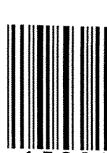


ISSN 2409-3777



9 772409 377007

17001

ВЕСНИК

Магілёўскага дзяржаўнага
універсітэта
імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца с снежня 1998 года

Серый В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

**1 (49)
2017**

Галоўная рэдакцыйная камегія:

д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лайрыновіч(галоўны рэдактар)
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Марілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНВ В.М. Лапцінскі (Марілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Марілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Марілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Марілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Марілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Марілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марацкаў (Марілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Марілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Марілёў)

*Научно-методический журнал “Веснік Магілёўскага дзяржунівага
універсітэта імя А. А. Куляшова” включены в РИНЦ
(Российский индекс научного цитирования),
лицензионный договор № 811-12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫИ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

ЗМЕСТ

ГАЛЬМАК А. М. Об ассоциативности полиадических группоидов	4
КЕМЕШ О. Н., МОРОЗОВА И. М., САКОВИЧ Н. В. О количестве точек с действительными алгебраическими координатами вблизи гладкой кривой	12
ЕФРЕМОВ А. А. О приложении анализа оболочки данных к вычислению относительной эффективности функционирования объектов	17
ЛЕБЕДЕВ В. И. Сверхизлучение в лазере	26
ЧЕРНОВ С. М. Задача о частице в сферической прямоугольной яме и ее применение к оценкам энергий возбужденных состояний А-гиперядер	54
ИНОЗЕМЦЕВА Е. В., ОСТРИКОВ О. М. Расчет полей напряжений у тонкого упругого двойника, находящегося вдали от поверхности и образованного в результате антиплоского сдвига	68
АКУЛИЧ Н. В., ТАРАСОВА Е. А., СОРОКА А. В., СЯХОВИЧ В. Э., БЕЛИЯЕВ С. А. Морфологические маркеры старения эритроцитов донорской крови	75
ДЕГТЬЯРЕВА Е. И., АТАНАСОВА Ю. В., НИКИФОРЕНКО В. А. Изучение бактерицидных свойств красителей по отношению к условно-патогенной микрофлоре	84
ТИХОНЧУК Г. Н. Фенотипическая изменчивость рисунка надкрылий колорадского жука как оценка здоровья окружающей среды	96

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

ОБ АССОЦІАТИВНОСТИ ПОЛІАДИЧЕСКИХ ГРУППОЇДОВ

A. M. Гальмак

доктор физико-математических наук, доцент,

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

В статье продолжается изучение полиадической операции $[]_{l, \sigma, k}$. В частности, установлено, что наличие левой единицы в полугруппе, на k -ой декартовой степени которой с помощью подстановки σ определяется l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, гарантирует тождественность для этой операции понятий ассоциативности и полуассоциативности.

Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, полугруппа, ассоциативность, единица.

1. Введение

При переходе от бинарных операций к полиадическим операциям возможны различные обобщения ассоциативности. В данной работе рассматриваются два вида обобщенной ассоциативности, а именно ассоциативность и полуассоциативность, применительно к l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [1] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ на k -й декартовой степени A^k полугруппы A . Частными случаями этой l -арной операции являются две полиадические операции Э. Поста из [2]. Одну из них он определил на декартовой степени симметрической группы. Вторую операцию Э. Пост определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. В определении своих операций Э. Пост использовал в качестве подстановки σ цикл $(12 \dots l - 1)$.

В [1] доказано, что если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной. В частности, ассоциативными являются обе l -арные операции Э. Поста, так как $(l - 1)$ -я степень цикла $(12 \dots l - 1)$ является тождественной подстановкой.

В данной статье продолжается изучение полиадической операции $[]_{l, \sigma, k}$. В частности, установлено, что если полугруппа A обладает левой единицей, то из полуассоциативности l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ следует ее ассоциативность, то есть наличие в полугруппе A левой единицы гарантирует тождественность понятий ассоциативности и полуассоциативности для операции $[]_{l, \sigma, k}$.

2. Предварительные сведения

Напомним определения некоторых понятий, используемых в работе.

l -Арную операцию $[]$ l -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ и сам этот l -арный группоид называют *ассоциативными*, если в нем выполняется каждое из следующих $l - 1$ тождеств

$$\begin{aligned}
 [[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}]] &= [x_1[x_2 \dots x_{l+1}]x_{l+2} \dots x_{2l-1}], \\
 [[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}]] &= [x_1x_2[x_3 \dots x_{l+2}]x_{l+3} \dots x_{2l-1}], \\
 \dots &\dots \\
 [[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}]] &= [x_1 \dots x_{l-2}[x_{l-1} \dots x_{2l-2}]x_{2l-1}], \\
 [[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}]] &= [x_1 \dots x_{l-1}[x_l \dots x_{2l-1}]].
 \end{aligned}$$

Более кратко, l -арную операцию $[]$ l -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют *ассоциативной*, если в нем для любого $i = 2, \dots, l$ выполняется тождество

$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}]] = [x_1 \dots x_{l-1}[x_i \dots x_{l-1}]x_{l+i} \dots x_{2l-1}].$$

Если указанное тождество выполняется для $i = l$, то l -арную операцию $[]$ и l -арный группоид $\langle A, [] \rangle$ называют *полуассоциативными*. Таким образом, l -арную операцию $[]$ l -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют полуассоциативной, если в нем выполняется тождество

$$[[x_1 \dots x_l]x_{l+1} \dots x_{2l-1}]] = [x_1 \dots x_{l-1}[x_l \dots x_{2l-1}]].$$

Ясно, что ассоциативная l -арная операция является и полуассоциативной.

Элемент e l -арного группоида $\langle A, [] \rangle$ называют его *единицей* (*левой единицей*), если для любого $x \in A$ верно

$$\begin{aligned}
 \underbrace{[x e \dots e]}_{l-1} &= [\underbrace{e x e \dots e}_{l-2}] = \dots = [\underbrace{e \dots e x e}_{l-2}] = [\underbrace{e \dots e x}_{l-1}] = x \\
 (\underbrace{[e \dots e x]}_{l-1}) &= x.
 \end{aligned}$$

Первыми примерами l -арных группоидов с единицами были l -арные группы В. Дёрнте [3].

Определение 2.1 [1, 4] Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k . Определим на A^k l -арную операцию $[]_{l, \sigma, k}$ следующим образом

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, \dots, y_k),$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_i &= (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l, \\
 y_j &= x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, \dots, k.
 \end{aligned}$$

Теорема 2.1 [1, 4]. *Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ ассоциативна.*

3. Основной результат

Теорема 3.1. *Если полугруппа A обладает левой единицей, то l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда она полуассоциативна.*

Доказательство. *Необходимость.* Следует из определений ассоциативности и полуассоциативности.

Достаточность. Обозначим через e – левую единицу полугруппы A и положим

$$\mathbf{e} = (\underbrace{e, \dots, e}_k), \mathbf{r} = [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_l]_{l, \sigma, k} = (r_1, \dots, r_k).$$

Для любых

$\mathbf{x}_{l+2} = (x_{(l+2)1}, \dots, x_{(l+2)k}) \in A^k, \dots, \mathbf{x}_{2l-1} = (x_{(2l-1)1}, \dots, x_{(2l-1)k}) \in A^k$
введем обозначения

$$\mathbf{u}_i = [[\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_l]_{l, \sigma, k} \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{i-1} \mathbf{x}_{l+i} \dots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}, i = 2, \dots, l-1,$$

$$\mathbf{v}_i = [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1} [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_i \mathbf{x}_{l+i} \dots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}]_{l, \sigma, k}, i = 2, \dots, l-1,$$

$$\mathbf{s}_i = [\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_i \mathbf{X}_{l+i} \dots \mathbf{X}_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = (s_{i1}, \dots, s_{ik}), i = 2, \dots, l-1.$$

Так как l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ – полуассоциативна, то $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$, откуда, полагая

$\mathbf{u}_i = (u_{i1}, \dots, u_{ik}), \mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{ik})$,
получим

$$u_{ij} = v_{ij}, j = 1, \dots, k. \quad (3.1)$$

Так как

$$u_{ij} = r_j \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{i-1} x_{(l+i)\sigma^j(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)},$$

где e – левая единица полугруппы A ,

$$r_j = \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_l = e,$$

то

$$u_{ij} = x_{(l+i)\sigma^j(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}. \quad (3.2)$$

Так как

$$v_{ij} = \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-1} s_{i\sigma^{l-1}(j)} = s_{i\sigma^{l-1}(j)},$$

где

$$\begin{aligned} s_{i\sigma^{l-1}(j)} &= \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_i x_{(l+i)\sigma^i(\sigma^{l-1}(j))} \dots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(\sigma^{l-1}(j))} = \\ &= x_{(l+i)\sigma^{l+i-1}(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{2l-2}(j)}, \end{aligned}$$

то

$$v_{ij} = x_{(l+i)\sigma^{l+i-1}(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{2l-2}(j)}. \quad (3.3)$$

Из (3.1) – (3.3) следует

$$x_{(l+i)\sigma^j(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = x_{(l+i)\sigma^{l+i-1}(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{2l-2}(j)}. \quad (3.4)$$

Положим

$$\mathbf{y}_i = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{i-1} [\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{l+i-1}]_{l, \sigma, k} \mathbf{x}_{l+i} \dots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = (y_{i1}, \dots, y_{ik}), i = 2, \dots, l,$$

$$\mathbf{z}_i = [\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{l+i-1}]_{l, \sigma, k} = (z_{il}, \dots, z_{ik}), i = 2, \dots, l.$$

В частности,

$$\mathbf{y}_l = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1} [\mathbf{x}_l \dots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}]_{l, \sigma, k} = (y_{l1}, \dots, y_{lk}),$$

$$\mathbf{z}_l = [\mathbf{x}_l \dots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = (z_{l1}, \dots, z_{lk}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_{lj} &= x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} z_{i\sigma^{i-1}(j)} x_{(l+i)\sigma^i(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = \\ &= x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} x_{i\sigma^{i-1}(j)} x_{(i+1)\sigma(\sigma^{i-1}(j))} \dots \\ &\dots x_{(l+i-1)\sigma^{l-1}(\sigma^{i-1}(j))} x_{(l+i)\sigma^i(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = \\ &= x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} x_{i\sigma^{i-1}(j)} x_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots \\ &\dots x_{(l+i-1)\sigma^{l+i-2}(j)} x_{(l+i)\sigma^i(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} y_{lj} &= x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} x_{i\sigma^{i-1}(j)} x_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots \\ &\dots x_{(l+i-1)\sigma^{l+i-2}(j)} x_{(l+i)\sigma^i(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В частности, полагая в (3.5) $i = l$, получим

$$y_{lj} = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)} x_{(l+1)\sigma^l(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{2l-2}(j)},$$

так как при $i = l$ последовательность

$$x_{(l+i)\sigma^i(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}$$

из (3.5) является пустой. Последнее равенство для любого $i = 2, \dots, l-1$ можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} y_{lj} &= x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)} x_{(l+1)\sigma^l(j)} \dots \\ &\dots x_{(l+i-1)\sigma^{l+i-2}(j)} x_{(l+i)\sigma^{l+i-1}(j)} \dots x_{(2l-1)\sigma^{2l-2}(j)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.4) – (3.6) следует

$$y_{ij} = y_{lp}, i = 2, \dots, l-1, j = 1, 2, \dots, k.$$

Следовательно, $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_p$ то есть

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1} [\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_{l+i-1}]_{l, \sigma, k} \mathbf{x}_{l+i} \dots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1} [\mathbf{x}_l \dots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}]_{l, \sigma, k}$$

для любого $i = 2, \dots, l-1$. Кроме того, по условию теоремы l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ – полуассоциативна, то есть

$$[[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} \mathbf{x}_{l+1} \dots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1} [\mathbf{x}_l \dots \mathbf{x}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}]_{l, \sigma, k}.$$

Таким образом, в l -арном группоиде $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ выполняются все тождества ассоциативности, то есть l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ – ассоциативна. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Легко проверяется, что если e – единица (левая единица) полугруппы A , то

$$\mathbf{e} = (\underbrace{e, \dots, e}_k)$$

— единица (левая единица) l -арного группоида $\langle A, [\cdot]_{l, \sigma, k} \rangle$.

Приведем еще одно доказательство теоремы 3.1, воспользовавшись следующей леммой из [4]. В приведённой здесь формулировке, в отличие от формулировки, приведенной в [4], не используется преобразование f_σ .

Лемма 3.1 [4]. *Пусть A — множество, состоящее более чем из одного элемента, $k \geq 2$, σ и τ — подстановки из S_k . Если*

$$(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = (x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

для любого $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in A^k$, то $\sigma = \tau$.

Второе доказательство достаточности. Повторив все вычисления в доказательстве достаточности теоремы 3.1 для случая $i = l - 1$, получим

$$x_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)} = x_{(2l-1)\sigma^{2l-2}(j)}$$

для любого $j = 1, 2, \dots, k$. Тогда по лемме 3.1

$$\sigma^{l-1} = \sigma^{2l-1},$$

откуда $\sigma^l = \sigma$. Применив теперь теорему 2.1, получим ассоциативность l -арной операции $[\cdot]_{l, \sigma, k}$. Достаточность доказана.

В связи с теоремой 3.1 возникает естественный вопрос: *останется ли утверждение этой теоремы верным, если в ее формулировке полугруппу с левой единицей заменить произвольной полугруппой?*

Для отрицательного ответа на сформулированный вопрос достаточно указать полугруппу A без левой единицы, для которой l -арная операция $[\cdot]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной, но не является ассоциативной. Это будет означать, что в общем случае для l -арных группоидов вида $\langle A^k, [\cdot]_{l, \sigma, k} \rangle$ понятия ассоциативности и полуассоциативности нетождественны: полуассоциативность шире ассоциативности.

Теоремы 2.1 и 3.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть A — полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента, σ — подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:*

- 1) l -арная операция $[\cdot]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[\cdot]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} — тождественная.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2) Следует из определений ассоциативности и полуассоциативности.

2) \Rightarrow 3) Во втором доказательстве достаточности установлено, что из полуассоциативности l -арной операции $[\cdot]_{l, \sigma, k}$ следует равенство $\sigma^l = \sigma$, что равносильно тождественности подстановки σ^{l-1} .

3) \Rightarrow 1) Применяется теорема 2.1. Теорема доказана.

Проиллюстрируем теорему 3.2 следующим примером, показывающим, что если подстановка σ^{l-1} не является тождественной, то l -арная операция $[\cdot]_{l, \sigma, k}$ не

является ассоциативной, даже если в полугруппе A , содержащей более одного элемента; все элементы являются левыми единицами.

Пример 3.1. Положим в определении 2.1: A – полугруппа с операцией $ab = b$ для любых $a, b \in A$, содержащая более одного элемента;

$$l = 4, k = 2, \sigma = (12) \in S_2.$$

Ясно, что в полугруппе A все элементы являются левыми единицами.

Так как $(12)^4$ – тождественная подстановка, то $(12)^4 \neq (12)$, то есть условие $\sigma^l = \sigma$ не выполняется.

Определим на A^2 4-арную операцию

$$\begin{aligned} [\mathbf{xyzu}]_{3, (12), 2} &= [(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)]_{3, (12), 2} = \\ &= (x_1 y_{\sigma(1)} z_{\sigma^2(1)} u_{\sigma^3(1)}, x_2 y_{\sigma(2)} z_{\sigma^2(2)} u_{\sigma^3(2)}) = (x_1 y_2 z_1 u_2, x_2 y_1 z_2 u_1) = (u_2, u_1). \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ и \mathbf{u} – те же, что и выше,

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2), \mathbf{p} = (p_1, p_2).$$

Согласно определению 2.1, а также, учитывая тот факт, что в полугруппе A все элементы являются левыми единицами, получим

$$\begin{aligned} [[\mathbf{xyzu}]\mathbf{vwp}]_{3, (12), 2} &= [(u_2, u_1)\mathbf{vwp}]_{3, (12), 2} = (u_2 v_2 w_1 p_2, u_1 v_1 w_2 p_1) = (p_2, p_1), \\ [\mathbf{xyz}[\mathbf{uvw}]\mathbf{p}]_{3, (12), 2} &= [\mathbf{xyz}(u_1 v_2 w_1 p_2, u_2 v_1 w_2 p_1)]_{3, (12), 2} = \\ &= [\mathbf{xyz}(p_2, p_1)]_{3, (12), 2} = (x_1 y_2 z_1 p_1, x_2 y_1 z_2 p_2) = (p_1, p_2). \end{aligned}$$

Так как A содержит более одного элемента, то p_1 и p_2 можно выбрать так, что $p_1 \neq p_2$. В этом случае

$[[\mathbf{xyzu}]\mathbf{vwp}]_{3, (12), 2} \neq [\mathbf{xyz}[\mathbf{uvw}]\mathbf{p}]_{3, (12), 2}$.
Из этого неравенства вытекает, что 4-арная операция $[\]_{3, (12), 2}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

4. Следствия

Применим полученные в предыдущем разделе результаты к некоторым конкретным подстановкам.

Теорема 4.1. Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента, σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда $l \in \{td + 1 \mid t = 1, 2, \dots, \}\$; (4.1)

2) l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{td + r \mid t = 0, 1, 2, \dots; r = 2, \dots, d\}. \quad (4.2)$$

Доказательство. Множество всех натуральных чисел $l \geq 2$ может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся подмножеств, присутствующих в (4.1) и (4.2).

Так как подстановка σ имеет порядок d , то для всех l из (4.1) верно равенство $\sigma^l = \sigma$, а для всех l из (4.2) верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$.

1) Пусть l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (4.1). Тогда l принадлежит

множеству из (4.2), и верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 3.2 l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ – неассоциативна, что противоречит ее ассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (4.1), то верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 2.1 l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной.

2) Пусть l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (4.2). Тогда l принадлежит множеству из (4.1) и верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 2.1 l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ – ассоциативна, что противоречит ее неассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (4.2), то верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 3.2 l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной. Теорема доказана.

В качестве подстановки σ в теореме 4.1 можно взять любую подстановку из S_k , представимую в виде произведения независимых циклов, длина каждого из которых равна d , в частности, любой цикл длины d из S_k ($d \leq k$). Так как любой цикл длины k из S_k имеет порядок k , то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.1. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента, σ – цикл длины k из S_k . Тогда:*

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{tk + 1 \mid t = 1, 2, \dots, \}; \quad (4.3)$$

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{tk + r \mid t = 0, 1, 2, \dots; r = 2, \dots, k\}. \quad (4.4)$$

Полагая в следствии 4.1 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 4.2. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента. Тогда:*

1) l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.3);

2) l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (4.4).

Если в (4.1) и (4.2) положить $d = 2$, то множество всех l в (4.1) совпадает с множеством всех нечетных чисел без единицы, а множество всех l в (4.2) совпадает с множеством всех четных чисел. Если при этом учесть, что порядок любой транспозиции равен двум, то из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.3. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента, σ – транспозиция из S_k . Тогда:*

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы;

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное.

Полагая в следствии 4.3 $\sigma = (12)$, получим

Следствие 4.4. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента. Тогда:*

1) *l-арная операция* $[]_{l,(12),k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы;

2) *l-арная операция* $[]_{l,(12),k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное.

Замечание 4.1. Ясно, что в теоремах 3.1, 3.2 и 4.1, а также во всех следствиях раздела 4 левую единицу можно заменить единицей. В этих же теоремах и следствиях полугруппу с левой единицей можно заменить группой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
2. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
4. Гальмак, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Поступила в редакцию 18.01.2017 г.

Контакты: +375 222 47-79-35 (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A.M. ON ASSOCIATIVITY OF POLYADIC GROUPOIDS.

The article focuses on further investigations of the polyadic operation $[]_{l,\sigma,k}$. In particular it has been found out that the availability of the left identity element in semigroup A guarantees the equality of associativity and semi-associativity for this operation.

Keywords: polyadic operation, groupoid, semigroup, associativity, identity element.

УДК 511.42

О КОЛИЧЕСТВЕ ТОЧЕК С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ ВБЛИЗИ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ

О. Н. Кемеш

старший преподаватель,

Белорусский аграрный технический университет, г. Минск, РБ

И. М. Морозова

кандидат физико-математических наук, доцент,

Белорусский аграрный технический университет, г. Минск, РБ

Н. В. Сакович

кандидат физико-математических наук, доцент,

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова,
г. Могилев, РБ

Задачи, связанные с асимптотическим ростом количества точек в некоторой области $\Gamma(Q) \subset \mathbb{R}^n$, мера Лебега которой $\mu\Gamma(Q) \rightarrow \infty$ при $Q \rightarrow \infty$, имеет давнюю историю и важность для понимания арифметической структуры пространства \mathbb{R}^n и встречаются в приложениях, например, при вычислении кратных интегралов. К таким задачам относятся: проблема Гаусса о целых точках в круге с центром в начале координат и радиусом r ; задача Дирихле о количестве делителей натурального числа $n \leq Q$ при $Q \rightarrow \infty$; задача о количестве целых чисел внутри эллипсоидов, где $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – положительно определенная квадратичная форма от k переменных [1]. Во всех перечисленных задачах главный член асимптотично равен площади круга, области под гиперболой $xy \leq Q$, объему эллипсоида. Задача состоит в оценке остатка в асимптотической формуле, о наилучших значениях оценки остатка. Существуют гипотезы, которые не доказаны во всех трех задачах. Чем лучше оценка остатка, тем в меньшей окрестности границы области можно получить асимптотическую формулу для количества целых чисел [2]. Наиболее интересным оказался случай, когда точки лежат в узкой полосе около кривой или поверхности. Задача о количестве целых точек в области обобщена на точки с рациональными координатами.

Ключевые слова: корень многочлена, алгебраические числа, система диофантовых неравенств, порядок приближения, покрытие множества.

Пусть задана точка $\bar{b}(q) = \left(\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_k}{q}, \frac{p_{k+1}}{q} \right)$ и поверхность $z = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in D \subset \mathbb{R}^k$. Для достаточно большого Q и $\lambda > 0$ рассмотрим систему неравенств:

© Кемеш О. Н., 2017

© Морозова И. М., 2017

© Сакович Н. В., 2017

$$\left| f\left(\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_k}{q}\right) - \frac{p_{k+1}}{q} \right| < Q^{-\lambda}; \quad 1 < q \leq Q. \quad (1)$$

Разрешимо ли неравенство (1), а если разрешимо, то какое асимптотическое количество решений оно имеет при $Q \rightarrow \infty$?

Наиболее исследован случай $k = 1$ для дважды дифференцируемой функции $f(x_1)$. Будем считать в этом случае, что в неравенстве (1) переменная x_1 принадлежит некоторому интервалу на действительной прямой $x_1 \in J \subset \mathbb{R}$, величины c_1, c_2, \dots – положительные, зависят от степени многочленов, но не от высот многочленов и величины Q .

Обозначим A – количество элементов конечного множества $A \subset \mathbb{R}$. М. Хаксли в [3] доказал, что при $c_1 \leq |f''(x_1)| \leq c_2$, $\varepsilon_1 > 0$ верно асимптотическое неравенство

$$\# A(Q, \lambda, J) < c_3(\varepsilon_1) Q^{3-\lambda+\varepsilon_1}, \quad 0 \leq \lambda \leq 2, \quad (2)$$

где $A(Q, \lambda, J)$ – количество решений неравенства (1). Оценку вида (2) без ε_1 в правой части получил С. Велани [4].

В. Бересневич, Д. Дикинсон, С. Велани получили оценку снизу

$$\# A(Q, \lambda, J) > c_4 Q^{3-\lambda}, \quad 0 \leq \lambda \leq 2. \quad (3)$$

Оценка (3) была получена с использованием методов метрической теории диофантовых приближений. Менее точная оценка была получена в [6], [7], [8].

Рассмотрим обобщение неравенства (1) на случай действительных алгебраических чисел для $k = 2$ и достаточно большого натурального Q .

Рассмотрим множество полиномов

$$P_n(Q) = \{P(x) \in Z[x], \deg P(x) = n, H(P) \leq Q\}, \quad (4)$$

где $\deg P(x) = n \geq 2$ – степень полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ – высота $P(x)$.

Пусть α_1, α_2 – действительные сопряженные алгебраические числа, корни некоторого полинома $P(x) \in P_n(Q)$.

Для непрерывной на интервале J функции $\varphi(x)$ рассмотрим неравенство

$$|\varphi(\alpha_1) - \varphi(\alpha_2)| < Q^{-\gamma}, \quad \gamma \geq 0, \quad (5)$$

и обозначим через $B(Q, \gamma, J)$ количество решений неравенства (5) в $P(x) \in P_n(Q)$.

Для величины $B(Q, \gamma, J)$ в [2] при $0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$ и $n = 1$ доказано неравенство

$$\# B(Q, \gamma, J) > c_5 Q^{n+1-\gamma}. \quad (6)$$

Оценка (6) получена при $0 \leq \gamma \leq \frac{3}{4}$ и этот результат находится в печати.

Теорема. При $Q \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое неравенство

$$\# B(Q, \gamma, J) < c_6 Q^{n+1-\gamma}, \quad 0 \leq \gamma < 1. \quad (7)$$

Доказательство. Дадим геометрическую интерпретацию неравенства (5). На интервале J рассмотрим непрерывную функцию $y = \varphi(x)$ и полосу

$$K(\varphi, Q) = \{x \in \Pi; |\varphi(x) - y| < Q^{-\gamma}\}.$$

Множество $B(Q, \gamma, J)$ представляет собой множество точек $\bar{b} = (\alpha_1, \alpha_2)$ с действительными алгебраическими сопряженными числами α_1 и α_2 . Эти числа корни некоторого многочлена $P(x) \in P_n(Q)$, а точка $\bar{b} \in K(\varphi, Q)$.

Покроем полосу $K(\varphi, Q)$ квадратами $S_j(Q^{-\gamma})$.

$$K(\varphi, a) = \bigcup_{j=1}^L S_j(Q^{-\gamma}). \quad (8)$$

В (8) сторона квадрата $S_j(Q^{-\gamma})$ равна $c_7 Q^{-\gamma}$, а их количество $L = c_8 Q^{2\gamma}$. Представление (8) в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ возможно при достаточно большой величине c_7 .

Предположим, что теорема не верна. Тогда при любом c_6 найдется полоса $K(\varphi, Q)$, в которой справедливо неравенство

$$\#B(Q, \gamma, J) > c_6 Q^{n+1-\gamma}. \quad (9)$$

Из неравенства (9) и (8) следует, что существует хотя бы один квадрат $S_j(Q^{-\gamma})$ со стороной $c_7 Q^{-\gamma}$, в котором не менее

$$c_5 c_8^{-1} Q^{n+1-2\gamma} = c_9 Q^{n+1-2\gamma} \quad (10)$$

точек \bar{b} .

Пусть

$$P_j(x) \in P_n(Q), \quad j = 0, 1, \dots, l, \quad l > \frac{1}{2} c_7 Q^{n+1-2\gamma} \quad (11)$$

многочлены, два корня которых лежат в $K(\varphi, Q)$. Это означает, что в $P_j(\alpha_i) = 0$, $i = 1, 2$. Разложим многочлен $P_j(x)$ в окрестности корня x_i по формуле Тейлора при $x \in S_j(Q^{-\gamma})$:

$$P(x_i) = P(\alpha_i) + P'(\alpha_i)(x_i - \alpha_i) + \dots + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} P^{(k)}(\alpha_i)(x_i - \alpha_i)^k. \quad (12)$$

Так как числа α_1, α_2 – корни многочлена $P(x)$, то $P(\alpha_i) = 0$. Будем считать, что $J \subset [0, 1]$ и поэтому в (12):

$$\begin{aligned} |P'(\alpha_i)(x_i - \alpha_i)| &< n^2 c_7 Q^{1-\gamma} \\ |P^{(k)}(\alpha_i)(x_i - \alpha_i)^k| &< n^{k+1} c_7^k Q^{1-\gamma}, \quad 0 \leq k \leq n. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) при достаточно большом Q получаем

$$|P(x_i)| < c_{10} Q^{1-\gamma}, \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Зафиксируем вектор $\bar{a} = (a_n, \dots, a_0)$, состоящий из коэффициентов многочленов $P(x)$. Количество таких векторов при достаточно большом Q не превосходит величины $(2Q + 1)^{n-1} < 2^n Q^{n-1}$.

Рассмотрим многочлены:

$$R_j(x) = P_j(x) - P_0(x), \quad 1 \leq j < l_1, \quad l_1 > \frac{1}{2} c_9 Q^{n+1-2\gamma}.$$

Поскольку при достаточно большой величине c_9 количество таких многочленов $l_1 > 2^n Q^{n-1} \cdot 2^{-n-1} c_9 Q^{2-2\gamma}$, то воспользуемся принципом ящиков Дирихле. Получим не менее $2^{-n-1} c_9 Q^{2-2\gamma}$ многочленов первой степени $R_t(x) = a_t x + b_t$, для которых:

$$|R_t(x_i)| \leq 2c_{10} Q^{1-\gamma}, \quad i = 1, 2, \quad t > 2^{-n-1} c_9 Q^{2-2\gamma}. \quad (15)$$

Из (15) имеем систему неравенств

$$\begin{cases} |a_t x_1 + b_t| < 2c_{10} Q^{1-\gamma} \\ |a_t x_2 + b_t| < 2c_{10} Q^{1-\gamma} \end{cases}, \quad t > 2^{-n-1} c_9 Q^{2-2\gamma}. \quad (16)$$

Преобразуем систему (16) в систему уравнений

$$\begin{cases} |a_t x_1 + b_t| = 2c_{10} \Theta_1 Q^{1-\gamma}, \\ |a_t x_2 + b_t| = 2c_{10} \Theta_2 Q^{1-\gamma} \end{cases}, \quad (17)$$

где $|\Theta_i| \leq 1$, при всех $(\Theta_1, \Theta_2) \in [0,1]^2$.

В силу условий $|x_2 - x_1| > \delta$ определитель системы (17) $\Delta \neq 0$. Разрешим систему уравнений (17) относительно a_t и b_t

$$|a_t| = \frac{\begin{vmatrix} 2c_{10} \Theta_1 Q^{1-\gamma} & 1 \\ 2c_{10} \Theta_2 Q^{1-\gamma} & 1 \end{vmatrix}}{|\Delta|} < \delta^{-1} c_{11} Q^{1-\gamma}, \quad (18)$$

$$|b_t| = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 2c_{10} \Theta_1 Q^{1-\gamma} \\ x_2 & 2c_{10} \Theta_2 Q^{1-\gamma} \end{vmatrix}}{|\Delta|} < \delta^{-1} c_{12} Q^{1-\gamma}.$$

Количество многочленов первой степени с условиями (18) не превосходит $c_{13} \delta^{-2} Q^{2-2\gamma}$.

Эта оценка не превосходит $2^{-n-1} c_9 Q^{2-2\gamma}$ при достаточно большой величине c_9 . Получили противоречие, которое показывает, что при достаточно большой величине c_6 при $Q \rightarrow \infty$, $0 \leq \gamma < 1$ справедливо неравенство (7) и тем самым теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Bernik, V. I., Kleinbock D., Margulis G. A. // Khintchine-type theorems on manifolds the convergence case for standard and multiplicative versions, Internet. Math. Res. Notices. – 2001. – P. 453–486.

2. *Kaliada D., Götze F., Kukso O.* // The asymptotic number of integral cubic polynomials with bounded heights and discriminates. Lithuanian Mathematical Journal. – 2014. – Vol. 54. – P. 150–165.
3. *Huxley, M. N.* // Area, lattice points and exponential sums, London mathematical Society monographs, New York, 1996.
4. *Beresnevich V., Dickinson D., Velani S.* // Diophantine approximation on planar curves and distribution of rational points // Ann. Of Math. – 2007. – Vol. 166, no 2. – P. 367–426.
5. *Beresnevich V., Bernik V., Götze F.* // The distribution of close unjagate algebraic numbers, Compos. Math. – Vol. 146, no. 5. – 2010. – P. 1165–1179.
6. *Берник, В. И.* Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Известия РАН. Серия математическая. 79:1. – 2015. – P. 21–42.
7. *Bernik V., Götze F., Kukso O.* // On algebraic points in the plane near smooth curves. Lithuanian Math. Journal. – Vol. 54. – 2014. – P. 231–251.
8. *Гётце, Ф.* Алгебраические числа в коротких интервалах / Ф. Гётце, А. Г. Гусакова // Доклады НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 4. – С. 11–16.

Поступила в редакцию 11.07.2016 г.

Контакты: +375 29 124 28 58 (Кемеш Оксана Николаевна)

Kemesh O.N., Morozova I.I., Sakovich N.V. ON THE AMOUNT OF POINTS WITH ACTUAL ALGEBRAIC COORDINATES CLOSE TO A SMOOTH CURVE.

The tasks connected with the asymptotic increase in the amount of points in the area $\Gamma(Q) \subset \mathbb{R}^n$, the Lebesgue measure of which is $\mu\Gamma(Q) \rightarrow \infty$ with $Q \rightarrow \infty$, have a long history and are important to understand the arithmetic structure of the space \mathbb{R}^n . These tasks are found in appendices, for example, to measure multiple integrals. Among such tasks one comes across the Gaussian problem of integers in a circle with the centre in the origin of coordinates and the radius r, the Dirichlet problem on the amount of factors of the natural number $n \leq Q$ with $Q \rightarrow \infty$ and the problem of the amount of whole numbers inside the ellipsoids $K : |f(x_1, x_2, \dots, x_k)| < Q$, where $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ is a positive quadratic form of k variable. For all the mentioned above problems the dominant term is asymptotically equal to the circle square, the space below the hyperbole $xy \leq Q$, the ellipsoid volume. The aim is to assess the remainder in the asymptotic formula.

Keywords: polynomial root, algebraic number, the system of Diophantine inequalities, order of approximation, set cover.

УДК 519.852.3, 330.131.52, 631.153.46

О ПРИЛОЖЕНИИ АНАЛИЗА ОБОЛОЧКИ ДАННЫХ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ

А. А. Ефремов

ассистент кафедры математических методов в экономике БГЭУ

Для изучения CCR-модели предложен переход к эквивалентной форме записи задачи линейного программирования. При оценке относительной эффективности функционирования объектов заданного множества существенно используется построение выпуклой оболочки системы данных. Возможность практического применения предложенного в рамках данной статьи подхода проиллюстрирована на примере решения конкретной экономической задачи.

Ключевые слова: относительная эффективность, CCR-модель, выпуклая оболочка, парето-оптимальность.

Введение

Линейное программирование как раздел математики переживало пик популярности в середине XX в., когда на его основе был разработан симплексный метод и различные его модификации. Этот подход позволял получать решение простейших оптимизационных задач. Однако со временем возникла необходимость в использовании более сложных с точки зрения математики форм зависимости между переменными в прикладных задачах, и линейное программирование отошло на второй план. Вместе с тем, в настоящее время оно остается востребованным для решения определенного класса оптимизационных задач и успешно применяется на практике. Одним из примеров такого приложения является задача о нахождении сравнительной эффективности данного объекта в рамках заданного конечного множества объектов.

С точки зрения концепции системного подхода всякая открытая система функционирует следующим образом: имеется множество входных потоков (обычно они представлены различными видами ресурсов), которые в соответствии с определенным набором правил (алгоритмом) преобразуются в выходные потоки. Для оценки эффективности функционирования системы рассматривается соотношение между совокупностью выходных и входных потоков.

Обозначим через $x = (x_1, \dots, x_n)$ вектор входа (ресурсы, используемые объектом P для достижения своих целей), а через $y = (y_1, \dots, y_m)$ – вектор выхода (результатирующие показатели деятельности объекта P). Пусть θ_0 есть мера относительной эффективности рассматриваемого объекта P_0 . В отличие от абсолютной эффективности относительная определяется на основе сравнения дан-

ного объекта с другими аналогичными из заранее заданного конечного множества однородных объектов. Под однородными объектами здесь понимаются объекты, которые имеют схожие цели функционирования и характеризуются единообразием используемых ресурсов и выходных параметров. Один из способов сопоставления эффективности функционирования аналогичных объектов был предложен в 1978 г. в рамках модели Чарнса-Купера-Родса (Charnes-Cooper-Rhodes) [1], или CCR-модели, хотя эти ученые отталкивались от статьи М. Фаррелла, опубликованной еще в 1957 г. [2].

Основная часть

Смысл математической постановки задачи состоит в том, что эффективность рассматривается с традиционной для современной науки точки зрения как отношение полученного эффекта к затратам на его достижение. Оптимизационная задача для множества, состоящего из N объектов, в соответствии с CCR-моделью будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \theta_0 = \frac{u_1 y_{10} + \dots + u_m y_{m0}}{v_1 x_{10} + \dots + v_n x_{n0}} \rightarrow \max, \\ \frac{u_1 y_{1k} + \dots + u_m y_{mk}}{v_1 x_{1k} + \dots + v_n x_{nk}} \leq 1, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ v_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $u = (u_1, \dots, u_m)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ – векторы весовых коэффициентов, которые выступают в роли переменных задачи.

Для решения задачи оценки относительной эффективности функционирования объектов во второй половине XX в. была предложена методология анализа оболочки данных (Data Envelopment Analysis). Остановимся более подробно на этом подходе. Основная его идея в некотором смысле перекликается с симплекс-методом и заключается в построении выпуклой оболочки некоторого массива исходных данных. Необходимость привлечения анализа оболочки данных связана с тем, что при формулировке задачи в виде (1) максимальное значение относительной эффективности равно 1, и это значение соответствует объекту, который наиболее рациональным образом использует имеющиеся в его распоряжении ресурсы. Все такие объекты расположены в n -мерном пространстве на границе выпуклой оболочки.

Выпуклой оболочкой множества N называется наименьшее выпуклое множество, содержащее N . Напомним, что выпуклым называется множество, в котором все точки отрезка, ограниченного любыми двумя точками данного множества, также принадлежат данному множеству.

Создаваемая выпуклая оболочка наблюдаемых значений должна обладать следующим свойством:

Если $z' \in \Omega$ и $z'' \in \Omega$, то $\tilde{z} = \lambda z' + (1 - \lambda)z'' \in \Omega$, где $\lambda \in [0;1]$.

На основании этого свойства можно получить следующее утверждение:

если $z_1, \dots, z_s \in \Omega$, то $z = a_1 z_1 + \dots + a_n z_s \in \Omega$, причем $\sum_{j=1}^s a_j = 1$, $a_j \geq 0$, $j = \overline{1, s}$.

Будем говорить, что $x' > x''$, если $x'_i \geq x''_i$, $i = \overline{1, n}$ и при этом существует хотя бы один индекс k такой, что $x'_k > x''_k$.

Введем отношение частичного порядка $z' \succ z''$, которое означает выполнение одного из следующих условий:

1) $x' < x''$ и $y' = y''$ (тот же результат достигается при использовании меньшего объема ресурсов);

2) $x' = x''$ и $y' > y''$ (при использовании того же самого объема ресурсов достигается больший результат).

Пусть критерий оптимальности, выбранный исходя из практического содержания задачи, представляет собой функцию $\phi(z)$. Тогда, если $z^* \in \Omega^*$ – оптимальный план, то это означает, что не существует $z_0 \in \Omega$ такого, что $\phi(z^*) < \phi(z_0)$, то есть, что имеет место отношение $z_0 \prec z^*$.

Если состояние некоторой системы таково, что значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других, то такое состояние называется оптимальным по Парето (при этом $\theta_0 = 1$). Если же $\theta_0 < 1$, то состояние системы (объекта) является неоптимальным по Парето. Последнее интерпретируется как наличие резервов повышения эффективности [3]. То есть, если объект оказался внутри выпуклой оболочки, то для определения его относительной эффективности нужно определить направления такого его перемещения в n -мерном пространстве, при котором он гарантированно и за минимальное количество шагов окажется на границе выпуклой оболочки. Именно направление перемещения на каждом шаге (т. е. по каждому ресурсу и по каждому результативному показателю) определяют, в конечном счете, переменные u и v задачи (1).

Для получения численного решения задачу (1) удобно из дробно-линейной формы записи преобразовать в стандартную линейную:

$$\begin{cases} \theta_0 = \mu_1 y_{10} + \dots + \mu_m y_{m0} \rightarrow \max, \\ v_1 x_{10} + \dots + v_n x_{n0} = 1, \\ \mu_1 y_{1k} + \dots + \mu_m y_{mk} \leq v_1 x_{10} + \dots + v_j x_{jk} \quad (k = 1, \dots, N-1), \\ \mu_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ v_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2)$$

Докажем, что формы записи задачи (1) и (2) эквивалентны.

Так как значения весовых коэффициентов v_j не могут одновременно равняться нулю, то при условии положительности всех элементов матрицы $X = \left\| x_{jk} \right\|$ знаменатель ограничений задачи (1) положителен для любого $j = \overline{1, n}$. Поэтому можно домножить обе части каждого из этих ограничений на знаменатель. Заметив, что значение целевой функции дробно-линейной за-

дачи (1) не изменится при умножении числителя и знаменателя на одно и то же ненулевое число, введем новое ограничение в виде равенства $v_1x_{10} + \dots + v_nx_{n0} = 1$.

Пусть оптимальное решение задачи (2) имеет вид $(v = v^*, \mu = \mu^*)$, при этом значение целевой функции равно θ^* . Тогда решение $(v = v^*, \mu = \mu^*)$ является оптимальным и для задачи (1), поскольку описанные выше преобразования являются обратимыми. Значит, у задач (1) и (2) одинаковое оптимальное значение целевых функций θ^* . Более того, легко показать, что единицы, в которых изменяются значения обеих целевых функций, совпадают [4].

Для последующего решения задачи (2) удобнее использовать сокращенную запись в векторной форме:

$$\begin{cases} \mu y_0 \rightarrow \max, \\ vx_0 = 1, \\ \mu Y \leq vX, \\ \mu \geq 0, v \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $Y = \|y_{ik}\|, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, N - 1}$.

В таком виде задачу можно легко решить, например, с помощью инструмента “Поиск решения” Ms Excel, но гораздо эффективнее в качестве инструментального средства решения задачи использовать версию специализированного программного продукта DEAP, разработанную Т. Коэлли в 1996 г.

Далее остановимся более подробно на анализе объектов, которые являются в рамках данного множества неэффективными по Парето.

Рассмотрим задачу, которая является двойственной к задаче (3). Она имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \theta \rightarrow \min, \\ \theta x_0 - X\lambda \geq 0, \\ Y\lambda \geq y_0, \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

В таблице 1 представлено соответствие между элементами прямой и двойственной задач [5].

Таблица 1 – Соответствие между элементами прямой и двойственной задач

Прямая задача		Двойственная задача	
ограничения	переменные	ограничения	переменные
$vx_0 = 1$	$v \geq 0$	$\theta x_0 - X\lambda \geq 0$	θ
$-vX + \mu Y \leq 0$	$\mu \geq 0$	$Y\lambda \geq y_0$	$\lambda \geq 0$

Введем следующие переменные:

$$s^- = \theta x_0 - X\lambda \geq 0, s^+ = Y\lambda - y_0.$$

Они имеют реальный экономический смысл: первая переменная выражает превышение расхода каждого ресурса данным неэффективным по Парето объектом над оптимальным уровнем, а вторая выражает разницу между оптимальным значением результирующего показателя данного объекта и его фактическим значением. Таким образом, эти переменные отвечают за резервы снижения расхода ресурсов и резервы роста результативных показателей.

Чтобы оценить величину указанных резервов, необходимо сначала найти решение двойственной задачи, а затем, уже с использованием полученного решения, приступить к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} \omega = es^- + es^+ \rightarrow \max, \\ s^- = \theta x_0 - X\lambda \geq 0, \\ s^+ = Y\lambda - y_0, \\ \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь e – единичный вектор, обладающий тем свойством, что $es^- = \sum_{i=1}^m s_i^-$, $es^+ = \sum_{j=1}^n s_j^+$. Значение целевой функции ω интерпретируется как оценка суммарных резервов повышения абсолютной эффективности (возможной экономии ресурсов и потенциального прироста выходных показателей). В этой связи в научной литературе обычно принято выделять два типа анализа оболочки данных: ориентированный на ресурсы (input-oriented DEA), ориентированный на выпуск (output-oriented DEA). Первый позволяет как можно больше сократить количество потребляемых ресурсов, сохраняя выпуск на прежнем уровне; целью второго является максимизация выходных показателей при сохранении потребления ресурсов на прежнем уровне.

Таким образом, решение задачи (5) позволяет максимизировать резервы повышения эффективности при сохранении самой эффективности на уже найденном на предыдущем шаге уровне.

Рассмотрим пример практического применения методологии анализа оболочки данных для решения задачи нахождения относительной эффективности эксплуатации машинно-тракторного парка (МТП) сельскохозяйственных предприятий. В таблице 2 представлен перечень входных и выходных параметров системы функционирования МТП.

Таблица 2 – Исходные данные для оценки относительной эффективности использования МТП в полеводстве

Входные параметры (ресурсы)	Выходные параметры (эффект)
X1 – Стоимость топлива (дизельного и бензина) и ГСМ, затраченных на выполнение комплекса механизированных работ в полеводстве, млн руб.	Y – Валовой сбор зерна, скорректированный на балльность сельскохозяйственных угодий, т/балл
X2 – Стоимость активной части основных средств, непосредственно задействованных на выполнении комплекса работ, млн. руб.	
X3 – Стоимость техники, полученной по договорам лизинга за предыдущий год, млн руб.	
X4 – Средства, потраченные на ремонт и техническое обслуживание МТП, млн руб.	
X5 – Фонд оплаты труда механизаторов и водителей, занятых на выполнении комплекса работ механизированных работ в полеводстве, млн руб.	

Исходные данные по 11 сельскохозяйственным предприятиям Могилевского района представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Значения показателей предприятий выборки, используемые для DEA

№	Y	X1	X2	X3	X4	X5
1	116,4095	3899,4	59734	2446	2463	1205
2	590,5202	10676,2	198030	0	5955	5758
3	235,5159	6772,5	86897	510	12008	3902
4	274,825	3850,3	48839	457	5343	2122
5	117,2167	2537,1	33657	7992	2729	1616
6	257,5133	7844,6	41625	548	5026	3357
7	241,4626	5336,2	26285	2731	788	850
8	153,0973	5508,4	58672	0	1944	1652
9	145,747	4306,5	66939	1208	2415	3002
10	556,603	21038	368228	0	6450	7030
11	279,92	5931,6	41854	2423	4437	4682

Результаты решения оптимизационных задач (3) и (5) для каждого из 11 предприятий представлены в таблице 4. В данном случае был проведен анализ, ориентированный на ресурсы.

Таблица 4 – Результаты анализа DEA

№	Сравнительная эффективность	Резервы снижения расходов на				
		топливо и ГСМ	машины	лизинг техники	ремонт и ТО	оплату труда
1	0,539	0	15611	558	21	0
2	1	0	0	0	0	0
3	0,585	426	0	0	2966	346
4	1	0	0	0	0	0
5	0,708	0	0	5422	0	228
6	1	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0
8	0,902	2205	1707	0	207	0
9	0,616	0	0	469	0	598
10	0,942	9765	160406	0	466	1199
11	0,898	0	0	24	1384	2783

В таблице 5 представлены краткие выводы по анализу оболочки данных по группе предприятий Могилевского района. Акцент сделан на наиболее вероятных причинах неэффективности предприятий, оказавшихся внутри выпуклой оболочки, образованной предприятиями-лидерами.

Таблица 5 – Экономическая интерпретация результатов

№ предприятия	Краткий вывод об относительной эффективности функционирования МТП
1	Неэффективное по причине наличия значительных излишков производственным мощностей
2	Эффективное по Парето
3	Неэффективное по причине больших затрат на ремонт и перерасхода фонда оплаты труда механизаторов
4	Эффективное по Парето
5	Малоэффективное по причине больших затрат на лизинг техники
6	Эффективное по Парето
7	Эффективное по Парето
8	Среднеэффективное. Проблема в перерасходе топлива и ГСМ
9	Неэффективное по причине значительных трат на лизинг и перерасхода фонда оплаты труда механизаторов
10	Среднеэффективное. Проблема в наличии излишков производственных мощностей
11	Среднеэффективное. Проблема в перерасходе ФЗП механизаторов и больших затратах на ремонт

Заключение

Следует отметить, что в настоящее время проблема эффективного использования ресурсов является одной из наиболее актуальных, в том числе, на микроуровне [6]. К набору самых современных методов оценки критерии эффективности можно отнести анализ оболочки данных. Этот подход позволяет не только рассчитать относительную эффективность, например, эксплуатации машинно-тракторного парка сельскохозяйственного предприятия, но и дать количественную оценку резервов экономии по каждому виду ресурсов.

Таким образом, предприятия №№ 2, 4, 6, 7 являются лидерами среди сельскохозяйственных организаций Могилевского района по направлению эффективного использования МТП. Они могут быть выбраны в качестве ориентиров для других хозяйств анализируемой группы, которые могут перенять их полезный опыт эксплуатации системы машин. Руководству предприятий, которые в таблице 5 обозначены как неэффективные, следует обратить внимание на выявленные в ходе анализа проблемные аспекты и принять меры по оптимизации затрат ресурсов.

Полученные с помощью DEA результаты могут быть положены в основу разработки конкретных управленческих решений, направленных на повышение эффективности работы предприятия [7], в частности, за счет существенного снижения себестоимости машинно-тракторных работ в полеводстве.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Charnes, A.* Measuring the efficiency of decision making units with some new production functions and estimation methods / A. Charnes, W. V. Cooper, E. Rhodes // Defense Technical Information Center [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?Location=U2&doc=GetTRDoc.pdf&AD=ADA049149>. – Date of access: 19.11.2015.
2. *Farrell, M. J.* The measurement of productive efficiency / M. J. Farrell. // Journal of Royal Statistical Society, 1957. – № 120. – P. 253–281.
3. *Лисица, А.* Анализ оболочки данных (DEA) – современная методика определения эффективности производства / А. Лисица, Т. Бабичева // EconStor [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/28581/1/374265275.pdf>. – Date of access: 16.11.2015.
4. *Штанге, Г.* Аграрный сектор России на подъеме?! Анализ технической эффективности аграрных предприятий / Г. Штанге, А. Лисица // EconStor [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/28487/1/479574820.pdf>. – Date of access: 18.11.2015.
5. *Холод, Н. И.* Прогнозирование эффективности сельскохозяйственного производства / Н. И. Холод. – Минск : Ураджай, 1980. – 133 с.
6. *Ефремов, А. А.* Использование анализа оболочки данных для оценки сравнительной эффективности функционирования сельскохозяйственных организаций / А. П. Такун, А. А. Ефремов. // Материалы международной научно-практической онлайн-конференции “Антрапогенная эволюция современных почв и аграрное производство в изменяющихся почвенно-климатических условиях”. – Орёл : Орловский гос. аграрный ун-т, 2015. – С. 189–191.
7. *Ефремов, А. А.* О комплексной оценке эффективности агропромышленного производства с ориентацией на выпуск. / А. А. Ефремов // Материалы IV междуна-

родной конференции “Научные разработки молодых ученых – развитию агропромышленного комплекса”: сборник научных трудов. ФГБНУ ВНИИОК, Ставрополь, 2015.– Т. 1, вып. 8. – Ставрополь : Бюро новостей, 2015. – С. 591–593.

Поступила в редакцию 01.09.2016 г.

Контакты: andrefrem@tut.by (Ефремов Андрей Александрович)

Efremov A.A. ON THE APPLICATION OF DATA ENVELOPMENT ANALYSIS FOR CALCULATION OF RELATIVE EFFICIENCY OF OBJECT OPERATION.

To study CCR-model the transfer to the equivalent notation of the linear programming problem is proposed. While assessing relative efficiency of object operation the construction of the convex envelope of the data system is used to a large extent. The possibility of implementation of the presented in the given article approach is demonstrated on the example of solution of a concrete economic problem.

Keywords: relative efficiency, CCR-model, convex envelope, Pareto-optimality.

УДК 532.45

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ В ЛАЗЕРЕ

В. И. ЛЕБЕДЕВ

профессор кафедры естествознания,

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Приведены результаты многолетних экспериментов автора с лазерами разных типов, показывающих, что кооперативный эффект сверхизлучения активной среды – важнейший фундаментальный физический процесс, определяющий спектр и динамику излучения лазеров. Концепция сверхизлучения активной среды лазера заменяет некорректную теорию “синхронизации мод” лазеров сверхкоротких импульсов.

Область применения разработки: научные исследования, высшее образование.

Внедрение (планируемое внедрение) разработки: Учреждение образования “Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова”.

Основные преимущества разработки: предлагаемый подход позволит повысить профессиональную компетентность будущих специалистов, найти подходы к проектированию и оптимизации параметров новых перспективных приборов – фемтосекундных полупроводниковых лазеров.

Ключевые слова: лазеры ультракоротких импульсов, сверхизлучение, спектры и динамика лазеров.

Введение

Прошло более 56 лет после создания первого лазера Мейманом [1]. От этого события отсчитывают начало нового, быстро развивающегося раздела оптики – физики лазеров. Ввиду сравнительной молодости этой науки не удивительно, что некоторые не вполне обоснованные принципы, положенные в основу объяснения работы лазера, которые использовали основоположники этого раздела науки, вошли в популярные учебники [2, 3], монографии [4–8] и материалы Интернета [9] как предрассудки.

Во всех учебниках и обзорных статьях содержится категорическое утверждение: “Физическая основа работы любого лазера – вынужденное излучение”. Этот термин заложен и в само название прибора. Однако это утверждение можно считать справедливым лишь в первом грубом приближении. Кроме спонтанного и вынужденного излучения активная среда лазера принципиально должна излучать и кооперативно за счет интерференции атомных состояний активных частиц. Это явление вполне аналогично интерференции света. Пренебрегать кооперативным излучением атомов активной среды лазера – это то же самое, что не учитывать интерференцию в явлениях, протекающих в оптических резонаторах.

До настоящего времени влияние когерентных оптических эффектов на лазерную генерацию экспериментально изучено слабо, а в большинстве работ, в том числе и обзорных, возможность существенного влияния этих эффектов на

спектр и высокочастотную динамику излучения лазеров игнорируется. Хотя кооперативные оптические эффекты были предсказаны до создания лазера [10]. На самом деле это сложная и до конца не решенная проблема физики лазеров. И вообще заметно, что изобилие чисто теоретических исследований при явном дефиците работ по количественной экспериментальной проверке корректности теорий привели к иллюзии понимания динамических процессов излучения лазеров.

В настоящей работе приведены экспериментальные данные, полученные автором с сотрудниками на протяжении многих лет в экспериментах с лазерами разных типов, показывающие, что именно сверхизлучение определяет спектральные и временные характеристики излучения лазеров.

Таким образом атомная система, находящаяся в состоянии инверсной населенности энергетических уровней, в общем случае характеризуется не двумя, а тремя фундаментальными процессами излучения: спонтанным, вынужденным и кооперативным. Причем, во многих случаях кооперативное излучение усиливающей свет среды, называемое сверхизлучением, доминирует в излучении лазера.

Основная часть

Когерентное взаимодействие излучения с веществом

Рассмотрим идеальный атом, в виде электрического диполя, который может находиться только в двух энергетических состояниях *a* и *b*. Если такой атом взаимодействует с резонансным излучением, то решение уравнения Шредингера для этого случая описывает временную интерференцию двух энергетических состояний атома, которое формально похоже на пространственную интерференционную картину от двух щелей, если роль пространственной координаты играет время [11]. При достаточно быстром включении возбуждения атома в последующие моменты времени вероятности нахождения атома на верхнем или нижнем энергетическом уровнях описываются квадратом синусоидальной функции:

$$|C_b(t)|^2 = \sin^2\left(\frac{2\pi}{\hbar}|V_{ab}|t\right). \quad (1)$$

V_{ab} – оператор взаимодействия частицы и поля. В дипольном приближении он равен скалярному произведению дипольного момента атома на напряженность электрической составляющей поля $V_{ab} = d_{ab}E$.

При выводе формулы (1) пренебрегают спонтанными переходами между уровнями *a* и *b*, т. е. считают, что мощность вынужденного излучения значительно превышает мощность люминесценции. Этот случай всегда реализуется в лазере.

Уравнение (1) описывает также и систему, состоящую из *N* не взаимодействующих друг с другом диполей. Если в начальный момент времени, когда быстро включают непрерывное излучение, частицы вещества находятся в возбужденном состоянии, то система излучает энергию до тех пор, пока все частицы не окажутся в основном состоянии. Если же начальное распределение по уровням обратное, то система вначале поглощает энергию до состояния полной инверсии уровней, а затем возвращается в исходное состояние (рис. 1).

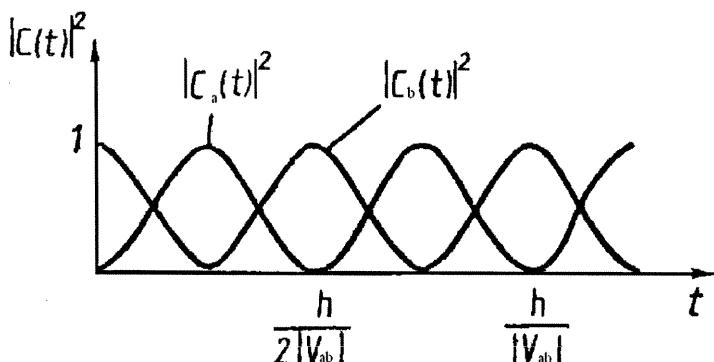


Рис. 1. Залежність вероятностей наявності системи невзаимодійсвуючих частиц в станах а та b $|C_a|^2$ та $|C_b|^2$ від часу для різних початкових умов

Приведенна на рис. 1 залежність описує замечательну квантовомеханіческу особливість взаимодії поля та частиц, яка прямо протиставляє інтуїтивним представлениям та описанию системи на основі енергетических, вероятностних представлений: з течієм часу після швидкого включення випромінення рівноважне середнє розподілення частиц по енергетическим рівням ніколи не настає. Як відомо, вероятностний підхід предсказує вирівнювання населенностей рівнів при довготривалому дії на двохрівневу атомну систему випромінення достатньо високої потужності.

Якщо спостерігати за властивостями електромагнітного поля, розпространяючогося в активній сірії та когерентно взаимодійсвуючого з її атомами, то енергія поля буде пульсувати в часі та просторі з частотою Рабі або з періодом $T = \frac{\hbar}{2|V_{ij}|}$. Ці пульсації називають π -імпульсами.

При розгляді когерентних ефектів в лазері необхідно перейти від розгляду взаимодії випромінення та частиц в одиниці об'єму до розгляду розширення імпульса випромінення в усилюючій сірії, що знаходиться в резонаторі. При цьому повинні виникнути когерентні ефекти: сверхвипромінення та оптическа нутрація, пов'язані з взаимодією диполей через поле випромінення.

Частиці, поглощаючі та випускаючі електромагнітне випромінення, моделюють диполями, які взаимодіють між собою через поле випромінення. Якщо таке взаимодієво охоплює велике число частиц N , то ансамбль починає вести себе колективно, що приводить до виникнення макроскопичної поляризації сірії. Система диполей, коливаючихся в фазі, повинна випромінювати когерентно. Таку сіру описують з допомогою вектора Блоха [11].

Енергія поля, розпространяючогося в активній сірії та когерентно взаимодійсвуючого з атомами, коливається в часі та просторі з частотою Рабі:

$$\Omega = \frac{d_{ab} E}{\hbar}, \quad (2)$$

де d_{ab} – дипольний момент активних частиц.

Медленное по сравнению с периодом световых колебаний периодическое изменение напряженности результирующего поля для заданной напряженности поляризующего поля при резонансном взаимодействии излучения со средой получило наименование эффекта световых нутаций. Измерение периода нутаций является одним из самых точных методов определения матричного элемента оператора дипольного момента исследуемого резонансного перехода d_{ab} .

Модель невзаимодействующих частиц оказывается слишком грубым приближением, если в объеме, с размерами, соответствующими длине волны излучения, содержится значительное число частиц. Именно такой случай реализуется во всех лазерных активных средах.

Коллективное спонтанное излучение многоатомной системы – сверхизлучение теоретически рассмотрено Р. Дикке в 1954 г. [10]. В 1973 г оно получило первое экспериментальное подтверждение [12]. Авторы этой работы наблюдали кооперативный спонтанный переход между вращательными подуровнями фтористого водорода в ИК области спектра с длиной волны порядка 100 мкм. Время жизни спонтанного перехода между этими подуровнями составляло порядка 1 сек. Его интенсивность была очень мала. Однако при интенсивной накачке возникал направленный импульс сверхизлучения длительностью 100 нс. Авторы показали, что интенсивность зарегистрированного излучения была пропорциональна квадрату числа возбужденных атомов. Впоследствии сверхизлучение наблюдали многие авторы между электронными переходами в разреженных газах и в примесных кристаллах с узкими спектральными линиями люминесценции.

Теоретическим исследованиям сверхизлучения посвящено большое число работ, например, [13, 14]. Частицы, поглощающие и испускающие электромагнитное излучение, моделируют диполями, которые тем самым взаимодействуют друг с другом через поле излучения. Если такое взаимодействие охватывает большое число частиц N , то ансамбль начинает вести себя корпоративно. Сфазированность диполей приводит к возникновению макроскопической поляризации среды. Система диполей, колеблющихся в фазе, излучает когерентно. Эту особенность среды описывают, используя модель гигантского псевдодиполя. Дипольный момент псевдодиполя в N раз больше, чем дипольный момент отдельной частицы.

Сверхизлучение – это явление, при котором скорость вынужденного перехода при усиении или поглощении излучения пропорциональна квадрату числа взаимодействующих частиц N^2 . Оно принципиально отличается от усиленной люминесценции и вынужденного излучения большей амплитудой и пульсирующим характером излучения и имеет вид короткого импульса, поскольку время излучения системы сокращается в N раз по сравнению с некогерентным случаем.

Сверхизлучение возникает не сразу после установления инверсной населенности среды, а спустя время, требуемое для установления корреляции между атомами. На сверхизлучение существенное влияние оказывают размеры и форма излучающей активной среды. В случае, когда образец имеет вытянутую форму, а резонатор отсутствует, сверхизлучение происходит в малом телесном

угле, направленном вдоль главной оси образца, и похоже на луч вынужденного излучения лазера.

Коэффициенты Эйнштейна для спонтанного и вынужденного излучения были введены в ошибочном предположении, что испускание квантов света каждым атомом происходит независимо от других атомов системы, то есть когда поле излучения одного атома не оказывает влияния на излучение других атомов. Это приближение может быть справедливо только в сильно разреженной системе. В общем случае необходимо рассматривать спонтанное излучение не отдельных атомов, а всей квантовомеханической системы как единого целого. Дикке показал, например, что для системы из двух атомов, расстояние между которыми меньше длины волны излучения, вероятность спонтанного излучения в два раза больше, чем для одного атома. Это и есть кооперативный эффект в спонтанном излучении. Для подобной системы из N атомов происходит сокращение времени спонтанного распада в N раз. Для наблюдения сверхизлучения число атомов в возбужденном состоянии должно превышать число атомов в основном состоянии. То есть состояние системы должно быть инвертированным, система должна усиливать свет на резонансной частоте.

Для протяженной системы, размеры которой превышают длину волны излучения, кооперативный эффект сверхизлучения выражен слабее. Он будет пропорционален числу атомов в цилиндрическом объеме, имеющем протяженность образца с поперечными размерами, равными длине волны излучения. При концентрации активных частиц 10^{18} см^{-3} в образце сферической формы число частиц, участвующих в кооперативном сверхизлучении с длиной волны 1 мкм будет порядка $10^{18}/10^{12} = 10^6$. Время спонтанной релаксации уменьшится в миллион раз. Таким образом, сверхизлучение будет представлять собой интенсивный ультракороткий импульс, который возникает с некоторой задержкой после возбуждения системы. Максимальная интенсивность этого импульса пропорциональна квадрату числа частиц, участвующих в сверхизлучении.

Простые оценки показывают, что эффекты когерентного взаимодействия света с активной средой должны наблюдаться даже для непрерывных гелий-неоновых лазеров со средней мощностью излучения порядка 10^{-3} Вт.

Для хорошо разрешенного атомного перехода дипольный момент равен 1 Д (Дебаю) = $3,33564 \cdot 10^{30}$ Кл · м. При средней мощности излучения 1 мВт эффективное значение напряженности электрического поля в луче диаметром порядка миллиметра соответствует ~ 600 В/м, а амплитудное значение этой величины — ~ 900 В/м. Внутри лазерного резонатора мощность излучения в ~ 100 раз выше, так как коэффициент отражения выходного зеркала лазерного резонатора $\sim 1\%$. Кроме того, пульсации интенсивности излучения повышают интенсивность излучения еще на порядок. Таким образом, амплитуда колебаний электрического поля в излучении лазера, взаимодействующим с его активной средой, составляет в рассмотренном случае $\sim 10^6$ В/м. Частота Раби при этом равна $\Omega \sim 5 \cdot 10^9$ Гц.

Так как активная среда лазера содержит множество активных частиц, то длительность импульса сверхизлучения Δt всегда имеет предельное, минимальное значение для данной активной среды и определяется уже не числом коопе-

ративно излучающих атомов, а шириной спектрального контура усиления активной среды Δv . Для импульса гауссовой формы в соответствии с соотношением взаимности

$$\Delta t = 0,44/\Delta v.$$

Как показали теоретические оценки, время задержки импульса сверхизлучения по отношению к началу возбуждения системы пропорционально ($\ln \lambda$).

Сверхизлучение наблюдали в лазерах на кристаллах граната и рубина [15] и в полупроводниковых лазерах [16–22].

Таким образом, сверхизлучение представляет собой фундаментальное физическое явление, механизм которого объяснен теоретически и подтвержден наблюдениями. Важно отметить, что этот эффект принципиально отличается от лазерной генерации, он происходит в активной среде лазера, когда ее усиление ниже порогового уровня возникновения лазерной генерации. В случае сверхизлучения не работают представления о вынужденных переходах, которые происходят независимо в каждом атоме под влиянием внешнего поля. При сверхизлучении многоатомная система находится в когерентном состоянии, в котором согласованы фазы волновых функций отдельных атомов, что приводит к интерференции состояний отдельных атомов и сложению их дипольных моментов. Общность и универсальность этого явления заключается в том, что все оптические излучательные процессы в активной среде лазеров, происходящие за время, меньшее обратной ширины спектральной линии, имеют сверхизлучательный характер.

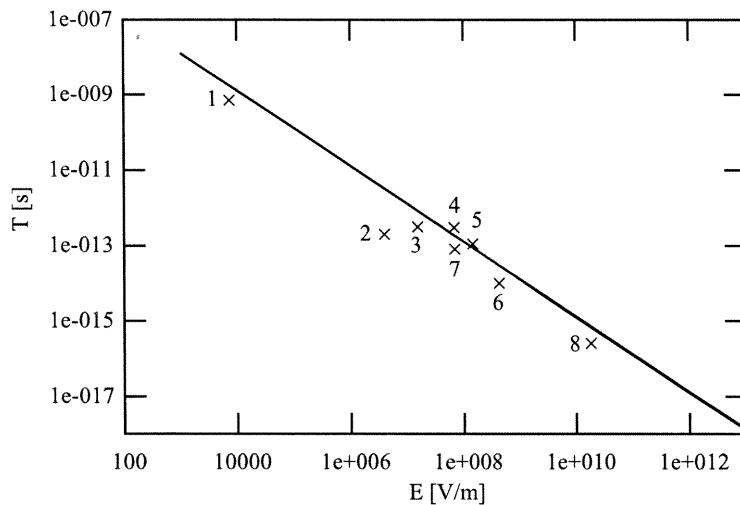


Рис. 2. Период когерентных осцилляций $T = \frac{\hbar}{dE}$, рассчитанный в зависимости от напряженности электрического поля в луче для лазеров разных типов.

1 – гелий-неоновый лазер, 2–5 твердотельные лазеры на кристаллах и стеклах, активированные редкоземельными элементами, 6 – титан-сапфировый лазер, 7 – полупроводниковый гетеролазер на арсениде галлия, 8 – аттосекундный лазер

Данные рис. 2 показывают, что получение все более коротких импульсов от лазеров, работающих в режиме сверхизлучения, потребует пропорционального увеличения плотности мощности их излучения.

Сверхизлучение в лазерном резонаторе

За время действия возбуждения среды при существенном влиянии когерентных эффектов должна значительно изменяться доля частиц, находящихся в возбужденном состоянии. Этому требованию соответствует условие

$$\Omega \Delta t \geq 1 \text{ или } E \geq \frac{\hbar}{d_{ab} \Delta t}. \quad (3)$$

При длительности импульса $\Delta t = 0,6$ нс напряженность поля в соответствии с (3) должна превышать $5 \cdot 10^4$ В/м. Это условие в гелий-неоновом лазере задома выполняется. Напряженность поля, соответствующая мощности излучения ~ 1 мВт, должна приводить к субнаносекундным пульсациям излучения.

Таким образом, можно с уверенностью утверждать, что эффектами когерентного взаимодействия излучения с активной средой в лазерах пренебрегать нельзя. Это означает, что моделировать динамику лазеров ультракоротких импульсов с помощью вероятностного метода расчета некорректно.

Сверхизлучение возникает в среде после возникновения усиления активной среды лазера под действием накачки. Это означает, что на фоне стационарной люминесценции спустя некоторое время установления возникает предельно короткий для данной среды интенсивный импульс сверхизлучения. Если среда находится в плоском резонаторе, импульс, длительность которого всегда меньше времени обхода светом резонатора, начинает циркулировать внутри резонатора вдоль его оптической оси. На выходе устройства на фоне непрерывного излучения люминесценции возникает высокочастотная модуляция. При этом в спектре излучения на фоне спектрального контура люминесценции появляются дискретные спектральные линии. Спектральный интервал между этими линиями Δv определяется расстоянием между зеркалами резонатора L : $\Delta v = c/2L$.

Таким образом, в лазере сверхизлучение обычно предшествует возникновению лазерной генерации. Это излучение сопровождается появлением в спектре дискретных спектральных линий, которые обычно считают модами резонатора. На самом деле, конечно, эти частоты – результат спектрального разложения периодически модулированного излучения, вышедшего из резонатора. Экспериментаторы, работающие с лазерами разных типов, давно заметили, что дискретный спектр излучения возникает до выполнения условия лазерной генерации. Этот спектр связан со сверхизлучением активной среды.

Для возникновения лазерной генерации должно выполняться условие генерации: усиление в активной среде должно превысить потери резонатора. Если мощность накачки достаточна, то усиление продолжает нарастать до момента выполнения условия лазерной генерации. После этого спектр излучения перестраивается: в нем начинают доминировать вынужденное излучение – лазерная генерация, происходящая на одной или нескольких частотах, находящихся вблизи максимума спектрального контура усиления.

Именно такие процессы происходят в лазерах. Однако теория таких лазеров обычно не учитывает сверхизлучения. С этим связано также отсутствие корректной теории, позволяющей рассчитывать спектры излучения лазеров. Общепринятое изложение теории лазера строится на представлениях о вынужденном излучении отдельных атомов без учета кооперативного взаимодействия излучающих частиц [2–9].

При выполнении условия стационарной лазерной генерации, когда усиление начинает превышать потери резонатора спектральная плотность вынужденного излучения начинает экспоненциально нарастать и подавляет другие возможные виды вынужденного излучения: усиленную люминесценцию и сверхизлучение. Поэтому после возникновения лазерной генерации другие виды излучения обычно перестают играть существенную роль в излучении лазера.

Активная среда лазера содержит большое число активных атомов. Поэтому корректное квантовомеханическое рассмотрение взаимодействия поля и усиливающих свет атомов предсказывает существование сверхизлучения. Основоположников лазерной физики очень беспокоило это обстоятельство. Кооперативное излучение должно приводить к тому, что лазер принципиально не сможет генерировать непрерывное монохроматическое излучение. Н.Г. Басов задавал этот вопрос Л.Д. Ландау и тот ответил, что монохроматическое излучение атомной системы невозможно. Аналогичный вопросставил и другой основоположник физики лазеров Ч. Таунс великому физику Нильсу Бору и получил тот же ответ. Правда потом Бор позвонил ему и сказал, что вероятно монохроматическое излучение лазера все же возможно [23]. Однако оказалось, что уже первые лазеры на рубине и гелий-неоновый генерировали высоко монохроматическое излучение и указанное беспокойство было забыто.

В нашей работе [24] на основании измерений было обнаружено, что промышленные полосковые AlGaN/P полупроводниковые лазеры видимого спектрального диапазона с накачкой постоянным током генерируют регулярные фемтосекундные (~ 100 фс) импульсы. Причем, в режиме генерации фемтосекундных импульсов ток накачки лазеров ниже порогового значения для квазистационарной генерации. Существование такого режима не согласуется с общепринятой концепцией лазеров ультракоротких импульсов, в рамках которой возникновение импульсов связывают с синхронизацией генерируемых продольных мод лазерного резонатора. Он указывает на принципиально иную физическую природу лазерных фемтосекундных импульсов.

Таким образом, общепринятые представления о причинах возникновения ультракоротких импульсов в лазере в результате синхронизации продольных мод лазерной генерации противоречат наблюдениям по крайней мере для полупроводниковых лазеров. Возникновение фемтосекундного импульса в лазерном резонаторе следует связывать с кооперативным эффектом сверхизлучения. Этот вывод, по-видимому, справедлив для лазеров ультракоротких импульсов других типов.

Режим сверхизлучения в системе квантовых осцилляторов состоит из двух временных фаз, в первой из которых происходит фазировка осцилляторов посредством электромагнитного поля и образование макроскопического диполя,

а вторая – характеризуется быстрой излучательной рекомбинацией и коллективным излучением мощного и короткого электромагнитного импульса. Экспоненциальный рост интенсивности поля определяется кооперативным (радиационным) временем

$$\tau_r = \frac{8\pi S T_1}{3\lambda^2 N}, \quad (4)$$

где S – площадь поперечного сечения образца, T_1 – спонтанное время жизни, λ – длина волны излучения, N – число инвертированных частиц. Длительность первого этапа τ_d (время задержки) обычно в 10–100 раз больше τ_r и связана с ним выражением

$$\tau_d = \frac{1}{4} \tau_r [\ln(2\pi N)]^{1/2}, \quad (5)$$

а с учетом конечности времени затухания поляризации T_2 время задержки имеет вид

$$\tau_d^* = \tau_d [1 + \frac{\sqrt{\tau_r \tau_d}}{T_2}]. \quad (6)$$

Критерием возникновения сверхизлучения является условие

$$\tau_r \ll T_2. \quad (7)$$

Также необходимо выполнение условия

$$\tau_d^* < T_2. \quad (8)$$

При комнатной температуре $T_2 \sim 100$ фс. Линия усиления в полупроводниках является неоднородно-уширенной, а релаксация поляризации осуществляется за счет ряда весьма быстро протекающих процессов, включающих в себя электрон-электронные и электрон-дырочные соударения, электрон-фотонные взаимодействия, взаимодействие электронов и дырок с примесями и неоднородностями. В связи с этим ожидаемая длительность импульсов сверхизлучения должна лежать в фемтосекундном диапазоне [26, 27].

Когерентное взаимодействие излучение с активными частицами в лазерном резонаторе полупроводникового лазера моделируют, используя систему уравнений Максвелла-Блоха [28, 29]. Эти расчеты, выполненные в Могилевском госуниверситете, продемонстрировали факт спонтанного возникновения фемтосекундного импульса в лазерном резонаторе, а также другие наблюдаемые особенности излучения лазеров, описанные ниже.

Спектральная плотность мощности вынужденного излучения в резонаторе, обладающем резонансной частотой в спектральном диапазоне усиления среды, после выполнения условия генерации стремится к бесконечности.

Это приводит к тому, что в теории лазера в некоторых случаях можно ограничиться рассмотрением взаимодействия вынужденного монохроматического излучения с отдельными атомами активной среды без учета сверхизлучения.

Ситуация изменилась после появления лазеров ультракоротких импульсов. Плотность излучения в активной среде таких лазеров достаточна для возникновения кооперативных эффектов взаимодействия поля с веществом до возник-

новения лазерной генерации. Поэтому в этом случае необходимо рассматривать переходный процесс излучения активной среды от спонтанного к вынужденному излучению с учетом кооперативных эффектов.

Рассмотрим случаи, когда возможно детальное экспериментальное наблюдение переходных процессов от люминесценции к генерации для лазеров некоторых типов.

Сверхизлучение гелий-неонового лазера

В лазерах на твердом теле переход от люминесценции к генерации происходит в узком диапазоне мощности накачки, а длительность характерных процессов столь мала, что экспериментально изучать этот процесс не удается. Другое дело гелий-неоновый лазер. Коэффициент усиления газоразрядной трубки этого лазера постоянен, а его значение относительно невелико. Поэтому в этом случае оказалось возможным детально проследить особенности возникновения сверхкоротких импульсов в лазере, так как в этом случае возможна прямая регистрация таких импульсов [30].

Схема экспериментальной установки показана на рис. 3. Мощность генерации от уровня люминесценции активной среды до максимального значения варьировалась за счет изменения коэффициента полезных потерь резонатора. Выходной отражатель лазерного резонатора представлял собой систему из двух зеркал. Задавая угол падения излучения на многослойное диэлектрическое покрытие наклонного зеркала, можно изменять коэффициент потерь резонатора в широких пределах, не нарушая оптимальной юстировки зеркал резонатора по выходной мощности. Это обстоятельство позволяет реализовать конструкцию лазерного резонатора, в котором коэффициент потерь можно плавно перестраивать, в частности, сделать точно равным коэффициенту усиления активной среды или превышающим пороговое значение на заданную величину. При этом форма поперечной структуры луча лазера сохраняется.

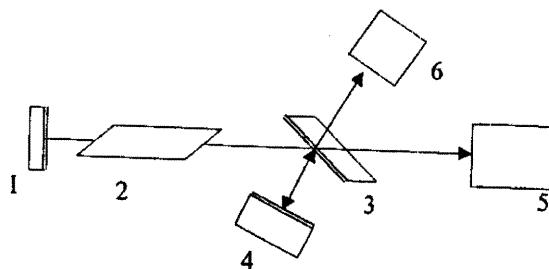


Рис. 3. Схема экспериментальной установки:

- 1, 3, 4 – зеркала, образующие резонатор лазера; 2 – газоразрядная трубка;
- 5 – электронно-оптическая камера “Агат СФ”; 6 – устройство для регистрации межмодовых биений лазера, состоящее из лавинного фотодиода и электронного анализатора спектра СК-4-59

При околопороговой накачке можно наблюдать динамику лазера при малом превышении мощности генерации над уровнем люминесценции. Лазер с большим превышением коэффициента усиления над потерями после включения последовательно проходит все стадии переходного процесса от люминесценции к установившейся нестационарной генерации с мощностью, на много порядков превышающей мощность люминесценции. С помощью установки, показанной на рис. 3, оказалось возможным подробно изучить динамику переходных процессов развития генерации.

В лазере использовалась газоразрядная трубка лазера ЛГ-38 длиной 1,8 м, работающая на простейшей поперечной моде. Временные измерения интенсивности излучения лазера проводились с помощью электронно-оптической камеры "Агат-СФ". Ее максимальное временное разрешение 3,5 пс позволяет уверенно регистрировать субнаносекундные процессы. Спектр излучения регистрировался сканирующим интерферометром Фабри-Перо и спектро-анализатором СК-4-59, сигнал на вход которого подавался от лавинного фотодиода с полосой пропускания 1,2 ГГц. Спектроанализатор регистрирует спектр биений частот лазерного излучения. Он позволяет надежно судить об устойчивости временной картины излучения. Переход лазера в режим хаотических высокочастотных пульсаций проявляется в появлении нерегулярности в спектре межмодовых биений лазера.

Эксперимент проводился следующим образом. Вначале был найден максимальный угол падения луча лазера на зеркало 3, при котором возникает генерация. Затем с помощью юстировочных винтов настройки зеркал 3 и 4 резонатор лазера последовательно настраивался на меньшие значения угла. В каждой фиксированной точке многократно измерялся спектр излучения лазера, высокочастотная временная динамика излучения и спектр биений дискретных частот спектра.

Максимальная мощность излучения лазера достигается, когда пропускание зеркала 3 составляет 2%. Пороговому значению мощности соответствует пропускание зеркала 12%.

Детальные измерения параметров лазера позволили установить следующие воспроизводимые характерные последовательно меняющие друг друга режимы, определяемые уровнем мощности генерации (рис. 4).

Режим усиленной люминесценции (2). Возникшая при включении возбуждения активной среды спектральная линия люминесценции сохраняется при возрастании мощности генерации на несколько порядков. В этом режиме лазер генерирует постоянную световую мощность без заметной высокочастотной модуляции.

Режим регулярных высокочастотных пульсаций (3). При дальнейшем повышении мощности генерации до ~ 1 мВт в спектре излучения возникают дискретные частоты. При этом на периоде резонатора присутствует единственный импульс (рис. 5(2)). Число частот в спектре $N = 11$. Спектр биений частот, регистрируемый анализатором спектра, содержит $N - 2 = 9$ частот; амплитуды этих частот стабильны во времени.

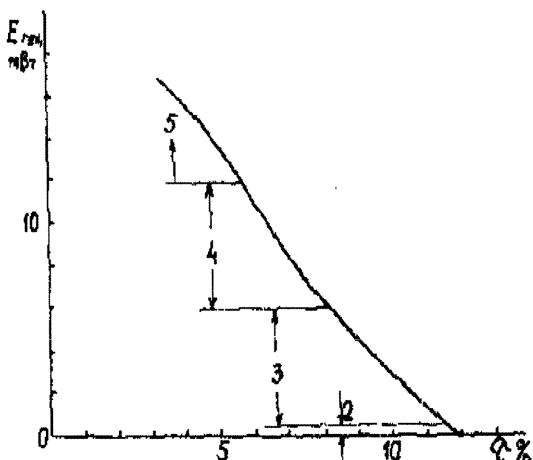


Рис. 4. Зависимость выходной мощности лазера от коэффициента пропускания наклонного зеркала резонатора. Цифрами обозначены диапазоны мощности, в которых наблюдаются различные динамические режимы генерации: 2 – режим усиленной люминесценции, в выходном излучении лазера отсутствуют высокочастотные пульсации; 3 – область регулярных пульсаций: лазер генерирует единственный импульс за время, равное периоду резонатора; 4 – лазер генерирует два или три импульса на периоде резонатора; 5 – режим динамического хаоса.

Переход к нерегулярной динамике (4). При средней мощности лазера 5 мВт сверхкороткие импульсы достигают максимальной мощности. Дальнейшее нарастание средней мощности излучения происходит за счет возникновения в начале одного, а затем и последующих импульсов-спутников основного импульса (рис. 5(3)).

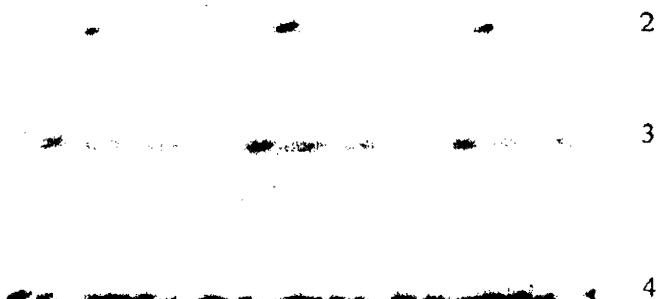


Рис. 5. Временные развертки излучения лазера в режимах 2, 3 и 4, снятые с помощью электронно-оптической камеры “Агат”

По мере нарастания мощности генерации амплитуды импульсов-спутников последовательно нарастают. Когда их амплитуды становятся соизмеримыми с амплитудой основного импульса, а периодические последовательности импульсов начинают перекрываться, регулярность следования импульсов нарушается. При этом амплитуды составляющих спектра биений генерируемых частот также начинают флюктуировать.

Область нерегулярных пульсаций(4). Амплитуды сверхкоротких импульсов, расстояния между ними и их число на периоде резонатора флюктуируют в некоторых пределах. Типичная временная развертка излучения лазера, работающего в этом режиме, показана на рис. 5(4). За время одной развертки не удается проследить за изменением динамики лазера. Картина развертки не воспроизводится при последовательных съемках. Нерегулярность режима проявляется в возрастании флюктуации и уширении линий в спектре биений лазерного излучения, регистрируемого анализатором спектра.

После установления режима устойчивых пульсаций излучения с одиночным импульсом на периоде резонатора дальнейшее нарастание средней мощности излучения лазера происходит не из-за возрастания амплитуды импульса, а за счет увеличения числа импульсов на периоде.

Эта хорошо воспроизводимая особенность излучения гелий-неоновых лазеров разных типов соответствует теоретическим расчетам самоиндуцированной прозрачности в резонансной среде.

Импульс-спутник появляется, когда энергия сверхкороткого импульса превышает по площади 3π (рис. 6).

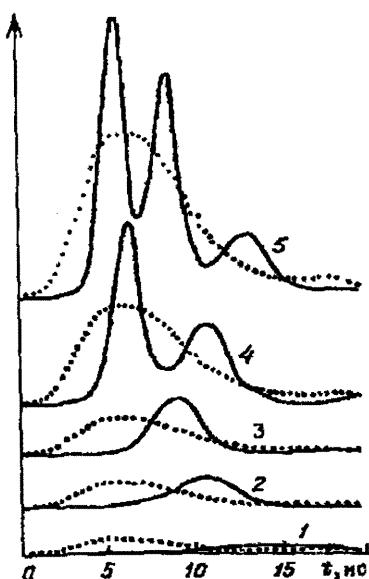


Рис. 6. Импульсы в резонансной среде, теория [31].

Пунктирные линии – импульсы на входе в среду.

Сплошные линии – выходные импульсы при самоиндуцированной прозрачности. Кривые 1-5 соответствуют импульсам с площадью:

1 – меньшей π ; 2 – 2π ; 3 – 3π ; 4 – 5π ; 5 – 6π

входе превосходит значение 2π , на выходе он должен разбиваться на последовательность 2π импульсов.

Таким образом, динамика лазера включает следующие особенности:

– генерация всегда начинается как люминесценция, поэтому на начальной стадии она всегда квазистационарна.

– при некотором усилении активной среды спонтанно возникает сверхкороткий импульс сверхизлучения когерентно взаимодействующий с активной средой лазера, который начинает циркулировать между зеркалами резонатора. При этом в выходном излучении лазера возникают периодические импульсы, следующие с периодом резонатора, а в спектре излучения возникают дискретные частоты;

– повышение коэффициента усиления активной среды приводит не к росту амплитуды импульса, а к размножению когерентных 2π -импульсов и к нерегулярности высокочастотных пульсаций – динамическому хаосу.

Описанные выше особенности возникновения сверхкоротких импульсов в лазерном резонаторе наблюдаются в лазерах с постоянной и импульсной накач-

Рисунок 6 обнаруживает полную аналогию. Так и должно происходить. При когерентном взаимодействии излучения с резонансной средой, когда энергия импульса на

кой и разными активными средами. Это указывает на то, что наблюдаемая картина развития лазерной генерации имеет общий характер и реализуется в лазерах разных типов.

Высокочастотная модуляция излучения возникает, когда мощность излучения достигает значений, при которых взаимодействие излучения с активной средой приобретает когерентный характер. Очевидно, эти процессы и ответственны за возникновение затравочных ультракоротких пульсаций излучения лазера. Расчеты показали, что увеличение коэффициента усиления среды приводит не к росту амплитуды 2π -импульса, а к увеличению числа импульсов на выходе. Эта особенность лазера описана выше. Поэтому для получения режима регулярных ультракоротких импульсов в лазере должен поддерживаться оптимальный постоянный уровень мощности накачки.

Регулярная генерация субнаносекундных импульсов гелий-неоновым лазером

Непрерывный гелий-неоновый лазер может быть построен таким образом, что он будет устойчиво работать в режиме “полной синхронизации мод” без каких-либо модулирующих добротность резонатора элементов, точно так же, как титан-сапфировый лазер [32]. Для этого оказалось достаточным установить оптимальное усиление активной среды и скомпенсировать дисперсию активной среды лазера, используя соответствующие зеркала резонатора или призму внутри резонатора при некоторой небольшой разьюстировке выходного зеркала лазера. Такими свойствами обладает промышленно выпускаемый гелий-неоновый лазер ЛГ 79.

Генерируемые таким лазером импульсы длительностью 0,65 нс с периодом повторения 5 нс, можно надежно зарегистрировать как прямыми, так и корреляционными методами. Проведенные детальные измерения показали, что длительность лазерных импульсов вполне уверенно можно определять по автокорреляционной функции первого порядка. Результаты прямых измерений обоими методами дают согласующиеся результаты. Лазер генерирует устойчивую воспроизводимую последовательность импульсов длительностью $0,65 \pm 0,05$ нс, измеренную по уровню 0,5 от максимального значения интенсивности. Период повторения импульсов равен 5 нс, соответствующим времени двойного прохода светом лазерного резонатора (длина резонатора 75 см).

На рисунках, показанных ниже, представлены характеристики гелий-неонового лазера ЛГ-79. Для 4 исследованных образцов лазеров этого типа измерения дают идентичные результаты. Средняя выходная мощность излучения лазера 10 мВт.

Измерения временной картины генерации с помощью стробоскопического осциллографа С 1-74 и лавинного фотодиода, полоса воспроизводимых частот которого составляет 3,5 ГГц, обнаруживают ее высокую устойчивость. Картина, показанная на рис. 7, остается неизменной на экране осциллографа на протяжении многих часов непрерывной регистрации.



Рис. 7. Осциллограмма излучения гелий-неонового лазера ЛГ-79.
Для измерений использован стробоскопический осциллограф С1-74.
Период следования импульсов равен 5 нс

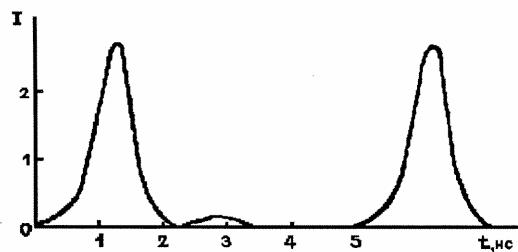
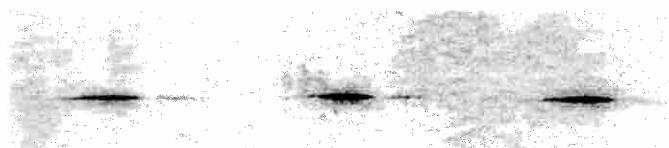


Рис. 8. Фотография экрана электронно-оптической камеры “Агат СФ”
и результат ее фотометрирования

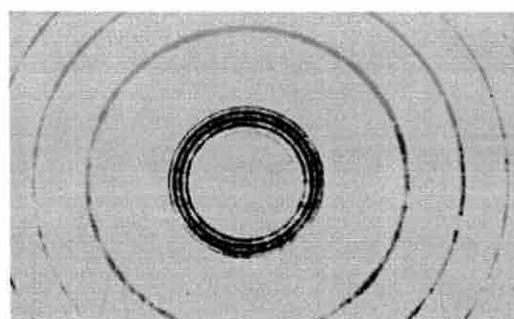


Рис. 9. Спектр излучения лазера ЛГ-79,
регистрируемый интерферометром Фабри-Перо

С временными измерениями согласуется наблюдаемый спектр излучения лазера (рис. 9). Он состоит из 7 узких эквидистантных линий с воспроизводимыми значениями амплитуд. Спектр излучения регистрировался с помощью стандартного интерферометра Фабри-Перо, а также спектроанализатора. Расстояние между спектральными линиями равно 206 МГц. Это значение соответствует периоду повторения импульсов и длине лазерного резонатора. Ширина спектрального контура отдельной линии межмодовых биений, согласно измерениям спектроанализатором составляет ~ 100 кГц.

Характерно, что стабильность временной картины излучения сохраняется и в процессе установления теплового режима лазерного резонатора после его включения. При этом частоты спектра излучения лазера непрерывно дрейфуют в одну сторону под огибающей спектра, которая сохраняет свое положение оставаясь неподвижной, а временная картина излучения не изменяется. Этот экспериментальный факт свидетельствует о несостоительности концепции “синхронизации мод”. Ее авторы не представляли себе реалий процессов, происходящих в лазере. Говорить о фазах квазимонохроматических колебаний с шириной спектра в сто килогерц не имеет смысла.

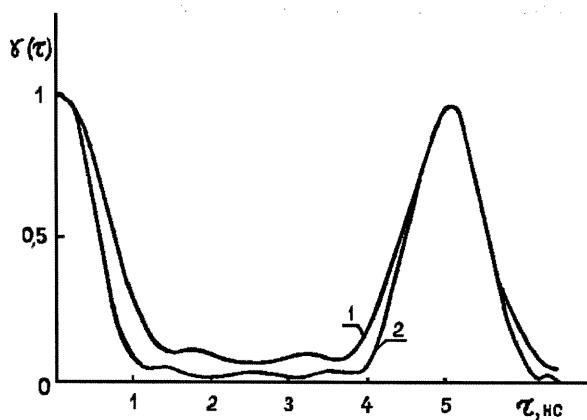


Рис. 10. Огибающая автокорреляционной функции лазера, измеренная с помощью интерферометра Майкельсона (1) и рассчитанная по спектру (2)

Не представляет больших трудностей измерить автокорреляционную функцию излучения такого лазера. Для этого сигнал фотоприемника, установленного на выходе интерферометра Майкельсона с движущимся зеркалом, на который направлялось излучение лазера, усиливался, детектировался, сглаживался с помощью интегрирующей RC-цепочки и направлялся на самописец. Таким образом, самописец непосредственно регистрирует огибающую автокорреляционной функции первого порядка.

На рис. 10 представлены результаты измерений, которые представляют собой зависимость видности интерференционных полос на выходе интерферометра Майкельсона от разности хода интерфирирующих лучей. АКФ лазера представляет собой бесконечную последовательность периодически повторяющихся максимумов. Это означает, что видность интерференционных полос на выходе интерферометра Майкельсона периодически спадает и восстанавливается до первоначального уровня при разностях хода лучей в интерферометре, кратных двойной длине резонатора лазера. В промежутках между максимумами видность полос падает до $\sim 0,06$ от максимального значения, равного 1,0. Ширина максимумов АКФ, измеренная по уровню половинной интенсивности, составляет 39 см. В пересчете во временной масштаб измерений эта ширина равна 1,3 нс. Если предполагать гауссову форму импульсов, генерируемых ла-

зером, то ширина АКФ соответствует импульсу длительностью 0,65 нс. Это значение хорошо согласуется с результатами прямых измерений длительности импульсов, а также с измерениями спектра лазера.

Кривая 2 рис. 10 рассчитана на основании измерений интенсивностей дискретных частот в спектре излучения лазера в предположении о нулевых значениях фаз этих частот. Расхождение между кривыми 1 и 2 связано с погрешностями в определении интенсивностей частот.

Сверхизлучение в полосковом полупроводниковом лазере

Проблему создания полупроводниковых лазеров, генерирующих фемтосекундные импульсы и оптические частотные гребенки с достаточно высокой мощностью излучения можно считать одной из важнейших в современной лазерной физике.

В полупроводниковых лазерах усиление активной среды пропорционально току накачки. Поэтому переход прибора от люминесценции к лазерной генерации можно проследить, изменения ток накачки. Однако в этом случае возникают проблемы регистрации ультракоротких импульсов ввиду малой мощности излучения на ранних стадиях лазерной генерации, недостаточной для генерации второй гармоники излучения, необходимой для измерений автокорреляционной функции (АКФ) второго порядка. Обычно считают, что длительность ультракороткого импульса может быть определена только по АКФ интенсивности или АКФ второго порядка, так как АКФ первого порядка, которую можно легко зарегистрировать и при малых мощностях света, зависит от сдвига фазы несущей частоты излучения. Оптическая длина активной среды полупроводникового лазера, равная порядка 1 мм, позволяет зарегистрировать на автокорреляторе с возможностью изменения разности хода интерферирующих лучей в несколько сантиметров несколько десятков максимумов периодической АКФ. Это открыло новые возможности регистрации длительности фемтосекундных импульсов полупроводниковых лазеров по АКФ первого порядка [34, 35].

Корреляционные измерения излучения, генерируемого полупроводниковыми лазерами

Автокорреляционная функция излучения (АКФ) измеряется коррелятором, представляющим собой интерферометр Майкельсона (рис. 11).

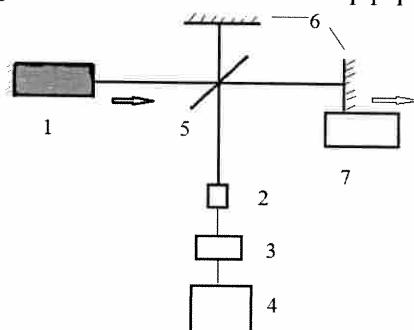


Рис.11. Схема коррелятора. 1 – резонатор полупроводникового лазера, 2 – фотоумножитель, 3 – аналого-цифровой преобразователь, 4 – компьютер, 5 – светоделительное зеркало, 6 – зеркала интерферометра Майкельсона, 7 – микрометрический столик с приводом от электродвигателя.

Одно из зеркал интерферометра 6 закреплено на столике 7 и смещается вдоль светового луча микрометрическим винтом с приводом от синхронного электродвигателя через редуктор. Скорость движения зеркала выбирается такой, чтобы регистрирующая система прописывала интерференционные полосы, последовательно возникающие и исчезающие на выходе интерферометра при движении зеркала. В качестве фотоприемника использовался фотодиод или фотоумножитель.

Сигнал с фотоприемника подается на аналого-цифровой преобразователь, выходной цифровой сигнал с которого регистрируется компьютером. Сигнал представляет собой автокорреляционную функцию первого порядка. На выходе автокоррелятора на среднюю мощность излучения лазера накладываются интерференционные полосы, расположенные под общей огибающей, которая периодически образует максимум, когда интерферирующие импульсы пространственно перекрываются и лучи находятся в фазе и минимум, который соответствует наложению лучей в противофазе.

Огибающая АКФ симметрична относительно нулевой разности хода лучей в интерферометре. Максимумы огибающей возникают при сдвиге разности хода от нулевого положения, кратном четному числу проходов света по лазерному резонатору: 2, 4, 6 Временная задержка между интерферирующими лучами в корреляторе равна, очевидно, разности хода лучей, деленной на скорость света c .

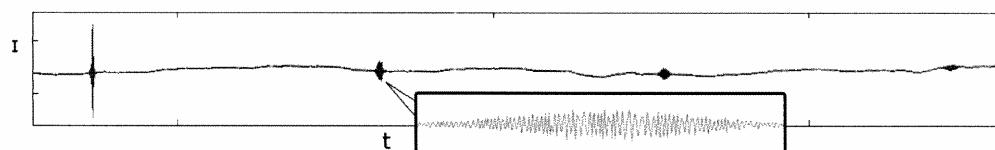


Рис. 12. АКФ излучения полупроводникового полоскового лазера, генерирующего на длине волны 0,65 мкм. По мере увеличения разности хода лучей максимумы АКФ расширяются

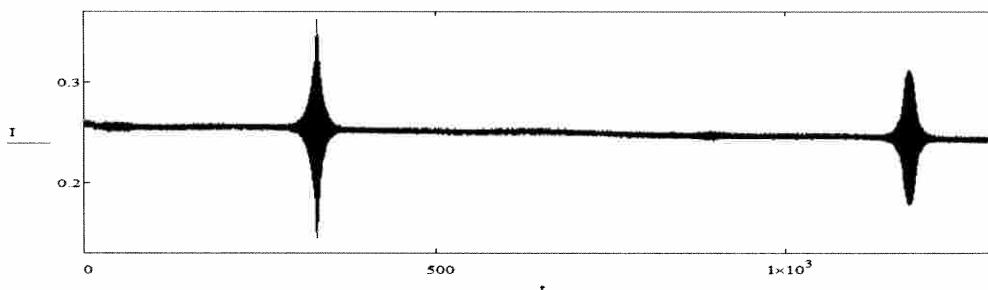


Рис. 13. Автокорреляционная функция излучения лазера для тока накачки 27 мА ниже порога стационарной генерации лазера (30 мА)

Глядя на рис. 11 можно заметить, что максимумы огибающей более высоких, чем нулевой, порядков возникают при тех же условиях, что и при регистрации кросс-корреляционной функции излучения, когда интерферируют два луча, один из которых прошел через исследуемый образец дополнительно четное число раз, по отношению к опорному лучу, распространяющемуся по воздуху. В данном случае роль образца играет сам лазерный диод. Следовательно,

наблюдаемое последовательное уширение максимумов огибающей АКФ обусловлено влиянием дисперсии активной среды лазера. Известно, что уширение кросс-корреляционной функции пропорционально длине образца, в данном случае числу обходов светом лазерного резонатора, умноженному на его оптическую длину. Таким образом регистрация ширины максимумов АКФ нескольких порядков позволяет определить дисперсионный параметр второго порядка активной среды лазера.

В приближении гауссовой формы огибающей импульса уширение импульса (и максимумов АКФ) с исходной длительностью τ_0 , прошедшего слой среды с дисперсией длиной L записывается в виде [33].

$$\tau(L) = \tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{4L \ln 2k_0''}{\tau_0^2} \right)}, \quad (4)$$

где k_0'' – дисперсионный параметр второго порядка среды. Из формулы (4) следует, что при нулевом значении дисперсионного параметра второго порядка импульс, прошедший через слой среды не уширяется.

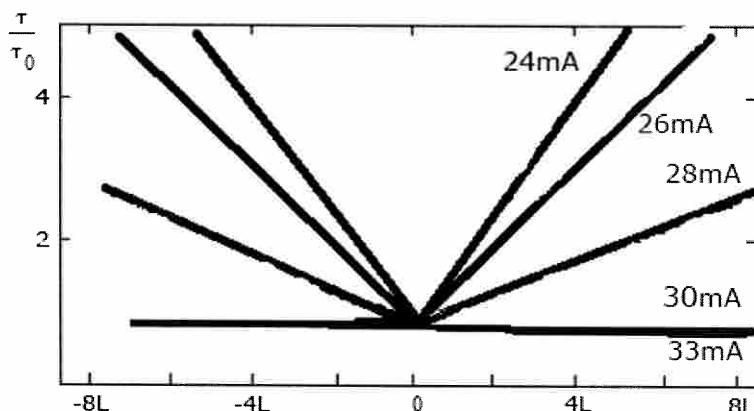


Рис. 14. Типичная зависимость относительного уширения максимумов АКФ излучения полупроводникового лазера, работающего при разных токах накачки, от разности хода лучей в корреляторе

Для импульса гауссовой формы ширина максимума АКФ в 2,1 раза превышает длительность импульса [33].

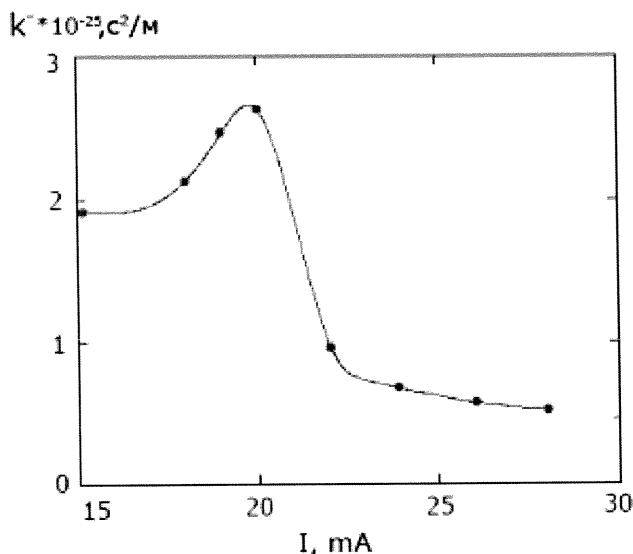


Рис. 15. Зависимость дисперсионного параметра второго порядка активной среды полупроводникового лазера от тока накачки, определенная по измерениям уширения последовательных максимумов АКФ

Особенностью измерений АКФ излучения полупроводниковых лазеров является возможность измерения большого количества последовательных максимумов АКФ, которые возникают при изменении разности хода лучей в корреляторе, равном двойной оптической длине резонатора лазера. При возрастании разности хода в корреляторе максимумы АКФ последовательно уширяются при соответствующем уменьшении их амплитуды (рис. 12, 13). Эта особенность АКФ связана с дисперсией света в активной среде лазера. Она и позволяет измерить дисперсионный параметр второго порядка активной среды, используя соотношение (4) [34].

Результаты таких измерений для излучения полоскового полупроводникового лазера, работающего при разных токах накачки, показаны на рис. 15.

При некотором минимальном токе накачки полупроводникового лазера наблюдается единственный максимум АКФ, регистрируемый вблизи нулевой разности хода интерферирующих лучей коррелятора. Этот максимум соответствует спектру люминесценции лазерного диода. Затем, при некотором пороговом токе накачки (~ 10 мА) в АКФ становится заметным максимум второго порядка. Его возникновение свидетельствует о появлении периодичности огибающей АКФ. Это означает, что в лазерном резонаторе начинает циркулировать спонтанно возникший ультракороткий импульс.

Для тока накачки 33 мА, находящегося вблизи порога стационарной генерации для некоторого образца лазера, АКФ излучения лазера представляет собой слабо затухающую последовательность интерференционных максимумов. Дисперсионный параметр второго порядка, вызывающий дисперсионное уширение импульса, циркулирующего в лазерном резонаторе, при этом стремится к нулю (рис. 15).

Для тока накачки 29 мА, находящегося вблизи порога стационарной генерации АКФ излучения данного образца лазера представляет собой слабо затухающую последовательность интерференционных максимумов (рис. 16) [35]. Это свидетельствует о том, что фазовая модуляция несущей частоты излучения отсутствует и лазер генерирует практически спектрально ограниченные импульсы. Дисперсионный параметр второго порядка, вызывающий дисперсионное уширение импульса, циркулирующего в лазерном резонаторе, при этом стремится к нулю. Это предоставляет уникальную возможность прямо измерить длительность фемтосекундного импульса по ширине максимума АКФ.

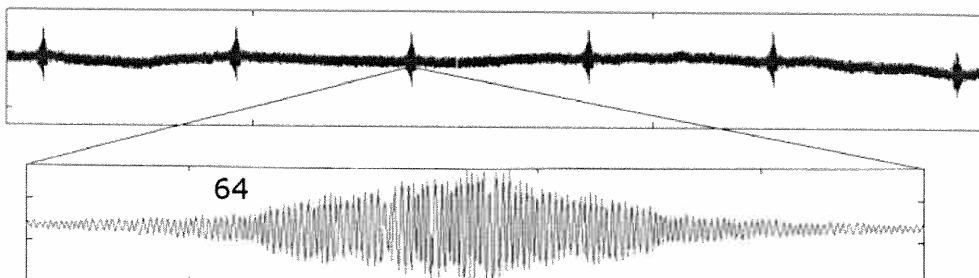


Рис. 16. Слабо затухающая АКФ излучения лазера при токе накачки (29 мА), при котором лазер генерирует практически спектрально ограниченные импульсы.

На вставке изображен максимум АКФ, зарегистрированный с разрешением интерференционных полос, содержащий по уровню 0,5 от максимума 64 полосы

Как известно [34], ширина максимума АКФ превышает ширину импульса (в гауссовом приближении) в 2,1 раза. Ненулевой максимум АКФ на рис. 16 по уровню 0,5 от максимального значения, содержит 64 интерференционных полосы. Временная задержка в корреляторе, соответствующая сдвигу интерференционной картины на одну полосу равна $\lambda/c = 2,17$ фс. Это означает, что длительность фемтосекундного импульса равна 66 фс. Точность измерения определяется степенью оправданности используемых приближений: гауссовой формы импульса и спектральной ограниченности импульсов. Судя по степени уширения последовательных максимумов АКФ, которая все же имеет место, погрешность измерения можно оценить порядком 10%.

Периодичность АКФ возникает для тока накачки ~ 10 мА. Дисперсия активной среды при таких токах накачки, как показали измерения, имеет большое значение. Поэтому максимумы АКФ порядков более высоких, чем второй, зарегистрировать на используемой установке не удается.

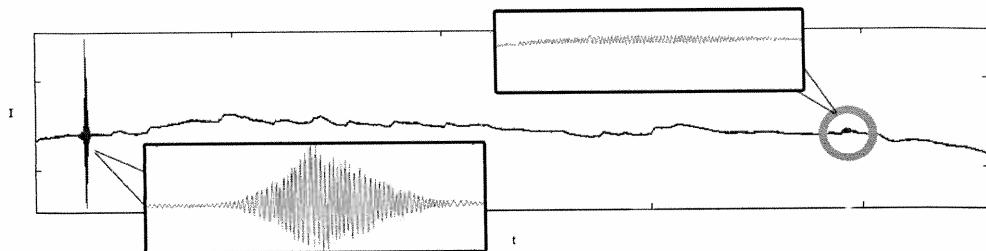


Рис. 17. АКФ лазера для тока накачки (13 мА), при котором для данного лазера регистрируется единственный второй максимум АКФ, свидетельствующий о возникновении на выходе лазера периодической последовательности фемтосекундных импульсов. На вставках показаны максимумы АКФ, снятые с разрешением интерференционных полос

Эволюция гребенки происходит в процессе формирования пространственной структуры излучения лазера, показанной на рис. 18.

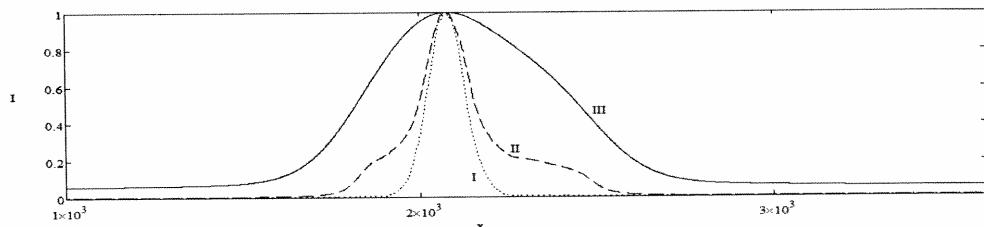


Рис. 18. Нормированное пространственное распределение излучения полоскового полупроводникового лазера. Кривая I соответствует току 38 мА (лазерная генерация), кривая II – 29 мА (режим сверхизлучения), кривая III – 7 мА (люминесценция лазерного диода)

Спектр излучения полупроводниковых лазеров для разных токов накачки

Малая оптическая длина резонатора полупроводникового лазера обуславливает возможность регистрации дискретной “модовой” структуры спектра при использовании стандартного спектрального прибора (рис. 19).

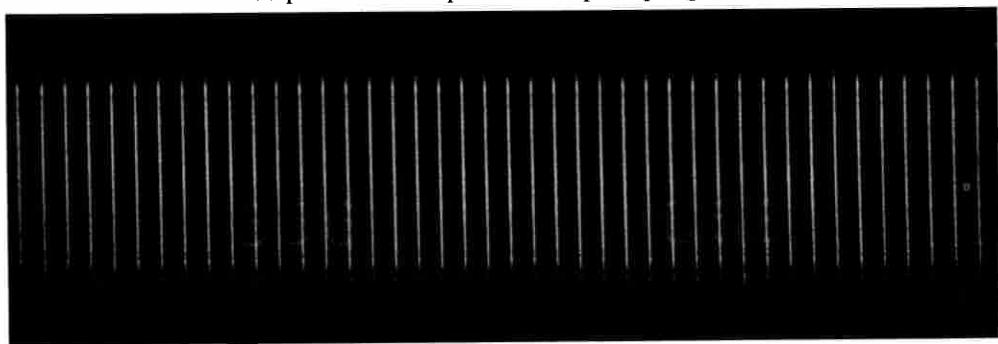


Рис. 19. Оптическая частотная гребенка, генерируемая полупроводниковым лазером

Спектр генерации измерялся цифровой камерой на выходе спектрографа ДФС-8, а также путем сканирования спектра на выходе спектрографа щелью. Спектральное разрешение спектрографа ДФС-8 достаточно для уверенного разрешения продольных мод резонатора лазера.

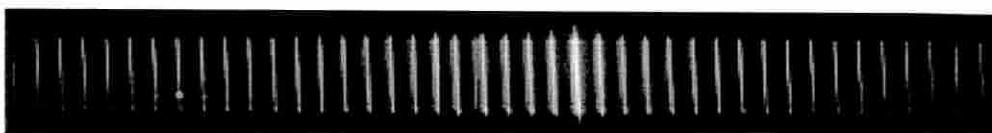


Рис. 20. Спектр оптической частотной гребенки полупроводникового лазера для случая тока накачки несколько превышающего пороговое значение стационарной генерации (35 мА)

На рис. 19, 20. показаны спектры излучения полупроводникового лазера, снятые с высоким разрешением, позволяющим наблюдать его дискретную структуру. Расстояние между дискретными частотами спектра строго постоянно и равно $c/2L$, где L – оптическая длина лазерного резонатора. Однако эти частоты не являются стационарными продольными модами резонатора лазера (как обычно считают). Они возникают в спектральном приборе при разложении в спектр строго периодической последовательности ультракоротких импульсов, излучаемых лазером. Такой спектр характерен для периодических процессов и следует из преобразований Фурье. Периодичность импульсов обусловлена тем, что в резонаторе циркулирует единственный импульс, который после каждого обхода резонатора появляется на его выходе. При токе накачки ниже порогового значения коэффициент усиления меньше потерь излучения и стационарные моды резонатора существовать не могут, они должны быть затухающими. Поэтому дискретная структура спектра рис. 19 есть простое следствие периодических пульсаций выходного излучения лазера.

Превышение порога стационарной генерации приводит к доминированию вынужденного излучения, которое выделяет из частотной гребенки частоты, находящиеся вблизи максимума спектрального контура усиления активной среды, резкому сужению спектра генерации и увеличению длительности ультракоротких импульсов (рис. 21).

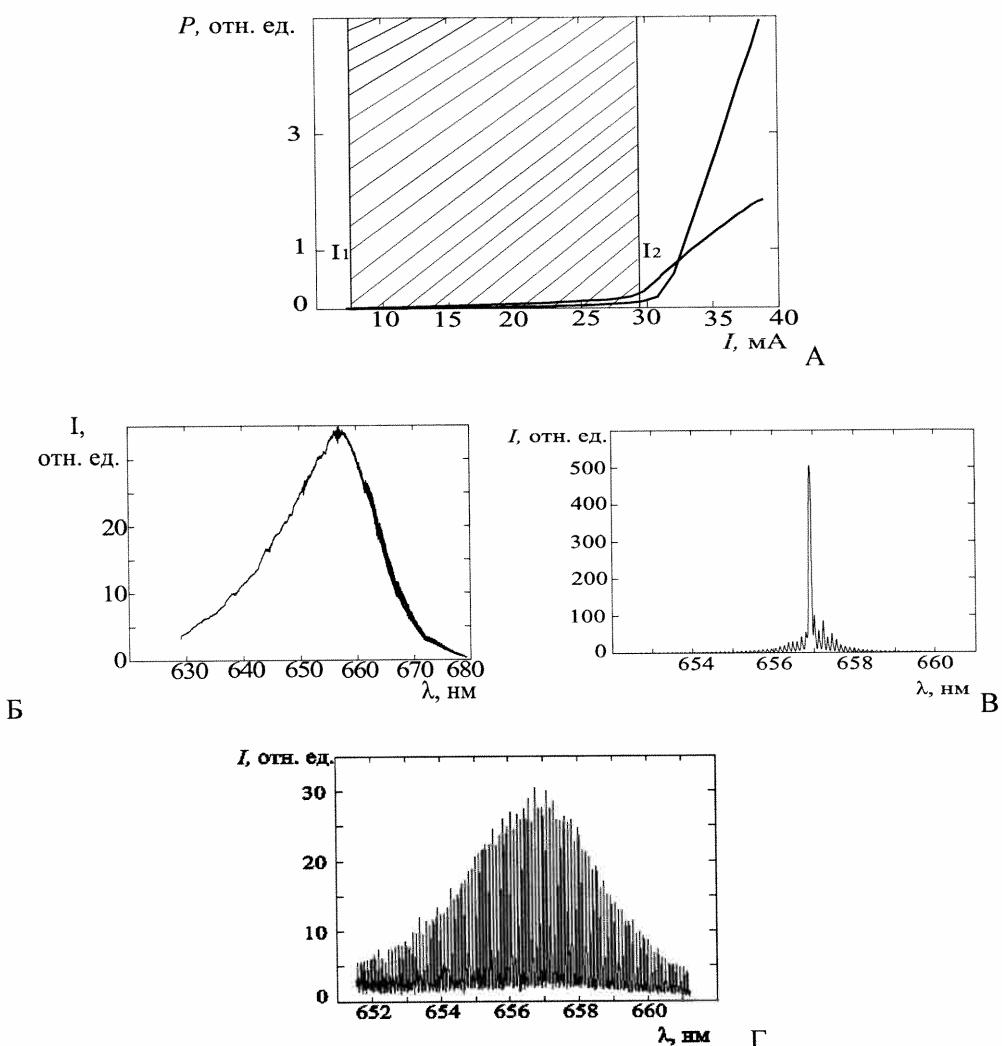


Рис. 21. Характеристическая кривая лазера (А) и спектры разных видов излучения, которые доминируют в полупроводниковом лазере в определенном диапазоне токов накачки: усиленная люминесценция (Б), лазерная генерация (В) и сверхизлучение (Г)

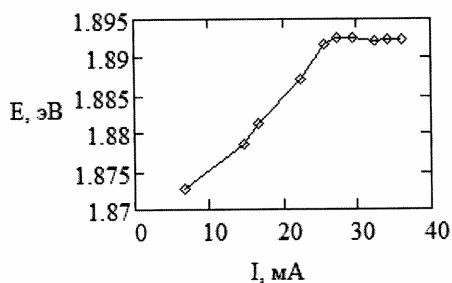


Рис. 22. Зависимость положения максимума спектра излучения лазера от тока накачки

Спектры излучения лазеров существенно зависят от тока накачки. Было обнаружено, что для токов накачки существенно меньших пороговых токов лазерной генерации, спектры излучения представляют собой оптическую гребенку. Эта гребенка возникает при токах накачки примерно в два раза меньше пороговых для возникновения лазерной генерации. При этом максимум спектра гребенки, как и предсказывает теория, смещен в красную область спектра. Зависимость положения максимума гребенки от тока накачки показана на рис. 22. При возникновении гребенки тонкая структура спектра близка к синусоидальной форме (рис. 23).

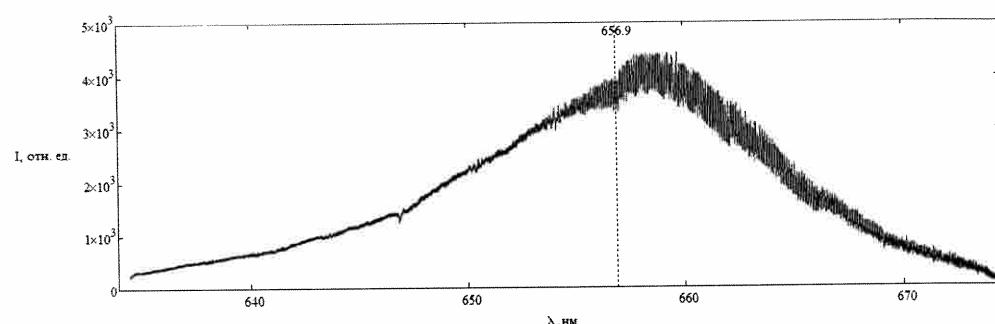


Рис. 23. Спектр зарождения оптической гребенки при токе накачки 14 мА сдвинут в красную сторону по отношению к максимуму спектра люминесценции

Заключение

Приведенные результаты экспериментов показывают, что именно сверхизлучение активной среды лазеров разных типов – важнейший фундаментальный физический процесс, определяющий генерацию лазером ультракоротких импульсов и, следовательно, спектр и динамику излучения лазера на стадии возникновения лазерной генерации.

Сверхизлучение – истинная причина генерации ультракоротких импульсов лазерами, а “синхронизация мод” – простое следствие циркуляции ультракороткого импульса сверхизлучения в лазерном резонаторе, приводящей к периодическим пульсациям излучения на выходе лазера.

Сценарий возникновения и генерации ультракоротких импульсов гелий-неоновыми и полупроводниковыми лазерами, которые наблюдались экспериментально, принципиально отличается от общепринятого и излагаемого в многочисленных учебниках и монографиях механизма “синхронизации продольных мод лазерного резонатора”. “Синхронизация мод” может реализовываться только в процессе квазистационарной лазерной генерации, возникающей при накачке выше пороговой. Поэтому общепринятая концепция генерации ультракоротких импульсов лазерами, которую связывают с “синхронизацией продольных мод лазерного резонатора”, скорее всего, ошибочна и материалы монографий и учебников, например [2–9], должны быть пересмотрены.

При “синхронизации мод” выполняются два простых соотношения. Расстояния между строго дискретными частотами спектра $\Delta\nu$ обратно пропорцио-

нальны периоду следования импульсов $\Delta v = 1/T$. Длительность ультракороткого импульса сверхизлучения Δt всегда имеет минимальное для данной активной среды значение, так как она – результат кооперативного излучения миллионов активных частиц. Она обратно пропорциональна общей ширине спектра усиления активной среды δv : $\Delta t = k/\delta v$, значение константы k зависит от формы импульса. Для импульсов гауссовой формы $k = 0,44$. В концепции сверхизлучения активной среды в лазерном резонаторе эти соотношения имеют простое и наглядное объяснение.

Таким образом физическая причина возникновения и генерации ультракоротких импульсов лазерами, вообще не связана с генерирующими модами лазерного излучения. Ультракороткие импульсы спонтанно возникают как прецельно короткие для данной усиливающей среды импульсы сверхизлучения до появления лазерной генерации.

Полосковый полупроводниковый лазер с непрерывной накачкой постоянным током способен генерировать фемтосекундные импульсы длительностью короче 100 фс без использования специальных методов “синхронизации мод”.

Актуальной задачей лазерной физики становится создание и оптимизация параметров многоэлементных решеток полупроводниковых лазеров, синхронно излучающих фемтосекундные импульсы достаточно высокой мощности.

Автор выражает благодарность аспирантам Могилевского госуниверситета имени А.А. Кулешова, принимавшим участие в исследованиях: Е.О. Котяшеву, В.В. Макаревич и М.И. Марушенко.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Maiman, T. H.* The Laser Odyssey. Laser Press. Blaine, WA, 2000. Мейман Теодор. Лазерная одиссея. – М. : Печатные традиции, 2010. – 224 с.
2. *Siegman, A.* Lasers. University Science Book, Mill Valley, California. 1986. – 1267 p.
3. *Звелто, О.* Принципы лазеров / О. Зелто. – СПб. : Лань, 2008. – 720 с.
4. *Крюков, П. Г.* Фемтосекундные импульсы / П. Г. Крюков. – М. : Физматлит, 2008. – 208 с.
5. *Козлов, С. А.* Основы фемтосекундной оптики / С. А. Козлов, В. В. Самарцев. – М. : Физматлит, 2009. – 292 с.
6. Ultrafast Lasers. Ed / M. E. Fermann, A. Galvanauskas, G. Sucha. Marstl Dekker, inc. 2003. – 784 p.
7. *Weiner, A. W.* Ultrafast Optics. A John Wiley & Sons inc. Publication, 2009. – 580 p.
8. *Diels, J. C., Rudolph, W.* Ultrashort Laser Pulse Phenomena. Second edition. Elsevier. 2006. – 652 p.
9. Интернет. Википедия. Лазеры сверхкоротких импульсов.
10. *Dicke, R. H.* // Phys. Rev. – V. 93. – P. 99. (1954).
11. *Аллен, Л.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы / Л. Аллен, Д. Эберли. – Москва : Мир, 1978. – 223 с.
12. *Skribanovitz N., Herman, I. P., MacDillary, J. C., Feld, M. S.* // Phys. Rev. Lett. – V. 30. – № 8. – P. 309 (1973).
13. *Андреев, А. В.* Оптическое сверхизлучение: новые идеи и новые эксперименты / А. В. Андреев // Успехи физических наук. – 1990. – Т. 160, вып. 12. – С. 1–46.

14. Железняков, В. В. Волны поляризации и сверхизлучение в активных средах / В. В. Железняков, В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский // Успехи физических наук. – 1989. – Т. 159, вып. 2. – С. 193–260.
15. Варнавский, О. П., Киркин, Ф. М., Леонтович, А. М. [и др.] // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 86. – С. 1227.
16. Ultrashort pulse generation from 1.56 μm mode-locked VECSEL at room temperature / A. Khadour [et al.] // Opt. Express. – 2010. – Vol. 18, № 19. – P. 19902–19913.
17. Mode-locked InGaAs-AlGaAs disk laser generating sub-200-fs pulses, pulse picking and amplification by a tapered diode amplifier / P. Klopp [et.al.] // Opt. Express. – 2009. – Vol. 17, № 13. – P. 10820–10834.
18. Femtosecond high-power quantum dot vertical external cavity surface emitting laser / M. Hoffmann [et al.] // Opt. Express. – 2011. – Vol. 19, № 9. – P. 8108–8116.
19. Васильев, П. П. Сверхизлучение в полупроводниковых лазерах / П. П. Васильев // Квантовая электроника. – 1997. – 24, № 10. – С. 885–890.
20. Васильев, П. П. Роль сильного усиления среды в возникновении сверхизлучения и наблюдении когерентных эффектов в полупроводниковых лазерах / П. П. Васильев // Квантовая электроника. – 1999. – 29, № 1. – С. 4–8.
21. Лебедев, В. И. Особенности генерации фемтосекундных импульсов полосковым полупроводниковым лазером / В. И. Лебедев, М. И. Марушенко // Веснік МДУ ім'я А. А. Кулляшова. Сер, В. Природазнаўчыя наука (матэматыка, фізіка, біялогія). – № 1(47). – 2016. – С. 54–61.
22. Лебедев, В. И. Особенности формирования АКФ излучения фс полупроводникового лазера / В. И. Лебедев, М. И. Марушенко // Электроника ИНФО. – № 1. – 2014. – С. 42–44.
23. Лазер – источник когерентного света / О. И. Крохин. – УФН. – Т. 181, № 1. – С. 5. (2011).
24. Lebedev, V., Kotiashov, E., Makarevich, V. Generation of regular fs pulses in AlGaInP semiconductor laser. Optics Communications – 284 p. 3008 – 3010 (2011).
25. Modeling of mode locking in a laser with spatially separate gain media / R. M. Oldenbeuving [et al.] // Opt. Express. – 2010. – Vol. 18, № 22. – P. 22996–23008.
26. Ultrafast pulse interactions with two-level atoms / R. W. Ziolkowski [et al.] // Phys. Rev. A. – 1995. – Vol. 52, № 4. – P. 3082–3094.
27. Механизм сверхизлучения Дике в полупроводниковых гетероструктурах / Л. Я. Каракинский [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2004. – Т. 38, вып. 7. – С. 872–876.
28. Makarevich, V. V. FDTD stimulation of fs pulses in stmicondor laser under DC pumping current / V. V. Makarevich, Y. O. Katsiashov // Проблемы физики, математики и техники. – № 4(13). – 2012. – С. 21–25.
29. Котяшев, Е. О. Компьютерное моделирование когерентного взаимодействия ультракороткого лазерного импульса с активной средой / Е. О. Котяшов // Веснік МДУ ім'я А. А. Кулляшова. – 2010. – № 2(36). – С. 35–42.
30. Борисов, В. И., Лебедев, В. И. Лазеры и оптич. нелин. : матер. 9 Бел. лит. семин. – Минск, 1989. – С. 41–44.
31. Soffer, B. H., Hoskins, R. H. Nature / 204, 276, (1964).
32. Борисов, В. И., Лебедев, В. И. Квантовая электроника. – М., 1986. – Т. 13. – С. 1712–1714.
33. Борисов, В. И. Введение в оптику ультракоротких лазерных импульсов / В. И. Борисов, В. И. Лебедев, С. Н. Перепечко. – Могилев, 2005. – 328 с.

34. **Борисов, В. И., Лебедев, В. И.** // ЖПС. – 1992. – Т. 57. – № 3. – С. 340.
35. **Марушенко, М. И.** Измерение длительности фемтосекундных импульсов полупроводникового лазера по АКФ первого порядка / М. И. Марушенко // Веснік МДУ імя А. А. Кулешова. – Сер. В, Прыродазнаўчыя науку (матэматыка, фізіка, біялогія). – № 1(47). – 2016. – С. 62–65.

Поступила в редакцию 26.09.2016 г.

Контакты: vilebedev@newmail.ru (Лебедев Владимир Иванович)

Lebedev V. I. LASER SUPER-RADIATION.

The article highlights the results of the author's long-term experiments with different types of lasers proving that a cooperative effect of super-fluorescence determines the spectrum and dynamics of laser. The conception of super-fluorescence changes the flawed theory of mode synchronization of ultrashort pulse lasers.

Keywords: ultrashort pulse lasers, super-fluorescence, laser spectrum and dynamics.

УДК 539.144

ЗАДАЧА О ЧАСТИЦЕ В СФЕРИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЯМЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ОЦЕНКАМ ЭНЕРГИЙ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ Λ-ГИПЕРЯДЕР

C. M. Чернов

кандидат физико-математических наук, доцент,

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Проведены численные расчеты энергетических уровней возбужденных состояний гиперядер. Анализ проводился в рамках двухчастичной модели с потенциалами в виде сферической прямоугольной ямы.

Ключевые слова: гиперядра, энергия основного и возбужденных состояний, сферическая прямоугольная потенциальная яма.

Введение

В настоящее время среди открытых гиперядер (связанных состояний Λ -гиперона и нуклонов) обнаружена группа гиперядер, которые могут находиться не только в основном, но и в возбужденных состояниях [1]. При этом следует различать два типа возбуждения гиперядра. Во-первых, в гиперядре, представляющим собой в первом приближении связанную систему нуклонного остова и Λ -гиперона, ядерный остов находится в основном состоянии, а гиперон – на орбитах $1p$, $1d$ и т. д. (в представлении ядерных оболочек). Для характеристики одночастичных состояний Λ -гиперона из-за малости спин-орбитального взаимодействия достаточно указать лишь его орбитальный момент, в то время как нуклонные состояния характеризуются орбитальным и полным моментами. Важно отметить, что качество и наглядность этих данных выше, чем в обычных ядрах, особенно в области тяжелых элементов [1]. Во-вторых, наблюдаются возбужденные состояния Λ -гиперядер другой природы – когда гиперон находится в нижайшем ($1s$) состоянии, а возбуждено ядро-остов. Этот тип возбуждения в настоящей работе мы рассматривать не будем.

Таким образом, основное внимание будет уделяться анализу одночастичных состояний гиперядер в рамках модели $\Lambda +$ нуклонный остов. При этом ограничимся рассмотрением систем со стабильными ядрами, для которых надежно определяются размеры, например, из опытов по электронному рассеянию. Задача состоит в определении массовых чисел гиперядер, которые способны иметь возбужденные состояния, а также положение соответствующих энергетических уровней. Эта проблема будет рассматриваться на основе однородной модели [2] с потенциалами $V_{\Lambda 0}(r)$ в виде прямоугольной сферической ямы для орбитальных моментов $l \leq 4$. Решение аналогичной задачи имеется во

всех руководствах по квантовой механике, но, как правило, лишь для случая $l=0$ [3] (см. также [4]). Поэтому в основной части вначале приводится решения этой задачи для любых $l \neq 0$, и затем полученные результаты применяются для анализа возбужденных состояний некоторых гиперядер. В заключении проведено сравнение численных расчетов с имеющимися экспериментальными данными.

Основная часть

1. Частица в сферической прямоугольной яме

Пусть частица массы μ (в дальнейшем – приведенная масса гиперядра) движется с энергией $E = -B$ внутри сферической прямоугольной ямы ширины r_0 и глубины $-V_0$. Радиальная часть волновой функции частицы $f_l(r) = rR_l(r)$ (где $l = 0, 1, 2, \dots$ – орбитальное квантовое число) является решением радиального уравнения Шредингера [3]

$$\frac{d^2 f_l(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] f_l(r) = 0, \quad (1)$$

с граничным условием: $f_l(0) = 0$. Кроме того, функция $f_l(r)$ должна быть однозначной и непрерывной вместе со своей первой производной во всем пространстве, включая граничную точку $r = r_0$. Для получения дисперсионного уравнения, связывающее энергию частицы с параметрами поля, найдем решение уравнения (1) внутри и вне ямы и сошьем оба решения при $r = r_0$.

1) $0 \leq r \leq r_0$

Внутри ямы уравнение (1) принимает вид уравнения Риккати – Бесселя

$$f_l''(r) + \left(\beta^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) f_l(r) = 0, \quad (2)$$

где введено обозначение

$$\beta^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 - B). \quad (3)$$

Регулярные решения уравнения (2) связаны с функциями Бесселя полузелого порядка:

$$f_l(r) = j_l(\beta r) = \sqrt{\frac{\pi r}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(\beta r),$$

которые простым образом выражаются через тригонометрические и степенные функции:

$$j_0(x) = \sin x; \quad j_1(x) = \frac{1}{x} \sin x - \cos x;$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x; \quad j_3(x) = \frac{3}{x} \left(\frac{5}{x^2} - 2 \right) \sin x + \left(1 - \frac{15}{x^2} \right) \cos x.$$

$$j_4 = \left(1 - \frac{45}{x^2} + \frac{105}{x^4}\right) \sin x + \frac{5}{x} \left(2 - \frac{21}{x^2}\right) \cos x. \quad (4)$$

Полезно указать рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют функции Бесселя:

$$\begin{aligned} j_{l+1}(x) &= \frac{2l+1}{x} j_l(x) - j_{l-1}(x), \quad (l=1,2,3,\dots) \\ \frac{dj_l(x)}{dx} &= j_{l-1}(x) - \frac{l}{x} j_l(x) \end{aligned} \quad (5)$$

2) $r > r_0$

Вне ямы уравнение (1) имеет вид

$$f''_2(r) - \left(\gamma^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}\right) f_2(r) = 0, \quad (6)$$

где обозначено

$$\gamma^2 = \frac{2\mu B}{\hbar^2}. \quad (7)$$

Будем искать решения уравнения (6) с правильной асимптотикой ($\exp(-\gamma r)$) в виде:

$$f_2(r) = \exp(-\gamma r) \varphi(r), \quad (8)$$

где $\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi''(r) - 2\gamma\varphi'(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\varphi(r) = 0. \quad (9)$$

Представим решения уравнения (9) в виде обобщенного ряда

$$\varphi(r) = r^\delta \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n, \quad (10)$$

подстановка которого в уравнение (9) приводит к условию:

$$\begin{aligned} \alpha_0 [\delta(\delta-1) - l(l+1)] r^{\delta-2} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k [(\delta+k-1)(\delta+k) - l(l+1)] - 2\gamma(\delta+k-1)\alpha_{k-1} \right\} r^{\delta+k-2} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Последнее соотношение справедливо для всех r лишь в том случае, если положить

$$\delta = -l, \quad (12)$$

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} \frac{2\gamma(k-l-1)}{k(k-2l-1)}. \quad (13)$$

В частности, для различных значений $l \leq 4$ имеем:

$$l=1 \Rightarrow \alpha_k = \alpha_{k-1} \frac{2\gamma(k-2)}{k(k-3)};$$

$$\alpha_1 = \gamma\alpha_0; \quad \alpha_k = 0 \quad (k \geq 2). \quad (14a)$$

$$l=2 \Rightarrow \alpha_k = \alpha_{k-1} \frac{2\gamma(k-3)}{k(k-5)};$$

$$\alpha_1 = \alpha_0\gamma; \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}\gamma^2\alpha_0; \quad \alpha_k = 0 \quad (k \geq 3). \quad (14b)$$

$$l=3 \Rightarrow \alpha_k = \alpha_{k-1} \frac{2\gamma(k-4)}{k(k-7)};$$

$$\alpha_1 = \alpha_0\gamma; \alpha_2 = \frac{2}{5}\gamma^2\alpha_0; \alpha_3 = \frac{1}{15}\gamma^3\alpha_0; \alpha_k = 0 \quad (k \geq 4). \quad (14c)$$

$$l=4 \Rightarrow \alpha_k = \alpha_{k-1} \frac{2\gamma(k-5)}{k(k-9)};$$

$$\alpha_1 = \alpha_0\gamma; \alpha_2 = \frac{3}{7}\gamma^2\alpha_0; \alpha_3 = \frac{2}{21}\gamma^3\alpha_0; \alpha_4 = \frac{1}{105}\gamma^4\alpha_0; \alpha_k = 0 \quad (k \geq 5). \quad (14d)$$

Таким образом, полные решения $f_i^{(l)}(r)$ имеют вид:

s-состояние ($l=0$)	
$f_1^{(0)}(r) = A \sin(\beta r)$	$f_2^{(0)}(r) = B e^{-\gamma r}$
p-состояние ($l=1$)	
$f_1^{(1)}(r) = A \left(\frac{1}{\beta r} \sin \beta r - \cos \beta r \right)$	$f_2^{(1)}(r) = B e^{-\gamma r} \left(1 + \frac{1}{\gamma r} \right)$
d-состояние ($l=2$)	
$f_1^{(2)}(r) = A \left(\left(\frac{3}{(\beta r)^2} - 1 \right) \sin \beta r - \frac{3}{(\beta r)} \cos \beta r \right)$	$f_2^{(2)}(r) = B e^{-\gamma r} \left(1 + \frac{3}{\gamma r} + \frac{3}{(\gamma r)^2} \right)$
f-состояние ($l=3$)	
$f_1^{(3)}(r) = A \left(\left(\frac{15}{(\beta r)^3} - \frac{6}{\beta r} \right) \sin \beta r + \left(1 - \frac{15}{(\beta r)^2} \right) \cos \beta r \right)$	$f_2^{(3)} = B e^{-\gamma r} \left(1 + \frac{6}{\gamma r} + \frac{15}{(\gamma r)^2} + \frac{15}{(\gamma r)^3} \right)$
g-состояние ($l=4$)	
$f_1^{(4)} = A \left[\left(1 - \frac{45}{(\beta r)^2} + \frac{105}{(\beta r)^4} \right) \sin(\beta r) + \right. \\ \left. + \frac{5}{\beta r} \left(2 - \frac{21}{(\beta r)^2} \right) \cos(\beta r) \right]$	$f_2^{(4)} = B e^{-\gamma r} \left[1 + \frac{10}{\gamma r} + \right. \\ \left. + \frac{45}{(\gamma r)^2} + \frac{105}{(\gamma r)^3} + \frac{105}{(\gamma r)^4} \right]$

Сшивая решения в точке $r = r_0$: $f'_1(r_0)/f_1(r_0) = f'_2(r_0)/f_2(r_0)$, получим соответствующие дисперсионные уравнения $F_l(x, y) = 0$ ($l = 0, 1, 2, 3, 4$), которые имеют вид:

$$F_0(x, y) = y + x \cdot ctgx = 0, \quad (15a)$$

$$F_1(x, y) = \frac{(1+y+y^2)}{(y+1)} - \frac{[x \cos x + (x^2 - 1)\sin x]}{(x \cos x - \sin x)} = 0, \quad (15b)$$

$$F_2(x, y) = \frac{(y^3 + 3y^2 + 6y + 6)}{(y^2 + 3y + 3)} - \frac{[3(x^2 - 2)\sin x + x(6 - x^2)\cos x]}{[(x^2 - 3)\sin x + 3x\cos x]} = 0, \quad (15c)$$

$$\begin{aligned} F_3(x, y) &= \frac{(y^4 + 6y^3 + 21y^2 + 45y + 45)}{(y^3 + 6y^2 + 15y + 15)} - \\ &- \frac{[(x^4 - 21x^2 + 45)\sin x + x(6x^2 - 45)\cos x]}{[(15 - 6x^2)\sin x + x(x^2 - 15)\cos x]} = 0. \end{aligned} \quad (15d)$$

$$\begin{aligned} F_4(x, y) &= \frac{(y^5 + 10y^4 + 55y^3 + 195y^2 + 420y + 420)}{(y^4 + 10y^3 + 45y^2 + 105y + 105)} + \\ &+ \frac{[x(x^4 - 55x^2 + 420)\cos x + 5(-2x^4 + 39x^2 - 84)\sin x]}{[(x^4 - 45x^2 + 105)\sin x + 5x(2x^2 - 21)\cos x]} \end{aligned} \quad (15e)$$

Здесь введены обозначения:

$$x = \beta r_0; \quad y = \gamma r_0. \quad (16)$$

Заметим, что переменные x и y связаны уравнением окружности

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (17)$$

радиус которой не зависит от энергии частиц E , а определяется лишь параметрами потенциала

$$R^2 = \frac{2\mu V_0 r_0^2}{\hbar^2}. \quad (18)$$

На рисунке 1, в качестве примера, представлено графическое решение системы уравнений (15a) и (17) при $R = 6$ для частицы с орбитальным моментом $l = 0$.

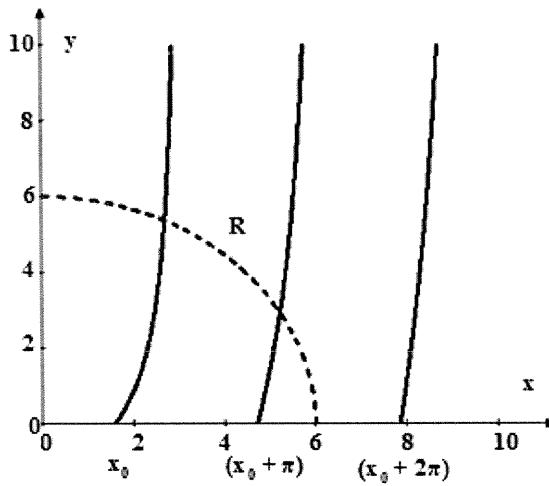


Рисунок 1. Графіческое решение системы уравнений (15a) и (17)
для случая $R = 6$ и частицы с орбитальным моментом $l = 0$

Кривые $y(x)$ пересекают ось x в точках $x^l = x_0 + \pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Аналогичная ситуация имеет место и для других случаев $l > 0$, однако, положение минимальной координаты x_0 смещается вправо с ростом l в сторону больших значений. В частности, для s, p, d, f, g состояний минимальный корень уравнения $F_l(x_0^l, 0) = 0$ равен:

$$x_0^s = 1,571; \quad x_0^p = 3,142; \quad x_0^d = 4,493; \quad x_0^f = 5,763; \quad x_0^g = 6,988. \quad (19)$$

Отсюда видно, что в яме появляется единственный уровень энергии с заданным значением l , если параметры потенциала, определяющие значение R (18), такие, которые удовлетворяют условию $x_0^l \leq R \leq x_0^l + \pi$. При $R > x_0^l + \pi$ частица может иметь два и более дискретных энергетических уровней, как это видно на рисунке 1. Если R задано, то число возбуждаемых уровней в яме N можно определить по формуле

$$N = \left\{ 1 + \frac{R - x_0^l}{\pi} \right\}, \quad (20)$$

где символ $\{t\}$ означает целую часть числа t . В примере, представленном на рисунке 1, число $N = \{2,41\} = 2$.

Для иллюстрации приведем графики потенциалов и волновых функций гиперядра иттрия $(^{89}_{\Lambda}Y)$ в модели прямоугольной ямы с параметрами $V_0 = 27,5 \text{ МэВ}$ и $r_0 = 5,5 \text{ Фм}$ (рис. 2).

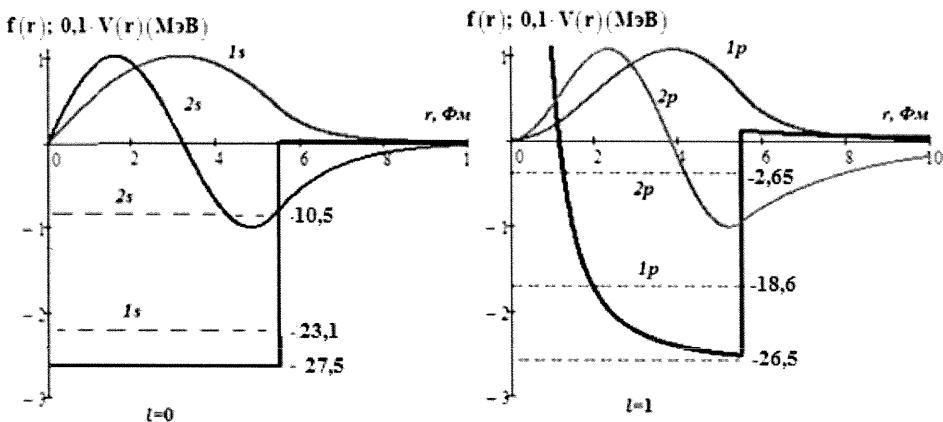


Рисунок 2. Графики потенциалов $V_{\Lambda 0}(r)$ и волновых функций гиперядра иттрия ($^{89}\Lambda Y$) в модели прямоугольной ямы с параметрами $V_0 = 27,5 \text{ МэВ}$ и $r_0 = 5,5 \text{ Фм}$ для $l = 0,1$

Зная волновые функции гиперядра $f_l^{(l)}(r)$, можно оценить его “размеры” для различных значений l , если под размерами понимать среднеквадратичный радиус R_l

$$\langle R_l^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty f_l^2 r^4 dr}{\int_0^\infty f_l^2 r^2 dr}.$$

В частности, для гиперядра иттрия имеем:

$$R_s = 4,11 \text{ Фм}, R_p = 5,08 \text{ Фм}, R_d = 5,34 \text{ Фм}, R_f = 5,45 \text{ Фм}.$$

2. Выбор модели гиперядра и основные предположения

В настоящей работе будем рассматривать гиперядра в двухчастичной модели: $\Lambda +$ недеформированный нуклонный остов с массовым числом A . При этом нуклонный остов рассматривается как сплошная среда, в которой ядерная материя распределена равномерно с плотностью $\rho_0 = 3A/4\pi r_0^3$ внутри шара радиуса r_0 , который определяется из опытов по рассеянию быстрых электронов на ядрах (однородная модель). Обоснование однородной модели применительно к гиперядрам дано в работе [2]. В электронных экспериментах определяется среднеквадратичный радиус ядра $\langle R^2 \rangle^{1/2}$, численные значения которых для стабильных ядер приведены в банке ядерных данных [5]. При этом параметр r_0 связан со среднеквадратичным радиусом ядра условием $r_0 = \sqrt{5/3} \langle R^2 \rangle^{1/2}$.

Так как радиус действия ΛN -сил меньше размеров нуклонного остова почти на порядок, то для упрощения задачи положим $R_{\Lambda N} = 0$. В этом случае потенциал будет описываться единственным параметром – объемным интегралом $\Omega_{\Lambda N}$, а потенциал взаимодействия Λ -гиперона с нуклонным остовом в од-

нородной модели $V(r) = \Omega_{\Lambda N} \rho(r)$ примет вид прямоугольной ямы ширины r_0 и глубины $-V_0$:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0 \end{cases}, \quad (21)$$

где

$$V_0 = \frac{3A\Omega_{\Lambda N}}{4\pi r_0^3}. \quad (22)$$

Следует отметить, что учет конечности радиуса действия ΛN -сил, а также выбор более реалистической формы функции $\rho(r)$ не приводит к улучшению результатов для энергий связи гиперядер по сравнению с однородной моделью [6]. Практически во всех работах [2, 6, 7], где используется феноменологический подход, не удается адекватно описать энергию связи всех гиперядер на основании единого ΛN -потенциала. Поэтому в настоящей работе для каждого гиперядра будем подбирать свой объемный интеграл, который способен правильно описать экспериментальные значения, по крайней мере, энергии основного состояния гиперядер $-B_\Lambda$. В этом подходе частично устраняются дефекты двухчастичного подхода, когда игнорируются эффекты деформации нуклонного остова и его кластеризации [7], а также пренебрежение другими компонентами ΛN -потенциала. Следует, наконец, отметить, что энергия возбуждения слабее зависит от деталей ΛN -потенциала, чем энергия отрыва Λ -частицы B_Λ [8].

Дальнейший численный анализ можно представить в виде следующих двух задач. Во-первых, для каждого исследуемого гиперядра, находящегося в основном состоянии, определяются параметры потенциала взаимодействия Λ -гиперона с нуклонным остовом $(\Omega_{\Lambda N}, V_0, R)$. Во-вторых, находится число и положение возбужденных уровней энергии гиперядер в однородной модели.

3. Расчет параметров потенциала взаимодействия Λ -остов

Решение этой задачи состоит из следующих этапов:

1) По таблицам ядерных данных [1, 5] для каждого гиперядра определяется радиус действия потенциала (размер нуклонного остова) (r_0), энергия связи (B_Λ) и приведенная масса (μ).

2) Вычисляется параметр $y = y_0$ (16).

3) Определяется значение координаты x как решение дисперсионного уравнения для основного состояния $F_0(x, y_0) = 0$ (15a).

4) Исходя из условий (18) и (22), находим искомые параметры $V_0, R, \Omega_{\Lambda N}$.

Основные результаты, полученные при решении этой задачи, сведены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры потенциалов взаимодействия Λ -частицы с нуклонным остовом

Гиперядро	$B_{\Lambda}^{\text{эксп}}$, МэВ	$\langle R^2 \rangle^{1/2}$, Фм	r_0 , Фм	μ , МэВ	R , Фм	V_0 , МэВ	$\Omega_{\Lambda N}$, МэВ·Фм ³
${}^5_{\Lambda}\text{He}$	3,12	1,6753	2,1628	858,666	2,117	21,72	230,1
${}^7_{\Lambda}\text{Li}$	5,58	2,5432	3,2833	930,375	2,795	15,16	374,7
${}^8_{\Lambda}\text{Li}$	6,80	2,4173	3,1207	952,960	2,879	17,38	316,1
${}^9_{\Lambda}\text{Li}$	8,50	2,3270	3,0041	970,727	3,004	20,05	284,7
${}^{10}_{\Lambda}\text{Be}$	9,11	2,5180	3,2507	984,773	3,208	19,26	307,9
${}^{11}_{\Lambda}\text{B}$	10,24	2,4277	3,1341	996,455	3,260	21,14	272,6
${}^{12}_{\Lambda}\text{B}$	11,37	2,4060	3,1061	1006,189	3,353	22,55	257,3
${}^{13}_{\Lambda}\text{C}$	11,69	2,4702	3,1890	1014,406	3,443	22,37	253,3
${}^{14}_{\Lambda}\text{C}$	12,17	2,4614	3,1777	1021,563	3,485	22,92	237,0
${}^{15}_{\Lambda}\text{N}$	13,59	2,5582	3,3026	1027,754	3,703	23,82	256,7
${}^{40}_{\Lambda}\text{Ca}$	18,70	3,4595	4,4662	1082,406	5,254	24,89	238,2
${}^{89}_{\Lambda}\text{Y}$	23,10	4,2449	5,4801	1100,682	6,832	27,49	215,4
${}^{139}_{\Lambda}\text{La}$	24,50	4,8464	6,2567	1106,074	7,888	27,98	208,0
${}^{208}_{\Lambda}\text{Pb}$	26,30	5,4943	7,0931	1109,323	9,131	29,09	210,1

Интересно отметить, что оценки объемного интеграла из анализа энергий связи гиперядер ${}^5_{\Lambda}\text{He}$ и ${}^{13}_{\Lambda}\text{C}$ в супергауссовой модели с конечным радиусом действия ΛN -сил ($R_{\Lambda N} = 0,9 \text{ Фм}$) приводят к значению $\Omega_{\Lambda N} = 240,5 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3$ [5], что, как следует из таблицы 1, практически совпадает с усредненным значением для этих гиперядер $\Omega_{\Lambda N} = 241,7 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3$ в случае $R_{\Lambda N} = 0$. Далее, с ростом массового числа A увеличивается ширина потенциальной ямы, и нижний уровень энергии практически достигает дна ямы $V_0 = 29,1 \text{ МэВ}$ (${}^{208}_{\Lambda}\text{Pb}$). Этот результат находится в хорошем согласии с оценками энергии насыщения гиперона в ядерной материи $D_{\Lambda} \approx 30 \text{ МэВ}$ [1, 7].

4. Оценка возбужденных уровней энергии гиперядер

Зная параметры потенциала взаимодействия Λ -гиперона с нуклонным остовом, можно найти численное решение системы уравнений (15) и (17), т. е. x'_0 и y'_0 , которые предварительно можно приближенно оценить графически (см. рисунок 1). Найденные параметры, согласно условию (16), позволяют определить энергии возбужденных состояний соответствующих гиперядер.

Прежде всего укажем гиперядра, которые могут иметь возбужденные уровни с $l > 0$ (ограничимся состояниями с $l \leq 4$). На основании условий (19) и (20), а также, используя численные значения для R из таблицы 1, можно сразу ука-

зать число возможных энергетических уровней для каждого гиперядра, включая основное $1s$ -состояние (таблица 2).

Таблица 2 – Число энергетических уровней гиперядер для частицы на s, p, d, f, g-оболочках

Первый возбужденный $1p$ -уровень образуется у гиперядра $^{10}_{\Lambda}Be$ (у всех более легких гиперядер отсутствуют возбужденные состояния и в дальнейшем рассматриваться не будут). Этот результат является более оптимистичным, чем мнение, высказанное в работе [8], где ожидалось, что возбужденные состояния с p - Λ -частицей будут находиться в дискретном спектре только у гиперядер с $A \geq 12$. Состояния с $l=2$ ($1d$) и $l=3$ ($1f$) формируются, начиная с $^{40}_{\Lambda}Ca$ и $^{89}_{\Lambda}Y$ соответственно. Чередование уровней энергии происходит в следующей последовательности ($1s, 1p, 1d, 2s, 1f, 2p, 1g, 2d, 3s, 2f$), которая легко определяется графически. Заметим, что этот результат носит общий характер и является отражением особенностей динамики движения частиц в сферически-симметричной прямоугольной яме.

На основании дисперсионных уравнений (15) и данных из таблицы 1, можно численно рассчитать значения всех одночастичных уровней энергии гиперядер. Результаты этих вычислений представлены в таблице 3, где последовательность оболочек расположена в порядке возрастания энергии возбуждения, начиная с энергии основного $1s$ -состояния.

Таблица 3 – Вычисленные значения энергий гиперядер (МэВ) для состояний с $0 \leq l \leq 4$. Для гиперядер $^{89}_{\Lambda}\text{Y}$, $^{139}_{\Lambda}\text{La}$ и $^{208}_{\Lambda}\text{Pb}$ указаны также экспериментальные значения для $1l$ -состояний, полученные в реакциях $^A\text{X}(\pi^+, \text{K}^+)^A\text{X}$ [8]

Для наглядности полученные результаты можно изобразить графически (рисунок 3) в виде зависимости $B_\Lambda(A^{-2/3})$, которая согласуется с аналогичными результатами для экспериментальных данных, представленных в работе [1].

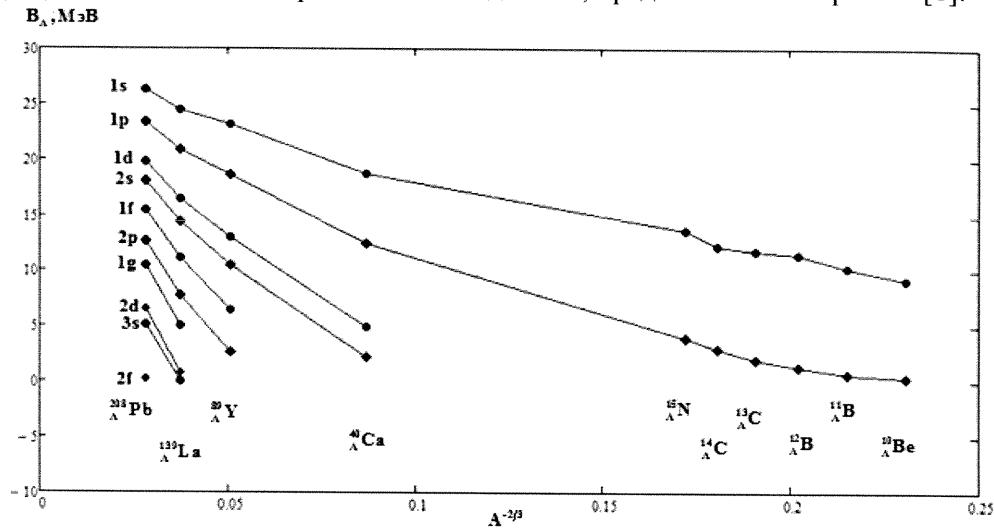


Рисунок 3. Уровни энергии гиперядер B_Λ с массовым числом нуклонов A

Для сравнения результатов проведенных расчетов с экспериментальными данными в таблице 3 представлены также экспериментальные результаты для $1l$ -уровней наиболее тяжелых гиперядер $^{89}_{\Lambda}Y$, $^{139}_{\Lambda}La$ и $^{208}_{\Lambda}Pb$, полученные в KEK (Япония) при исследовании реакций $^A_X(\pi^+, K^+)^A_X$ на пучках пионов ($P_\pi = 1,06 \text{ GeV}/c$). Энергии этих состояний изображены для наглядности на энергетической диаграмме (рисунок 4).

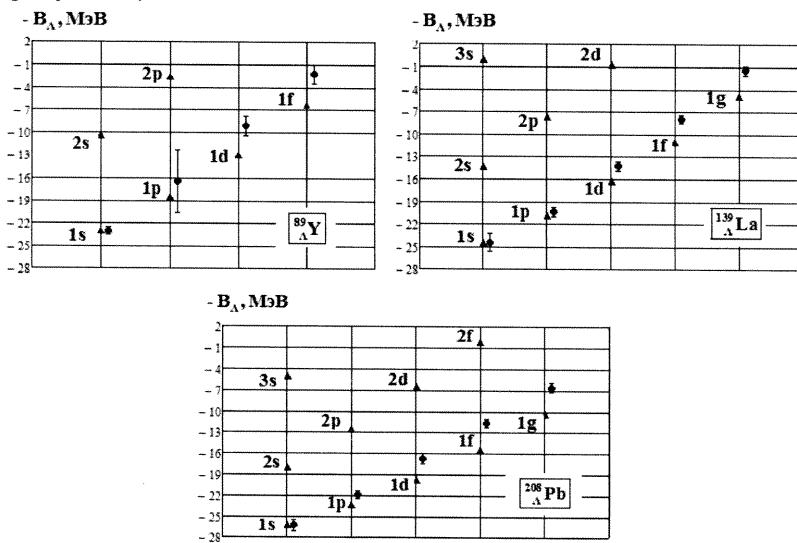


Рисунок 4. Сравнение расчетных и экспериментальных уровней энергии гиперядер $^{89}_{\Lambda}Y$, $^{139}_{\Lambda}La$ и $^{208}_{\Lambda}Pb$ для s, p, d, f, g состояний Λ гиперона

Из рисунка видно, что, не смотря на примитивность выбранной модели, наблюдается относительно хорошее совпадение результатов расчетов с опытными данными в пределах ошибок эксперимента. Это обстоятельство связано с тем, что здесь фактически оценивается разность положения возбужденных уровней относительно основного состояния. Но в этом случае большинство дефектов модели компенсируют друг друга. Некоторое улучшение соответствия модельных расчетов с экспериментом в области $l \geq 2$ может быть достигнуто путем добавления спин-орбитального взаимодействия Λ -гиперона [8, 9] а также учета эффектов деформации нуклонного остова в гиперядрах.

В частности, для гиперядра $^{208}_{\Lambda} Pb$ можно считать поисковыми параметрами r_0 и V_0 , которые можно оценить, например, по энергиям s - и g -состояний: $V_0 = 29,80 \text{ МэВ}$, $r_0 = 6,244 \text{ Фм}$. Потенциал $V_{\Lambda 0}$ с такими параметрами обеспечивает другие возбужденные состояния с точностью до 5% по энергии ($B_p = 21,9 \text{ МэВ}$; $B_d = 16,8 \text{ МэВ}$; $B_f = 11,7 \text{ МэВ}$).

Возможности модели сферической прямоугольной ямы позволяют достаточно просто оценивать не только значения энергий основного и возбужденных состояний, но также и такие тонкие эффекты, как влияние спин-орбитального взаимодействия Λ -гиперона на соответствующие уровни энергии с $l \neq 0$. В этом случае в уравнении (1) потенциал $V(r)$ следует заменить на $\tilde{V}(r)$ вида

$$\tilde{V}(r) = V(r) + V_{co}(r), \quad (23)$$

где потенциал (21) $V(r) = -V_0 \varphi(r)$, а также [8]

$$V_{co}(r) = V_{co}^o \lambda_\pi^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{l} \cdot \vec{s}. \quad (24)$$

Здесь $\varphi(r) = \theta(r_0 - r) (\theta(x) - \text{функция Хевисайда: } \theta(x > 0) = 1; \theta(x < 0) = 0)$, $\lambda_\pi = \hbar/m_\pi c \approx \sqrt{2} \text{ Фм}$ – комптоновская длина волны π -мезона.

Учитывая, что $\delta(x) = \partial \theta(x) / \partial x$ ($\delta(x)$ – функция Дирака), а также

$$2\vec{l} \cdot \vec{s} = j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) = \alpha_j = \begin{cases} l, & j = l + 1/2; \\ -(l+1), & j = l - 1/2, \end{cases}$$

для $V_{co}(r)$ получаем:

$$V_{co}(r) = -C \frac{1}{r} \delta(r - r_0), \quad (25)$$

где параметр $C = V_{co}^o \alpha_j$ определяется амплитудой спин-орбитального взаимодействия и значением полного момента Λ -гиперона.

В этом случае решения уравнения Шредингера (1) остаются непрерывными, в частности

$$f_2(r_0) = f_1(r_0). \quad (26)$$

Однако производная волновой функции при $r = r_0$ будет испытывать скачок из-за дельтаобразного члена (25). Оставляя главные члены в уравнении (1) вблизи точки $r = r_0$

$$f'' + \frac{2\mu C}{\hbar^2} \delta(r - r_0) f = 0 \quad (27)$$

и, интегрируя вдоль малого отрезка, содержащего точку $r = r_0$, находим

$$f'_2(r_0) - \frac{2\mu C}{\hbar^2 r_0} f_2(r_0) = f'_1(r_0). \quad (28)$$

Разделим почленно уравнение (28) на (26) и вводя обозначения (16), получим дисперсионные уравнения для нахождения уровней энергии гиперядер с учетом спин-орбитального взаимодействия вида:

$$F_l(x, y) - \frac{2\mu}{\hbar^2} C = 0, \quad (29)$$

где функции $F_l = (x, y)$ определены условиями (15).

Отсюда следует, что все возбужденные уровни энергии с $l > 0$ имеют дублетную структуру, имеющую большее значение B_A для более высоких $j = l + 1/2$. Если принять $V_{co}^o = 3,75 \text{ МэВ}$ [9], то величина спин-орбитального расщепления для гиперядра $^{208}_A Pb$ не превышает $\Delta E_g \approx 1,8 \text{ МэВ}$ даже для g -состояния. Аналогичные оценки, но с потенциалом типа Вудса-Саксона, приводят к близким результатам $\Delta E_g \approx 1,1 \text{ МэВ}$ [10].

Заключение

Задача о частице, движущейся в сферической прямоугольной яме, является одной из немногих задач квантовой механики, допускающей относительно простое аналитическое решение. При этом, кроме академического интереса, результаты решения этой задачи могут иметь прикладное значение при анализе реалистических проблем атомной и ядерной физики, что и демонстрируется в настоящей работе применительно к оценкам параметров возбужденных состояний гиперядер. По крайней мере, удается определить область массовых чисел среди известных гиперядер, способных иметь возбужденные $1p$ ($A \geq 9$), $1d$ ($A \geq 39$), $1f$ ($A \geq 88$) и другие состояния, заранее предсказать общее число и положение дискретных уровней энергии. При этом можно ожидать не только качественного, но и количественного согласия с экспериментальными результатами. Не сложно распространить разработанную методику к анализу свойств гиперядер, для которых отсутствуют данные о размерах нуклонного остова в силу их крайней нестабильности в свободном состоянии, проводя разумную интерполяцию для соседних элементов. Важно отметить, что проведенный анализ практически является слабо чувствительным к выбору модели гиперядер.

Современное состояние экспериментальных и теоретических исследований по спектроскопии Л-гиперядер описано в обзоре [8].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Ланской, Д. Е.** Физика гиперядер / Д. Е. Ланской. – Web-версия учебного пособия, 2002.
2. **Чернов, С. М.** Оценка параметров гиперядер в простых моделях / С. М. Чернов // Весник МДУ імня А. А. Кулляшова. Сер. В. Прыродазнаўчныя науки (матэматыка, фізіка, біялогія). – № 1. – 2016. – С. 66–73.

3. **Чернов, С. М.** Квантовая механика : курс лекций / С. М. Чернов. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2013. – 196 с.
4. **Флюгге, З.** Задачи по квантовой механике / З. Флюгге. – Москва : Мир, 1974. – Т. 1. – 342 с.
4. Физика ядра и банки ядерных данных / В. В. Варламов [и др.]. – Москва : НИИЯФ МГУ, 2010. – 245 с.
5. **Чернов, С. М.** Оценка параметров гиперядер в супергауссовой модели и рассеяния / С. М. Чернов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя науки (матэматыка, фізіка, біялогія). – № 2. – 2016. – С. 53–61.
6. **Калачай, С. А.** Энергии связи гиперядер и взаимодействие ΛN и $\Lambda\Lambda$: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.04.02 / С. А. Калачай. – Москва, 2005. – 119 л.
7. **Кочетов, А. Б.** Возбужденные состояния гиперядер р-оболочки / А. Б. Кочетов, Б. А. Хрылин // Письма в ЖЭТФ. – Т. 18, вып. 2. – 1973. – С. 136–138.
8. **Hashimoto, O.** Spectroscopy of Λ hypernuclei / O. Hashimoto, H. Tamura // Progress in Particle and Nuclear Physics. – V. 57. – 2006. – Pp. 564–653.
9. **Thakkar, K.** P-wave Λ -hyperon binding energies of medium heavy hypernuclei / K. Thakkar, A. Majethiya, P. C. Vinodkumar // Proceedings of the DAE Symp. on Nucl. Phys. – V. 56. – 2011. – Pp. 750–751.
10. **Motoba, T.** Hypernuclear production by the reaction / T. Motoba, H. Bando, R. Wunsch, J. Zofka // Phys. Rev. – C38. – 1988. – Pp. 1322–1334.

Поступила в редакцию 30.11.2016 г.

Контакты: stanislavchernof2011@yanlex.by (Чернов Станислав Михайлович)

Chernov S.M. SPHERICAL SQUARE WELL PROBLEM AND ITS APPLICATION TO ESTIMATION OF EXCITED-STATE ENERGIES OF Λ -HYPERNUCLEI.

Energy levels of excited states of Λ -hypernuclei are analyzed numerically in the framework of a two-particle model with potentials in the form of a spherical square well.

Keywords: hypernuclei, energy of ground and excited states, spherical square well.

УДК 539.3

РАСЧЕТ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ У ТОНКОГО УПРУГОГО ДВОЙНИКА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ВДАЛИ ОТ ПОВЕРХНОСТИ И ОБРАЗОВАННОГО В РЕЗУЛЬТАТЕ АНТИПЛОСКОГО СДВИГА

E. B. Иноzemцева

ассистент кафедры инженерной графики,

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

O. M. Остриков

кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой инженерной графики,

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

Разработан метод расчета напряжений в твердом теле при сдвиге, находящемся в не плоскости упругого двойника. Показано, что трещина формируется в местах скопления максимальных напряжений и в дальнейшем распространяется по плоскости спайности. Прямолинейные участки двойника напряжения не концентрируют.

Ключевые слова: тонкий двойник, антиплоский сдвиг, поля напряжений.

Введение

Металлы с ромбоэдрической, объемоцентрированной, гексагональной плотноупакованной решеткой легко деформируются как скольжением, так и двойникованием в широком интервале температур [1]. Трешины обнаружены лишь при полном разрушении образцов и располагаются, как правило, на границе раздела двух двойников [1; 2; 3]. В основу механизмов разрушения положены двойниковые сдвиги в пересекающихся плоскостях. Кроме того, предпринимались попытки математического описания возникновения разрушения при двойниковании [3]. Показано, что наиболее вероятен вариант зарождения трещины при взаимодействии развивающегося двойника с границей остаточного, нежели при встрече вершин двух двойников [4]. При объяснении образования продольных сколов вдоль плоскости спайности предпочтение отдается дислокационному механизму.

Двойственный характер влияния двойникования на образование и рост трещин не вызывает сомнения [4]. В большинстве случаев двойники являются опасными концентраторами напряжений, способствующими зарождению хрупких трещин. Мера ответственности двойникования за окончательное разрушение материала и конкретные механизмы, вызывающие магистральный разрыв, выяснены еще недостаточно и должны определяться в каждом конкретном случае испытания.

© Иноzemцева Е. В., 2017

© Остриков О. М., 2017

Особый интерес в плане повышения энергоемкости низкотемпературного разрушения представляют сопутствующие двойники, порождаемые самой трещиной [5]. Для объяснения геометрических особенностей зарождения трещины в хвостовой части двойника изучалось распределение дислокаций в границе двойника и создаваемое ими поле упругих напряжений.

Целью данной работы стала разработка метода расчета полей напряжений в твердом теле, деформируемом антиплюским сдвигом, у находящегося вдали от поверхности упругого тонкого двойника.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкий двойник, половина длины которого равна L , образовавшийся вдали от поверхности кристалла в результате антиплюского сдвига $|x| \leq L$ (рисунок 1). Упругий двойник будем моделировать линейным распределением винтовых двойникообразующих дислокаций. Вектор Бюргерса каждой двойникообразующей дислокации перпендикулярен оси z , перпендикулярной плоскости рисунка 1.

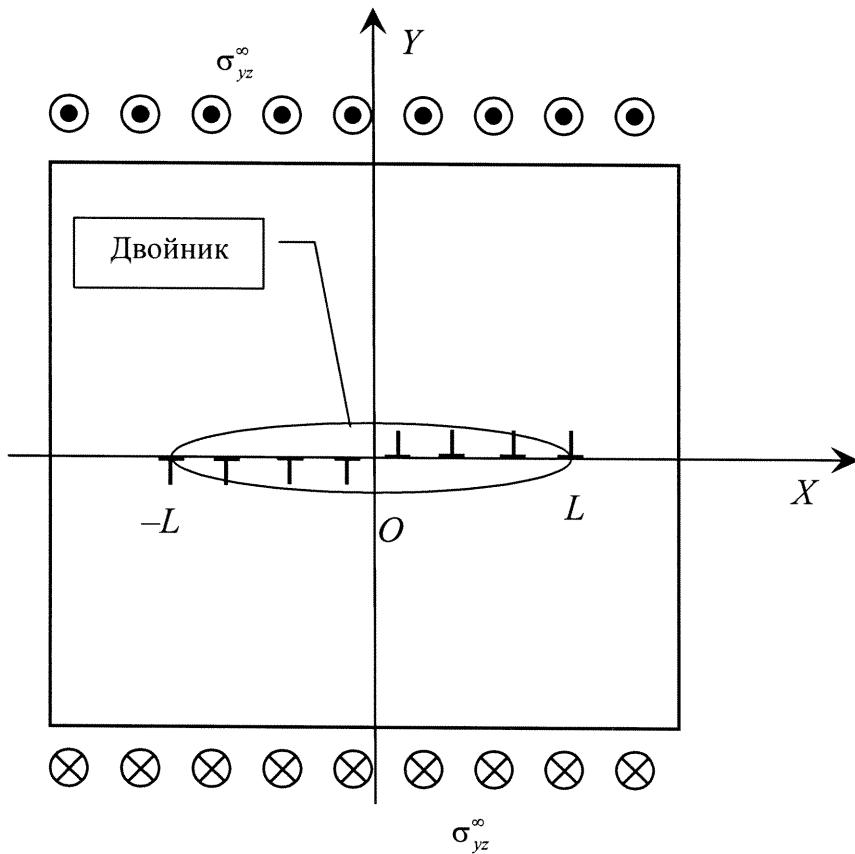


Рисунок 1. Схематичное изображение тонкого упругого линзовидного двойника в деформируемом антиплюсмі сдвигом твердом тілу

Для решения поставленной задачи, как и в случае теории тонкого двойника [3], справедливо использование соотношений нелинейной механики разрушения [1].

Это связано с тем, что математическое описание дислокационной трещины и тонкого двойника аналогично.

Распределение компонент тензора напряжений для рассматриваемого двойника может быть найдено на основании расчетных соотношений для трещины антиплюского сдвига [6], приведенных к виду:

$$\sigma_{xz} = -\frac{\sigma_{yz}^{\infty}}{\pi} \int_{-L}^L \frac{y - f(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f(\xi))^2} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} \cdot d\xi, \quad (1)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{yz}^{\infty} + \frac{\sigma_{yz}^{\infty}}{\pi} \int_{-L}^L \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - f(\xi))^2} \cdot \frac{\xi}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} \cdot d\xi, \quad (2)$$

где σ_{yz}^{∞} – напряжения на бесконечно удаленных от двойника поверхностях однородного изотропного твердого тела, в приближении которого рассматривается кристаллическое тело с двойником; $f(\xi)$ – функция, с помощью которой задается форма средней линии двойника (линии внутри двойника, равноудаленной от двух его границ); ξ – параметр интегрирования.

Примем

$$f(\xi) = f(\xi) = \frac{a\xi^2}{L^2}, \quad (3)$$

где a – отклонение вершины двойника от оси x ; L – проекция средней линии двойника на ось x (рисунок 1).

В бездефектных кристаллах средняя линия линзовидного двойника представляет собой отрезок прямой (рисунок 1). Связем начало декартовой системы координат с серединой этого отрезка и ось x направим вдоль него. Тогда очевидно будем иметь $f(\xi) = 0$.

В случае, когда стопор находится на оси x (рисунок 1), вершина параболы находится в окрестности точки с координатами $(-L, 0)$. Тогда функцию $f(\xi)$ можно представить в виде

$$f(\xi) = \frac{a(L + \xi)^2}{4L^2}. \quad (4)$$

Результаты и их обсуждение. Результаты расчета представлены на рисунках 2–4.

Из анализа распределения напряжений видно, что максимум напряжений в бездефектной области кристалла локализуются на средней линии двойника (рисунок 2). Напряжения локализуются по обе стороны от оси y . Можно отметить, что максимальные значения смешены в положительную сторону по оси x . Также значения напряжений для двойника в бездефектной области кристалла заметно меньше, чем у двойника при наличии стопора (рисунки 3 и 4). Следовательно, можно предположить, что трещины будут образовываться на границе

двойника в зоне с максимальными значениями напряжений и далее распространяется по плоскости спайности.

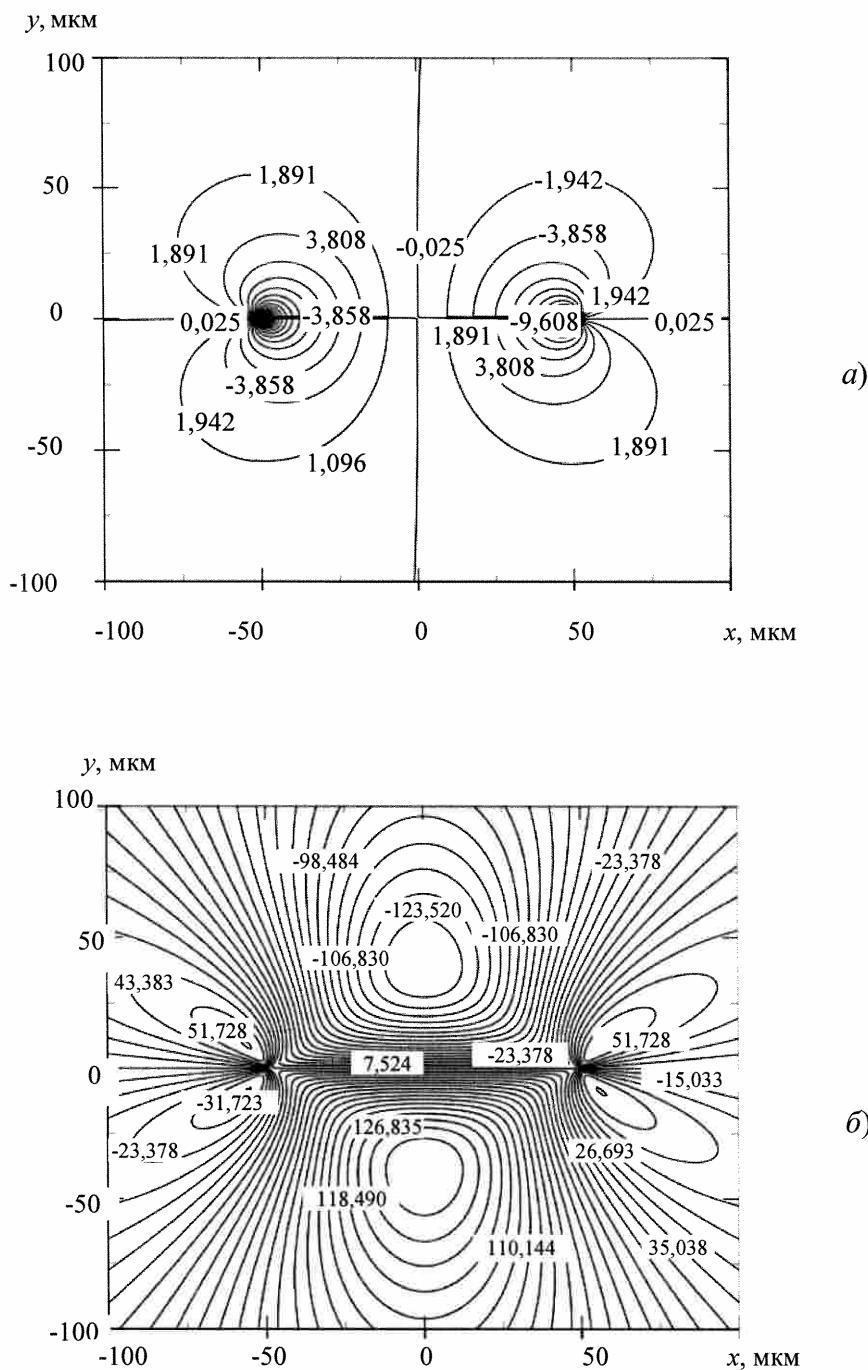


Рисунок 2. Распределение напряжений у тонкого линзовидного двойника в бездефектной области кристалла в твердом теле, деформируемом антиплоским сдвигом (МПа): а) $\sigma_{xx}^w(x, y)$; б) $\sigma_{yy}^w(x, y)$

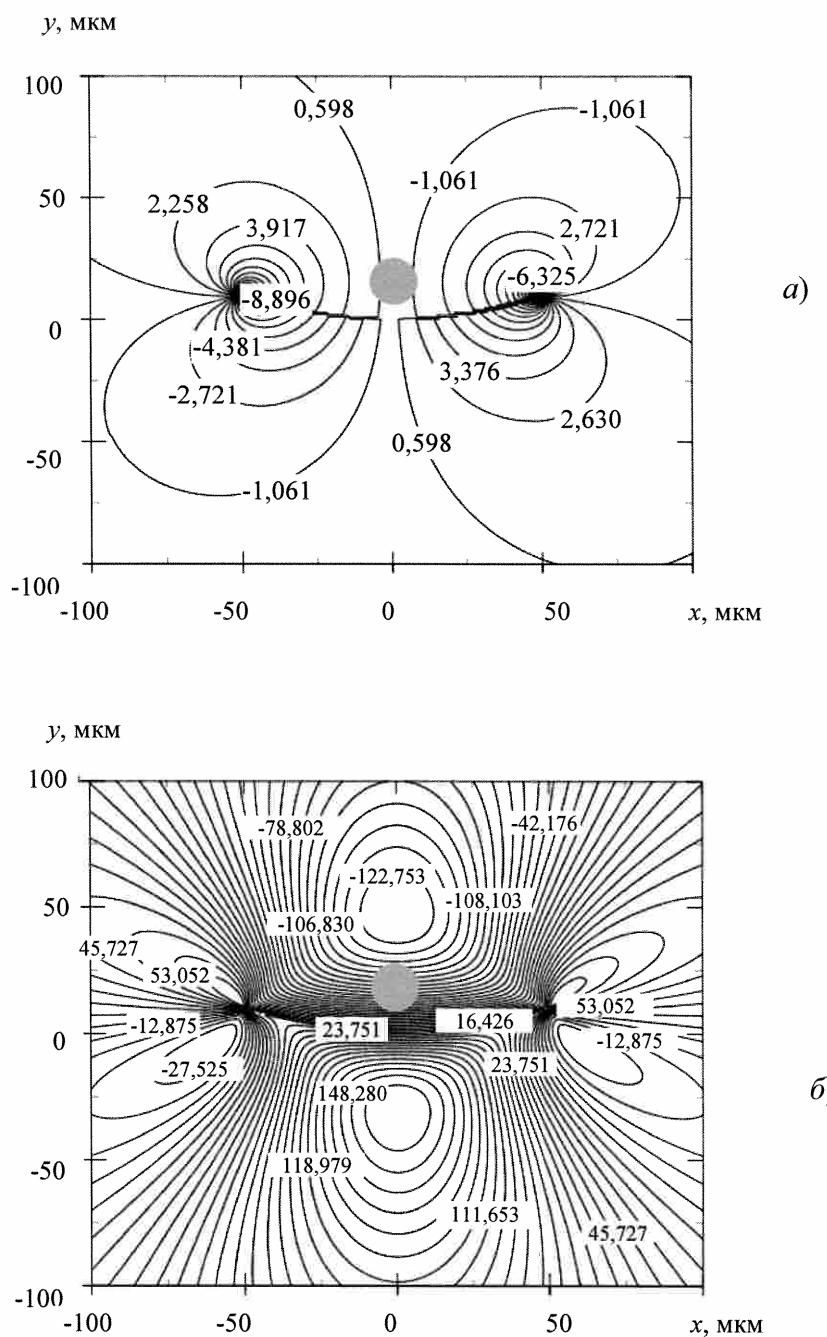


Рисунок 3. Поля напряжений у линзовидного упругого двойника при наличии стопора (отмечен серым кругом) на оси y в твердом теле, деформируемом антиплоским сдвигом (МПа): а) $\sigma_{xx}(x, y)$; б) $\sigma_{yx}(x, y)$

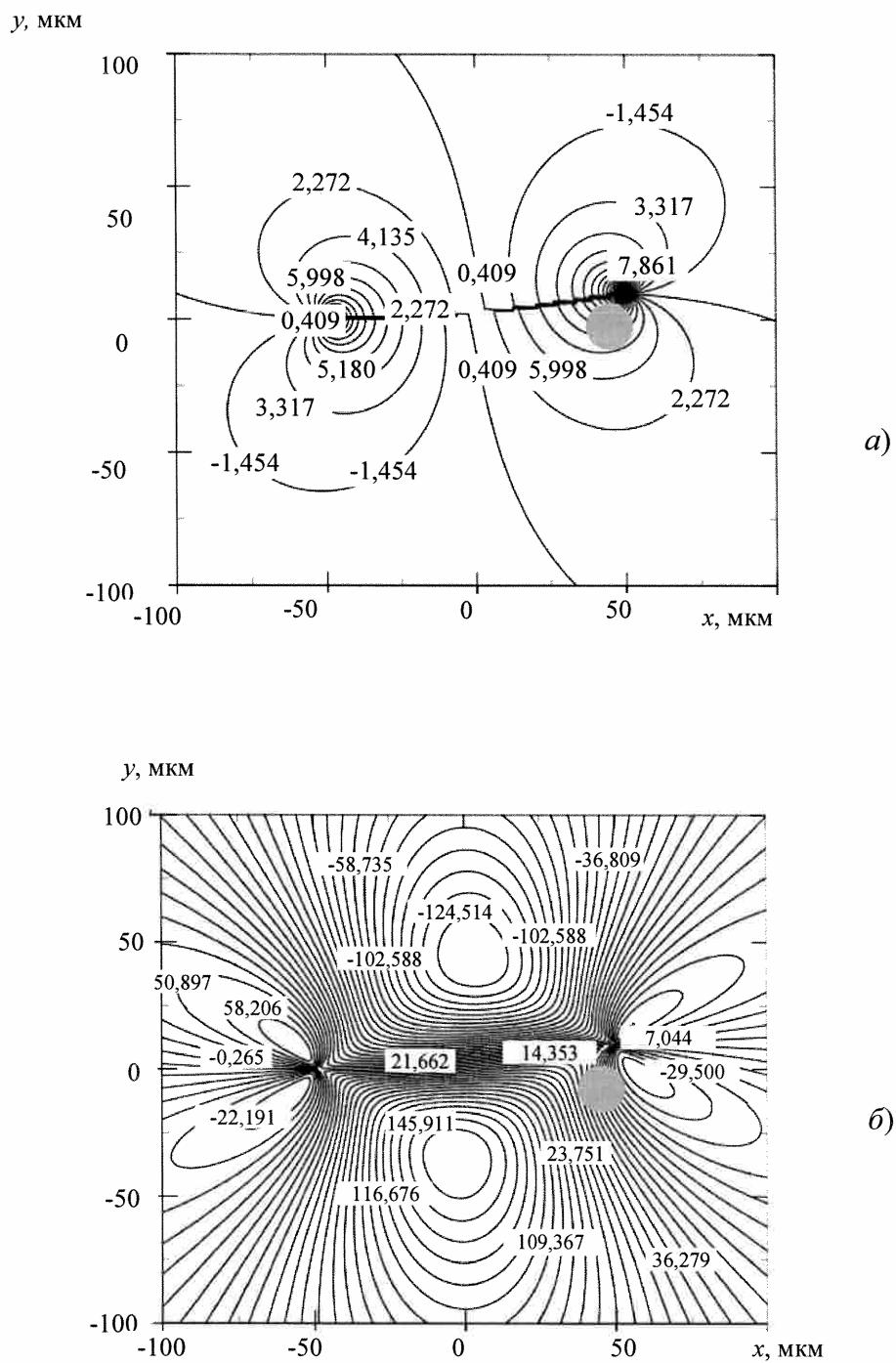


Рисунок 4. Поля напряжений у линзовиднага упругага двойніка при налічні стопора (отмечан серым кругом) на осі x в твердым тэле, деформіруем антіплоскім сдвигом (МПа): а) $\sigma_{xx}^w(x, y)$; б) $\sigma_{yy}^w(x, y)$

При наличии стопора максимальные значения напряжений смещаются вместе с вершинами двойника и концентрируются по обе стороны от оси x . На рисунке 3 стопор расположен на оси y , следовательно, вершины двойника смещаются вверх, образуя параболу. Причем наибольшие значения напряжений в данном случае, концентрируются в отрицательной области.

На рисунке 4 стопор находится на оси x . Максимальные напряжения при этом, как и одна из вершин двойника, смещаются в положительную сторону относительно оси y . Минимальные напряжения при этом находятся в нулевых значениях x и y .

Заключение

Таким образом, на основании дислокационного подхода с использованием методов нелинейной механики разрушения разработан метод расчета полей напряжений в твердом теле, деформируемом антиплоским сдвигом, у находящегося вдали от поверхности упругого тонкого линзовидного двойника.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Косевич, А. М. Дислокационная теория упругого двойникования кристаллов / А. М. Косевич, В. С. Бойко // Успехи физических наук. – 1971. – Т. 104, № 2. – С. 101–255.
2. Гарбер, Р. И. Механизм двойникования кальцита и натронной селитры при пластической деформации / Р. И. Гербер // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1947. – Т. 17, № 1. – С. 47–62.
3. Косевич, А. М. Дислокации в теории упругости / А. М. Косевич. – Киев : Наук. думка, 1978. – 220 с.
4. Шепелевич, В. Г. Структурно-фазовые превращения в металлах / В. Г. Шепелевич. – Минск : БГУ, 2007. – 167 с.
5. Астафьев, В. И. Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара : Изд-во “Самарский университет”, 2001. – 562 с.
6. Остриков, О. М. Механика двойникования твердых тел : монография / О. М. Остриков. – Гомель : Учреждение образования “Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого”, 2008. – 301 с.

Поступила в редакцию 16.12.2016 г.

Контакты: omostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Inozemtseva Y.V., Ostrikov O.M. MEASURING STRESS FIELDS OF A THIN ELASTIC TWIN DISTANT FROM THE SURFACE AND FORMED AS A RESULT OF AN OUT-OF-PLANE SHEAR

The method of calculation of stresses in a solid shift occurring in a non-down-plane elastic twin has been designed. It is shown that the crack is formed in the places of the maximum stress and it further extends along a plane cohesion. Straight sections of twin voltage are not con-centered.

Keywords: thin twin; anti-flat shift; stress field.

УДК 612.111

МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ МАРКЕРЫ СТАРЕНИЯ ЭРИТРОЦИТОВ ДОНОРСКОЙ КРОВИ

Н. В. Акулич

биолог, Национальная антидопинговая лаборатория (Беларусь)

Е. А. Тарасова

студент, Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. В. Сорока

кандидат биологических наук, доцент,

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В. Э. Сяхович

начальник отдела, Национальная антидопинговая лаборатория (Беларусь)

С. А. Беляев

директор Национальной антидопинговой лаборатории (Беларусь)

В статье изучены изменения, происходящие при хранении крови. С использованием световой микроскопии и проточной цитометрии дается характеристика изменений на протяжении 6 недель хранения крови. Исследованы оптико-морфологические признаки старения эритроцитов.

Ключевые слова: эритроцит, световая микроскопия, мембрана, проточная цитометрия.

Введение

В Республике Беларусь проводятся высокотехнологичные оперативные вмешательства, которые требуют адекватной гематологической поддержки. Срок хранения донорской крови и ее компонентов определяется периодом времени, в течение которого кровь (компоненты крови) сохраняет биологическую полноценность, лечебную эффективность и пригодна для использования по назначению [1; 2]. Эритроцитарную массу для проведения гемотрансфузий в настоящее время консервируют во взвешивающих растворах (ADSOL, SAGM и др.), которые позволяют сохранять ее в течение 35–42 дней [1; 2; 3; 4].

Несмотря на принимаемые меры (снижение температуры, давление консервантов и т. д.) в крови происходят необратимые процессы, снижающие физиологическую полноценность эритроцитов; в первую очередь страдает их кислородно-транспортная функция. Спонтанный гемолиз эритроцитов начинается с третьей недели хранения [2; 4]. Поэтому кровь, заготовленную с помощью гемоконсервантов, рекомендуется использовать в течение 3 недель; в некоторых случаях (использование полимерных контейнеров) – до 42 дней хранения [2].

© Акулич Н. В., 2017

© Тарасова Е. А., 2017

© Сорока А. В., 2017

© Сяхович В. Э., 2017

© Беляев С. А., 2017

В процессе хранения консервированная кровь претерпевает морфологические изменения: диско-сферацитарную трансформацию. Одновременно меняются биохимические и физико-химические свойства эритроцитов [2].

Биохимическая полноценность консервированной крови определяется уровнем в ней макроэргических фосфатов. Поэтому гемоконсерванты, которые способны поддерживать уровни АТФ и 2,3-ДФГ и, соответственно, поддерживать жизнеспособность эритроцитов и обеспечивать кислородно-транспортную функцию крови, являются предпочтительными.

Поскольку на сегодняшний день основными общепринятыми критериями качества консервированной крови являются апостериорные критерии [2; 3]: степень гемолиза эритроцитов и отсутствие осложнений при проведении трансфузий, то для повышения эффективности оказание трансфузиологической помощи требуется разработка метода оценки качества крови перед ее переливанием.

Таким образом, целью исследования является установление морфологических маркеров качества хранящейся эритроцитарной массы.

Материалы и методы. Исследования проводились в 2015–2017 гг. на базе ресурсного центра МГУ имени А.А. Кулешова и Национальной антидопинговой лаборатории. Поставлено 23 серии исследований с использованием цельной крови I и II групп и с консервирующим раствором глюгицир.

Забор донорской крови производился у пациентов, которым проводилось оперативное вмешательство на базе УЗ “Могилевская областная больница”, антикоагулянт – гепарин и цитрат натрия или ЭДТА К2. В течение не менее 42 дней еженедельно анализировались мазки и пробы крови. Мазки крови фиксировались метанолом и окрашивались по Романовскому; пробы крови окрашивались моноклональными антителами.

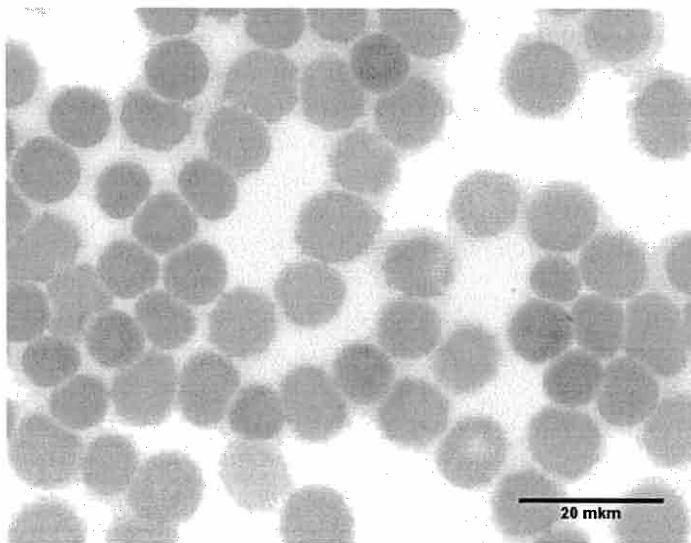


Рисунок 1. Микрофотография эритроцитов

Исследовалась как цельная кровь, которая хранилась без использования консервирующего раствора, так и эритроцитарная масса с консервантом глюгицир в соотношении: 1 объем раствора к 4 объемам крови.

Метод световой микроскопии – исследование препарата мазка крови [3]. В исследовании использовался микроскоп Axio Imager A1, Германия, объектив Plan-Neofluar 100×1.3 Oil, монохроматический фильтр с длиной волны 540 нм, видеокамера “AxioCam MrC5” (Германия), программное обеспечение “Диаморф-ЦITO” (Россия).

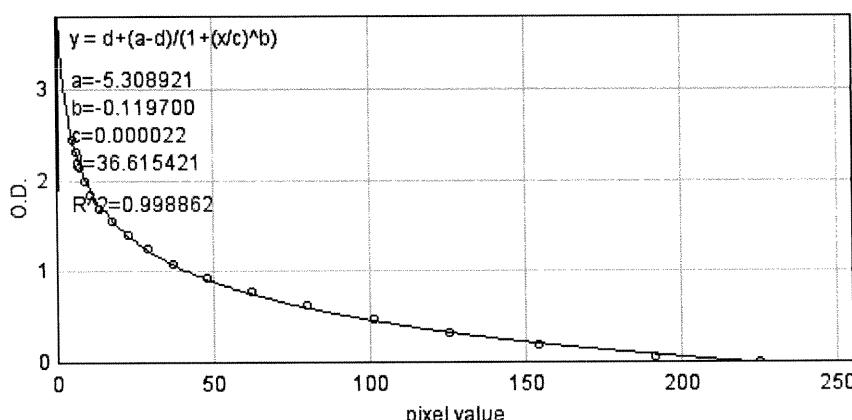


Рисунок 2. График калибровки оптической плотности

С каждого препарата создавали архив изображений эритроцитов с разных (случайных) участков мазка, содержащих монослой эритроцитов.

Проточная цитометрия. В ходе анализа на проточном цитофлуориметре Cell Lab Quanta SC, Beckman Coulter (США) и FACSARIA, BD Bioscience (США) определяли параметры бокового светорассеяния (SSc) и электронный объем, интенсивность флуоресценции CD 235a.

Пробоподготовка состояла в разбавлении 1 мкл цельной крови фосфатным буфером (соотношение 1:2000). Эритроциты на гистограммах гейтировали по CD 235a.

Статистический анализ состоял из описательной статистики с расчетом моды, среднего значения, определения характера распределения. Учитывая характер распределения, мы остановились на непараметрических методах анализа. Изменения считались значимыми при $p < 0,05$. Все статистические методики реализованы с помощью программы Statistica (StatSoft, США).

Результаты исследований. На препаратах свежей крови выявлялись единичные эритроциты с выростами эритроцитарной мембранны, средний диаметр клеток составлял 8,5 мкм.

Хранение крови в течение первой недели, характеризовалось появлением спикул и шипиков на некоторых эритроцитах. Для мазка характерно отсутствие патологических форм. Для части эритроцитов характерна дисковидная форма, поскольку визуализировался участок пэллора.

В мазке отсутствовали агрегаты, что указывает на наличие нормальных значений дзета-потенциала. Отсутствие гемолиза подтверждалось графиком оптической плотности мазка, поскольку участки фона имели значение оптической плотности близкой к нулю. Встречались как гиперхромные эритроциты, так и клетки с меньшей оптической плотностью.

Таким образом, большая часть клеток сохранила нормальную форму, только единичные клетки имеют спикилы. Чаще спикилы выявлялись у более гипохромных эритроцитов. При проведении морфометрии установлено, что средний диаметр эритроцитов составил 8,6 мкм, что соответствует норме.

На второй неделе наблюдения уменьшалось количество эхиноцитов и между клетками начинают формироваться мостики. Оптический профиль, построенный по изображению мазка, выявил отсутствие гемолиза и более низкое значение оптической плотности эритроцитов. Размеры эритроцитов на второй неделе составили в среднем 9,1 мкм.

Таким образом, по сравнению с эритроцитами на первой неделе хранения, для второй недели наблюдения характерен макроцитоз и снижение оптической плотности эритроцитов.

На третьей неделе наблюдения преобладающей формой клеток становятся сфеноциты. Так же заметно формирование монетных столбиков. Размеры эритроцитов 7,0 мкм, что в сочетании со значениями оптической плотности свидетельствует о деструкции гемоглобина.

На четвертой неделе изменения, начавшиеся на третьей, проявляются еще заметнее. Выход гемоглобина из клеток усиливается, отмечено возрастание сфеноцитоза. Размеры клеток на четвертой неделе остались практически неизменными – 7,2 мкм.

Особенностью хранящейся крови на четвертой неделе хранения – наличие в мазках палочкоядерных бактерий. На пятой неделе продолжается дальнейший выход гемоглобина из сфеноцитов. Некоторые из эритроцитов имеют вид гемолизированных клеток. Среднее значение диаметра эритроцитов – 7,1 мкм. На шестой неделе гемолиз заметно нарастает. На снимке много эритроцитарных мембранных, а гемоглобин находится в плазме крови. Размер клеток составил 6,52 мкм.

Таким образом, на основании наблюдения за препаратами крови можно проследить следующую закономерность: по мере хранения происходит постепенное уменьшение размеров с выходом гемоглобина в плазму крови. При сравнении образцов крови I и II групп данным методом исследования различий не выявлено. Следовательно, наличие/отсутствие клинически значимых антигенных групп крови на эритроцитах не влияет на сроки хранения эритроцитов.

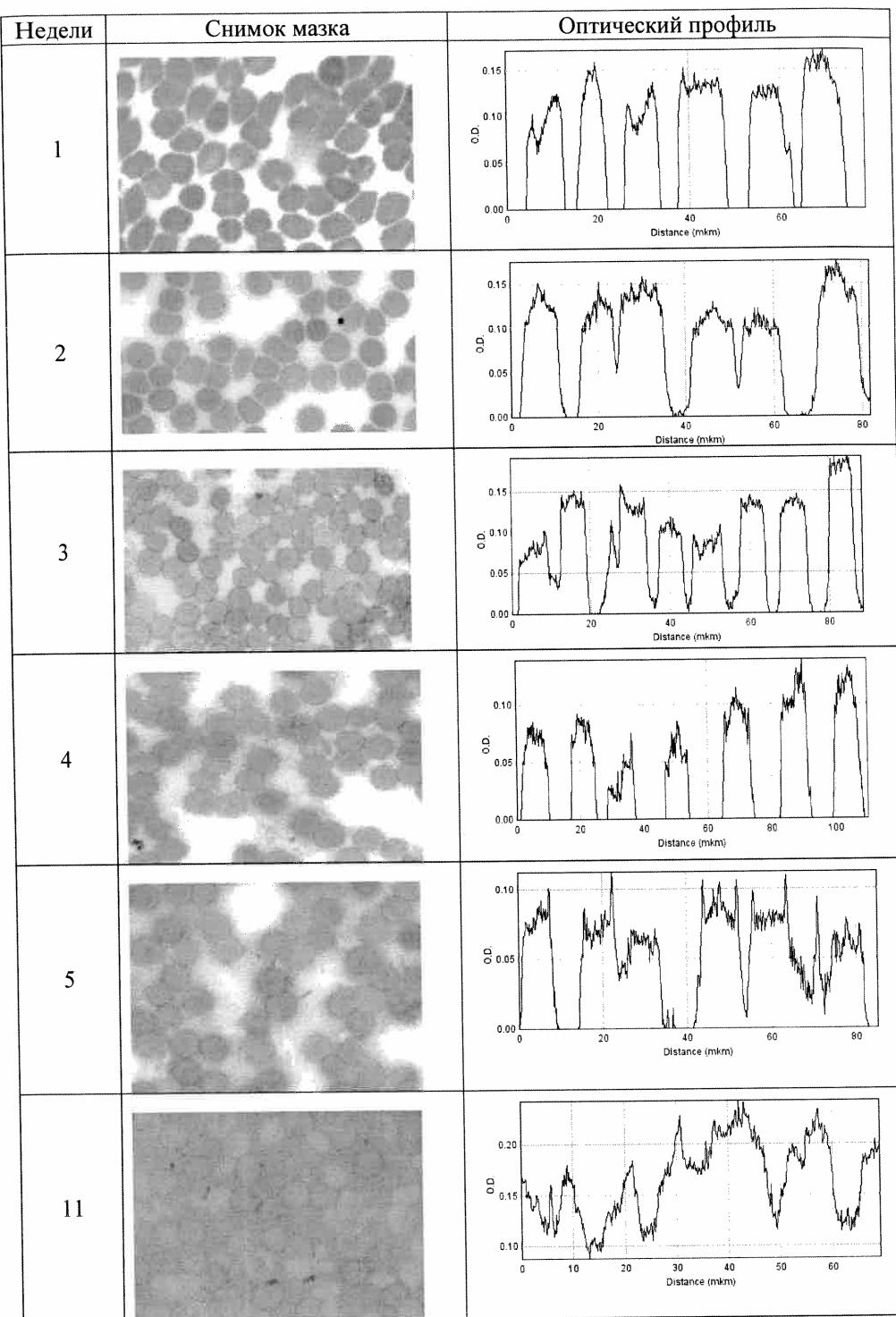


Рисунок 3. Микрофотографии и оптический профиль эритроцитов

Анализ данных световой микроскопии позволяет сделать вывод о том, что хранение крови более четырех недель как с консервантом, так и без него сопровождается процессами деструкции с массивным гемолизом.

Анализ проб крови методом проточной цитометрии. В наших исследованиях нами производилось гейтирование и разделение популяции эритроцитов. Гейтирование осуществлялось по Glycophorin A (CD 235a), а по параметрам электронного объема и бокового светорассеяния можно было корректно выделить не менее двух популяций эритроцитов, различающихся в основном своими размерами. В таблице они обозначаются как “крупные” – Big RBC, так и “небольшие” – Small RBC красные кровяные тельца.

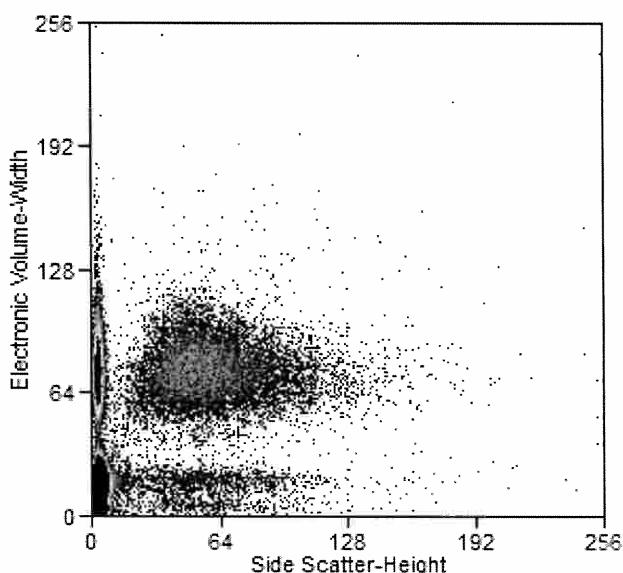


Рисунок 4. Пример скаттерограммы эритроцитоцитов

Для свежей крови были характерны следующие признаки: наличие двух субпопуляций с меньшим и большим размером соответственно. Обе популяции имели примерно сходные характеристики по боковому светорассеянию. Клетки с большими размерами характеризовались (каплевидным) по форме распределением, что означает: большинство клеток – дискоциты, имели небольшие величины бокового светорассеяния, и лишь небольшая часть представлена сфероцитами.

При исследовании крови, хранившейся без использования консерванта мы получили следующие данные. В обеих субпопуляциях к завершению периода наблюдения выявлялся макроцитоз: диаметр эритроцитов возрастал с 7,46 до 8,01, и с 4,52 до 4,79 мкм, в то время как по данным микроскопии, наоборот, диаметр эритроцитов становился меньше. Размер эритроцитов возвращался к исходным значениям.

Таблица 1 – Морфометрия цельной крови без консерванта

Регион	\bar{X} SSc (о.е.)	Диаметр (мкм)	SS Мода (о.е.)
До хранения			
Big RBC	141,9	7,46	23,0
Small RBC	26,2	7,52	24,0
Третья неделя хранения			
Big RBC	122,0	7,53	34,0
Small RBC	34,5	7,57	32,0
Шестая неделя хранения			
Big RBC	77,5	8,01	25,0
Small RBC	25,7	4,79	25,0

Среднее значение бокового светорассеивания в консервированной крови последовательно снижалось, а мода – к середине наблюдения возрастала, а к шестой неделе наблюдения – соответствовала начальным значениям.

Далее мы исследовали консервированную кровь, хранившуюся с использованием консерванта глюгицир. Продолжительность наблюдения увеличена до 10 недель, поскольку, с высокой долей вероятности, консервант позволяет лучше сохранять жизнеспособность эритроцитов.

После первой недели хранения на графике не выявляются различия по сравнению с исходным состоянием.

На третьей неделе изменения становятся заметными. В частности, происходит значительное увеличение по размеру клеток, относящихся к той части, которая до исследования имела меньший размер.

После четвертой недели изменения в хранящейся крови становятся очень отчетливы. Исчезает популяция, которая до хранения имела меньший размер. С другой стороны – появляется дополнительная популяция с небольшими значениями по боковому светорассеянию и вариабельная по размерам.

Таким образом, можно утверждать, что и при применении консерванта не удается существенно продлить срок жизни эритроцитов, и после четвертой недели они имеют отличные от свежей крови параметры.

Таблица 2 – Морфометрия эритроцитарной массы с консервантом

	\bar{X} SSc (о.е.)	Диаметр (мкм)	SS Мода (о.е.)
До хранения	141,2	7,41	63,0
1 неделя хранения	143,3	7,26	98,0
3 // - хранения	152,3	7,37	98,0
4 // -хранения	165,3	7,33	115,0
5 // -хранения	141,2	7,41	63,0
6 // -хранения	185,2	7,45	61,0

Негативные тенденции после четвертой недели продолжают нарастать и в интервале 4–6 недель хранения крови с консервантом глюгицир можно отметить следующие закономерности: популяция эритроцитов становится более однородной; постепенно снижается как среднее значение, так и мода бокового

светорассеяния, и к концу наблюдения остаются только “тени” эритроцитов.

Боковое светорассеяние (SSc) в середине эксперимента, особенно значение моды, – растет, затем мода снижается, а среднее значение SSc на шестой неделе снова возрастает.

Заключение

Эритроциты – одни из наиболее многочисленных клеток организма, и количественно они составляют почти 10% от всего объема клеток взрослого человека [5]. Постепенно, по мере наступления физиологического “старения” эритроциты подвергаются распознаванию и удалению из циркуляции.

Старение эритроцитов – естественный процесс, исследованию которого посвящено много работ, последние достижения в этой области отражены в обзорах [5; 6]. Следует отметить, что на последних стадиях старения эритроцитов происходит связывание гемихрома с интегральным мембранным белком полосы 3, кластеризация белка полосы 3, образование фрагментов C3 системы комплемента и аутологических иммуноглобулинов к белку полосы 3 [5].

Однако до наступления физиологического старения эритроциты могут подвергаться повреждениям, которые нарушают их целостность и таким образом запускают их запрограммированную гибель – эриптоz [4; 5; 7].

Для биологии и медицины в последнее время актуальными становятся направления, связанные с клеточными технологиями. Это связано с развитием трансплантологии, онкологии, фармакологии (той ее части, которая касается оценки токсичности тестируемых фармпрепаратов), трансфузиологии и т. д.

Для всех этих направлений одним из важнейших оцениваемых параметров является апоптоз, процесс запрограммированной смерти. В некоторых случаях его необходимо отсрочить, а в других – например в онкологии, – ускорить, или даже вообще сделать возможным, поскольку опухолевые клетки представляют собой клон с незавершенной дифференцировкой и повышенной способностью к пролиферации.

Продолжительность жизни эритроцитов человека составляет от 100 до 120 дней [1; 2; 3; 8]. Старение эритроцитов – естественный процесс, и управление им (в основном речь идет о продлении их свойств), может быть перспективным в ряде областей, в том числе – обороноспособности страны [7].

В нашей работе с использованием современных методик проанализированы этапы старения эритроцитов в условиях, приближенных к условиям станций переливания крови, где осуществляется хранение компонентов крови. Приято считать, что гибель эритроцитов (эриптоz) связана с воздействием следующих факторов: окислительный стресс, осмотический шок и энергетическое истощение клеток. Эриптоz проявляется разнообразными признаками, и в наших исследованиях мы остановились на морфологических изменениях эритроцитов, поскольку эти характеристики могут быть легко обнаружены, а используемая методика может быть воспроизведена без использования сложного оборудования.

На основании проведенного исследования мы можем сделать следующие выводы:

1. Гарантированный срок хранения эритроцитов, основанный на данных световой микроскопии и проточной цитометрии, составляет 4 недели. На более поздних этапах происходит нарастание гемолиза как при использовании консерванта, так и без него. Начиная с четвертой недели, на препаратах крови обнаруживаются бактерии, численность которых прогрессивно нарастает по мере хранения крови.
2. Хранение эритроцитов сопровождается закономерными изменениями морфодифрактометрических параметров: постепенное нарастание микропцитоза, трансформация дискоцитов в сфeroциты, двухфазное изменение бокового светорассеяния.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Инструкция о порядке осуществления организациями переливания крови, заготовки, переработки, хранения, реализации крови и ее компонентов на территории РБ: Постановление Минздрав РБ 63 30.04.2015 “О внесении изменений и дополнений в постановление Министерства здравоохранения Республики Беларусь от 19 мая 2011 г. № 38”.
2. *Румянцев, А. Г.* Клиническая трансфузиология / А. Г. Румянцев, В. А. Аграненко. – М. : Геотар Медицина, 1987. – 575 с.
3. База знаний: Микроскопия мазка крови // Лабораторная служба Хеликс [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.helix.ru/kb/item/43>. – Дата доступа: 25.04.2016.
4. *Kay, M. M.* Localization of senescent cell antigen on band 3 / M. M. Kay // Proc Natl Acad Sci USA. – 1984. – Vol. 81. – P. 5753–5757.
5. *Lang, F* Mechanisms and significance of eryptosis, the suicidal death of erythrocytes / F. Lang, S. M. Qadri // Blood Purify. – 2012. – V. 33, № 1–3. – P. 125–130.
6. *Bosman, G. J.* Erythrocyte ageing in vivo and in vitro: structural aspects and implications for transfusion / G. J. Bosman [et al.] // Transfus. Med. – 2008. – V. 18. – № 6. – P. 335–347.
7. *Clark, M. R.* Senescence of red blood cells: Progress and problems / M. R. Clark // Physiol Rev. – 1988. – Vol. 68. – P. 503–554.
8. *Мокеев, И. Н.* Инфузционно-трансфузионная терапия : справочник [Электронный ресурс]. – 1998. – Режим доступа: http://xn--80ahc0abogis.com/gematologiya_741/infuzionno-transfuzionnaya-terapiya.html. – Дата доступа: 15.04.2016.

Поступила в редакцию 27.01.2017 г.

Контакты: akulichn@gmail.com (Акулич Николай Васильевич)

Akulich N.V., Tarasova E.A., Soroka A.V., Syakhovich V.E., Beliaev S.A. MORPHOLOGICAL MARKERS OF AGING IN DONORS' BLOOD ERYTHROCYTES.

The article reveals the changes that occur in blood storage. By using light microscopy and flow cytometry the blood changes taking place during 6 weeks of its storage are characterized. Optical and morphological characteristics of aging red blood cells are defined.

Keywords: erythrocyte, light microscopy, membrane, flow cytometry.

УДК 667.523:578.81]:579.674

ІЗУЧЕННІ БАКТЕРИЦІДНИХ СВОЙСТВ КРАСИТЕЛЕЙ ПО ОТНОШЕНІЮ К УСЛОВНО-ПАТОГЕННОЙ МІКРОФЛОРЕ

Е. І. ДЕГТЬЯРЕВА

кандидат біологіческих наук, доцент,

Гомельський юридичний міжнародний університет (Білорусь)

Ю. В. АТАНАСОВА

старший преподаватель,

Гомельський юридичний міжнародний університет (Білорусь)

Никифоренко В. А.

студент медико-діагностичного факультета,

Гомельський юридичний міжнародний університет (Білорусь)

Нами було установлено, що розтвори антисептика бріллантового зеленого обладають бактерицидним дієствием в отношении Гр⁻ бактерій роду Klebsiella, роди Pseudomonas в отличе от ранее известных литературных сведений о том, что данный краситель эффективен только в отношении Гр⁺ микрофлоры.

Экспериментально доказано, что антисептик бриллантовый зеленый проявил очень высокую бактерицидную активность в отношении всех исследуемых микроорганизмов; антисептик метиленовый синий обладает противогрибковыми свойствами и проявил себя как антисептик против бактерий рода Staphylococcus. Антисептик метиленовый синий не уступает, а в отношении некоторых возбудителей гнойно-септических инфекций (*St. aureus*, *C. Albicans* ATCC 10231, *C. Parapsilosis* ATCC 22019, *C. Albicans* ATCC 30029) и превосходит общепризнанный антисептик бриллантовый зеленый.

Ключевые слова: Klebsiella pneumoniae, Candida albicans, Klebsiella pneumoniae, Pseudomonas aeruginosa, Staphylococcus aureus, Staphylococcus saprophyticus, анилиновые красители.

Введение

Профилактика и лечение инфекционных заболеваний в настоящее время является одной из сложнейших задач в медицине. Широкая распространенность и доступность средств антимикробной химиотерапии способствует росту резистентных форм микроорганизмов. Представляется важной проблема реинфицирования раневых поверхностей госпитальными штаммами, микроорганизмов с рук медицинского персонала, постельного белья, шовного и перевязочного материала в отделениях интенсивной терапии. Кроме того, удлиняется срок стационарного лечения пациента, что снижает его трудоспособность, так и качество жизни [1].

© Дегтярева Е. И., 2017

© Атанасова Ю. В., 2017

© Никифоренко В. А., 2017

Одним из важных аспектов решения этой проблемы является непосредственное воздействие на возбудителя. Ведущая роль в этом принадлежит средствам антимикробной химиотерапии. Рациональная антибактериальная терапия является очень важной в лечении любого инфекционного процесса. Но не следует забывать и о местном лечении, которое также играет немаловажную роль. К препаратам для наружного применения относятся местные антисептики и местные формы антибиотиков. В настоящее время в отечественном здравоохранении используется огромное количество средств, предназначенных для антисептики. Вместе с тем многие препараты могут быть не эффективными в силу того, что:

- микроорганизмы выработали механизмы резистентности;
- за долгие годы применения сформировались аллергические реакции;
- многие препараты нуждаются в приготовлении “по требованию”, т. к. не существует длительно хранящихся лекарственных форм.

Так, например, многие антисептические средства, предназначенные для обработки операционного поля, рук хирурга, кожи перед инъекциями, введением сосудистых катетеров, локтевых сгибов перед пункцией сосудов, не всегда обеспечивают надежную стерильность. Исследования последних лет показывают, что госпитальные штаммы микроорганизмов устойчивы к традиционным антисептикам (фурацилин, водный раствор хлоргексидина, раствор калия перманганата). Например, в растворе фурацилина *P. aeruginosa* сохраняется в количестве 106 КОЕ/мл [2].

Таким образом, изучение бактерицидных свойств красителей с целью эффективного их использования в качестве местных антисептиков является актуальной и своевременной задачей.

Цель исследования: определить бактерицидные свойства различных видов красителей, используемых в медицине, по отношению к условно-патогенной микрофлоре.

Объект исследования. Материалы и методы

Для изучения бактерицидных свойств различных видов красителей нами был использован диффузионный метод.

Объектом исследования явились различные концентрации (1%, 0,1%, 0,01%, 0,001%,) водно-спиртовых растворов анилиновых красителей: бриллиантового зеленого, метиленового синего, водного фуксина, эозина, раствора Люголя (рис. 1).

Бактерицидное действие данных красителей исследовали на 10 штаммах условно-патогенных видов микроорганизмов, которые являются потенциальными возбудителями гнойно-септических инфекций кожи и слизистых оболочек и характеризуются высокой устойчивостью к антибиотикам и дезинфектантам: *Klebsiella pneumoniae* 838, *Klebsiella pneumoniae* 96, *Candida albicans* ATCC 30029, *C. albicans* ATCC 10231, *C. albicans* ATCC 14053, *Candida parapsilosis* ATCC 22019, *Pseudomonas aeruginosa* ATCC 13442, *P. aeruginosa* ATCC 27853, *Staphylococcus aureus* ATCC 25923, *S. aureus* ATCC 6538, *Staphylococcus saprophyticus*.

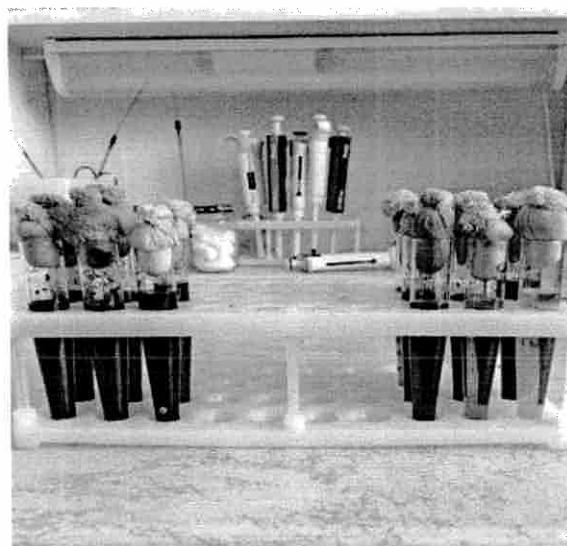


Рисунок 1 – Фотография пробирок в штативе с разведениями водно-спиртовых растворов анилиновых красителей

Нами были приготовлены бактериальные суспензии данных штаммов тест-культур с оптической плотностью 0,5 по МакФарланд, что соответствует $1,5 \times 10^8$ КОЕ/мл. Контроль оптической плотности выполняли с помощью денситометра. Готовили разведения бактериальной суспензии с концентрацией $1,5 \times 10^8$ КОЕ в стерильном изотоническом растворе хлорида натрия до конечной концентрации 10^3 КОЕ/мл. По 2 мл бактериальной суспензии с концентрацией 10^3 КОЕ/мл наносили с помощью микродозатора на поверхность плотной питательной среды (Мюллер-Хинтон агар) в чашках Петри и равномерно распределяли суспензию при помощи стерильного шпателя. Чашку Петри условно делили на 4 сектора и наносили на засеянную газоном чистую культуру эталонного штамма по 2 мкл каждого испытуемого красителя с помощью микродозатора в четырех концентрациях в каждый сектор соответственно. После нанесения красителей чашки подсушивали. Опытные и контрольные образцы инкубировались в термостате в течение 24 часов при температуре 37°C . Учет результатов оценивали по зонам задержки роста эталонных штаммов условно-патогенных микроорганизмов в месте нанесения испытуемых красителей путем измерения их диаметров.

Исследования проводились на базе учебной лаборатории кафедры микробиологии, вирусологии и иммунологии Гомельского государственного медицинского университета.

**Результаты исследований и их анализ.
Изучение бактерицидных свойств красителей
по отношению к условно-патогенной микрофлоре**

Благодаря наличию полисахаридной капсулы клебсиеллы устойчивы к окружающей среде, могут длительно сохраняться в почве, воде, на абиотических

поверхностях. Мало чувствительны к дезинфектантам и очень чувствительны к кипячению. *Cl. Pneumonia* является возбудителем неспецифических инфекций дыхательных путей, органов мочевыводящей системы. Особенно опасны штаммы, обладающие множественной лекарственной устойчивостью, так как они являются возбудителями внутрибольничных гнойно-септических инфекций, зачастую заканчивающиеся летально. Клебсиеллы входят в состав факультативной флоры кишечника, верхних дыхательных путей, в связи с этим источником инфекции может быть медицинский персонал. Средств специфической профилактики не существует, поэтому контроль за микрофлорой слизистых оболочек медработников и микрофлорой абиотических поверхностей помещений ЛПУ, является не специфической профилактикой клебсиеллезов [3].

В нашей работе были изучены бактерицидные свойства различных видов водно-спиртовых растворов анилиновых красителей: бриллиантового зеленого, метиленового синего, водного фуксина, эозина, раствора Люголя по отношению к 2 штаммам *Cl. Pneumonia* (*Cl. Pneumonia* 36, *Cl. Pneumonia* 838). Полученные результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Чувствительность штаммов *Cl. Pneumonia* к растворам анилиновых красителей

<i>Cl. Pneumonia</i> 36				
Красители	1%	0,1%	0,01%	0,001%
Эозин	-	-	-	-
Метиленовый синий	-	-	-	-
Водный фуксин	-	-	-	-
Бриллиантовый зеленый	20 мм	10 мм	10 мм	8 мм
Люголь	10 мм	8 мм	-	-
<i>Cl. Pneumonia</i> 838				
Красители	1%	0,1%	0,01%	0,001%
Эозин	-	-	-	-
Метиленовый синий	-	-	-	-
Водный фуксин	-	-	-	-
Бриллиантовый зеленый	18 мм	13 мм	10 мм	8 мм
Люголь	15 мм	10 мм	-	-

Было установлено, что бактерии вида *Kl.pneumonia* устойчивы к красителям эозин, метиленовый синий, водный фуксин. Наиболее эффективными в отношении этих бактерий являются красители бриллиантовый зеленый и Люголь. Необходимо обратить внимание на то, что Люголь менее эффективен, чем бриллиантовый зеленый и работает только в высоконцентрационных растворах (рисунок 2, 3).

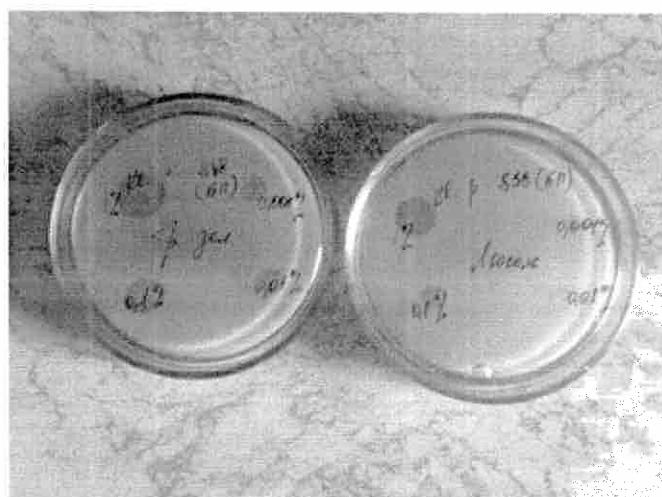


Рисунок 2. Фотография чашек Петри с зонами лизиса бактерий вида KI. pneumonia 838 растворами Люголя и бриллиантового зеленого

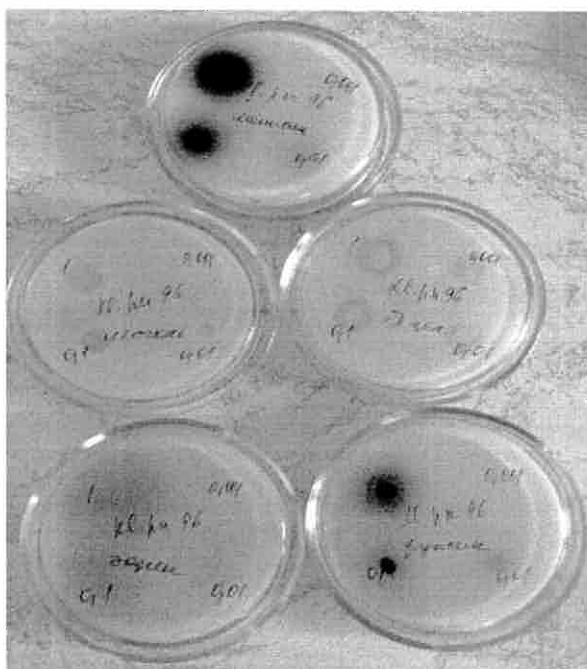


Рисунок 3. Бактерицидная активность анилиновых красителей в отношении K. Pneumonia 96

Из литературных источников известно, что на территории России и стран, ранее входивших в Советский Союз, бриллиантовый зеленый достаточно широко применяется как универсальный антисептик при обработке травматических и послеоперационных разрезов, ран и рубцов; при антисептической обработке ран, царапин, порезов и других повреждениях кожных покровов,

как средство лечения гнойно-воспалительных заболеваний кожи, и средство в борьбе со стафилококковой инфекцией. Кроме стафилококка, бриллиантовый зеленый эффективен при воздействии на грамположительные бактерии и некоторые виды грибковых инфекций, но мало влияет на грамотрицательные бактерии. Несмотря на свое заграничное происхождение, бриллиантовый зеленый остается исключительно отечественным антисептиком, и за приделами бывшего СССР практически не применяется. Раствор Люголя стал широко известен после ядерной катастрофы в Чернобыле в 1986 г. Тогда его пили, чтобы защитить щитовидную железу от поглощения радиоактивных изотопов йода. Люголь обладает антибактериальными свойствами, поэтому его можно применять наружно для очищения кожи, ссадин, незначительных царапин и краев ран. Чаще он применяется для обработки ран и воспалений внутри ротовой полости [3].

Таким образом, нами было установлено, что растворы бриллиантового зеленого обладают бактерицидным действием в отношении Gr^- , не спорообразующих бактерий рода клебсиелла, в отличие от ранее известных литературных сведений о том, что данный краситель эффективен только для Gr^+ микрофлоры. Статистически достоверных различий между значениями зон лизиса растворами бриллиантового зеленого исследуемых 2 штаммов бактерий рода клебсиелла (*Cl. Pneumonia* 36, *Cl. Pneumonia* 838) не было выявлено.

Синегнойная палочка (*Ps.aeruginosa*) является возбудителем многих гнойно-воспалительных заболеваний. Она характеризуется высокой устойчивостью к антибиотикам, что объясняется плохой проницаемостью наружной мембранны этих бактерий вследствие врожденного дефекта поринов клеточной стенки, а также способностью бактерий синтезировать пенициллиназу. Синегнойная палочка может сохранять жизнеспособность в условиях почти полного отсутствия питательных веществ (даже в дистиллированной воде). Она может размножаться в дезинфицирующих средствах (в растворе фурациллина), которые предназначены для промывания ран и хранения медицинских инструментов. 5–10% всех здоровых людей являются носителями этих бактерий, в связи с этим заболевание может проявляться в результате ослабления иммунитета (автоинфицирование), при иммунодефицитных состояниях людей. При повышении температуры окружающей среды бактерии усиливают свои адгезивные свойства в связи с этим посещение бассейнов, лечебных ванн, бань может спровоцировать синегнойную инфекцию. *Ps.aeruginosa* является возбудителем госпитальных инфекций. Летальность от синегнойного сепсиса может достигать до 50% [3].

Нами были проведены экспериментальные исследования бактерицидных свойств красителей-дезинфектантов в отношении 2 госпитальных штаммов синегнойной палочки *Ps. aeruginosa* – ATCC 13442, *Ps. aeruginosa* ATCC 27853. Полученные результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Бактерицидная активность растворов анилиновых красителей в отношении штаммов *Ps. aeruginosa*

Ps. Aer. ATCC 13442				
Красители	1%	0,1%	0,01%	0,001%
Эозин	-	-	-	-
Метиленовый синий	-	-	-	-
Водный фуксин	-	-	-	-
Бриллиантовый зеленый	15 мм	12 мм	10 мм	8 мм
Люголь	12 мм	10 мм	-	-
Ps. Aer. ATCC 27853				
Красители	1%	0,1%	0,01%	0,001%
Эозин	-	-	-	-
Метиленовый синий	-	-	-	-
Водный фуксин	-	-	-	-
Бриллиантовый зеленый	20 мм	10 мм	8 мм	6 мм
Люголь	13 мм	10 мм	-	-

Было установлено, что на псевдомонады оказывают губительное действие растворы красителей бриллиантового зеленого (даже 0,001% его раствор является эффективным), что нельзя сказать о Люголе, который эффективен только в разведении 0,1% и 1%. Статистически достоверных различий между значениями зон лизиса растворами бриллиантового зеленого исследуемых 2 штаммов бактерий рода клебсиелла (*Ps. aeruginosa* ATCC 13442, *Ps. aeruginosa* ATCC 27853) не было выявлено (рисунок 4).



Рисунок 4. Фотография чашек Петри с зонами лизиса бактерий вида *Ps. aeruginosa* ATCC 13442, *Ps. aeruginosa* ATCC 27853 растворами Люголя и бриллиантового зеленого

Таким образом, нами было установлено, что растворы бриллиантового зеленого обладают бактерицидным действием в отношении Гр бактерий не только рода Klebsiella, но и рода Pseudomonas.

C. albicans является условно-патогенным грибом, возбудителем оппортунистических микозов (например при ВИЧ инфекции). Входит в состав факультативной микрофлоры человека. Эти микроорганизмы способны вызывать кандидоз у пациентов с ослабленной иммунной защитой.

Нами исследовалось бактерицидное действие красителей дезинфектантов в отношении 3 штаммов *C. albicans* и 1 штамма *C. parapsilosis*. Полученные результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Чувствительность штаммов *C.albicans* и *C.parapsilosis* к растворам анилиновых красителей

<i>C. Albicans ATCC 14053</i>				
Красители	1%	0,1%	0,01%	0,001%
Эозин	15 мм	10 мм	-	-
Метиленовый синий	32 мм	30 мм	30 мм	20 мм
Водный фуксин	-	-	-	-
Бриллиантовый зеленый	40 мм	35 мм	30 мм	25 мм
Люголь	10 мм	8 мм	-	-
<i>C. Albicans ATCC 10231</i>				
Эозин	13 мм	10 мм	-	-
Метиленовый синий	35 мм	35 мм	30 мм	25 мм
Водный фуксин	-	-	-	-
Бриллиантовый зеленый	30 мм	25 мм	25 мм	23 мм
Люголь	14 мм	7 мм	-	-
<i>C. Albicans ATCC 30029</i>				
Эозин	17 мм	10 мм	-	-
Метиленовый синий	30 мм	30 мм	28 мм	20 мм
Водный фуксин	-	-	-	-
Бриллиантовый зеленый	31 мм	30 мм	28 мм	23 мм
Люголь	14 мм	10 мм	-	-
<i>C. Parapsilosis ATCC 22019</i>				
Эозин	18 мм	12 мм	9 мм	-
Метиленовый синий	40 мм	38 мм	30 мм	29 мм
Водный фуксин	-	-	-	-
Бриллиантовый зеленый	35 мм	32 мм	30 мм	25 мм
Люголь	15 мм	10 мм	-	-

Из результатов экспериментальных исследований по изучению бактерицидных свойств анилиновых красителей в отношении *C.albicans* ATCC 14053, *C. albicans* ATCC 10231 *C.albicans* ATCC 30029 *C. parapsilosis* ATCC 22019 было установлено, что водный фуксин ($C_{20}H_{20}N_3Cl$ – зеленые кристаллы с металлическим блеском, водные растворы пурпурно-красного цвета) не эффективен, а наилучшими противогрибковыми свойствами обладают метиленовый синий (метилтиониния хлорид) и бриллиантовый зеленый. Данные красители про-

явили свои бактерицидные свойства во всех исследуемых разведениях, что и подтверждается их активным использованием при обработке слизистых оболочек (терапия и хирургия в практической стоматологии) и кожных покровов. Люголь (водный раствор йода (1%) и йодида калия (2%)) и эозин (1, 3, 6, 8-тетрабромфлуоресцеин) показали незначительную эффективность в 1%, 0,1% концентрации, однако эозин более эффективен для вида *C.parapsilosis*, чем для *C.albicans*, т. к. проявил свои свойства в 0,01% концентрации. Эозин быстро проникает через кожные покровы. Его применяют для обработки инфицированных ран и слизистых оболочек, пуповины, мокнущих дерматоз (эрите́ма ягодиц).

Таким образом, было экспериментально доказано, что метиленовый синий и бриллиантовый зеленый являются лучшими антисептическими средствами при кандидозах, а основной фуксин, являясь противогрибковым веществом, этих свойств в отношении микроорганизмов 2 видов рода *Candida* не проявил (рисунок 5).

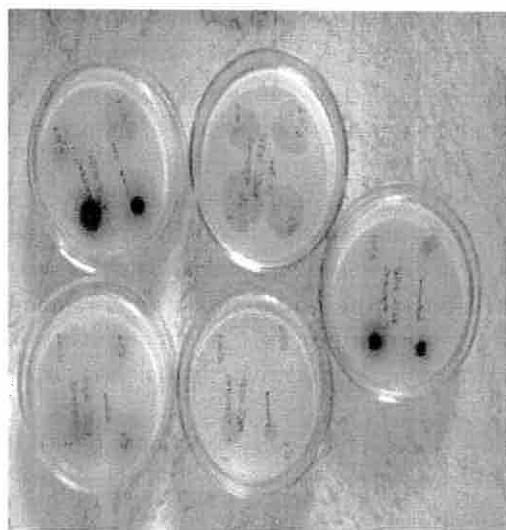


Рисунок 5. Фотография чашек Петри с зонами лизиса бактерий вида *C. Albicans* ATCC 10231 растворами анилиновых красителей

Стафилококки обнаружаются на коже и слизистых оболочках человека, являясь представителями нормальной микрофлоры (*St. saprophyticus*, *St. epidermidis*). Особенно опасным из всех представителей рода *Staphylococcus* является вид *St. aureus*. Медицинские работники лечебно профилактических учреждений могут быть носителями госпитальных штаммов. Стафилококки поражают любые органы и ткани, вызывают сепсис септикопиемию. Для профилактики госпитальных инфекций необходимо соблюдать правила асептики, антисептики, дезинфекции [3]. Полученные результаты в ходе изучения анти-mикробных свойств красителей по отношению к бактериям рода *Staphylococcus* представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Чувствительность штаммов *St. aureus* и *St. saprophyticus* к растворам анилиновых красителей

St. Aur. ATCC 6538				
Красители	1%	0,1%	0,01%	0,001%
Эозин	10 мм	8 мм	-	-
Метиленовый синий	30 мм	20 мм	15 мм	10 мм
Водный фуксин	20 мм	10 мм	8 мм	5 мм
Бриллиантовый зеленый	20 мм	18 мм	15 мм	10 мм
Люголь	10 мм	5 мм	3 мм	-
St. Aur. ATCC 25923				
Эозин	13 мм	10 мм	-	-
Метиленовый синий	35 мм	30 мм	25 мм	5 мм
Водный фуксин	20 мм	10 мм	8 мм	5 мм
Бриллиантовый зеленый	30 мм	25 мм	15 мм	10 мм
Люголь	10 мм	5 мм	4 мм	-
St. Saprophyticus				
Эозин	15 мм	10 мм	-	-
Метиленовый синий	-	-	-	-
Водный фуксин	23 мм	20 мм	18 мм	14 мм
Бриллиантовый зеленый	24 мм	23 мм	20 мм	15 мм
Люголь	15 мм	13 мм	5 мм	-

Из результатов, представленных в таблице 4, видно, что метиленовый синий обладает наибольшей антимикробной активностью по отношению к исследуемым штаммам *St.aureus*, однако в отношении *St.saprophyticus* его бактерицидная активность не обнаружена. Это свойство красителя можно использовать не только для терапии гнойно-септических инфекций, вызванных золотистым стафилококком, но и в диагностических целях в качестве элективного фактора при идентификации бактерий внутри рода.

Необходимо обратить внимание на тот факт, что бриллиантовый зеленый обладает очень высокой бактерицидной активностью в отношении всех исследуемых микроорганизмов. Водный фуксин проявил себя как антисептик только в отношении бактерий рода *Staphylococcus* (рисунок 6).

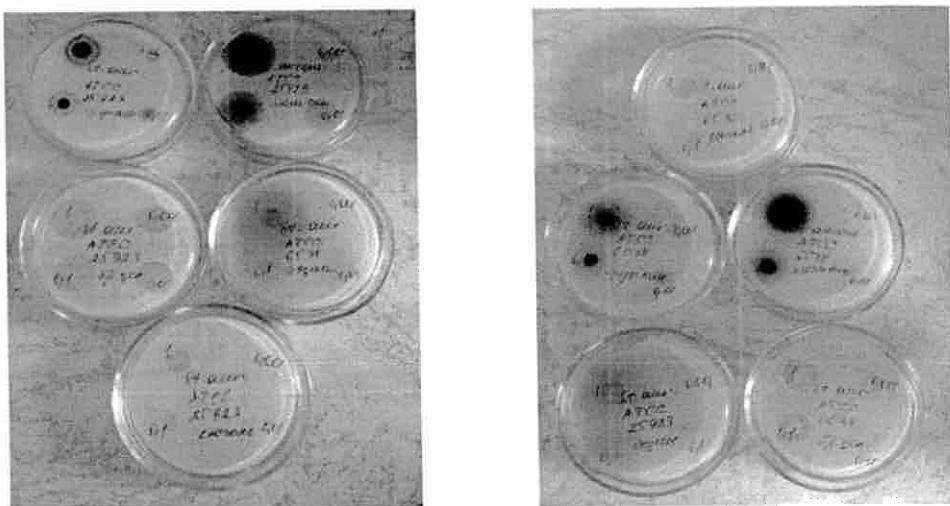


Рисунок 6. Фотография чашек Петри с зонами лизиса бактерий рода *Staphylococcus* растворами анилиновых красителей

В ходе проведенного анкетирования школьников было выявлено, что 54% учеников не знают о бактерицидных свойствах фуксина, 29% учащихся никогда не слышали о метиленовом синем и 17% не знают о растворе Люголя.

Заключение

Таким образом, нами было установлено, что растворы бриллиантового зеленого обладают бактерицидным действием в отношении Гр[−] бактерий рода *Klebsiella*, рода *Pseudomonas* в отличие от ранее известных литературных сведений о том, что данный краситель эффективен только отношении Гр⁺ микрофлоры.

Экспериментально доказано, что метиленовый синий является лучшим антисептическим средством при кандидозах, а основной фуксин являясь противогрибковым веществом, этих свойств в отношении микроорганизмов рода *Candida* не проявил; метиленовый синий обладает наибольшей антимикробной активностью по отношению к исследуемым штаммам *St.aureus*; бриллиантовый зеленый проявил очень высокую бактерицидную активность в отношении всех исследуемых микроорганизмов; водный фуксин проявил себя как антисептик только в отношении бактерий рода *Staphylococcus*.

Метиленовый синий не уступает, а в отношении некоторых возбудителей гнойно-септических инфекций (*St.aureus*, *C.Albicans* ATCC 10231, *C.Parapsilosis* ATCC 22019, *C.Albicans* ATCC 30029) и превосходит общепризнанный антисептик бриллиантовый зеленый.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мельникова, Г. Н. Проблемы кожных антисептиков: состояние и перспективы / Г. Н. Мельникова // Материалы Всероссийской научно-практической конференции “Состояние и перспективы совершенствования научного и практического

- обеспечения дезинфекционной деятельности в Российской Федерации". Звенигород, 22–23 сентября 2010 г. – С. 56–60.
2. Атанасова, Ю. В. Микробиологическая эффективность гигиенической обработки рук различными сортами кускового мыла / Ю. В. Атанасова, Е. И. Дегтярева, В. А. Никифоренко / Веснік МДУ імя А. А. Кулішова. – 2015. – № 2(46). – С. 84–91.
 3. Зверев, В. В. Медицинская микробиология, вирусология и иммунология : в 2 т. – Т. 1 : учеб. по дисциплине Микробиология, вирусология и иммунология для студентов учреждений высшего проф. образования, обучающихся по специальностям 060101.65 лечеб. дело, 060103.65 педиатрия, 060104.65 медико-профилакт. дело / под ред. В. В. Зверева, М. Н. Бойченко. – М. : ГЭОТАР-Медиа, 2010. – 448 с.

Поступила в редакцию 11.10.2016 г.

Контакты: elena.degyaryova@tut.by (Дегтярева Елена Ивановна)

Degtyareva E.I., Atanasova Y.V., Nikiforenko V.A. THE STUDY OF BACTERICIDAL PROPERTIES OF DYES IN RELATION TO CONDITIONAL-PATHOGENIC MICROFLORA.

It has been found out that the solutions of brilliant green display an antibacterial activity against Gr bacteria of the genus Klebsiella, the genus Pseudomonas in contrast to the previously known data indicating that this dye is only effective against Gr⁺ bacteria. It has been proved experimentally that brilliant green has shown a very high bactericidal activity against all studied microorganisms; methylene blue has antifungal properties, and acts as an antiseptic against the bacteria of the genus Staphylococcus. Methylene blue is not inferior, and for some causative agents of purulent septic infections (St. aureus, C. Albicans ATCC 10231, C. Parapsilosis ATCC 22019, C. Albicans ATCC 30029) it exceeds the qualities of the recognized antiseptic brilliant green.

Keywords: Klebsiella pneumoniae, Candida albicans, Klebsiella pneumoniae, Pseudomonas aeruginosa, Staphylococcus aureus, Staphylococcus saprophyticus, aniline dyes.

УДК 632.7

ФЕНОТИПИЧЕСКАЯ ИЗМЕНЧИВОСТЬ РИСУНКА НАДКРЫЛИЙ КОЛОРАДСКОГО ЖУКА КАК ОЦЕНКА ЗДОРОВЬЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Г. Н. Тихончук

кандидат биологических наук, доцент,

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Загрязнение окружающей среды является важной проблемой для человечества. Многие организмы могут быть использованы в целях биоиндикации, в том числе колорадский жук. В статье обсуждается возможность использования полиморфизма рисунка надкрылий жука для оценки здоровья окружающей среды. Количество фенов характеризует стабильность популяции насекомых.

Ключевые слова: колорадский жук, полиморфизм, популяция, изменчивость, биоиндикация, здоровье окружающей среды.

Введение

В экологических исследованиях все большую значимость приобретает системный анализ, который позволяет в целом провести комплексное исследование биотопов и экосистем. Методы системного анализа применимы к живым системам любого ранга, в том числе и к популяциям насекомых. Антропогенная нагрузка, существенно возросшая в последние десятилетия, оказывает значительное влияние на проявление фенотипической изменчивости насекомых, имеющей адаптивный характер [2]. Частота проявлений фенотипической изменчивости насекомых находится в прямой зависимости от интенсивности антропогенного воздействия на их биотопы. Фенотипические изменения отдельных частей тела насекомых могут служить в качестве тест-объектов при биоиндикации различных мест обитания. Биоиндикаторы позволяют судить не только о содержании в среде загрязнителей, но и о скорости в природе загрязняющих процессов, а также о возможных путях распространения загрязнителей, помогая прогнозировать изменение качества окружающей среды в перспективе.

Подобного рода исследования были проведены на представителях различных отрядов насекомых, но наибольший интерес вызывают данные, полученные при изучении насекомых-вредителей сельского хозяйства, экология которых тесно связана с воздействием на них пестицидных обработок, выбросов промышленного производства и транспорта.

Основная часть

Центром происхождения колорадского жука (*Leptinotarsa decemlineata* Say) считают территорию, ограниченную восточными склонами Скалистых гор и север-

ными районами современной Мексики. Здесь произрастают ксерофитные пасленовые (*Solanum rostratum*, *S. cornutum*, *S. carolinense*, *S. angustifolium* и др.), на которых развивается несколько десятков видов жуков рода *Leptinotarsa*, в том числе и *Leptinotarsa decemlineata* Say [4].

Усилившиеся в начале XIX в. миграции населения способствовали переносу дикорастущих пасленовых и расширению ареала многих питающихся ими насекомых. Однако наибольшее преимущество получил вид *L. decemlineata* Say.

В связи с развитием земледелия и освоением западных районов Северной Америки в 40-х гг. XIX ст. началось продвижение культурного картофеля *Solanum tuberosum* на запад. К середине XIX в. плантации картофеля достигли штата Колорадо и распространялись вдоль склонов Скалистых гор, где в то время обитал *L. decemlineata*. Первые значительные повреждения картофеля этим жуком были отмечены в штате Небраска в 1855 г. Но особенно большой ущерб картофелеводству был нанесен в 1859 г. в штате Колорадо, откуда и началось интенсивное расселение жука. Переход колорадского жука на культурный картофель способствовал его интенсивному размножению и расселению, и вскоре жук приобрел значение опасного вредителя.

Во время I мировой войны жук был завезен на территорию Европы. В СССР впервые был отмечен в 1949 г. в Западной Украине и, двигаясь в восточном, в сторону преобладающих ветров направлении, достиг Урала.

Колорадский жук характеризуется значительным внутривидовым полиморфизмом, экологической пластичностью и приспособляемостью [4]. Все это позволяет ему успешно адаптироваться к биотическим, абиотическим и к антропогенным воздействиям. Так, у колорадского жука развилаась резистентность к почти всем используемым инсектицидам на всем его ареале на территории стран СНГ, Евразийского и Американского континентов.

По данным, представленным в международной базе данных [5], колорадский жук приобрел устойчивость к 51 препарату из различных классов инсектицидов в 46 регионах мира. Тем не менее, вид реагирует на загрязнение окружающей среды и, следовательно, может быть использован для оценки здоровья среды обитания.

Колорадский картофельный жук удобный объект изучения полиморфизма: по обилию и доступности материала он может быть сравним лишь с лабораторными культурами насекомых. Полиморфизм рисунка покровов жука определяется генетическими и экологическими факторами, что предполагает возможность использования характера полиморфизма этого вида для биоиндикации. Наиболее подходящими для этих целей представляется характер и степень асимметрии признаков [1].

Одной из задач данной работы являлась оценка пригодности для биоиндикации рисунка надкрылий колорадского жука.

Материал был собран на трех модельных приусадебных участках картофельного поля. 1-й участок находился у д. Мосток Могилевского района (место сбора жуков находилось в 400 метрах от шоссе в окружении лесного массива). 2-й участок – у а/г Кадино Могилевского района (располагался в 200 метрах от шоссе). 3-я площадка – у д. Добрейка Шкловского района (участок характери-

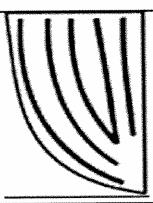
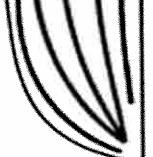
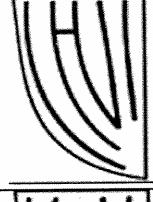
зуется расположением в естественной низине и прохождением в 200 метрах железнодорожного полотна). Площадки имели схожий гранулометрический состав почвы, агротехнику возделывания. На всех площадках для выращивания использовался сорт белорусской селекции “Ласунак”, растения которого не обрабатывались инсектицидами, так как этот сорт считается одним из наиболее устойчивых к повреждениям колорадским жуком.

Для анализа полиморфизма колорадского жука использовались фены рисунка надкрылий. Оценив частоту встречаемости асимметричного рисунка на элитрах, можно установить факт влияния загрязнения окружающей среды на морфологию насекомых. Частота асимметричного проявления признака (коэффициент флуктуирующей асимметрии) вычисляются по формуле

$$\text{ЧАП} = (\text{ЧАО}/N) \cdot 100\%,$$

где ЧАО – число асимметричных особей, N – общее число проанализированных особей.

В результате изучения фенов (морф) рисунка надкрылий колорадского жука было определено, что на всех участках преобладают четыре фена надкрылий (рисунок).

Фены (морфы)	Участок		
	1	2	3
 V	50	66	58
 W	24	10	24
 H	6	8	8
 N	20	16	10

Количество фенов на изучаемых участках, %

На первом участке чаще всего встречается морфа с ярко выраженным разделяющими проксимальными и медиальными полосами в виде буквы V – 50%, затем следует морфа с соединенными проксимальными и медиальными полосами W – 24%. Морфа, у которой полоски напоминают заглавную букву N составляет – 20%. На четвертом месте оказалась морфа (H) с перемычкой между медиальной и проксимальной полосами – 6%.

Из 100 особей лишь 12 имели асимметрию рисунка надкрылий. Таким образом, коэффициент асимметрии составил 12%.

При анализе частоты встречаемости признака на модельном участке № 2 было установлено, что чаще всего встречается морфа V – 66%, так же как и на первом модельном участке. Встречаемость других фенов составила соответственно 16% (N), 10% (W) и 8% (H). Лишь 16 особей проявляли асимметричность. На участке у д. Добрейка 74 особи были симметричны, соответственно, частота асимметричности составила 26%. При анализе частоты встречаемости на модельном участке № 3 морфа V составила 58%, W – 24%, N – 10%, минимальной в количественном отношении оказалась морфа H (8%).

Оценивая частоту асимметричности, можно дать характеристику уровня стрессирующего воздействия окружающей среды (таблица).

Оценка уровня стрессирующего воздействия окружающей среды

Частота асимметричного проявления, %	Уровень стрессирующего воздействия
Менее 20	Допустимый
От 21 до 30	Низкий
От 31 до 40	Средний
От 41 до 50	Высокий
Более 51	Очень высокий

В наших исследованиях участок у д. Добрейка оказался наиболее подвержен воздействию факторов среды, что, очевидно, связано с расположенной рядом железной дорогой, которая является не только вибрационно-шумовым, но и химическим загрязнителем прилегающих к ней территорий. Эмиссия выхлопных газов в основном содержит окиси азота, окись углерода, двуокись серы и частицы, содержащие полициклические ароматические углеводороды, сажу, ионы металлов. Уровень воздействия на этом участке оценивается как “низкий”. В то же время на двух других площадках как “допустимый”.

Для оценки косвенного влияния степени химического загрязнения почв на проявление флюктуирующей асимметрии у колорадского жука был проведен статистический анализ. Коэффициент корреляции показателей асимметрии колорадского жука и загрязнения окружающей среды колеблется от 0,32 (частота асимметричного проявления – загрязнение цинком) до 0,87 (частота асимметричного проявления – загрязнение железом). Таким образом, зависимость коэффициента флюктуирующей асимметрии надкрылий от степени загрязненности металлами носит характер прямой пропорциональности: наибольшее влияние на величину коэффициента флюктуирующей асимметрии оказывает содержание в окружающей среде железа, наименьшее – цинка.

На всех участках преобладали особи с феном V (50–66%) и W (10–24% случаев). Очевидно, что генетически эти фены определяют устойчивость популяции. Фены H и N показали наименьшее преобладание: от 6 до 20%. Скорее всего, именно эти фенетические группы насекомых являются своего рода резервом генов резистентности, отвечающих за специфическую устойчивость [3]. В целом количество фенов на исследуемых участках невелико, что говорит о низком потенциале популяции и не позволяет ей поддерживать высокую численность вредителя, особенно в стрессовых ситуациях.

Заключение

Флуктуирующая асимметрия представляет интерес, так как она может быть использована для оценки повреждающего действия среды на популяции и конкретные организмы. Флуктуирующая асимметрия рисунка надкрылий колорадского жука (*Leptinotarsa decemlineata* Say) зависит от вибрационно-шумового, химического загрязнения окружающей среды.

Анализ рисунка надкрылий колорадского жука (*Leptinotarsa decemlineata* Say) является доступным методом биоиндикации при оценке здоровья окружающей среды.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Захаров, В. М.* Асимметрия животных (популяционно-генетический подход) / В. М. Захаров. – Москва : Наука, 1987. – 215 с.
2. *Павлов, Б. К.* Механизмы популяционных адаптаций животных к действию антропогенных факторов / Б. К. Павлов // Проблемы охраны природы. : тез. докл. междунар. конф., Байкальск, 10–11 мая, 1984. – Байкальск, 1984. – С. 27–28.
3. *Удалов, М. Б.* Популяционная генетика колорадского жука: от генотипа до фенотипа / М. Б. Удалов, Г. В. Беньковская // Вавиловский журнал генетики и селекции. – 2011. – Том 15, № 1. – С. 156–171.
4. *Ушатинская, Р. С.* Колорадский картофельный жук: филогения, морфология, физиология, экология, адаптация, естественные врачи / Р. С. Ушатинская. – Москва : Наука, 1981. – 377 с.
5. The Database of Arthropods Resistant to Pesticides. 2011. available at <http://www.pesticideresistance.org>

Поступила в редакцию 03.01.2017 г.

Контакты: kryngal@mail.ru (Тихончук Галина Николаевна)

Tikhonchuk G.N. PHENOTYPIC VARIATION OF ELYTRA PATTERN OF COLORADO POTATO BEETLE AS ASSESSMENT OF ENVIRONMENTAL HEALTH.

Environmental pollution is an important problem for people. Many different organisms can be used for bioindication goals. The population studies of the Colorado potato beetle are reviewed. The article focuses on the possibility of using elytra patterns to assess the state of environment. The stability of insect population is characterized by the number of elytra phenes.

Keywords: Colorado potato beetle, polymorphism, population, variation, bioindication, environmental health.