

ISSN 2409-3777



ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта
імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

2 (48)
2016

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (галоўны рэдактар)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Д.С. Лаўрыновіч (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)

*Научно-методический журнал “Вестник Магилёвского государственного
университета имени А. А. Куляшова” включен в РИНЦ
(Российский индекс научного цитирования),
лицензионный договор № 811–12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

ЗМЕСТ

<i>ГАЛЬМАК А. М.</i> m-нейтральные последовательности в n-арных группах	4
<i>КАШПАР А. И., ЛАПТИНСКИЙ В. Н.</i> Исследование разрешимости краевой задачи Валле-Пуассона для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка	17
<i>ЛИПНИЦКИЙ В. А., КУШНЕРОВ А. В.</i> Свойства и декодирование реверсивных кодов с конструктивным расстоянием 5	30
<i>ВОЛОСЕВИЧ А. В.</i> Нелинейные электростатические волновые структуры в столкновительной ионосферной плазме	44
<i>ЧЕРНОВ С. М.</i> Оценка параметров гиперядер в супергауссовой модели и Ар-рассеяние	53
<i>ШМАТОК Е. В., ОСТРИКОВ О. М.</i> Двухфункциональная модель линзовидного двойника	62
<i>БЕЛЫЙ П. Н.</i> Созологический анализ лишенобиоты еловых лесов Беларуси	72
<i>ПЛИСКЕВИЧ Е. С.</i> Сравнительный анализ видового состава мирмекофильных жесткокрылых (<i>insecta: coleoptera</i>) белорусского Поозерья и соседних территорий	84
<i>БЫКОВА С. Ю.</i> Выведение ¹³⁷ Cs и ⁴⁰ K из организма коров при различных типах кормовых рационов	93

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

m-НЕЙТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В *n*-АРНЫХ ГРУППАХ

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

*В статье изучаются *m*-нейтральные последовательности элементов *n*-арной группы, где $n = k(m - 1) + 1$, $k \geq 1$. Каждую 2-нейтральную последовательность можно отождествить с единицей *n*-арной группы, определение которой дал В. Дёрнте, а *n*-нейтральные последовательности совпадают с нейтральными последовательностями, которые были определены Э. Постом.*

Ключевые слова: *n*-арная группа, единица, нейтральная последовательность.

1. Введение

Одним из самых широких полиадических обобщений единицы группы являются *m*-нейтральные последовательности, которые при $m = n$ совпадают с нейтральными последовательностями, а при $m = 2$ отождествляются с единицей *n*-арной группы. Именно *m*-нейтральные последовательности являются основным объектом изучения в данной статье.

Согласно В. Дёрнте [1], элемент *e* *n*-арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется *единицей* этой *n*-арной группы, если для любого $x \in A$ и любого $i = 1, 2, \dots, n$ верно

$$[\underbrace{xe \dots e}_{n-1}] = [\underbrace{exe \dots e}_{n-2}] = \dots = [\underbrace{e \dots exe}_{n-2}] = [\underbrace{e \dots ex}_{n-1}] = x.$$

Еще одним *n*-арным обобщением единицы группы является понятие нейтральной последовательности.

Согласно Э. Посту [2], последовательность $e_1 \dots e_{s(n-1)}$, где $s \geq 1$, элементов *n*-арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется *нейтральной*, если

$$[e_1 \dots e_{s(n-1)}x] = [xe_1 \dots e_{s(n-1)}] = x$$

для любого $x \in A$.

Замечание 1.1. Можно показать, что:

1) для того чтобы элемент *e* *n*-арной группы $\langle A, [] \rangle$ являлся ее единицей, достаточно выполнения для любого $x \in A$ равенств

$$[\underbrace{xe \dots e}_{n-1}] = [\underbrace{exe \dots e}_{n-2}] = x;$$

2) для того чтобы последовательность $e_1 \dots e_{s(n-1)}$ являлась нейтральной в n -арной группе $\langle A, [] \rangle$, достаточно выполнения для любого $x \in A$ одного из следующих равенств

$$[e_1 \dots e_{s(n-1)}x] = x, [xe_1 \dots e_{s(n-1)}] = x.$$

Последовательность β элементов n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется [2] *обратной* к последовательности α элементов этой же n -арной группы, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными.

Пусть $\langle A, [] \rangle$ n -арная группа, F_A – свободная полугруппа над алфавитом A , θ_A – отношение эквивалентности Поста [2], определенное на F_A по правилу $(\alpha, \beta) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности γ и δ из F_A такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$. Легко проверяется, что θ_A – конгруэнция на полугруппе F_A , а полугруппа $A^* = F_A / \theta_A$ является группой, которую называют *универсальной обертывающей группой* для n -арной группы $\langle A, [] \rangle$. Единицей этой n -арной группы является класс $\theta_A(\varepsilon)$, где ε – любая нейтральная последовательность, а обратным элементом для класса $\theta_A(\alpha)$ является класс $\theta_A(\beta)$, где β – любая обратная последовательность для последовательности α .

Далее для сокращения записей вместо символа θ_A будем использовать символ θ без нижнего индекса.

Для всякого $i = 1, \dots, n - 1$ определим множество

$$A^{(i)} = \{\theta(\alpha) \in A^* \mid l(\alpha) = s(n - 1) + i, s \geq 0\},$$

где $\theta(\alpha)$ – класс конгруэнции θ , содержащий последовательность α ; $l(\alpha)$ – длина последовательности α .

Ясно, что $A^{(i)} = \{\theta(\alpha) \in A^* \mid l(\alpha) = i\}$. В частности, $A' = \{\theta(a) \mid a \in A\}$.

Если зафиксировать элементы $a_1, \dots, a_{i-1} \in A$, то

$$A^{(i)} = \{\theta(aa_1 \dots a_{i-1}) \mid a \in A\} = \{\theta(a_1 \dots a_{i-1}a) \mid a \in A\}.$$

Для сокращения записей множество $A^{(n-1)}$ часто обозначают распространенным в литературе по n -арным группам символом A_0 , то есть полагают $A^{(n-1)} = A_0$.

Замечание 1.2. Если $n = k(m - 1) + 1$, где $n \geq 3$, $m \geq 2$, то легко проверяется, что множество $A^{(m-1)}$ является $(k + 1)$ -арной группой относительно $(k + 1)$ -арной операции

$$[\theta(\alpha_1)\theta(\alpha_2) \dots \theta(\alpha_{k+1})]_{k+1} = \theta(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1}).$$

Если $m = 2$, то $k = n - 1$ и получаем n -арную операцию

$$[\theta(a_1)\theta(a_2) \dots \theta(a_n)]_n = \theta(a_1a_2 \dots a_n) = \theta([a_1a_2 \dots a_n]), a_1, a_2, \dots, a_n \in A.$$

Если $m = n$, то $k = 1$ и получаем бинарную операцию

$$\begin{aligned} & [\theta(a_1a_2 \dots a_{n-1})\theta(b_1b_2 \dots b_{n-1})]_2 = \\ & = \theta(a_1a_2 \dots a_{n-1}b_1b_2 \dots b_{n-1}) = \theta([a_1a_2 \dots a_{n-1}b_1]b_2 \dots b_{n-1}), \end{aligned}$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \in A$.

Иную необходимую информацию о n -арных группах можно найти в книгах [3, 4].

2. m -Нейтральные последовательности

Понятия нейтральной последовательности и единицы n -арной группы можно объединить следующим определением из [4].

Определение 2.1. Если $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, где $n = k(m - 1) + 1, k \geq 1$, то последовательность $\alpha = e_1 \dots e_{t(n-1)+m-1}$ элементов из A , где $t \geq 0$, называется t -нейтральной, если для любого $x \in A$ и любого $j = 1, \dots, k + 1$ верно равенство

$$[\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}] = x.$$

Ясно, что n -нейтральные последовательности элементов n -арной группы – это в точности ее нейтральные последовательности. Понятно также, что в n -арной группе любая единица является 2-нейтральной последовательностью, а любая 2-нейтральная последовательность $e_1 \dots e_{t(n-1)+1}$ либо является ($t = 0$) единицей, либо отождествляется ($t \geq 1$) с единицей $[e_1 \dots e_{t(n-1)+1}]$.

Справедливость следующего критерия устанавливается простой проверкой.

Предложение 2.1. Если $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $n = k(m - 1) + 1$, то последовательность α ее элементов является t -нейтральной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) для любого $x \in A$ последовательности αx и $x \alpha$ эквивалентны, что равносильно равенству $\theta(\alpha)\theta(x) = \theta(x)\theta(\alpha)$;

2) последовательность $\underbrace{\alpha \dots \alpha}_k$ является нейтральной.

Теорема 2.1. Пусть α – t -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, γ – любая обратная для α последовательность, β – любая последовательность элементов из A . Тогда:

- 1) последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ эквивалентны;
- 2) последовательности $\gamma\beta$ и $\beta\gamma$ эквивалентны.
- 3) для любого $j = 1, \dots, k + 1$ верны равенства

$$\theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} \beta \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}) = \theta(\beta), \theta(\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{j-1} \beta \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-j+1}) = \theta(\beta).$$

Доказательство. 1) Вытекает из утверждения 1) предложения 2.1.

2) Пусть δ – любая обратная последовательность для последовательности β . Согласно утверждению 1), $\theta(\alpha)\theta(\delta) = \theta(\delta)\theta(\alpha)$, откуда последовательно получаем

$$(\theta(\alpha)\theta(\delta))^{-1} = (\theta(\delta)\theta(\alpha))^{-1}, (\theta(\delta))^{-1}(\theta(\alpha))^{-1} = (\theta(\alpha))^{-1}(\theta(\delta))^{-1},$$

$$\theta(\beta)\theta(\gamma) = \theta(\gamma)\theta(\beta), \theta(\beta\gamma) = \theta(\gamma\beta).$$

3) Пусть $\beta = x_1 \dots x_r$, где $x_1, \dots, x_r \in A, r \geq 1$. Тогда, используя 1) и определение t -нейтральной последовательности, получим

$$\theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} \beta \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}) = \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x_1 \dots x_r \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}) =$$

$$= \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x_1) \theta(x_2 \dots x_r \alpha) \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j}) = \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} \alpha x_1) \theta(\alpha x_2 \dots x_r) \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x_1 \alpha) \theta(x_2 \dots x_r \alpha) \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j-1}) = \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x_1 \alpha) \theta(\alpha x_2 \dots x_r) \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j-1}) = \\
 &= \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x_1 \alpha) \theta(x_2 \dots x_r) \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j-1}) = \\
 &\dots\dots\dots \\
 &= \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x_1 \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j-1}) \theta(x_2 \dots x_r) = \theta(x_1) \theta(x_2 \dots x_r) = \theta(x_1 x_2 \dots x_r) = \theta(\beta).
 \end{aligned}$$

Следовательно, верно первое равенство из 3).

Из этого равенства следует

$$\begin{aligned}
 &\theta(\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{j-1}) \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} \beta \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}) \theta(\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-j+1}) = \theta(\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{j-1}) \theta(\beta) \theta(\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-j+1}), \\
 &\theta(\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{j-1} \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} \beta \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1} \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-j+1}) = \theta(\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{j-1} \beta \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-j+1}),
 \end{aligned}$$

откуда, используя взаимную обратность последовательностей α и γ , получаем второе равенство из 3). Теорема доказана.

Следствие 2.1. Если α – m -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, γ – любая обратная для нее последовательность, то для любого $x \in A$ и любого $j = 1, \dots, k + 1$ верно равенство $[\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{j-1} x \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-j+1}] = x$.

Теорема 2.2. Для любых m -нейтральных последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ последовательность $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}$ также является m -нейтральной.

Доказательство. Пусть $l(\alpha_j) = t_j(n - 1) + m - 1$ – длина последовательности α_j ($j = 1, \dots, k + 1$). Тогда $l(\alpha) = t(n - 1) + m - 1$ – длина последовательности α , где

$$t = (t_1 + \dots + t_{k+1} + 1)(n - 1) + m - 1.$$

Кроме того, для любого $x \in A$ и любого $j = 1, \dots, k + 1$, используя утверждение 1) теоремы 2.1 и определение m -нейтральной последовательности, получим

$$\begin{aligned}
 &[\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}] = \\
 &= [\underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1} \dots \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} x \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1} \dots \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] = \\
 &= [\underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} \dots [\underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{j-1} [\underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_1}_{j-1} x \underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_1}_{k-j+1}] \underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{k-j+1}] \dots \underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} \dots [\underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{j-1} x \underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{k-j+1}] \dots \underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] = \dots \\
&\dots = [\underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} x \underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] = x,
\end{aligned}$$

то есть $[\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}] = x$. Следовательно, α – m -нейтральная последова-

тельность. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Полагая в теореме 2.2 соответственно $m = 2$ и $m = n$, получим известные результаты:

1) множество $\mathbf{E}(A)$ всех единиц n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ замкнуто относительно n -арной операции $[]$, то есть $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ – n -арная подполугруппа в $\langle A, [] \rangle$;

2) если α и β – нейтральные последовательности n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, то последовательность $\alpha\beta$ также нейтральна в $\langle A, [] \rangle$.

Обозначим через $\mathbf{N}(A, m)$ множество всех m -нейтральных последовательностей n -арной группы $\langle A, [] \rangle$. Ясно, что множество $\mathbf{N}(A, 2)$ включает в себя множество $\mathbf{E}(A)$ всех единиц этой n -арной группы, то есть $\mathbf{E}(A) \subseteq \mathbf{N}(A, 2)$, а множество $\mathbf{N}(A, n)$ совпадает с множеством всех ее нейтральных последовательностей. Равенство $\mathbf{E}(A) = \mathbf{N}(A, 2)$ имеет место только в случае отсутствия единиц в n -арной группе $\langle A, [] \rangle$. Если же множество $\mathbf{E}(A)$ не пусто, то множество $\mathbf{N}(A, 2)$ содержит не только каждую единицу e , но и любую эквивалентную ей последовательность $e_1 \dots e_{(n-1)+1}$ длины $t(n-1) + 1$, которая при $t \geq 1$ не принадлежит $\mathbf{E}(A)$.

В $(k+1)$ -арной группе $\langle A^{(m-1)}, [] \rangle$ выделим подмножество

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \{\theta(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{N}(A, m)\}.$$

Так как для любого элемента $\theta(\alpha)$ непустого множества $\mathbf{N}(A^{(m-1)})$ в качестве последовательности α можно выбрать последовательность длины $m-1$, то

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \{\theta(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{N}(A, m), l(\alpha) = m-1\}.$$

В частности, $\mathbf{N}(A') = \{\theta(a) \mid a \in \mathbf{E}(A)\}$.

Предложение 2.2. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа,

$$U \in \mathbf{N}(A^{(m-1)}), V \in A^{(m-1)}.$$

Тогда для любого $j = 1, \dots, k+1$ справедливы следующие равенства

$$[\underbrace{U \dots U}_{j-1} \underbrace{VU \dots U}_{k-j+1}]_{k+1} = V, [\underbrace{U^{-1} \dots U^{-1}}_{j-1} \underbrace{VU^{-1} \dots U^{-1}}_{k-j+1}]_{k+1} = V,$$

где U^{-1} – обратный для U в универсальной обертывающей группе A^* .

Доказательство. Положим $U = \theta(\alpha)$, $V = \theta(\beta)$. Так как последовательность α – m -нейтральная, то, в силу утверждения 1) теоремы 2.1 $\theta(\alpha)\theta(\beta) = \theta(\beta)\theta(\alpha)$, а согласно утверждению 2) предложения 2.1, последовательность $\underbrace{\alpha \dots \alpha}_k$ является нейтральной. Поэтому

$$\begin{aligned} \underbrace{[U \dots U]_{j-1}} \underbrace{V \underbrace{U \dots U}_{k-j+1}}]_{k+1} &= [\underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{j-1} \theta(\beta) \underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{k-j+1}]_{k+1} = \\ &= \underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{j-1} \theta(\beta) \underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{k-j+1} = \\ &= \underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_k \theta(\beta) = \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_k) \theta(\beta) = \theta(\beta) = V, \end{aligned}$$

то есть верно первое равенство из формулировки предложения.

Второе равенство из его формулировки является следствием первого. Предложение доказано.

Замечание 2.2. Предложение 2.2 может быть получено как следствие утверждения 3) теоремы 2.1 и определения t -нейтральной последовательности.

Первое равенство из предложения 2.2 позволяет сформулировать предложение, устанавливающее связь между t -нейтральными последовательностями n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ и единицами $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$.

Предложение 2.3. Если последовательность α элементов n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ является t -нейтральной, то класс $\theta(\alpha)$ – единица $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ и верно включение $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{E}(A^{(m-1)})$.

Возникает естественный вопрос: верно ли обратное включение?

Следствием положительного ответа на этот вопрос было бы равенство

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)}).$$

В следующем разделе будет приведен пример, показывающий, что существуют полиадические группы, для которых ответ на сформулированный выше вопрос является отрицательным. Следовательно, указанное равенство в таких полиадических группах невозможно.

Покажем, что при любом гомоморфизме одной n -арной группы на другую n -арную группу образ t -нейтральной последовательности является t -нейтральной последовательностью.

Предложение 2.4. Пусть $\alpha = e_1 \dots e_{t(n-1)+m-1}$ – t -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, φ – гомоморфизм этой n -арной группы на n -арную группу $\langle B, \{ \} \rangle$. Тогда $\alpha^\varphi = e_1^\varphi \dots e_{t(n-1)+m-1}^\varphi$ – t -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle B, \{ \} \rangle$.

Доказательство. Пусть y – произвольный элемент из B , x – такой элемент из A , что $x^\varphi = y$. Тогда, для любого $j = 1, \dots, k+1$, используя t -нейтральность последовательности α , получим

$$\begin{aligned} \{ \underbrace{\alpha^\varphi \dots \alpha^\varphi}_{j-1} y \underbrace{\alpha^\varphi \dots \alpha^\varphi}_{k-j+1} \} = \\ = \{ \underbrace{e_1^\varphi \dots e_{t(n-1)+m-1}^\varphi \dots e_1^\varphi \dots e_{t(n-1)+m-1}^\varphi}_{j-1} x^\varphi \underbrace{e_1^\varphi \dots e_{t(n-1)+m-1}^\varphi \dots e_1^\varphi \dots e_{t(n-1)+m-1}^\varphi}_{k-j+1} \} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\underbrace{e_1 \dots e_{t(n-1)+m-1} \dots e_1 \dots e_{t(n-1)+m-1}}_{j-1} x \underbrace{e_1 \dots e_{t(n-1)+m-1} \dots e_1 \dots e_{t(n-1)+m-1}}_{k-j+1} \right]^\varphi = \\
&= \left[\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1} \right]^\varphi = x^\varphi = y,
\end{aligned}$$

то есть

$$\left\{ \underbrace{\alpha^\varphi \dots \alpha^\varphi}_{j-1} y \underbrace{\alpha^\varphi \dots \alpha^\varphi}_{k-j+1} \right\} = y.$$

Следовательно, последовательность α^φ является m -нейтральной в n -арной группе $\langle B, \{ \} \rangle$. Предложение доказано.

При $n = 2$ ($n = m$) предложение 2.4 включает в себя соответствующие результаты о единицах (нейтральных последовательностях) n -арных групп.

Предложение 2.5. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $U \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$, $V \in A^{(m-1)}$, φ – автоморфизм $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$. Тогда для любого $j = 1, \dots, k+1$ справедливо равенство

$$\left[\underbrace{U^\varphi \dots U^\varphi}_{j-1} V \underbrace{U^\varphi \dots U^\varphi}_{k-j+1} \right]_{k+1} = V$$

и верно включение $\mathbf{N}^\varphi(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{E}(A^{(m-1)})$.

Доказательство. Так как $V^{\varphi^{-1}} \in A^{(m-1)}$, то по предложению 2.2

$$\left[\underbrace{U \dots U}_{j-1} V^{\varphi^{-1}} \underbrace{U \dots U}_{k-j+1} \right]_{k+1} = V^{\varphi^{-1}},$$

откуда последовательно получаем

$$\begin{aligned}
& \left(\left[\underbrace{U \dots U}_{j-1} V^{\varphi^{-1}} \underbrace{U \dots U}_{k-j+1} \right]_{k+1} \right)^\varphi = (V^{\varphi^{-1}})^\varphi, \\
& \left[\underbrace{U^\varphi \dots U^\varphi}_{j-1} (V^{\varphi^{-1}})^\varphi \underbrace{U^\varphi \dots U^\varphi}_{k-j+1} \right]_{k+1} = V, \\
& \left[\underbrace{U^\varphi \dots U^\varphi}_{j-1} V \underbrace{U^\varphi \dots U^\varphi}_{k-j+1} \right]_{k+1} = V.
\end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что U^φ – единица $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$. Следовательно, верно включение из формулировки предложения. Предложение доказано.

Теорема 2.3. Пусть α – m -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ с непустым центром, φ – автоморфизм $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$, $U = \theta(\alpha)$, $U^\varphi = \theta(\delta)$. Тогда δ – m -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle A, [] \rangle$.

Доказательство. Пусть x – произвольный элемент из A , c_1, \dots, c_{m-2} – фиксированные элементы из центра n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ и положим $V = \theta(xc_1 \dots c_{m-2})$.

Так как $U = \theta(\alpha) \in N(A^{(m-1)})$, $V \in A^{(m-1)}$, то, согласно предложению 2.5, имеем

$$[\underbrace{U^\varphi \dots U^\varphi}_{j-1} \underbrace{VU^\varphi \dots U^\varphi}_{k-j+1}]_{k+1} = V.$$

Тогда, учитывая принадлежность элементов c_1, \dots, c_{m-2} центру n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, последовательно получаем

$$[\underbrace{\theta(\delta) \dots \theta(\delta)}_{j-1} \theta(xc_1 \dots c_{m-2}) \underbrace{\theta(\delta) \dots \theta(\delta)}_{k-j+1}]_{k+1} = \theta(xc_1 \dots c_{m-2}),$$

$$\theta(\underbrace{\delta \dots \delta x c_1 \dots c_{m-2}}_{j-1} \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}) = \theta(xc_1 \dots c_{m-2}),$$

$$\theta(\underbrace{\delta \dots \delta x \delta \dots \delta}_{j-1} \underbrace{c_1 \dots c_{m-2}}_{k-j+1}) = \theta(xc_1 \dots c_{m-2}),$$

$$\theta(\underbrace{\delta \dots \delta x \delta \dots \delta}_{j-1} \underbrace{\theta(c_1 \dots c_{m-2})}_{k-j+1}) = \theta(x)\theta(c_1 \dots c_{m-2}),$$

$$\theta(\underbrace{\delta \dots \delta x \delta \dots \delta}_{j-1} \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}) = \theta(x), \theta([\underbrace{\delta \dots \delta x \delta \dots \delta}_{j-1} \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}]) = \theta(x), [\underbrace{\delta \dots \delta x \delta \dots \delta}_{j-1} \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}] = x.$$

Следовательно, δ – m -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle A, [] \rangle$. Теорема доказана.

3. Примеры

Замечание 3.1. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, производная от группы A . Для того, чтобы отличать последовательность $a_1 a_2 \dots a_p$, составленную из элементов множества A , от произведения тех же элементов в группе A , будем для этого произведения использовать запись $a_1 \bullet a_2 \bullet \dots \bullet a_p$, отождествляя жирную точку с операцией в группе A . Ясно, что последовательности $a_1 a_2 \dots a_i$ и $b_1 b_2 \dots b_{k(n-1)+i}$ эквивалентны в n -арной группе $\langle A, [] \rangle$ тогда и только тогда, когда соответствующие произведения совпадают:

$$a_1 \bullet a_2 \bullet \dots \bullet a_i = b_1 \bullet b_2 \bullet \dots \bullet b_{k(n-1)+i}.$$

Пример 3.1. Пусть $\mathbf{B}_3 = \{(12), (13), (23)\}$ – множество всех нечетных подстановок множества $\{1, 2, 3\}$, $\langle \mathbf{B}_3, [] \rangle$ – 7-арная группа с 7-арной операцией, производной от операции в симметрической группе \mathbf{S}_3 .

Равенство $7 = 3(3 - 1) + 1$ показывает, что в $\langle \mathbf{B}_3, [] \rangle$ можно рассматривать 3-нейтральные последовательности. Кроме того, согласно замечанию 1.2, существует 4-арная группа $\langle \mathbf{B}_3^{(2)}, []_4 \rangle$.

Так как любая последовательность длины 2, составленная из элементов 7-арной группы $\langle \mathbf{B}_3, [] \rangle$, эквивалентна одной из последовательностей

$$\lambda = (12)(12), \mu = (12)(13), \nu = (12)(23),$$

то $\mathbf{B}_3^{(2)} = \{\theta(\lambda), \theta(\mu), \theta(\nu)\}$.

Найдем множество $E(B_3^{(2)})$ всех единиц 4-арной группы $\langle B_3^{(2)}, []_4 \rangle$.

1) Так как последовательности $\lambda = (12)(12)$ соответствует тождественная подстановка $(12) \bullet (12)$, то легко проверяется, что класс $\theta(\lambda)$ является единицей 4-арной группы $\langle B_3^{(2)}, []_4 \rangle$.

2) Так как

$$\begin{aligned} [\theta(\lambda)\theta(\mu)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 &= [\theta((12)(12))\theta((12)(13))\theta((12)(13))\theta((12)(13))]_4 = \\ &= \theta((12)[(12)(12)(13)(12)(13)(12)(13)]) = \theta((12)(12)) = \theta(\lambda), \\ [\theta(\mu)\theta(\lambda)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 &= [\theta((12)(13))\theta((12)(12))\theta((12)(13))\theta((12)(13))]_4 = \\ &= \theta((12)[(13)(12)(12)(12)(13)(12)(13)]) = \theta((12)(12)) = \theta(\lambda), \end{aligned}$$

то

$$[\theta(\lambda)\theta(\mu)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 = [\theta(\mu)\theta(\lambda)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 = \theta(\lambda).$$

Аналогично, так как

$$\begin{aligned} [\theta(v)\theta(\mu)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 &= [\theta((12)(23))\theta((12)(13))\theta((12)(13))\theta((12)(13))]_4 = \\ &= \theta((12)[(23)(12)(13)(12)(13)(12)(13)]) = \theta((12)(23)) = \theta(v), \\ [\theta(\mu)\theta(v)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 &= [\theta((12)(13))\theta((12)(23))\theta((12)(13))\theta((12)(13))]_4 = \\ &= \theta((12)[(13)(12)(23)(12)(13)(12)(13)]) = \theta((12)(23)) = \theta(v), \end{aligned}$$

то

$$[\theta(v)\theta(\mu)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 = [\theta(\mu)\theta(v)\theta(\mu)\theta(\mu)]_4 = \theta(v).$$

Таким образом, согласно замечанию 1.1, класс $\theta(\mu)$ является единицей 4-арной группы $\langle B_3^{(2)}, []_4 \rangle$.

3) Так как

$$\begin{aligned} [\theta(\lambda)\theta(v)\theta(v)\theta(v)]_4 &= [\theta((12)(12))\theta((12)(23))\theta((12)(23))\theta((12)(23))]_4 = \\ &= \theta((12)[(12)(12)(23)(12)(23)(12)(23)]) = \theta((12)(12)) = \theta(\lambda), \\ [\theta(v)\theta(\lambda)\theta(v)\theta(v)]_4 &= [\theta((12)(23))\theta((12)(12))\theta((12)(23))\theta((12)(23))]_4 = \\ &= \theta((12)[(23)(12)(12)(12)(23)(12)(23)]) = \theta((12)(12)) = \theta(\lambda), \end{aligned}$$

то

$$[\theta(\lambda)\theta(v)\theta(v)\theta(v)]_4 = [\theta(v)\theta(\lambda)\theta(v)\theta(v)]_4 = \theta(\lambda).$$

Аналогично, так как

$$\begin{aligned} [\theta(\mu)\theta(v)\theta(v)\theta(v)]_4 &= [\theta((12)(13))\theta((12)(23))\theta((12)(23))\theta((12)(23))]_4 = \\ &= \theta((12)[(13)(12)(23)(12)(23)(12)(23)]) = \theta((12)(13)) = \theta(\mu), \\ [\theta(v)\theta(\mu)\theta(v)\theta(v)]_4 &= [\theta((12)(23))\theta((12)(13))\theta((12)(23))\theta((12)(23))]_4 = \\ &= \theta((12)[(23)(12)(13)(12)(23)(12)(23)]) = \theta((12)(13)) = \theta(\mu), \end{aligned}$$

то

$$[\theta(\mu)\theta(v)\theta(v)\theta(v)]_4 = [\theta(v)\theta(\mu)\theta(v)\theta(v)]_4 = \theta(\mu).$$

Таким образом, согласно замечанию 1.1, класс $\theta(v)$ является единицей 4-арной группы $\langle B_3^{(2)}, []_4 \rangle$.

Мы показали, что в 4-арной группе $\langle B_3^{(2)}, []_4 \rangle$ все элементы являются единицами, то есть $E(B_3^{(2)}) = B_3^{(2)}$.

Так как

$$[(12)\mu\mu\mu] = [(12)(12)(13)(12)(13)(12)(13)] = (12),$$

$$[\mu(12)\mu] = [(12)(13)(12)(13)(12)(13)] = (13),$$

то $[(12)\mu\mu] \neq [\mu(12)\mu]$. Следовательно, последовательность μ не является 3-нейтральной.

Так как

$$[(12)vvv] = [(12)(12)(23)(12)(23)(12)(23)] = (12),$$

$$[v(12)vv] = [(12)(23)(12)(12)(23)(12)(23)] = (23),$$

то $[(12)vvv] \neq [v(12)vv]$. Следовательно, последовательность v не является 3-нейтральной.

Ясно, что последовательность λ является 3-нейтральной.

Таким образом, $\langle N(B_3^{(2)}) = \{\theta(\lambda)\}, []_4 \rangle$ – одноэлементная 4-арная подгруппа 4-арной группы $\langle B_3^{(2)}, []_4 \rangle$, отличная от множества $E(B_3^{(2)}) = B_3^{(2)}$ всех ее единиц, то есть $N(B_3^{(2)}) \neq E(B_3^{(2)})$.

Покажем, что для n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ равенство $N(A^{(m-1)}) = E(A^{(m-1)})$ все же возможно.

Пример 3.2. Пусть $\langle B_3, [] \rangle$ – та же 7-арная группа, что и в примере 3.1.

Равенство $7 = 2(4 - 1) + 1$ показывает, что в $\langle B_3, [] \rangle$ можно рассматривать 4-нейтральные последовательности. Кроме того, согласно замечанию 1.2, существует тернарная группа $\langle B_3^{(3)}, []_3 \rangle$.

Покажем, что множества $E(B_3^{(3)})$ и $N(B_3^{(3)})$ – пустые, то есть совпадают.

Так как любая последовательность длины 3, составленная из элементов 7-арной группы $\langle B_3, [] \rangle$, эквивалентна одной из последовательностей

$$\lambda = (12)(12)(12), \mu = (12)(12)(13), \nu = (12)(12)(23),$$

то $B_3^{(3)} = \{\theta(\lambda), \theta(\mu), \theta(\nu)\}$.

Найдем множество $E(B_3^{(3)})$ всех единиц тернарной группы $\langle B_3^{(3)}, []_3 \rangle$.

Так как

$$\begin{aligned} [\theta(\lambda)\theta(\mu)\theta(\lambda)]_3 &= [\theta(12)(12)(12)\theta((12)(12)(13))\theta(12)(12)(12)]_3 = \\ &= \theta((12)(13)(12)) = \theta((12)(12)(23)) \neq \theta(\mu), \end{aligned}$$

то класс $\theta(\lambda)$ не является единицей в $\langle B_3^{(3)}, []_3 \rangle$.

Так как

$$\begin{aligned} [\theta(\mu)\theta(\lambda)\theta(\mu)]_3 &= [\theta(12)(12)(13)\theta((12)(12)(12))\theta(12)(12)(13)]_3 = \\ &= \theta((13)(12)(13)) = \theta((12)(12)(23)) \neq \theta(\lambda), \end{aligned}$$

то класс $\theta(\mu)$ не является единицей в $\langle B_3^{(3)}, []_3 \rangle$.

Так как

$$\begin{aligned} [\theta(\nu)\theta(\lambda)\theta(\nu)]_3 &= [\theta(12)(12)(23)\theta((12)(12)(12))\theta(12)(12)(23)]_3 = \\ &= \theta((23)(12)(23)) = \theta((12)(12)(13)) \neq \theta(\lambda), \end{aligned}$$

то класс $\theta(\nu)$ не является единицей в $\langle B_3^{(3)}, []_3 \rangle$.

Таким образом, в тернарной группе $\langle B_3^{(3)}, []_3 \rangle$ нет единиц.

Заметим, что при этом для любых последовательностей $\alpha, \beta \in \{\lambda, \mu, \nu\}$ справедливы равенства

$$[\theta(\beta)\theta(\alpha)\theta(\alpha)]_3 = [\theta(\alpha)\theta(\alpha)\theta(\beta)]_3 = \theta(\beta),$$

так как последовательности $\lambda\lambda$, $\mu\mu$ и $\nu\nu$ являются нейтральными в 7-арной группе $\langle B_3, [] \rangle$.

Так как множество $\mathbf{E}(B_3^{(3)})$ всех единиц тернарной группы $\langle B_3^{(3)}, []_3 \rangle$ пусто, то по предложению 2.3 тернарная группа $\langle B_3^{(3)}, []_3 \rangle$ не обладает 4-нейтральными последовательностями, то есть множество $\mathbf{N}(B_3^{(3)})$ также пусто.

Покажем это непосредственно, не используя предложение 2.3. Так как

$$[\lambda(13)\lambda] = [(12)(12)(12)(13)(12)(12)] = (12)(12)(23) \neq (13),$$

$$[\mu(12)\mu] = [(12)(12)(13)(12)(12)(13)] = (12)(12)(23) \neq (12),$$

$$[\nu(12)\nu] = [(12)(12)(23)(12)(12)(23)] = (12)(12)(13) \neq (12),$$

то последовательности λ , μ и ν не являются 4-нейтральными.

Таким образом, $\mathbf{N}(B_3^{(3)}) = \mathbf{E}(B_3^{(3)}) = \emptyset$.

Приведем еще один пример, показывающий, что равенство $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)})$ возможно и для непустых множеств $\mathbf{N}(A^{(m-1)})$ и $\mathbf{E}(A^{(m-1)})$.

Пример 3.3. Пусть B_3 – то же множество, что и в примере 3.1, $\langle B_3, [] \rangle$ – 5-арная группа с 5-арной операцией, производной от операции в симметрической группе S_3 .

Равенство $5 = 2(3 - 1) + 1$ показывает, что в $\langle B_3, [] \rangle$ можно рассматривать 3-нейтральные последовательности. Кроме того, согласно замечанию 1.2, существует тернарная группа $\langle B_3^{(2)}, []_3 \rangle$.

Так как любая последовательность длины 2, составленная из элементов 5-арной группы $\langle B_3, [] \rangle$, эквивалентна одной из последовательностей

$$\lambda = (12)(12), \mu = (12)(13), \nu = (12)(23),$$

то $B_3^{(2)} = \{\theta(\lambda), \theta(\mu), \theta(\nu)\}$.

Найдем множество $\mathbf{E}(B_3^{(2)})$ всех единиц тернарной группы $\langle B_3^{(2)}, []_3 \rangle$.

Так как последовательности $\lambda = (12)(12)$ соответствует тождественная подстановка $(12) \bullet (12)$, то легко проверяется, что класс $\theta(\lambda)$ является единицей тернарной группы $\langle B_3^{(2)}, []_3 \rangle$.

Так как

$$\begin{aligned} [\theta(\lambda)\theta(\mu)\theta(\mu)]_3 &= [\theta((12)(12))\theta((12)(13))\theta((12)(13))]_3 = \\ &= \theta((12)[(12)(12)(13)(12)(13)]) = \theta((12)(23)) \neq \theta(\lambda), \end{aligned}$$

то класс $\theta(\mu)$ не является единицей тернарной группы $\langle B_3^{(2)}, []_3 \rangle$.

Так как

$$\begin{aligned} [\theta(\lambda)\theta(\nu)\theta(\nu)]_3 &= [\theta((12)(12))\theta((12)(23))\theta((12)(23))]_3 = \\ &= \theta((12)[(12)(12)(23)(12)(23)]) = \theta((12)(13)) \neq \theta(\lambda), \end{aligned}$$

то, класс $\theta(\nu)$ не является единицей тернарной группы $\langle B_3^{(2)}, []_3 \rangle$.

Таким образом, множество $\mathbf{E}(B_3^{(2)}) = \{\theta(\lambda)\}$ является одноэлементным.

Ясно, что последовательность λ является 3-нейтральной. А так как $\theta(\lambda)$ – единственный элемент множества $\mathbf{E}(B_3^{(2)})$, то по предложению 2.3 $\mathbf{N}(B_3^{(2)}) = \{\theta(\lambda)\}$.

Покажем это непосредственно, не используя предложение 2.3. Так как

$$[(12)\mu\mu] = [(12)(12)(13)(12)(13)] = (23) \neq (12),$$

$$[(12)\nu\nu] = [(12)(12)(23)(12)(23)] = (13) \neq (12),$$

то последовательности μ и ν не являются 3-нейтральными.

Таким образом, $N(B_3^{(2)}) = E(B_3^{(2)}) = \{\theta(\lambda)\}$.

Заметим, что в каждом из трех приведенных примеров центр рассматриваемой тернарной группы пустой.

Пример 3.1 показывает, что для класса $\theta(\alpha)$, являющегося единицей $(k + 1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$, последовательность α может не быть m -нейтральной. Однако, имеет место

Предложение 3.1. Пусть $n = k(m - 1) + 1$, $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $\theta(\alpha)$ – единица $(k + 1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$. Тогда последовательность

$\underbrace{\alpha \dots \alpha}_k$ является нейтральной.

Доказательство. Если $\theta(\alpha)$ – единица $(k + 1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$, x – произвольный, $x_1, \dots, x_{i(n-1)+m-2}$ – фиксированные элементы из A , $\beta = x_1 \dots x_{i(n-1)+m-2}x$, то

$$[\theta(\beta) \underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_k]_{k+1} = \theta(\beta),$$

откуда последовательно получаем

$$\theta(\beta \underbrace{\alpha \dots \alpha}_k) = \theta(\beta),$$

$$\theta(x_1 \dots x_{i(n-1)+m-2}x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_k) = \theta(x_1 \dots x_{i(n-1)+m-2}x),$$

$$\theta(x_1 \dots x_{i(n-1)+m-2})\theta(\underbrace{x \alpha \dots \alpha}_k) = \theta(x_1 \dots x_{i(n-1)+m-2})\theta(x),$$

$$\theta(\underbrace{x \alpha \dots \alpha}_k) = \theta(x), \quad [\underbrace{x \alpha \dots \alpha}_k] = x.$$

Следовательно, последовательность $\underbrace{\alpha \dots \alpha}_k$ является нейтральной в n -арной

группе $\langle A, [] \rangle$. Предложение доказано.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Dornite, W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dornite // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
2. *Post, E. L.* Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. *Русаков, С. А.* Алгебраические n -арные системы / С. А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992.
4. *Гальмак, А. М.* n -Арные группы. Часть 1 / А. М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

Поступила в редакцию 18.11.2015 г.

Контакты: (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A. M. m -NEUTRAL SEQUENCIES IN n -ARY GROUPS.

The article deals with m -neutral sequences of the elements of n -ary group where $n = k(m - 1) + 1$, $k \geq 1$. Every 2-neutral sequence can be identified with the unity of n -ary group defined by W. Dornte and n -neutral sequences coincide with neutral sequences defined by E. Post.

Key words: n -ary group, identity, neutral sequence.

УДК 517.925

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. И. КАШПАР

старший преподаватель

Белорусско-Российский университет (Могилев, РБ)

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

доктор физико-математических наук, профессор

Институт технологии металлов НАНБ (Могилев, РБ)

На основе применения конструктивного метода получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для матричного уравнения второго порядка, представляющего собой обобщение классического уравнения Ляпунова; выведена оценка области локализации решения.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, краевая задача, однозначная разрешимость.

Рассмотрим матричное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{X}(t)}{dt^2} = & \mathbf{A}(t) \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} \mathbf{B}(t) + \lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}(t)\mathbf{B}_1(t)) + \\ & + \lambda(\mathbf{A}_2(t) \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} \mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in [0, \omega]$, $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$ ($i = 1, 2$) – матрицы класса $\mathbb{C}[0, \omega]$ соответствующих размерностей; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

К уравнению (1) присоединим краевые условия:

$$\mathbf{X}(0, \lambda) = \mathbf{M}, \quad (2)$$

$$\mathbf{X}(\omega, \lambda) = \mathbf{N}, \quad (3)$$

где \mathbf{M} , \mathbf{N} – заданные вещественные матрицы.

Задача (1)–(3) представляет собой задачу Валле-Пуссена [1, с. 155] в матричной постановке. В векторном случае такая задача качественными методами сравнительно хорошо изучена (см., например, [2, с. 491]). Такие задачи встречаются в ряде проблем математической физики и прикладной математики. Весьма важную роль эти задачи играют в теплофизике [3, 4]. Отметим, что структурные свойства уравнений типа (1) и их решений изучены в работах [5–9]. Задача (1)–(3) ранее никем не изучалась.

© Кашпар А. И., 2016

© Лаптинский В. Н., 2016

В данной работе с помощью конструктивного метода [9, гл. 1] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи, а также даны оценки области локализации решения.

Под конструктивными методами понимают определенные методы построения решений различных классов уравнений, исследования существования и свойств точных и приближенных решений. Основной характеристикой конструктивных методов является возможность с их помощью доводить решение задачи до конечного результата (вплоть до численных значений), а также практически проверять те теоретические предпосылки и условия, которые обеспечивают правомочность применения этих методов к конкретным классам задач [10, с. 3].

1. Редукция к эквивалентной интегральной задаче

Сначала опишем сведение задачи (1)–(3) к эквивалентной интегральной задаче. При этом вместо уравнения (1) будем рассматривать эквивалентную ему систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{Y}, \\ \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}(t) + \tilde{\mathbf{H}}(t, \lambda, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \end{cases} \quad (4)$$

где $\tilde{\mathbf{H}}(t, \lambda, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}(t, \lambda) + \mathbf{X}(t, \lambda)\mathbf{B}_1(t)) + \lambda(\mathbf{A}_2(t)\frac{d\mathbf{X}(t, \lambda)}{dt} + \frac{d\mathbf{X}(t, \lambda)}{dt}\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{H}(t, \lambda)$.

Обозначим через $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ интегральные матрицы уравнений соответственно

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{E}_n, \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = \mathbf{V}(t)\mathbf{B}(t), \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{E}_m, \quad (6)$$

где \mathbf{E}_k – единичная матрица порядка k .

Пусть $\mathbf{X}(t, \lambda)$, $\mathbf{Y}(t, \lambda)$ – решение задачи (2)–(4). Тогда из первого уравнения (4) с учетом (2) имеем

$$\mathbf{X}(t, \lambda) = \mathbf{M} + \int_0^t \mathbf{Y}(\tau, \lambda) d\tau. \quad (7)$$

Полагая в (7) $t = \omega$, получим на основании (3)

$$\int_0^{\omega} \mathbf{Y}(\tau, \lambda) d\tau = \mathbf{N} - \mathbf{M}. \quad (8)$$

Далее обратимся ко второму уравнению в (4). На основании двусторонней формулы Коши с учетом (5), (6) имеем

$$\mathbf{Y}(t, \lambda) = \mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{Y}(\tau, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\mathbf{V}(t) + \mathbf{U}(t)\left(\int_{\tau}^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(t).$$

Отсюда находим

$$\mathbf{Y}(\tau, \lambda) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(t)\mathbf{V}(\tau) - \mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau). \quad (9)$$

В (8) воспользуемся соотношением (9). Тогда получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau &= \mathbf{N} - \mathbf{M} + \\ &+ \int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Запишем (10) в следующем виде

$$\Phi\mathbf{Z}(t, \lambda) = \mathbf{N} - \mathbf{M} + \int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau, \quad (11)$$

где Φ – линейный матричный оператор, $\Phi\mathbf{Z}(t, \lambda) = \int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t, \lambda)\mathbf{V}(\tau)d\tau$,

$$\mathbf{Z}(t, \lambda) = \mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(t).$$

Пусть оператор Φ обратим. Тогда из (11) имеем

$$\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(t) = \Phi^{-1}\left(\mathbf{N} - \mathbf{M} + \int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)$$

и далее

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t, \lambda) &= \mathbf{U}(t)\left(\Phi^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t) + \\ &+ \mathbf{U}(t)\Phi^{-1}\left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, всякое решение задачи (2)–(4) является решением системы матричных интегральных уравнений (7), (12). Верно и обратное: всякое непрерывное решение $\mathbf{X}(t, \lambda)$, $\mathbf{Y}(t, \lambda)$ системы интегральных уравнений (7), (12)

является решением задачи (2)–(4). В самом деле, выполним дифференцирование по t сначала в тождестве (7)

$$d\mathbf{X}(t, \lambda) = \mathbf{Y}(t, \lambda)dt, \quad (13)$$

а затем в тождестве (12), используя перестановочность оператора дифференцирования \mathbf{D} и оператора Φ^{-1}

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}(t, \lambda) + \mathbf{Y}(t, \lambda)\mathbf{B}(t) + \\ &+ \mathbf{U}(t)\Phi^{-1} \left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau) \left(\int_{\tau}^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds \right) \mathbf{V}(\tau)d\tau \right) \mathbf{V}(t) = \\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}(t, \lambda) + \mathbf{Y}(t, \lambda)\mathbf{B}(t) + \mathbf{U}(t)\Phi^{-1} \left(\Phi \left(\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{H}(t, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(t) \right) \right) \mathbf{V}(t) = \\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{Y}(t, \lambda) + \mathbf{Y}(t, \lambda)\mathbf{B}(t) + \mathbf{H}(t, \lambda). \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь установим выполнение краевых условий (2), (3). Из (7) при $t = 0$ имеем $\mathbf{X}(0, \lambda) = \mathbf{M}$.

На основании (14) получим

$$\mathbf{H}(s, \lambda)ds = d\mathbf{Y}(s, \lambda) - [\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s, \lambda) + \mathbf{Y}(s, \lambda)\mathbf{B}(s)]ds. \quad (15)$$

Соотношение (15) подставим в (11) и выполним затем, согласно [11, с. 52], интегрирование по частям

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(t)) &= \mathbf{N} - \mathbf{M} + \\ &+ \Phi \left(\int_{\tau}^t \mathbf{U}^{-1}(s) [d\mathbf{Y}(s, \lambda) - (\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s, \lambda) + \mathbf{Y}(s, \lambda)\mathbf{B}(s))] \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) = \\ &= \mathbf{N} - \mathbf{M} + \Phi \left(\int_{\tau}^t \mathbf{U}^{-1}(s) d\mathbf{Y}(s, \lambda) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) - \\ &- \Phi \left(\int_{\tau}^t \mathbf{U}^{-1}(s) (\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s, \lambda) + \mathbf{Y}(s, \lambda)\mathbf{B}(s)) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) = \\ &= \mathbf{N} - \mathbf{M} + \Phi \left(\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{Y}(s, \lambda)\mathbf{V}^{-1}(s) \Big|_{\tau}^t \right) + \\ &+ \Phi \left(\int_{\tau}^t \mathbf{U}^{-1}(s) (\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s, \lambda) + \mathbf{Y}(s, \lambda)\mathbf{B}(s)) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) - \\ &- \Phi \left(\int_{\tau}^t \mathbf{U}^{-1}(s) (\mathbf{A}(s)\mathbf{Y}(s, \lambda) + \mathbf{Y}(s, \lambda)\mathbf{B}(s)) \mathbf{V}^{-1}(s) ds \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{N} - \mathbf{M} + \Phi \left(\mathbf{U}^{-1}(t) \mathbf{Y}(t, \lambda) \mathbf{V}^{-1}(t) - \mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{Y}(\tau, \lambda) \mathbf{V}^{-1}(\tau) \right) = \\
&= \mathbf{N} - \mathbf{M} + \Phi \left(\mathbf{U}^{-1}(t) \mathbf{Y}(t, \lambda) \mathbf{V}^{-1}(t) \right) - \Phi \left(\mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{Y}(\tau, \lambda) \mathbf{V}^{-1}(\tau) \right).
\end{aligned}$$

С учетом структуры оператора Φ отсюда имеем соотношение

$$\Phi \left(\mathbf{U}^{-1}(\tau) \mathbf{Y}(\tau, \lambda) \mathbf{V}^{-1}(\tau) \right) = \int_0^{\omega} \mathbf{Y}(\tau, \lambda) d\tau = \mathbf{N} - \mathbf{M},$$

тем самым выполняется соотношение (8). Стало быть, условие (3) также имеет место.

Таким образом, в случае обратимости оператора Φ , справедлива

Лемма. Пара функций $(\mathbf{X}(t, \lambda), \mathbf{Y}(t, \lambda)) : (t, \lambda) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ представляет собой решение задачи (2)–(4) тогда и только тогда, когда эти функции являются решением системы интегральных уравнений (7), (12).

Эта лемма относится к результатам типа теоремы 4.7.4 [13, с. 124] для начальной задачи и теоремы 4.8.2 для двухточечной краевой задачи нелинейного дифференциального уравнения с неразделяющимися краевыми условиями.

Замечание 1. Перестановочность операторов \mathbf{D} и Φ^{-1} следует из перестановочности операторов \mathbf{D} и Φ или, другими словами, она получается на основе дифференцирования по t функции

$$\mathbf{S}(t, \lambda) = \int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau) \mathbf{U}^{-1}(t) \mathbf{Y}(t, \lambda) \mathbf{V}^{-1}(t) \mathbf{V}(\tau) d\tau,$$

а именно:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\mathbf{S}(t, \lambda) &\equiv \mathbf{D}\Phi\mathbf{Z}(t, \lambda) = \frac{d}{dt} \int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau) \mathbf{Z}(t, \lambda) \mathbf{V}(\tau) d\tau = \\
&= \int_0^{\omega} \mathbf{U}(\tau) \frac{d\mathbf{Z}(t, \lambda)}{dt} \mathbf{V}(\tau) d\tau = \Phi \frac{d\mathbf{Z}(t, \lambda)}{dt} = \Phi\mathbf{D}\mathbf{Z}(t, \lambda).
\end{aligned}$$

Стало быть $\mathbf{D} \cdot \Phi = \Phi \cdot \mathbf{D}$ и $\Phi^{-1} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot \Phi^{-1}$.

Это означает, что соотношение (14) может быть получено с помощью дифференцирования (12).

2. Условия однозначной разрешимости и априорная оценка области локализации решения

Для получения условий существования и единственности решения краевой задачи (2)–(4) воспользуемся модификацией обобщенного принципа сжимающих отображений [14, с. 94] применительно к эквивалентной интегральной задаче (7), (12) (согласно лемме). Запишем эту задачу в операторном виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (16)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \tilde{\mathcal{L}}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (17)$$

где через $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ обозначены соответствующие линейные интегральные операторы в (7), (12). Эти операторы действуют на множестве

$$G = \{(\mathbf{X}(t, \lambda), \mathbf{Y}(t, \lambda)) \in \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} : \|\mathbf{X}\|_C < \infty, \|\mathbf{Y}\|_C < \infty\}, \text{ где } (t, \lambda) \in [0, \omega] \times \mathbb{R},$$

$$\|\mathbf{Z}\|_C = \max_{0 \leq t \leq \omega} \|\mathbf{Z}(t, \lambda)\|.$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \max_t \|\mathbf{A}(t)\|, \beta = \max_t \|\mathbf{B}(t)\|, \alpha_i = \max_t \|\mathbf{A}_i(t)\|, \beta_i = \max_t \|\mathbf{B}_i(t)\| \quad (i = 1, 2; \quad t \in [0, \omega]),$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{UV} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{UV} + \mathcal{L}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad \tilde{\mathbf{Q}}_{UV} = \mathbf{Q}_{UV} + \mathcal{L}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$

$$\lambda_U = \max_{0 \leq s \leq t \leq \omega} \|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\|, \quad \lambda_V = \max_{0 \leq s \leq t \leq \omega} \|\mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)\|, \quad a_1 = \frac{\omega^3}{3} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 (\alpha_1 + \beta_1),$$

$$b_1 = \gamma \frac{\omega^3}{3} \lambda_U^2 \lambda_V^2 (\alpha_2 + \beta_2), \quad a_2 = \frac{\omega^2}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 (\alpha_1 + \beta_1), \quad b_2 = \frac{\omega^2}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 (\alpha_2 + \beta_2).$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие

$$\varepsilon(a_1 + b_2) < 1. \quad (18)$$

Тогда система уравнений (16), (17) однозначно разрешима на множестве G , при этом справедлива оценка

$$\mathbf{Z} \leq (\mathbf{E} - \varepsilon \mathbf{K})^{-1} \mathbf{H}_0, \quad (19)$$

$$\text{где } \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} \|\tilde{\mathbf{P}}_{UV}\|_C \\ \|\tilde{\mathbf{Q}}_{UV}\|_C \end{pmatrix}.$$

Доказательство: С помощью несложных выкладок можно установить, что $(\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \tilde{\mathcal{L}}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \in G$, если $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in G$.

Далее изучим вопрос сжимаемости операторов $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ в смысле [14, с. 94].

Из (16) имеем для любых $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \in G, (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) \in G$:

$$\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) = \int_0^t \mathbf{U}(\varphi) \Phi^{-1} \left(\int_0^\varphi \int_\tau^\varphi \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right) d\tau \mathbf{V}(\varphi) d\varphi, \quad (20)$$

где $\mathbf{K}_U(\tau, s) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s), \quad \mathbf{K}_V(s, \tau) = \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau),$

$$\Delta \mathbf{H}(s, \lambda) = \lambda \left[\mathbf{A}_1(s) (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda)) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda)) \mathbf{B}_1(s) + \right. \\ \left. + \mathbf{A}_2(s) (\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda)) + (\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda)) \mathbf{B}_2(s) \right].$$

Выполнив оценки по норме в (20), получим последовательно

$$\|\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})\| \leq \int_0^t \left\| \mathbf{U}(\varphi) \Phi^{-1} \left(\int_0^\varphi \int_\tau^\varphi \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right) d\tau \mathbf{V}(\varphi) \right\| d\varphi \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_0^t \|U(\varphi)\| \left\| \Phi^{-1} \left(\int_0^\omega \int_\tau^\varphi \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right) d\tau \right\| \|V(\varphi)\| d\varphi \leq \\
 &\leq \int_0^t \|U(\varphi)\| \|V(\varphi)\| \left\| \Phi^{-1} \left(\int_0^\omega \int_\tau^\varphi \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right) d\tau \right\| d\varphi \leq \\
 &\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^t \left(\int_0^\omega \int_\tau^\varphi \|\mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau)\| ds \right) d\tau d\varphi \leq \\
 &\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^t \int_0^\omega \int_\tau^\varphi \|\mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau)\| ds d\tau d\varphi \leq \\
 &\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^t \int_0^\omega \int_\tau^\varphi \|\mathbf{K}_U(\tau, s)\| \|\Delta \mathbf{H}(s, \lambda)\| \|\mathbf{K}_V(s, \tau)\| ds d\tau d\varphi \leq \\
 &\leq \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \int_0^t \int_0^\omega \int_\tau^\varphi \|\Delta \mathbf{H}(s, \lambda)\| ds d\tau d\varphi. \tag{21}
 \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
 \|\Delta \mathbf{H}(s, \lambda)\| &= |\lambda| \|\mathbf{A}_1(s) (\tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda)) + (\tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda)) \mathbf{B}_1(s) + \\
 &+ \mathbf{A}_2(s) (\tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda)) + (\tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda)) \mathbf{B}_2(s)\| \leq \varepsilon (\|\mathbf{A}_1(s) (\tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda))\| + \\
 &+ \|(\tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda)) \mathbf{B}_1(s)\| + \|\mathbf{A}_2(s) (\tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda))\| + \|(\tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda)) \mathbf{B}_2(s)\|) \leq \\
 &\leq \varepsilon (\|\mathbf{A}_1(s)\| + \|\mathbf{B}_1(s)\|) \|\tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda)\| + (\|\mathbf{A}_2(s)\| + \|\mathbf{B}_2(s)\|) \|\tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda)\| \leq \\
 &\leq \varepsilon ((\alpha_1 + \beta_1) \|\tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{X}}(s, \lambda)\| + (\alpha_2 + \beta_2) \|\tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda) - \tilde{\mathbf{Y}}(s, \lambda)\|) \leq \\
 &\leq \varepsilon (\alpha_1 + \beta_1) \|\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + \varepsilon (\alpha_2 + \beta_2) \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C, \tag{22}
 \end{aligned}$$

то, продолжая оценки в (21), получим

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})\| &\leq \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \int_0^\omega d\varphi \int_0^\omega d\tau \int_\tau^\varphi (\varepsilon (\alpha_1 + \beta_1) \|\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + \varepsilon (\alpha_2 + \beta_2) \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C) ds \leq \\
 &\leq \varepsilon \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 ((\alpha_1 + \beta_1) \|\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C) \int_0^\omega d\varphi \int_0^\omega |\varphi - \tau| d\tau \leq \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 ((\alpha_1 + \beta_1) \|\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C) \int_0^\omega (\varphi^2 + (\omega - \varphi)^2) d\varphi \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon\omega^3}{3} \gamma\lambda_U^2 \lambda_V^2 \left((\alpha_1 + \beta_1) \|\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C \right) \leq \varepsilon a_1 \|\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + \varepsilon b_1 \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C.$$

Отсюда следует оценка

$$\|\mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})\|_C \leq \varepsilon a_1 \|\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + \varepsilon b_1 \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C. \quad (23)$$

Аналогичные оценки выполним на основе (17). Из (17) имеем

$$\mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) - \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) = \mathbf{U}(t) \Phi^{-1} \left(\int_0^\omega \left(\int_\tau^t \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right) d\tau \right) \mathbf{V}(t). \quad (24)$$

Производя оценки по норме в (24), получим с использованием (22)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) - \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})\| &\leq \|\mathbf{U}(t)\| \left\| \Phi^{-1} \left(\int_0^\omega \left(\int_\tau^t \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right) d\tau \right) \right\| \|\mathbf{V}(t)\| \leq \\ &\leq \lambda_U \lambda_V \|\Phi^{-1}\| \left\| \int_0^\omega \left(\int_\tau^t \mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau) ds \right) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^\omega \int_\tau^t \|\mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau)\| ds d\tau \leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^\omega \int_\tau^t \|\mathbf{K}_U(\tau, s) \Delta \mathbf{H}(s, \lambda) \mathbf{K}_V(s, \tau)\| ds d\tau \leq \\ &\leq \gamma \lambda_U \lambda_V \int_0^\omega \int_\tau^t \|\mathbf{K}_U(\tau, s)\| \|\Delta \mathbf{H}(s, \lambda)\| \|\mathbf{K}_V(s, \tau)\| ds d\tau \leq \\ &\leq \varepsilon \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \left((\alpha_1 + \beta_1) \|\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C \right) \int_0^\omega |t - \tau| d\tau \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon\omega^2}{2} \gamma \lambda_U^2 \lambda_V^2 \left((\alpha_1 + \beta_1) \|\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C \right) \leq \\ &\leq \varepsilon a_2 \|\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + \varepsilon b_2 \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (25) следует оценка

$$\|\mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) - \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})\|_C \leq \varepsilon a_2 \|\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + \varepsilon b_2 \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C. \quad (26)$$

Оценки (23), (26) запишем в матричном виде

$$\tilde{\mathbf{Z}} \leq \varepsilon \mathbf{K} \tilde{\mathbf{Z}}, \quad (27)$$

где $\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \|\mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})\| \\ \|\mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) - \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})\| \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \|\tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C \\ \|\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$.

Используя условие (18), можно установить с помощью [15, с. 370], что характеристические числа положительной матрицы $\varepsilon \mathbf{K}$ расположены внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат, при этом матрица

$E - \varepsilon K$ положительно обратима. Стало быть на множестве G имеют место соотношения (23), (26), являющиеся условием модификации обобщенного принципа [14, с. 94] сжимающих отображений применительно к системе интегральных уравнений (7), (12) (или (16), (17)). На основании этого заключаем, что решение $X = X(t, \lambda)$, $Y = Y(t, \lambda)$ этой системы на множестве G существует и единственно.

Далее получим априорную оценку области возможного расположения решения $X(t, \lambda)$, $Y(t, \lambda)$. Для этого выполним оценки по норме в тождествах (16), (17) с использованием оценок (23), (26). Тогда получим

$$\begin{aligned} \|X\|_C &\leq \|\tilde{P}_{UV}\|_C + \varepsilon a_1 \|X\|_C + \varepsilon b_1 \|Y\|_C, \\ \|Y\|_C &\leq \|\tilde{Q}_{UV}\|_C + \varepsilon a_2 \|X\|_C + \varepsilon b_2 \|Y\|_C \end{aligned}$$

или в матричной форме по аналогии с (27):

$$Z \leq \varepsilon KZ + H_0. \tag{28}$$

Запишем (28) в следующем виде:

$$(E - \varepsilon K)Z \leq H_0.$$

Отсюда на основании обратимости матрицы $E - \varepsilon K$ получим оценку (19). Эта теорема полностью доказана.

Теорема 2. Пусть оператор Φ обратим и выполнено условие (18), тогда задача (2)–(4) однозначно разрешима в области D .

Доказательство: Поскольку оператор Φ обратим, то, согласно лемме, задача (2)–(4) эквивалентна интегральной задаче (7), (12) (в операторном виде (16), (17)), которая однозначно разрешима на указанном множестве, согласно теореме 1.

Тем самым, задача (2)–(4) однозначно разрешима в области $D = \{t \in [0, \omega], |\lambda| < \lambda_0, \|X\| < \infty, \|Y\| < \infty\}$, где $\lambda_0 = 1 / (a_1 + b_2)$.

Замечание 2. Анализ условия (18) и оценки (19) показывает, что краевая задача для соответствующего однородного уравнения с нулевыми граничными условиями имеет только тривиальное решение.

Рассмотрим случай, когда $A(t) \equiv 0$, $B(t) \equiv 0$, то есть задачу

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} = \lambda(A_1(t)X(t) + X(t)B_1(t)) + \lambda(A_2(t) \frac{dX(t)}{dt} + \frac{dX(t)}{dt} B_2(t)) + F(t), \tag{29}$$

$$X(0, \lambda) = M, X(\omega, \lambda) = N. \tag{30}$$

В этом случае вместо эквивалентной системы интегральных уравнений (7), (12) будем иметь уравнения:

$$X(t, \lambda) = M + \frac{t}{\omega}(N - M) + \lambda \int_0^\omega G(t, \tau) \tilde{H}_0(\tau, \lambda) d\tau, \tag{31}$$

$$\mathbf{Y}(t, \lambda) = \frac{1}{\omega}(\mathbf{N} - \mathbf{M}) + \lambda \int_0^{\omega} G'_i(t, \tau) \tilde{\mathbf{H}}_0(\tau, \lambda) d\tau, \quad (32)$$

$$\text{где } G(t, \tau) = \begin{cases} \tau(\frac{t}{\omega} - 1), & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ t(\frac{\tau}{\omega} - 1), & 0 \leq t \leq \tau \leq \omega; \end{cases}, \quad G'_i(t, \tau) = \frac{\partial G(t, \tau)}{\partial t},$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_0(\tau, \lambda) = \mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau, \lambda) + \mathbf{X}(\tau, \lambda)\mathbf{B}_1(t) + \mathbf{A}_2(\tau) \frac{d\mathbf{X}(\tau, \lambda)}{d\tau} + \frac{d\mathbf{X}(\tau, \lambda)}{d\tau} \mathbf{B}_2(\tau).$$

Установим условие однозначной разрешимости задачи (29), (30). Для этого выполним оценки типа (23), (26) применительно к системе уравнений (31), (32). На основе (31) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})\| &\leq \varepsilon \int_0^{\omega} \|G(t, \tau)\| \|\tilde{\mathbf{H}}_0(\tau, \lambda)\| d\tau \leq \varepsilon \max_t \int_0^{\omega} \|G(t, \tau)\| d\tau \times \\ &\times [(\alpha_1 + \beta_1) \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C]. \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку [2, с. 496]

$$\int_0^{\omega} \|G(t, \tau)\| d\tau \leq \frac{\omega^2}{8}, \quad 0 \leq t \leq \omega,$$

то окончательно имеем из (33)

$$\|\mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})\|_C \leq \frac{\varepsilon \omega^2}{8} [(\alpha_1 + \beta_1) \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C]. \quad (34)$$

Аналогичные оценки выполним на основе (32)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})\| &\leq \varepsilon \int_0^{\omega} \|G'_i(t, \tau)\| \|\tilde{\mathbf{H}}_0(\tau, \lambda)\| d\tau \leq \varepsilon \max_t \int_0^{\omega} \|G'_i(t, \tau)\| \|\tilde{\mathbf{H}}_0(\tau, \lambda)\| d\tau \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon \omega}{2} [(\alpha_1 + \beta_1) \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C]. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\|\mathcal{L}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}})\|_C \leq \frac{\varepsilon \omega}{2} [(\alpha_1 + \beta_1) \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + (\alpha_2 + \beta_2) \|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C]. \quad (35)$$

Из оценок (34), (35) имеем следующие выражения для элементов матрицы \mathbf{K} в данном случае:

$$a_1 = \frac{\omega^2}{8}(\alpha_1 + \beta_1), \quad a_2 = \frac{\omega^2}{8}(\alpha_2 + \beta_2),$$

$$b_1 = \frac{\omega}{2}(\alpha_1 + \beta_1), \quad b_2 = \frac{\omega}{2}(\alpha_2 + \beta_2).$$

Следствие. Пусть выполнено условие

$$\frac{\varepsilon\omega}{2} \left[\frac{\omega}{4}(\alpha_1 + \beta_1) + \alpha_2 + \beta_2 \right] < 1. \quad (36)$$

Тогда задача (29), (30) однозначно разрешима.

Теперь рассмотрим линейную векторную задачу типа [2, с. 431]:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{A}_1(t)\mathbf{x} + \mathbf{A}_2(t)\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{f}(t), \quad (37)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(\omega) = \mathbf{x}_\omega. \quad (38)$$

Применительно к (37), (38) условие (36) примет вид [2, с. 497]

$$\frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{4} \alpha_1 \omega + \alpha_2 \right) < 1. \quad (39)$$

Замечание 3. Реализация изложенного метода применительно к задаче (37), (38) возможна в двух вариантах: 1) на основе введения параметра λ при $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$; 2) на основе представления матрицы \mathbf{A}_2 в виде $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 + \lambda \mathbf{A}_2$ и введения λ при \mathbf{A}_1 . Очевидно, задача (1)–(3) изучена с помощью второго варианта.

В связи с этим возникает задача эффективной декомпозиции (расщепления) матрицы \mathbf{A}_2 , чтобы обеспечить достаточно быструю сходимость приближенных решений. Здесь можно использовать приемы, изложенные в [9, гл. 1, 5].

Таким образом, условие (36) представляет собой коэффициентное условие однозначной разрешимости задачи (29), (30), которое соответствует условию однозначной разрешимости известной граничной задачи для нелинейного уравнения (в обозначениях [2, с. 496]):

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(p) = \mathbf{x}_p,$$

с правой частью $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ класса $\mathbf{C}([0, \omega] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию Липшица относительно \mathbf{x}, \mathbf{y} ($\mathbf{y} = \mathbf{x}' = d\mathbf{x}/dt$). В связи с этим теорема 1 представляет собой развитие известного результата [2, с. 497] применительно к матричной задаче (1)–(3). Условие (18) является сравнительно жестким в силу матричной специфики задачи.

Результаты работы заключаются в следующем:

- дан способ редукции рассмотренной задачи Валле-Пуссена к эквивалентной системе интегральных уравнений;
- получены конструктивные достаточные условия существования и единственности решения задачи;
- выведена оценка области локализации решения;
- установлена связь полученных результатов с соответствующими результатами для классической векторной задачи.

Полученные результаты могут быть использованы при решении соответствующих задач естественных наук и техники, например, некоторых задач физики, теплофизики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Сансоне, Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. – Т. 1. – М. : ИЛ, 1953. – 348 с.
2. *Хартман, Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970. – 720 с.
3. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдудевский [и др.]. – М. : Машиностроение, 1975. – 624 с.
4. Теория тепломассообмена : учебник для вузов / С. И. Исаев, И. А. Кожин, В. И. Кофанов [и др.] ; под ред. А. И. Леонтьева. – М. : Высшая школа, 1979. – 495 с.
5. *Murty, K. N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.
6. *Murty, K. N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems associated with an nth order nonlinear system of differential equations – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, G. V. R. L. Sarma // Mathem. Probl. in Engineering – 2000. – Vol. 6. – P. 395–410.
7. *Деревенский, В. П.* Квазилинейные матричные дифференциальные уравнения // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 12 – С. 11–17.
8. *Деревенский, В. П.* Матричные двусторонние линейные дифференциальные уравнения // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55, вып. 1. – С. 35–42.
9. *Деревенский, В. П.* Матричные линейные дифференциальные уравнения высших порядков // Дифференц. уравнения – 1993. – Т. 29, № 4 – С. 711–714.
10. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
11. *Самойленко, А. М.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. – Киев : Наукова думка, 1992. – 279 с.
12. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
13. *Бибиков, Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – М. : Высш. шк., 1991. – 304 с.
14. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.] – М. : Наука, 1969. – 456 с.
15. *Гантмахер, Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.

Поступила в редакцию 10.05.2016 г.

Контакты: e-mail: alex.kashpar@tut.by (Кашпар Александр Иванович,
Лаптинский Валерий Николаевич)

**Kashpar A. I., Laptinskiy V. N. THE STUDY OF SOLVABILITY OF DE LA VALLEE
POUSSIN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LYAPUNOV LINEAR MATRIX
EQUATION OF SECOND ORDER.**

By applying the constructive method sufficient coefficient conditions of one-valued solvability of a two-point boundary value problem for the second order matrix equation which represents a generalization of the Lyapunov classical equation have been obtained; the assessment of the localization area of the solution has been deduced as well.

Key words: matrix differential equation, boundary value problem, one-valued solvability.

УДК 004.6

СВОЙСТВА И ДЕКОДИРОВАНИЕ РЕВЕРСИВНЫХ КОДОВ С КОНСТРУКТИВНЫМ РАССТОЯНИЕМ 5

В. А. Липницкий

доктор технических наук, профессор
Военная Академия Республики Беларусь

А. В. Кушнеров

аспирант

Белорусский государственный университет

В работе исследованы наиболее важные свойства реверсивных кодов и некоторые подходы к вычислению их кодового расстояния, особенности теории норм синдромов для не примитивных реверсивных кодов, корректирующие возможности этих кодов в диапазоне длин от 7 до 230. Коррекция ошибок нормальным методом продемонстрирована на примере реверсивного кода длиной 49.

Ключевые слова: помехоустойчивые коды, минимальное расстояние кода, реверсивные коды, коды-БЧХ, нормальный метод декодирования.

Введение

Защита информации от помех – важнейшая задача при ее передаче и хранении, которые неизбежны в условиях агрессивно воздействующей среды. С каждым шагом вперед в развитии цифровых технологий эта задача приобретает все большую актуальность. Для решения проблемы зашумления информации в цифровых инфокоммуникационных системах (ИКС) существует надежный метод, который называют помехоустойчивым кодированием. С теоретической точки зрения – это область прикладной математики, которая развивается на протяжении более полувека, давая миру все новые и более мощные средства для противостояния помехам в каналах передачи информации.

В основе помехоустойчивого кодирования лежит теорема К. Шеннона (1948 г.), о том, что введением избыточности в передаваемый блок цифровой информации можно добиться исправления возникающих в ней ошибок любой сложности.

Исторически первые конкретные методы введения этой избыточности были предложены Робертом Хеммингом в начале 50-х гг. XX в. Им же заложены и основы теории линейных помехоустойчивых кодов [1]. В дальнейшем они приобрели наибольшую популярность как в теории, так и на практике, благодаря опоре на язык линейной алгебры.

Линейный двоичный код есть k -мерное подпространство в n -мерном пространстве векторов с коэффициентами из $Z/2Z$. Величину n называют длиной

© Липницкий В. А., 2016

© Кушнеров А. В., 2016

кода. Весь спектр кодовых слов получается умножением информационных k -мерных векторов на порождающую $k \times n$ -матрицу G .

Эффективность работы линейного кода определяется, в первую очередь, количеством ошибок, которое он способен исправить в каждом передаваемом блоке-сообщении. Количество исправляемых ошибок зависит от его минимального расстояния d – наименьшего из расстояний между векторами кода в смысле метрики Хемминга. Зависимость проста: если код длиной n имеет минимальное расстояние $d = 2t+1$ или $d = 2t+2$, то этот код способен исправить до t ошибок в каждом передаваемом блоке-сообщении длиной n [2].

К XXI в. разработан широкий спектр различных помехоустойчивых кодов (см., к примеру, [2]). Наибольшее применение, особенно в высокоскоростных ИКС, приобрело семейство кодов Боуза-Чоудхури-Хоквингема (БЧХ-кодов). Разработанная белорусской школой помехоустойчивого кодирования теория норм синдромов (ТНС) [3, 4] на порядок ускоряет синдромные методы коррекции ошибок, предоставляет норменные методы коррекции ошибок, вес которых выходит за рамки конструктивных ограничений. Эта возможность открыла путь к изучению не примитивных кодов Хемминга, БЧХ-кодов, реверсивных кодов, для которых как раз и имеют место неожиданные всплески минимального расстояния за конструктивные пределы (см. [5–9]).

В данной работе с единых позиций строится теория реверсивных кодов с конструктивным расстоянием 5, систематизируются разрозненные сведения о них, развивается для них теория норм синдромов, норменный метод коррекции ошибок не примитивными реверсивными кодами.

Коды Хемминга и коды БЧХ

Пожалуй, самый известный пример линейного помехоустойчивого кода – код Хемминга. Являясь составным кирпичиком многих иных линейных кодов, в наши дни линейный код Хемминга длиной n однозначно определяется своей проверочной матрицей

$$H = (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}), \quad (1)$$

где α – примитивный элемент поля Галуа $GF(2^m)$ [1–3]. В этой матрице $n = 2^m - 1$, каждый элемент α^i представляет собой столбец из m двоичных элементов – координат вектора α^i в базисе $\alpha^{m-1}, \alpha^{m-2}, \dots, \alpha, 1$. Здесь $k = n - m$. Заданный таким образом код, вообще говоря, отличается от кода Хемминга [1], но лишь перестановкой координат, и следовательно, эквивалентен ему, но приобретает при этом весьма важное свойство цикличности [2].

Коды Хемминга – совершенные коды с минимальным расстоянием 3, а потому исправляющие лишь одну ошибку на передаваемый блок-сообщение. Метод исправления этой ошибки действительно совершенен: синдром ошибки совпадает с тем столбцом матрицы H , номер которого совпадает с номером ошибочной координаты блока-сообщения.

В поисках подходов к увеличению количества исправляемых ошибок, в начале 60-х гг. XX в. Р. Боузом, Д. Чоудхури и А. Хоквингемом на основе кодов

Хемминга впервые были разработаны линейные коды, конструктивно способные исправлять, в принципе, любое количество случайных ошибок. Наиболее популярны как в теории, так и в приложениях примитивные циклические БЧХ-коды, длиной $n = 2^m - 1$ и с конструктивным расстоянием $\delta = 2t + 1$ задаются, по аналогии с (1), проверочными матрицами

$$H = (\alpha^i, \alpha^{3i}, \dots, \alpha^{(2t-1)i})^T, \quad (2)$$

при условии, что $tm < n$ [2-4]. Реальное минимальное расстояние этих кодов $d \geq \delta$. Примитивные БЧХ-коды хорошо изучены, их корректирующие возможности, как правило, остаются в рамках конструктивных ограничений.

Формальное определение не примитивных БЧХ-кодов получается заменой

в формуле (2) параметра α на $\beta = \alpha^z$, где $z = \frac{2^m - 1}{n}$ для делителя n числа $2^m - 1$.

При этом число m – наименьшее из всех натуральных k с условием: $2^k - 1$ делится на n .

Белорусская школа помехоустойчивого кодирования проводит интенсивное исследование свойств не примитивных БЧХ-кодов и кодов Хемминга (см., к примеру, [5–9]). Интерес к ним обусловлен, прежде всего, тем, что их минимальное расстояние может принимать значения, существенно превосходящее конструктивные значения. Об этом свидетельствует, к примеру, код Голея, полностью совпадающий, как доказано в [4], стр. 151–152, с БЧХ-кодом длиной 23 и конструктивным расстоянием 3. Также следует упомянуть о не примитивных кодах Хемминга длиной 47 (его минимальное расстояние $d = 11$ и длиной 79, кодовое расстояние которого $d = 15$).

В [9] доказано, что коды Хемминга с параметрами $n = p = 8t \pm 1$ – простое число, $m = \frac{p-1}{2}$, относятся к одному из четырех классов квадратично-вычетных кодов. Один из основных результатов теории КВ-кодов [2] гласит, что их минимальное расстояние $d \geq \sqrt{p}$. Отсюда следует, что минимальное расстояние не примитивных кодов Хемминга в общем не ограничено сверху.

Реверсивные коды

Реверсивные помехоустойчивые коды конструктивно относятся к классу БЧХ-кодов. Они были незаслуженно обделены вниманием исследователей – пробел, в некоторой степени ликвидируемый данной работой.

Всякий двоичный реверсивный код C_R определен над своим полем Галуа $GF(2^m)$ из 2^m элементов, $m > 2$, имеет нечетную длину n , являющуюся делителем числа $2^m - 1$, и размерность, равную $k = n - 2m$. На выбор m накладываются те же ограничения, что и в кодах Хемминга. Код C_R однозначно задается своей проверочной матрицей

$$H_R = (\beta^i, \beta^{-i})^T; \quad (3)$$

$0 \leq i \leq n-1$, $2m < n$, $\beta = \alpha^z$ для примитивного элемента α поля Галуа $GF(2^m)$, $z = \frac{2^m - 1}{n}$. При $n = 2^m - 1$, величина $\beta = \alpha$, и код C_R называется примитивным. В противном случае код называется не примитивным. Код получил название реверсивного потому, что во второй строке проверочной матрицы стоят элементы первой, но в обратном порядке.

Априори, реверсивный код может существовать на любой нечетной длине. Но из рассмотрения следует исключить случаи, когда $2m > n$. В дальнейшем исключаем из рассмотрения также коды размерностью 1, для них $n - 2m = 1$. Такие коды существуют только в теории, так как передают лишь два слова, а, следовательно, не применяются на практике.

Также следует исключить из рассмотрения случаи, когда β и β^{-1} являются корнями одного и того же неприводимого полинома, случаи, когда ранг матрицы (2) равен m в силу теоремы 6.3 [3], и, следовательно, реверсивный код сводится к коду Хемминга. Подобные случаи удобно отслеживать с помощью циклотомических классов. Циклотомический класс $C(i) = \{i, 2i, 4i, \dots\}$ – это совокупность степеней всех корней неприводимого полинома $M(\beta^i, x)$, выраженных как степени β^i с помощью автоморфизма Фробениуса поля Галуа $GF(2^m)$. Таким образом, β и β^{-1} принадлежат одному неприводимому полиному тогда и только тогда, когда 1 и $n-1$ лежат в одном циклотомическом классе. Построив циклотомические классы для каждой длины $n > 2m$, оставляем для дальнейшего рассмотрения те, на которых реверсивный код действительно существует, то есть для которых $n > 2m$ и $n-1$ не принадлежит циклотомическому классу $C(1) = \{1, 2, 4, \dots\}$.

Сформулируем и докажем одно интересное утверждение о циклотомических классах.

Теорема 1. Для значений $n = 2^m - 1$, $m \geq 3$ (для примитивных кодов), степени 1 и 3, а также 1 и -1 (или $n-1$) лежат в разных циклотомических классах.

Доказательство: Очевидно, что 1 всегда принадлежит классу $C(1)$ по определению. Рассмотрим структуру класса $C(1)$: $C(1) = \{1, 2, \dots, 2^i\}$, иными словами, класс состоит из степеней числа 2, взятых по модулю n . Покажем, что $2^i \not\equiv 3 \pmod{(2^m - 1)}$, $\forall i: 0 \leq i \leq 2^m - 2$, $m \geq 3$. Запишем следующее тождество: $2^m = 1 * (2^m - 1) + 1$; далее переходим к сравнению по модулю $2^m - 1$: $2^m \equiv 1 \pmod{(2^m - 1)}$. Получаем, что в мультипликативной группе кольца вычетов $Z/(2^m - 1)Z$ порядок 2 равен m , следовательно, $C(1) = \{1, 2, \dots, 2^i\}$, $0 \leq i \leq m-1$

будет циклической подгруппой порядка m относительно умножения в $(Z/(2^m - 1)Z)^*$. Значит, в циклотомическом классе $C(1)$ будут лишь элементы, которые являются степенями 2, число 3 не представимо в таком виде, и не будет принадлежать тому же классу, что и степень 1.

То же можно сказать и о степени $n-1 = 2^m - 2 = 2(2^{m-1} - 1)$. Как видно, для $m \geq 3$ $n-1$ не является степенью числа 2, а значит, не может лежать в одном классе с 1. Теорема доказана.

Заметим, что на не примитивных длинах теорема 1 не справедлива – существуют $n \neq 2^m - 1$, для которых $C(n-1) = C(1)$. Вот их список в диапазоне от 7 до 500: 17, 41, 43, 97, 109, 113, 137, 157, 193, 229, 241, 251, 257, 277, 281, 283, 307, 313, 331, 353, 397, 401, 409, 433, 449, 457, 499. Все реверсивные коды на перечисленных длинах не существуют, они совпадают с кодами Хемминга на тех же длинах.

Отдельно стоит сказать, что для некоторых значений n , величины $n-1$ и 3 лежат в одном циклотомическом классе, откуда следует, что реверсивный код на этих длинах совпадает с кодом семейства БЧХ, который задается проверочной матрицей $H = (\beta^i, \beta^3)^T$. Список этих длин n в диапазоне от 7 до 500: 35, 49, 55, 77, 175, 203, 245, 247, 259, 295, 319, 343, 371, 385, 395, 413, 415, 439. Исследование реверсивных кодов на указанных длинах адресуется к соответствующим БЧХ-кодам.

Итогом вышеизложенного можно считать табл. 1, где приведен список всех реверсивных кодов в диапазоне длин n от 7 до 230 с параметрами k и m , перспективными для дальнейших исследований. Их оказалось 51.

Таблица 1. Параметры всех реверсивных кодов длиной n , $7 \leq n < 230$

n	m	k	n	m	k
15	4	7	129	14	101
21	6	9	133	18	97
31	5	21	135	36	63
35	12	11	141	46	49
39	12	15	143	60	23
45	12	21	147	42	63
49	21	7	151	15	121
51	8	35	153	24	105
55	20	15	155	20	115
63	6	51	159	52	55
69	22	25	161	33	95
73	9	55	165	20	125
75	20	35	175	60	55
77	30	17	183	60	63
85	8	69	187	40	107
87	28	31	189	18	153
89	11	67	195	12	171
91	12	67	203	84	35
93	10	73	207	66	75
95	36	23	213	70	73
105	12	81	215	28	159
111	36	39	217	15	187
115	44	27	219	18	183
117	12	93	221	24	173

Окончание табл. 1

n	m	k	n	m	k
119	24	71	223	37	149
123	20	83	225	60	105
127	7	113			

Далее следует оценить корректирующие возможности найденных реверсивных кодов – необходимо для каждого кода отыскать его минимальное расстояние. Здесь имеют место некоторые теоретические результаты.

Теорема 2. Минимальное расстояние d кода C_R находится в диапазоне $3 \leq d \leq s$, где s – наименьший натуральный делитель длины кода n . Если длина кода C_R кратна 3, то код имеет минимальное расстояние 3.

Доказательство следует из того факта, что элементы $1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-1}$ образуют циклическую подгруппу $\langle \beta \rangle$ порядка n в мультипликативной группе $GF(2^m)^*$ поля Галуа $GF(2^m)$. Для каждого делителя s числа n и числа $\mu = n/s$ элемент β^μ образует циклическую подгруппу $\langle \beta^\mu \rangle$ порядка s в группе $\langle \beta \rangle$. Сумма всех элементов этой подгруппы в поле $GF(2^m)$ равна нулю, как несложно видеть. Рассмотрим двоичный вектор \bar{x} с n координатами, из которых s координат равны 1, а именно координаты, номера которых совпадают с номерами элементов β^μ в матрице (3), а остальные равны 0. Легко видеть, что $H_R \cdot \bar{x}^T = \bar{0}$. Из этого равенства следует, что вектор \bar{x} весом s принадлежит коду C_R . Отсюда и вытекает доказательство теоремы 2.

Следствие. Примитивный реверсивный код C_R длиной $n = 2^{2^\mu} - 1$ имеет минимальное расстояние 3.

Доказательство. Пусть $m = 2^\mu$ – четно. Тогда $n = 2^{2^\mu} - 1 = (2^\mu - 1) \cdot (2^\mu + 1)$. Среди трех последовательных натуральных чисел $(2^\mu - 1), 2^\mu, (2^\mu + 1)$ непременно найдется делящееся на три. Этим числом заведомо не является 2^μ . Следовательно, или $2^\mu - 1$, или $2^\mu + 1$ обязательно поделится на 3. Таким образом, $2^{2^\mu} - 1 = 3q$ для подходящего натурального q . Остальное непосредственно вытекает из теоремы 2.

Отметим, что данное следствие иным путем было доказано ранее Дзенгом и Хартманом [10]. Им же принадлежит и ослабленный вариант следующего утверждения.

Теорема 3. При нечетных значениях $m = 2^\mu + 1$ примитивный реверсивный код C_R длиной $n = 2^m - 1$ имеет минимальное расстояние 5.

Доказательство. Пусть $m = 2^\mu + 1$ – нечетно. Среди трех последовательных натуральных чисел $(2^{2^\mu+1} - 1), 2^{2^\mu+1}, (2^{2^\mu+1} + 1)$ одно и только одно делится на три. В силу формулы сокращенного умножения: $(2^{2^\mu+1} + 1) = (2 + 1)(2^{2^\mu} - 2^{2^\mu-1} + \dots - 1)$, таковым является третье из названных. Значит, $2^{2^\mu+1} - 1$ на 3 не делится.

Любые два столбца матрицы (3) попарно различны. Поэтому предположим, что в коде C_R длиной $n = 2^{2^\mu+1} - 1$ найдутся три столбца с нулевой двоичной сум-

мой. Это означает наличие трех ненулевых и попарно различных элементов $x, y, z \in GF(2^{2\mu+1})$, таких, что

$$\begin{cases} x + y + z = 0; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Из (4) следует, что $\begin{cases} x + y = z; \\ \frac{y+x}{xy} + \frac{1}{z} = 0; \end{cases}$ или $\begin{cases} z = x + y; \\ z^2 = xy. \end{cases}$

Из последней системы следует, что $(x + y)^2 = xy$ или $x^2 + y^2 = xy$, что равносильно равенству $t^2 + t + 1 = 0$ для $t = \frac{x}{y} \neq 1$, поскольку $x \neq y$. Умножим обе части

уравнения $t^2 + t + 1 = 0$ на $t - 1$. Получим уравнение $t^3 - 1 = 0$. Так как t является ненулевым элементом поля $GF(2^{2\mu+1})$, то $t = \alpha^s$ для примитивного элемента $\alpha \in GF(2^{2\mu+1})$ и некоторого целого $s, 1 \leq s < 2^{2\mu+1} - 1 = n$. Тогда $t^3 = \alpha^{3s} = 1$. Минимальная степень α , равная 1, есть степень $n = 2^{2\mu+1} - 1$. Отсюда следует, что $3s = n = 2^{2\mu+1} - 1$ или $3s = 2n = 2(2^{2\mu+1} - 1)$, чего быть не может, поскольку $n = 2^{2\mu+1} - 1$ не может делиться на 3 в силу леммы 1.

Лемма 1. Длина $n = 2^m - 1$ примитивного реверсивного кода делится на 3 тогда и только тогда, когда $m = 2\mu - \text{четно}$.

Следовательно, система (4) не может иметь решений, а, следовательно, минимальное расстояние кода C_R длиной $n = 2^{2\mu+1} - 1$ больше или равно 4.

Предположим, что в проверочной матрице кода C_R длиной $n = 2^{2\mu+1} - 1$ найдутся четыре столбца с нулевой двоичной суммой. Это означает наличие четырех ненулевых и попарно различных элементов $x, y, z, t \in GF(2^{2\mu+1})$, таких, что

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Из (5) следует, что $\begin{cases} x + y = z + t; \\ \frac{y+x}{xy} = \frac{z+t}{zt}; \end{cases}$ или $\begin{cases} z + t = x + y = a; \\ zt = xy = b \end{cases}$ для некоторых не-

нулевых $a, b \in GF(2^{2\mu+1})$. Отсюда следует, что 4 различных элемента $x, y, z, t \in GF(2^{2\mu+1})$ являются корнями одного квадратного уравнения $u^2 + au + b = 0$, чего, разумеется, быть не может. Следовательно, минимальное расстояние кода C_R длиной $n = 2^{2\mu+1} - 1$ больше или равно 5.

Предположим, что в проверочной матрице в коде C_R длиной $n = 2^{2\mu+1} - 1$ найдутся пять столбцов с нулевой двоичной суммой. Это означает наличие пяти ненулевых и попарно различных элементов $x, y, z, t, u \in GF(2^{2\mu+1})$, таких, что

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t + u = 0; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} = 0 \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t + u = 0; \\ yztu + xztu + xytu + xyzu + xyzt = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

В силу следствия 1 из теоремы 3 [12] система (3) имеет нетривиальные решения, то есть хотя бы с одной ненулевой координатой. Однако наличие решения с хотя бы одной нулевой или двумя одинаковыми координатами, привело бы к решению предыдущей системы, но с меньшим числом переменных. Вышеприведенные рассуждения показывают, что этого быть не может. Следовательно, гарантированное решение системы (3) должно иметь все отличные от нуля и попарно различные координаты. Все сказанное в совокупности означает, что в проверочной матрице реверсивного кода действительно имеются пять различных столбцов с нулевой двоичной суммой. Отсюда следует, что искомое минимальное расстояние кода равно 5.

Теорема 3 полностью доказана.

Таким образом, реверсивные коды с длинами, делящимися на 3, не представляют практического интереса, их следует удалить из дальнейшего рассмотрения.

Из оставшихся в табл. 1 кодов удалим также и коды с длинами, делящимися на 5, поскольку у них $d \leq 5$. Для кодов C_R с $d = 5$ методики декодирования хорошо разработаны и уже не представляют научного интереса.

Таблица 2 содержит параметры (n, m, k) реверсивных кодов из табл. 1, кодовое расстояние которых может быть больше 5.

Таблица 2. Перспективные реверсивные коды с длинами в диапазоне от 31 до 230

n	m	k	N	m	k
49	21	7	151	15	121
73	9	55	161	33	95
77	30	17	187	40	107
89	11	67	203	84	35
91	12	67	217	15	187
119	24	71	221	24	173
133	18	97	223	37	149
143	60	23			

Таблица 2 содержит лишь 15 кодов, минимальное расстояние которых имеет перспективу принять значение, больше 5. Для них значение этого параметра необходимо устанавливать с привлечением компьютерных вычислений при сочетании нескольких методов.

Одним из базовых является метод вычисления минимального расстояния по определению. Находя ядро проверочной матрицы кода C_R , мы получим базис кода из $n - 2m$ векторов, далее непосредственным перебором кодовых слов необходимо отыскать кодовое слово минимального веса. Метод перебора не слишком эффективен, так как с увеличением значений параметров n, m экспоненциально растет сложность вычислений. Однако метод нашел применение при вычислении кодового расстояния на длинах 45, 149, 203. На диапазоне длин

от 73 до 119 неплохо работает синдромный метод вычисления минимального расстояния, базирующийся на теореме о рангах систем столбцов проверочной матрицы [2]. Для длин, превышающих 119, целесообразно применять норменный метод [3], а также метод G-орбит для подгруппы G группы автоморфизмов кода C_R , порожденной циклическими и циклотомическими подстановками [4]. В результате скрупулезных вычислений были получены точные значения минимальных расстояний, представленные в табл. 3

Таблица 3. Корректирующие возможности наиболее перспективных реверсивных кодов

Длина кода	Размерность поля определения	Размерность кода	Минимальное расстояние кода Хемминга на заданной длине	Минимальное расстояние реверсивного кода
49	21	7	3	7
73	9	55	3	6
77	30	17	3	7
89	11	67	4	7
91	12	67	3	6
119	24	71	3	5
133	18	97	3	8
143	60	23	11	11
151	15	121	5	8
161	33	95	3	7
187	40	107	5	5
203	84	35	3	7
217	15	187	3	5
221	24	173	3	5
223	37	149	9	≤ 21

Норменное декодирование реверсивных кодов

Теория норм синдромов и норменный метод декодирования [3–4] эффективно работают с примитивными БЧХ-кодами и реверсивными кодами. Рассмотрим специфику применения данного метода при декодировании ошибок не примитивными реверсивными кодами.

Вектора ошибок для кода длиной n имеют вид $\bar{e} = (i_1, i_2, \dots, i_k)$. Данная запись означает, что в векторе ошибки \bar{e} длиной n на позициях i_1, i_2, \dots, i_k находятся 1, а на остальных 0. На данном множестве векторов-ошибок рассматривается операция циклического сдвига σ . Пусть $\bar{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, тогда $\sigma(\bar{e}) = \sigma(e_1, e_2, \dots, e_n) = (e_n, e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$. Введем понятие Γ -орбиты вектора ошибки [3].

Определение 1: Совокупность всех попарно различных векторов-ошибок $\sigma^k(\bar{e})$, $0 \leq k < n$, называется Γ -орбитой вектора-ошибки \bar{e} в пространстве ошибок E_n и обозначается через $\langle \bar{e} \rangle$.

Γ -орбиты имеют четкую структуру, которую описывает

Теорема 4 [3, 4]. Для произвольного фиксированного вектора $\bar{e} \in P_n$ из пространства ошибок $E_n = P_n$ его Γ -орбита $\langle \bar{e} \rangle$ состоит из λ элементов, где $\lambda = n$ или λ делит n . При этом λ – наименьшее натуральное число с условием $\sigma^\lambda(\bar{e}) = \bar{e}$ и Γ -орбита $\langle \bar{e} \rangle$ имеет следующую структуру

$$\langle \bar{e} \rangle = \{\bar{e}, \sigma(\bar{e}), \dots, \sigma^{\lambda-1}(\bar{e})\}.$$

Для любых двух векторов-ошибок \bar{e} и \bar{e}' из E_n их Γ -орбиты $\langle \bar{e} \rangle$ и $\langle \bar{e}' \rangle$ либо совпадают, либо не имеют одинаковых элементов.

Синдром $S(\bar{e})$ вектора-ошибки \bar{e} есть произведение проверочной матрицы кода на вектор ошибки: $S = H\bar{e}^T$. Синдромы векторов-ошибок в коде C_R в силу структуры их проверочной матрицы состоят из двух компонент: $S(\bar{e}) = (s_1, s_2)$; $s_1, s_2 \in GF(2^m)$. Известно, что синдромы векторов-ошибок весом $1, 2, \dots, t$ в коде с минимальным расстоянием $d = 2t+1$ попарно различны. Этот факт служит основой синдромных методов коррекции ошибок.

В реверсивном коде синдромы каждой Γ -орбиты имеют четко очерченную структуру (см. [3, 4]).

Теорема 5. Если в коде C_R синдром $S(\bar{e}) = (s_1, s_2)$, то $S(\sigma(\bar{e})) = (\beta s_1, \beta^{-1} s_2)$,

Теорема 5 подсказывает следующее определение нормы синдрома ошибки для реверсивного кода.

Определение 2: В реверсивном коде C_R нормой синдрома $S = (s_1, s_2) = (\alpha^i, \alpha^j)$ назовем произведением компонент этого синдрома в поле Галуа $GF(2^m)$:

$$N(S) = s_1 \cdot s_2.$$

Из определения 2 и теоремы 5 вытекает

Теорема 6. В реверсивном коде C_R с проверочной матрицей (3) норма синдрома не зависит от циклических сдвигов координат векторов-ошибок: для всякого вектора ошибок \bar{e} и его синдрома $S(\bar{e})$ справедливо равенство

$$N(S(\sigma(\bar{e}))) = N(S(\bar{e})).$$

Это означает, что в рамках одной орбиты норма будет одинакова, а следовательно, нормой Γ -орбиты можно назвать норму синдрома любого вектора ошибки, в нее входящего.

Теорема 7. Нормы Γ -орбит всех векторов-ошибок весом $1, 2, \dots, t$ в примитивном коде C_R с минимальным расстоянием $d = 2t+1$ или $d = 2t+2$ попарно различны. В не примитивном коде C_R с теми же условиями может существовать до z различных Γ -орбит векторов-ошибок весом $1, 2, \dots, t$ с одинаковыми нормами.

Пример 1. Рассмотрим реверсивный код C_R с проверочной матрицей (3) длиной 49. Он определен над полем $GF(2^{21})$. Здесь $z = 42799$. Из табл. 3 следует, что данный код имеет минимальное расстояние 7 и, следовательно, корректирует все случайные ошибки весом 1 – 3. Из них одиночные образуют одну

Г-орбиту, двойные – 24 Г-орбиты, тройные – 376, всего 401 полная Г-орбита.

Как уже отмечалось выше, синдромы всех перечисленных ошибок попарно различны. Компьютерные расчеты показали, что нормы 401 Г-орбиты составляют спектр из 225 значений. Значит, в приведенном списке из 401 Г-орбиты имеются орбиты с одинаковыми значениями их норм. Особенность данного примера в том, что из 225 значений нормы 176 повторяются, причем по одному разу. Иными словами, 176 пар Г-орбит имеют по одинаковой норме, оставшиеся 49 орбит имеют уникальные значения норм. Еще одна специфическая особенность данного примера в том, что совпадения значений норм наблюдаются лишь в классе тройных ошибок. Следовательно, из 49 Г-орбит с уникальными нормами 25 одинарных и двойных и 24 тройных.

Для декодирования ошибок норменным методом следует иметь 3 списка: список 1 образующих \bar{e}_i Г-орбит декодируемой совокупности, список 2 синдромов $S(\bar{e}_i) = (s_{1,i}, s_{2,i})$ образующих и список 3 норм $N_i = N(S(\bar{e}_i))$ Г-орбит этой же совокупности. Если ИКС с данным кодом C_R приняла блок-сообщение \bar{x} , то она автоматически вычисляет синдром ошибок этого сообщения по формуле $S(\bar{x}) = H \cdot \bar{x}^T = (s_1, s_2) = (\alpha^i, \alpha^j)$ для фиксированного примитивного элемента α поля $GF(2^m)$. Если $S(\bar{x}) \neq \bar{0}$, то вычисляем норму синдрома $N^* = N(S(\bar{x})) = s_1 * s_2 = \alpha^{i+j}$. Вычисленная норма N^* сравнивается со списком 3. Пусть эта норма совпадает с нормой N_i списка 3. Далее возможны два варианта действий в зависимости от уникальности нормы N_i . Предположим, что норма N_i уникальна (что характерно для всех примитивных реверсивных кодов). Вычисляем целое число $\tau = (i - \deg(s_{1,i})) / z$. Тогда сообщение $\bar{x} = \bar{c} + \bar{e}$, где $\bar{e} = \sigma^{(\tau) \bmod n}(e_i)$ и истинное сообщение вычисляется по формуле: $\bar{c} = \bar{x} + \bar{e}$.

Пусть норма N_i не уникальна, то есть $N^* = N_{l[1]} = N_{l[2]} = \dots = N_{l[h]}$. Тогда вычисляем h значений $\tau(l[\mu]) = (i - \deg(s_{1,l[\mu]})) / z$. В силу теоремы 5 только для одного из значений $l[\mu]$ эта величина будет целым числом. Пусть для определенности это значение совпадает с $l[1]$. Искомая ошибка \bar{e} в принятом сообщении \bar{x} вычисляется по формуле $\bar{e} = \sigma^{(\tau(l[1])) \bmod n}(e_{l[1]})$.

Пример 2. Продемонстрируем работу норменного декодера на примере не примитивного реверсивного кода C_R длиной 49, исследованного в примере 1.

Пусть ИКС с кодом C_R приняла следующее сообщение:
 $\bar{x} = (0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0)$.

Вычислим синдром ошибки в принятом сообщении по формуле $S(\bar{x}) = H\bar{x}^T$. Имеем: $S(\bar{x}) = (\alpha^{929465}, \alpha^{1668303})$. Вычисляем норму синдрома $N(S(\bar{x})) = \alpha^{500617}$. Далее определяем согласно списку норм соответствующие Г-орбиты. Данному значению нормы соответствуют две различные Г-орбиты с образующими: $\bar{e}_1 = (1, 7, 14)$ и $\bar{e}_2 = (1, 7, 43)$. Синдромы образующих равны соответственно:

$$S(\bar{e}_1) = (\alpha^{801068}, \alpha^{1796700}) \text{ и } S(\bar{e}_2) = (\alpha^{2053494}, \alpha^{544274}).$$

Вычисляем $\tau(1) = \frac{929465 - 801068}{42799} = 3$; $\tau(2) = \frac{929465 - 2053494}{42799} = -26,263$ – величина дробная. Искомый вектор-ошибку находим по формуле $\bar{e} = \sigma^3(e_1) = (4, 10, 17)$. В двоичном виде получаем искомый вектор-ошибку длиной 49 и весом три

$$\bar{e} = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0).$$

Прибавив полученный вектор ошибки к принятому сообщению, получим верное кодовое слово:

$$w = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

В принятом сообщении исправлена тройная ошибка.

Заключение

Разработаны основы теории и общий подход к исследованию реверсивных кодов с конструктивным расстоянием 5, как примитивных, так и не примитивных. Установлены общие свойства и различия между двумя названными классами кодов. Получены теоретически или вычислены точные значения минимального расстояния для реверсивных помехоустойчивых кодов в диапазоне длин от 7 до 230. Некоторые результаты были изложены ранее в [11]. Наилучшими корректирующими возможностями обладает код C_R на длине 143, этот представитель реверсивных кодов способен исправлять до 5 ошибок в сообщении. Также следует отметить код C_R длиной 49, который способен корректировать до 3 ошибок в передаваемом сообщении.

Норменный метод коррекции ошибок развит на не примитивные реверсивные коды. Представлен пример исправления тройной ошибки норменным методом с помощью реверсивного кода с минимальным расстоянием 7.

Если сравнивать реверсивные коды с БЧХ-кодами с конструктивным расстоянием 5 на тех же длинах, которые имеют проверочную матрицу $H = (\beta^i, \beta^{3i})^T$,

то реверсивные коды ведут себя заметно мягче. Всплески минимальных расстояний, характерные для не примитивных БЧХ-кодов, в реверсивных кодах проявляются в гораздо меньшей степени.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Хемминг, Р. В. Коды с обнаружением и исправлением ошибок / Р. В. Хемминг. – М. : ИЛ, 1956. – 356 с.
2. Мак-Вильямс, Ф. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки. / Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн. – М. : Радио и связь, 1979. – 744 с.
3. Липницкий, В. А. Теория норм синдромов. / В. А. Липницкий – Минск : БГУИР, 2010. – 108 с.
4. Липницкий, В. А. Норменное декодирование помехоустойчивых кодов и алгебраические уравнения / В. А. Липницкий, В. К. Конопелько. – Минск : Издательский центр БГУ, 2007. – 214 с.
5. Lipnitski, V. Non-primitive Hamming Codes, p. 73–75. Modeling and Simulation: MS'2012; Proc. of the Intern. Conf., 2–4 May 2012, Minsk, Belarus. – Minsk : Publ. Center of BSU, 2012. – 178 p.
6. Липницкий В. А., Михайловский Е. Б. Определение реальных корректирующих возможностей не примитивных кодов Хемминга. – 17-я МНТК “Современные средства связи”, Минск, 16–18 октября 2012 г. Материалы МНТК, Минск : УО “Высший государственный колледж связи”, 2012. – С. 173.
7. Липницкий В. А., Олексюк А. О. Реализация декодера не примитивного кода Хемминга с помощью метода сжатия орбит. / “Современные информационные компьютерные технологии mcIT-2013” : материалы III Международной научно-практической конференции [Электронный ресурс] / УО “Гр. ун-т им. Я. Купалы”. – Гродно, 2013. – 1 электр. компакт диск (CD-R). – 792 с. – Рус. – Деп. в ГУ “БелИСА” 19.09.13, № Д 201315.
8. Липницкий В. А., Олексюк А. О. О коррекции кратных ошибок не примитивными кодами Хемминга / Международная научно-практическая конференция “Молодежь в науке – 2013” г. Минск, 19–22 ноября 2013 г. Материалы международной научно-практической конференции. – Минск : НАН РБ, 2013. – С. 616–619.
9. Липницкий В. А., Олексюк А. О. Оценка минимальных расстояний не примитивных кодов Хемминга / Весці НАН Беларусі, серыя фізіка-тэхнічных навук. – 2015. – № 2. – С. 103–110.
10. Tzeng K. K., Hartman C.R.P. On the minimum distance of certain reversible cyclic codes / IEEE Trans. on Info. Theory. – 1970. – Vol. IT-16, № 5. – P. 644–646.
11. Липницкий В. А., Кушнеров А. В. Свойства непримитивных реверсивных кодов: материалы международной научной конференции ITS – 2014, Минск, 29 октября 2014 / БГУИР ; под ред. Д. П. Кукин [и др.]. – Минск, 2014. – С. 276–277.
12. Серр, Ж.-П. Курс арифметики / Ж.-П. Серр. – М. : Мир, 1972. – 184 с.

Поступила в редакцию 01.06.2016 г.

Контакты: valipnitski@yandex.ru (Липницкий Валерий Антонович)

al.v.kushnerov@gmail.com (Кушнеров Александр Викторович)

Lipnitsky V. A., Kushnerov A. V. REVERSE CODES WITH CONSTRUCTIONAL DISTANCE 5 AND DECODING.

In the article the most important properties of reverse codes and some ways to assess their minimal distance are displayed. Some features of the theory of syndrome norms for non-

primitive reverse codes and correction possibilities of these codes in length from 7 to 230 are represented. The norm correction method is exemplified by means of the code with length 49.

Key words: error correcting codes, code minimal distance, reverse codes, bch codes, norm method of error correction.

УДК 550.388.2

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ СТРУКТУРЫ В СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ИОНОСФЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

А. В. ВОЛОСЕВИЧ

доктор физико-математических наук, профессор

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

На основе магнитогидродинамической (МГД) системы уравнений движения заряженных частиц в ионосферной плазме рассматривается теоретическая модель формирования нелинейных электростатических волновых структур в ионосферной столкновительной плазме. Получено эволюционное уравнение для нелинейных стационарных структур, движущихся в направлении ортогональном магнитному и электрическому полю и найдено его автомодельное решение в виде бегущих волн.

Для таких решений, соответствующих стационарным волновым структурам исследована параметрическая область пространства, в которой возможно формирование нелинейных структур типа нелинейных столкновительных ударных волн. Также определены пороговые значения скоростей движения, дрейфовых скоростей электронов и масштабы этих структур.

Ключевые слова: нелинейные электростатические структуры, авроральные, неоднородности, ионосферная плазма, нелинейные стационарные ударные волны.

1. Введение

В многочисленных экспериментах по авроральному рассеянию радиоволн в Е-области ионосферы были обнаружены интенсивные движущиеся электростатические волновые структуры, связанные с возмущениями фоновой электронной плотности. Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования этого уникального явления в Е-слое авроральной ионосферы связанного с полярными сияниями и магнитными бурями, получило название “радиоаврора”. Высотная область ионосферы 95–120 км представляет собой уникальную столкновительную плазму в которой выполняются условия замагниченности для электронов, в силу условия $\omega_{Be} \gg \nu_e$, и незамагниченности для ионов $\omega_{Bi} \ll \nu_i$. (ω_{Be} , ω_{Bi} – гирочастоты электронов, ионов, ν_e , ν_i – частоты столкновений электронов, ионов с нейтралами).

В многочисленных работах предполагалось, что основной причиной возбуждения неустойчивостей в этой области ионосферы является протекание холловских токов в замагниченной слабоионизированной плазме при наличии постоянного электростатического поля E_0 , вызывающего электронный дрейф ортогональный направлению как магнитного, так и электрического поля. Эта неустойчивость получила название Фарлей-Бунемановской (ФБ) неустойчивости. В линей-

ной теории определялись пороговые значения электрического поля для возбуждения неустойчивости, фазовые скорости возбуждаемых ФБ волн, частотный диапазон, а также определялись линейные инкременты нарастания волн [1–7]. Попытки исследования нелинейных механизмов стабилизации ФВ неустойчивости не привели к согласованию теоретических и экспериментальных данных.

В настоящей работе ставится задача исследовать возможные нелинейные процессы, приводящие к стабилизации ФБ неустойчивости и к формированию стационарных волновых структур. Для простой модели стационарных волн рассматриваются основные физические процессы, например, ионная вязкость, инерция электронов и ионов, нелинейность приводящих к формированию стационарных волновых структур.

2. Теоретическая модель

Ниже исследуем магнитогидродинамическую (МГД) теорию движения заряженных частиц и рассмотрим простую гидродинамическую модель и получим обобщенные эволюционные уравнения для электронов и ионов.

В общем случае запишем магнитогидродинамическую систему уравнений движения заряженных частиц сорта α , где $\alpha = i, e$ (ионы, электроны) совместно с уравнениями для электростатического поля:

$$m_\alpha \partial_t \vec{v}_\alpha = e_\alpha \left(\vec{E} + [\vec{v}_\alpha, \vec{B}] \right) - m_\alpha v_\alpha \vec{v}_\alpha - \frac{V_{T\alpha}^2 \nabla n_\alpha}{n_\alpha} m_\alpha - \eta_\alpha \Delta \vec{v}_\alpha, \quad (1)$$

$$\partial_t n_\alpha + \nabla (n_\alpha \vec{v}_\alpha) = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = e (n_i - n_e) / \epsilon_0, \quad (3)$$

где $V_{T\alpha}^2 = k_b T_\alpha / m_\alpha$ – тепловая скорость частиц, k_b – постоянная Больцмана, \vec{v}_α , n_α , T_α , m_α – скорость, масса, температура и плотность заряженных частиц сорта α . v_i , v_e – частоты столкновений ионов и электронов с нейтрами,

Решение системы уравнений (1)–(3) для двухкомпонентной замагниченной плазмы в общем случае представляет собой большие трудности. Обычно ее

решают для гармонических возмущений вида $\exp(-i(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$, и для этого случая в линейном приближении при определенных условиях возникает неустойчивость, которая интенсивно изучается в настоящее время – неустойчивость Фарлей-Бунемана (ФБ) [1–7].

В простой линейной модели были получены инкременты нарастания волн и закон дисперсии, которые справедливы для гармонических волн низкочастотного диапазона:

$$\omega = kV_0 / (1 + \hat{R}), \quad \hat{R} = \frac{\hat{v}_e \hat{v}_i}{\omega_g^2},$$

$$\hat{v}_e = \frac{v_e k^2}{k_\perp^2} \left(1 + \frac{k_\perp^2 v_{ii}^2 \tau}{\omega_g^2} \right) \quad (4)$$

$$\gamma = \frac{\hat{R}}{(1 + \hat{R})\hat{v}_i^2} (\omega^2 - k^2 c_s^2), \quad c_s^2 = v_{ii}^2 (1 + \tau). \quad (5)$$

Это решение было получено в работе [7], где было показано, что для низкочастотной ФБ неустойчивости учет вязкости, инерции, отклонения от условия квазинейтральности плазмы приводит к незначительным поправкам.

Рассмотрим простую модель динамики электронов, пренебрегая эффектами инерции для низкочастотных возмущений.

3. Динамика электронов

Динамика электронов описывается системой уравнений:

$$\partial_t \vec{v}_e + \vec{v}_e \nabla \vec{v}_e = e \nabla \varphi / m_e + \omega_{he} [\vec{v}_e, \vec{e}_z] - \nu_e \vec{v}_e - V_{Te}^2 \nabla N_e, \quad (6)$$

$$\partial_t n_e + \nabla (n_e \vec{v}_e) = 0. \quad (7)$$

Здесь приняты следующие обозначения $\omega_{be} = eB_0 / m_e \nu_e$, $\nu_e = k_d T_e / m_e$ – гирочастота, частота столкновений электронов с нейтралами, тепловая скорость, k_b – постоянная Больцмана, $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$, \vec{e}_z – единичный вектор в направлении постоянного магнитного поля.

Полагаем:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}, \quad \vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{v}_e, \quad n = n_0 + \tilde{n},$$

где $\vec{E}_1, \vec{v}_e, \tilde{n}_e$ – возмущения соответствующих физических величин: потенциального электрического поля $\vec{E} = -\nabla \varphi$, φ – электростатический потенциал. Наличие постоянного магнитного поля B_0 , направленного вдоль оси Z и электрического поля \vec{E}_0 ортогонального направлению магнитному полю. Эти поля вызывают постоянный дрейф электронов со скоростью $V_0 = [E, B_0] / B^2$, ортогонально этим постоянным полям. Постоянным дрейфом ионов пренебрегаем в силу их незамагниченности т. е. в силу условий $\omega_{Bi} \ll \nu_e$. Заметим, что наличие постоянного дрейфа электронов является основной причиной возникновения ФБ неустойчивости.

Пренебрегая инерцией электронов для низкочастотных возмущений, и вводя нормированный потенциал для электронов $\Phi_e = e\varphi / k_b T_e$ и обобщенный потенциал, учитывающий возмущение плотности электронов $\Psi_e = \Phi_e - N_e$,

Получим систему уравнений, описывающую динамику электронов:

$$\partial_t \vec{v}_e + \vec{v}_e \nabla \vec{v}_e = V_{Te}^2 \nabla \Psi_e + \omega_{he} [\vec{v}_e, \vec{e}_z] - \nu_e \vec{v}_e, \quad (8)$$

$$\partial_t N_e + \nabla (N_e \vec{v}_e) = 0, \quad (9)$$

где Ψ_e – обобщенный нормированный электростатический потенциал, $N_e = \tilde{n}_e / n_0$ – относительная электронная плотность, k_b – постоянная Больцмана, T_e – температура электронов.

В частном случае при выполнении условия $\partial_t + \vec{v}_e \nabla \ll \nu_e$, из соотношения (6), (7) можно определить компоненты скорости электронов вдоль и ортогонально направлению магнитного поля:

$$\vec{v}_{e\perp} = a\nabla_{\perp}\Psi_e - b[\nabla\Psi_e, \vec{e}_z], \quad (10)$$

$$\vec{v}_e = c\nabla_{\parallel}\Psi_e. \quad (11)$$

Здесь обозначено: $a = bv_e / \omega_{He}$, $b = v_{Te}^2 / \omega_{He}$, $c = v_{Te}^2 / v_e$.

Заметим, что, как следует из соотношения (10), наибольшее значение имеет дрейф электронов ортогонально направлению электрического и магнитного поля.

Далее подставляем соотношения (10) и (11) в уравнение непрерывности (9) получаем уравнение, определяющее связь возмущения электронной плотности N_e с обобщенным электростатическим потенциалом Ψ_e .

$$\partial_t N_e + V_0 \nabla N_e + a \Delta'_{\perp} \Psi_e + a N_e \Delta'_{\perp} \Psi_e + a \nabla'_{\perp} \Psi_e \nabla'_{\perp} N_e + b [\nabla'_{\perp} \Psi_e, \nabla N_e] = 0. \quad (12)$$

Здесь обозначено: $\Delta'_{\perp} = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + c/a \partial_{zz}^2$, а введенный параметр c/a описывает эффект “ракурсной чувствительности”, т. е. отклонение волнового фронта от направления ортогонального направлению электрического и магнитного полей.

Последние три члена уравнения (12) описывают нелинейную динамику электронов. Заметим, что в силу условия $\omega_{Be} \gg v_e$, для коэффициентов выполняется соотношение $a \ll b$ и, таким образом, последний член (скобки Пуассона) описывает нелинейное взаимодействие волн и вносит главный вклад в нелинейную динамику электронов. Это нелинейное взаимодействие волн рассматривалось в работах [3].

Заметим, что в линейном приближении, пренебрегая последними тремя членами в соотношении (12) и в этом случае получаем уравнение

$$\partial_t N_e + V_0 \nabla N_e + a \Delta'_{\perp} \Psi_e = 0. \quad (13)$$

Далее используем автомодельное решение в виде бегущих волн [8], что позволяет свести задачу нахождения решения системы дифференциальных уравнений в частных производных к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае можно численными методами исследовать формирование стационарных нелинейных волновых структур, движущихся со скоростью V ортогонально направлению магнитного поля. Вводя бегущую координату $S = x + \alpha y - Vt$, получаем уравнение

$$(v_0 - V) \partial_t N_e + a(1 + \alpha) \partial_{ss}^2 \Psi_e = 0, \quad (14)$$

Учитывая $\Psi_e = \Phi_e - N_e$, получаем

$$(v_0 - V) \partial_s N_e + a(1 + \alpha) (\partial_{ss}^2 \Phi_e + \partial_{ss}^2 N_e) = 0. \quad (15)$$

Из этого соотношения можно определить связь электростатического потенциала с возмущением электронной плотности

$$\partial_z \Phi_e = \partial_z N_e + (V - v_0) \omega_0 \tau / v_{ii} v_e N_e + const. \quad (16)$$

Здесь обозначено $\tau = T_e / T_i$, ω_0 – произвольная частота, которая определяет масштаб структуры, и введена безразмерная координата $z = s / L$, $L = v_{ii} / \omega_0$.

Заметим, что в линейном случае связь, описываемая соотношением (16). При близких значениях скорости движения структуры V и дрейфовой скорости электронов v_0 , связь Φ_e с N_e приблизительно линейная и основной нелинейный член соотношения (12) стремится к нулю. Это подтверждает, тот факт, что нелинейность электронов носит двумерный характер.

В общем случае из уравнения (12), учитывая соотношение $\Psi_e = \Phi_e - N_e$, можно получить уравнение описывающее динамику электронов

$$\alpha_0 \partial_z N_e - \partial_z^2 N_e - (\partial_z N_e)^2 + \partial_z^2 \Phi + (\partial_z N_e)(\partial_z \Phi_e) = 0. \quad (17)$$

В этом уравнении введена безразмерная длина $z = s/L$, где L – масштаб структуры, а коэффициент α определен

$$\alpha_0 = v_i L (v_0 - V) / R \tau v_{ii}^2,$$

где $R = v_i v_e / \omega_{gh}^2$, и v_0 – дрейфовая скорость движения электронов, а V – скорость движения структуры. Из уравнения (17) видно, что связь плотности электронов и потенциала является нелинейной.

4. Динамика ионов

Динамику ионов будем рассматривать на основе упрощенной магнитогидродинамической модели, предполагая ионы незамагниченными в силу условия $v_i \gg \omega_{Hi}$, которое приблизительно выполняется в E-области ионосферы. В расчетных моделях не трудно учесть дрейф ионов. Однако будем учитывать наличие ионной динамической вязкости, и, как покажем ниже, этот эффект эквивалентен учету затухания Ландау на ионах в кинетической модели. Запишем МГД систему уравнений для ионов:

$$\partial_t \vec{v}_i + \vec{v}_i \nabla \vec{v}_i = -e \nabla \varphi / m_i - v_i \vec{v}_i - V_{Ti}^2 \nabla N_i - \eta_i \Delta v_i. \quad (18)$$

$$\partial_t N_i + \nabla (N_i \vec{v}_i) = 0. \quad (19)$$

Далее исследуем формирование ионных волновых структур с масштабами порядка $L \sim v_{Ti} / \omega_{Hi}$, но учтем нелинейность и вязкость ионов, при этом в этой модели движение ионов будем считать одномерным. Введем бегущую координату $S = x - Vt$ и перепишем уравнение (19)

$$N_i (v_i - V) + v_i = const.$$

Далее, определим скорость ионов с точностью до квадратичных нелинейных поправок

$$v_i = V N_i (1 - N_i + N_i^2). \quad (20)$$

Преобразуем уравнение (18) учитывая (20) и вводя обобщенный потенциал для ионов

$$\Psi_i = \tau e \varphi / T_e + N_i = \tau \Phi_e + N_i. \quad (21)$$

Уравнение (18) после введения бегущей координаты примет вид

$$\eta_i \partial_{ss}^2 v_i + \partial_s (-V v_i + v_i^2 / 2 + v_{Ti}^2 \Psi_i) + v_i v_i = 0. \quad (22)$$

Далее подставляя (20) в уравнение (22), получаем эволюционное уравнение для ионов:

$$a_0 \partial_{zz}^2 N_i + \partial_z \Phi_e + (2a_1 N + a_2) \partial_z N_i + a_3 (N_i - N_i^2) = 0. \quad (23)$$

Здесь приняты обозначения для безразмерных ионосферных параметров:

$$a_0 = \eta V / \tau L v_i; \quad a_1 = 3V^2 / 2\tau v_{Ti}^2; \quad a_2 = (v_{Ti}^2 - V^2) / \tau v_{Ti}^2; \quad a_3 = v_i V L / \tau v_{Ti}^2, \quad (24)$$

и введена безразмерная переменная $z = s/L$, где L – масштаб структуры.

Из уравнения (23) следует, что плотность ионов $N_i(\Phi_e)$ определяется электростатическим потенциалом, который должен определяться динамикой электронов, т. е. является самосогласованным. Из соотношения (23) можно определить электрическое поле структуры:

$$E = -\partial_z \Phi_e = a_0 \partial_{zz}^2 N_i + (2a_1 N_i + a_2) \partial_z N_i + a_3 (N_i - N_i^2), \quad (25)$$

а также производную этого поля:

$$-\partial_{zz}^2 \Phi_e = a_0 \partial_{zzz}^3 N_i + (a_2 + 2a_1 N_i) \partial_{zz}^2 N_i + a_3 (1 - 2N) \partial_z N_i + 2a_1 (\partial_z N_i)^2. \quad (26)$$

5. Эволюционное уравнение и его решение

Подставляя соотношения (25) и (26) в уравнение (17) получим эволюционное уравнение для стационарной электростатической структуры

$$a_0 \partial_{zzz}^3 + k_1 \partial_{zz}^2 N_i + k_2 (\partial_z N)^2 + k_3 \partial_z N_i + k_4 (\partial_z N_i) (\partial_{zz}^2 N_i) + k_5 (\partial_z N)^3 = 0. \quad (27)$$

Коэффициенты в уравнении (27) при учете (22), запишем окончательно:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 + a_2 + (a_1 + a_2 + 1)N; & k_2 &= (1 + a_2 + a_1)N; \\ k_3 &= a_3(1 - N^2) - \alpha_0; & k_4 &= a_0(5 + 8N); & k_5 &= 2a_0. \end{aligned} \quad (28)$$

Эволюционное уравнение (27) исследовалось методом компьютерного моделирования. Для нелинейных стационарных электростатических структур сложная система дифференциальных уравнений в частных производных (1)–(3) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для столкновительной ионосферной плазмы или, при выполнении условия квазинейтральности, в обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка (27) которое можно исследовать численными методами.

Исследовались зависимости параметров структур (формы, скорости их движения, масштабов, частот осцилляций) от физических параметров плазмы – дрейфовой скорости электронов, электронных и ионных столкновений а также их гирочастот. В расчетах принимались физические параметры соответствующие E-области авроральной ионосферы. Ниже на рис. 1. – рис. 4. изображены результаты численного моделирования

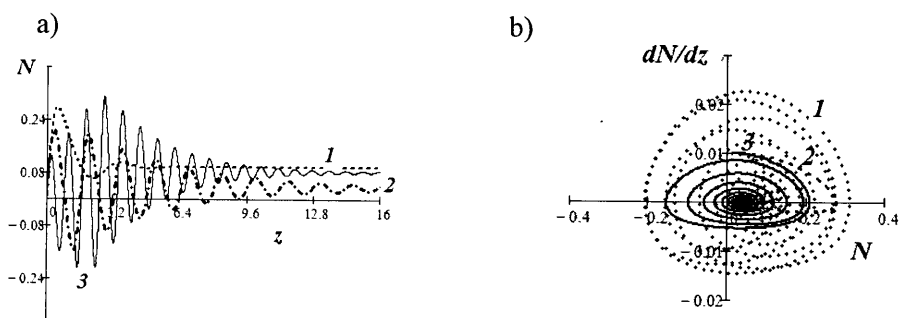


Рис. 1. Электростатические волновые структуры при различных скоростях движения структур а) профили структур; б) фазовые портреты нелинейных процессов. При значениях параметров $L=0.005$ м, $c_s = 353$ м/с, $R=0.02$; $v_0=360.2$; 1- $V/c_s=1.004$; 2- 1.018; 3- 1.075

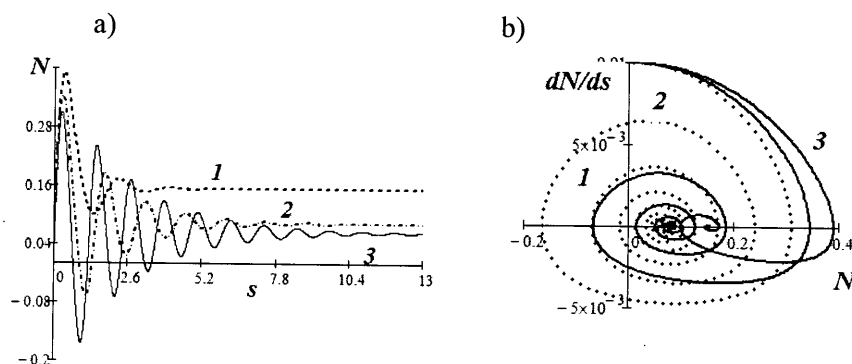


Рис. 2. Зависимость параметров нелинейной стационарной структуры от дрейфовой скорости электронов а) профили структур; б) фазовые портреты нелинейных процессов. при значениях параметров: $V=353$ м/с, $L=0.005$, $c_s = 353$ м/с, 1- $v_0/c_s = 1.041$, 2- 1.036, 3- 1.019

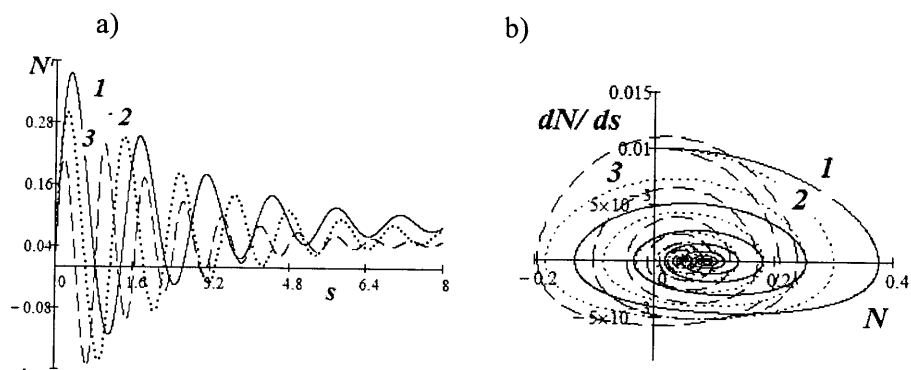


Рис. 3. Зависимость нелинейной стационарной структуры от параметров ионосферы а) профили структур; б) фазовые портреты нелинейных процессов при значениях параметров: $V=363$ м/с, $c_s = 353$ м/с, $v_0=363.2$, 1- $\eta=1.041$, 2- $\eta=2$, 3- $\eta=3$.

6. Основные выводы и обсуждение результатов

1. На основе МГД теории получено эволюционное уравнение (27) для ФБ неустойчивости при учете основных физических процессов нелинейной, инерции, ионной вязкости и диссипации.

2. Уравнение (27) исследовалось методом компьютерного моделирования, и были определены: параметрические области ионосферных параметров, при которых возможно формирование движущих стационарных структур, формы таких структур и скорости их движения.

3. Показано, что стационарные диссипативные структуры образуются при конкуренции процессов нелинейной инерции ионов и диссипации за счет динамической ионной вязкости.

4. Из результатов численного моделирования следует:

а) Скорость движения стационарных структур соответствует предельной линейной скорости, определяемой из соотношения (5) и приблизительно равна скорости звука в плазме (рис. 1) $V/C_s \approx 1$, при этом фазовые портреты процесса представляют собой замкнутые кривые при стационарных уровнях плотности порядка 4–8%.

б) Дрейфовая скорость электронов при которой формируются электростатические структуры типа “бесстолкновительных ударных волн” лежит в пределах $v_0 / c_s \approx 1.041–1.019$ (рис. 2), что также соответствует предельным линейным скоростям $v_{кр} \approx v_0 / (1 + R)$.

в) Расчет параметров стационарных структур показывает, что существует зависимость формы структур, скоростей их движения от коэффициента вязкости (рис. 3), причем стационарный уровень почти не изменяется.

Полученные результаты могут использоваться для интерпретации радарных доплеровских измерений в авральной ионосфере.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Farley, D. T.* The equatorial E-region and its plasma instabilities: a tutorial / D.T. Farley // *Ann. Geophys.*, 2009. Vol. 27. – P. 1509–1520.
2. *Lee, K.* High-frequency Hall current instability / K. Lee, C. F. Kennel, J. M. Kindel // *Radio Science*. – Vol, 1971 Vol. 6. – N. 2. – P. 209–213.
3. *Volosevich, A. V.* Coherent nonlinear interaction of waves in collisional ionospheric plasma / A. V. Volosevich, C.-V. Meister // *International Journal of Geomagnetism and Aeronomy*, 2002. – Vol. 3. – N 2. – P. 151–156;
4. *Volosevich, A. V.* Nonlinear wave structures in collisional plasma of auroral ionosphere / A. V. Volosevich, Y. I. Galperin // *Ann. Geophys.*, 1997. – Vol. 15. – P. 899–905,
5. *Nielsen, E.* VHF coherent radar signals from E-region of ionosphere and the relationship to electron drift velocity and ion acoustic velocity / E. Nielsen, del Pozo C.F., and P.J.S. Williams // *J. Geophys. Res.*, 2002. 107, A1, 10.1029/2001JA90111.
6. *Волосевич, А. В.* Обобщенная теория Фарлей-Бунемановской неустойчивости в столкновительной плазме / А. В. Волосевич, Ю. Ф. Зарницкий // *Вісник МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Природознавча наука (математика, фізика, біологія)*. – № 1. – 2013. – С. 24–35.

7. **Зарницкий, Ю. Ф.** Экспериментальная диагностика неоднородностей в авроральной ионосфере / Ю. Ф. Зарницкий, А. В. Волосевич // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – № 2(42). – 2013. – С. 70–84.
8. **Баренблатт, Г. И.** Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг / Г. И. Баренблатт ; пер. с англ. – Долгопрудный : Издательский Дом “Интеллект”, 2009. С. 1–216 . ISBN 978-5-91559-017-4

Поступила в редакцию 11.05.2016 г.

Контакты: avolos@rambler.ru (Волосевич Александра Владимировна)

Volosevich, A. V. NONLINEAR ELECTROSTATIC WAVE STRUCTURES IN COLLISIONAL IONOSPHERIC PLASMA.

The theoretical model of the formation of nonlinear electrostatic wave structures is considered on the basis of the magneto-hydrodynamic system of the equations (MHD) of moving charged particles in ionospheric plasma. The evolutionary equation for nonlinear stationary structures moving orthogonally to the magnetic field and electric field is received.

For the solutions corresponding to the stationary wave structures the parametric sphere of the space where the formation of nonlinear structures of the nonlinear collision shock wave type is investigated. The threshold values of movement speeds, of electron drift speeds and the scales of these structures are defined.

Key words: nonlinear electrostatic structures, auroral irregularities, ionospheric E-layer, stationary shock waves.

УДК 539.144

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРЯДЕР В СУПЕРГАУССОВОЙ МОДЕЛИ И Λp -РАССЕЯНИЕ

С. М. Чернов

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Построен центральный, не зависящий от спинов, ΛN – потенциал, адекватно описывающий энергии связи большинства гиперядер в двухчастичной модели и сечение Λp – рассеяния при низких энергиях. В качестве нуклонной плотности в гиперядрах использовалась супер-гауссовая модель.

Ключевые слова: гиперядра, энергия связи, размеры ядер, супер-гауссовое распределение нуклонов, длина рассеяния и эффективный радиус.

Введение

В настоящее время имеется достаточно обширный экспериментальный материал, позволяющий проводить оценки параметров не только ΛN – потенциалов, традиционной проблемы ядерной физики, но и построения потенциалов взаимодействия между другими барионами. Особый прогресс достигнут в области исследования ΛN – и $\Lambda \Lambda$ – сил. Данное обстоятельство, прежде всего, связано с развитием спектроскопии Λ – гиперядер. На сегодняшний день обнаружено около 30 таких гиперядер, для которых удалось оценить энергии как основных, так и возбужденных состояний с точностью не хуже 0,1 МэВ [1].

Кроме этого, исследования гиперядерных систем открывают возможность для рассмотрения вопроса о размерах нуклонного остова в гиперядрах, включая ядра, для которых отсутствуют данные для свободного состояния. Такой анализ, в комбинации с электромагнитными экспериментами, позволяет также оценивать разницу в распределении протонов и нейтронов в ядрах.

Разумеется, анализ связанных состояний гиперонов и нуклонов должен быть согласован с имеющимися предварительными результатами низкоэнергетического Λp – рассеяния [2]. Одним из важнейших результатов этих экспериментов явилось доказательство слабой спиновой зависимости ΛN – сил, которой в дальнейшем мы будем вообще пренебрегать.

Описанный круг проблем и является предметом обсуждения настоящей работы. В рамках двухтельной модели проводятся численные расчеты энергий связи гиперядер, в которых плотность распределения нуклонов имеет супергауссовый характер со среднеквадратичными радиусами, определенными из опытов по электронному рассеянию. Для построенного ΛN – потенциала в приближении эффективного радиуса оценены параметры низкоэнергетического рассеяния.

Основная часть

1. Описание модели гиперядра и основные предположения

Для дальнейшего предполагается, что структура гиперядер может быть описана в рамках двухчастичной модели: Λ – гиперон + недеформированный нуклонный остов. При этом будем рассматривать нуклонный остов как сплошную среду, в которой ядерная материя распределена в пространстве с плотностью $\rho(r)$, где $\rho(r)$ – усредненная по углам плотность распределения нуклонов остова с массовым числом A . Однако следует иметь в виду, что такую модель нельзя признать удовлетворительной для некоторых легких гиперядер (${}^3_{\Lambda}H, {}^7_{\Lambda}Li, {}^9_{\Lambda}Be$), рассмотрение которых требует микроскопический подход или соображения кластерной модели. Такое anomальное поведение в распределении протонов в ядре ${}^6_3Li (1s^2 1p^1)$ качественно объясняется тем, что последний протон только начинает формировать p -оболочку, удаляясь от центра ядра. Поэтому энергия отделения протона [5] $B_p = 4,6$ МэВ почти вдвое меньше средней удельной энергии связи ядер ($\sim 8 \text{ МэВ/нуклон}$). Далее, ядро 9_4Be имеет, вероятно, не оболочечную, а кластерную структуру ($\alpha - n - \alpha$) с энергией отделения нейтрона [5] $B_n = 1,67$ МэВ.

В рамках этих предположений нахождение энергий связи гиперядер сводится к решению уравнения Шредингера для Λ – частицы, движущейся в поле ядра-остова

$$V_{\Lambda O}(r) = \int V_{\Lambda N}(|\vec{r} - \vec{r}_1|) \rho(r_1) d^3 r_1. \quad (1)$$

Учитывая малость радиуса действия ΛN – сил ($0,7 \div 0,9 \text{ Фм}$) по сравнению с размерами остова, а также центральный характер потенциала $V_{\Lambda N}(r)$ выражение (1) можно привести к виду [3]

$$V_{\Lambda O}(r) \approx -\Omega_{\Lambda N} \left(1 + \frac{R_{\Lambda N}^2}{6} \nabla^2 \right) \rho(r). \quad (2)$$

Здесь объемный интеграл $\Omega_{\Lambda N}$ и среднеквадратичный радиус $R_{\Lambda N} = \sqrt{\langle R_{\Lambda N}^2 \rangle}$ являются интегральными характеристиками ΛN – потенциала, не зависят от структуры ядра-остова и определяются соотношениями:

$$\Omega_{\Lambda N} = - \int V_{\Lambda N}(r) d^3 r, \quad \langle R_{\Lambda N}^2 \rangle = - \frac{1}{\Omega_{\Lambda N}} \int V_{\Lambda N}(r) r^2 d^3 r. \quad (3)$$

Таким образом, проблема построения ΛN – потенциала сводится к определению двух параметров – $\Omega_{\Lambda N}$ и $R_{\Lambda N}$, которые можно найти по экспериментальным значениям энергии связи пары “опорных” гиперядер.

В качестве плотности распределения нуклонов ядра-остова будем использовать модельную функцию вида

$$\rho(r) = \rho_0 \exp \left[- \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} \right], \quad (4)$$

которую будем называть *супергауссовым распределением*. При этом примем значения n , равные

$$n = \begin{cases} 1, & s\text{-оболочки } (2 \leq A \leq 4) \\ 2, & p\text{-оболочки } (4 < A \leq 16) . \\ 3, & \text{тяжелые ядра } (A > 16) \end{cases} \quad (5)$$

Выбор функции вида (4)–(5) либо совпадает с общепринятым распределением ($n = 1$), либо близок к известным типам нуклонных плотностей в виде осцилляторной или фермиевской зависимости ($n = 2, 3$). При этом важно отметить, что среднеквадратичный радиус должен совпадать с соответствующим экспериментальным параметром, определяемым, например, из опытов по электронному рассеянию [4, 5]:

Учитывая значение интеграла

$$\int_0^{\infty} x^k \exp \left[- \left(\frac{x}{a} \right)^{2n} \right] dx = \frac{a^{k+1}}{2n} \Gamma \left(\frac{k+1}{2n} \right),$$

можно найти связь параметра a в условии (4) со среднеквадратичным радиусом ядра

$$\langle R^2 \rangle = \frac{4\pi\rho_0 \int_0^{\infty} r^4 \exp \left[- \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} \right] dr}{4\pi\rho_0 \int_0^{\infty} r^2 \exp \left[- \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} \right] dr} = a^2 \frac{\Gamma(5/2n)}{\Gamma(3/2n)}. \quad (6)$$

Используя свойства Гамма-функции [6], находим искомую связь

$$\begin{cases} n=1 & a = 0.8165 \cdot \langle R^2 \rangle^{1/2} \\ n=2 & a = 1.1627 \cdot \langle R^2 \rangle^{1/2} . \\ n=3 & a = 1.2531 \cdot \langle R^2 \rangle^{1/2} \end{cases} \quad (7)$$

Наконец, параметр ρ_0 найдем из условия нормировки

$$\int \rho_0(r) dV = 4\pi \int_0^{\infty} \rho_0(r) r^2 dr = 1, \quad (8)$$

из которого определяем $\rho_0 = n [2\pi a^3 \Gamma(3/2n)]^{-1}$.

Учитывая, что в сферических координатах $\Delta\rho(r) = \frac{d^2\rho(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\rho(r)}{dr}$, для модели $\rho(r)$ в виде (4) получим

$$\Delta\rho(r) = \frac{2nA}{a^{2n}} r^{2n-2} \rho_0 \left(2n \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} - (2n+1) \right) \exp \left[- \left(\frac{r}{a} \right)^{2n} \right]. \quad (9)$$

Тогда из условия (2) для потенциала взаимодействия Λ – остов окончательно получаем

$$V_{\Lambda O}(r) = -\Omega_{\Lambda N} \frac{nA}{2\pi a^3 \Gamma(3/2n)} \left\{ 1 + \frac{nR_{\Lambda N}^2}{3r^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \left[2n \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} - (2n+1) \right] \right\} \exp \left[-\left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \right]. \quad (10)$$

Таким образом, дальнейший анализ сводится к описанию динамики движения частицы с приведенной массой μ на основе уравнения Шредингера ($l=0$)

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} = \frac{2\mu}{\hbar^2} (B_{\Lambda} + V_{\Lambda O}(r)) f(r). \quad (11)$$

2. Численные расчеты энергий связи гиперядер ${}^5_{\Lambda}\text{He}$ и ${}^{13}_{\Lambda}\text{C}$

и оценка параметров ΛN -потенциала в супер-гауссовой модели

Для численного решения поставленной задачи будем использовать методику решения задачи на собственные значения дифференциального уравнения (11) с граничными условиями $f(0)=0$ и $f(c)=0$, где $c \rightarrow \infty$. В нашем случае для быстро исчезающего потенциала (10) достаточно ограничиться значением $c = 10$. Кроме того, в силу линейности уравнения (10), решения определены лишь с точностью до произвольной постоянной, так что можно положить, например, $f'(0) = 1$.

Численные расчеты будем проводить методом пристрелки по параметру $\Omega \equiv \Omega_{\Lambda N}$ при различных значениях $R \equiv R_{\Lambda N}$ из интервала $[0, 1]$. Выбор этого диапазона согласован с предсказаниями мезонной теории, так как для юкавского ΛN – потенциала среднеквадратичный радиус сил в механизме 2π – или K -обмена имеет порядок $R_{2\pi} = 1,73 \text{ Фм}$ и $R_K = 0,49 \text{ Фм}$. Используя встроенную функцию *sbval*, можно построить программу расчетов по поиску величины Ω для различных значений R , которые обеспечивают экспериментальные значения энергии связи гиперядер ${}^5_{\Lambda}\text{He}$ и ${}^{13}_{\Lambda}\text{C}$. Соответствующая программа для гиперядра приведена в таблице 1.

Таблица 1 – Программа расчета $\Omega_{\Lambda N}$ гиперядра ${}^5_{\Lambda}\text{He}$ для $R=0.9 \text{ Фм}$.

$B_{\Lambda} := 3.12 \quad \mu := 858.666 \quad \hbar := 197.329 \quad n := 1 \quad a := 1.3679 \quad \Lambda_{\Lambda N} := 4$ $U(r, \Omega, R) := -\Omega \cdot \frac{A \cdot n}{2\pi \cdot a^3 \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2n}\right)} \left[1 + \frac{n}{3} \cdot \frac{R^2}{a^2} \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2} \cdot \left[2n \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} - (2n+1) \right] \right] \cdot \exp \left[-\left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \right]$ $\Psi(r, \Omega, R) := \frac{2\mu}{\hbar^2} \cdot (B_{\Lambda} + U(r, \Omega, R)) \quad b := 0 \quad \Lambda_{\Lambda} := 10 \quad \Omega_0 := 200 \quad R_0 := 0.9$ $D(r, f) := \begin{pmatrix} f_1 \\ V(r, f_2, R) \cdot f_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{load}(b, \Omega) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \Omega_0 \end{pmatrix} \quad \text{score}(c, f) := f_0$
--

Окончание табл. 1

```

Λ := sbval (Ω , b , c , D , load , score )    Λ = ( 240.929 )
u := rkfixed (load ( 0 , Ω ) , 0 , 10 , 100 , D)
    
```

Поиск решения дифференциального уравнения находился с помощью встроенной программы Рунге-Куты с фиксированным шагом. Полученная зависимость потенциала взаимодействия ($V_{\Lambda 0}(r)$) и волновой функции представлена на рисунке 1.

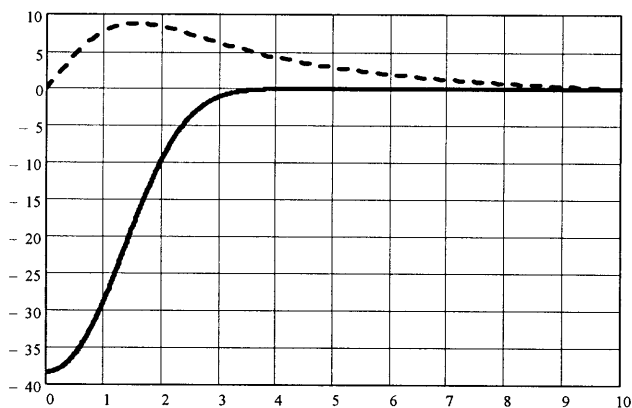


Рисунок 1 – Потенциал $V_{\Lambda 0}(r)$ и волновая функция $10 \cdot f(r)$ гиперядра $^5_{\Lambda}He$

Аналогичные вычисления были проведены для гиперядра $^{13}_{\Lambda}C$. В результате этих численных расчетов была получена зависимость $\Omega_{\Lambda N}(R_{\Lambda N})$ для обоих указанных гиперядер, которая представлена на рисунке 2.

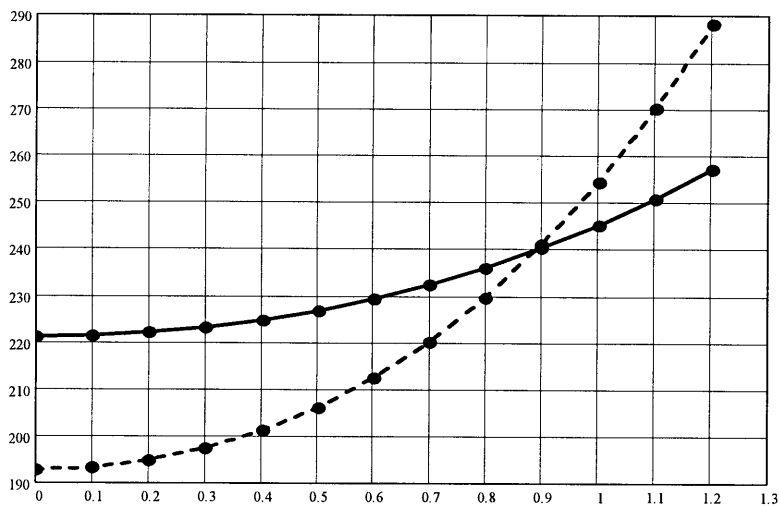


Рисунок 2 – Зависимость $\Omega_{\Lambda N}(MeB \cdot \Phi_M^3)$ от $R_{\Lambda N}(\Phi_M)$, обеспечивающая энергии связи гиперядер $^5_{\Lambda}He$ (пунктирная линия) и $^{13}_{\Lambda}C$ (сплошная линия)

Из рисунка видно, что совместный анализ энергий связи гиперядер ${}^5_{\Lambda}\text{He}$ и ${}^{13}_{\Lambda}\text{C}$ приводит к следующим значениям объемного интеграла и среднеквадратичного радиуса ΛN – потенциала:

$$\Omega_{\Lambda N} = 240,5 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3; \quad R_{\Lambda N} = 0,9 \text{ Фм}. \quad (12)$$

3. Энергии связи некоторых гиперядер в супер-гауссовой модели

Для найденных параметров ΛN – потенциала, можно рассчитать энергии связи остальных гиперядер. Для этой цели воспользуемся программой из таблицы 1, в которой поисковым параметром является B_{Λ} . Результаты проведенных расчетов для некоторых гиперядер приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты численных расчетов энергий связи гиперядер для супергауссовой модели (BS_{Λ}) (A – массовое число нуклонного остова)

A	4	6	7	8	9	10	11
$B_{\Lambda}^{\text{эксп.}}, \text{МэВ}$	3,12	5,58	6,80	8,50	9,11	10,24	11,37
$BS_{\Lambda}, \text{МэВ}$	3,12	1,83	3,77	6,21	6,06	8,72	10,90
A	12	13	14	39	88	138	207
$B_{\Lambda}^{\text{эксп.}}, \text{МэВ}$	11,69	12,17	13,59	18,70	22,00	23,80	26,50
$BS_{\Lambda}, \text{МэВ}$	11,69	13,73	13,71	20,97	30,06	33,44	35,71

Как и ожидалось, существенное расхождение наблюдается при $A = 6, 7, 9$ из-за некорректного выбора двухчастичной модели для соответствующих гиперядер.

4. Оценка размеров ядра-остова по энергиям связи гиперядер

Программа решения задач на поиск собственных значений (таблица 1) позволяет также решить вопрос об оценке размеров нуклонного остова по заданным значениям энергий связи гиперядер B_{Λ} и характеристикам ΛN – потенциала. В этом случае поисковым параметром является параметр a функции (4), который на основании условий (7) позволяет определить среднеквадратичный радиус ядра-остова в супергауссовой модели – RG . Для оценки качества этих результатов можно сравнить их с соответствующими размерами ядер, полученными в опытах по электронному рассеянию RE [4, 5] (таблица 3).

Из таблицы 3 видно, что оценки размеров ядер по энергиям связи гиперядер достаточно близки к результатам электронных экспериментов.

Таблица 3 – Среднеквадратичные радиусы ядер, полученные в опытах по электронному рассеянию (RE) и энергий связи гиперядер (RG)

A	4	6	7	8	10	11
$RE, \text{Фм}$	1,675	2,543	2,417	2,327	2,428	2,406
$RG, \text{Фм}$	1,672	1,967	2,083	2,139	2,321	2,377
A	12	13	14	39	88	207
$RE, \text{Фм}$	2,470	2,461	2,558	3,459	4,245	5,494
$RG, \text{Фм}$	2,472	2,549	2,565	3,584	3,745	5,311

5. Низкоэнергетическое Λp -рассеяние

Исследование Λp -рассеяния является достаточно сложной экспериментальной задачей по следующим причинам. Во-первых, время жизни Λ -частицы ($\tau_\Lambda = 2,6 \cdot 10^{-10} \text{ с}$) слишком мало, чтобы получить пучок Λ -частиц на ускорителе. Задача усложняется также отсутствием электрического заряда у Λ -гиперона. Во-вторых, образование Λ -частицы – достаточно редкое событие, завершающее длинную цепочку реакций (например, $K^- + p \rightarrow \Sigma^0 + \pi^0 \rightarrow \Lambda + \gamma + \pi^0$). В третьих, во всех экспериментах пучки и мишени были неполяризованы. Все это создает серьезные затруднения в интерпретации полученных результатов, приводящие к разбросу параметров рассеяния в достаточно широких пределах.

Как известно, в низкоэнергетической области сечение рассеяния барионов описывается (в пренебрежении спиновой зависимостью) двумя параметрами – длиной рассеяния a_0 и эффективным радиусом r_0 . В случае Λp -рассеяния в работах [8, 9] рекомендуется использовать, как наиболее вероятные, значения:

$$a_0 = a_s \approx a_t \approx -2,0 \text{ Фм}; \quad r_0 = r_{0s} \approx r_{0t} \approx 3,8 \text{ Фм}. \quad (13)$$

Так как при низких энергиях форма ΛN -потенциала не является принципиальной, то в качестве ΛN -сил выберем ΛN -потенциал, например, экспоненциальной формы

$$U(r) = -U_0 \exp\left(-\frac{r}{R}\right), \quad (14)$$

где $U_0 = 545,657 \text{ МэВ}$, $R = 0,2598 \text{ Фм}$ определяются по найденным ранее параметрам $\Omega_{\Lambda N}$ и $R_{\Lambda N}$ (12).

В работе [7] предложена процедура вычисления a_0 и r_0 в теории фазовых функций, которая сводится к решению системы дифференциальных уравнений для вспомогательных функций $\alpha(r)$ и $\beta(r)$

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dr} = V(r)(r \cos \alpha - \sin \alpha)^2; \\ \frac{d\beta}{dr} = -2\beta V(r)(r \cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + r \sin \alpha) - \\ - \frac{r^2}{3} V(r)(r^2 \cos^2 \alpha - 2r \sin 2\alpha + 3 \sin^2 \alpha). \end{cases} \quad (15)$$

с начальными условиями: $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$. Здесь введено обозначение ($\mu_{\Lambda p} = 509,65 \text{ МэВ}$)

$$V(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} U(r). \quad (16)$$

При этом длина рассеяния a_0 и эффективный радиус r_0 выражаются через $\alpha_0 = \alpha(\infty)$ и $\beta_0 = \beta(\infty)$ по формулам:

$$a_0 = \operatorname{tg} \alpha_0; \quad r_0 = \frac{2\beta_0}{\sin^2 \alpha_0}, \quad (17)$$

или обратное преобразование:

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} a_0; \quad \beta_0 = \frac{1}{2} \frac{r_0 a_0^2}{(1 + a_0^2)}. \quad (18)$$

В результате численного решения системы уравнений (15) для искоемых параметров окончательно получаем:

$$a = -1,40 \text{ Фм}; \quad r_0 = 1,31 \text{ Фм}, \quad (19)$$

что можно считать вполне согласованными с опытными данными (13). Заметим, что отрицательные значения длины рассеяния означает невозможность существования связанного состояния ΛN – системы.

Заключение

Центральной задачей физики гиперядер является построение и оценка параметров ΛN – потенциала, способного адекватно описывать экспериментальные данные по энергиям связи гиперядер и Λp – рассеянию. В настоящей работе показано, что эта проблема в принципе может быть решена с помощью центрального, спиново-независимого ΛN – потенциала, имеющего два подгоночных параметра, и двухчастичной модели строения большинства гиперядер.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ланской, Д. Е. Физика гиперядер / Д. Е. Ланской. – Web-версия учебного пособия, 2002.
2. Хрылин, Б. А. Гиперядра и ΛN -взаимодействие / Б. А. Хрылин // Успехи физических наук. – 1971. – 105 т, вып. 2. – С. 185–205.

3. Колесников, Н. Н. Двойные гиперядра и взаимодействие / Н. Н. Колесников, С. М. Чернов, В. И. Тарасов // Известия ВУЗов: Физика. – 1975. – № 10. – С. 33–38.
4. Таблица ядерных данных / Электронный ресурс / Nuclear Data Center : Japan Atomic Agency, 2014.
5. Варламов, В. В. Физика ядра и банки ядерных данных / В. В. Варламов, Н. Г. Гончарова, Б. С. Ишханов. – Москва : НИИЯФ МГУ, 2010. – 245 с.
6. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – Москва : Наука, 1977. – 344 с.
7. Бабилов, В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике / В. В. Бабилов. – М. : Наука, 1968. – 224 с.

Поступила в редакцию 18.11.2015 г.

Контакты: +375 29 373 79 62 (Чернов Станислав Михайлович)

Chernov S.M. ESTIMATION OF THE PARAMETERS OF HYPERNUCLEI IN SUPER-GAUSSIAN MODELS AND Λp – SCATTERING.

It has been built a central, spin independence ΛN – potential adequately describing the binding energy of the most hypernuclei in the two-body model and Λp – scattering section at the low energies. The super-Gaussian model was used as the nucleon density in the hypernuclei.

Key words: hypernuclei, binding energy, sizes nuclei, super-gaussian distribution of the nucleons, scattering length, effective radius.

УДК 539.3

ДВУХФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ЛИНЗОВИДНОГО ДВОЙНИКА

Е. В. ШМАТОК,

аспирант

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

О. М. ОСТРИКОВ,

кандидат физико-математических наук, доцент

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

Разработана дислокационная модель единичного нетонкого двойника линзовидной формы, находящегося вдали от поверхности кристалла. В модели использовано допущение непрерывного распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах. На основании модели определена конфигурация полей смещений и напряжений у линзовидного двойника.

Ключевые слова: линзовидный двойник, дислокационная модель

Введение

Процесс деформирования мартенситной фазы монокристалла Ni_2MnGa сопровождается образованием на поверхности следов поворота кристаллической решетки, обусловленного механическим двойникованием [1]. Некогерентные границы двойников создают поле напряжений, которое оказывает влияние на различные физические процессы [2]. Для прогнозирования данных процессов важное значение приобретает расчет напряженно-деформированного состояния, обусловленного некогерентными двойниками различной формы [2-5].

Целью данной работы стало моделирование напряженно-деформированного состояния монокристалла Ni_2MnGa , созданного единичным линзовидным двойником, находящимся вдали от поверхности кристалла.

Модель. При использовании приближения непрерывного распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах [2, 6], смещения u_i и напряжения σ_{ij} для обособленного единичного двойника рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} u_i(x, y) &= u_i^{(1)}(x, y) + u_i^{(2)}(x, y), \\ \sigma_{ij}(x, y) &= \sigma_{ij}^{(1)}(x, y) + \sigma_{ij}^{(2)}(x, y), \end{aligned}$$

где i, j принимают значения x, y или z ; $u_i^{(1)}(x, y)$, $u_i^{(2)}(x, y)$ и $\sigma_{ij}^{(1)}(x, y)$, $\sigma_{ij}^{(2)}(x, y)$ – соответственно смещения и напряжения, обусловленные первой и второй границей двойника, которые в соответствии с [2, 6], определяются по формулам:

$$u_i^{(1)}(x, y) = \int_{-L}^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) u_i^{(1,0)}(x, y) d\xi,$$

© Шматок Е. В., 2016

© Остриков О. М., 2016

$$u_i^{(2)}(x,y) = \int_{-L}^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) u_i^{(2,0)}(x,y) d\xi,$$

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x,y) = \int_{-L}^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{ij}^{(1,0)}(x,y) d\xi,$$

$$\sigma_{ij}^{(2)}(x,y) = \int_{-L}^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{ij}^{(2,0)}(x,y) d\xi.$$

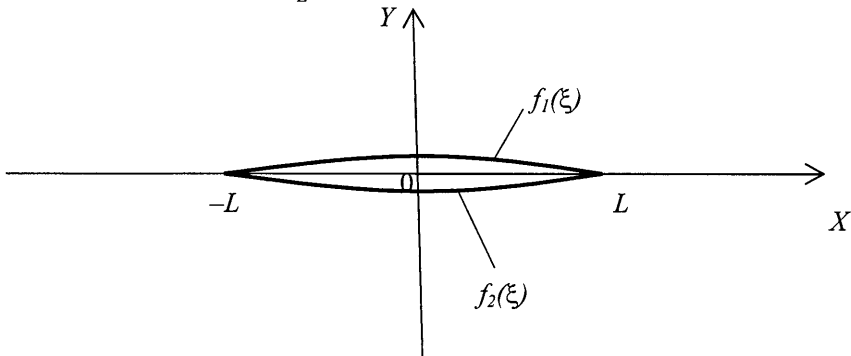


Рис. 1. Схема единичного линзовидного двойника, находящегося вдали от поверхности кристалла

Здесь $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ – функции, с помощью которых задается форма двойниковых границ (рис. 1); $\rho_1(\xi)$ и $\rho_2(\xi)$ – плотности двойникующих дислокаций на двойниковых границах; ξ – параметр интегрирования; $u_{ij}^{(1,0)}(x,y)$, $u_{ij}^{(2,0)}(x,y)$, $\sigma_{ij}^{(1,0)}(x,y)$ и $\sigma_{ij}^{(2,0)}(x,y)$ – смещения и напряжения, обусловленные единичной двойникующей дислокацией, находящейся на первой, или второй границе двойника, и определяемые по формулам [2]:

$$u_x^{(1,0)}(x,y,\xi) = \frac{b_{кр}}{2\pi} \left[\arctg \frac{y - f_1(\xi)}{x - \xi} + \frac{(x - \xi)(y - f_1(\xi))}{2(1 - \nu)((x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2)} \right],$$

$$u_y^{(1,0)}(x,y,\xi) = -\frac{b_{кр}}{2\pi} \left[\frac{1 - 2\nu}{4(1 - \nu)} \ln((x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2) + \frac{(x - \xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2}{4(1 - \nu)((x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2)} \right],$$

$$u_z^{(1,0)}(x, y, \xi) = \frac{b_B}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - f_1(\xi)}{x - \xi};$$

$$\sigma_{xx}^{(1,0)}(x, y, \xi) =$$

$$= -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_1(\xi) - nD)[3(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi) - nD)^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi) - nD)^2]^2},$$

$$\sigma_{xy}^{(1,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x - \xi)[(x - \xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{(1,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_1(\xi))[(x - \xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2]^2},$$

$$\sigma_{zz}^{(1,0)}(x, y, \xi) = -\frac{\mu b_{\text{кр}} \nu}{2\pi(1-\nu)} \frac{y - f_1(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2},$$

$$\sigma_{zx}^{(1,0)}(x, y, \xi) = -\frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{y - f_1(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2},$$

$$\sigma_{zy}^{(1,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_B}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2};$$

$$u_x^{(2,0)}(x, y, \xi) = \frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y - f_2(\xi)}{x - \xi} + \frac{(x - \xi)(y - f_2(\xi))}{2(1-\nu)[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]} \right]$$

$$u_y^{(2,0)}(x, y, \xi) = -\frac{b_{\text{кр}}}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \ln((x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{(x - \xi)^2 - (y - f_2(\xi))^2}{4(1-\nu)[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]} \right],$$

$$u_z^{(2,0)}(x, y, \xi) = \frac{b_B}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - f_2(\xi)}{x - \xi};$$

$$\sigma_{xx}^{(2,0)}(x, y, \xi) = -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_2(\xi))[3(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]^2}$$

$$\sigma_{xy}^{(2,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x - \xi)[(x - \xi)^2 - (y - f_2(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{(2,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_{кр}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_2(\xi))[(x - \xi)^2 - (y - f_2(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]^2},$$

$$\sigma_{zz}^{(2,0)}(x, y, \xi) = -\frac{\mu b_{кр} \nu}{2\pi(1-\nu)} \frac{y - f_2(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2},$$

$$\sigma_{zx}^{(2,0)}(x, y, \xi) = -\frac{\mu b_{в}}{2\pi} \frac{y - f_2(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2},$$

$$\sigma_{zy}^{(2,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_{в}}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2},$$

где μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; $b_{кр}$ и $b_{в}$ – модули векторов, соответственно, краевой и винтовой составляющих вектора Бюргерса частичной двойнивающей дислокации.

Результаты расчетов и их обсуждение

На рис. 2 и 3 представлены расчетные результаты. Исходными данными для сплава Ni_2MnGa принимались следующие значения: $L = 60$ мкм; $H = 20$ мкм; $D = 45$ мкм; $\rho_1(\xi) = \rho_2(\xi) = \text{const} = \rho = 10^6$; $\nu = 0,3$; $\mu = 19,231$ ГПа; $b_{кр} = 2,91 \text{ \AA}$; $b_{в} = 2,74 \text{ \AA}$ [3–5].

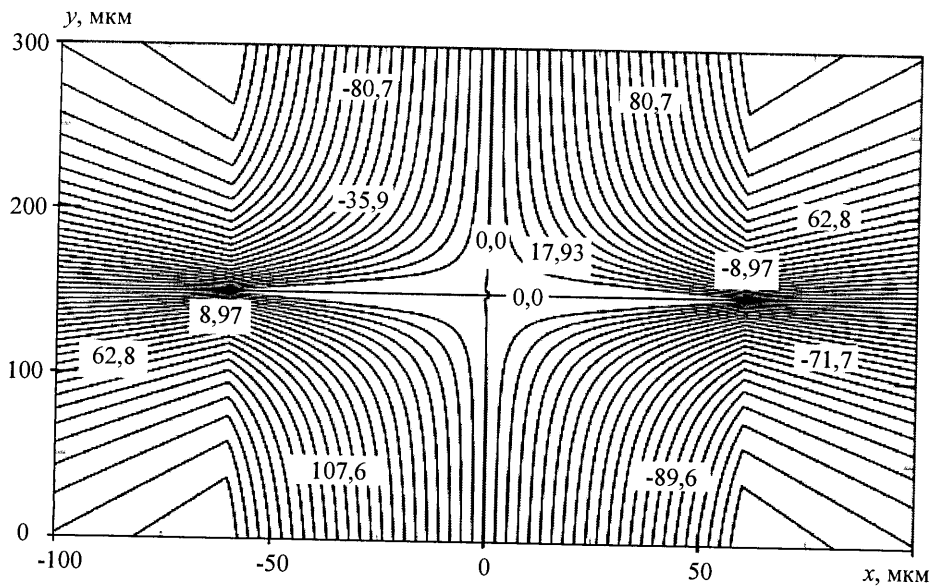


Рис. 2. Поля смещений u_i в монокристалле Ni_2MnGa , созданные единичным линзовидным двойником (нм): а) u_x ; б) u_y ; в) u_z

Рис. 2, а

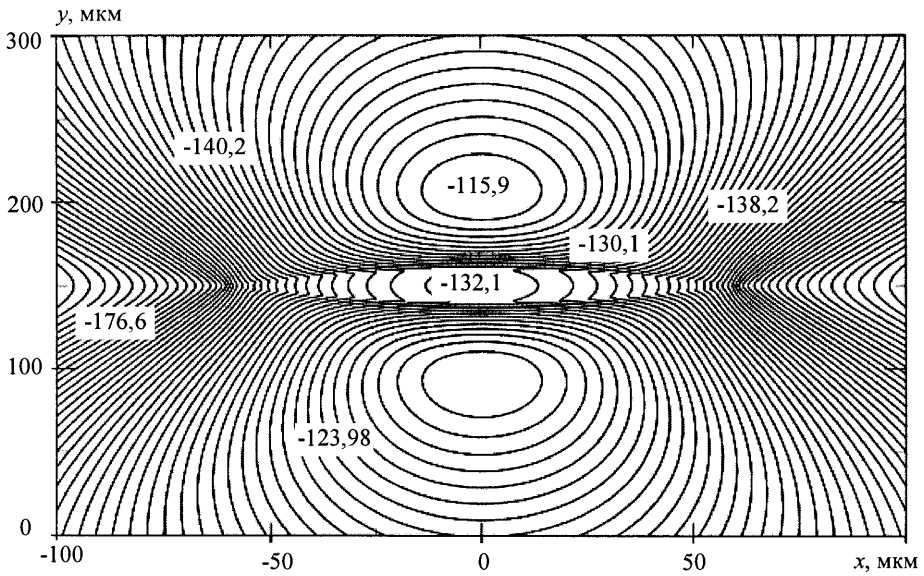


Рис. 2, б

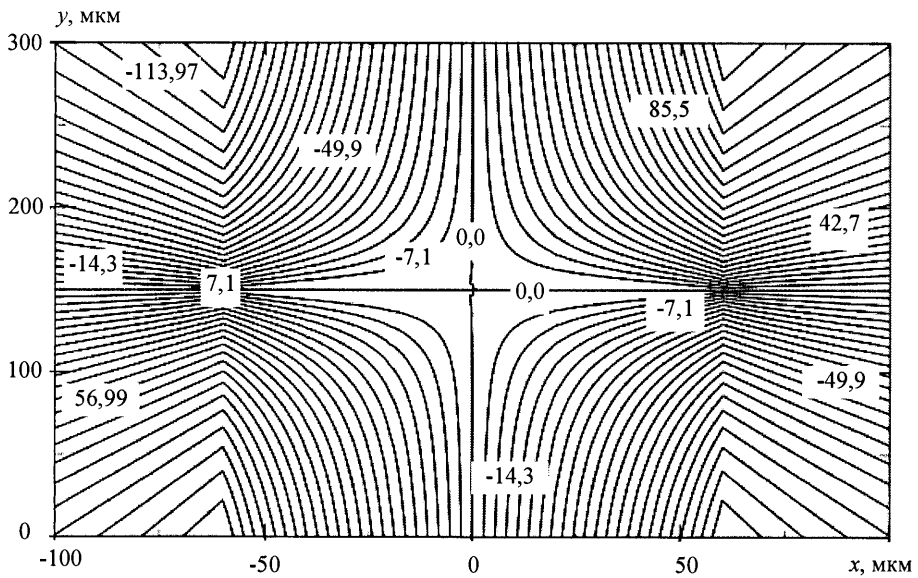


Рис. 2, в

Результаты расчета смещений u_i представлены на рис. 2. Картина линий равных величин для смещений u_x и u_z не имеет значительных различий (рис. 2, а и в). Разница заключается в численных значениях смещений в заданных точках. Также смещения u_x и u_z симметричны относительно начала системы координат.

Изометрические линии поля смещения u_y (рис. 2, б) существенно отличаются по форме от результатов расчета полей смещений u_x и u_z . Численные значения с наибольшим смещением имеют участки в области вершин двойников.

Результат расчета нормальной компоненты тензора напряжений σ_{xx} представлен на рис. 3, а. Здесь напряжения главным образом локализованы у границ и вершин двойника, где и наблюдаются их максимальные модульные значения. Данная особенность обусловлена конфигурацией поля напряжений нормальной компоненты у единичной двойникообразующей дислокации. Причем напряжения у границ двойника выше, чем у вершин. Общий уровень значений напряжений в материале вокруг двойника является симметричным по модульным значениям относительно координатных осей и возрастает по мере продвижения к центру декартовой системы координат.

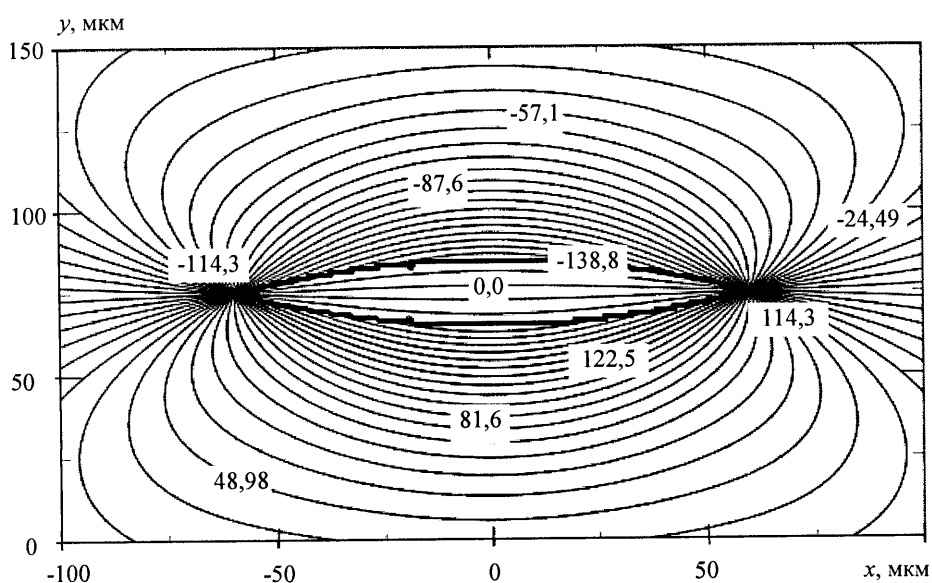


Рис. 3. Результаты расчетов полей напряжений σ_{ij} , созданных единичным линзовидным двойником в Ni_2MnGa (МПа): а) σ_{xx} ; б) σ_{xy} ; в) σ_{xz} ; г) σ_{yy} ; д) σ_{yz} ; е) σ_{zz}

Рис. 3, а

На рис. 3, б показан результат расчета сдвиговой компоненты тензора напряжений. Видно, что общий фронт напряжений изменяется в сторону возрастания, по мере продвижения в положительном направлении OX .

Сдвиговая компонента σ_{xz} графически представлена на рис. 3, в. Здесь наблюдается схожесть конфигурации линий равных величин напряжений нормальной компоненте тензора напряжений σ_{xx} . Различие заключается в модульных численных значениях напряжений в ключевых и периферийных точках. В данном случае эти значения ниже нормальных напряжений в 2-3 раза. График сдвиговой компоненты σ_{xz} также симметричен относительно OX и имеет нулевые значения напряжений в теле двойника.

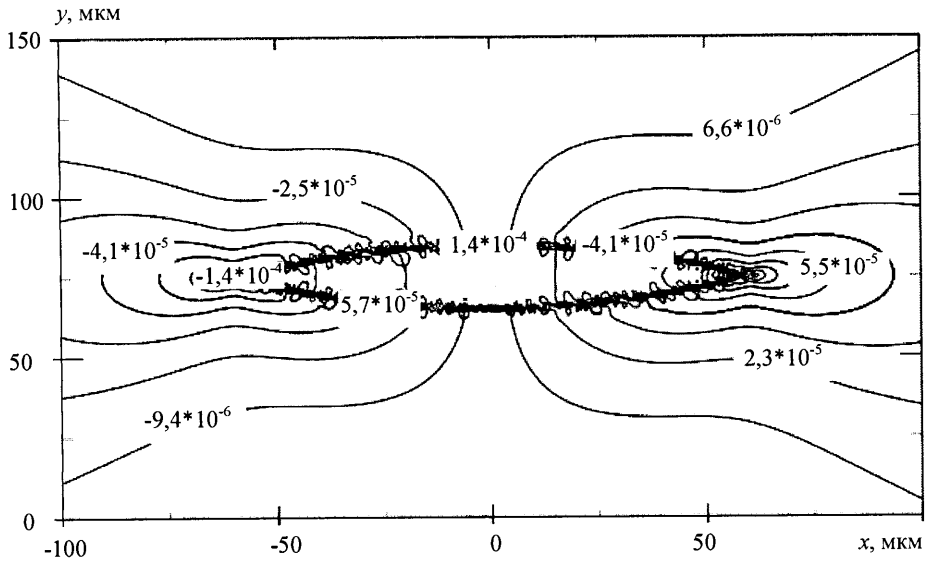


Рис. 3, б

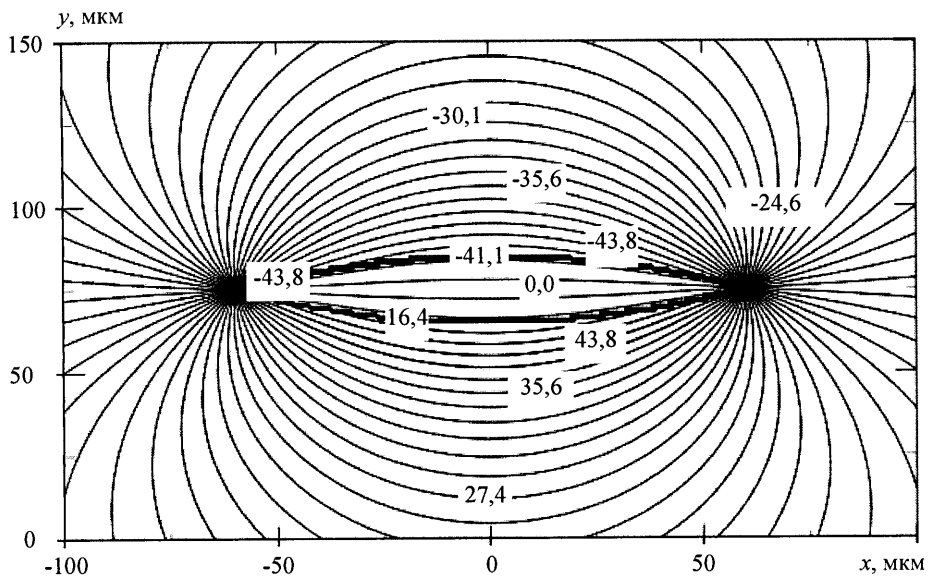


Рис. 3, в

Рис. 3, г представляет собой результат расчета нормальной компоненты σ_{yy} тензора напряжений. Картина напряжений данной компоненты имеет сложную конфигурацию обусловленную наличием четырех участков пиковых значений в окрестных областях у двойника. Экстремумы с меньшими численными значениями напряжений симметричны относительно оси OY . Два других пика имеют симметрию относительно оси OX . Численные значения напряжений в этих пиках противоположны по знаку и незначительно отличаются по модулю.

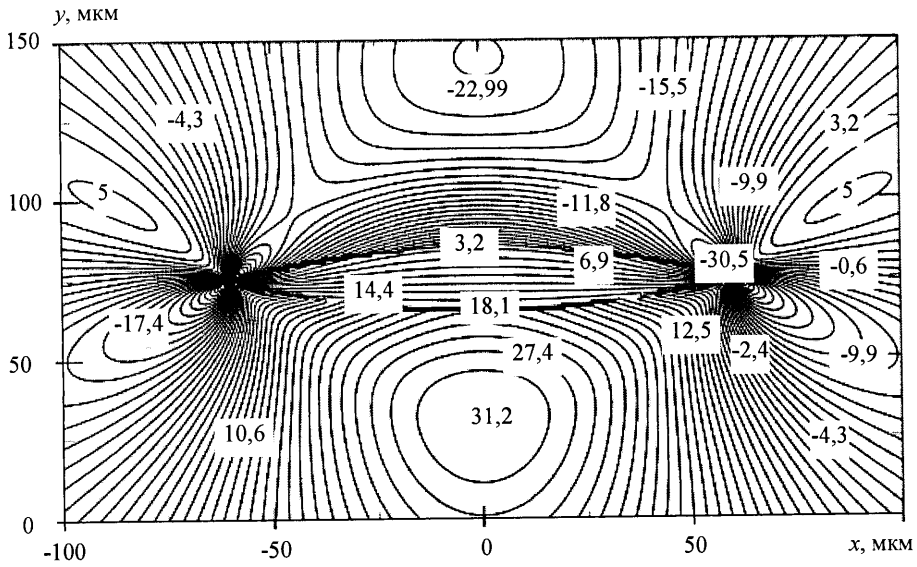


Рис. 3, г

На рис. 3, д представлен графический результат расчета сдвиговой компоненты σ_{yz} тензора напряжений. Данные напряжения по модулю симметричны относительно OY и в сравнении с другими компонентами имеют невысокие численные значения на границах двойника. Наибольшая локализация напряжений наблюдается у вершин двойника. Напряжения σ_{yz} постепенно убывают, по мере удаления от вершин двойника, в сторону прилегающих к ней участков.

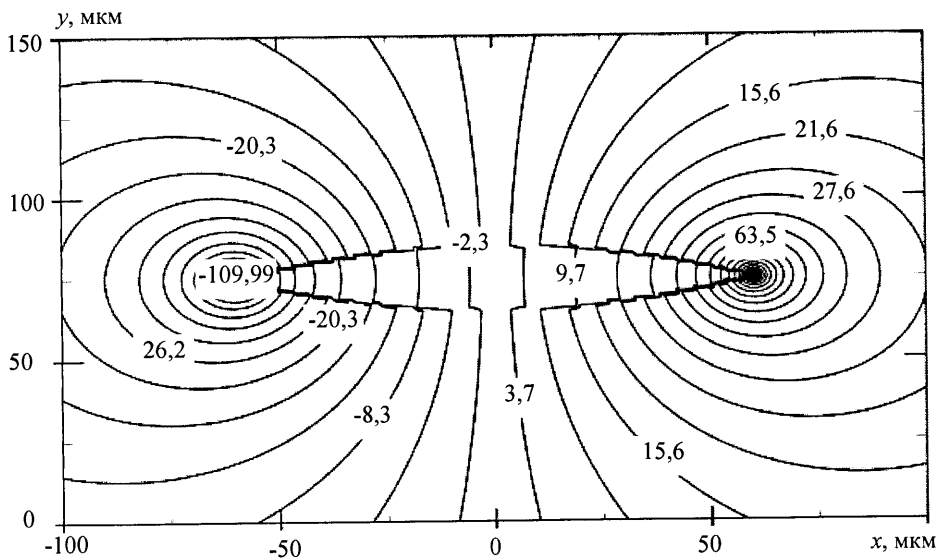


Рис. 3, д

Результат, представленный на рис. 3 е показывает распределение нормальной компоненты тензора напряжений σ_{zz} . Общий вид полей напряжений данной компоненты имеет схожесть с результатами расчетов компонент σ_{xx} (рис. 3, а) и σ_{xz} (рис. 3, в). Особенностью распределения данной компоненты является то, что она обладает наименьшими численными значениями напряжений, которые компонента σ_{xx} превосходит примерно в 4-6 раз, а компонента σ_{xz} – в 2-3 раза.

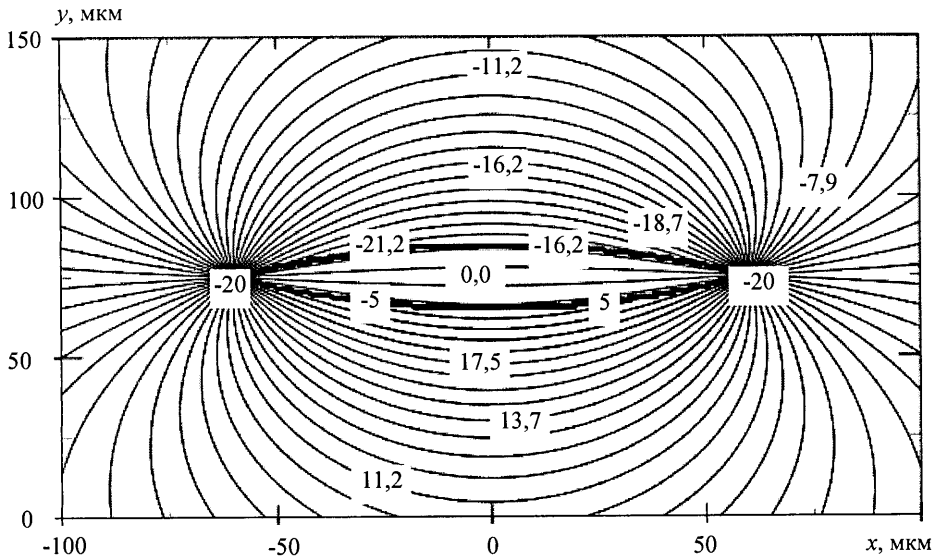


Рис. 3, е

Общими признаками у распределений всех компонент тензора напряжений являются: 1) локализация напряжений у границ и вершин двойника; 2) симметрия конфигурации поля напряжений в случае двойника правильной линзовидной формы; 3) общее убывание напряженного состояния по мере удаления от двойника.

Большая величина граничных дислокационных напряжений и высокая степень их локализации способна оказывать существенную роль на процессы развития и торможения трещин, аккомодацию напряжений деформации тела монокристалла, а также развитие других дислокационных и диффузионных процессов.

Заключение

Основываясь на принципе суперпозиции, разработан метод расчета полей смещений и напряжений для линзовидного остаточного механического двойника. Расчет напряжений проводился для мартенситной фазы Ni_2MnGa , в которой синтезирован данный механический остаточный двойник. В результате анализа результатов расчетов определены участки локализации напряжений и изучена конфигурация полей компонент смещений и напряжений в случае двойника линзовидной формы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Остриков, О. М.** Исследование пластической деформации поверхности монокристалла Ni_2MnGa методом индентирования / О. М. Остриков, А. Л. Созинов, А. В. Сорока // Инженерно-физический журнал. – 2012. – Т. 85, № 5. – С. 1132–1141.
2. **Остриков, О. М.** Механика двойникования твердых тел : монография / О. М. Остриков. – Гомель : Учреждение образования “Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого”, 2008. – 301 с.
3. Giant magnetic-field-induced strain in NiMnGa seven-layered martensitic phase / A. Sozinov [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2002. – V. 80. – P. 1746–1748.
4. **Нечко, О.** Temperature dependence and temperature limits of magnetic shape memory effect / О. Нечко, L. Straka // Journal of Applied Physics. – 2003. – V. 94, № 11. – P. 7139–7143.
5. **Нечко, О.** Magnetic properties and domain structure of magnetic shape memory Ni-Mn-Ga alloy / О. Нечко, К. Jurek, К. Ullakko // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2001. – V. 226–230. – P. 996–998.
6. **Остриков, О. М.** Дислокационная макроскопическая модель клиновидного двойника / О. М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2006. – № 2. – С. 10–18.

Поступила в редакцию 03.03.2016 г.

Контакты: oostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Shmatok E. V., Ostrikov O. M. DUALFUNCTION MODEL OF LENTICULAR TWIN.

The dislocation model of a single non-thin twin of the lenticular shape located away from the crystal surface has been constructed. The model uses the assumption of a continuous distribution of twinning dislocations at the twin boundaries. Based on the model the configuration of the displacement fields and stress of a lenticular twin is defined.

Key words: lenticular twin, dislocation model.

УДК 582.29(476)

СОЗОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИХЕНОБИОТЫ ЕЛОВЫХ ЛЕСОВ БЕЛАРУСИ

П. Н. БЕЛЫЙ

кандидат биологических наук

ГНУ “Центральный ботанический сад НАН Беларуси”

Проведенный созологический анализ показал, что еловые леса Беларуси характеризуются значительным числом редких и охраняемых видов лишайников. Среди них представлены, как виды из Красной книги Беларуси, так и некоторые другие: *Cetraria cetrarioides*, *C. monachorum*, *C. olivetorum*, *Cladonia caespiticia*, *Evernia divaricata*, *Gyalecta truncigena*, *Heterodermia speciosa*, *Hypotrachyna afrorevoluta*, *H. revoluta*, *Icmadophila ericetorum*, *Lobaria pulmonaria*, *L. scrobiculata*, *Melanohalea septentrionalis*, *Menegazzia terebrata*, *Mycoblastus sanguinarius*, *Nephroma bellum*, *Nephroma resupinatum*, *Parmelia serrana*, *Parmeliopsis hyperopta*, *Parmotrema stuppeum*, *Peltigera aphthosa*, *P. horizontalis*, *Peltigera hymenina*, *P. lepidophora*, *P. leucophlebia*, *P. membranacea*, *Psilolechia lucida*, *Punctelia jeckeri*, *P. subrudecta*, *Ramalina thrausta*, *Sclerophora pallida*, *Scytinium subtile*, *Thelotrema lepadinum*, *Usnea ceratina*, *U. florida*, *U. fulvovirens* and *U. lapponica*.

Ключевые слова: лишенизированные грибы, лишенобиота, еловые леса, редкие виды.

Введение

Видовое разнообразие лишайников еловых лесов Беларуси изучено довольно хорошо [1]. Однако, наряду с определением видового состава лишенобиоты, огромное значение приобретает выявление и анализ редких и исчезающих видов лишайников, которые для условий еловых лесов республики не были проведены.

Цель настоящей работы – провести созологический анализ лишенобиоты еловых лесов Беларуси для выявления в ее составе редких и исчезающих видов.

Методы исследований

В качестве материалов исследования использованы данные полевых исследований видового разнообразия лишайников еловых лесов, проведенных в период 2008–2015 гг. (более 9 тысяч образцов), гербарных коллекций лишайников (GSU, GRSU, MSK, MSKH, MSKU и др.), а также данные литературных источников. С целью выявления группы редких исчезающих и находящихся под угрозой исчезновения видов лишайников был проведен предварительный созологический анализ видового состава лишенобиоты изученных территорий.

Основными критериями, использовавшимися при выявлении этих видов, были степень их редкости и уязвимости как биологических объектов. При этом учитывалась также степень антропогенной уязвимости их естественных местообитаний и устойчивость лишайников к антропогенным нагрузкам. Степень редкости оценивалась по шкале встречаемости, которая в свою очередь, определялась по количеству местонахождений данного вида. К редким видам лишайников еловых лесов отнесены виды, включенные в Красную книгу РБ и встречающиеся в исследованном регионе с указанием 1–10 местонахождений.

Результаты и их обсуждение

Подробный анализ редких и находящихся под угрозой исчезновения видов лишайников ООПТ Беларуси был проведен В.В. Голубковым. На основании проведенного анализа в дальнейшем был составлен аннотированный список редких и исчезающих видов, впоследствии ставший основой для природоохранного (социологического) анализа. Полученный материал явился исходным для составления списка лишайников-кандидатов для включения в Красную книгу РБ [2–6].

Наиболее распространенными лишайниками в еловых лесах Беларуси являются: *Hypogymnia physodes*, *Cladonia coniocraea*, *Parmelia sulcata*, *Physcia tenella*, *Melanohalea exasperatula*, *Lepraria incana*, *Evernia prunastri*, *Hypocenomyce scalaris*, *Chaenotheca ferruginea*, *Pseudevernia furfuracea*, *Lecanora pulicaris*, *Xanthoria parietina*, *Coenogonium pineti*, *Cladonia chlorophaea*, *Polycauliona polycarpa*, *Hypogymnia tubulosa*, *Phlyctis argena*, *Melanelixia subaurifera*, *Physcia adscendens*, *Cladonia fimbriata*, *Platismatia glauca*, *Lecanora symmicta*, *Physcia stellaris*, *Melanelixia fuliginosa*, *Physcia tribacia*, *Cladonia digitata*, *Lecanora carpinea*, *Cladonia ochrochlora*, *Lecidella euphorea*, *Graphis scripta*, *Tuckermanopsis chlorophylla* и др. Указанные виды встречаются наиболее часто и отмечены в большинстве посещенных местообитаний.

Наиболее представительными и раритетными оказались лишайники азональных географических элементов, центры массового распространения которых находятся за пределами Республики Беларусь. При интенсификации антропогенной нагрузки наиболее требовательным из них (особенно влаголюбивым видам) в недалеком будущем грозит полное исчезновение с территории республики [3]. В лишайнобиоте еловых лесов Беларуси такими видами выступают лишайники гипоарктомонтанного (*Peltigera aphthosa*, *P. lepidophora*, *P. leucophlebia*, *Xylographa parallela*, *Icmadophila ericetorum*, *Mycoblastus sanguinarius*), монтанного (*Gyalecta truncigena*, *Menegazzia terebrata*, *Peltigera horizontalis*, *P. membranacea*, *Psilolechia lucida*, *Scytinium subtile*, *Thelotrema lepadinum*, *Usnea ceratina*, *U. florida*, *U. fulvovireagens*, *U. lapponica*), суббореального (*Hypotrachyna afrorevoluta*, *H. revoluta*, *Lobaria scrobiculata*) и мультизонального (*Collema flaccidum*) географических элементов. Среди угрожаемых оказались виды бореального (*Evernia divaricata*, *Melanohalea septentrionalis*, *Nephroma resupinatum*, *Ramalina thrausta*, *Cladonia caespiticia*, *Parmeliopsis hyperopta*) и неморального (*Cetrelia cetrarioides*, *C. monachorum*, *C. olivetorum*, *Heterodermia speciosa*, *Lobaria pulmonaria*, *Nephroma bellum*, *Parmelia serrana*, *Punctelia jeckeri*, *P. subrudecta*, *Sclerophora pallida*) географических элементов.

Из гипоарктомонтанных лишайников для еловых лесов *Peltigera aphthosa*, *P. lepidophora*, *P. leucophlebia* и *Xylographa parallela* известны только по литературным данным или из коллекционных фондов.

Isomadophila ericetorum впервые для республики указан Fr. Blonski, K. Drimmer, A. Ejsmond на территории национального парка “Беловежская пуца” [7]. На территории Беларуси он произрастает на древесине гниющих влажных пней, растительных остатках на верховых болотах, реже на песчаном уплотненном грунте в переходных полосах (экотонах) с большой влажностью воздуха [8–10].

Mycoblastus sanguinarius отмечен нами только в 1 местопроизрастании. Среди лишайников монтанного географического элемента значительно представлены недостаточно изученные и редкие охраняемые виды: *Gyalecta truncigena*, *Menegazzia terebrata*, *Peltigera horizontalis*, *P. membranacea*, *Psilolechia lucida*, *Scytinium subtile*, *Thelotrema lepadinum*, *Usnea ceratina*, *U. florida*, *U. fulvovireagens*, *U. lapponica* и др., многие из которых известны только по литературным данным или из коллекционных фондов. Практически все монтанные лишайники, произрастающие на территории Беларуси, являются редкими [11].

Gyalecta truncigena приведен для еловых фитоценозов Беловежской пуцы по литературным данным [12]. До настоящего времени новых мест произрастания *Gyalecta truncigena* на территории Беларуси не установлено.

Scytinium subtile относится к малоизученным в условиях республики видам. Ранее указано единственное местопроизрастания, выявленное на территории НП “Припятский” в пойменной дубраве (Житковичский р-н) [2].

Menegazzia terebrata произрастает главным образом в лиственных, преимущественно старых черноольховых лесах на стволах лиственных деревьев, а также в ельниках на валежнике и стволах лиственных пород, реже на ели [4]. Сокращает численность под влиянием хозяйственной трансформации земель.

Peltigera horizontalis в республике известен из 4 местонахождений на территории Минской (Логойский р-н), Гомельской (Лельчицкий р-н) и Гродненской (Свислочский р-н) областей [9, 13–15].

Peltigera membranacea впервые для республики приведен по результатам наших исследований [16]. В настоящее время известен в трех местопроизрастаниях (все известные места произрастания вида находятся на ООПТ – Березинский заповедник (Лепельский р-н), Беловежская пуца (Каменецкий р-н), биологический заказник республиканского значения “Барановичский” (Барановичский р-н)). Поэтому необходимо дальнейшее изучение особенностей хронологии данного вида.

Psilolechia lucida ранее выявлен в Несвижском р-не Минской области [17]. Нами также установлены места произрастания данного вида в Гомельской (Лельчицкий р-н), Минской (Столбцовский р-н) и Витебской (Лепельский р-н) областях [1]. Широко распространенный вид [18], требующий дальнейшего изучения.

Thelotrema lepadinum – редкий вид, большинство местопроизрастаний которого выявлено на территории Беловежской пуцы [9].

Многие монтанные виды, относящиеся к роду *Usnea* также стали раритетными. Такие виды, как *U. ceratina* и *U. florida* включены в список охраны Красной книги. Произрастают указанные виды в условиях повышенной влажности воздуха, причем *U. florida* тяготеет к старым широколиственным и хвойным лесам, в то время как *U. ceratina* – к мелколиственным лесам на болотах [4; 9; 19]. *Usnea fulvoreagens* и *U. lapponica* относятся к недостаточно изученным на территории Беларуси видам [4].

Из лишайников неморального географического элемента редкими на территории Беларуси являются: *Cetrelia cetrarioides*, *C. monachorum*, *C. olivetorum*, *Chaenotheca brachypoda*, *Ch. chlorella*, *Heterodermia speciosa*, *Lobaria pulmonaria*, *Melanohalea elegantula*, *Phlyctis agelaea*, *Porina aenea*, *Punctelia subrudecta*, *Ramalina calicaris*, *R. elegans*, *Sclerophora pallida* и др. Среди них *Melanohalea elegantula*, *Phlyctis agelaea*, *Porina aenea*, *Ramalina calicaris* и *R. elegans* являются недостаточно изученными в республике видами, большинство известных местонахождений которых приурочено к охраняемым природным территориям.

Cetrelia cetrarioides, *C. monachorum* и *C. olivetorum* имеют очень схожую экологию и морфологию, однако хорошо различаются по цветным химическим реакциям с гипохлоритом кальция и, кроме того, по составу основных лишайниковых веществ.

Cetrelia cetrarioides и *C. monachorum* нуждаются в дальнейшем изучении. Поскольку *C. monachorum* сравнительно недавно указан для территории республики [20], судить о распространении данных видов и частоте встречаемости невозможно. Однако, вследствие схожей экологии, указанные виды предъявляют одинаковые требования к условиям окружающей среды. Можно с уверенностью говорить о раритетности указанного комплекса видов в республике, что отмечалось и предыдущими исследователями [14].

Heterodermia speciosa до недавнего времени, по данным соэкологического анализа, был включен в “Список растений и грибов, вероятно исчезнувших с территории Беларуси («черный список»)” третьего издания Красной книги Республики Беларусь и представлял группу А (виды, которые не были найдены на протяжении 35–100 и более лет), а по степени достоверности данных – А1 (виды, нахождение которых на территории Республики Беларусь документировано гербарием) [4, 21]. Лишайники рода *Heterodermia* наиболее распространены в тропических регионах планеты и значительно реже встречаются в умеренной зоне. Большинство видов этого рода чувствительны к загрязнению окружающей среды и только немногие полеотолерантны (*H. diademata* (Taylor) D.D. Awasthi, *H. isidiophora* (Nyl.) D.D. Awasthi и др.). Некоторые виды *Heterodermia* чрезвычайно редки и произрастают в ограниченных местообитаниях. В основном это локалитеты тропической области, а виды умеренной зоны находятся на грани исчезновения и должны включаться в Красные книги различного уровня [22]. На территории Беларуси *Heterodermia speciosa* в 1913 г. приводился на коре осин в окрестностях д. Смоляны Оршанского района Витебской области [23] и только через 100 лет был обнаружен в Березинском биосферном заповеднике и отмечен исключительно на древесном субстрате в условиях типичных подтаежных лесов: в ельнике мелколиственно-кисличном и мелколиственно-долго-

мошном, занимающих экотоны между евтрофными болотами и сосняками плакорного типа [21].

Lobaria pulmonaria для территории Беларуси является относительно редким видом. Известно более 70 его конкретных местонахождений, большая половина которых приходится на Беловежскую пушу и Березинский заповедник [24]. Также как и некоторые другие редкие лишайники (*Cetrelia* spp., *Evernia divaricata*, *Usnea florida* и др.), *Lobaria pulmonaria* относится к группе редких и исчезающих видов, являющихся индикаторами качества воздушной среды и возраста леса [24].

В ходе проведенной ревизии образцов рода *Parmotrema* [25], установлено, что *Parmotrema stuppeum* известен в Беларуси из 16 местонахождений, основная масса которых расположена в южной части республики. Данный вид произрастает в естественных или слабонарушенных лиственных лесах (преимущественно дубравах) в пределах особо охраняемых природных территорий.

Parmelia serrana указан для республики сравнительно недавно [26]. На основании имеющихся сборов, этот вид можно охарактеризовать, как довольно редкий в условиях Беларуси. Нами он отмечен всего в 2 местопроизрастаниях, причем в условиях еловых древостоев данный вид зарегистрирован исключительно в пределах ООПТ – в Березинском заповеднике и Беловежской пуше.

Punctelia jeckeri и *P. subrudecta* – очень редкие на территории Беларуси виды [25]. В настоящее время подавляющее большинство местонахождений данных видов известно только на юге республики. *Punctelia subrudecta*, кроме того известен из одного локалитета на севере республики [25]. На территории Беларуси из-за интенсивной хозяйственной деятельности данным видам, как и многим другим влаголюбивым видам лишайников, грозит вымирание [4].

Очень требовательны по отношению к стабильности условий окружающей среды и особенно влажности воздуха также порошокплодные лишайники: *Chaenotheca brachypoda*, *Ch. chlorella*, *Sclerophora pallida* и др. Они обычны в старых лесах со сформировавшимся стабильным микроклиматом [27]. Среди порошокплодных лишайников к редким видам, выступающим в качестве индикаторов девственных лесов, относят такие бореальные лишайники, как *Chaenotheca phaeocephala*, *Ch. stemonea*, *Microcalicium disseminatum*, встречающихся в изобилии в заповедных зонах охраняемых территорий, а также в труднодоступных лесных массивах [28].

К редким видам из числа бореальных лишайников относятся также *Cladonia caespiticia*, *Evernia divaricata*, *Melanohalea septentrionalis*, *Nephroma resupinatum*, *Parmeliopsis hyperopta* и *Ramalina thrausta*.

До недавнего времени имелось лишь одно конкретное местонахождение *Cladonia caespiticia* на территории Беларуси в НП “Беловежская пуша” [9]. Кроме того, имеются еще два указания о произрастании *C. caespiticia* на территории республики [29, 30], однако они не содержат сведений о точном местонахождении. В ходе проведения полевых исследований были выявлены новые места произрастания этого вида, значительная часть которых находится в пределах ООПТ: 1 – в Могилевской области (Бобруйский р-н), по 2 местонахождения – в Гомельской (Лельчицкий р-н) и Минской (ГПУ “Березинский биосферный

заповедник”, НП “Нарочанский”), 3 – в Витебской (Березинский заповедник) [1, 31, 32].

Evernia divaricata на севере республики встречается преимущественно в старовозрастных еловых лесах, реже в смешанных (Гродненская и Брестская обл.), где он обычно произрастает на ветвях ели обыкновенной [4]. Еще в 1923 г., проводя исследования на территории Беларуси, В.П. Савич характеризовал *E. divaricata* следующим образом: “...Вид этот принадлежит к ассоциации свисающих с веток видов, но встречается не всегда...” [10]. При изучении лишенобиоты еловых лесов республики отмечен исключительно в границах ООПТ.

Melanohalea septentrionalis лишь недавно был указан для республики [33]. Поэтому рассуждение о его распространении и редкости является преждевременным. Однако *M. septentrionalis* – вид, центр массовости которого приходится на лесотундру и северную часть таежной зоны, а также на горные области южных широт [34]. По указаниям [35], *M. septentrionalis* – холодостойкий вид, предпочитающий открытые влажные места обитания, где произрастает на различных лиственных деревьях, реже на хвойных или древесине. В южных частях ареала он является облигатным эпифитом и поселяется на видах рода *Betula* L., реже на представителях родов *Pinus* L. и *Picea* Link [36]. В Европе (за исключением Скандинавии) он является редким видом, поскольку находится на юго-западной границе ареала [37, 38]. Необходимо дальнейшее изучение распространения и особенностей экологии *M. septentrionalis* на территории республики.

Nephroma resupinatum внесен в список растений и грибов, вероятно, исчезнувших с территории Беларуси, поскольку в отмеченном в 1923 г. локалитете [10] повторно не обнаружен, а также не выявлено новых мест произрастания вида [4].

Parmeliopsis hyperopta на территории Беларуси является типичным видом в составе сообществ южнотаежных еловых лесов, находясь у южной границы распространения. Гораздо реже он встречается на западе и юге республики [39].

Характерным видом для еловых лесов республики является *Ramalina thrausta*. На сегодняшний день все известные местонахождения в республике *R. thrausta* находятся в физико-географических районах, расположенных в пределах ареала распространения ели обыкновенной, где вид известен преимущественно в еловых лесах на лиственных и хвойных деревьях (чаще на ветвях елей). Из 6 местонахождений, известных на территории Беларуси, 5 отмечено на охраняемых природных территориях: в Брестской (НП “Беловежская пушта”), Гомельской (НП “Припятский”), Минской (НП “Нарочанский”) и Витебской (Березинский биосферный заповедник) областях [40].

Согласно [41] *Evernia divaricata*, *Parmeliopsis hyperopta* и *Ramalina thrausta* составляют группу т. н. “северных” видов, распространение которых связано с лесами таежного типа, широко представленных в подзоне смешанных широколиственно-еловых лесов. Эти виды, как редкие, могут встречаться и в других геоботанических подзонах и округах на юге республики, однако наиболее распространены в северной геоботанической подзоне. Вероятно, сюда следует отнести и *Melanohalea septentrionalis*, в своем распространении тяготеющий к таежной зоне.

Представитель суббореального – *Lobaria scrobiculata* – известен на территории республики только по литературным данным и считается, по-видимому, исчезнувшим. Этот вид был отмечен в старых лесах и заповедниках, на замшелом валеже, сухих ветвях елей и клене [42, 43].

Hypotrachyna revoluta s. lat является одним из раритетных видов, включенных в Красную книгу Беларуси [4]. В недавней работе [25] было показано, что европейский материал, традиционно рассматриваемый под названием *Hypotrachyna revoluta*, состоит из двух хорошо отличающихся друг от друга видов – *H. afrorevoluta* (Krog & Swinscow) Krog & Swinscow и *H. revoluta* (Florke) Hale s. str. В республике наиболее распространен *Hypotrachyna revoluta* (18 местонахождений): 8 местонахождений в Брестской области; 5 – в Гомельской области; по 2 – в Витебской и Гродненской областях; 1 – в Минской области. Меньшее количество местонахождений (13) зафиксировано у *Hypotrachyna afrorevoluta*: Брестская область – 5, Витебская и Гомельская области – по 3, Минская область – 2. На территории Беларуси оба вида встречаются в одинаковых условиях в лиственных лесах (преимущественно старого возраста), среди которых преобладают черноольховые (9 местонахождений), дубовые (4) и ясеневые (3). Менее всего образцов собрано в грабовых лесах (1). В хвойных лесах данные виды отмечены только в еловых лесах – 5 местонахождений [44]. Из 42 установленных местонахождений видов рода *Hypotrachyna* 23 были представлены экотонами: переходное болото, опушка леса, переходные полосы лесных фитоценозов, окраина болота, берег реки и др. [45]. *Hypotrachyna revoluta* – один из наиболее изученных и редких видов. На территории республики встречается спорадически. Около половины установленных местопроизрастаний этого вида отмечено на территории Беловежской пуши. Наиболее важным фактором, лимитирующим его распространение и произрастание на территории Беларуси, является недостаток воздушной влаги [45].

Кроме того, следует отметить *Peltigera hymenina* – вид, характеризующийся как очень редкий на территории Беларуси, известный из 4 местообитаний, что может быть связано с требовательностью к экологическому режиму местообитания [46].

Заключение

В результате цитологического анализа лишенобиоты еловых лесов Беларуси установлено 16 редких и исчезающих видов, включенных в список охраны Красной книги Республики Беларусь: *Cetrelia olivetorum*, *Cladonia caespiticia*, *Evernia divaricata*, *Hypotrachyna revoluta*, *Lobaria pulmonaria*, *Menegazzia terebrata*, *Parmeliopsis hyperopta*, *Parmotrema stuppeum*, *Peltigera aphthosa*, *P. horizontalis*, *P. lepidophora*, *Punctelia subrudecta*, *Ramalina thrausta*, *Scytinium subtile*, *Usnea ceratina* и *U. florida*. Кроме того, выявлен 1 вид – *Heterodermia speciosa*, ранее включенный в “Список растений и грибов, вероятно, исчезнувших с территории Беларуси («черный список»)» Красной книги Республики Беларусь. Помимо видов, включенных в список охраны Красной книги Республики Беларусь, редкими для экосистем еловых лесов являются такие лишайники, как: *Cetrelia cetrarioides*, *C. monachorum*, *Gyalecta truncigena*, *Hypotrachyna*

afroevoluta, *Icmadophila ericetorum*, *Lobaria scrobiculata*, *Melanohalea septentrionalis*, *Mycoblastus sanguinarius*, *Nephroma bellum*, *Nephroma resupinatum*, *Parmelia serrana*, *Peltigera hymenina*, *P. leucophlebia*, *P. membranacea*, *Psilolechia lucida*, *Punctelia jeckeri*, *Thelotrema lepadinum*, *Sclerophora pallida*, *Usnea fulvoreaegens* и *U. lapponica*.

Большинство указанных выше редких видов отмечено на территории Беларуси только в пределах охраняемых природных территорий и выступают в качестве индикаторов качества окружающей среды и экологического режима еловых лесов при проведении лишеноиндикационных исследований в хвойных фитоценозах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Белый, П. Н.** Аннотированный список лишайников и лишенофильных грибов еловых экосистем Беларуси / П. Н. Белый // Особо охраняемые природные территории Беларуси. Исследования. – Минск : Белорусский Дом печати, 2011. – Вып. 6. – С. 146–178.
2. **Голубков, В. В.** Лишенобиота национального парка “Припятский” / В. В. Голубков. – Минск : Белорусский дом печати, 2011. – 192 с.
3. **Голубков, В. В.** Лишайники охраняемых природных территорий Беларуси (флористическая и эколого-географическая характеристика) : дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05; 03.00.24 / В. В. Голубков. – Минск, 1992. – 184 с.
4. Красная книга Республики Беларусь: редкие и находящиеся под угрозой исчезновения виды дикорастущих растений / М-во природных ресурсов и охраны окружающей среды, НАН Беларуси ; редкол.: И. М. Качановский [и др.]. – Минск : БелЭн, 2015. – 448 с.
5. Красная книга Республики Беларусь: Редкие и находящиеся под угрозой исчезновения виды дикорастущих растений / М-во природных ресурсов и охраны окружающей среды, НАН Беларуси ; редкол.: Л. И. Хоружик [и др.]. – Минск : БелЭн, 2005. – 456 с.
6. Чырвоная кніга Рэспублікі Беларусь: Рэдкія і тыя, што знаходзяцца пад пагрозай знікнення віды жывел і раслін / Дзярж. кам. Рэсп. Беларусь па Экалогіі, АН Беларусі; рэдкал.: А. М. Дарафееў [і інш.]. – Мінск : БелЭн, 1993. – 560 с.
7. **Blonski, Fr.** Sprawozdanie z wycieczki botanicznej odbytej do puszczy Białowieskiej w licie 1887 roku / Fr. Blonski, K. Drymmer, A. Ejsmond // Pam. fizylog. – 1888. – T. VIII, dz. 3. – S. 96–103.
8. **Белый, П. Н.** Новые и редкие виды лишайников Березинского заповедника / П. Н. Белый, В. В. Голубков // Особо охраняемые природные территории Беларуси. Исследования : сб. ст. / Управление делами Президента Республики Беларусь, Березинский биосферный заповедник ; под ред. В. С. Ивковича [и др.]. – Минск, 2008. – Вып. 3 – С. 69–83.
9. **Голубков, В. В.** Видовой состав и структура лишенофлоры Государственного заповедно-охотничьего хозяйства “Беловежская пуца”. – Ч. 1 : Видовой состав лишенофлоры Беловежской пуцы (Аннотированный список) / В. В. Голубков ; АН БССР. – Минск, 1987. – 97 с. – Деп. в ВИНТИ 22.04.87, № 2829–В87 // Вести акад. наук БССР. – 1987. – № 6. – С. 91–92.

10. **Савич, В. П.** Результаты лишенологических исследований 1923 года в Белоруссии / В. П. Савич // Зап. Бел. гос. ин-та сельского и лесного хозяйства. – 1925. – Вып. 4. – С. 1–33.
11. **Горбач, Н. В.** Лишайники монтанного географического элемента в лишенофлоре Беларуси / Н. В. Горбач // Брио- и лишенологические исследования высокогорных районов и севера СССР : сб. науч. ст. / Акад. наук СССР, Полярно-альпийский ботанич. сад-институт ; под. науч. ред. Р. Н. Шлякова. – Апатиты, 1981. – С. 86–87.
12. **Макаревич, М. Ф.** К флоре лишайников заповедника “Беловежская пуца” / М. Ф. Макаревич // Ботанические материалы отдела споровых растений. – 1960. – Т. XIII. – С. 25–29.
13. **Голубков, В. В.** Экология и особенности распространения лишайников рода *Peltigera*, собранных в западной части юго-западной ветви Белорусской гряды / В. В. Голубков, О. М. Кочан // Актуальные проблемы экологии – 2007 : тезисы докладов III Междунар. науч.-практ. конф., 21–23 ноября 2007 г. / ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: Н. П. Канунникова (отв. ред.) [и др.]. – Гродно, 2007. – С. 119.
14. **Голубков, В. В.** Эколого-географическая характеристика некоторых редких и реликтовых видов лишайников, произрастающих на охраняемых природных территориях Белорусской ССР / В. В. Голубков // Ботаника: исследования. – 1986. – Т. 27. – С. 139–141.
15. **Горбач, Н. В.** Новые для Белоруссии лишайники / Н. В. Горбач // Флорист. и геоботан. исслед. в Белоруссии : науч. тр. / Ин-т экспериментальной ботаники НАН Беларуси ; под ред. Л. П. Смоляка. – Минск, 1970. – С. 22–24.
16. **Белый, П. Н.** *Peltigera membranacea* (Ach.) Nyl. (*Peltigeraceae*, *Ascomycota*) – новый вид лишайника для Беларуси / П. Н. Белый // Фундаментальні та прикладні дослідження в біології : матеріали I Міжнар. наук. конф. студентів, аспірантів та молодих учених, Донецьк, 23–26 лютого 2009 р. / М-во освіти і науки України, Донецький національний ун-т, Студентське наукове товариство, Профком студентів на аспірантів ; редкол.: М. І. Бойко [та інш.]. – Донецьк, 2009. – С. 16–17.
17. **Кобзарь, Н. Н.** Лихенизированные грибы // Макромицеты, микромицеты и лишенизированные грибы Беларуси. Гербарий Института экспериментальной ботаники им. В. Ф. Купревича (MSK-F, MSK-L) / О. С. Гапиенко [и др.] ; под ред. В. И. Парфенова, О. С. Гапиенко. – Минск, 2006. – Гл. 3. – С. 459–500.
18. **Нотов, А. А.** О новых для Тверской области видах лишайников / А. А. Нотов, Г. П. Урбанавичюс, А. Н. Титов // Бюл. моск. о-ва испытателей природы. Отд. биол. – 2008. – Т. 113, Вып. 3. – С. 86–90.
19. **Белый, П. Н.** Роль Березинского биосферного заповедника в сохранении редких видов лишайников / П. Н. Белый // Наука, образование, технологии – 2008 : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Барановичи, 21–22 марта 2008 г. : в 3 ч. / М-во образования РБ, Барановичский гос. ун-т ; редкол.: В. В. Таруц [и др.]. – Барановичи, 2008. – Ч. 3. – С. 286–288.
20. **Рандлане, Т. В.** Род *Cetrelia* Culb. et Culb. в Советском Союзе // Т. В. Рандлане, А. Ю. Сааг // Новости систематики низших растений. – 1992. – Т. 28. – С. 118–134.
21. **Белый, П. Н.** Новые данные о распространении *Heterodermia speciosa* (*Physciaceae*, *Lichenes*) в Беларуси / П. Н. Белый, В. В. Голубков // Весці НАН Беларусі. Сер. біял. навук. – 2009. – № 3. – С. 19–22.

22. **Trass, H.** The lichen genus *Heterodermia* (*Lecanorales, Physciaceae*) in Russia and adjacent territories / H. Trass // *Folia cryptog. estonica*. – 2000. – Vol. 37. – P. 93–108.
23. **Крейер, Г. К.** К флоре лишайников Могилевской губернии. Сборы 1908–1910 годов. Дополнение (с одной таблицей) / Г. К. Крейер // *Труды Императорского С.-Петербургского Ботанического Сада*. – 1913. – Т. 31. – С. 263–440.
24. **Голубков, В. В.** *Lobaria pulmonaria* (L.) Hoffm. – редкий исчезающий лишайник на территории Беларуси / В. В. Голубков, А. П. Яцына // *Ботаника: исследования*. – 2010. – Вып. XXXVIII. – С. 84–101.
25. **Tsurykau, A.** The genera *Hypotrachyna*, *Parmotrema* and *Punctelia* (*Parmeliaceae, lichenized Ascomycota*) in Belarus / A. Tsurykau, V. Golubkov, P. Bely // *Herzogia*. – 2015. – Vol. 28 (2) – Teil 2. – P. 743–752.
26. **Яцына, А. П.** Новые и интересные находки лишайников и лихенофильного гриба в Беларуси / А. П. Яцына // *Веснік ВДУ*. – 2013. – № 3(75). – С. 62–67.
27. **Титов, А. Н.** Микокалициевые грибы (*Lichenes, Mycocaliciaceae*) и ключ для их определения / А. Н. Титов // *Бот. журн.* – 2004. – Т. 89, № 7. – С. 1153–1165.
28. **Голубков, В. В.** Порошкоплодные лишайники Белоруссии / В. В. Голубков, А. Н. Титов // *Новости систематики низших растений*. – 1990. – Т. 27. – С. 97–101.
29. **Голубкова, Н. С.** Определитель лишайников СССР. Вып. 5. Кладониевые – Акарспоровые / Н. С. Голубкова, В. П. Савич, Х. Х. Трасс ; под ред. И. И. Абрамова. – Л. : Наука, 1978. – 305 с.
30. **Окснер, А. М.** Флора лишайників України / А. М. Окснер. – Том 2. Вып. 1. – Київ : Наук. думка, 1968. – 500 с.
31. **Белый, П. Н.** Видовое разнообразие лишайников островных местопроизрастаний ели Лельчицкого района (Гомельская область, Беларусь) / П. Н. Белый // *Наука о лесе XXI века : материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвященной 80-летию Института леса НАН Беларуси, Гомель, 17–19 ноября 2010 г. / Институт леса НАН Беларуси ; редкол.: А. И. Ковалевич [и др.]*. – Гомель, 2010. – С. 393–396.
32. **Белый, П. Н.** Находка *Cladonia caespiticia* (Pers.) Florke (*Cladoniaceae, Ascomycota*) в Березинском биосферном заповеднике / П. Н. Белый // *Особо охраняемые природные территории Беларуси. Исследования : сб. ст. / Управление делами Президента Республики Беларусь, Березинский биосферный заповедник ; под ред. В. С. Ивковича [и др.]*. – Минск, 2008. – Вып. 33. – С. 84–87.
33. **Белый, П. Н.** *Melanohalea septentrionalis* (*Parmeliaceae, Ascomycota*) – новый вид для лихенофлоры Беларуси / П. Н. Белый // *Актуальні проблеми ботаніки та екології : матеріали міжнародної конференції молодих учених (9–13 серпня 2011 р., м. Березне)*. – Київ : ТОВ “Лазурит-Полиграф”, 2011. – С. 17–18.
34. *Определитель лишайников СССР. Вып. 1. Пертузариевые, Леканоровые, Пармелиевые* / Е. Г. Копачевская [и др.] ; под общ. ред. И. И. Абрамова. – Л. : Наука, 1971. – 412 с.
35. **Ahti, T.** *Parmelia olivacea* and the allied non-isidiate and non-sorediate corticolous lichens in the Northern Hemisphere / T. Ahti // *Acta Botanica Fennica*. – 1966. – № 70. – P. 1–68.
36. **Truong, C.** Multivariate analysis of anatomical characters confirms the differentiation of two morphologically close species, *Melanohalea olivacea* (L.) O. Blanco et al. and

- M. septentrionalis* (Lyngé) O. Blanco [et al.] / C. Truong, Y. Naciri, P. Clerc // The Lichenologist. – 2009. – Vol. 41, № 6. – P. 649–661.
37. **Blanco, O.** *Melanelixia* and *Melanohalea*, two new genera segregated from *Melanelia* (*Parmeliaceae*) based on molecular and morphological data / O. Blanco [et al.] // Mycological Research. – 2004. – Vol. 108. – P. 873–884.
38. **Wirth, V.** Die Flechten Baden-Württembergs / V. Wirth. – Stuttgart : Ulmer, 1995. – 527 p.
39. **Голубков, В. В.** Особенности распространения некоторых бореальных видов в условиях Беларуси / В. В. Голубков // Бореальная лишенофлора. Лишеноиндикация : тезисы докладов III Междунар. лихенологической школы и симпозиума, Екатеринбург, 31 июля – 4 авг. 2002 г. / Ин-т экологии растений и животных УрО РАН, Урал. гос. ун-т ; редкол.: В. Е. Третьяков [и др.]. – Екатеринбург, 2002. – С. 30–31.
40. **Голубков, В. В.** Распространение и эколого-географическая характеристика лишайника *Ramalina thrausta* в Белоруссии / В. В. Голубков // Новости систематики низших растений. – 2006. – Т. 40. – С. 214–217.
41. **Голубков, В. В.** Лишайники охраняемых природных территорий Беларуси (флористическая и эколого-географическая характеристика) : автореф. дис. ... канд. биол. наук : 03.00.05; 03.00.24 / В.В. Голубков ; Российская Акад. наук, Ботанич. ин-т им. В. Л. Комарова ; Акад. наук Беларуси, Ин-т эксперим. ботаники им. В. Ф. Купревича. – Минск, 1992. – 18 с.
42. **Горбач, Н. В.** Материалы к флоре лишайников Белоруссии (Лишайники Беловежской пуши) / Н. В. Горбач // Бюллетень института биологии АН БССР за 1956 год. – 1957. – Вып. 2. – С. 43–46.
43. **Паламарчук, А. С.** Лишайники / А. С. Паламарчук, О. П. Шахрай, Л. Н. Парукова // Сельское хозяйство Белоруссии. – 1975. – № 1. – 43 с.
44. **Голубков, В. В.** Обзор и ревизия лишайников рода *Hypotrachyna* (Vainio) Hale (*Parmeliaceae*, lichenized *Ascomycota*) в Беларуси / В. В. Голубков, П. Н. Белый, А. Г. Цуриков // Ботаника (исследования) : сб. науч. тр. / Ин-т эксперимент. бот. НАН Беларуси. – 2015. – Вып. 44. – С. 3–13.
45. **Голубков, В. В.** Эколого-географические особенности лишайников *Hypotrachyna revoluta* (Flk.) Hale и *Punctelia subrudecta* Krog и их индикаторная роль на территории Беларуси / В. В. Голубков // Фундаментальные и прикладные проблемы ботаники в начале XXI века : материалы всероссийской конф., Петрозаводск, 22–27 сентября 2008 г. / РБО, Отделение биологич. наук РАН, Карельский науч. центр РАН, Петрозаводский гос. ун-т ; редкол.: К. Л. Виноградова [и др.] : в 2 кн. – Петрозаводск, 2008. – кн. 2. – С. 181–183.
46. **Голубков, В. В.** Обзор и ревизия лишайников Беларуси: род *Peltigera* Willd. / В. В. Голубков, А. А. Заварзин // Ботаника: исследования. – 2010. – Вып. XXXVIII. – С. 15–27.

Поступила в редакцию 23.05.2016 г.

Контакты: e-mail: pavel.bely@tut.by (Белый Павел Николаевич)

Bely P. N. SOZOLOGICAL ANALYSIS OF LICHEN BIOTA OF NORWAY SPRUCE FORESTS OF BELARUS.

The sozological analysis of lichen biota has demonstrated that Norway spruce forests in Belarus are characterized by a large number of rare and threatened species of lichens. Among them the lichens from the Red Data Book of Belarus as well as some other species are widely represented: *Cetrelia cetrarioides*, *C. monachorum*, *C. olivetorum*, *Cladonia caespiticia*, *Evernia divaricata*, *Gyalecta truncigena*, *Heterodermia speciosa* *Hypotrachyna afrorevoluta*, *H. revoluta*, *Icmadophila ericetorum*, *Lobaria pulmonaria*, *L. scrobiculata*, *Melanohalea septentrionalis*, *Menegazzia terebrata*, *Mycoblastus sanguinarius*, *Nephroma bellum*, *Nephroma resupinatum*, *Parmelia serrana*, *Parmeliopsis hyperopta*, *Parmotrema stuppeum*, *Peltigera aphthosa*, *P. horizontalis*, *Peltigera hymenina*, *P. lepidophora*, *P. leucophlebia*, *P. membranacea*, *Psilolechia lucida*, *Punctelia jeckeri*, *P. subrudecta*, *Ramalina thrausta*, *Sclerophora pallida*, *Scytinium subtile*, *Thelotrema lepadinum*, *Usnea ceratina*, *U. florida* *U. fulvoreaegens* and *U. lapponica*.

Key words: lichenized fungi, lichen biota, Norway spruce forests, rare species.

УДК 595.763 (476.5)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВИДОВОГО СОСТАВА МИРМЕКОФИЛЬНЫХ ЖЕСТКОКРЫЛЫХ (INSECTA: COLEOPTERA) БЕЛОРУССКОГО ПООЗЕРЬЯ И СОСЕДНИХ ТЕРРИТОРИЙ

Е. С. ПЛИСКЕВИЧ

магистр биологических наук, аспирант

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова

Представлен результат сравнения видового состава мирмекофильных жесткокрылых Белорусского Поозерья и соседних территорий. Установлено, что видовой состав мирмекофильных жесткокрылых как Белорусского Поозерья, так и республики в целом неплохо изучен в сравнении с близлежащими территориями (страны Балтии, Россия (Смоленская, Калининская, Московская, Белгородская области)). Фауна мирмекофильных жесткокрылых Белорусского Поозерья и Беларуси исключает присутствие южноевропейских, западноевропейских, центральноевропейских и северных таежных видов. В целом видовой состав мирмекофильных жесткокрылых как Белорусского Поозерья так и республики мало специфичен, лишен эндемиков и состоит из широко распространенных видов.

Ключевые слова: Белорусское Поозерье, мирмекофильные жесткокрылые, Staphylinidae, видовой состав.

Введение

Изучение мирмекофильных жесткокрылых (обитатели гнезд муравьев) на территории Белорусского Поозерья (особый природный регион на севере Беларуси) входит в состав исследований биоразнообразия региона в целом. Данные о видовом составе и экологии мирмекофилов могут быть использованы при инвентаризации фауны республики и оценке состояния и тенденций развития экосистем, а также для определения состояния природных сообществ при экологическом мониторинге. Немаловажным аспектом в изучении данной проблемы является оценка своеобразия и степени изученности фауны мирмекофильных жесткокрылых как региона, так и республики в целом, путем сопоставления региональных таксономических списков жесткокрылых с таковыми сопредельных и близлежащих территорий. **Цель:** на основе сравнительного анализа видового состава мирмекофильных жесткокрылых Белорусского Поозерья, Беларуси и соседних территорий оценить своеобразие и изученность региональной фауны мирмекофильных жесткокрылых.

Основная часть

В работе используется материал, собранный автором в течение 2012–2016 гг. преимущественно на территории Витебской области, также в работе были ис-

пользованы ранее опубликованные данные о видовом составе мирмекофильных жесткокрылых Белорусского Поозерья [1; 2 и др.]. При сборе жесткокрылых применялись почвенные ловушки Барбера, в качестве фиксирующей жидкости использовалась 9% уксусная кислота, также применялись почвенные сита для просеивания строительного материала гнезд муравьев. При сравнительном анализе видовых составов мирмекофильных жесткокрылых были использованы фаунистические сводки и каталоги Швеции [3], Финляндии [3–7], Эстонии [3], Латвии [8–10], Литвы [11], Беларуси [12 и др.], Польши [13], России (Смоленская [14; 15], Калужская [15; 16], Московская [15; 17; 18], Белгородская [19], обл.), Чехии и Словакии [20], Украины [21–23]. Номенклатура и порядок таксонов приводится согласно “Каталогу жесткокрылых Палеарктики” [24].

В результате исследования был составлен общий таксономический список мирмекофильных видов жесткокрылых Белорусского Поозерья, Беларуси и соседних территорий, включающий 104 вида (таблица). В список вошли виды с разной степенью привязанности к муравьям (облигатные и факультативные мирмекофилы). На основе полученных результатов сравнения видовых списков жесткокрылых Белорусского Поозерья, Беларуси и соседних территорий можно утверждать о хорошей изученности фауны мирмекофильных жесткокрылых региона и республики в целом, так как число выявленных видов мирмекофилов сопоставимо с таковым близлежащих территорий.

Несмотря на неоднородность видового состава, систематическая структура мирмекофилов Белорусского Поозерья, Беларуси и соседних территорий очень близка по соотношению семейств жесткокрылых. Так наибольшее число мирмекофильных жесткокрылых на территории 12 сравниваемых регионов принадлежат семейству Staphylinidae: Швеция – 55 видов (63,2%); Финляндия – 45 видов (64,3%); Эстония – 34 вида (60,7%); Латвия – 39 видов (62,9%); Литва – 40 видов (60,6%); Белорусское Поозерье – 39 видов (59,1%); Беларусь – 45 видов (62,5%); Польша – 59 видов (64,8%); Россия (Смоленская, Калужская, Московская, Белгородская, обл.) – 47 видов (69,1%); Чехия – 63 вида (66,3%); Словакия – 62 вида (66%); Украина – 48 видов (63,2%). Остальные семейства включают в свой состав несколько меньшее число видов.

Видовой состав мирмекофильных жесткокрылых Белорусского Поозерья и соседних территорий

№	Виды	SV	FI	EN	LA	LT	BL	BY	PL	RUS	CZ	SK	UK
1	<i>Plegaderus dissectus</i> Erichson, 1839	+		+		+			+		+	+	
2	<i>Dendrophilus punctatus</i> Herbst, 1792	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+
3	<i>D. pygmaeus</i> Linnaeus, 1758	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	<i>Haeterius ferrugineus</i> Olivier, 1789	+			+	+	+	+	+		+	+	+
5	<i>Satrapes sartorii</i> L. Redtenbacher, 1857								+			+	

Окончание табл.

№	Виды	SV	FI	EN	LA	LT	BL	BY	PL	RUS	CZ	SK	UK
95	<i>Am. orientalis</i> Reiche, 1861												+
96	<i>Monotoma angusticollis</i> Gyllenhal, 1827	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
97	<i>M. conicollis</i> Chevrolat, 1837	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
98	<i>Spavius glaber</i> Gyllenhal, 1808	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
99	<i>Hypocopus latridioides</i> Motschulsky, 1839	+	+	+	+	+	+	+	+		+		+
100	<i>Cerylon histeroides</i> Fabricius, 1792	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
101	<i>Corticaria inconspicua</i> Wollaston, 1860	+	+						+		+	+	
102	<i>C. longicollis</i> Zetterstedt, 1838	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
103	<i>Palorus depressus</i> Fabricius, 1790	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+
104	<i>Myrmecixenus subterraneus</i> Chevrolat, 1835	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	+
Итого		87	70	56	62	66	66	72	91	68	95	94	76

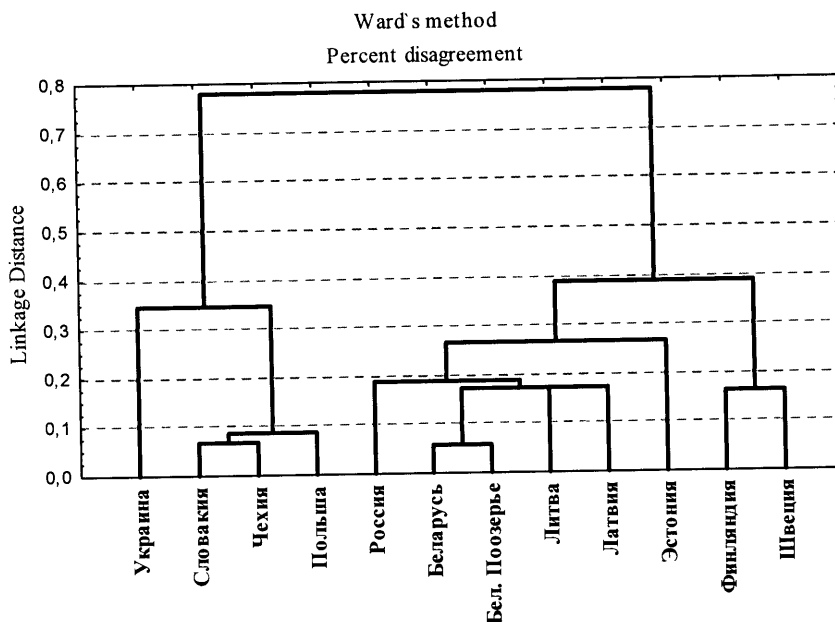
Примечание: SV – Швеция; FI – Финляндия; EN – Эстония; LA – Латвия; LT – Литва; BL – Белорусское Поозерье; BY – Беларусь; PL Польша; RUS – Россия (Смоленская, Калужская, Московская, Белгородская обл.); CZ – Чехия; SK – Словакия; UK – Украина.

В ходе сравнения видового состава мирмекофильных жесткокрылых Белорусского Поозерья, Беларуси и соседних территорий фауны исследуемых регионов методом кластеризации были разбиты на 3 группы (рисунок). Первая группа включает фауны Украины, Словакии, Чехии и Польши. Обособление этой группы обусловлено присутствием южноевропейско-кавказских видов (*Satrapes sartorii*, *Batrisodes buqueti*, *Zyras fulgidus*), западноевропейско-кавказских (*Batrisodes oculatus*, *Myrmoecia plicata*), центральноевропейских (*Plectophloeus erichsoni*, *Euryusa brachelytra*), трансевразийских неморальных дизъюнктивных (*Pella similis*) и средиземноморских (*Amphotis orientalis*).

Третья группа включает фауны Финляндии и Швеции. Группа имеет в своем составе бореальные трансевразийские (*Lomechusoides inflatus*) и бореальные евро-обские (*Lomechusoides wellenii*) виды. Фауна мирмекофильных жесткокрылых регионов этой группы отличается от фауны регионов первой группы полным отсутствием видов с южноевропейско-кавказскими, центральноевропейскими, западноевропейско-кавказскими ареалами.

Во вторую группу вошли фауны мирмекофильных жесткокрылых стран Балтии, Беларуси и России (Смоленская, Калужская, Московская, Белгородская области). В составе этой группы также отсутствуют западноевропейские, центральноевропейские и южноевропейские виды и не отмечены северные

таежные виды, а преобладают виды с широкими западно-центрально-палеарктическими и западно-палеарктическими ареалами.



Дендрограмма сходства видового состава мирмекофильных жесткокрылых
Белорусского Поозерья, Беларуси и соседних территорий

Заключение

Таким образом, по итогам сравнения таксономических сводок жесткокрылых 12 рассматриваемых регионов был составлен сводный перечень мирмекофильных видов жесткокрылых (облигатные и факультативные сожители) Белорусского Поозерья, Беларуси и соседних территорий, включающий 104 вида. Фауна мирмекофильных жесткокрылых как Белорусского Поозерья, так и республики неплохо изучена в сравнении с близлежащими территориями (страны Балтии, Россия (Смоленская, Калужская, Московская, Белгородская области)). В составе фауны мирмекофильных жесткокрылых Белорусского Поозерья и Беларуси отсутствуют южноевропейские, западноевропейские, центральноевропейские и северные таежные виды. Видовой состав мирмекофильных жесткокрылых как Белорусского Поозерья так и республики мало специфичен, лишен эндемиков и состоит из широко распространенных видов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Солодовников, И. А.** Сравнение видового состава сообществ мирмекофильных жесткокрылых (Insecta, Coleoptera) в гнездах *Formica exsecta*, *Formica rufa*, *Formica polyctena* на территории Белорусского Поозерья / И. А. Солодовников, Е. С. Плискевич // Вестн. Фонда фундаментал. исслед. – 2014. – № 4(70). – С. 37–46.
2. **Плискевич, Е. С.** Особенности биотопической приуроченности мирмекофильных жесткокрылых (Insecta, Coleoptera) в сезон вегетации некоторых районов

- Белорусского Поозерья / Е. С. Плискевич // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2015. – № 2–3(86–87). – С. 53–58.
3. **Silfverberg, H.** Enumeratio nova Coleopterorum Fennoscandiae, Daniae et Baltiae / H. Silfverberg // Sahlbergia. – 2004. – Vol. 9. – P. 1–111.
 4. **Paivinen, J.** Ant-associated beetles of Fennoscandia and Denmark / J. Paivinen, P. Ahlroth, V. Kaitala // Entomol. Fennica. – 2002. – Vol. 13. – P. 20–40.
 5. **Paivinen, J.** Species richness and regional distribution of myrmecophilous beetles / J. Paivinen, P. Ahlroth, V. Kaitala, J. S. Kotiaho, J. Suhonen, T. Virola // Oecologia. – 2003. – Vol. 134. – P. 587–595.
 6. **Paivinen, J.** Species richness abundance and distribution of myrmecophilous beetles in the nests of *Formica aquilonia* / J. Paivinen, P. Ahlroth, V. Kaitala, J. Suhonen // Ann. Zool. Fennici. – 2004. – Vol. 4. – P. 447–454.
 7. **Palm, T.** De nordiska Lomechusa-arterna (Col. Staphylinidae) / T. Palm // Entomologisk Tidskrift. – 1949. – Vol. 70, № 1. – P. 97–102.
 8. **Telnov, D.** Contributions to the knowledge of Latvian Coleoptera. 8. / D. Telnov, A. Bukejs, J. Gailis, M. Kalnirp, A. Napolov, U. Piterovns, K. Vilks // Latvijas Entomologs. – 2010. – Vol. 48. – P. 80–91.
 9. **Telnov, D.** Contributions to the knowledge of Latvian Coleoptera. 7. / D. Telnov, A. Bukejs, J. Gailis, M. Kalnirp // Latvijas Entomologs. – 2008. – Vol. 46. – P. 47–58.
 10. **Telnov, D.** Beetles (Coleoptera) living in the nests of *Lasius fuliginosus* (Latreille, 1798) (Hymenoptera: Formicidae) in Latvia / D. Telnov // Latv. entomol. – 2008. – Vol. 46. – P. 70–71.
 11. **Tamutis, V.** A catalogue of Lithuanian beetles (Insecta, Coleoptera) / V. Tamutis, B. Tamutl, R. Ferencs // ZooKeys. – 2011. – № 121. – P. 1–494.
 12. Каталог жесткокрылых (Coleoptera, Insecta) Беларуси / Фонд фундам. исслед. Респ. Беларусь ; сост.: О. Р. Александрович [и др.]. – Минск : ФФИ РБ, 1996. – 103 с.
 13. Katalog fauny Polski : w 22 t. / redak.: A. Goljun (red. nac) [i in.]. – Warszawa : Panstwowe wydawnictwo naukowe, 1971–2000. – Т. 5 : Chrzaszczce – Coleoptera. Histeroidea i Staphylinoidea procz Staphylinidae / B. Burakowski [i in.]. – 1978. – 356 pp.; Т. 6 : Coleoptera: Staphylinidae, czesc 1 / B. Burakowski [i in.]. – 1979. – 310 pp.; Т. 7 : Coleoptera: Staphylinidae, czesc 2 / B. Burakowski [i in.]. – 1980. – 272 pp.; Т. 8 : Coleoptera: Staphylinidae, czesc 3 / B. Burakowski [i in.]. – 1981. – 330 pp.; Т. 13 : Coleoptera: Cucujoidea / B. Burakowski [i in.]. – 1986. – 278 pp.
 14. Жесткокрылые насекомые (Insecta: Coleoptera) Национального парка “Смоленское Поозерье” / В. Б. Семенов [и др.]. – Смоленск : Меджента, 2012. – 192 с.
 15. **Semionkov, O. I.** Rove beetles (Coleoptera: Staphylinidae) of the West of the European part of Russia (excepting subfamilies Pselaphinae, Scydmaeninae and Scaphidiinae) / O. I. Semionkov, V. B. Semenov, M. Yu. Gildenkov. – Smolensk : Universum, 2015. – 392 с.
 16. **Любарский, Г. Ю.** Список видов Срутоphagidae (Coleoptera) Калужской области / Г. Ю. Любарский, С. К. Алексеев, В. В. Перов // Эверсманния. Энтомолог. исс-ия в России и соседних регионах. – 2014. – Вып. 38. – С. 7–18.
 17. **Полилов, А. А.** Фауна жуков-перистокрылок (Coleoptera, Ptilidae) Московской области / А. А. Полилов // Бюл. моск. общ-ва испытателей природы отд. биол. – 2003. – Т. 108, Вып 5. – С. 11–17.

18. **Никитский, Н. Б.** Жесткокрылые-ксилобионты, мицетобионты и пластинчатогусые Приокско-Террасного биосферного заповедника (с обзором фауны этих групп Московской области) / Н. Б. Никитский, И. Н. Осипов, М. В. Чемерис, В. Б. Семенов, А. А. Гусаков // Сборник трудов Зоологического музея МГУ. Сер. Исследования по фауне. – 1996. – Т. 36. – 197 с.
19. **Коваленко, Я. Н.** Новые локалитеты трех видов жесткокрылых надсемейства Staphylinoidea (Coleoptera) для фауны России / Я. Н. Коваленко // Евроазиатский энтомологический журнал. – 2010. – Т. 9, Вып. 4. – С. 660.
20. **Jelinek, J.** Check-list of Czechoslovak Insects IV (Coleoptera) / J. Jelinek. – Praha : Folia Neuyrovskyana, 1993. – 172 pp.
21. **Глотов, С. В.** Ландшафтно-биотопическое распределение жуков-стафилинид (Coleoptera: Staphylinidae) заповедника “Каменные Могилы” (Украина) / С. В. Глотов, Е. Ю. Савченко // Кавказский энтомологический бюллетень. – 2013. – Т. 9, Вып. 1. – С. 50–57.
22. **Перковский, Е. Э.** Холевина *Eocatops pelopis* (Coleoptera, Leioididae, Cholevinae) на юге Восточной Европы и ее прохорез на север в голоцене / Е. Э. Перковский, А. В. Гонтаренко // Вестник зоологии. – 2002. – Т. 36, Вып. 2. – С. 91–94.
23. **Дрогваленко, А. Н.** Новые и редкие для фауны Украины виды жесткокрылых насекомых (Insecta, Coleoptera) / А. Н. Дрогваленко // Известия Харьковского энтомологического общества. – 1999. – Т. 7, Вып. 1. – С. 20–29.
24. Catalogue of Palaearctic Coleoptera : Vol. 6 / ed.: I. Lobl, A. Smetana. – Stenstrup : Apollo Books, 2003–2010. – 6 vol.

Поступила в редакцию 14.03.2016 г.

Контакты: pliskevich.lena@yandex.by (Плискевич Елена Сергеевна)

Pliskevich, E. S. COMPARATIVE ANALYSIS OF SPECIES COMPOSITION OF MYRMECOPHILOUS BEETLES (INSECTA: COLEOPTERA) OF BELARUSIAN LAKELAND AND ADJACENT AREAS.

The results of the comparison of the species composition of the myrmecophilous beetles in the Belarusian Lakeland and neighboring territories are presented. It has been found out that the species composition of the myrmecophilous beetles in the Belarusian Lakeland and Belarus is well studied in comparison with that of the neighboring territories (Baltic countries, Russia (Smolensk, Kaluga, Moscow, Belgorod regions)). The species composition of the myrmecophilous beetles exclude the species inhabiting Southern Europe, Western Europe, Central Europe and living in the northern taiga. In general, the species composition of the myrmecophilous beetles in the Belarusian Lakeland and Belarus is not very specific, deprived of endemic species and consists of widespread species.

Key words: Belarusian Lakeland, myrmecophilous beetles, Staphylinidae, species composition.

УДК 619: 614.876:636.2

ВЫВЕДЕНИЕ ^{137}Cs И ^{40}K ИЗ ОРГАНИЗМА КОРОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПАХ КОРМОВЫХ РАЦИОНОВ

С. Ю. БЫКОВА,

кандидат ветеринарных наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В результате крупнейшей техногенной катастрофы на Чернобыльской АЭС произошло радиоактивное загрязнение значимых площадей во многих агроэкосистемах Беларуси. Радиоактивные элементы из кормов поступают в организм коров, где они накапливаются, а затем выводятся через желудочно-кишечный тракт, легкие, почки, кожу и молочные железы.

Проведены исследования по уточнению путей элиминации радионуклидов из организма сельскохозяйственных животных через мочу, фекалии, молоко. Выявлена зависимость выведения ^{137}Cs от типа рациона.

Работа проводилась в Могилевской области, в хозяйствах с различным радиологическим статусом на поголовье коров общественного и частного сектора.

Ключевые слова: экология, чернобыль, цезий-137, калий-40, организм, коровы, корма, поступление, выведение, молоко, моча.

Введение

Биологическая роль макро- и микроэлементов для жизнедеятельности человека и животных неоспорима. Калий – важнейший биогенный элемент, причем не только для животных и человека, но и всего растительного мира. О значимости калия для организма человека можно судить по рекомендуемой суточной дозе. Она составляет от 600 до 1700 мг для детей и от 1800 до 5000 мг для взрослых. Биологическая роль цезия пока мало изучена, однако этот элемент постоянно находят в организме, хотя и не считают его биотическим [1, с 58–62]. В то же время радиоактивные изотопы этих металлов: цезий-137 и калий-40 являются основными компонентами загрязнения биосферы.

Цезий-137 принадлежит к бета- и гамма излучателям, очень летуч, по причине чего и происходит загрязнение им обширных площадей в результате чрезвычайных ситуаций. Он относится к группе основных дозообразующих радионуклидов [2, с. 73]. Активность поверхностного слоя почвы (1-2 Ки/км²) часто обуславливает К-40. Из почвы К-40, как и цезий-137 поступают в растения, а затем с кормом в организм животного [2, с. 19].

Развитие современного общества сопряжено с расширением производства энергии, в том числе технологий, использующих радиоактивное сырье. Только на территории Республике Беларусь более 1000 достаточно крупных радиаци-

онных объектов, которые необходимы для развития социально-экономической сферы [3, с. 3]. При безаварийной работе и эксплуатации в нормальном режиме этих объектов (включая атомные электростанции) облучение персонала и населения ниже допустимых, регламентированных НРБ-76/87 [4, с. 16].

В результате крупнейшей (после Уиндескейла в 1957 г.) техногенной катастрофы в истории атомной энергетики – взрыве 4 атомного энергоблока Чернобыльской АЭС произошло радиоактивное загрязнение значимых площадей, что повлияло на экологическую ситуацию во многих агроэкосистемах Беларуси. Значение загрязнения радиоактивными элементами земель сельскохозяйственного пользования в высокой вероятности поступления их в растениеводческую продукцию, затем в организм продуктивных животных. В случае загрязнения кормовых угодий радиоактивными продуктами, основной путь их поступления в организм коров – алиментарный. В кишечнике ^{137}Cs и К-40, как и стронций, фосфор, йод, активно всасываются и разносятся по всему организму, депонируясь в различных органах.

Распределение цезия-137 в организме относится к диффузному типу, то есть равномерно по всем органам и системам, аналогичное распределение и у калия (К), натрия (N), азота (N) и других [5, с. 173].

Радиоактивные вещества, попадая в организм позвоночных животных, не только накапливаются, но и выводятся через желудочно-кишечный тракт, легкие, почки, кожу и молочные железы. Причем из мягких тканей радионуклиды удаляются легче, чем из костной ткани. Так ^{137}Cs на 45% выводится из них уже через 3 суток, а через 46 дней на 55% [6, с. 125].

Исследования, позволяющие уточнить пути поступления, а также степень элиминации радионуклидов из организма сельскохозяйственных животных через биологические жидкости, представляют интерес и являются актуальными для районов, подвергшихся загрязнению.

Основная часть

Целью данной работы являлось установление зависимости поступления и выделения цезия-137 и К-40 из организма коров частного и общественного секторов.

В задачи исследования входили экспериментальные исследования по определению радионуклидов в основных компонентах пищевой цепи (вода, сено, болтушка), а также наличие цезия-137 в моче, фекалиях, молоке коров, в продуктах молочного производства (творог), мышечной ткани и печени убитых животных.

Работа проводилась в хозяйствах Могилевской области, имевших различный радиозэкологический статус (деревня Селец, Быховского района и деревня Новоселки, Могилевского района). Молоко и молочные продукты частного и общественного секторов деревни Новоселки, Могилевского района никогда не имели отклонений по стандарту в отношении радионуклидов. На его территории отсутствуют пастбища и сенокосные угодья, не предназначенные для выпаса или кошения трав на корм скоту вследствие повышенного содержания радионуклидов.

Сельскохозяйственные угодья д. Селец, напротив, частично были запрещены как для выпаса, так для кошения трав на сено, частично использовались с ограничениями. Так, например, из 37 кормовых угодий – 19 были непригодными либо по агрономическому, либо по радиационному факторам. Отбор проб проводили в соответствии с “Методикой отбора проб для измерения активности спектрометрическим методом”.

Измерения удельной активности цезия-137 и калия-40 проводили спектрометрическим методом на приборе гамма-бета спектрометре МКС-АТ 1315 по методике МВИ. МН 1181-2007.

Были взяты 22 пробы молока и сено владельцев частных коров, 15 проб – молока общественного сектора, 4 пробы творога, 20 проб мяса (мышечная ткань и печень), сено частных подворий. Объем проб составлял 1 литр в отношении молока и биологических жидкостей и 1 килограмм твердой или сухой сельскохозяйственной продукции. Транспортировка проб производилась в стеклянной или пластиковой посуде. Согласно “Методике отбора проб для измерения активности спектрометрическим методом” хранение проб допускается не более трех дней после отбора, при температуре не выше +4°C, однако для наших исследований случаев хранения проб не было, их доставляли и исследовали в течение 3–4 часов.

Проведенные исследования показали, что содержание ^{137}Cs в сене, как частного, так и общественного сектора в 2-2,5 раза выше (рис. 1), чем его содержание в сельскохозяйственных продуктах. Это обусловлено коэффициентом перехода радионуклидов из почвы в растения, а далее из растительных кормов в органы сельскохозяйственных животных.

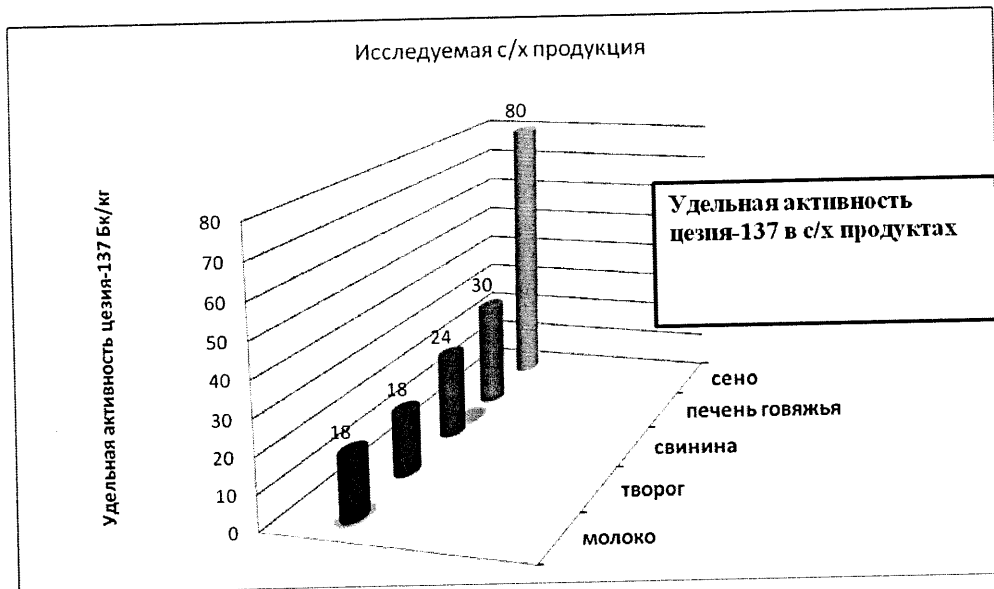


Рисунок 1 – Сравнительная диаграмма, отражающая удельную активность цезия-137 в сене и продуктах животноводства Быховского района в д. Селец

Полученные данные по радиоактивным элементам не превышали допустимые уровни их содержания в основных видах кормов и конечной продукции. Кроме того, в рационе коров сено составляло лишь 30% от общего кормового рациона.

Анализ молока из частного сектора 22 различных дворов (рис. 2) показал, что 88% представленных проб имели практически одинаковые показатели по содержанию цезия-137, лишь первые три и последняя пробы отличаются.



Рисунок 2 – Удельная активность цезия-137, калия-40 в пробах молока частного сектора Быховского района н.п. “Селец”

Содержание ^{40}K имеет значительный разброс в показателях, причем в пробах не обнаружено какой-либо зависимости между содержанием цезия-137 и калия-40, кроме последней, 22 пробы (рис. 2), где видна прямая зависимость между радиоцезием и радиокалием. Нужно отметить, что физико-химические свойства ^{137}Cs близки к ^{40}K , и калий является химическим аналогом цезия. Превышения ПДУ РБ по цезию-137 и калию-40 не обнаружено. На диаграммах (рис. 3, 4) показатели содержания радионуклидов в пробах общественного и частного поголовья коррелируют. Однако абсолютные значения имеют отличия.

Так содержание цезия в сене частных подворий на 45% выше, чем в сене для коров общественного стада, но содержание ^{137}Cs ниже в молоке частного хозяина.

Согласно литературным данным основные пути выведения цезия-137 через мочевыделительный тракт. Однако в наших исследованиях получены несколько другие результаты.

Количество выделяемого с фекалиями цезия-137 преобладало над таковым в моче. Удельная активность ^{137}Cs в фекалиях коров общественного сектора составляла 16,99 Бк/кг, а частного сектора 14,72 Бк/кг, по сравнению с удельной активностью ^{137}Cs в моче 12,17 Бк/л и 11,22 Бк/л соответственно обществу и частному поголовью. Такие результаты вполне объяснимы. Дело в

том, что содержание ^{137}Cs в кормовых компонентах было выше в сене и соломе, то есть грубых кормах, в которых высока доля непереваримой клетчатки. Она в виде непереваримых остатков выводится через желудочно-кишечный тракт, в то время как жидкостные компоненты: вода, болтушка, выводятся с мочой. Следовательно, путь выведения радионуклидов цезия в данном случае определялся типом кормления.



Рисунок 3 – Удельная активность цезия-137 (Бк/л, Бк/кг) в сельскохозяйственной продукции, биологических жидкостях, кормах Могилевского района н.п. “Новоселки”. хотя превышения ПДН не обнаружено ни в том, ни в другом случае

Относительно радионуклидов калия-40 из рисунка 4 видно, что основные пути выведения его – мочевыделительный тракт, причем у частника, при концентратном кормлении интенсивность выше.

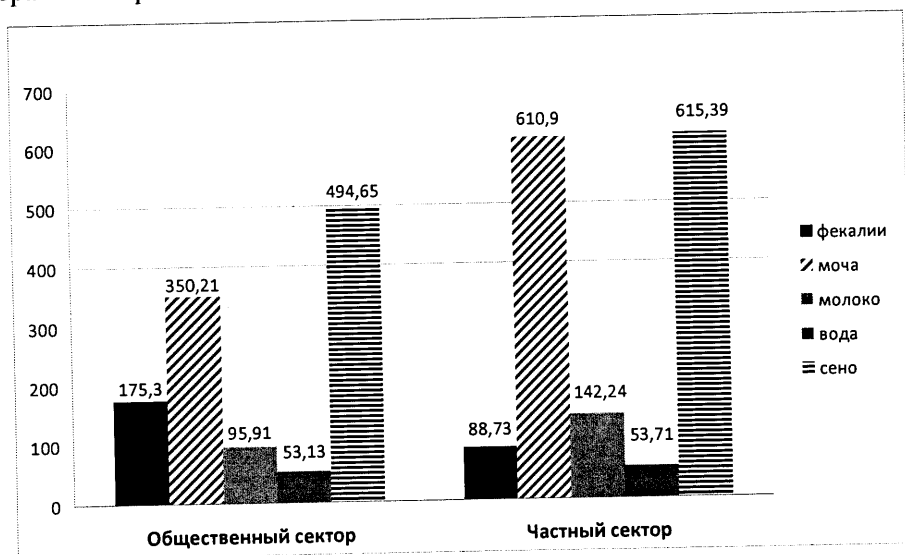


Рисунок 4 – Удельная активность калия-40 в сельскохозяйственной продукции, биологических жидкостях, кормах Могилевского района н.п. “Новоселки”

Удельная активность ^{40}K в моче коров общественного сектора составляла 350,21 Бк/л, а частного сектора 610,9 Бк/л, по сравнению с удельной активностью в фекалиях 175,3 Бк/кг и 88,73 Бк/кг соответственно общественному и частному поголовью. В молоке частника радиоактивного калия-40 было 142,24 Бк/л, а в молоке общественного стада 95,91 Бк/л.

Мы не ставили своей целью выявлять в сельскохозяйственной продукции и продуктах жизнедеятельности коров повышенное содержание цезия-137 (или других радионуклидов). Однако выявили, что радиоактивный калий, поступивший с грубыми кормами, выводится в основном с мочой (80%), фекалиями (15%), молоком (5%).

Заключение

Таким образом, на основании проделанной работы можно сделать следующие **выводы**:

– Основной путь выведения ^{137}Cs из организма коров, где преобладал рацион с грубыми кормами, является желудочно-кишечный тракт (фекалии).

– Содержание цезия-137 в молоке исследуемых проб не превышал республиканского допустимого уровня, и не зависел от его содержания в сене.

– ^{40}K , поступивший с грубыми кормами, выводится в основном с мочой (80%), с фекалиями (15%), молоком (5%).

Для обеспечения населения Республики Беларусь продуктами животного происхождения, в которых содержание радионуклидов ниже допустимого уровня в Республике придерживаются стратегии уменьшения загрязненности продуктов животноводства. Данная стратегия предусматривает:

а) получение чистых кормов, что обеспечивается предупреждением попадания радионуклидов в растения с обогащением почвы фосфорными и калийными удобрениями. Такой технологический прием позволяет уменьшить вдвое переход радионуклидов в растения. Это обусловлено тем, что в процессе перехода некоторых радионуклидов из почвы в растения, их изотопы, близкие по своим химическим свойствам к стабильным элементам, усваиваются растениями хуже. Сложнее дело обстоит с загрязнением кормовых угодий через наземную поверхность растений. В этом случае цезий-137, будучи подвижным элементом, быстро оказывается во всех частях растений;

б) технологию откорма крупного рогатого скота;

в) переработку молока на продукты, лишенные молочной сыворотки, что резко уменьшает содержание цезия-137 и его соединений вследствие свойств переходить в водную фазу.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Коваленко, Л. И. Радиометрический ветеринарно-санитарный контроль кормов, животных и продуктов животноводства / Л. И. Коваленко. – Киев : Ураджай, 1987. – 192 с.
2. Радиационная медицина : учебное пособие / А. Н. Стожаров, Л. А. Квиткевич, А. Р. Аветисов [и др.] ; под общ. ред. А. Н. Стожарова. – 2 изд., перераб. и доп. – Минск : БГМУ, 2002. – 143 с.

3. Радиационная безопасность : пособие для студентов гуманитар. фак. / В. И. Дунай [и др.]. – Минск : БГУ, 2011. – 63 с.
4. **Василенко, И. Я.** Токсикология продуктов ядерного деления / И. Я. Василенко. – Москва : Медицина, 1999. – 200 с.
5. **Маврищев, В. В.** Радиозэкологія і радыяцыйная бяспаснасць: пазобіе для студэнтаў вузав / В. В. Маврыцэв, А. Э. Высоцкі, Н. Г. Соловьева. – Минск : ТетраСистемс, 2010. – 208 с.
6. **Макаревич, Т. А.** Радиозэкологія : пазобіе / Т. А. Макаревич. – Минск : БГУ, 2013. – 136 с.

Поступила в редакцию 05.2016 г.

Контакты: S_bukova@mail.ru (Быкова Светлана Юрьевна)

Bykova S. Y. ^{137}Cs AND ^{40}K EXCRETION IN COWS WITH DIFFERENT FEED ALLOWANCE.

As a result of the largest technogenic catastrophe at the Chernobyl power plant radioactive contamination has affected significant acreage in many agro-ecosystems of Belarus. Radioactive elements in food penetrate the body of cows, where they accumulate, and then excrete through the gastrointestinal tract, lungs, kidneys, skin and mammary glands. The research on the elimination of radionuclides from the body of farm animals through urine, feces, milk has been carried out. The dependence of ^{137}Cs excretion on the type of diet has been revealed. The research has been done in the Mogilev region, at the farms with different radioecological status of public and private sector.

Key words: ecology, Chernobyl, cesium-137, potassium-40, organism, cows, feed, accumulation, excretion, milk, urine.