисления проводить без возможных пропусков значений i и j до величины $f_{n,n}$.

Пример 3. Найдем $|Inv(g)|$ для подстановки g из примера 1. Из найденного там разложения $h(g) = (1)(5)(9,13)(2,4,3)(6,8,7)(10,16,11,14,12,15)$. Следовательно, список (17) в данном случае имеет вид: 1,1,2,3,3,6 и $s = 3$. Легко видеть, что искомая мощность равна 5. Действие же по алгоритму сводится к последовательному заполнению строк табл. 1 в соответствии с легкими вариантами формулы (18).

Таблица 1 – Значения f_{ij} , $0 \leq i \leq s = 3$; $0 \leq j \leq n = 4$; для примера 2

$i \setminus j$	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1	2	1	0	0
2	1	2	2	2	1
3	1	2	2	4	5

Так как $f_{3,4} = 5$, то для данной подстановки g существует в точности 5 неподвижных точек. Каждая неподвижная точка представляет собой матрицу из множества $P_n = P_4$, все единицы в которой заполняют циклы длиной 1,1,2 или 1, 3 из разложения подстановки $h(g)$. Выпишем неподвижные точки элемента g : существует единственная матрица, единицы которой заполняют циклы

(1), (5), (9,13) длиной 1, 1, 2 в разложении h : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; существует четыре

матрицы, единицы в которых заполняют пары циклов (1),(2,4,3); (1),(6,8,7); (5),(2,4,3); (5),(6,8,7) длиной 1, 3 из разложения подстановки матрицы h :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления точного значения α_4 по приведенному алгоритму следует подобные вычисления таблиц типа табл. 1 провести, вообще говоря, еще для $(4!)^2 - 1 = 575$ подстановок. Правда, выписывать явно инвариантные матрицы при этом вовсе не обязательно.

Для тождественной подстановки $e \in S_n$ подстановка $e = (e, e)$ является тождественной в $G = S_n^2$, а подстановка $h(e)$ будет нейтральным элементом в группе $h(G) \subset S_{n^2}$. Отсюда легко видеть, что $|Inv(e)| = |P_n| = C_{n^2}^n$ – общая формула для всех значений n . Наверняка найдутся и другие виды подстановок g с подобными формулами для $|Inv(g)|$. Мы, однако, оставим этот вопрос для отдельных исследований и перейдем к рассмотрению другого общего подхода сокращения вычислений α_n , который предоставляет общая теория подстановок.

6. Циклленный тип подстановки. Пусть $A = (a_{ij}) \in P_n$, $g = (g_1, g_2) \in S_n \times S_n$ и $g_i = C_1^{g_i} \dots C_{k_i}^{g_i}$, $i = 1, 2, \dots$ – разложение g_i в произведение независимых циклов, содержащее, в том числе, и циклы длиной 1. Через $|C_i^{g_i}|$ будем обозначать длину цикла $C_i^{g_i}$.

Предложение 4. Пусть в разложении (15) матричной подстановки $h(g)$ в произведение независимых циклов присутствуют все циклы, в том числе и циклы длиной 1. Тогда:

1) индексы элементов матрицы A , которые расположены на пересечении строк и столбцов, входящих в циклы $C_i^{g_1}$ и $C_j^{g_2}$, будут образовывать

$$\frac{|C_i^{g_1}| |C_j^{g_2}|}{HOK(|C_i^{g_1}|, |C_j^{g_2}|)} \quad (19)$$

циклов в разложении (15);

2) длина каждого цикла равна $HOK(|C_i^{g_1}|, |C_j^{g_2}|)$.

Доказательство. Возьмем элемент a_i матрицы A . Пусть строка и столбец, на пересечении которых расположен a_i , входят в циклы $C_i^{g_1}$ и $C_j^{g_2}$. Пусть в результате действия g элемент a_i будет располагаться на месте элемента a_{i_1} матрицы A , a_{i_1} – на месте a_{i_2} , ..., a_{i_u} – на месте a_i . Тогда индексы элементов $a_i, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_u}$ будут образовывать один цикл в разложении (15). Чтобы получить матрицу $g(A)$ можно действовать так: вначале переставить строки матрицы A в соответствии с подстановкой g_1 , а затем в результирующей матрице переставить столбцы в соответствии с подстановкой g_2 . Поэтому в цикл $C_i^{g_1}$ ($C_j^{g_2}$) будут входить те и только те строки (столбцы) матрицы A , в которых располагаются элементы $a_i, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_u}$.

Представим, что элемент a_i “перемещается” по матрице A в соответствии с циклами $C_i^{g_1}$ и $C_j^{g_2}$, а именно: пусть вначале a_i передаст на место элемента a_{i_1} затем – на место элемента a_{i_2} , ..., на место элемента a_{i_u} и, наконец, вернется на свое место. За время такого “путешествия” a_i “опишет” цикл, образованный индексами элементов $a_i, a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_u}$ в разложении (15). При этом a_i посетит все строки и столбцы матрицы A , входящие в циклы $C_i^{g_1}$ и $C_j^{g_2}$, и вернется на свое первоначальное место. За один “шаг” a_i “посещает” только одну строку и столбец. Поэтому, чтобы вернуться на свое первоначальное место, a_i нужно выполнить $HOK(|C_i^{g_1}|, |C_j^{g_2}|)$ шагов, т. е. длина соответствующего цикла в разложении (15) будет равна $HOK(|C_i^{g_1}|, |C_j^{g_2}|)$. В матрице A на пересечении

чении строк и столбцов, входящих в циклы $C_i^{g_1}$ и $C_j^{g_2}$ располагается $|C_i^{g_1}| |C_j^{g_2}|$ элементов. Поэтому число циклов разложения (15), которые образованы элементами матрицы A , стоящими на пересечении строк и столбцов, входящих в циклы $C_i^{g_1}$ и $C_j^{g_2}$ находится по формуле (19). Доказательство завершено.

Согласно [14], стр. 17, последовательность $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ мощностей множеств циклов длиной i , $1 \leq i \leq n$, в разложении подстановки $g \in S_n$ называется циклленным типом данной подстановки. Будем говорить, что две подстановки относятся к одному циклленному типу, если они имеют одинаковое количество циклов одинаковой длины. Сопряженные подстановки, очевидно, относятся к одному циклленному типу. Согласно теореме 2 из главы 1 [14], верно и обратное утверждение. Подобное утверждение для $G = (S_n)$ и $h(G)$ требует уточнений.

Предложение 5. Пусть $g = (g_1, g_2)$, $f = (f_1, f_2) \in G = S_n^2$ – две подстановки, у которых пара g_1, f_1 одного циклленного типа и пара g_2, f_2 также одного (но своего) циклленного типа. Тогда $h(g)$ и $h(f)$ – также подстановки одного циклленного типа в группе S_{n^2} .

Доказательство. Зафиксируем разложения $g_i = C_1^{g_{i1}} \dots C_{k_{gi}}^{g_{ii}}$ и $f_i = C_1^{f_{i1}} \dots C_{k_{fi}}^{f_{ii}}$, $i = 1, 2$, в произведения независимых циклов, включающие, в том числе, и циклы длиной 1. Так как g_i и f_i , $i = 1, 2$, – подстановки одного циклленного типа, то для каждой пары циклов $C_p^{g_1}$ и $C_q^{g_2}$ найдется пара циклов $C_u^{f_1}$ и $C_v^{f_2}$ таких, что $|C_p^{g_1}| = |C_u^{f_1}|$, $|C_q^{g_2}| = |C_v^{f_2}|$. Обратное также верно.

В соответствии с предложением 4, индексы элементов матрицы $A \in P_n$, которые располагаются на пересечении строк и столбцов, входящих в циклы $C_p^{g_1}$, $C_q^{g_2}$ или $C_u^{f_1}$, $C_v^{f_2}$, образуют одно и то же число циклов одинаковой длины в разложениях $h(g)$ и $h(f)$. Значит, $h(g)$ и $h(f)$ являются подстановками одного циклленного типа в группе S_{n^2} . Доказательство завершено.

Предложение 6. Если g_1 и g_2 , $g_1, g_2 \in G = S_n^2$, – подстановки одного циклленного типа, то $|Inv(g_1)| = |Inv(g_2)|$.

Доказательство следует из предложений 3, 5 и формулы (18) для $f_{s,n}$.

Предложение 7. Пусть в подстановке из n элементов имеется c_i циклов длины l_i , $i = \overline{1, k}$. Тогда количество подстановок такого же циклленного типа

$$\text{равно } n! \prod_{i=1}^k (c_i! l_i^{c_i})^{-1}.$$

Доказательство. Пусть подстановка $g \in S_n$ содержит c_i циклов длины l_i , $i = 1, \dots, k$. Можно полагать, что в представлении g в виде произведения циклов вначале располагаются все циклы длиной l_1 , затем – все циклы длиной l_2 и т. д. Всего существует $n!$ способов расставить n чисел по имеющимся циклам. Однако в некоторых случаях получающиеся подстановки будут различными записями одной и той же подстановки, а именно:

цикл длины $l_i, i = 1, \dots, k$ может быть представлен l_i различными способами, в зависимости от того, с чего начинать перечислять элементы цикла. Для того, чтобы учесть все такие представления только один раз, необходимо $n!$ разделить на каждое из возможных значений l_i . В результате будет получена величина

$$\text{на } n! \prod_{i=1}^k (l_i^{c_i})^{-1};$$

при замене местами циклов одной длины получаются различные записи одной и той же подстановки, т. е. для циклов длины l_i существует $c_i!$ вариантов

их расстановки, которые нужно учесть только один раз. Для этого $n! \prod_{i=1}^k (l_i^{c_i})^{-1}$

нужно разделить на $c_i!$ для каждого i . Доказательство предложения 7 завершено.

Следующий классический результат теории подстановок имеет важнейшее для нас значение, а потому приводится его практически дословная формулировка.

Предложение 8 ([14], Глава 1, следствие 1 из теоремы 2). *Количество различных циклических типов подстановок на множестве длиной n совпадает с $p(n)$ – числом неупорядоченных разбиений числа n , т. е. количеством способов представить n в виде суммы положительных целых чисел.*

Явный рекуррентный вид и свойства функции $p(n)$ представлены в монографиях [20, глава 1], [21, глава 4].

Следствие. *В группе $G = S_n^2$ имеется не более $p^2(n)$ различных циклических типов подстановок.*

К примеру, $p(4) = 5$ следовательно, $p^2(4) = 25$ и для нахождения α_4 понадобится реально составление не более 25 таблиц вида табл. 1. Рассмотренный метод развертки показал свою эффективность на практике, позволив существенно увеличить таблицу значений величины α_n .

7. Оценка сложности алгоритма развертки.

Предложение 9. *Вычисление $f_{s,n}$ по формуле (18) требует выполнения $O(n^2 \log(n))$ операций.*

Доказательство. Оценим количество операций сложения, которые необходимо выполнить для вычисления $f_{s,n}$ по формуле (18). Для фиксированной величины j , $1 \leq j \leq n$, q может принимать одно из $\left[\frac{j}{l_{i1}} \right] + 1$ значений. Просуммировав

эту величину по i , получим $\sum_{i=1}^s \left(\left[\frac{j}{l_{i1}} \right] + 1 \right)$. Так как при любом i выполняется $l_{i1} \geq i$,

$$\text{то } \sum_{i=1}^s \left(\left[\frac{j}{l_{i1}} \right] + 1 \right) \leq \sum_{i=1}^s \left(\frac{j}{l_{i1}} + 1 \right) \leq \sum_{i=1}^s \left(\frac{j}{i} + 1 \right) \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{j}{i} + 1 \right) = \sum_{i=1}^n \frac{j}{i} + n \leq \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} + n = O(n \log n).$$

Последнее равенство вытекает из того, что сумма гармонического ряда имеет логарифмическую асимптотику [22, с. 270]. Так как $1 \leq j \leq n$, то количество

операций, которые необходимо выполнить при вычислении $f_{s,n}$ по формуле (18) не превосходит $O(n^2 \log(n))$. Доказательство завершено.

Следствие. Количество орбит множества P_n может быть найдено за $O(p^2(n)n^2 \log(n))$ операций.

Доказательство. Рассмотрим пару p_i и p_j разбиений (возможно, совпадающих между собой) числа n . p_i и p_j задают цикленный тип подстановок $g_i, g_j \in S_n$. Используя формулу (19), несложно определить цикленный тип подстановки $g_{ij} = (g_i, g_j) \in G = S_n \times S_n$. В соответствии с предложением 3, количество $|Inv(g_{ij})|$ неподвижных точек подстановки g_{ij} совпадает с $f_{s,n}^{g_i, g_j}$ и вычисляется по формуле (18). Количество $k_{p_i}, t = i, j$, подстановок множества S_n , имеющих такой же цикленный тип, как и подстановка g_i может быть вычислена в соответствии с предложением 7. Тогда формулу (11) для вычисления числа α_n орбит множества P_n , можно переписать так:

$$\alpha_n = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{i,j=1}^{p(n)} f_{s,n}^{g_i, g_j} k_{p_i} k_{p_j}. \quad (20)$$

Так как вычисление $f_{s,n}^{g_i, g_j}$, в соответствии с предложением 9, требует $O(n^2 \log(n))$ операций и сумма в правой части формулы (20) содержит $p^2(n)$ слагаемых, то вычисление α_n требует $O(p^2(n)n^2 \log(n))$ операций, что и требовалось доказать.

Пример 4. Вычислим α_n при $n = 4$. Для числа 4 существует пять разбиений: $p_1 = \{1,1,1,1\}$, $p_2 = \{2,1,1\}$, $p_3 = \{2,2\}$, $p_4 = \{3,1\}$, $p_5 = \{4\}$. Пусть цикленный тип подстановки $g_i \in S_4, i = 1, 2, 3, 4, 5$ задается множеством p_i . Для определенности будем считать, что $g_1 = (1)(2)(3)(4)$, $g_2 = (1\ 2)(3)(4)$, $g_3 = (1\ 2)(3\ 4)$, $g_4 = (1\ 2\ 3)(4)$, $g_5 = (1\ 2\ 3\ 4)$. В соответствии с предложением 7, количество $k_{p_i}, i = 1, 2, 3, 4, 5$, подстановок множества S_4 , имеющих такой же цикленный тип, как подстановка g_i будет равно: $k_{p_1} = \frac{4!}{4! \cdot 1^4} = 1$, $k_{p_2} = \frac{4!}{2! \cdot 1^2 \cdot 1! \cdot 2^1} = 6$, $k_{p_3} = \frac{4!}{2! \cdot 2^2} = 3$, $k_{p_4} = \frac{4!}{1! \cdot 1^2 \cdot 1! \cdot 3^1} = 8$, $k_{p_5} = \frac{4!}{1! \cdot 4^1} = 6$. Для каждой пары g_i, g_j определим цикленный тип подстановки $g_{ij} = (g_i, g_j) \in G = S_4 \times S_4$, используя формулу (19), и вычислим $|Inv(g_{ij})|$. Результаты вычислений представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Мощность множеств $Inv(g_{ij})$

g_{ij}	Цикленный тип подстановки $h(g_{ij})$	$ Inv(g_{ij}) $
(g_1, g_1)	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	1820
$(g_1, g_2), (g_2, g_1)$	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2	188
$(g_1, g_3), (g_2, g_3), (g_3, g_1), (g_3, g_2), (g_3, g_3)$	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2	28
$(g_1, g_4), (g_4, g_1)$	1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3	17

Окончание таблицы 2

g_{ij}	Циклленный тип подстановки $h(g_{ij})$	$ Inv(g_{ij}) $
$(g_1, g_5), (g_2, g_5), (g_3, g_5), (g_5, g_1), (g_5, g_2), (g_5, g_3), (g_5, g_5)$	4, 4, 4, 4	4
(g_2, g_2)	1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2	52
$(g_2, g_4), (g_4, g_2)$	1, 1, 2, 3, 3, 6	5
$(g_3, g_4), (g_4, g_3)$	2, 2, 6, 6	1
(g_4, g_4)	1, 3, 3, 3, 3, 3	5
$(g_4, g_5), (g_5, g_4)$	4, 12	1

Применим формулу (20) для вычисления α_4 :

$$\begin{aligned} \alpha_4 = \frac{1}{(4!)^2} & (1820 \cdot 1 \cdot 1 + 188 \cdot 1 \cdot 6 + 28 \cdot 1 \cdot 3 + 17 \cdot 1 \cdot 8 + 4 \cdot 1 \cdot 6 + 188 \cdot 6 \cdot 1 + 52 \cdot 6 \cdot 6 + 28 \cdot 6 \cdot 3 + \\ & + 5 \cdot 6 \cdot 8 + 4 \cdot 6 \cdot 6 + 28 \cdot 3 \cdot 1 + 28 \cdot 3 \cdot 6 + 28 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 8 + 4 \cdot 3 \cdot 6 + 17 \cdot 8 \cdot 1 + 5 \cdot 8 \cdot 6 + 1 \cdot 8 \cdot 3 + \\ & + 5 \cdot 8 \cdot 8 + 1 \cdot 8 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 1 + 4 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 3 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 4 \cdot 6 \cdot 6) = 16. \end{aligned}$$

Полученное значение α_4 совпадает с четвертым членом последовательности A049311 [16].

8. Заключение. В работе предложен алгоритм подсчета количества орбит α_n , на которые разбивается множество P_n квадратных (0, 1) матриц под действием квадрата S_n^2 симметрической группы S_n . Алгоритм основан на лемме Бёрнсаайда, применение которой требует вычисления количества $|Inv(g)|$ матриц множества P_n , инвариантных относительно действия подстановки g для каждого $g = (g_1, g_2) \in S_n^2$. Показано, что если известен циклленный тип подстановки g , то $|Inv(g)|$ может быть вычислено по рекуррентной формуле. Циклленный тип подстановки g определяется по циклленным типам подстановок $g_1, g_2 \in S_n$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Кострикин, А. И.* Введение в алгебру / А. И. Кострикин. – Москва : Наука, 1977. – 496 с.
2. *Липницкий, В. А.* Высшая математика. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / В. А. Липницкий. – Минск : ВА РБ, 2015. – 229 с.
3. *Яблонский, С. В.* Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – Москва : Наука, 1986. – 384 с.
4. *Оре, О.* Теория графов / О. Оре. – Москва : Наука, 1980. – 336 с.
5. *Самсонов, Б. Б.* Теория информации и кодирование / Б. Б. Самсонов, Е. М. Плохов, А. И. Филоненков, Т. В. Кречет. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2002. – 288 с.
6. *Мак-Вильямс, Ф. Дж.* Теория кодов, исправляющих ошибки / Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн. – Москва : Связь, 1979. – 744 с.
7. *Cameron, P. J.* Sequences realized by oligomorphic permutation groups / P. J. Cameron // Integer Sequences, 2000. – Vol. 3(1). – Article 00.1.5. – [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL3/groups.html>. – Дата доступа: 07.02.2017.

8. *Cameron, P. J.* Asymptotics for incidence matrix classes / P. J. Cameron, T. Prellberg, D. Stark // The Electronic Journal of Combinatorics, 2006. – Vol. 13.1. – [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v13i1r85/pdf>. – Дата доступа: 07.02.2017.
9. *Cameron, P. J.* Product action / P. J. Cameron, D. A. Gewurz, F. Merola // Discrete Math., 2008. – №. 308. – Pp. 386–394.
10. *Конопелько, В. К.* Классификация векторов-ошибок при двумерном кодировании информации / В. К. Конопелько, О. Г. Смолякова // Доклады БГУИР. – 2008. – № 7(37). – С. 19–28.
11. *Конопелько, В. К.* Действие квадрата симметрической группы на специальном классе $(0; 1)$ -матриц. Отсутствие полных орбит / В. К. Конопелько, В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова // Доклады БГУИР. – 2010. – № 5(54). – С. 40–46.
12. *Конопелько, В. К.* Классификация точечных образов и классическая проблема разбиения чисел / В. К. Конопелько, В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова // Доклады БГУИР. – 2010. – № 8(57). – С. 127–154.
13. *Цветков, В. Ю.* Предсказание, распознавание и формирование образов многоракурсных изображений с подвижных объектов / В. Ю. Цветков, В. К. Конопелько, В. А. Липницкий. – Минск : Издательский центр БГУ, 2014. – 224 с.
14. *Супруненко, Д. А.* Группы подстановок / Д. А. Супруненко. – Минск : Навука і тэхніка, 1996. – 368 с.
15. *Cameron, P. J.* Problems on permutation groups // P. J. Cameron – [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/pgprob.html>. – Дата доступа: 07.02.2017.
16. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://oeis.org/>. – Дата доступа: 07.02.2017.
17. *Burnside, William.* Theory of groups of finite orders. – Cambridge : At The University Press, 1897. – 430 P.; 2 ed. – Cambridge, 1911; Repr. – N.Y. : Dover, 1955.
18. *Кострикин, А.И.* Вокруг Бернсайда / А. И. Кострикин. – Москва : Наука, 1986. – 232 с.
19. *Липницкий, В. А.* Современная прикладная алгебра. Математические основы защиты информации от помех и несанкционированного доступа / В. А. Липницкий. – Минск : БГУИР, 2006. – 88 с.
20. *Эндрюс, Г.* Теория разбиений / Г. Эндрюс. – Москва : Наука, 1982. – 256 с.
21. *Холл, М.* Комбинаторика / М. Холл. – Москва : Мир, 1970. – 424 с.
22. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2 / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Физматлит, 2001. – 810 с.

Поступила в редакцию 30.03.2017 г.

Контакты: valipnitski@yandex.ru (Липницкий Валерий Антонович)

Lipnitski V., Sergey A., Spichekova N. UNWINDING ALGORITHM TO CALCULATE NUMBER OF S_n^2 -ORBITS FOR CAMERON MATRICES.

In addressing the third Cameron's problem, the authors offer an algorithm to calculate the number of orbits in the set of binary square matrices of order n , $n \geq 2$ with n ones that are formed under the action of square S_n^2 of the symmetric group S_n . The number of orbits is calculated on the basis of Burnside's lemma. A linear unwinding of a binary matrix is used to determine the number of matrices that are invariant with respect to a fixed substitution.

Keywords: binary matrix, symmetric group, orbit, orbit cardinality, the third Peter Cameron's problem, Burnside's lemma, orbital type of a substitution.

УДК 512.548

О НЕПОЛУАССОЦИАТИВНОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКОГО ГРУППОИДА $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$

A. M. Гальмак

доктор физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

A. D. Русаков

аспирант

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель

В статье найдены новые достаточные условия неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$, которая определяется на декартовой степени A^k n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, группойд, полугруппа, полуассоциативность, идемпотент.

1. Введение

Полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ была определена в [1] на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η . Там же было доказано, что если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma' = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ также является ассоциативной. Частным случаем полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ является l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на k -й декартовой степени A^k полугруппы A . В свою очередь, частными случаями l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил в [3]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы. Вторую операцию он определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

В [4] доказано, что если n -арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ содержит более одного элемента и обладает левой нейтральной последовательностью; а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma' \neq \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной. В связи с этим результатом возникает

Вопрос 1.1. *Существуют ли n -арные полугруппы без левых нейтральных последовательностей, для которых l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, если $\sigma' \neq \sigma$? В частности, существуют ли полугруппы без левых единиц, для которых l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, если $\sigma' \neq \sigma$?*

В данной статье получен положительный ответ на этот вопрос.

2. Предварительные сведения

Напомним, что n -арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют *ассоциативной*, если в нем для любого $i = 2, \dots, n$ выполняется тождество

$$\eta(\eta(x_1 \dots x_n)x_{n+1} \dots x_{2n-1}) = \eta(x_1 \dots x_{i-1}\eta(x_i \dots x_{i+n-1})x_{i+n} \dots x_{2n-1}).$$

Если указанное тождество выполняется для $i = n$, то n -арную операцию η называют *полуассоциативной*. Таким образом, n -арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют полуассоциативной, если в нем выполняется тождество

$$\eta(\eta(x_1 \dots x_n)x_{n+1} \dots x_{2n-1}) = \eta(x_1 \dots x_{n-1}\eta(x_n \dots x_{2n-1})).$$

Ясно, что ассоциативная n -арная операция является и полуассоциативной.

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его *левой (правой) нейтральной последовательностью*, если

$$\eta(e_1 \dots e_{n-1}x) = x (\eta(xe_1 \dots e_{n-1}) = x)$$

для любого $x \in A$.

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его *нейтральной последовательностью*, если она является и левой нейтральной и правой нейтральной.

Элемент e n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его *единицей*, если для любого $x \in A$ верно

$$\eta(\underbrace{xe \dots e}_{n-1}) = \eta(\underbrace{ex e \dots e}_{n-2}) = \dots = \eta(\underbrace{e \dots ex e}_{n-2}) = \eta(\underbrace{e \dots ex}_{n-1}) = x.$$

Элемент e n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его *левой (правой) единицей*, если

$$\eta(\underbrace{e \dots ex}_{n-1}) = x (\eta(\underbrace{xe \dots e}_{n-1}) = x)$$

для любого $x \in A$.

Определение 2.1 [1]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $n \geq 2, s \geq 1$, $l = s(n - 1) + 1, k \geq 2, \sigma \in S_k$. Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(x_1 \dots x_n) &= \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \end{aligned}$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_l) &= \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(x_1 \dots x_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(x_n \dots x_{2(n-1)})) \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(x_{(s-2)(n-1)+1} \dots x_{(s-1)(n-1)}) \\ &\quad \eta_{1, \sigma, k}(x_{(s-1)(n-1)+1} \dots x_{s(n-1)+1})) \dots)). \end{aligned}$$

При $s = 1$ l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, \sigma, k}$. Явный вид l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ описывает следующая

Теорема 2.1 [1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -я компонента y_j находится по формуле

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ &\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Замечание 2.1. Если n -арная операция η ассоциативна, то (2.1) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Теорема 2.2 [1]. *Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.*

Лемма 2.1 [5]. *Пусть A – множество, $k \geq 2$, σ – подстановка из S_k , f_σ – преобразование декартовой степени A^k по правилу*

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}).$$

Тогда:

1) f_σ – биекция;

2) для любого $i \geq 2$ преобразование f_σ^i множества A^k осуществляется по правилу

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_{\sigma^i(1)}, x_{\sigma^i(2)}, \dots, x_{\sigma^i(k)});$$

3) $f_\sigma^i = f_{\sigma^i}$ для любого $i \geq 2$;

4) если $a \in A$, $\mathbf{a} = (\underbrace{a, \dots, a}_k)$, то $\mathbf{a}^{f_\sigma} = \mathbf{a}$;

5) если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, то f_σ – автоморфизм n -арного группоида $\langle A^k, \eta \rangle$ с n -арной операцией η , которая определяется покомпонентно с помощью операции η :

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \eta((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11} \dots x_{n1}), \dots, \eta(x_{1k} \dots x_{nk})); \end{aligned}$$

в частности, если $\langle A, * \rangle$ – группоид, то f_σ – автоморфизм группоида $\langle A^k, * \rangle$ с операцией

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_k) * (y_1, \dots, y_k) = (x_1 * y_1, \dots, x_k * y_k).$$

Лемма 2.2 [4]. *Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, σ – подстановка из S_k .*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l.$$

Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l) = \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}} \mathbf{x}_l^{f_{\sigma^{l-1}}}) = \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}} \mathbf{x}_l^{f_{\sigma^{l-1}}}).$$

3 Основные результаты

Приведем пример, дающий положительный ответ на сформулированный во введении вопрос 1.1.

Пример 3.1. Пусть $\langle N, o \rangle$ – коммутативная полугруппа всех натуральных чисел с операцией взятия наибольшего общего делителя:

$$a \circ b = \text{НОД}(a, b).$$

Ясно, что в $\langle N, o \rangle$ все элементы являются идемпотентами.

Пусть далее

$k = 2$, $\sigma = (12) \in S_2$, $n = 4$, s – нечетное, $l = s(n - 1) + 1 = 3s + 1$,
 η – 4-арная операция, производная от операции в полугруппе $\langle N, o \rangle$.

Так как $(12)^{3s+1}$ – тождественная подстановка, то $(12)^{3s+1} \neq (12)$, то есть условие $\sigma^l = \sigma$ не выполняется.

Ясно, что $\langle N, \eta \rangle$ – 4-арная полугруппа с 4-арной операцией

$$\eta(xyzu) = x \circ y \circ z \circ u = \text{НОД}(x, y, z, u).$$

Если x, y, z – любые натуральные числа, p – неделяющее их простое число, то

$$\eta(xyzp) = \text{НОД}(x, y, z, p) = 1 \neq p.$$

Это означает, что последовательность xuz не является левой нейтральной. Таким образом, в 4-арной полугруппе $\langle N, \eta \rangle$ отсутствуют левые нейтральные последовательности. В частности, в полугруппе $\langle N, o \rangle$ отсутствуют левые единицы.

Определим на N^2 согласно определению 2.1 вначале 4-арную операцию

$$\begin{aligned} & \eta_{1, (12), 2}(xyzu) = \\ & = \eta_{1, (12), 2}((x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)) = \\ & = (\eta(x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)} u_{\sigma^3(1)}), \eta(x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)} u_{\sigma^3(2)})) = \\ & = (\eta(x_1 y_2 z_1 u_2), \eta(x_2 y_1 z_2 u_1)) = (\text{НОД}(x_1, y_2, z_1, u_2), \text{НОД}(x_2, y_1, z_2, u_1)), \end{aligned}$$

а затем l -арную операцию $\eta_{s, (12), 2^s}$.

Пусть

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}) \in N^2, i = 1, 2, \dots, l,$$

и положим

$$\eta_{s, (12), 2^s}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, y_2).$$

Тогда, применяя теорему 2.1, получим

$$\begin{aligned} y_1 &= \eta(x_{11} x_{2\sigma(1)} x_{3\sigma^2(1)} \eta(x_{4\sigma^3(1)} x_{5\sigma^4(1)} x_{6\sigma^5(1)} \eta(\dots \\ &\dots \eta(x_{(3(s-1)+1)\sigma^{3(s-1)}(1)} x_{(3(s-1)+2)\sigma^{3(s-1)+1}(1)} x_{(3(s-1)+3)\sigma^{3(s-1)+2}(1)} x_{(3s+1)\sigma^{3s}(1)} \dots))) = \\ &= \eta(x_{11} x_{22} x_{31} \eta(x_{42} x_{51} x_{62} \eta(\dots \eta(x_{(3(s-1)+1)1} x_{(3(s-1)+2)2} x_{(3(s-1)+3)1} x_{(3s+1)2}) \dots))), \end{aligned}$$

то есть

$$y_1 = \eta(x_{11} x_{22} x_{31} \eta(x_{42} x_{51} x_{62} \eta(\dots \eta(x_{(3(s-1)+1)1} x_{(3(s-1)+2)2} x_{(3(s-1)+3)1} x_{(3s+1)2}) \dots))).$$

Аналогично,

$$y_2 = \eta(x_{12}x_{21}x_{32}\eta(x_{41}x_{52}x_{61}\eta(\dots\eta(x_{(3(s-1)+1)2}x_{(3(s-1)+2)1}x_{(3(s-1)+3)2}x_{(3s+1)1})\dots))).$$

Последние два равенства можно переписать в виде

$$y_1 = \text{НОД}(x_{11}, x_{22}, x_{31}, x_{42}, x_{51}, x_{62}, \dots, x_{(3(s-1)+1)1}, x_{(3(s-1)+2)2}, x_{(3(s-1)+3)1}, x_{(3s+1)2}),$$

$$y_2 = \text{НОД}(x_{12}, x_{21}, x_{32}, x_{41}, x_{52}, x_{61}, \dots, x_{(3(s-1)+1)2}, x_{(3(s-1)+2)1}, x_{(3(s-1)+3)2}, x_{(3s+1)1}).$$

Зафиксируем различные простые p и q и пусть

$$\mathbf{x}_i = (p, p), i = 1, 2, \dots, 2l-2, \mathbf{x}_{2l-1} = (p, q),$$

$$\mathbf{u} = \eta_{s, (12), 2}(\eta_{s, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l)\mathbf{x}_{l+1} \dots \mathbf{x}_{2l-1}),$$

$$\mathbf{v} = \eta_{s, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1}\eta_{s, (12), 2}(\mathbf{x}_l \dots \mathbf{x}_{2l-1})).$$

Тогда по доказанному выше

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= ((\text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s+1}), \text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s+1}))\mathbf{x}_{l+1} \dots \mathbf{x}_{2l-1}) = \\ &= \eta_{s, (12), 2}((p, p)\mathbf{x}_{l+1} \dots \mathbf{x}_{2l-1}) = (\text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s}, q), \text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s+1})) = (1, p), \\ \mathbf{v} &= \eta_{s, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1}((\text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s}, q), \text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s+1}))) = \\ &= \eta_{s, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1}(1, p)) = (\text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s+1}), \text{НОД}(\underbrace{p, \dots, p}_{3s}, 1)) = (p, 1), \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, то есть

$$\eta_{s, (12), 2}(\eta_{s, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l)\mathbf{x}_{l+1} \dots \mathbf{x}_{2l-1}) \neq \eta_{s, (12), 2}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1}\eta_{s, (12), 2}(\mathbf{x}_l \dots \mathbf{x}_{2l-1})).$$

Из этого неравенства вытекает, что l -арная операция $\eta_{s, (12), 2}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

В примере 3.1 в 4-арной полугруппе $\langle N, \eta \rangle$ все элементы являются идемпотентами, и в ней существуют такие элементы a и b , что

$$\eta(aaab) \neq a.$$

Кроме того, для подстановки (12) верно неравенство $(12)^l \neq (12)$.

Покажем, что неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ и наличие в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ идемпотента a и отличного от него элемента b такого, что

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} b) \neq a, \tag{3.1}$$

является достаточным условием неполуассоциативности l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

Теорема 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (3.1); σ – подстановка из S_k удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} \eta_{s,\sigma,k}(\eta_{s,\sigma,k}(x_1 \dots x_l) x_{l+1} \dots x_{2l-1}) &= \\ = \eta_{s,\sigma,k}(x_1 \dots x_{l-1} \eta_{s,\sigma,k}(x_l \dots x_{2l-1})). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Доказательство. Если предположить выполнимость в $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ тождества из условия теоремы, то ввиду леммы 2.2,

$$\begin{aligned} \eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_l^{f_\sigma^{l-1}} x_{l+1}^{f_\sigma} \dots x_{2l-2}^{f_\sigma^{l-1}} x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) &= \\ = \eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \eta(x_l x_{l+1}^{f_\sigma} \dots x_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}} x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}), \end{aligned}$$

откуда, учитывая утверждение 5) леммы 2.1, получим

$$\begin{aligned} \eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} x_l^{f_\sigma^{l-1}} x_{l+1}^{f_\sigma} \dots x_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}} x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) &= \\ = \eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} x_l^{f_\sigma^{l-1}} x_{l+1}^{f_\sigma} \dots x_{2l-2}^{f_\sigma^{l-3}} (x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}). \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_{s(n-1)}^{f_\sigma^{s(n-1)-1}} x_l^{f_\sigma^{l-1}} x_{s(n-1)+2}^{f_\sigma} \dots x_{2s(n-1)}^{f_\sigma^{s(n-1)-1}} x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) &= \\ = \eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_{s(n-1)}^{f_\sigma^{s(n-1)-1}} x_l^{f_\sigma^{l-1}} x_{s(n-1)+2}^{f_\sigma^{s(n-1)+1}} \dots x_{2s(n-1)}^{f_\sigma^{2s(n-1)-1}} (x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}). \end{aligned}$$

Если положить

$$x_1 = \dots = x_{2l-2} = a = (\underbrace{a, \dots, a}_k),$$

то, в силу утверждения 4) леммы 2.1, последнее равенство принимает вид

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} (x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}). \quad (3.3)$$

Введем обозначения

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) = u = (u_1, \dots, u_k),$$

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} (x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}) = v = (v_1, \dots, v_k),$$

$$x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}} = w = (w_1, \dots, w_k).$$

Тогда

$$(x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}} = w^{f_\sigma^{l-1}} = (w_{\sigma^{l-1}(1)} = z_1, \dots, w_{\sigma^{l-1}(k)} = z_k).$$

Так как подстановка σ^{l-1} множества $\{1, \dots, k\}$ не является тождественной, то найдется такое $r \in \{1, \dots, k\}$, что

$$\sigma^{l-1}(r) \neq r.$$

Ясно, что

$$r = \sigma^{l-1}(j)$$

для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$. Таким образом,

$$\sigma^{l-1}(r) \neq \sigma^{l-1}(j).$$

Согласно замечанию 2.1,

$$u_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} w_{\sigma^{l-1}(j)}),$$

$$v_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} z_{\sigma^{l-1}(j)}) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} w_{\sigma^{l-1}(\sigma^{l-1}(j))}) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} w_{\sigma^{l-1}(r)}),$$

то есть

$$v_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} w_{\sigma^{l-1}(r)}).$$

Так как $\sigma^{l-1}(r) \neq \sigma^{l-1}(j)$, то положим

$$a = w_{\sigma^{l-1}(j)}, b = w_{\sigma^{l-1}(r)}.$$

Тогда

$$u_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-1}), v_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} b).$$

А так как a – идемпотент в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$, то, учитывая неравенство из условия теоремы, получим

$$u_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-1}) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2s(n-1)+1}) = a,$$

$$v_j = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2l-2} b) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{2s(n-1)} b) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} b) \neq a.$$

Поэтому $u_j \neq v_j$, что противоречит равенству $u_j = v_j$, вытекающему из (3.3). Таким образом, предположение о выполнимости в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тождества (3.2) неверно. Теорема доказана.

Теперь мы видим, что пример 3.1 является следствием теоремы 3.1.

Теорему 3.1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (3.1); σ – подстановка из S_k удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Теорема 3.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (3.1); σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2) Следует из определений ассоциативности и полуассоциативности.

2) \Rightarrow 3) Пусть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной и предположим нетождественность подстановки σ^{l-1} , что равносильно $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда по теореме 3.2 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, что невозможно.

3) \Rightarrow 1) Применяется теорема 2.2. Теорема доказана.

4 Следствия

Полагая в теоремах 3.1 – 3.3 $n = 2$, получим следующие следствия.

Следствие 4.1 [6]. Пусть A – полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, [\cdot]_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество

$$[[x_1 \dots x_l]_{l, \sigma, k} x_{l+1} \dots x_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = [x_1 \dots x_{l-1} [x_l \dots x_{2l-1}]_{l, \sigma, k}]_{l, \sigma, k} \quad (4.1)$$

то есть l -арная операция $[\cdot]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Следствие 4.2 [6]. Пусть A – полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[\cdot]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[\cdot]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Так как всякая регулярная полугруппа обладает идемпотентом, то следствия 4.1 и 4.2 позволяют сформулировать еще два следствия.

Следствие 4.3 [6]. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, [\cdot]_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (4.1), то есть l -арная операция $[\cdot]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Следствие 4.4 [6]. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого ее идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[\cdot]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[\cdot]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Напомним, что n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ называют n -арным группоидом с левым сокращением, если для любых $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a, b \in A$ из

$$\eta(x_1 \dots x_{n-1} a) = \eta(x_1 \dots x_{n-1} b)$$

следует $a = b$.

Теорема 4.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднозначная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (3.2), то есть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Доказательство. Зафиксируем идемпотент a n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$ и предположим, что в $\langle A, \eta \rangle$ имеется такой элемент b , что

$$b \neq a, \eta(\underbrace{a \dots a}_n b) = a.$$

Тогда

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1} b) = \eta(\underbrace{a \dots a}_n),$$

откуда следует $b = a$, что противоречит неравенству $b \neq a$. Таким образом, для любого элемента $b \in A$, отличного от идемпотента a , верно (3.1). Осталось применить теорему 3.1. Теорема доказана.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 3.3, при этом вместе теоремы 3.2 используется теорема 4.1.

Теорема 4.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Теоремы 4.1 и 4.2 могут быть извлечены соответственно из следствий 3.1 и 3.2 из [4], если воспользоваться следующей леммой, являющейся полиадическим аналогом соответствующего бинарного результата.

Лемма 4.1. Всякий идемпотент n -арной полугруппы с левым сокращением является ее левой единицей.

Доказательство. Зафиксируем идемпотент a n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$ с левым сокращением. Тогда из равенства

$$\eta\left(\underbrace{a \dots a}_{n-1} x\right) = \eta\left(\underbrace{a \dots a}_{n-1} x\right)$$

последовательно получаем

$$\begin{aligned} \eta\left(\eta\left(\underbrace{a \dots a}_n\right) \underbrace{a \dots a}_{n-2} x\right) &= \eta\left(\underbrace{a \dots a}_{n-1} x\right), \\ \eta\left(\underbrace{a \dots a}_{n-1} \eta\left(\underbrace{a \dots a}_n x\right)\right) &= \eta\left(\underbrace{a \dots a}_{n-1} x\right), \\ \eta\left(\underbrace{a \dots a}_{n-1} x\right) &= x. \end{aligned}$$

Следовательно, a – левая единица в $\langle A, \eta \rangle$. Лемма доказана.

Полагая в теоремах 4.1 – 4.2 $n = 2$, получим следующие следствия.

Следствие 4.5 [6]. Пусть A – неодноэлементная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (4.1), то есть l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Следствие 4.6 [6]. Пусть A – неодноэлементная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Замечание 4.1. Так как всякий идемпотент полугруппы с левым сокращением является ее левой единицей, то следствия 4.5 и 4.6 вытекают также соответственно из следствий 3.3 и 3.4 из [4].

Следствия 4.5 и 4.6 позволяют сформулировать еще два следствия.

Следствие 4.7. Пусть A – регулярная неодноэлементная полугруппа с левым сокращением; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (4.1), то есть l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Следствие 4.8. Пусть A – регулярная неодноэлементная полугруппа с левым сокращением; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

При доказательстве теоремы 4.1 было установлено, что во всякой n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ с левым сокращением, обладающей идемпотентом a , верно (3.1) для любого $b \in A$, отличного от a . Следующий пример показывает, что в n -арной полугруппе $\langle N, \eta \rangle$, обладающей идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (3.1), может отсутствовать левое сокращение

Пример 4.1. Пусть $\langle N, o \rangle$ – коммутативная полугруппа всех натуральных чисел из примера 3.1 с операцией

$$a \circ b = \text{НОД}(a, b).$$

Определим на N n -арную операцию η , производную от операции в полугруппе $\langle N, o \rangle$.

Ясно, что $\langle N, \eta \rangle$ – коммутативная n -арная полугруппа с n -арной операцией

$$\eta(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = \text{НОД}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

в которой все элементы являются идемпотентами.

Если p и q – различные простые числа, то

$$\eta(\underbrace{p \dots p}_{n-1} q) = 1 \neq p,$$

то есть в $\langle N, \eta \rangle$ для p и q имеет место аналог неравенства (3.1).

Пусть снова p – любое простое число, α и β – любые целые неотрицательные числа. Тогда

$$\eta(\underbrace{p \dots p}_{n-1} p^\alpha) = p, \quad \eta(\underbrace{p \dots p}_{n-1} p^\beta) = p,$$

то есть

$$\eta(\underbrace{p \dots p}_{n-1} p^\alpha) = \eta(\underbrace{p \dots p}_{n-1} p^\beta),$$

но $p^\alpha \neq p^\beta$ для $\alpha \neq \beta$. Следовательно, в $\langle N, \eta \rangle$ отсутствует левое сокращение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.

2. Гальмак, А. М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Post, E. L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Русаков, А. Д. О неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ / А. Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1. – С. 68–72.
5. Гальмак, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
6. Гальмак, А. М. Об ассоциативности и полуассоциативности полиадической операции $[]_{l, \sigma, k}$ / А. М. Гальмак, М. В. Селькин, А. Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2017. – № 3. – С. 35–40.

Поступила в редакцию 12.05.2017 г.

Контакты: +375 222 47-79-35 (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A., Rusakov A. ON NONSEMIASSOCIATIVITY OF POLYADIC GROUPOID $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$

The article reveals new sufficient conditions of nonsemiassociativity of the polyadic operation $[]_{l, \sigma, k}$ which is determined on a Cartesian power of the n -ary semigroup $\langle A, \eta \rangle$ with the substitution σ of the set $\{1, \dots, k\}$ and n -ary operation η .

Keywords: polyadic operation, groupoid, semigroup, semiassociativity, idempotent.

УДК 511.42

МЕТОД ОБНАРУЖЕНИЯ НУЛЕЙ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ТЕОРЕМЕ МИНКОВСКОГО О ЛІНЕЙНИХ ФОРМАХ

И. М. Морозова

кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный аграрный технический университет

О. Н. Кемеш

старший преподаватель

Белорусский государственный аграрный технический университет

Н. В. Сакович

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В работах Ю.В. Нестеренко, Н.В. Будариной, О'Доннелла были получены оценки о связи количества алгебраических чисел на интервале с зависимостью от величин значений целочисленного многочлена и его производной. В данной работе эти результаты обобщаются на кривые Шмидта – произвольные кривые на плоскости с ненулевой кривизной.

Ключевые слова: корень многочлена, алгебраические числа, система диофантовых неравенств, порядок приближения, покрытие множества.

В последние годы как в поле действительных, так и полях комплексных чисел и p -адических чисел появились задачи о количестве нулей функций

$$F_n(x) = a_n f_n(x) + a_{n-1} f_{n-1}(x) + \cdots + a_1 f_1(x) + a_0, \quad (1)$$

где $a_j \in \mathbb{Z}$, $f_j(x)$, $1 \leq j \leq n$, $(n+1)$ -раз непрерывно дифференцируемые функции и вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} f'_1(x) & f'_2(x) & \dots & f'_n(x) \\ f''_1(x) & f''_2(x) & \dots & f''_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{(n)}_1(x) & f^{(n)}_2(x) & \dots & f^{(n)}_n(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2)$$

для почти всех x (в смысле меры Лебега) из интервала $I = [a, b]$. В частности, при $f_j(x) = x^j$ функция $F_n(x)$ превращается в многочлен, а нули функции $F_n(x)$ – это алгебраические числа. Распределение алгебраических чисел имеет большое значение в теории трансцендентных чисел [1] и метрической теории диофантовых приближений [2]. В частности прогресс в задаче распределения

алгебраических чисел сыграл основную роль в исследовании известной проблемы Малера и ее обобщений [3; 4; 5; 6]. Как это видно из списка литературы, большой вклад в изучение проблемы распределения алгебраических чисел внесли белорусские математики.

Для каждой точки $x \in I$ для натурального числа $Q > 1$ всегда можно найти числа a_j , $H = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j| \leq Q$, такие, что

$$|F_n(x)| < c_1 Q^{-n}. \quad (3)$$

Величины $c_j, j = 1, 2, \dots$ зависят только от Q . Неравенство (3) – следствие теоремы Минковского о линейных формах, доказанной Минковским в конце XIX в. [7]. Неравенство (3) тесно связано с расстоянием x до ближайшего нуля α_j функции $F_n(x)$. Если $F_n(x)$ многочлен, то $|x - \alpha_j|$ – это расстояние x до ближайшего алгебраического числа α_j корня $F_n(x)$. Однако одно неравенство (3) не позволяет получить точные оценки $|x - \alpha_j|$. Необходимо еще иметь оценки снизу для $|F'_n(x)|$.

К настоящему времени имеется несколько точных результатов связи меры Лебега и множества $B_1 \subset I$ решений системы неравенств:

$$|F'_n(x)| < c_0 Q^{-v_0} \quad (4)$$

$$\delta_0 Q^{-v_1} < |F'_n(x)| < c_0 Q^{-v_0}, H \leq Q, v_0 \geq 0, v_0 + v_1 = n - 1.$$

В работе [8] проанализированы при дополнительных условиях на v_j более общее чем (4) неравенства, с условием на производные всех порядков. Отметим проблему Спринджука-Малера [2], решенную Клейбоком и Маргулисом [9], о том, что $\mu B_1 \underset{Q \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$.

В работе для случая $n = 2$ мы доказываем теорему о существовании δ_0 , при котором $\mu B_1 > d \mu I$, $0 < d < 1$. Эта теорема полезна при получении оценок количества нулей функций $F_n(x)$.

Теорема. Обозначим через $M_2(I, Q)$ множество $x \in I$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |F_2(x)| < Q^{-2}, \\ |F'_2(x)| < \delta_0 Q \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для функции $F_2(x)$. Тогда существует δ_1 , что при $\delta_0 < \delta_1$ справедливо неравенство

$$\mu M_2(I, Q) < \frac{1}{4} \mu I.$$

Доказательство теоремы.

Разобьем доказательство на три этапа в зависимости от величины модуля производной $|F'_2(x)|$ на интервале J . Обозначим через $L(I, Q)$ множество $x \in J$,

для которых выполняется система неравенств $\begin{cases} |F_2(x)| < Q^{-2} \\ |F'_2(x)| < cQ \end{cases}$, а через $L_1(I, Q)$ множество $x \in J$, для которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |F_2(x)| < Q^{-2} \\ Q^{\frac{5}{8}} < |F'_2(x)| < \delta_0 Q \end{cases}. \quad (5)$$

Предложение 1. Справедливо неравенство

$$\mu L_1(I, Q) < 2^{-4} \mu J. \quad (6)$$

Доказательство. Будем считать, что система (5) рассматривается на интервале монотонности функций $F_2(x)$. Тогда множество $x \in J$, для которых верна система (5), содержится в интервале, который можно записать в виде

$$G(F) = \left\{ x \in J : |x - \alpha_1(F)| < c_3 Q^{-2} |F'(\beta_1)|^{-1} \right\}. \quad (7)$$

Наряду с интервалом $G(F)$ рассмотрим интервал $G_1(F)$

$$G_1(F) = \left\{ x \in J : |x - \alpha_1(F)| < c_4 |F'(\beta_1)|^{-1} \right\}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует неравенство

$$\mu G(F) < c_4 \cdot c_3^{-1} Q^{-2} \mu G_1(F). \quad (9)$$

Зафиксируем вектор $\vec{b} = (a_2, a_1)$, координаты которого являются коэффициентами $F_2(x)$. Интервалы $G_1(F)$, имеющие один и тот же вектор \vec{b} , объединим в класс $L_1(\vec{b})$. Покажем, что при подходящем выборе c_4 интервалы $G_1(F_1)$ и $G_1(F_2)$ не пересекаются.

Предположим противное, что: $S = G_1(F_1) \cap G_1(F_2) \neq \emptyset$ и $x_0 \in S$.

Разложим функции $F_j(x)$, $j = 1, 2$ на интервалах $G_1(F_1)$ и $G_1(F_2)$ в ряд Тейлора и оценим значения $|F_j(x_0)|$. Имеем

$$|F_j(x_0)| \leq |F_j(\alpha_1)| + |F'_j(\alpha_1)(x_0 - \alpha_1)| + |F''_j(\zeta_j)(x_0 - \alpha_1)^2|, \text{ где } \zeta_j \in (x_0, \alpha_1).$$

Следует заметить, что $|F_j(x_0)| \leq 2c_4$ и

$$\begin{cases} R(x_0) = \bar{d} \in Z, d \neq 0 \\ R(x_0) = |F_2(x_0) - F_1(x_0)| < 4c_4 \end{cases} \quad (10)$$

Второе неравенство системы (10) при $c_4 = \frac{1}{5}$ противоречиво, что доказывает, что $G_1(F_1)$ и $G_1(F_2)$ не пересекаются. Отсюда следует, что

$$\sum_{F \in L_1(\vec{b})} \mu G_1(F) \leq \mu J. \quad (11)$$

Воспользуемся неравенством (11). Тогда из (9) и (11) следует

$$\sum_{\vec{b}} \sum_{F \in L_1(\vec{b})} \mu G(F) < 4c_4^{-1} \delta_0 \mu J < 2^{-4} \mu J.$$

Предложение 2. Обозначим через $L_2(I, Q)$ множество $x \in J$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |F_2(x)| < Q^{-2} \\ |F'_2(x)| \leq Q^{\frac{5}{8}} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение в функциях $F_2(x) \in L_2(I, Q)$. Тогда $\mu L_2(I, Q) < 2^{-4} \mu J$.

Доказательство. Введем при фиксированном $b = a_2$ класс функций с одним и тем же b , который обозначим $L(b)$. Определим интервалы

$$G_2(F) = \left\{ x \in J : |x - \alpha_1(F)| < c_5 Q^{-1} |F'(\beta_1)|^{-1} \right\}. \quad (12)$$

Из определения $G(F)$ и $G_2(F)$ следует

$$\mu G(F) < c_5^{-1} Q^{-1} \mu G_2(F). \quad (13)$$

Интервал $G_2(F_1)$ будем называть существенным, если не существует интервала $G_2(F_2)$, $F_2 \in L(b)$, такого что

$$\mu G_2(F_1) \cap G_2(F_2) > \frac{1}{2} \mu G_2(F_1). \quad (14)$$

Если же такой интервал найдется, то есть, при некотором $F_2(x) \in L(b)$ выполняется неравенство

$$\mu G_2(F_1) \cap G_2(F_2) > \frac{1}{2} \mu G_2(F_1),$$

то интервал $G_2(F_1)$ будем называть несущественным. В случае существенных интервалов воспользуемся (13).

Тогда из $\sum_{F \in L(\vec{b})} \mu G_2(F) < 2 \mu J$ и (13) получаем

$$\sum_{\vec{b}} \sum_{F \in L(\vec{b})} \mu G(F) < c_6 \mu J. \quad (15)$$

В случае несущественных интервалов разложим $F_2(x)$ и $F_2'(x)$ на интервале $G_2(F)$ в ряд и оценим их модули сверху, пользуясь $\max_{x \in J} |f_j(x)| < c$. Получим систему неравенств для линейного многочлена $R(x) = ax + b = F_2(x) - F_1(x)$:

$$\begin{cases} |ax + b| < cQ^{-1}, \\ |a| < 2Q^{\frac{5}{8}} \end{cases}.$$

Тогда

$$\left| x + \frac{b}{a} \right| < c_7 Q^{-1} a^{-1}. \quad (16)$$

Неравенство (15) выполняется для интервала с центром в точке $\left(-\frac{b}{a} \right)$ для ной $2c_7 Q^{-1} a^{-1}$.

Просуммируем эту величину по значениям b , количество которых не превосходит $a\mu J$, а затем по a , если $|a| < 2Q^{\frac{5}{8}}$. Получаем оценку $c_8 Q^{\frac{5}{8}-1} \mu I$, которая вместе с (15) завершает доказательство предложения 2, если в (15) выбрать $c_6 = 2^{-4}$.

Предложение 3. Обозначим через B_3 множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} |a_2 f(x) + a_1 x + a_0| < cQ^{-2} \\ |a_2 f'(x) + a_1| < c_9 \end{cases}. \quad (17)$$

Тогда $\mu B_3 < 2^{-4} \mu J$.

Для доказательства предложения 3 применим к системам (5) и (17) лемму. Лемма [10]. При условии $x \in (a, b)$ мера множества решений системы неравенств

$$\begin{cases} |F_n(x)| < \delta \\ |F'(x)| < K, \quad H(F) \leq Q \end{cases} \quad (18)$$

не превышает $c_4(\delta, K, Q^{n-1})^{\frac{1}{(n+1)(2n-1)}}$.

При $\delta = c_9 Q^{-2}$. Получим $\mu B_3 < c_{10} Q^{-\frac{1}{9}}$, что меньше $2^{-4} \mu J$ и при достаточно большом Q . Из предложений 1–3 следует доказательство теоремы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гельфонд, А. О. Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – Москва : Гостехиздат, 1952. – 224 с.
2. Sprindzuk, V. Achiements and problems of the theory of Diophantine approximations. / V. Sprindzuk // Uspekhi Mat. Nauk. – 1980. – Vo. 35, № 4(24). – P. 3–68.
3. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 184 с.
4. Beresnevich, V., Bernik V. // On a metrical theorem of W. Schmidt. / V. Beresnevich, V. Bernik // Acta Arithmetica. – 1996. – Vo. 75. – P. 219–233.
5. Берник, В. И. О точном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53. – С. 17–28.
6. Beresnevich, V. Groshev type theorem for convergence on manifold / V. Beresnevich // Acta Arithmetica Hungar. – 2002. – Т. 94. № 1–2. – С. 99–130.
7. Касселс, Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – Москва : Изд-во иностранной литературы, 1961. – 212 с.
8. Beresnevich, V. V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. V. Beresnevich // Acta Arithmetica. – 1999. – Vol. 90, № 2. – P. 97–112.
9. Kleinbock, D. Y. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds / D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis // Ann. Math. – 1998. – 148. – P. 339–360.
10. Bernik V. I., Kleinbock D., Margulis G. A. // Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions, Internet. Math. Res. Notices. – 2001. – P. 453–486.

Поступила в редакцию 06.04.2017 г.

Контакты: +375 29 663 31 89 (Морозова Инна Михайловна)

Morozova I., Kemesh O., Sakovich N. DETECTION METHOD OF ZEROS OF SMOOTH FUNCTION BASED ON MINKOWSKI'S THEOREM ON LINEAR FORMS.

In the research carried out by Y.V. Nesterenko, N.V. Budarina, O'Donnell the data on the relation of the quantity of algebraic number at the interval with the dependency on the value of a polynomial with integral coefficients and its derivative have been provided. The article refers these data to Schmidt curves.

Keywords: root of polynomial, algebraic numbers, set of Diophantine inequalities, order of approximation, covering of set

УДК 539.21

ВЛИЯНИЕ ЕДИНИЧНОГО КЛИНОВИДНОГО ДВОЙНИКА НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ ЗЕРНА ПОЛИКРИСТАЛЛА

Т. В. Дробышевская

аспирант

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

О. М. Остриков

кандидат физико-математических наук, доцент

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

Изучено напряженное состояние, обусловленное формой и структурой границ зерна поликристалла, а также единичным клиновидным остаточным микродвойником в рассматриваемом зерне. Рассмотрено влияние на напряженное состояние таких факторов, как форма и дислокационная модель зеренных границ, а также наличие в теле зерна клиновидного двойника. Выявлено, что в случае отсутствия двойника в центре зерна локализация напряжений не наблюдается. Установлено, что форма границ зерна влияет на напряженное состояние в случае их моделирования в виде стенок полных дислокаций. Установлено, что единичный клиновидный двойник оказывает существенное влияние на распределение полей напряжений.

Ключевые слова: клиновидный двойник, зерно поликристалла, поля напряжений

Введение

Современные исследования подтверждают, что влияние на напряженное состояние поликристаллических материалов, а, соответственно, и на их деформационное поведение оказывают все виды дефектов кристаллической решетки. Однако одну из важнейших ролей в этом играют зеренные границы. Изучив влияние формы и структуры зеренных границ, а также взаимодействия зерно-границевых дислокаций с двойникоющими на напряженное состояние зерен поликристалла, можно прогнозировать и предупреждать разрушения деталей машин, как в процессе их обработки, так и в процессе их использования.

Целью данной работы стало изучение напряженного состояния, обусловленного формой и структурой границ зерна поликристалла, а также единичным клиновидным микродвойником в рассматриваемом зерне.

Постановка задачи. Объектом данного исследования является напряженное состояние в шестиугольном зерне поликристалла, расположенному вдали от поверхности двойникоющегося материала. Изучаемое напряженное состояние в целом обусловлено многими критериями. В данном исследовании рассмотрим

влияние следующих факторов: форма зеренных границ (прямолинейные, выпуклые и вогнутые), дислокационная модель зеренных границ (стенка либо цепочка полных дислокаций), а также наличие в теле зерна единичного клиновидного двойника (рисунки 1 и 2). С целью недопущения громоздкости решения не будем учитывать напряжения, создаваемые концентратором напряжений у устья двойника, а также напряжения, обусловленные другими зернами поликристалла.

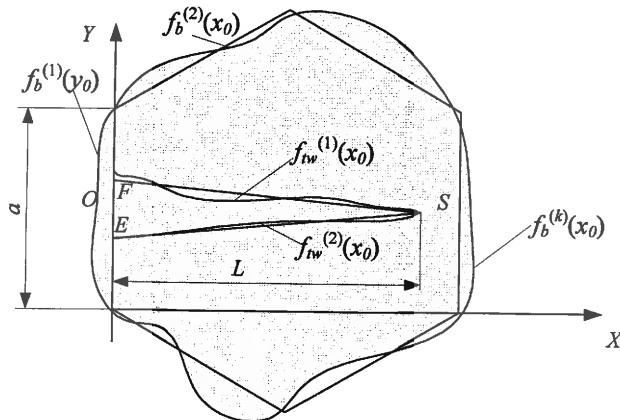


Рис. 1 – Схематическое изображение зерна поликристалла и клиновидного двойника в нем

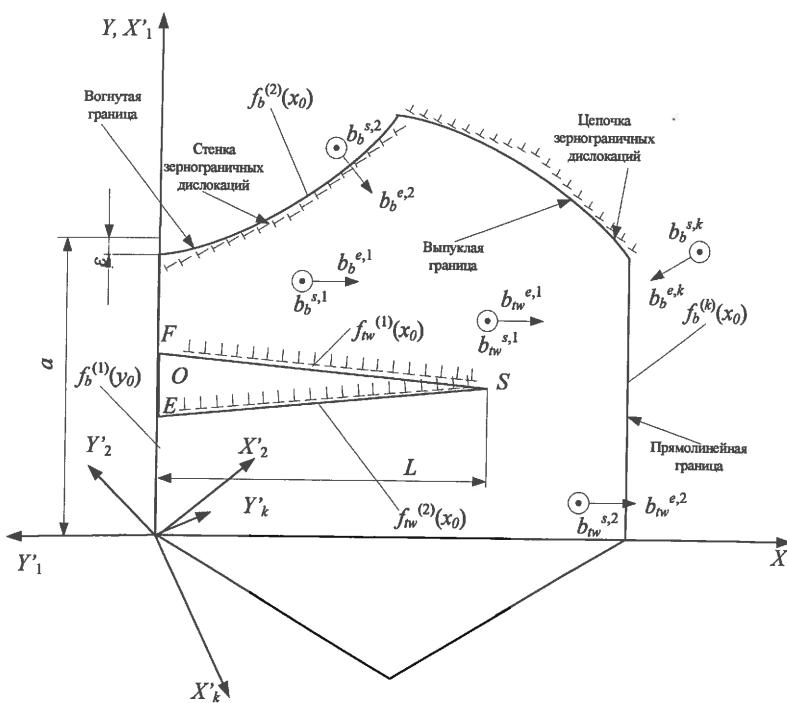


Рис. 2 – Схема взаимного расположения дислокаций, формы и структуры зеренных границ, компонент вектора Бюргерса и декартовых систем координат для расчета полей напряжений в зерне поликристалла

Компоненты тензора напряжений, характеризующего изучаемое напряженное состояние в зерне поликристалла, в соответствии с принципом суперпозиции [1] могут быть определены по формуле

$$\sigma_{ij} = \left(\sum_{m=1}^2 (\sigma_{ij}^{(m)})_{tw}(x, y) \right) + \left(\sum_{k=1}^6 (\sigma_{ij}^{(k)})_b(x, y) \right). \quad (1)$$

Здесь m – номер двойниковой границы; k – номер зеренной границы; i, j принимают значения x, y или z ; $(\sigma_{ij}^{(m)})_{tw}(x, y)$ и $(\sigma_{ij}^{(k)})_b(x, y)$ – напряжения, создаваемые двойниковыми и зеренными границами соответственно.

В ходе расчетов принимали, что дислокации на каждой из рассматриваемых границ параллельны друг другу и оси OZ , перпендикулярной плоскости рисунка 1.

Напряжения, создаваемые двойниковыми и зеренными границами, определяем как криволинейные интегралы вдоль профилей соответствующих границ. В рассматриваемом шестиугольном зерне прямолинейные границы описываются следующими уравнениями:

$$f_b^{(1)}(y_0) = 0, \quad (2)$$

$$f_b^{(2)}(x_0) = \frac{a}{2} \frac{x_0}{\operatorname{tg}(\alpha_k)}, \quad (3)$$

$$f_b^{(k)}(x_0) = f_b^{(k-1)}(a - (\sin(\alpha_2) + \dots + \sin(\alpha_{k-1}))) - \frac{x_0 - a - (\sin(\alpha_2) + \dots + \sin(\alpha_{k-1}))}{\operatorname{tg}(\alpha_k)}, \quad (4)$$

где a – длина зеренной границы, α_k – угол поворота k -й зеренной границы относительно 1-й. Данные параметры определяем следующим образом:

$$a = 2R \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad (5)$$

$$\alpha_k = \pi - \frac{2\pi}{3}(k - 1), \quad (6)$$

где R – радиус вписанной в зерно окружности; n – число граней у зерна.

В случае криволинейных (выпуклых и вогнутых) зеренных границ их уравнения описываются следующими уравнениями:

$$f_b^{(k)}(y_0) = C_{xk} \pm \sqrt{R_b^2 - (y_0 - C_{yk})^2}, \quad (7)$$

$$f_b^{(k)}(x_0) = C_{yk} \mp \sqrt{R_b^2 - (x_0 - C_{xk})^2}, \quad (8)$$

где C_{xk} , C_{yk} – координаты центра кривизны k -й зеренной границы; R_b – радиус кривизны зеренной границы. Для зерна с вогнутыми границами верхний знак применяется для границ 1, 2, 3, а нижний – для границ 4, 5, 6; для зерна с выпуклыми границами применение знаков обратное. Координаты центра кривизны k -й зеренной границы определяются из соотношений:

$$C_{xk} = a(\sin(\alpha_1) + \dots + \sin(\alpha_{k-1})) + \frac{a}{2}\sin(\alpha_k) + \cos(\alpha_k)\sqrt{R_b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad (9)$$

$$C_{yk} = -\frac{a}{2} + a(\cos(\alpha_1) + \dots + \cos(\alpha_{k-1})) + \frac{a}{2}\cos(\alpha_k) - \sin(\alpha_k)\sqrt{R_b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}. \quad (10)$$

где a и α_k – длина хорды, соединяющей вершины k -й зеренной границы, и угол ее поворота относительно хорды первой границы.

Методика расчетов представлена в [2; 3]. При расчетах компонент тензора напряжений будем учитывать представленную на рисунке 2 ориентировку винтовой и краевой составляющих векторов Бюргерса. При этом плотности дислокаций на всех границах (зеренных и двойниковых) постоянны и равны ($\rho_b^{(k)} = C_1$, $\rho_{tw}^{(m)} = C_2$ соответственно).

Результаты расчетов и их обсуждение. С целью подтверждения правомерности принятой дислокационной модели и проведения анализа напряженного состояния в зерне поликристалла проводим расчет полей напряжений для железа (Fe). При этом принимаем: $b_b^e = b_b^s = 0,248$ нм; $b_{tw}^e = b_{tw}^s = 0,124$ нм [4]; $\mu = 81$ ГПа [5]; $\nu = 0,29$ [4]; $R = 70$ нм.

Ниже представлены распределения компоненты $\sigma_{xy}(x, y)$ тензора напряжений в зерне поликристалла, имеющего выпуклые (рисунок 3) и вогнутые (рисунок 4) границы, смоделированные стенкой полных дислокаций, и содержащего в своем теле единичный клиновидный двойник.

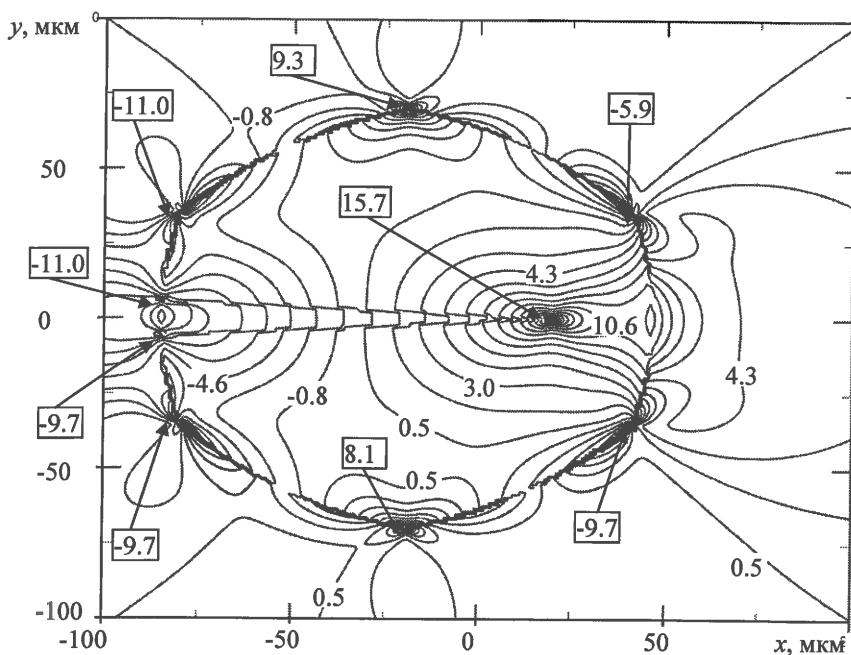


Рис. 3 – Распределение компоненты $\sigma_{xy}(x, y)$ тензора напряжений в зерне поликристалла, имеющего выпуклые границы, смоделированные стенкой полных дислокаций, и содержащего в своем теле единичный клиновидный двойник

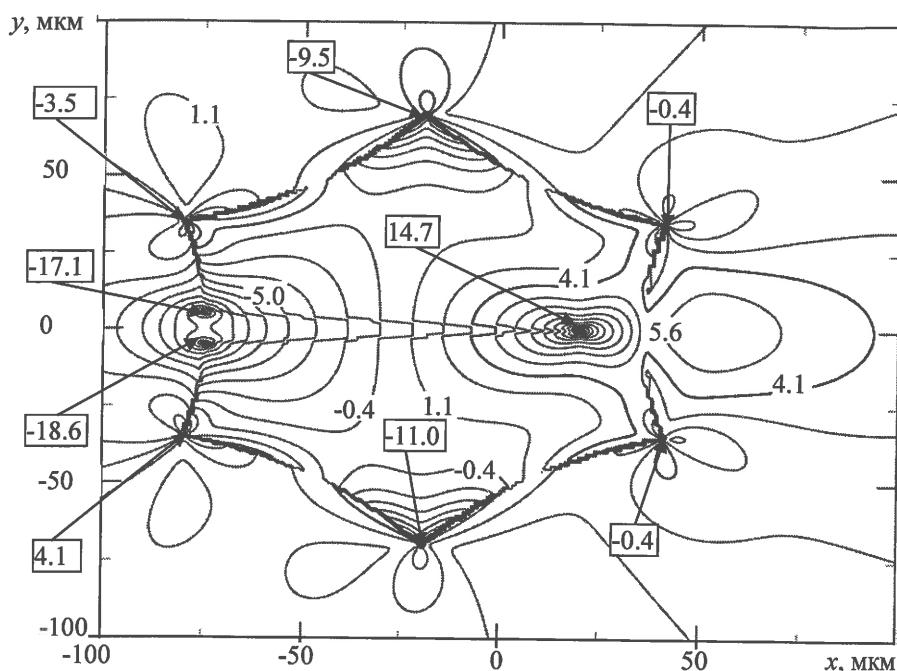


Рис. 4 – Распределение компоненты $\sigma_{xy}(x, y)$ тензора напряжений в зерне поликристалла, имеющего вогнутые границы, смоделированные стенкой полных дислокаций, и содержащего в своем теле единичный клиновидный двойник

В первую очередь рассмотрим зерно, не имеющее в своем теле остаточного клиновидного двойника. В случае моделирования границ зерна поликристалла в виде цепочек полных дислокаций распределения полей напряжений, имеют ряд характерных черт. Так, например, на них четко просматриваются основные элементы зерна, являющиеся концентриаторами напряжений: границы и узловые точки.

Кроме того, именно указанные элементы соответствуют максимальным значениям нормальных (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz}) и скальвающих (σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz}) компонент тензора напряжения.

В отношении знакопеременности напряжений можно отметить следующее. Нормальные напряжения (σ_{xx} , σ_{yy}) положительны внутри зерна и носят растягивающий характер. За пределами зерна имеет место следующее распределение напряжений. Слева и справа от зерна компонента σ_{xx} имеет растягивающий характер, σ_{yy} – сжимающий. Соответственно, сверху и снизу от зерна напряжения σ_{xx} отрицательны, а σ_{yy} положительны. При этом численные значения нормальных напряжений σ_{xx} , σ_{yy} внутри зерна выше, чем за его пределами. В центре зерна локализация нормальных напряжений не обнаружена. Напряжения σ_{zz} имеют место только на границах зерна, при этом внутри зерна и за его пределами они не локализованы. Данная компонента тензора напряжений (σ_{zz}) носит растягивающий характер.

Скалывающие напряжения σ_{xy} положительны в первой и третьей четвертях, а отрицательны – во второй и четвертой. Напряжения σ_{xz} положительны в первой и четвертой четвертях, а отрицательны – во второй и третьей. Компонента σ_{zy} в третьей и четвертой четвертях носит растягивающий характер, а в первой и второй – сжимающий. Внутри зерна концентрация скалывающих напряжений (σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yz}) существенно ниже, чем за его пределами; при этом в центре зерна напряжения отсутствуют.

Важно отметить также тот факт, что в случае моделирования зеренных границ в виде цепочек полных дислокаций криволинейность данных границ не влияет на распределение полей напряжений.

В случае моделирования границ зерна в виде стенок полных дислокаций на распределения полей напряжений, характеризующих напряженно-деформированное состояние зерна, форма зеренных границ оказывает существенное влияние.

Так, в случае прямолинейных границ компоненты тензора напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} локализованы только в узловых точках зерна, а численные значения данных компонент незначительны. В случае криволинейных границ рассматриваемые компоненты (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy}) имеют значения на порядок выше и локализованы на зеренных границах и в их окрестностях. Кроме того, на участках границ, наиболее удаленных от центра зерна, напряжения σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} также не локализованы (рисунки 3, 4). Это связано с тем, что данные компоненты тензора, создаваемые соседними дислокациями на данных участках (равно как и на прямолинейных границах), являются взаимно уравновешивающими.

Следует также отметить, что четкой закономерности в отношении знакопеременности данных компонент тензора напряжений в случае моделирования границ зерна в виде стенки полных дислокаций не выявлено при всех вариантах рассматриваемой формы границ.

Скалывающие напряжения (σ_{zy} , σ_{zx}) сконцентрированы на границах зерна и распределены большей частью за его пределами. При этом на границах, параллельных осям OX либо OY , концентрация соответствующей компоненты (σ_{zy} либо σ_{zx}) минимальна. Это связано с тем, что напряжения, создаваемые данными зернограничными дислокациями, частично компенсируются напряжениями на соседних границах зерна. Компонента σ_{zy} за пределами зерна носит растягивающий характер в первой и четвертой четвертях, а внутри зерна – во второй и третьей. Напряжения σ_{zx} знакопеременны относительно оси OX и имеют сжимающий характер в первой и второй четвертях.

Максимальные значения всех компонент тензора напряжений в случае моделирования зеренных границ в виде стенок полных дислокаций имеют место в узловых точках зерна.

Следует отметить, что все рассмотренные поля напряжений, смоделированные для зерна, не содержащего в своем теле двойник, имеют симметричность относительно осей, проходящих через центр зерна.

В случае наличия в теле зерна единичного клиновидного двойника имеет место существенное изменение распределения полей напряжений. Так, в первую очередь следует отметить тот факт, что его наличие определяет локализа-

цию напряжений в узловых точках двойника, а также на двойниковых границах и в их окрестностях. Соответственно, повышается концентрация напряжений внутри зерна. Численные значения напряжений также увеличиваются, при этом максимальные значения напряжений соответствуют расположению узловых точек двойника. Важно то, что наличие клиновидного двойника в теле зерна не влияет на знакопеременность распределения полей напряжений, однако нарушает симметричность распределения.

Рассмотрим подробнее изменения в напряженном состоянии зерна поликристалла, возникающие вследствие наличия в нем клиновидного остаточного двойника.

Так, при моделировании зеренных границ в виде цепочек полных дислокаций можно отметить следующее. Наибольшие значения нормальных и скальвающих компонент тензора напряжений, как и в случае без двойника, отмечены в узловых точках зерна и на его границах. При этом, как было уже отмечено выше, появляются дополнительные участки концентрации напряжений – вершина, устье двойника и его границы. Концентрация же напряжений в целом изменяется только в пределах зерна, изменения за его пределами несущественны [3].

В случае моделирования зеренных границ стенками полных дислокаций нормальные напряжения максимальны на двойниковых границах; скальвающие напряжения σ_{xy} – в узловых точках двойника (у вершины и устья двойника); а скальвающие напряжения σ_{zy} и σ_{xz} максимальны на зеренных границах (за исключением границ, параллельных осям OX и OY , соответственно в связи с их частичной компенсацией). Также в связи со взаимным уравновешиванием напряжений, вызванных соседними дислокациями, на участках криволинейных границ, наиболее удаленных от центра зерна, напряжения σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} также не локализованы. Концентрация напряжений за пределами зерна изменяется только в случае прямолинейных границ, в остальных случаях существенные изменения концентрации в сторону увеличения наблюдаются только внутри зерна.

Заключение

Таким образом, при рассмотрении зерна поликристалла, не содержащего в своем теле двойника, основные места концентрации напряжений – это границы и узловые точки зерна, а также участки за пределами зерна. При этом центр зерна является зоной, свободной от напряжений. Кроме того, форма границ зерна оказывает существенное влияние на распределение полей напряжений только в случае их моделирования в виде стенок полных дислокаций. Наличие единичного клиновидного двойника в зерне влечет за собой увеличение концентрации напряжений внутри зерна, а также увеличение численных значений компонент тензора напряжений. При этом концентрация напряжений за пределами зерна с учетом влияния рассматриваемого двойника существенно не изменяется. Кроме того, нарушается симметричность распределения полей напряжений, однако знакопеременность полей напряжений не изменяется. При этом следует отметить, что в случае моделирования границ зерна в виде цепочек полных дис-

локаций основным концентратором напряжений остается зерно – максимальные напряжения сконцентрированы именно на его элементах; а в случае моделирования в виде стенок полных дислокаций – максимальные напряжения соответствуют элементам двойника.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Остриков, О. М.* Дислокационная макроскопическая модель клиновидного двойника / О. М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2006. – № 2 – С. 10–18.
2. *Остриков, О. М.* Механика двойникования твердых тел : монография / О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 301 с.
3. *Дробышевская, Т. В.* Задача о расчете напряженно-деформированного состояния, обусловленного единичным некогерентным двойником в пяти-, шести- и семигранном зерне поликристалла с гексагональной структурой / Т. В. Дробышевская, О. М. Остриков // Физ. мезомех. – 2015. – Т. 18. – № 2. – С. 79–88.
4. *Полухин, П. И.* Физические основы пластической деформации / П. И. Полухин, С. С. Горелик, В. К. Воронцов. – Москва : Металлургия, 1982. – 584 с.
5. *Киттель, Ч.* Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель. – Москва : Наука, 1978. – 792 с.

Поступила в редакцию 24.01.2017 г.

Контакты: omostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Drobyshevskaya T., Ostrikov O. THE IMPACT OF A SINGLE WEDGE-SHAPED TWIN ON THE STATE OF STRESS DETERMINED BY THE CURVED BOUNDARIES OF THE POLYCRYSTAL GRAIN.

The article focuses on the state of stress determined by the shape and structure of the grain boundaries of a polycrystal as well as by a single wedge-shaped residual micro-twin in this grain. The effect of the following factors on the state of stress is viewed: the shape and the dislocation model of the grain boundaries, the presence of a wedge-shaped twin in the grain body. It has been revealed that if a twin is not present in the centre of the grain, stress localization is not observed. The shape of the grain boundaries affects the stress state if they are modelled as walls full of dislocations. It has been found out that a single wedge-shaped twin has a significant impact on the distribution of stress fields.

Keywords: wedge-shaped twin, polycrystal grain, stress field.

УДК 539.375

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ МИКРОДВОЙНИКОВ И МИКРОТРЕЩИН ДРУГ С ДРУГОМ И МИКРОВКЛЮЧЕНИЯМИ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ МОНОКРИСТАЛЛОВ ВИСМУТА

О. М. Остриков

кандидат физико-математических наук, доцент

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

Методом оптической микроскопии в монокристалле висмута, деформированным одноосным сжатием, впервые обнаружены новые явления при взаимодействии механических двойников друг с другом, с микровключениями и трещинами. Установлено ветвление вершины двойника, формирование сетки пересекающихся двойников и излом трещины при ее взаимодействии с двойником.

Ключевые слова: механический двойник, трещина, монокристалл висмута.

Дефекты кристаллической решетки оказывают существенное влияние на процесс механического двойникования [1–5]. Особенности формы двойников наблюдаются при их взаимодействии с пластически деформированными областями, полосами сдвига или включениями, размер которых соизмерим, или превышает, ширину двойников. Вся многогранность форм проявления механического двойникования при различных условиях деформирования двойникующегося материала в настоящее время еще не изучена. Имеются результаты экспериментальных исследований [1–5] по изучению особенностей формообразования двойников, их ветвлений, зарождения вдали от концентратора напряжений и т. д.

Двойниковые границы являются концентраторами больших внутренних напряжений. Это приводит к тому, что двойникование является инициатором зарождения разрушения [6]. С другой стороны, двойниковые границы являются препятствиями для развития трещин, и изучение взаимодействия трещин с двойниками, с точки зрения поиска методов торможения разрушения, представляется актуальным [6; 7].

Целью данной работы стало изучение особенностей механического микродвойникования и зарождения разрушения в монокристаллах висмута при наличии в них микроскопических включений в случае одноосного сжатия образца.

На рис. 1 показана область монокристалла висмута с микроразмерными дефектами на его поверхности (111). Стрелкой 1 обозначен двойник, у которого при взаимодействии с пластической зоной проявилось ветвление кончика, т. е. у вершины которого появилась ветвь в виде микродвойника другого крис-

таллографического направления. Данный двойник направлен к области вероятной концентрации напряжений у включения.

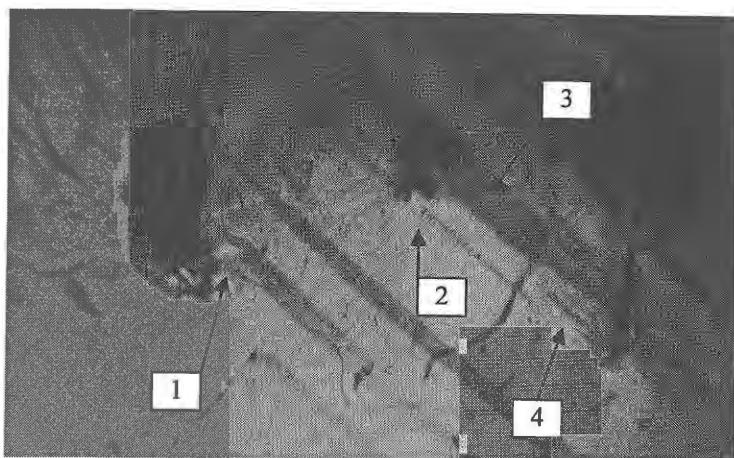


Рис. 1 – Взаимодействие механических двойников с пластическими зонами в монокристаллах Bi (x 100). Стрелки: 1 – ветвление кончика двойника в поле напряжений пластической зоны; 2 – разделение пластической зоной двойника на две части; 3 – двойник, имеющий ширину, соизмеримую с геометрическим размером включения; 4 – сдвойникованная область между двумя полосами сдвига

Наблюдавшееся ранее в [1] ветвление двойников не было связано с ветвлением их вершины. Поэтому отмеченное на рис. 1 стрелкой 1 явление наблюдается и описывается впервые. Вершина трещины часто является областью зарождения трещин [6], поэтому изучение новых особенностей поведения вершин двойников представляется полезным в плане прогнозирования связанного с двойникование разрушения.

Стрелкой 2 отмечен случай видимого на поверхности (111) монокристалла висмута разделения двойника на две части в результате взаимодействия его с включением. При этом под включением в отдалении от поверхности данный двойник может быть цельным с областью раздвойникования, обусловленной напряжениями включения (рис. 2). Выше включения на рис. 1 расположился двойник, отмеченный стрелкой 3 и имеющий ширину, соизмеримую с размером включения. Форма данного двойника претерпела искривление в результате огибаия границами рассматриваемого включения.

На рис. 1 стрелкой 4 отмечена сдвойникованная область между двумя полосами сдвига. Наблюдается группа параллельных двойников разной ширины, но равной длины. Вероятно, причиной появления данных двойников стал отмеченный стрелкой 3 двойник относительно большой ширины, разделившийся после взаимодействия с полосами сдвига на группу двойников меньшей ширины (см. рис. 1, стрелка 4). Схематически этот процесс изображен на рис. 3, из которого видно, что равенство длины двойников обусловлено тем, что полосы сдвига для них являются непреодолимыми препятствиями.

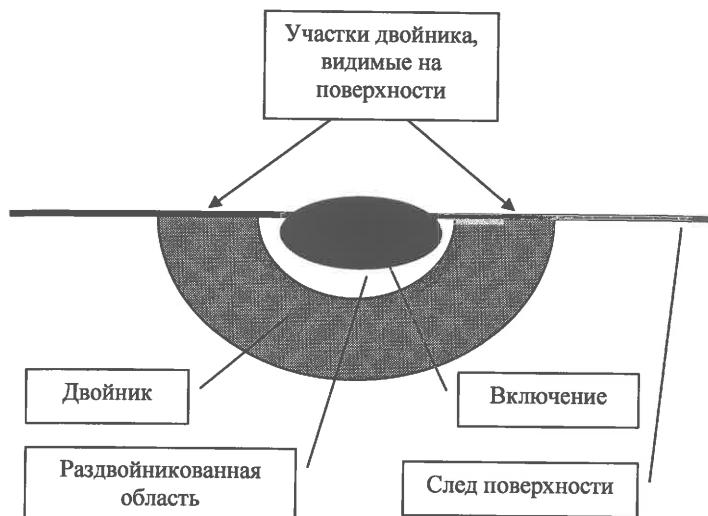


Рис. 2 – Схематичное изображение обусловленного напряжениями включения частичного раздвойникования

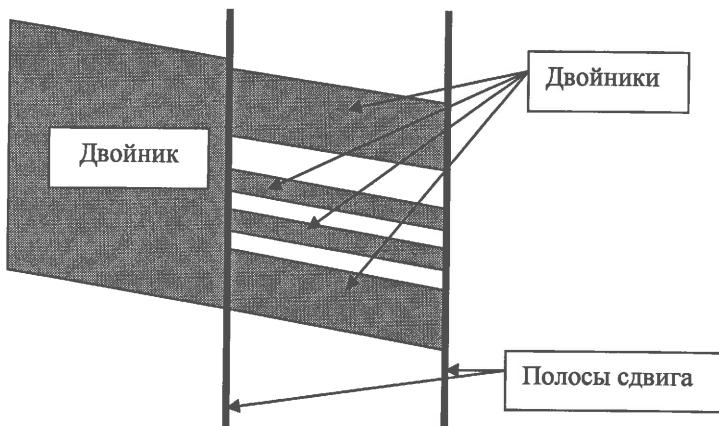


Рис. 3 – Схематичное изображение сдвойникованной области между полосами сдвига

На рис. 4 представлены группы пересекающихся двойников двух различных кристаллографических направлений двойникования. Картина пересечения двойников на поверхности (111) монокристалла висмута имеет вид сплетения.

Отличительной особенностью взаимодействия двойников друг с другом в этом случае является то, что после пересечения динамического двойника со статическим двойником другого кристаллографического направления ширина развивавшегося двойника уменьшается порой более чем в два раза. При этом тело статического двойника искривляется в результате ротационного сдвига, связанного со свойственным для двойникования поворотом кристаллической решетки.



Рис. 4 – Ансамбль сплетенных двойников в монокристалле висмута (x100)

Наблюдалось и полное торможение статическим двойником динамического двойника. Участки отдельных двойников приобретали серповидную форму. После прохождения динамическим двойником статического двойника первый разделялся на два параллельных двойника одного кристаллографического направления. При этом ширина таких двойников, как правило, значительно меньше, чем ширина динамического двойника до столкновения со статическим двойником. Имело место и разделение вершины динамического двойника на две еще до пересечения со статическим двойником.

На рис. 5 стрелкой отмечен результат взаимодействия трещины с двойником после локального раздвойникования. В области взаимодействия трещины с ранее существовавшим двойником наблюдается излом трещины. Это указывает на наличие энергетических затрат для трещины на преодоление такого препятствия, как двойниковая прослойка. Как видно из рис. 5, величина излома трещины после раздвойникования превышает ширину трещины в области ее взаимодействия с двойником.

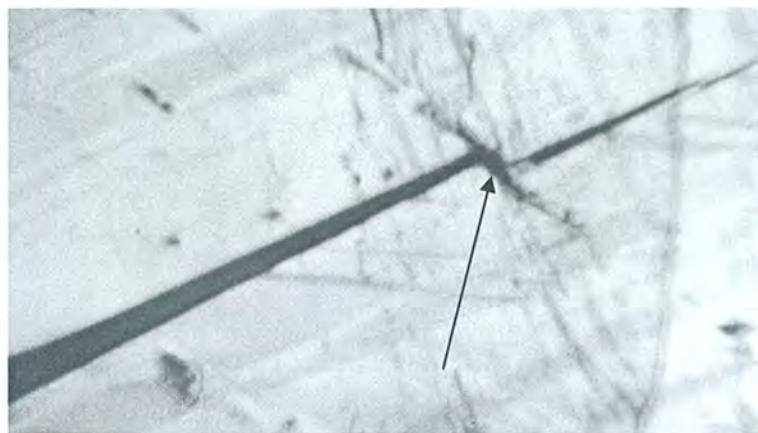


Рис. 5 – Излом трещины в монокристалле висмута (x100)

При высоком уровне внешних напряжений, инициировавших раздвойникование, в области излома трещины наблюдается зарождение вторичного разрушения в направлении, перпендикулярном направлению развития трещины. На рис. 5 это проявляется в том, что ширина излома трещины почти в два раза превышает ширину двух частей трещины в области ее излома.

Таким образом, обнаружен ряд особенностей взаимодействия двойников друг с другом, двойников с микровключениями и трещин с механическими двойниками. Впервые наблюдалось ветвление вершины механического двойника, формирование сетки из пересекающихся двойников, излом трещины с ростом новой трещины в месте излома первой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Остриков, О. М.* Ветвление клиновидных двойников в монокристаллах висмута, деформированных сосредоточенной нагрузкой / О. М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 1999. – Т. 87, № 1. – С. 94–96.
2. *Остриков, О. М.* Особенности двойникования монокристаллов висмута, облученных ионами тантала / О. М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 2000. – Т. 89, № 6. – С. 99–103.
3. *Остриков, О. М.* Нанодвойникование монокристаллов висмута / О. М. Остриков // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2002. – № 3. – С. 51–52.
4. *Остриков, О. М.* Особенности зарождения клиновидных двойников у отпечатка пирамиды Виккерса на поверхности (111) монокристаллов висмута / О. М. Остриков // Материаловедение. – 2002. – № 1. – С. 17–20.
5. *Остриков, О. М.* Закономерности слияния двойников в монокристаллах висмута / О. М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 2012. – Т. 113, № 8. – С. 846–852.
6. *Финкель, В. М.* Разрушение кристаллов при механическом двойниковании / В. М. Финкель, В. А. Федоров, А. П. Королев. – Ростов-на-Дону : Издательство Ростовского университета, 1990. – 172 с.
7. Влияние двойников на зарождение трещин в Fe+3,25%Si при интенсивном сопутствующем скольжении / В. М. Финкель [и др.] // Физика металлов и металловедение. – 1979. – Т. 48, № 2. – С. 415–423.

Поступила в редакцию 06.02.2017 г.

Контакты: omostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Ostrikov O. CHARACTERISTICS OF INTERACTION OF MECHANICAL MICRO-TWINS AND MICROCRACKS WITH EACH OTHER AND MICROINCLUSIONS DURING AXIAL COMPRESSION OF BISMUTH SINGLE CRYSTALS.

The method of optical microscopy in a bismuth single crystal deformed by uniaxial compression has enabled to reveal new phenomena in the interaction of mechanical twins with each other and with microinclusions and cracks. Branching of the twin vertex, formation of the grid of intersecting twins and fracture of the crack during its interaction with the twin are established.

Keywords: mechanical twin, crack, bismuth single crystal.

УДК 581.93

ОСОБЕННОСТИ БИОМОРФОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ АДВЕНТИВНЫХ ВИДОВ ФЛОРЫ ПРИПЯТСКОГО ПОЛЕСЬЯ

A. Н. Мялик

младший научный сотрудник

Полесский аграрно-экологический институт НАН Беларуси

В статье представлен биоморфологический анализ видов адвентивной фракции флоры Припятского Полесья в системе биоморф по Раункиеру, а также с учетом продолжительности жизненного цикла растений и их эколого-морфологических особенностей. Из 1079 адвентивных видов наиболее многочисленными являются одно- и двухлетние растения. Среди травянистых многолетников преобладают короткокорневищные и длиннокорневищные виды растений, а среди древесных многолетников – деревья и кустарники.

Ключевые слова: Припятское Полесье, адвентивные виды, биоморфологическая структура, жизненные формы.

Введение

Изучение адвентивных видов и характера их взаимодействия с местными аборигенными видами в настоящее время приобретает все большую актуальность во всем мире. Обусловлено это не только нарастающей антропогенной трансформацией флоры, приводящей не только к численному увеличению заносных видов в ее составе, но и к трансформации естественного растительного покрова, вызванного натурализацией и расселением некоторых адвентивных видов растений [1; 2].

Территория Припятского Полесья, расположенного в центральной части Полесской провинции [3], за последние десятилетия подверглась значительному антропогенному воздействию. Результатом широкомасштабных мелиоративных работ с последующим сельскохозяйственным освоением осущенных земель, а также транспортного строительства и ведения лесного хозяйства стало нарушение естественного растительного покрова, что способствовало проникновению сюда разнообразных заносных видов растений. Большинство из них выращиваются только в культуре, либо встречаются в нарушенных местообитаниях. Однако некоторые из адвентивных видов из-за своих биологических особенностей хорошо натурализовались и, как следствие, способны преобразовывать естественные экосистемы [1].

Исходя из вышесказанного, целью настоящей работы является выяснение биологических особенностей заносных видов и установление биоморфологической структуры адвентивной фракции флоры Припятского Полесья.

Методика и объекты исследования

Объектом исследования является адвентивная фракция флоры Припятского Полесья; предметом – ее биоморфологическая структура. При составлении списка адвентивных видов использованы флористические сводки [4–7], фоновые гербарные материалы Института экспериментальной ботаники имени В.Ф. Купревича НАН Беларусь, Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина и Полесского аграрно-экологического института НАН Беларусь; а также материалы собственных флористических исследований.

При выполнении биоморфологического анализа адвентивной фракции флоры использовано несколько методических подходов, позволяющих наиболее полно выявить ее особенности.

При выделении жизненных форм растений по Раункиеру (согласно размещению почек возобновления относительно уровня почвы и снежного покрова) использована усовершенствованная схема, в которой все виды подразделяются на фанерофиты, хамефиты, гемикриптофиты, водные гемикриптофиты, геофиты, водные геофиты, гидрофиты и терофиты [8]. По длительности жизненного цикла – количеству фаз цветения и плодоношения растений на протяжении жизни – выделяются поликарпики (многолетние растения), монокарпики дихидрические (двулетние растения) и монокарпики моноциклические (однолетние растения). Наиболее сложной является система жизненных форм растений, учитывающая их эколого-морфологические признаки. В ней среди древесных растений выделяются: деревья, кустарники, кустарнички, полукустарники, полукустарнички и лианы. Среди травянистых – стержнекорневые, кистекорневые, короткокорневицные, длиннокорневицные, плотнодерновинные, рыхлодерновинные, луковичные, клубневые, наземностелющиеся, столонообразующие, эугидатофиты, аэрогидатофиты, плейстрофиты, двулетние и однолетние растения [9]. При отнесении адвентивных видов к конкретной биоморфе использованы следующие литературные источники [6; 10; 11] и данные собственных наблюдений.

Результаты и их обсуждение

В результате проведенных подсчетов установлено, что адвентивная фракция флоры Припятского Полесья представлена 1079 видами сосудистых растений. Анализ их биоморфологической структуры показал, что заносные виды этой территории характеризуются разнообразным спектром жизненных форм.

При выделении биоморфологических групп с учетом длительности жизненного цикла растений наблюдается численное превосходство поликарпиков (605 видов или 56,1%), представленных разнообразными многолетними видами (таблица 1): *Aster lanceolatus*, *Allium sativum*, *Populus ×canescens* и многими другими.

Таблица 1 – Распределение адвентивных видов по жизненным формам в отношении продолжительности жизненного цикла

Жизненная форма	Кол-во видов	% от общего кол-ва
Поликарпки	605	56,1
Монокарпки дициклические	75	6,9
Монокарпки моноциклические	399	37,0
Итого:	1079	100

Среди растений, плодоносящих только 1 раз в жизни, доминируют моноциклические монокарпки – однолетние растения: *Matthiola incana*, *Cucurbita maxima*, *Consolida regalis* и многие другие. Всего в составе флоры Припятского Полесья их насчитывается 399 таксонов, что составляет 37,0% от общего числа адвентивных видов. Дициклических монокарпиков насчитывается 75 таксонов (6,9%), представлены они двулетними видами растений: *Melilotus albus*, *Angelica archangelica*, *Echium vulgare* и другими. Особенностью биоморфологической структуры адвентивной фракции флоры относительно аборигенной [12] является гораздо большее участие монокарпиков (в сумме 43,9% в сравнении с 15,8% в составе аборигенной флоры) и меньшее – поликарпиков (56,1% против 84,2).

В таблице 2 показано распределение адвентивных представителей флоры Припятского Полесья по жизненным формам, выделенным в системе жизненных форм по Раункиеру.

Таблица 2 – Распределение адвентивных видов по жизненным формам в системе Раункиера

Жизненная форма	Фанерофиты	Хамефиты	Гемикриптофиты		Геофиты		Гидрофиты	Терофиты	Итого
			наземные	водные	наземные	водные			
Кол-во видов	204	32	351	2	87	6	4	393	1079
% от общего кол-ва	18,9	3,0	32,5	0,2	8,0	0,6	0,4	36,4	100

Анализ спектра жизненных форм растений по Раункиеру (рисунок 1) показывает, что самой многочисленной (393 вида или 36,4%) является группа терофитов – однолетних растений: *Atriplex oblongifolia*, *Phaseolus vulgaris*, *Xanthium albinum* и др.

Группа гемикриптофитов в сумме представлена 353 видами, что составляет 32,7%. Среди них доминируют наземные гемикриптофиты (351 представитель), побеги которых с наступлением неблагоприятного периода отмирают до уровня почвы. Эта группа представлена разнообразными многолетними и двулетними травянистыми растениями: *Heracleum sibiricum*, *Echium vulgare*, *Achillea nobilis* и многими другими. Водные гемикриптофиты представлены только 2 видами: *Zizania latifolia* и *Phragmites altissimus*. Достаточно многочисленной является группа фанерофитов, насчитывающая 204 вида. Представители этой группы относятся к разнообразным древесным растениям: *Pseudotsuga menziesii*,

Spiraea salicifolia, *Vitis vinifera* и др. Геофиты в сумме представлены 93 видами (8,6%). При этом среди наземных геофитов (*Narcissus poeticus*, *Crocus vernus*, *Muscaris botryoides*) преобладают культурные растения, а среди водных – виды, способные произрастать и в дикорастущих условиях: *Acorus calamus*, *Typha laxmannii*. Хамефиты представлены 32 видами (3,0%); их почки возобновления находятся у непосредственной близости от поверхности почвы: *Hyssopus officinalis*, *Dianthus plumarius*, *Oxycoccus macrocarpus* и другие таксоны. Самой малочисленной является группа гидрофитов, насчитывающая только 4 водных растения: *Elodea canadensis*, *Elodea nuttallii*, *Lemna gibba* и *Lemna turionifera*.

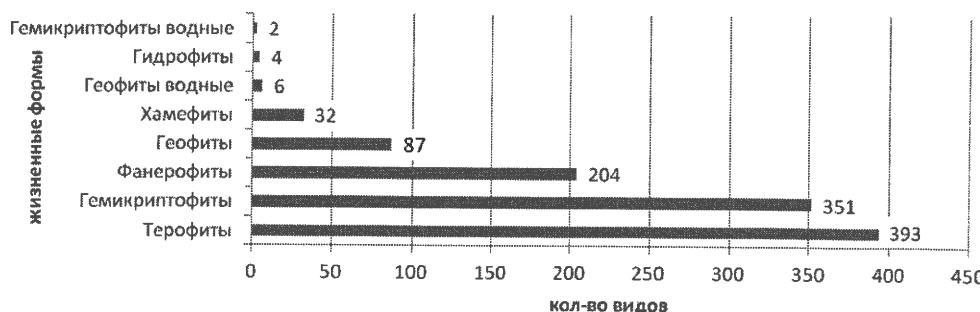


Рис. 1 – Спектр биоморф в системе жизненных форм растений по Раункиеру

Главной особенностью адвентивной фракции флоры Припятского Полесья в сравнении с аборигенной [12], является существенное преобладание терофитов (36,4% против 9,9%) с одной стороны и более малочисленное (32,5% против 62,5) участие гемикриптофитов – с другой.

Наибольшее разнообразие жизненных форм наблюдается при их выделении с учетом эколого-морфологических признаков растений. На рисунке 2 представлен спектр древесных биоморф, который демонстрирует численное преобладание кустарников (97 видов или 44,7%) и деревьев (90 видов или 41,7%). Большинство из них (*Malus domestica*, *Larix kaempferi*, *Buxus sempervirens*, *Forsythia intermedia* и др.) являются культивируемыми растениями. Древесных лиан насчитывается 10 видов (*Clematis tangutica*, *Actinidia arguta*, *Vitis vinifera* и др.). Полукустарники (*Rosmarinus officinalis*, *Vaccinium corymbosum* и др.), полукустарнички (*Alyssum saxatile*, *Iberis sempervirens* и др.) и кустарнички (*Hyssopus officinalis*, *Artemisia abrotanum* и др.) весьма малочисленны и представлены 8, 6 и 5 культивируемыми видами соответственно. Всего адвентивная дендрофлора Припятского Полесья насчитывает 16 таксонов.

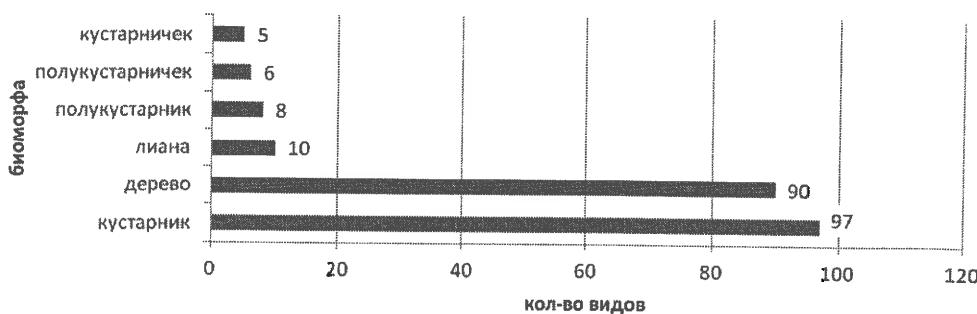


Рис. 2 – Спектр древесных биоморф

Как уже отмечалось ранее, численное преобладание однолетних растений (392 вида или 45,4% от всех травянистых биоморф) характерно и для травянистых видов (рисунок 3). Среди многолетников более многочисленными являются короткокорневищные (*Ballota nigra*, *Heliopsis scabra* и др.) и длиннокорневищные (*Rudbeckia laciniata*, *Artemisia vulgaris* и др.) растения. Представлены они 105 (или 12,2%) и 74 (или 8,6%) видами соответственно. Гораздо более многочисленными в сравнении с аборигенной фракцией являются луковичные (61 вид или 7,1% против 8 или 0,9%) растения. Среди них доминируют культивируемые декоративные виды: *Galanthus nivalis*, *Muscari comosum* и мн. др. Представители гидрофильной флоры – аэрогидатофиты (*Lemna gibba*, *Lemna turionifera*) и эугидатофиты (*Elodea canadensis*, *Elodea nuttallii*) – самые малочисленные. Однако некоторые из них, обладая способностью к активному вегетативному размножению, являются достаточно агрессивными в отношении видов аборигенной гидрофильной флоры. Всего травянистых растений во флоре Припятского Полесья насчитывается 863 вида.

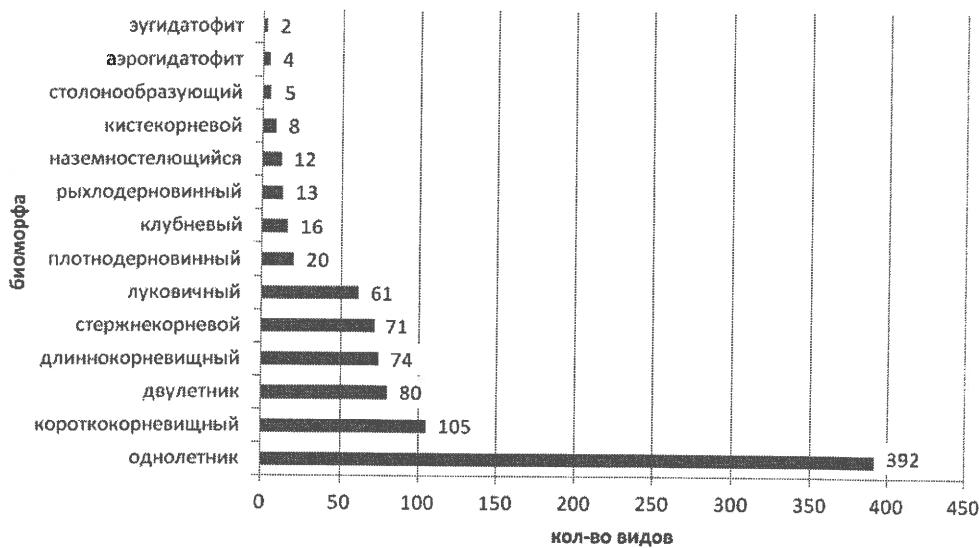


Рис. 3 – Спектр травянистых биоморф

Выявленные биоморфологические особенности адвентивных видов флоры Припятского Полесья позволяют определить таксоны, способные к внедрению в естественные растительные сообщества. Наибольшее внимание следует обратить на многолетники, обладающие высокой вегетативной подвижностью и обильным семенным размножением. Как отмечалось ранее, в составе адвентивной флоры Припятского Полесья насчитывается 74 длиннокорневищных многолетника. Из них 12 видов (*Reynoutria japonica*, *Aster novi-belgii*, *Phragmites altissimus* и др.) относятся к инвазионным [13]. Некоторые другие представители этой группы (*Physalis alkekengi*, *Miscanthus sacchariflorus*, *Rudbeckia laciniata* и др.) также обладают значительным инвазионным потенциалом и уже находятся на первичных стадиях инвазионного процесса. Среди однолетних растений к инвазионным видам в настоящий момент относится только 9 таксонов (2,3%), способных давать большое количество семян: *Galinsoga ciliata*, *Echinocystis lobata*, *Erechtites hieracifolia* и другие. Некоторые древесные растения (*Padus serotina*, *Quercus rubra*, *Robinia pseudacacia*, *Acer negundo*) могут активно распространяться благодаря высокой семенной продуктивности и способности размножения вегетативным путем, образуя корневую поросль. Такие таксоны, обладающие комплексом биологических свойств, отнесены к наиболее опасным инвазионным видам – трансформерам [14].

Заключение

Анализ биоморфологической структуры адвентивной фракции флоры Припятского Полесья показывает, что наиболее многочисленной в составе флоры региона является группа однолетников, представленная преимущественно культивируемыми и сорными видами растений. Среди многолетников самыми ведущими биоморфами являются кустарники и деревья, а также короткокорневищные и длиннокорневищные травянистые растения. Главной особенностью биоморфологической структуры адвентивной фракции флоры (в сравнении сaborигенной) является большее участие монокарпиков – однолетних видов растений. Среди адвентивных поликарпиков более многочисленными являются кустарники, деревья и луковичные травянистые растения.

Таким образом, выполненный биоморфологический анализ адвентивной фракции флоры Припятского Полесья позволяет не только определить ее характерные особенности, но и выявить потенциальные инвазионные виды. К таким таксонам в первую очередь относятся растения, обладающие высокой вегетативной подвижностью и способностью обильного семенного размножения: *Miscanthus sacchariflorus*, *Rudbeckia laciniata*, *Pinus banksiana* и некоторые другие.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Виноградова, Ю. К. Черная книга флоры Средней России (Чужеродные виды растений в экосистемах Средней России) / Ю. К. Виноградова, С. Р. Майоров, Л. В. Хорун. – М. : ГЕОС, 2009. – 494 с.
2. Weber, E. Assessing the risk of potentially invasive plant species in central Europe / E. Weber, D. Gut // J. for Nature Conservation. – 2004. – № 12. – P. 171–179.

3. Нацыянальны атлас Беларусі / Камітэт па зямельных рэсурсах, геадэзіі і картаграфіі пры Савеце Міністраў Рэспублікі Беларусь. – Мінск : Белкартаграфія, 2002. – 292 с.
4. Флора Беларуси. Сосудистые растения: в 6 т. / под общ. ред. В. И. Парфенова; Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т эксперим. ботаники им. В. Ф. Купревича. – Т. 1: Lycopodiophyta. Equisetophyta. Polypodiophyta. Ginkgophyta. Pinophyta. Gnethophyta / Р. Ю. Блажевич [и др.]. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 199 с.
5. Флора Беларуси. Сосудистые растения: в 6 т. / под общ. ред. В. И. Парфенова; Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т эксперим. ботаники им. В. Ф. Купревича. – Т. 2 : Liliopsida / Д. И. Третьяков [и др.]. – Минск: Беларус. навука, 2013. – 447 с.
6. Флора БССР : в 5 т. / редкол.: Б. К. Шишкін (глав. ред.) [и др.]. – Минск : Изд-во Акад. наук Белорус. ССР. – 1959. – 5 т.
7. *Парфенов, В. И.* Флора Белорусского Полесья: современное состояние и тенденции развития / В. И. Парфенов. – Минск : Наука и техника, 1983. – 295 с.
8. *Raunkiaer, C.* Plant life forms / C. Raunkiaer. – Oxford, 1937. – 104 p.
9. *Серебряков, И. Г.* Экологическая морфология растений / И. Г. Серебряков. – Москва : Высшая школа, 1962. – 378 с.
10. Екофлора України : в 6 т. / відпов. ред. Я. П. Дідух. – Київ : Фітосоціоцентр. – 2010. – 6 т.
11. Адвентивная флора Москвы и Московской области / С. Р. Майоров [и др.]. – Москва : Тов-во науч. изданий КМК, 2012. – 411 с.
12. *Мялик, А. Н.* Биоморфологический анализ аборигенной флоры Припятского Полесья / А. Н. Мялик // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 5. Хімія. Біялогія. Навукі аб зямлі. – 2016. – № 1. – С. 46–53.
13. *Мялик, А. Н.* Инвазионные виды во флоре Припятского Полесья / А. Н. Мялик // Веснік Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя біялагічных навук. – 2016. – № 1. – С. 117–123.
14. *Дубовик, Д. В.* Адвентивные виды растений во флоре Беларуси и их инвазионный потенциал / Д. В. Дубовик // Современное состояние, тенденции развития, рациональное использование и сохранение биологического разнообразия растительного мира, Минск–Нарочь, 23–26 сент. 2014 г. / НАН Беларуси [и др.]; редкол.: А. В. Пугачевский [и др.]. – Минск, 2014. – С. 184–186.

Поступила в редакцию 20.03.2017 г.

Контакты: aleksandr-myalik@yandex.ru (Мялик Александр Николаевич)

Mialik A. FEATURES OF BIOMORPHOLOGICAL STRUCTURE OF ADVENTIVE FLORA IN PRIPIYATSKOYE POLESYE.

The article presents the biomorphological structure of the adventive flora of Pripyatskoye Polesye according to the Raunki?r system . It also takes into account the duration of the plant life cycle and its ecological and morphological characteristics. Among 1079 adventive species the most numerous are annual and biennial plants. Among herbaceous perennials long and short rhizomes predominate. Among woody perennials the majority of species are trees and shrubs.

Keywords: Pripyatskoye Polesye, adventive species, biomorphological structure, life forms.

УДК 543.215.2:502.521:631.4(476)

ЗАГРЯЗНЕНИЕ ТЯЖЕЛЫМИ МЕТАЛЛАМИ ПОЧВЕННОГО ПОКРОВА РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ НА ПРИМЕРЕ ПОЧВ ОБЛАСТНЫХ ЦЕНТРОВ

М. А. Шорец

магистрант кафедры химии,

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

О. М. Балаева-Тихомирова

кандидат биологических наук, доцент,

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

Исследования состояния почв Республики Беларусь показали, что в них локально накапливаются тяжелые металлы, концентрации которых неблагоприятно влияют на состояние окружающей среды. В почву тяжелые металлы попадают из атмосферы в виде аэрозолей, входящих в состав воздушных выбросов промышленных предприятий, дорожно-транспортного комплекса и гидросферы, в результате сброса сточных вод в водные ресурсы населенных пунктов.

Ключевые слова: почва, тяжелые металлы, железо, медь, цинк, ртуть, свинец, антропогенная нагрузка.

Введение

Состояние почвы городских территорий требует особого внимания, так как влияние транспорта, промышленности, процессов строительства оказывает постоянную нагрузку на почвенную систему, что приводит к изменению ее компонентов: агрохимических и физических свойств, микробиологических и биохимических показателей. В результате почвенный покров в городах деградирует и теряет способность выполнять экологические функции [1].

Микробиота, биохимические параметры почвы, ее биологическая активность под влиянием антропогенного воздействия изменяются и являются наиболее чувствительными показателями к загрязнению состояния почвенного покрова [2; 3].

Постоянный мониторинг почв осуществляется вблизи промышленных предприятий и в пределах санитарно-защитных зон, так как данные почвы подвержены наибольшему антропогенному влиянию. Мониторинг прибрежной зоны водоемов, парковой зоны и центральной зоны населенных пунктов не осуществляется, так как считается, что почвы этих территорий не подвергаются интенсивному антропогенному воздействию и преобразованию, а, следовательно, уровень загрязнения таких экосистем невысок [4]. Но небольшие по площади рекреационные территории (скверы, бульвары, аллеи), а также окраинные зоны парков и лесопарков в пределах города испытывают сильное техногенное влияние, в результате ухудшается состояние растительности и почвы этих территорий. Лесо-

парки, парки и другие рекреационные территории города при разумной их эксплуатации играют важную роль в оздоровлении окружающей среды городов [5]. Зеленым насаждениям на урбанизированных территориях принадлежат важные рекреационные и санитарно-гигиенические функции. Крупные клинья лесопарков служат мощными проводниками чистого воздуха в центральные районы города, так как воздушные массы очищаются, проходя над данными зонами [6].

Цель – изучить степень загрязнения почвенного покрова Республики Беларусь ионами тяжелых металлов на примере почв областных городов (г. Витебска, г. Могилева и г. Минска).

Основная часть

Объект исследования – почва.

Предмет исследования – концентрация подвижных форм тяжелых металлов в почве – Cu^{2+} , Fe^{3+} , Zn^{2+} , Pb^{2+} , Hg^{2+} .

Почвы отбирали в г. Витебске, г. Могилеве и г. Минске, в каждом из мест, было взято по 3 пробы в 3 зонах: прибрежной зоне водоема, центре населенного пункта и парковой зоне.

Модель эксперимента

Название города	Место отбора проб почвы		
	Прибрежная зона водоема	Центр населенного пункта	Парковая зона
г. Витебск	р. Западная Двина	Пересечение ул. Фрунзе, ул. Ленина и ул. Замковая	Парк им. Фрунзе
г. Могилев	р. Днепр	ул. Ленинская	ПКиО имени М. Горького
г. Минск	р. Свислочь	Пр-т Независимости	Лошицкий парк

Пробы почв отбирали в сентябре – октябре. Верхний растительный слой почвы снимали, и на глубине 20 см отбирали опытную пробу, помещали в стеклянный сосуд с притертой крышкой. Пробы почвы в каждой из зон отбирали на расстоянии 10 метров друг от друга. Анализ почвы проводили в течение 3 недель с момента сбора проб, чтобы избежать нарушения почвенного состава.

Почвы исследовали по типу.

Типы почв в местах отбора проб

Название города	Место отбора проб почвы		
	Прибрежная зона водоема	Центр населенного пункта	Парковая зона
г. Витебск	несвязный песок	дерновоподзолистая, среднесуглинистая, слабогумусная	дерновоподзолистая, супесчаная, слабогумусная, среднесуглинистая
г. Могилев	дерновоглеевая, среднегумусная	дерновоподзолистая, супесчаная, среднегумусная	дерновоподзолистая, супесчаная, среднегумусная
г. Минск	дерновоподзолистая, легкосуглинистая	дерновоподзолистая, легкосуглинистая	дерновоподзолистая, легкосуглинистая

Определения железа (III) проводится спектрофотометрическим методом на основании образования окрашенных комплексных соединений сульфосалициловой кислоты с солями железа (III) [7]. Медь (II) определяется спектрофотометрическим методом, основанным на образовании комплексов ионов металла с аммиаком. Определение ионов цинка (II) проводится титриметрическим методом на основании образования комплексов ионов металлов с аминополикарбоновыми кислотами. Определение ионов свинца (II) основано на их осаждении из растворов, содержащих цианиды щелочных металлов. Метод определения ионов ртути (II) основан на разложении ртути в почве смесью кислот с последующим восстановлением хлоридом олова [8].

По завершению опыта, были сопоставлены полученные результаты у групп между собой и с данными литературы по предельно-допустимой концентрации каждого металла.

ПДК цинка 23,0 мг/кг почвы, меди – 3,0 мг/кг почвы, железа – 5,0 мг/кг почвы, ртути – 2,1 мг/кг почвы, свинца – 6,0 мг/кг почвы [9].

Математическую обработку полученных результатов проводили методами параметрической и непараметрической статистики с использованием пакета статистических программ MicrosoftExcel 2010, STATISTICA 6.0. Достоверность различий учитывали при $p < 0,05$.

При исследовании почв с различной антропогенной нагрузкой, было определено содержание основных металлов, оказывающих воздействие на показатели эколого-функционального состояния почвы

Изучение концентрации подвижных форм железа выявило следующие закономерности.

Концентрация ионов железа в почве (мг/кг почвы) ($M \pm m$)

Места отбора проб почвы	Содержание ионов железа		
	Прибрежная зона водоема	Центр города	Парк
г. Витебск	$4,36 \pm 0,10^{2-4,7,10}$	$2,57 \pm 0,15^{5,8,10}$	$0,76 \pm 0,05^{2,6,9,10}$
г. Могилев	$1,67 \pm 0,01^{10}$	$1,96 \pm 0,02^{4,5,10}$	$3,28 \pm 0,02^{4,10}$
г. Минск	$4,28 \pm 0,01^{10}$	$3,46 \pm 0,02^{7,10}$	$3,76 \pm 0,02^{7,9,10}$

Примечание: ¹P < 0,05 по сравнению с почвой, взятой возле водоема в г. Витебске; ²P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Витебска; ³P < 0,05 по сравнению с почвой из парка в г. Витебск; ⁴P < 0,05 по сравнению с почвой, взятой возле водоема в г. Могилеве; ⁵P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Могилеве; ⁶P < 0,05 по сравнению с почвой из парка г. Могилев; ⁷P < 0,05 по сравнению с почвой взятой возле водоема в г. Минске; ⁸P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Минске; ⁹P < 0,05 по сравнению с почвой из парка г. Минске; ¹⁰P < 0,05 по сравнению с ПДК.

В прибрежной зоне водоемов наибольшее содержание ионов металла установлено в г. Витебске, а наименьшее – в г. Могилеве, значения отличаются в 2,6 раза. Отличия между г. Витебском и г. Минском не значительны.

В центральной зоне городов наибольшая концентрация железа установлена в г. Минск, а наименьшая – в г. Могилеве, значения отличаются в 1,7 раза. Значение в г. Минске превышает значение в г. Витебске в 1,3 раза.

В парковой зоне городов наибольшее и наименьшее содержание ионов металла установлено в г. Минск и г. Витебск соответственно, данные отличаются в 4,9 раза. Отличия между г. Минском и г. Могилевом не значительны.

Сравнив полученные данные с показателем предельно-допустимой концентрации железа (П), превышение не установлено.

Наибольшая концентрация железа отмечена вблизи прибрежной зоны водоемов, такое содержание ионов железа в почве обусловлено тем, что промышленные предприятия городов используют водоемы в своих целях, в результате чего происходит сброс загрязняющих веществ в водную среду городов, что обуславливает загрязнение береговой зоны водоемов. Парки находятся в оживленной части города, поэтому антропогенное воздействие на почву парковой зоны в городах высоко. В почвах, взятых в центре городов, не наблюдается повышенного значения концентрации ионов железа, т. к. все промышленные предприятия в городах располагаются на периферии, но и нельзя сказать, что значения в этих городах малы, т. к. в центре городов отмечается большое скопление машин, а следственно, происходит большой выброс выхлопных газов, что влияет на состав почвы. Кроме того, железо поступает в результате коррозии водопроводных конструкций.

При расчете концентрации ионов меди были получены следующие показатели.

Концентрация ионов меди в почве (мг/кг почвы) ($M \pm m$)

Места отбора проб почвы	Содержание ионов меди		
	Прибрежная зона водоема	Центр города	Парк
г. Витебск	$1,19 \pm 0,17$ ^{2,4,7,10}	$4,84 \pm 0,07$ ^{2,5,8,10}	$0,79 \pm 0,18$ ^{2,6,9,10}
г. Могилев	$0,44 \pm 0,02$ ¹⁰	$0,48 \pm 0,02$ ^{4,5,10}	$0,30 \pm 0,02$ ^{4,10}
г. Минск	$1,97 \pm 0,02$ ¹⁰	$1,50 \pm 0,02$ ^{7,10}	$1,79 \pm 0,02$ ^{7,9,10}

Примечание: ¹P < 0,05 по сравнению с почвой, взятой возле водоема в г. Витебске; ²P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Витебска; ³P < 0,05 по сравнению с почвой из парка в г. Витебске; ⁴P < 0,05 по сравнению с почвой, взятой возле водоема в г. Могилеве; ⁵P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Могилева; ⁶P < 0,05 по сравнению с почвой из парка г. Могилеве; ⁷P < 0,05 по сравнению с почвой, взятой возле водоема в г. Минске; ⁸P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Минске; ⁹P < 0,05 по сравнению с почвой из парка г. Минска; ¹⁰P < 0,05 по сравнению с ПДК.

Наибольшая концентрация ионов меди (П) в почве прибрежной зоны водоемов установлена в г. Минске, а наименьшая – в г. Могилеве, данные отличаются между собой в 4,4 раза. Значение в г. Минске отличается от значения в г. Витебске в 1,6 раза.

В центральной зоне городов наибольшее и наименьшее содержание ионов меди выявлено в г. Витебске и г. Могилеве соответственно, значения отличаются между собой в 10,1 раза. Данные в г. Витебске больше чем в г. Минске в 3,2 раза.

В парковой зоне наибольшая концентрация ионов меди – в г. Минске, а наименьшая – в г. Могилеве, данные отличаются между собой в 5,9 раза. Данные в г. Минске выше, чем в г. Витебске в 2,2 раза.

Сравнив полученные данные с предельно допустимой концентрацией меди (П), установлено превышение в центре города Витебска, в остальных городах значения в норме, не превышают ПДК.

Наибольшая концентрация ионов меди наблюдается в центральной зоне городов, поступление меди в почву происходит вследствие выброса при высокотемпературных процессах: черной и цветной металлургии, обжиге цементного сырья, сжигании минерального топлива. Воздушными потоками выбросы переносятся на большие расстояния (до 10 км), причем большая их часть выпадает на расстоянии 1-3 км от эпицентра.

Изучение концентрации подвижных форм цинка выявило следующие закономерности.

Концентрация ионов цинка в почве (мг/кг почвы) ($M \pm m$)

Места отбора проб почвы	Содержание ионов цинка		
	Прибрежная зона водоема	Центр города	Парк
г. Витебск	$46,04 \pm 2,36^{2,4,7,10}$	$87,20 \pm 3,01^{5,8,10}$	$60,66 \pm 4,43^{2,6,9,10}$
г. Могилев	$47,26 \pm 0,01^{10}$	$27,08 \pm 0,02^{4,5,10}$	$31,96 \pm 0,03^{4,10}$
г. Минск	$125,14 \pm 0,05^{10}$	$118,26 \pm 0,02^{7,10}$	$126,79 \pm 0,07^{7,9,10}$

Примечание: ¹P < 0,05 по сравнению с почвой, взятой возле водоема в г. Витебске; ²P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Витебска; ³P < 0,05 по сравнению с почвой из парка в г. Витебске; ⁴P < 0,05 по сравнению с почвой, взятой возле водоема в г. Могилеве; ⁵P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Могилева; ⁶P < 0,05 по сравнению с почвой из парка г. Могилева; ⁷P < 0,05 по сравнению с почвой взятой возле водоема в г. Минске; ⁸P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Минска; ⁹P < 0,05 по сравнению с почвой из парка г. Минска; ¹⁰P < 0,05 по сравнению с ПДК.

Наибольшее содержание ионов цинка (II) в прибрежной зоне водоема установлено в г. Минске, а наименьшее – в г. Витебске, данные отличаются между собой в 2,7 раза. Значение в г. Минске больше значения в г. Могилеве в 2,6 раза.

Наибольшая и наименьшая концентрация ионов цинка в центральной части населенных пунктов установлена в г. Минске и г. Могилеве соответственно, значения отличаются между собой в 4,3 раза. Данные в г. Минске выше, чем в г. Витебске в 1,3 раза.

В парковой зоне городов наибольшее содержание ионов цинка выявлено в г. Минске, а наименьшее – в г. Могилеве, данные отличаются между собой в 3,9 раза. Значение в г. Минске больше значения в г. Витебске в 2,0 раза.

Сравнив полученные данные с предельно допустимой концентрацией ионов цинка (П), установлено превышение во всех отобранных пробах почвы.

Цинк поступает в придорожное пространство в результате истирания различных деталей, эрозии оцинкованных поверхностей, износа шин, за счет ис-

пользования в маслах присадок, содержащих этот металл. После отказа от использования соединений кадмия в процессах вулканизации резины и замены их соединениями цинка истирание автомобильных шин также стало одним из источников накопления этого металла вдоль дорог.

Концентрация ионов ртути в почве (мг/кг почвы) ($M \pm m$)

Места отбора проб почвы	Содержание ионов ртути		
	Прибрежная зона водоема	Центр города	Парк
г. Витебск	$0,02 \pm 0,01^{2,4,5,6,10}$	$0,03 \pm 0,02^{3-6,10}$	$0,02 \pm 0,01^{2-4,10}$
г. Могилев	$0,01 \pm 0,01^{1,2,3,10}$	$0,02 \pm 0,01^{1-3,10}$	$0,01 \pm 0,01^{1-3,10}$
г. Минск	$0,03 \pm 0,02^{1-6,10}$	$0,03 \pm 0,02^{1,3-6,10}$	$0,03 \pm 0,01^{4-6,10}$

Примечание: ¹P < 0,05 по сравнению с почвой взятой возле водоема в г. Витебске; ²P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Витебска; ³P < 0,05 по сравнению с почвой из парка в г. Витебске; ⁴P < 0,05 по сравнению с почвой, взятой возле водоема в г. Могилеве; ⁵P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Могилеве; ⁶P < 0,05 по сравнению с почвой из парка г. Могилеве; ⁷P < 0,05 по сравнению с почвой взятой возле водоема в г. Минске; ⁸P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Минске; ⁹P < 0,05 по сравнению с почвой из парка г. Минске; ¹⁰P < 0,05 по сравнению с ПДК.

Наибольшая концентрация ионов ртути (II) в почве парковой зоны и прибрежной зоны водоема установлена в г. Минске, а наименьшая – в г. Могилеве, данные отличаются друг от друга в 3 раза. Значение в г. Минске, отличается от значения в г. Витебске в 1,5 раза.

В центральной зоне городов наибольшая концентрация ионов ртути выявлена в г. Витебске и г. Минске, а наименьшая – в г. Могилеве, наибольшая концентрация отличается от наименьшей в 1,5 раза.

Сравнив полученные данные с предельно-допустимой концентрацией ртути, превышений не установлено, все значения в норме.

Концентрация ионов свинца в почве (мг/кг почвы) ($M \pm m$)

Места отбора проб почвы	Содержание ионов свинца		
	Прибрежная зона водоема	Центр города	Парк
г. Витебск	$1,98 \pm 0,13^{2,4,5,6,10}$	$1,78 \pm 0,11^{3-6,10}$	$1,36 \pm 0,08^{2,4,10}$
г. Могилев	$1,64 \pm 0,06^{1,2,3,10}$	$1,43 \pm 0,07^{1-3,10}$	$1,11 \pm 0,05^{1-3,10}$
г. Минск	$2,12 \pm 0,02^{1,3-6,10}$	$1,97 \pm 0,08^{1,3,4,10}$	$1,94 \pm 0,09^{4,5,10}$

Примечание: ¹P < 0,05 по сравнению с почвой, взятой возле водоема в г. Витебске; ²P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Витебска; ³P < 0,05 по сравнению с почвой из парка в г. Витебске; ⁴P < 0,05 по сравнению с почвой, взятой возле водоема в г. Могилеве; ⁵P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Могилеве; ⁶P < 0,05 по сравнению с почвой из парка г. Могилеве; ⁷P < 0,05 по сравнению с почвой взятой возле водоема в г. Минске; ⁸P < 0,05 по сравнению с почвой из центра г. Минска; ⁹P < 0,05 по сравнению с почвой из парка г. Минска; ¹⁰P < 0,05 по сравнению с ПДК.

В почвах прибрежной зоны водоема наибольшая концентрация ионов свинца (II) установлена в г. Минске, а наименьшая – в г. Могилеве. Отличия концентраций между г. Минском и г. Могилевом установлены, г. Минске и г. Витебске отличия не значительны.

В центральной части городов наибольшая концентрация ионов свинца установлена в г. Минске, а наименьшая – в г. Могилеве. Концентрации в г. Минске и г. Могилеве отличаются, г. Минске и г. Витебске концентрация не имеет существенных отличий.

В парковой зоне городов наибольшая концентрация ионов свинца установлена в г. Минск, а наименьшая – в г. Могилев, концентрации отличаются между собой в 1,7 раза. Значение в г. Минск отличается от значения в г. Витебск в 1,4 раза.

Сравнив полученные данные с ПДК, превышений свинца не установлено.

Заключение

Было исследовано по 3 зоны (прибрежная зона водоема, центр города, парк) в областных городах Республики Беларусь – Витебске, Могилеве и Минске. Приоритетными загрязнителями почв областных городов являются цинк и медь, в меньшей степени железо, ртуть и свинец.

Наибольшая концентрация ионов тяжелых металлов отмечена в г. Минск, который по количеству выбросов загрязняющих веществ в воздух от стационарных источников по итогам последних лет находится на втором месте в Белоруссии после Новополоцка. С каждым годом растет количество автотранспорта в городе. Экологическая проблема в Минске усугубляется получившей широкое распространение практикой “уплотнения” – производится плотная застройка ранее уже сформировавшихся районов. Данная практика позволяет удешевить строительство за счет отсутствия необходимости вкладывать средства в инфраструктуру: подвод к новым зданиям коммуникаций – трубопроводов, дорог, объектов торговли и т. п. Но при этом генерация автомобильных выхлопных газов на 1 км² площади города резко возрастает ввиду увеличения плотности застройки, а рассеивание ухудшается из-за плохой продуваемости города. При этом уплотняемые участки города, ранее являвшиеся участками рассеивания выхлопных газов и прочих загрязнений воздуха, сами становятся очагами генерации загрязнений.

Превышение предельно допустимой концентрации цинка (II) является особо острой проблемой на данный момент, т.к. концентрация ионов цинка достигает высоких значений. Концентрация ионов меди (II) в норме, за исключением лишь центра г. Витебска, а содержание ионов железа (III) в почве во всех отобранных пробах не превышает ПДК.

В г. Могилеве состояние почв по всем исследуемым нами показателям, в норме, за исключением содержания ионов цинка – концентрация ионов цинка в почвах г. Могилева превышает ПДК.

Следует проводить ежегодный мониторинг состояния почв, чтобы следить за изменениями в состоянии почвенного покрова.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гельцер, Ю. Г. Показатели биологической активности в почвенных исследованиях / Ю. Г. Гельцер // Почвоведение. – 1990. – № 9. – С. 47–60.
2. Рубенчик, Л. И. Микроорганизмы – биологические индикаторы / Л. И. Рубенчик. – Киев : Изд-во “Наукова Думка”, 1972. – 165 с.
3. Скворцова, И. Н. Изменение состава микробных сообществ как один из показателей при экологическом мониторинге / И. Н. Скворцова, М. Н. Строганова, М. Г. Агаркова // Всесоюзная конференция “Экологические проблемы охраны живой природы”. – Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 84 с.
4. Габбасова, И. М. Агрэкологическая оценка почв парков мегаполисов / И. М. Габбасова, Р. Ш. Афзалов // Вестник Оренбургского Университета. – 2006. – № 10. – С. 362–367.
5. Фомина, Н. В. Микробиологическая характеристика почв рекреационных зон г. Красноярска / Н. В. Фомина // Проблемы современной аграрной науки : материалы Междунар. заоч. науч. конф. – Красноярск : Труды КрасГАУ, 2012. – С. 9–11.
6. Аринушкина, Е. В. Руководство по химическому анализу почв / Е. В. Аринушкина. – Москва : Изд-во МГУ, 1970. – 471 с.
7. Воробьева, Л. А. Химический анализ почв / Л. А. Воробьева. – Москва : МГУ, 1998. – 273 с.
8. Дабахов, М. В. Тяжелые металлы в парковых почвах города / М. В. Дабахов, Е. В. Чеснокова // Экология урбанизированных территорий. – 2007. – № 3. – С. 41–46.
9. Гигиенические нормативы 2.1.7.12-1-2004. (2004), Перечень предельно допустимых концентраций (ПДК) и ориентировочно допустимых концентраций (ОДК) химических веществ в почве, Минск, 26 с.

Поступила в редакцию 06.04.2017 г.

Контакты: margarita-shorec@mail.ru (Шорец Маргарита Андреевна)

Shorets M., Balayeva-Tikhomirova O. SOIL POLLUTION BY HEAVY METALS IN THE REPUBLIC OF BELARUS (ON THE EXAMPLE OF REGIONAL CENTRES).

The studies of the soil state in the Republic of Belarus have shown that the soil locally accumulates heavy metals, the concentrations of which adversely affect the state of the environment. Heavy metals penetrate into the soil from the atmosphere in the form of aerosols being a part of air emissions of industrial enterprises, road transport complex and hydrosphere, as a result of sewage discharge into the water resources of settlements.

Keywords: soil, heavy metals, iron, copper, zinc, mercury, lead, anthropogenic load.

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў
на англійскую мову
Я.В. Рубанава

Тэхнічны рэдактар *А.Л. Пазнякоў*
Камп'ютарны набор і вёрстка *А.Л. Пазнякоў*
Карэктар *І.Г. Латушкіна*

Падпісана да друку 03.08.2017 г.
Фармат 70x108¹/₁₆. Палера афсетная. Гарнітура Times New Roman.
Ум.-друк. арк. 7,2. Ул.-выд. арк. 6,8. Тыраж 100 экз. Заказ 4066.

Установа адукацыі “Марілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А.А. Куляшова”, 212022, Марілёў, Касманаўтаў, 1.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвалальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства
“Марілёўская абласная ўніверсітэтская друкарня імя С. Собала”
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвалальніка друкаваных выданняў № 2/24 ад 12.12.2013 г.
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Марілёў