

ISSN 2409-3777



ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта
імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

1 (47)
2016

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (галоўны рэдактар)
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук дацэнт Д.С. Лаўрыновіч (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)

*Научно-методический журнал “Вестник Магилёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова” включен в РИНЦ
(Российский индекс научного цитирования),
лицензионный договор № 811–12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

© МДУ імя А. А. Куляшова, 2016

ЗМЕСТ

ГАЛЬМАК А. М. О l -арной операции $[]_{i,t,j}$	4
ЛАПТИНСКИЙ В. Н., МАКОВЕЦКАЯ О. А. Анализ периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати.....	14
БОРБАТ В. Н. Оценка размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданным порядком аппроксимации алгебраическими числами.....	23
РЫКОВА О. В., САКОВИЧ Н. В., ШАМУКОВА Н. В. О количестве рациональных точек с ограниченными знаменателями в коротких интервалах различных типов.....	28
МОРОЗОВ Н. П. Приведение автономных систем второго порядка к специальному виду. Естественный гамильтониан системы.....	32
ЕФРЕМОВ А. А. О задаче нелинейной оптимизации кусочно-постоянной целевой функции.....	43
ЛЕБЕДЕВ В. И., МАРУШЕНКО М. И. Особенности генерации фемтосекундных импульсов полосковым полупроводниковым лазером.....	54
МАРУШЕНКО М. И. Измерение длительности фемтосекундных импульсов полупроводникового лазера по АКФ первого порядка.....	62
ЧЕРНОВ С. М. Оценка параметров гиперядер в простых моделях.....	66
КУЛЬГЕЙКО Н. М., ОСТРИКОВ О. М. Закономерности образования двойников у границ царапины при скрайбировании поверхности (111) монокристалла висмута индентором Виккерса.....	74
СОРОКА А. В., АКУЛИЧ Н. В., КНЯЗЕВА Н. А., БРУХНОВ В. А. Противоопухолевый фармакологический потенциал представителей семейства <i>Cactaceae juss</i> , выращенных в условиях оранжереи, (эксперименты <i>in vitro</i>).....	82
ЦУРИКОВ А. Г., ГОЛУБКОВ В. В., БЕЛЫЙ П. Н. Ревизия лишайников рода <i>Leparia</i> в Беларуси: <i>L. jackii</i> и <i>L. rigidula</i>	91
ЕЛОВИЧЕВА Я. К. Фиторазнообразие территории Беларуси в голоцене и гляциоплейстоцене (по палинологическим данным).....	98

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

О l -АРНОЙ ОПЕРАЦИИ $[]_{l, T, J}$

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет продовольствия

В статье доказываются анонсированные автором ранее результаты об l -арной операции $[]_{l, T, J}$ которая определяется для любого целого $l \geq 2$, любого непустого множества J и любой полугруппы A на декартовом произведении $T \times A^J$, где T – подмножество симметрической группы S_J всех биекций множества J на себя, A^J – множество всех функций с областью определения J и со значениями в полугруппе A .

Ключевые слова: l -арная операция, абелева l -арная операция, группоид.

1. Введение

Данная статья является продолжением статьи [1], в которой впервые было дано определение l -арной операции $[]_{l, T, J}$. Частными случаями этой l -арной операции являются изучавшиеся ранее автором l -арные операции $[]_{l, \sigma, k}$ [2], $[]_{l, \sigma, J}$ [3] и $[]_{l, T, k}$ [4]. В свою очередь, частными случаями l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ являются две полиадические операции Э. Поста, которые он определил [5] на упорядоченных наборах подстановок и упорядоченных наборах матриц соответственно. В указанной выше статье [1], ввиду ограниченности ее объема, для некоторых результатов были приведены только их формулировки без доказательств. В данной статье приводятся соответствующие доказательства.

Мы предполагаем известными определения l -арной полугруппы, l -арной группы, абелевой l -арной операции и косога элемента l -арной группы.

2. Операция $[]_{l, S_J, J}$

Пусть A – группоид, J – произвольное непустое множество, σ – подстановка из S_J . Определим на A^J бинарную операцию $x \overset{\sigma}{\circ} y$, полагая

$$(x \overset{\sigma}{\circ} y)(j) = x(j)y(\sigma(j)), j \in J.$$

Далее для любого целого $l \geq 2$, любого непустого множества J и любого группоида A определим на множестве

$$S_J \times A^J = \{(\sigma, \mathbf{a}) \mid \sigma \in S_J, \mathbf{a} \in A^J\}$$

l -арную операцию $[]_{l, S_J, J}$ следующим образом:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_p, \mathbf{x}_p)]_{l, S_J, J} = (\sigma, \mathbf{y}), \quad (2.1)$$

где

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma_1}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma_2}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma_{l-2}}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l)) \dots)). \quad (2.3)$$

Умножение подстановок в правой части (2.2) осуществляется по правилу $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l(j) = \sigma_l(\dots \sigma_2(\sigma_1(j)) \dots)$.

Теорема 2.1. [1]. *Функция \mathbf{y} , определяемая равенством (2.3), принимает в каждой точке $j \in J$ значение*

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))(\dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j))) \dots)).$$

Операция $[]_{l, S_k, k}$. Если в определении операции $[]_{l, S_k, k}$ положить $J = \{1, 2, \dots, k\}$, где $k \geq 2$, то на множестве $S_k \times A^k$ определена l -арная операция $[]_{l, S_k, k}$ по правилу:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_p, \mathbf{x}_p)]_{l, S_k, k} = (\sigma, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k))$$

для любых

$$(\sigma_p, \mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})) \in S_k \times A^k, i = 1, \dots, l,$$

где $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p$, а все компоненты y_j определяются, согласно теореме 2.1, формулой

$$y_j = x_{1j}(x_{2\sigma_1(j)}(\dots (x_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j)}x_{l\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)}) \dots)), j = 1, 2, \dots, k.$$

Заметим, что для полугруппы A операция $[]_{l, S_k, k}$ определена в [4].

Операция $[]_{l, S_N, N}$. Если в определении операции $[]_{l, S_J, J}$ положить $J = N$, то на множестве $S_N \times A^N$ определена l -арная операция $[]_{l, S_N, N}$ по правилу:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_p, \mathbf{x}_p)]_{l, S_N, N} = (\sigma, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots))$$

для любых

$$(\sigma_p, \mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}, \dots)) \in S_N \times A^N, i = 1, \dots, l,$$

где $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p$, а все компоненты y_j определяются, согласно теореме 2.1, формулой

$$y_j = x_{1j}(x_{2\sigma_1(j)}(\dots (x_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j)}x_{l\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)}) \dots)), j \in N.$$

Операция $[]_{l, S_Z, Z}$. Если в определении операции $[]_{l, S_J, J}$ положить $J = Z$, то на множестве $S_Z \times A^Z$ определена l -арная операция $[]_{l, S_Z, Z}$ по правилу:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_p, \mathbf{x}_p)]_{l, S_Z, Z} = (\sigma, \mathbf{y} = (\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots))$$

для любых

$$(\sigma_p, \mathbf{x}_i = (\dots, x_{i(-2)}, x_{i(-1)}, x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \dots)) \in S_Z \times A^Z, i = 1, \dots, l,$$

где $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p$, а все компоненты y_j определяются, согласно теореме 2.1, формулой

$$y_j = x_{1j}(x_{2\sigma_1(j)}(\dots(x_{(l-1)\sigma_1\dots\sigma_{l-2}(j)}x_{l\sigma_1\dots\sigma_{l-1}(j)})\dots)), j \in Z.$$

Предложение 2.1. [1]. Если A – полугруппа, то для любого $m \geq 2$, всех i и l таких, что $1 \leq i+1 \leq i+l \leq m$ и любых

$$\mathbf{u}_1 = (\sigma_1, \mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{u}_m = (\sigma_m, \mathbf{x}_m) \in \mathbf{S}_J \times A^J$$

верно равенство

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m]_{m, \mathbf{S}_J, J} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_i [\mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_J, J} \mathbf{u}_{i+l+1} \dots \mathbf{u}_m]_{m-l+1, \mathbf{S}_J, J}.$$

Доказательство. Положим

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m]_{m, \mathbf{S}_J, J} = (\alpha, \mathbf{b}) = \mathbf{p}, [\mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_J, J} = (\beta, \mathbf{c}) = \mathbf{q},$$

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_i [\mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_J, J} \mathbf{u}_{i+l+1} \dots \mathbf{u}_m]_{m-l+1, \mathbf{S}_J, J} = (\gamma, \mathbf{d}) = \mathbf{r}.$$

Так как

$$\alpha = \sigma_1, \dots, \sigma_m, \beta = \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{i+l},$$

$$\gamma = \sigma_1 \dots \sigma_i \beta \sigma_{i+l+1} \dots \sigma_m = \sigma_1 \dots \sigma_i (\sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l}) \sigma_{i+l+1} \dots \sigma_m = \sigma_1 \dots \sigma_m,$$

то

$$\alpha = \gamma. \quad (2.4)$$

Ясно, что

$$\mathbf{b}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \dots \mathbf{x}_m(\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}(j)), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}_{i+1}(t)\mathbf{x}_{i+2}(\sigma_{i+1}(t))\mathbf{x}_{i+3}(\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}(t)) \dots \mathbf{x}_{i+l}(\sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l-1}(t)) \quad (2.6)$$

для любых $j, t \in J$.

Полагая в (2.6) $t = \sigma_1 \dots \sigma_i(j)$ и учитывая равенство $\beta = \sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l}$, получим

$$\mathbf{d}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \dots \mathbf{x}_i(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j))\mathbf{c}(\sigma_1 \dots \sigma_i(j))$$

$$\mathbf{x}_{i+l+1}(\sigma_1 \dots \sigma_i \beta(j)) \dots \mathbf{x}_m(\sigma_1 \dots \sigma_i \beta \sigma_{i+l+1} \dots \sigma_{m-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \dots \mathbf{x}_i(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j))\mathbf{x}_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_i(j))$$

$$\mathbf{x}_{i+2}(\sigma_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_i(j))) \dots \mathbf{x}_{i+l}(\sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_i(j)))$$

$$\mathbf{x}_{i+l+1}(\sigma_1 \dots \sigma_i \sigma_{i+l+1} \dots \sigma_{i+l}(j)) \dots \mathbf{x}_m(\sigma_1 \dots \sigma_i \sigma_{i+l+1} \dots \sigma_{i+l} \sigma_{i+l+1} \dots \sigma_{m-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \dots \mathbf{x}_i(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j))\mathbf{x}_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_i(j))$$

$$\mathbf{x}_{i+2}(\sigma_1 \dots \sigma_i \sigma_{i+1}(j)) \dots \mathbf{x}_{i+l}(\sigma_1 \dots \sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l-1}(j))$$

$$\mathbf{x}_{i+l+1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i+l}(j)) \dots \mathbf{x}_m(\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}(j)) =$$

$$= \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \dots \mathbf{x}_m(\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}(j)),$$

то есть

$$\mathbf{d}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \dots \mathbf{x}_m(\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}(j)). \quad (2.7)$$

для любого $j \in J$.

Из (2.4), (2.5) и (2.7) вытекает $\mathbf{p} = \mathbf{r}$. Следовательно, равенство из формулировки предложения верно. Предложение доказано.

Доказательство следующей теоремы, опирающееся на предложение 2.1, приведено в [1].

Теорема 2.2. [1]. *Если A – полугруппа, то для любого $l \geq 2$ операция $[]_{l, S_J, J}$ ассоциативна, то есть универсальная алгебра $\langle S_J \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$ является l -арной полугруппой с l -арной операцией (2.1), где*

$$y(j) = x_1(j)x_2(\sigma_1(j)) \dots x_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j))x_l(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)), j \in J.$$

3. ОПЕРАЦИЯ $[]_{l, T, J}$

Определим на множестве S_J l -арную операцию $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l)_l = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l$, которая, как несложно заметить, является ассоциативной. Другими словами, $\langle S_p, ()_l \rangle$ – l -арная полугруппа. Так как S_p – группа, то $\langle S_p, ()_l \rangle$ – l -арная группа.

Предложение 3.1. [1]. *Если подмножество $T \subseteq S_J$ замкнуто относительно l -арной операции $()_p$, то множество $T \times A^J$ замкнуто относительно l -арной операции $[]_{l, S_J, J}$, то есть $\langle T \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$ – l -арный подгруппоид l -арного группоида $\langle S_J \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$. Если же A – полугруппа, то $\langle T \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$ – l -арная подполугруппа l -арной полугруппы $\langle S_J \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$.*

Доказательство. Если $(\sigma_i, x_i) \in T \times A^J$, $i = 1, \dots, l$, то из (2.1) – (2.3) и замкнутости T относительно l -арной операции $()_p$ вытекает

$$[(\sigma_1, x_1)(\sigma_2, x_2) \dots (\sigma_p, x_p)]_{l, S_J, J} \in T \times A^J.$$

Если A – полугруппа, то ассоциативность операции $[]_{l, S_J, J}$ вытекает из теоремы 2.2. Предложение доказано.

Замечание 3.1. Если T – подполугруппа группы S_p , то множество T замкнуто относительно l -арной операции $()_p$, то есть $\langle T, ()_l \rangle$ – l -арная подполугруппа l -арной группы $\langle S_p, ()_l \rangle$.

Из предложения 3.1, ввиду замечания 3.1, вытекает

Следствие 3.1. *Если T – подполугруппа группы S_p , то множество $T \times A^J$ замкнуто относительно l -арной операции $[]_{l, S_J, J}$, то есть $\langle T \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$ – l -арный подгруппоид l -арного группоида $\langle S_J \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$. Если же A – полугруппа, то $\langle T \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$ – l -арная подполугруппа l -арной полугруппы $\langle S_J \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$.*

Для группоида A , целого $l \geq 2$ и подмножества $T \subseteq S_J$ определим на $S_J \times A^J$ частичную l -арную операцию $[]_{l, T, J}$ следующим образом: для любых l элементов

$$(\sigma_i, x_i) \in S_J \times A^J, i = 1, \dots, l$$

положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_p, \mathbf{x}_p)]_{l, T, J} = [(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_p, \mathbf{x}_p)]_{l, S_J, J},$$

если $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l \in T$; если же, по крайней мере, одна из подстановок $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$ не принадлежит T , то элемент $[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_p, \mathbf{x}_p)]_{l, T, J}$ считается неопределенным.

Ясно, что при $T = S_J$ операция $[]_{l, T, J}$ определена на всем множестве $S_J \times A^J$ и совпадает с операцией $[]_{l, S_J, J}$.

Замечание 3.2. Если $\sigma_1, \dots, \sigma_l \in T$, то, согласно определению операции $[]_{l, T, J}$

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_p, \mathbf{x}_p)]_{l, T, J} = (\sigma, \mathbf{y}),$$

где σ и \mathbf{y} определяются с помощью (2.2) и (2.3) соответственно.

Замечание 3.3. Если подмножество $T \subseteq S_J$ замкнуто относительно l -арной операции $()_p$, то, согласно определению операции $[]_{l, T, J}$ она определена для любых l элементов множества $T \times A^J$, а ее результат принадлежит этому же множеству. Поэтому в этом случае операции $[]_{l, S_J, J}$ и $[]_{l, T, J}$ определены на всем указанном множестве и совпадают на нем.

Замечание 3.3, предложение 3.1 и следствие 3.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.1. [1]. Если A – группоид (полугруппа), подмножество $T \subseteq S_J$ замкнуто относительно l -арной операции $()_p$, в частности, T – подполугруппа группы S_p , то $\langle T \times A^J, []_{l, T, J} \rangle$ – l -арный группоид (l -арная полугруппа).

Замечание 3.4. l -Арный группоид (l -арную полугруппу) $\langle T \times A^J, []_{l, T, J} \rangle$ из теоремы 3.1 можно рассматривать как l -арный подгруппоид l -арного группоида (l -арную подполугруппу l -арной полугруппы) $\langle T \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$ так как, согласно

замечанию 3.3, операции $[]_{l, S_J, J}$ и $[]_{l, T, J}$ на множестве $T \times A^J$ совпадают.

Если для подстановки $\sigma \in S_J$ выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \{\sigma\}, ()_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_p, ()_l \rangle$. Поэтому из теоремы 3.1 при $T = \{\sigma\}$ вытекает

Теорема 3.2. [1]. Если A – группоид (полугруппа), подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \{\sigma\} \times A^J, []_{l, \{\sigma\}, J} \rangle$ – l -арный группоид (l -арная полугруппа).

Следующая лемма позволяет отождествить l -арную операцию $[]_{l, \{\sigma\}, J}$ и l -арную операцию $[]_{l, \sigma, J}$ из [3].

Лемма 3.1. Если A – группоид, подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\varphi: (\sigma, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{a}$ является изоморфизмом l -арного группоида $\langle \{\sigma\} \times A^J, []_{l, \{\sigma\}, J} \rangle$ на l -арный группоид $\langle A^J, []_{l, \sigma, J} \rangle$.

4. НЕАБЕЛЕВОСТЬ $\langle S_J \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$

Теорема 4.1. [1]. Пусть l -арная подполугруппа $\langle T, ()_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_p, ()_l \rangle$ содержит нетождественную подстановку, группоид A содержит

единицу и элемент, отличный от этой единицы. Тогда l -арный группоид $\langle T \times A^J, []_{l,T,J} \rangle$ не является абелевым.

Доказательство. Пусть подстановка σ из T не является тождественной, то есть существует $j \in J$ с условием $\sigma(j) \neq j$. Пусть также 1 – единица группоида A , a – его элемент, отличный от 1 . Определим функции $\mathbf{e}, \mathbf{a} \in A^J$ следующим образом:

$$\mathbf{e}(t) = 1, t \in J; \mathbf{a}(j) = a, \mathbf{a}(s) = 1, s \in J, s \neq j.$$

Для элементов $(\sigma, \mathbf{e}), (\sigma, \mathbf{a}) \in T \times A^J$ положим

$$[(\sigma, \mathbf{a})(\sigma, \mathbf{e}), \dots, (\sigma, \mathbf{e})]_{l,T,J} = (\sigma', \mathbf{y}) \in T \times A^J,$$

$$[(\sigma, \mathbf{e})(\sigma, \mathbf{a})(\sigma, \mathbf{e}), \dots, (\sigma, \mathbf{e})]_{l,T,J} = (\sigma', \mathbf{z}) \in T \times A^J.$$

Тогда, согласно определению операции $[]_{l,T,J}$

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{a}(j) \underbrace{1 \dots 1}_{l-1} = \mathbf{a}(j) = a,$$

то есть $\mathbf{y}(j) = a$. Согласно тому же определению,

$$\mathbf{z}(j) = 1 \mathbf{a}(\sigma(j)) \underbrace{1 \dots 1}_{l-2} = \mathbf{a}(\sigma(j)),$$

откуда, ввиду $\sigma(j) \neq j$, следует $\mathbf{z}(j) = 1 \neq a = \mathbf{y}(j)$, то есть $\mathbf{y}(j) \neq \mathbf{z}(j)$, откуда вытекает

$$[(\sigma, \mathbf{a})(\sigma, \mathbf{e}), \dots, (\sigma, \mathbf{e})]_{l,T,J} \neq [(\sigma, \mathbf{e})(\sigma, \mathbf{a})(\sigma, \mathbf{e}), \dots, (\sigma, \mathbf{e})]_{l,T,J}$$

Следовательно, l -арный группоид $\langle T \times A^J, []_{l,T,J} \rangle$ неабелев. Теорема доказана.

Замечание 4.1. В доказательстве предыдущей теоремы при нахождении элемента $\mathbf{z}(j)$, для сокращения записей, в длинных произведениях элементов из A не были расставлены скобки, указывающие порядок выполнения операции. Считаем, что элементы перемножаются последовательно справа налево.

Замечание 4.2. Если $T = \{\sigma\}$, где σ – тождественная подстановка, то l -арный группоид $\langle T \times A^J, []_{l,T,J} \rangle$ может быть абелевым. Для этого достаточно абелевости группоида A .

5. l -АРНАЯ ГРУППА $\langle T \times A^J, []_{l,T,J} \rangle$

Теорема 5.1. [1]. Пусть $\langle T, ()_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_p, ()_l \rangle$, A – группа. Тогда $\langle T \times A^J, []_{l,T,J} \rangle$ – l -арная группа. В частности, $\langle S_J \times A^J, []_{l,S_J,J} \rangle$ – l -арная группа.

Доказательство. Согласно теореме 3.1, $\langle T \times A^J, []_{l,T,J} \rangle$ – l -арная полугруппа. Осталось доказать разрешимость в $T \times A^J$ уравнений

$$[(\delta, \mathbf{x})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_p, \mathbf{a}_p)]_{l,T,J} = (\sigma, \mathbf{b}), \quad (5.1)$$

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{l-1}, \mathbf{a}_{l-1})(\gamma, \mathbf{y})]_{l,T,J} = (\sigma, \mathbf{b}), \quad (5.2)$$

где

$$(\sigma, \mathbf{b}), (\sigma_i, \mathbf{a}_i) \in T \times A^J, i = 1, \dots, l.$$

В l -арной группе $\langle T, (\cdot)_i \rangle$ существуют такие $\rho, \tau \in T$, что

$$(\rho\sigma_2 \dots \sigma_l)_i = \sigma, (\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}\tau)_i = \sigma. \quad (5.3)$$

Для любого $j \in J$ положим

$$\mathbf{u}(j) = \mathbf{b}(j)(\mathbf{a}_l(\rho\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{a}_3(\rho\sigma_2(j)))^{-1}(\mathbf{a}_2(\rho(j)))^{-1} \quad (5.4)$$

и покажем, что $(\rho, \mathbf{u}) \in T \times A^J$ является решением уравнения (5.1). Для этого положим

$$[(\rho, \mathbf{u})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, T, J} = (\mu, \mathbf{d}). \quad (5.5)$$

Согласно замечанию 3.3, операции $[]_{l, S_J, J}$ и $[]_{l, T, J}$ на множестве $T \times A^J$ совпадают. Поэтому

$$[(\rho, \mathbf{u})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, T, J} = [(\rho, \mathbf{u})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, S_J, J},$$

то есть

$$[(\rho, \mathbf{u})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, S_J, J} = (\mu, \mathbf{d}).$$

Из этого равенства, согласно определению операции $[]_{l, S_J, J}$ и, ввиду первого равенства из (5.3), а также равенства (5.4), имеем

$$\begin{aligned} \mu &= \rho\sigma_2 \dots \sigma_l = (\rho\sigma_2 \dots \sigma_l)_i = \sigma, \\ \mathbf{d}(j) &= \mathbf{u}(j)\mathbf{a}_2(\rho(j))\mathbf{a}_3(\rho\sigma_2(j)) \dots \mathbf{a}_l(\rho\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)) = \\ &= \mathbf{b}(j)(\mathbf{a}_l(\rho\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{a}_3(\rho\sigma_2(j)))^{-1}(\mathbf{a}_2(\rho(j)))^{-1} \\ &\quad \mathbf{a}_2(\rho(j))\mathbf{a}_3(\rho\sigma_2(j)) \dots \mathbf{a}_l(\rho\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)) = \mathbf{b}(j), j \in J. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\mu, \mathbf{d}) = (\sigma, \mathbf{b}),$$

откуда и из (5.5) вытекает

$$[(\rho, \mathbf{u})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, T, J} = (\sigma, \mathbf{b}),$$

то есть уравнение (5.1) разрешимо в $T \times A^J$.

Для любого $j \in J$ определим функцию $\mathbf{v} \in A^J$ так, что

$$\mathbf{v}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)) = (\mathbf{a}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{a}_2(\sigma_1(j)))^{-1}(\mathbf{a}_1(j))^{-1}\mathbf{b}(j) \quad (5.6)$$

и покажем, что $(\tau, \mathbf{v}) \in T \times A^J$ является решением уравнения (5.2). Для этого положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{l-1}, \mathbf{a}_{l-1})(\tau, \mathbf{v})]_{l, T, J} = (\eta, \mathbf{c}). \quad (5.7)$$

Снова, используя совпадение операций $[]_{l, S_J, J}$ и $[]_{l, T, J}$ на множестве $T \times A^J$, получим

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{l-1}, \mathbf{a}_{l-1})(\tau, \mathbf{v})]_{l, S_J, J} = (\eta, \mathbf{c}).$$

Из этого равенства, согласно определению операции $[]_{l, S_J, J}$ и, ввиду второго равенства из (5.3), а также равенства (5.6), имеем

$$\begin{aligned} \eta &= \sigma_1 \dots \sigma_{l-1} \tau = (\sigma_1 \dots \sigma_{l-1} \tau)_l = \sigma, \\ \mathbf{c}(j) &= \mathbf{a}_1(j) \mathbf{a}_2(\sigma_1(j)) \dots \mathbf{a}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j)) \mathbf{v}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)) = \\ &= \mathbf{a}_1(j) \mathbf{a}_2(\sigma_1(j)) \dots \mathbf{a}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j)) \\ &(\mathbf{a}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{a}_2(\sigma_1(j)))^{-1} (\mathbf{a}_1(j))^{-1} \mathbf{b}(j) = \mathbf{b}(j), j \in J. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\eta, \mathbf{c}) = (\sigma, \mathbf{b}),$$

откуда и из (5.7) вытекает

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{l-1}, \mathbf{a}_{l-1}) (\tau, \mathbf{v})]_{l, T, J} = (\sigma, \mathbf{b}),$$

то есть уравнение (5.2) также разрешимо в $T \times A^J$. Таким образом, доказано, что $\langle T \times A^J, []_{l, T, J} \rangle - l$ -арная группа.

Полагая $T = S_p$, получим утверждение теоремы для множества $S_J \times A^J$. Теорема доказана.

Замечание 5.1. Ввиду замечания 3.3, l -арную группу $\langle T \times A^J, []_{l, T, J} \rangle$ из теоремы 5.1 можно рассматривать как l -арную подгруппу l -арной группы $\langle S_J \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$. В дальнейшем мы не будем оговаривать эту ситуацию для различных конкретных множеств T .

Следствие 5.1 [4]. Пусть $\langle T, ()_l \rangle - l$ -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_k, ()_l \rangle$, $A -$ группа. Тогда $\langle T \times A^k, []_{l, T, k} \rangle - l$ -арная группа. В частности, $\langle S_k \times A^k, []_{l, S_k, k} \rangle - l$ -арная группа.

Следствие 5.2. Пусть $\langle T, ()_l \rangle - l$ -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_N, ()_l \rangle$, $A -$ группа. Тогда $\langle T \times A^N, []_{l, T, N} \rangle - l$ -арная группа. В частности, $\langle S_N \times A^N, []_{l, S_N, N} \rangle - l$ -арная группа.

Следствие 5.3. Пусть $\langle T, ()_l \rangle - l$ -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_Z, ()_l \rangle$, $A -$ группа. Тогда $\langle T \times A^Z, []_{l, T, Z} \rangle - l$ -арная группа. В частности, $\langle S_Z \times A^Z, []_{l, S_Z, Z} \rangle - l$ -арная группа.

6. КОСЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Теорема 6.1. Пусть $\langle T, ()_l \rangle - l$ -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_p, ()_l \rangle$, $A -$ группа. Тогда для любого элемента (σ, \mathbf{a}) l -арной группы $\langle T \times A^J, []_{l, T, J} \rangle$ элемент

$$(\sigma^{2-l}, \mathbf{u}) = (\bar{\sigma}, \mathbf{u}), \quad (6.1)$$

где функция $\mathbf{u} \in A^J$ определяется равенством

$$\mathbf{u}(\sigma^{l-1}(j)) = (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}, j \in J, \quad (6.2)$$

является косым, то есть $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma^{2-l}, \mathbf{u}) = (\bar{\sigma}, \mathbf{u})$. Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, \mathbf{u})$, а равенство (6.2) принимает вид

$$\mathbf{u}(s) = (\mathbf{a}(\sigma^{-1}(s)))^{-1} \dots (\mathbf{a}(\sigma^{2-l}(s)))^{-1}, s \in J. \quad (6.3)$$

Доказательство. Прежде всего, отметим, что подстановка σ^{2-l} является решением уравнения

$$(\rho \underbrace{\sigma \dots \sigma}_{l-1})_l = \sigma$$

в l -арной группе $\langle \mathbf{S}_p, ()_l \rangle$. Следовательно, σ^{2-l} – косой элемент для σ в $\langle \mathbf{S}_p, ()_l \rangle$, то есть $\bar{\sigma} = \sigma^{2-l}$. А так как $\langle T, ()_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle \mathbf{S}_p, ()_l \rangle$, $\sigma \in T$, то, согласно критерию Дёрнте, $\sigma^{2-l} = \bar{\sigma} \in T$.

Согласно теореме 5.1, $\langle T \times A^J, []_{l,T,J} \rangle$ – l -арная группа. Применяя определение операции $[]_{l,T,J}$ будем иметь

$$[\underbrace{(\sigma, \mathbf{a}) \dots (\sigma, \mathbf{a})}_{l-1} (\sigma^{2-l}, \mathbf{u})]_{l,T,J} = (\sigma^{l-1} \sigma^{2-l} = \sigma, \mathbf{v}),$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(j) &= \mathbf{a}(j) \mathbf{a}(\sigma(j)) \dots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)) \mathbf{u}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ &= \mathbf{a}(j) \mathbf{a}(\sigma(j)) \dots \mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)) (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1} = \mathbf{a}(j), j \in J, \end{aligned}$$

то есть $\mathbf{v} = \mathbf{a}$, откуда

$$[\underbrace{(\sigma, \mathbf{a}) \dots (\sigma, \mathbf{a})}_{l-1} (\sigma^{2-l}, \mathbf{u})]_{l,T,J} = (\sigma, \mathbf{a}).$$

Следовательно, элемент (6.1) является косым для элемента (σ, \mathbf{a}) в l -арной группе $\langle T \times A^J, []_{l,T,J} \rangle$.

Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\bar{\sigma} = \sigma$, а с помощью замены $s = \sigma^{l-1}$ равенство (6.2) может быть переписано в виде (6.3). Теорема доказана.

В случае $J = \{1, 2, \dots, k\}$ из теоремы 6.1 вытекает

Следствие 6.1. Пусть $\langle T, ()_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle \mathbf{S}_p, ()_l \rangle$, A – группа. Тогда для любого элемента $(\sigma, (a_1, \dots, a_k))$ l -арной группы $\langle T \times A^k, []_{l,T,k} \rangle$ элемент

$$(\sigma^{2-l}, (u_1, \dots, u_k)) = (\bar{\sigma}, (u_1, \dots, u_k)),$$

где

$$u_{\sigma^{l-1}(j)} = a_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1}, j \in \{1, 2, \dots, k\},$$

является косым, то есть $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\bar{\sigma}, (u_1, \dots, u_k))$. Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, (u_1, \dots, u_k))$,

$$u_s = a_{\sigma^{-1}(s)}^{-1} \dots a_{\sigma^{2-l}(s)}^{-1}, s \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

В случае $J = \mathbb{N}$ из теоремы 6.1 вытекает

Следствие 6.2. Пусть $\langle T, (\cdot)_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_N, (\cdot)_l \rangle$, A – группа. Тогда для любого элемента $(\sigma, (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots))$ l -арной группы $\langle T \times A^N, [\cdot]_{l, T, N} \rangle$ элемент

$$(\sigma^{2-l}, (u_1, u_2, \dots, u_k, \dots)) = (\bar{\sigma}, (u_1, u_2, \dots, u_k, \dots)),$$

где

$$u_{\sigma^{l-1}(j)} = a_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1}, j \in N,$$

является косым, то есть $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\bar{\sigma}, (u_1, u_2, \dots, u_k, \dots))$. Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, (u_1, u_2, \dots, u_k, \dots)),$$

$$u_s = a_{\sigma^{-1}(s)}^{-1} \dots a_{\sigma^{2-l}(s)}^{-1}, s \in N.$$

В случае $J = Z$ из теоремы 6.1 вытекает

Следствие 6.3. Пусть $\langle T, (\cdot)_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_Z, (\cdot)_l \rangle$, A – группа. Тогда для любого элемента $(\sigma, (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots))$ l -арной группы $\langle T \times A^Z, [\cdot]_{l, T, Z} \rangle$ элемент

$$(\sigma^{2-l}, (\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots)) = (\bar{\sigma}, (\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots)),$$

где

$$u_{\sigma^{l-1}(j)} = a_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1} \dots a_{\sigma(j)}^{-1}, j \in Z,$$

является косым, то есть $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\bar{\sigma}, (\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots))$. Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, (\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots)),$$

$$u_s = a_{\sigma^{-1}(s)}^{-1} \dots a_{\sigma^{2-l}(s)}^{-1}, s \in Z.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А. М. Об операции $[\cdot]_{l, T, J}$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2014. – № 1. – С. 5–13.
2. Гальмак, А. М. Многместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Гальмак, А. М. Полиадические операции на множествах функций / А. М. Гальмак, Ю. И. Кулаженко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 192 с.
4. Гальмак, А. М. Обобщенные полиадические операции / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – Гомель. – 2013. – № 2. – С. 50–57.
5. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

Поступила в редакцию 02.10.2015 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A.M. ON l -ARY OPERATION $[\cdot]_{l, T, J}$

The article proves the results announced by the author earlier on l -ary operation $[\cdot]_{l, T, J}$ that is determined for any integer $l \geq 2$, any nonempty set J and any semigroup A on the Cartesian product $T \times A^J$, where T is a subset of the symmetrical group S_J of all bijections of set J on J , A^J is a set of all functions with domain J and with values in semigroup A .

Key words: abelian n -ary operation, n -ary operation, groupoid.

УДК 517.925

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ

В. Н. Лаптинский

доктор физико-математических наук, профессор
Белорусско-Российский университет, г. Могилев, РБ

О. А. Маковецкая

старший преподаватель
Белорусско-Российский университет, г. Могилев, РБ

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения, представляющего собой обобщение уравнений Ляпунова и Риккати, а также дана априорная оценка области локализации решения. Исследован итерационный алгоритм построения решения, основанный на вычислительной схеме классического метода последовательных приближений.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение Ляпунова – Риккати, периодическая краевая задача.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t, X), \quad X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (2)$$

где $t \in I$, $A, B, Q \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t, X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально); $F(t, 0) \not\equiv 0$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$.

При $Q = 0$ двухточечная краевая задача качественными методами исследовалась в работе [1]. Конструктивными методами периодическая краевая задача для уравнения Риккати рассматривалась в [2–4]. Исследованию структурных свойств матричных дифференциальных уравнений различных типов и их решений посвящены работы [5–7].

Основная часть

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t, X) : 0 \leq t \leq \omega, \|X\| \leq \rho\}, D = \{X(t) : \|X\|_C \leq \rho\}, M = \int_0^\omega A(\tau) d\tau,$$

$$N = - \int_0^\omega B(\tau) d\tau, \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \alpha = \max_t \|A(t)\|, \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\delta = \max_t \|Q(t)\|, h = \max_t \|F(t, 0)\|, \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) = \gamma\delta\omega \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega \right] \rho^2 + \gamma\omega \left[L + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + L)\omega \right] \rho + \\ + \gamma\omega h \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega \right], \end{aligned}$$

$$q(\rho) = \gamma\delta\omega [(\alpha + \beta)\omega + 2] \rho + \frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + L)\omega^2 + \gamma L\omega,$$

где $0 < \rho < \bar{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_ρ , Φ – линейный оператор, $\Phi X = MX - XN$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [8, с. 21].

Теорема. Пусть матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, а также выполнены следующие условия:

$$\varphi(\rho) \leq \rho, \tag{3}$$

$$q(\rho) < 1. \tag{4}$$

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leq \varphi(\rho)$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел и выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2).

Пусть $X(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем

$$X(t) = X(0) + \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \tag{5}$$

Полагая в (5) $t = \omega$, получим на основании условия (2)

$$\int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau = 0. \tag{6}$$

Запишем соотношение (6) в следующем виде

$$\int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau)] d\tau = - \int_0^\omega [X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \tag{7}$$

В (7) воспользуемся тождеством

$$X(\tau) = X(t) - \int_{\tau}^t [A(\sigma)X(\sigma) + X(\sigma)B(\sigma) + X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma) + F(\sigma, X(\sigma))] d\sigma. \quad (8)$$

Соотношение (7) на основании (8) и в силу (1) можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} MX(t) - X(t)N = & \int_0^{\omega} A(\tau) \left(\int_{\tau}^t [A(\sigma)X(\sigma) + X(\sigma)B(\sigma) + X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma) + \right. \\ & \left. + F(\sigma, X(\sigma))] d\sigma \right) d\tau + \int_0^{\omega} \left(\int_{\tau}^t [A(\sigma)X(\sigma) + X(\sigma)B(\sigma) + X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma) + \right. \\ & \left. + F(\sigma, X(\sigma))] d\sigma \right) B(\tau) d\tau - \int_0^{\omega} [X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \end{aligned}$$

Так как матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, то, согласно [9, с. 207], оператор Φ обратим, при этом оператор Φ^{-1} является линейным и ограниченным. На основании обратимости оператора Φ получим матричное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} X(t) = \Phi^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} A(\tau) \left(\int_{\tau}^t [A(\sigma)X(\sigma) + X(\sigma)B(\sigma) + X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma) + \right. \right. \\ \left. \left. + F(\sigma, X(\sigma))] d\sigma \right) d\tau + \int_0^{\omega} \left(\int_{\tau}^t [A(\sigma)X(\sigma) + X(\sigma)B(\sigma) + X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma) + \right. \right. \\ \left. \left. + F(\sigma, X(\sigma))] d\sigma \right) B(\tau) d\tau - \int_0^{\omega} [X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение матричного интегрального уравнения (9) является решением задачи (1), (2). Это можно показать следующим способом. Дифференцируя по t обе части тождества (9), получим на основании перестановочности оператора Φ и оператора дифференцирования

$$dX(t) = [A(t)X(t) + X(t)B(t) + X(t)Q(t)X(t) + F(t, X(t))] dt.$$

Далее воспользуемся этим соотношением в (9) и выполним затем интегрирование по частям, используя известную формулу [8, с. 52]. Тогда получим последовательно

$$\begin{aligned} X(t) = \Phi^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} A(\tau) \left(\int_{\tau}^t dX(\sigma) \right) d\tau + \int_0^{\omega} \left(\int_{\tau}^t dX(\sigma) \right) B(\tau) d\tau - \int_0^{\omega} [dX(\tau) - \right. \\ \left. - (A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau))] d\tau \right\} = \Phi^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} A(\tau) X(t) d\tau - \int_0^{\omega} A(\tau) X(\tau) d\tau + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{\omega} X(t)B(\tau) d\tau - \int_0^{\omega} X(\tau)B(\tau) d\tau - \int_0^{\omega} dX(\tau) + \int_0^{\omega} A(\tau)X(\tau) d\tau + \int_0^{\omega} X(\tau)B(\tau) d\tau \Big\} = \\
 & = \Phi^{-1} \left\{ \Phi X(t) - \int_0^{\omega} dX(\tau) \right\} = X(t) - \Phi^{-1} \int_0^{\omega} dX(\tau).
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\int_0^{\omega} dX(\tau) = 0,$$

то есть условие (2) имеет место.

Исследуем разрешимость уравнения (9). Это уравнение запишем в операторной форме

$$X = \mathcal{L}(X), \tag{10}$$

где через \mathcal{L} обозначен соответствующий интегральный оператор в (9). Этот оператор действует на множестве $C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Установим что из условий (3), (4) следует выполнение принципа сжимающих отображений (см., например, [10, с. 605]) на множестве D , то есть в замкнутом шаре $\|X\|_C \leq \rho$.

Сначала докажем, что $\mathcal{L}(X) \in D$ для произвольной матрицы-функции $X(t) \in D$. Выполнив оценки по норме в (10), получим последовательно

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{L}(X)\| & \leq \left\| \Phi^{-1} \right\| \left\| \int_0^{\omega} A(\tau) \left(\int_{\tau}^t A(\sigma)X(\sigma) + X(\sigma)B(\sigma) + X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + F(\sigma, X(\sigma)) \right) d\sigma \right) d\tau + \int_0^{\omega} \left(\int_{\tau}^t A(\sigma)X(\sigma) + X(\sigma)B(\sigma) + X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma) + \right. \\
 & \left. \left. + F(\sigma, X(\sigma)) \right) d\sigma \right) B(\tau) d\tau - \int_0^{\omega} \left[X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau \Big\| \leq \\
 & \leq \gamma \left\{ \int_0^{\omega} \|A(\tau)\| \left\| \int_{\tau}^t A(\sigma)X(\sigma) + X(\sigma)B(\sigma) + X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + F(\sigma, X(\sigma)) \right) d\sigma \right\| d\tau + \int_0^{\omega} \left\| \int_{\tau}^t A(\sigma)X(\sigma) + X(\sigma)B(\sigma) + X(\sigma)Q(\sigma)X(\sigma) + \right. \\
 & \left. \left. + F(\sigma, X(\sigma)) \right) d\sigma \right\| \|B(\tau)\| d\tau + \int_0^{\omega} \|X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))\| d\tau \Big\} \leq \\
 & \leq \gamma \left\{ \int_0^{\omega} \|A(\tau)\| \left\| \int_{\tau}^t (\|A(\sigma)\| + \|B(\sigma)\|) \|X(\sigma)\| + \|Q(\sigma)\| \|X(\sigma)\|^2 + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|F(\sigma, X(\sigma))\| \left| d\sigma \right| d\tau + \int_0^\omega \int_\tau^t (\|A(\sigma)\| + \|X(\sigma)\|) \|B(\sigma)\| + \|Q(\sigma)\| \|X(\sigma)\|^2 + \\
& + \|F(\sigma, X(\sigma))\| \left| d\sigma \right| \|B(\tau)\| d\tau + \int_0^\omega [\|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\|] d\tau \Big\} \leq \\
& \leq \gamma \omega \left\{ \frac{1}{2} (\alpha + \beta) [\delta \rho^2 + (\alpha + \beta + L) \rho + h] \omega + \delta \rho^2 + L \rho + h \right\} = \varphi(\rho). \quad (11)
\end{aligned}$$

Из (11) на основании (3) следует соотношение

$$\|\mathcal{L}(X)\|_c \leq \rho. \quad (12)$$

Далее из (10) имеем для произвольных $\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}} \in D$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}}) - \mathcal{L}(\tilde{X}) = \\
& = \Phi^{-1} \left\{ \int_0^\omega A(\tau) \left(\int_\tau^t A(\sigma) (\tilde{\tilde{X}}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma)) + (\tilde{\tilde{X}}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma)) B(\sigma) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \tilde{\tilde{X}}(\sigma) Q(\sigma) \tilde{\tilde{X}}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma) Q(\sigma) \tilde{X}(\sigma) + F(\sigma, \tilde{\tilde{X}}(\sigma)) - F(\sigma, \tilde{X}(\sigma)) \right) d\sigma \right\} d\tau + \\
& + \int_0^\omega \left(\int_\tau^t A(\sigma) (\tilde{\tilde{X}}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma)) + (\tilde{\tilde{X}}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma)) B(\sigma) + \tilde{\tilde{X}}(\sigma) Q(\sigma) \tilde{\tilde{X}}(\sigma) - \right. \\
& \left. - \tilde{X}(\sigma) Q(\sigma) \tilde{X}(\sigma) + F(\sigma, \tilde{\tilde{X}}(\sigma)) - F(\sigma, \tilde{X}(\sigma)) \right) d\sigma \Big\} B(\tau) d\tau - \\
& - \int_0^\omega \left[\tilde{\tilde{X}}(\tau) Q(\tau) \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) + F(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau)) \right] d\tau \Big\}.
\end{aligned}$$

Используя оценку

$$\left\| \tilde{\tilde{X}}(\tau) Q(\tau) \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) \right\| \leq 2\rho\delta \left\| \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\|,$$

получим последовательно

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}}) - \mathcal{L}(\tilde{X}) \right\| \leq \gamma \left\{ \int_0^\omega \|A(\tau)\| \left\| \int_\tau^t A(\sigma) (\tilde{\tilde{X}}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma)) + (\tilde{\tilde{X}}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma)) B(\sigma) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \tilde{\tilde{X}}(\sigma) Q(\sigma) \tilde{\tilde{X}}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma) Q(\sigma) \tilde{X}(\sigma) + F(\sigma, \tilde{\tilde{X}}(\sigma)) - F(\sigma, \tilde{X}(\sigma)) \right\| d\sigma \right\} d\tau +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\omega \int_\tau^t \left\| A(\sigma) \left(\tilde{X}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma) \right) + \left(\tilde{X}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma) \right) B(\sigma) + \tilde{X}(\sigma) Q(\sigma) \tilde{X}(\sigma) - \right. \\
& \quad \left. - \tilde{X}(\sigma) Q(\sigma) \tilde{X}(\sigma) + F\left(\sigma, \tilde{X}(\sigma)\right) - F\left(\sigma, \tilde{X}(\sigma)\right) \right\| d\sigma \left\| B(\tau) \right\| d\tau + \\
& + \int_0^\omega \left\| \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) + \left\| F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \right\| \right\| d\tau \leq \\
& \leq \gamma \left\{ \int_0^\omega A(\tau) \left\| \int_\tau^t \left(\|A(\sigma)\| + \|B(\sigma)\| \right) \left\| \tilde{X}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma) \right\| + \left\| \tilde{X}(\sigma) Q(\sigma) \tilde{X}(\sigma) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \tilde{X}(\sigma) Q(\sigma) \tilde{X}(\sigma) + \left\| F\left(\sigma, \tilde{X}(\sigma)\right) - F\left(\sigma, \tilde{X}(\sigma)\right) \right\| \right\| d\sigma d\tau + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^\omega \int_\tau^t \left(\|A(\sigma)\| + \|B(\sigma)\| \right) \left\| \tilde{X}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma) \right\| + \left\| \tilde{X}(\sigma) Q(\sigma) \tilde{X}(\sigma) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \tilde{X}(\sigma) Q(\sigma) \tilde{X}(\sigma) + \left\| F\left(\sigma, \tilde{X}(\sigma)\right) - F\left(\sigma, \tilde{X}(\sigma)\right) \right\| \right\| d\sigma \left\| B(\tau) \right\| d\tau + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^\omega \left\| \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) + \left\| F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \right\| \right\| d\tau \right\} \leq \\
& \leq \gamma \left\{ \alpha(\alpha + \beta + 2\delta\rho + L) \int_0^\omega \int_\tau^t \left\| \tilde{X}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma) \right\| d\sigma d\tau + \right. \\
& + \beta(\alpha + \beta + 2\delta\rho + L) \int_0^\omega \int_\tau^t \left\| \tilde{X}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma) \right\| d\sigma d\tau + (2\delta\rho + L) \int_0^\omega \left\| \tilde{X}(\sigma) - \tilde{X}(\sigma) \right\| d\sigma \right\} \leq \\
& \leq \gamma\omega \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 2\delta\rho + L)\omega + (2\delta\rho + L) \right] \left\| \tilde{X} - \tilde{X} \right\|_{\mathbb{C}} = q \left\| \tilde{X} - \tilde{X} \right\|_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем оценку

$$\left\| \mathcal{L}(\tilde{X}) - \mathcal{L}(\tilde{X}) \right\|_{\mathbb{C}} \leq q \left\| \tilde{X} - \tilde{X} \right\|_{\mathbb{C}}. \quad (13)$$

Из анализа соотношений (12), (13) видно, что неравенства (3), (4) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к уравнению (10). На основании этого заключаем, что в шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$ решение этого уравнения существует и единственно. Таким образом, задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ . При этом на основании (11) справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \varphi(\rho)$. Теорема полностью доказана.

Для построения решения матричного интегрального уравнения (9) воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [10, с. 605], [11, с. 53])

$$\begin{aligned}
 X_{k+1}(t) = \Phi^{-1} & \left\{ \int_0^\omega A(\tau) \left(\int_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma) + X_k(\sigma)B(\sigma) + X_k(\sigma)Q(\sigma)X_k(\sigma) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + F(\sigma, X_k(\sigma))] d\sigma \right) d\tau + \int_0^\omega \left(\int_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma) + X_k(\sigma)B(\sigma) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + X_k(\sigma)Q(\sigma)X_k(\sigma) + F(\sigma, X_k(\sigma))] d\sigma \right) B(\tau) d\tau - \right. \\
 & \left. - \int_0^\omega [X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))] d\tau \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)
 \end{aligned}$$

где $X_0(t)$ – произвольная матричная функция класса $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, принадлежащая множеству D .

Используя условие (3), можно доказать индукцией по k , что все приближенные решения, полученные по алгоритму (14), принадлежат множеству D . Основу доказательства дает рекуррентная оценка

$$\begin{aligned}
 \|X_{k+1}\|_{\mathbb{C}} & \leq \gamma\delta\omega \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega \right] \|X_k\|_{\mathbb{C}}^2 + \\
 & + \gamma\omega \left[L + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + L)\omega \right] \|X_k\|_{\mathbb{C}} + \gamma\omega h \left[1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

которую нетрудно получить по аналогии с (11).

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему [11, с. 54], этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + (X_2(t) - X_1(t)) + \dots + (X_k(t) - X_{k-1}(t)) + \dots \quad (15)$$

Докажем равномерную по $t \in [0, \omega]$ сходимость ряда (15). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на $[0, \omega]$ матричный функциональный ряд (15).

Оценим $\|X_{m+1}(t) - X_m(t)\|$, учитывая, что

$$X_{m+1}(t) - X_m(t) = \mathcal{L}(X_m(t)) - \mathcal{L}(X_{m-1}(t)), \quad m = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Выполнив оценки в (16), получим на основании (13)

$$\|X_{m+1}(t) - X_m(t)\| = \|\mathcal{L}(X_m(t)) - \mathcal{L}(X_{m-1}(t))\| \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (17)$$

На основе (17) получим явную оценку

$$\|X_{m+1} - X_m\|_C \leq q^m \|X_1 - X_0\|_C, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

при этом $\|X_1 - X_0\|_C = \|\mathcal{L}(X_0) - X_0\|_C$.

Используя оценку (18), нетрудно доказать с помощью известных приемов [10, с. 605], [11, с. 54], что последовательность $\{X_k(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (9), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_k\|_C \leq \frac{q^k}{1-q} \|X_1 - X_0\|_C, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

Итак, доказано

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением (14), при этом справедлива оценка (19).

Замечание. Приближенные решения, построенные по алгоритму (14), не обязаны удовлетворять краевому условию (2). Дальнейшие исследования задачи (1), (2) будут посвящены разработке алгоритмов построения ее приближенных решений, удовлетворяющих условию (2).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Murty, K. N. Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl., 1992. – V. 167. – P. 505–515.
2. Бойчук, А. А. Критическая периодическая краевая задача для матричного уравнения Риккати / А. А. Бойчук, С. А. Кривошея // Дифференц. уравн. – 2001. – Т. 37, № 4. – С. 439–445.
3. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
4. Самойленко, А. М. Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач / А. М. Самойленко, В. Н. Лаптинский, К. К. Кенжебаев. – Киев : ИМ НАН Украины, 1999. – 224 с.
5. Деревенский, В. П. Матричные двусторонние линейные дифференциальные уравнения / В. П. Деревенский // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55, вып. 1. – С. 35–42.
6. Деревенский, В. П. Матричные линейные дифференциальные уравнения второго порядка / В. П. Деревенский // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1926–1927.
7. Деревенский, В. П. Системы матричных линейных дифференциальных уравнений первого порядка / В. П. Деревенский // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66, вып. 1. – С. 63–75.
8. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
9. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
10. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.

11. *Бибиков, Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – М. : Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 15.02.2016 г.

Контакты: e-mail: i_makz@mail.ru (Лаптинский Валерий Николаевич,
Маковецкая Ольга Александровна)

Laptinskiy V.N., Makovetskaya O.A. ON THE ANALYSIS OF THE PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LYAPUNOV-RICCATI MATRIX EQUATION.

The constructive sufficient conditions of one-value solvability of the periodic boundary value problem for the matrix Lyapunov – Rikkati differential equation are defined. The aprioristic assessment of the decision localization is given. The iterative algorithm to create the solution based on the computational scheme of the classical method of the consecutive approximations is investigated.

Key words: Lyapunov and Riccati matrix differential equation, periodic boundary value problem.

УДК 511.36

ОЦЕНКА РАЗМЕРНОСТИ ХАУСДОРФА МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАНЫМ ПОРЯДКОМ АППРОКСИМАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

В. Н. БОРБАТ

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

На основе метрической теоремы о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных полиномов, реализующих теорему Минковского о линейных формах, и их производных в поле действительных чисел построена регулярная система действительных чисел и получены оценки сверху и снизу размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданным порядком аппроксимации алгебраическими числами α степени не более n , для каждого из которых существует целочисленный многочлен $P(x)$, степени не выше n , корнем которого является α и такой, что $|P'(\alpha)| < H(P)^{1-\gamma-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, $0 < \gamma < 1$.

Ключевые слова: Диофантовы приближения, мера Лебега, регулярная система, размерность Хаусдорфа.

Первые работы, которые позволили с единых позиций взглянуть на получение оценок снизу размерности Хаусдорфа, множеств нулевой меры Лебега в метрической теории диофантовых приближений принадлежат А. Бейкеру и В. Шмидту [1]. Они ввели понятие регулярной системы точек и показали, как с ее помощью на основе метрической теоремы строить оценки снизу размерности Хаусдорфа. При этом оказалось возможным исследовать диофантовы приближения как зависимых так и независимых величин в n -мерном евклидовом пространстве. Центр тяжести перемещался на конструирование регулярной системы точек, но затем оценка снизу получается во всех задачах единообразно.

После доказательства В.Г. Спринджукон гипотезы Малера [2] в [1] была выдвинута следующая гипотеза. Пусть $L_n(w)$ множество действительных чисел μ таких, что существует бесконечно много алгебраических чисел α степени не более n , удовлетворяющих неравенству $|\mu - \alpha| < H(\alpha)^{-w}$, где $H(\alpha)$ высота алгебраического числа α . Тогда при $w > n+1$ для размерности Хаусдорфа множества $L_n(w)$ справедливо неравенство

$$\dim L_n(w) \geq \frac{n+1}{w}.$$

Гипотеза Бейкера-Шмидта была доказана в [3]. Так же в [3] было доказано, что

$$\dim L_n(w) \leq \frac{n+1}{w}.$$

В [4] доказана метрическая теорема о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах и их производных.

Теорема 1. Пусть $\mu L_n(w)$ мера Лебега множества $x \in R$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < H^{-n+\gamma} \\ |P'(x)| < H^{1-\gamma-\varepsilon} \end{cases},$$

где $0 < \gamma < 1$ при любом $\varepsilon > 0$ имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x) \in Z[x]$. Тогда $\mu L_n(w) = 0$.

В данной работе на основе теоремы 1 получены оценки для размерности Хаусдорфа множества действительных чисел при приближении их алгебраическими числами специального вида.

Пусть Γ множество действительных алгебраических чисел α степени не более n , для каждого из которых существует целочисленный многочлен $P(x)$, степени не выше n , корнем которого является α и такой, что $|P'(\alpha)| < H(P)^{1-\gamma-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, $0 < \gamma < 1$. Через $B_n(w)$ обозначим множество действительных чисел μ таких, что существует бесконечно много чисел $\alpha \in \Gamma$, удовлетворяющих неравенству

$$|\mu - \alpha| < H(\alpha)^{-w}. \quad (1)$$

Теорема. При $w > n + 1 - 2\gamma$ имеем

$$\frac{n + 1 - 2\gamma}{w} \leq \dim B_n(w) \leq \min \left\{ 1, \frac{n + 1 - \gamma}{w} \right\}. \quad (2)$$

Доказательство начнем с оценки снизу размерности Хаусдорфа множества $B_n(w)$. Приведем вначале вспомогательные леммы и докажем предложение. Для этого введем некоторые обозначения. Обозначим через J конечное объединение интервалов и для любого натурального n пусть $R_j(n, H)$, обозначает множество $\mu \in J$, для которых существуют числа $\alpha \in \Gamma$, с условием

$$|\mu - \alpha| < H(\alpha)^{-n-1+2\gamma+\varepsilon}. \quad (3)$$

Пусть $\mu R_j(n, H)$, μJ обозначает меру Лебега множеств $R_j(n, H)$ и J соответственно. Назовем счетное множество G действительных чисел вместе с положительнозначной функцией N , определенной на G регулярной системой (G, N) , если для любого интервала J существует положительное число $K = K(J)$ такое, что для любого $T \geq K$ найдутся элементы $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ из G такие, что для любых $j \neq k$, $1 \leq j, k \leq t$ имеем $\gamma_j \in J$, $N(\gamma_j) \leq T$, $|\gamma_j - \gamma_k| \geq T^{-1}$, $t \geq c_1 T \mu J$, где $c_1 = c_1(G, N)$.

Для любой регулярной системы (G, N) и любой положительнозначной функции $f(x)$, определенной при $x > 0$, будем обозначать (G, N, f) множество действительных чисел μ , для которых существует бесконечно много $\sigma \in G$, таких, что

$$|\mu - \sigma| < f(N(\sigma)).$$

Далее, для любого $S \subset R$ и любой положительнозначной функцией $g(x)$, определенной при $x > 0$, введем отношение $S \sim g$, если для любых $\tau > 0$, $\delta > 0$ S можно покрыть некоторым счетным множеством интервалов $I_\delta(\tau, g)$ с условиями:

$$I_j \in I_\delta(\tau, g), j = 1, 2, \dots, \mu I_j \leq \tau, \sum_{j=1}^{\infty} g(\mu I_j) \leq \delta.$$

Лемма 1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ положительные функции, определенные при $x > 0$, такие, что $f(x)$ убывает и $f(x) \leq \frac{1}{2x}$ для больших x , $g(x)$ и $\frac{x}{g(x)}$ возрастают и стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$, а $x(g(\frac{1}{2f(x)})) \rightarrow \infty$. Тогда для регулярной системы (G, N) имеем $(G, N, f) \sim g(x)$.

Лемма 1 доказана в [1].

В частности, функции $f(x) = x^{-\sigma}$, $g(x) = x^\rho$, при $0 < \rho < \sigma^{-1} < 1$ удовлетворяют условиям леммы и можно сделать вывод, что множество действительных чисел μ , для которых существует бесконечно много $\alpha \in \Gamma$ с условием $|\mu - \alpha| < N(\alpha)^{-\sigma}$ имеет размерность Хаусдорфа по крайней мере $\frac{1}{\sigma}$.

Лемма 2. $\mu R_j(n, H) \rightarrow \mu J$ при $H \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть μ – трансцендентное число, принадлежащее J , но не принадлежащее $R_j(n, H)$. По теореме Минковского о линейных формах существует полином $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами, $\deg P(x) \leq n$, $H(P) \leq H$ такой, что

$$0 < P(\mu) \ll H^{n+\gamma}, |P'(\mu)| \ll H^{-\gamma}.$$

Если $|P'(\mu)| \ll H^{1-\gamma-\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon$, то в [4] доказано, что μ принадлежит множеству, мера которого стремится к нулю при $H \rightarrow \infty$. Осталось предположить, что $|P'(\mu)| \gg H^{1-\gamma-\varepsilon_1}$. Тогда ближайший к μ корень α полинома $P(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|\mu - \alpha| \ll H^{n-1+2\gamma+\varepsilon_1}.$$

Следовательно, если H велико, то $\mu \in R_j(n, H)$, что противоречит предположению, сделанному вначале. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $A = A(n, H, t_1, t_2, \dots, t_n)$ обозначает множество целочисленных полиномов $P(x)$ степени n , высоты H , удовлетворяющих условиям:

1. Множество $I_j(P)$ не пусто, где $I_j(P) = \{x \in \mathbb{R} : |x - k_j| \leq \min(\theta_j, (\theta_j \varphi_j)^{0.5})\}$, $\varphi_j = \min |k_1 - k_j|$, $\theta_j = 2^n |P'(k_j)|^{-1} H^\beta$, $j = 1, 2, \dots, n$, k_1, k_2, \dots, k_n – корни полинома $P(x)$, $\beta > 0$.

$$2. |P'(k_1)| \geq H^{1-\frac{n}{3}}.$$

$$3. 2^{-t_j-1} \leq |k_1 - k_j| \leq 2^{-t_j}, j = 2, \dots, n, S = t_1 + t_2 + \dots + t_n.$$

Тогда если $|A|$ количество элементов в A , то

$$|A| \ll \begin{cases} H^n 2^{-S}, & H \geq 2^S \\ H^{n-1}, & H < 2^S. \end{cases}$$

Лемма 3 доказана в [5].

Предложение. Множество Γ с функцией $N(\alpha) = H(\alpha)^{n+1-2\gamma-\varepsilon}$ образует регулярную систему.

Доказательство. При достаточно больших H из леммы 2 следует, что $\mu R_j(n, H) \geq 0,5\mu J$. Обозначим $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ максимальную систему элементов из Γ с условием $H(\alpha_i) \leq H$ и $|\alpha_j - \alpha_k| \geq K^{-1}$ для $j \neq k$, где $K = H^{n+1-2\gamma-\varepsilon}$. Для любого $\alpha \in \Gamma$, $H(\alpha) \leq H$, существует α_j , $1 \leq j \leq t$, такое, что $|\alpha - \alpha_j| \leq K^{-1}$. Поэтому объединение интервалов $(\alpha - K^{-1}; \alpha + K^{-1})$, взятое по всем $\alpha \in \Gamma$ имеет меру не более $4tK^{-1}$. Из неравенства $0,5\mu J \leq \mu R_j(n, H) < 4tK^{-1}$ получаем $t > \frac{1}{8}\mu JK$. Регулярная система построена.

Тогда, полагая $f(x) = x^{-\frac{w}{n+1-2\gamma-\varepsilon}}$, $g(x) = x^{\frac{n+1-2\gamma-\varepsilon}{w}}$ и используя лемму 1, получим $\dim B_n(w) \geq \frac{n+1-2\gamma-\varepsilon}{w}$. В силу произвольности ε имеем

$$\dim B_n(w) \geq \frac{n+1-2\gamma}{w}.$$

Перейдем теперь к доказательству правого неравенства (2). Положим $\rho = \frac{n+1-2\gamma}{w} - \varepsilon$. При фиксированном α , принадлежащем Γ , неравенство (1) выполняется для некоторого интервала I_α , $\mu I_\alpha \leq 2H(\alpha)^{-w}$. Объединение интервалов I_α , взятое по всем α из Γ , образует покрытие множества $B_n(w)$. Поскольку при фиксированном H число алгебраических чисел из Γ , имеющих высоту H , по лемме 3 не превосходит $cH^{n-\gamma}$ то

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Gamma} (\mu I_\alpha)^\rho &\leq \sum_{H=1}^{\infty} \sum_{H(\alpha)=H} (\mu I_\alpha)^\rho \leq \sum_{H=1}^{\infty} (2H)^{-w\rho} c(n) H^{n-\gamma} \ll \\ &\ll \sum_{H=1}^{\infty} H^{-w\rho+n-\gamma} \leq \sum_{H=1}^{\infty} H^{-1-\varepsilon w} < \infty. \end{aligned}$$

Тогда заключаем, что $\dim B_n(w) \leq \frac{n+1-\gamma}{w} + \varepsilon$, и в силу произвольности ε имеем

$$\dim B_n(w) \leq \frac{n+1-\gamma}{w}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Baker, A.** Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. Schmidt // Proc. London Math. Soc. 1970. – Vol. 21. – № 13. – P. 1–11.
2. **Спринджук, В. Г.** Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 194 с.
3. **Берник, В. И.** Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа / В. И. Берник, Ю. В. Мельничук. – Минск : Наука и техника, 1988. – 144 с.
4. **Борбат, В. Н.** Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных многочленов и их производных / В. Н. Борбат // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 1995. – № 1. – С. 9–16.

5. *Baker, R.* Sprindzüks theorem and Hausdorff dimension / R. Baker, W. Schmidt // *Mathematika.* – 1976. – Vol. 23. – № 11. – P. 184–197.

Поступила в редакцию 18.01.2016 г.

Контакты: +375 29 743 83 54 (Борбат Владимир Николаевич)

Borbat V.N. THE EVALUATION OF THE HAUSDORFF DIMENSION OF THE SET OF REAL NUMBERS WITH A GIVEN ORDER OF APPROXIMATION BY ALGEBRAIC NUMBERS.

On the basis of the metric theorem of the joint approximation of zero by the values of integer polynomials that implement the Minkowski theorem on linear forms and their derivatives in the field of real numbers a regular system of real numbers is built and the estimates are obtained above and below the Hausdorff dimension of the set of real numbers with a given order of approximation by algebraic numbers α of degree not more than n for each of which there is an integer polynomial $P(x)$ of the degree not greater than n with the root α that is $|P'(\alpha)| < H(P)^{1-\gamma-\varepsilon}$, where $\varepsilon > 0$, $0 < \gamma < 1$.

Key words: diophantine approximation, Lebesgue measure, regular system, Hausdorff dimension.

УДК 511.42

О КОЛИЧЕСТВЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК С ОГРАНИЧЕННЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ В КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

О. В. Рыкова

кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
Белорусский государственный аграрный технический университет,
г. Минск, РБ

Н. В. Сакович

кандидат физико-математических наук, доцент
МГУ имени А.А. Кулешова, г. Могилев, РБ

Н. В. Шамукова

кандидат физико-математических наук, доцент
Командно-инженерный институт МЧС, г. Минск, РБ

В теории диофантовых приближений свойства трансцендентных и иррациональных чисел изучаются с помощью их приближений алгебраическими и рациональными числами [1, 2]. Сами алгебраические и рациональные числа устроены проще и многие их свойства или почти очевидны, или легко доказываются. Однако нет правил без исключения. Например, хорошо известна задача о распределении рациональных чисел Фарая [3], которая эквивалентна проблеме Римана. В работе доказано два утверждения о распределении алгебраических и рациональных чисел.

Ключевые слова: корень многочлена, высота многочлена, результат многочленов, алгебраические числа, система диофантовых неравенств, порядок приближения, покрытие множества.

Для алгебраического числа α через $\deg \alpha = n$ и $H(\alpha)$ будем обозначать степень и высоту его минимального многочлена. Далее μB – мера Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$, величины $c_1 = c_1(n), c_2, \dots$ зависят только от n и не зависят от высоты многочлена. В.И. Берником, Н.В. Бударинной, Х. О'Донеллом в работе [4] доказана следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $Q > Q_0$ достаточно большое натуральное число, $I \subset \mathbb{R}$ – интервал длины $|I| = c_1 Q^{-1}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

а) Существуют интервалы I , $|I| = Q^{-1}/2$, внутри которых нет алгебраических чисел α с условиями $\deg \alpha \leq 3$ и $H(\alpha) \leq Q$.

б) При достаточно большой величине c_2 внутри любого интервала I , $|I| = c_2 Q^{-1}$, лежит не менее $c_3 |I| Q^4$ действительных алгебраических чисел α , $\deg \alpha = 3$ и $H(\alpha) \leq Q$.

© Рыкова О. В., 2016

© Сакович Н. В., 2016

© Шамукова Н. В., 2016

Для интервала $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ с центром в точке $d = \frac{a+b}{2}$ построим интервал $I_1 = [d - 4|I|, d + 4|I|]$. Пусть $0 \leq \gamma \leq 1$. Будем называть I интервалом типа (Q, γ) , если внутри интервала I_1 нет рациональных чисел $\frac{s}{t}$ с ограниченными знаменателями $1 \leq t \leq Q^\gamma$.

Теорема 2. При $\gamma_1 \geq 1 + \gamma n$ и $c_3 < c_0$ внутри интервала I , $|I| \leq c_3 Q^{-\gamma_1}$, ни при каком $n \geq 1$ нет действительных алгебраических чисел α , $\deg \alpha = n$ и $H(\alpha) \leq Q$.

Основой для доказательства теоремы 2 является следующая лемма:

Лемма 1. [5] При любом наборе корней $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, $1 \leq s \leq n$, многочлена

$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ справедливо неравенство $\prod_{j=1}^s |\alpha_{i_j}| < c_4 H(P) |a_n|^{-1}$, где $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$.

Доказательство: Возьмем интервал $I_2 = (p/q, p/q + c_3 Q^{-\gamma_1})$, где $q < Q^\gamma$, и покажем, что при подходящем c_3 этот интервал искомый. Обозначим $P_1(x) = qx - p$, и пусть α – корень минимального многочлена $P_2(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ с корнями $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Если $\alpha \in I_2$, то

$$|\alpha - p/q| \leq c_3 Q^{-\gamma_1}. \tag{1}$$

Рассмотрим результат $R(P_1, P_2)$ полиномов P_1 и P_2 . Так как полиномы P_1 и P_2 не имеют общих корней, то $|R(P_1, P_2)| \geq 1$. С другой стороны, из леммы 1 и неравенства (1) имеем:

$$\begin{aligned} 1 \leq |R(P_1, P_2)| &= q^n |a_n| |\alpha_1 - p/q| \prod_{j=2}^n |\alpha_j - p/q| \\ &< c_5 Q^{\gamma n} H(\alpha_1) |\alpha_1 - p/q| < c_3 c_5 Q^{\gamma n + 1 - 1 - \gamma n} < c_3 c_5 \end{aligned}$$

и при $c_3 < c_5^{-1}$ получаем противоречие, которое доказывает теорему 2.

Что будет происходить, если длину интервала I_2 увеличить и взять равной $c_6 Q^{-\gamma_1}$ при достаточно большой величине c_6 ? Ответ на этот вопрос получен в [4] при $\gamma = 0$. Рассмотрим случай, когда $\gamma \neq 0$ и $n = 1$.

Теорема 3. Если $c_6 > c_0$ и интервал I_2 имеет тип (Q, γ_1) , то количество рациональных чисел p/q , $Q^\gamma \leq q \leq Q$, не меньше $c_7 |I_2| Q^2$, что не меньше $c_8 Q^{2-\gamma_1}$.

Доказательство: Пусть интервал I_2 имеет длину $|I_2| = c_6 Q^{-1-\gamma}$, $0 \leq \gamma \leq 1$, $c_6 > c_0$. Обозначим через $B_1 = B_1(\delta_0)$ множество точек интервала, для которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |qx - p| < Q^{-1}, \\ 1 \leq q \leq \delta_0 Q. \end{cases} \quad (2)$$

Система неравенств (2) не может выполняться, если $q < Q^\gamma$. Из первого неравенства (2) следует, что $|x - p/q| < q^{-1}Q^{-1}$. Поэтому

$$|d - p/q| \leq |d - x| + |x - p/q| < c_6 Q^{-1-\gamma}/2 + q^{-1}Q^{-1} \leq (1 + c_6/2)q^{-1}Q^{-1},$$

что противоречит выбору интервала I_2 . Перепишем неравенство (2) в виде

$$|qx - p| < Q^{-1}, \quad Q^\gamma \leq q \leq \delta_0 Q. \quad (3)$$

Обозначим через $J(p, q)$ множество $x \in I_2$, для которых верна система неравенств (3). Ясно, что $\mu J(p, q) \leq 2q^{-1}Q^{-1}$ при фиксированных p и q .

Рассмотрим интервал $I_3 = [d - 2q^{-1}Q^{-1}, d + 2q^{-1}Q^{-1}]$. Надо просуммировать $\mu J(p, q)$ по всем дробям p/q , принадлежащим интервалу I_3 . Найдем условие, при котором два интервала

$$J(c_9, p_i, q_i) = \{ |x - p_i/q_i| < c_9 q_i^{-1} Q^{-1} \}, \quad i = 1, 2, \quad c_9 > 1,$$

не пересекаются. Если x_0 точка их пересечения, то

$$|p_1/q_1 - p_2/q_2| \leq |x_0 - p_1/q_1| + |x_0 - p_2/q_2| < c_9 Q^{-1} (q_1^{-1} + q_2^{-1}). \quad (4)$$

С другой стороны

$$|p_1/q_1 - p_2/q_2| = \frac{|p_1 q_2 - p_2 q_1|}{q_1 q_2} \geq \frac{1}{q_1 q_2}. \quad (5)$$

Из (3)–(5) имеем неравенство

$$1 \leq c_9 Q^{-1} (q_1 + q_2) < 2c_9 \delta_0,$$

которое противоречиво при $c_9 \leq \delta_0^{-1}/2$. Поэтому, если $c_9 = \delta_0^{-1}/3$ и $c_6 \geq 4$, то

$$\sum_{p/q \in I_3} \mu J(\delta_0^{-1}/3, p, q) \leq |I_3| \leq 4c_6^{-1} |I_2| \leq |I_2|.$$

Так как $\mu J(p, q) < 3\delta_0 \mu J(\delta_0^{-1}/3, p, q)$, то

$$\sum_{p/q \in I_3} \mu J(p, q) \leq 3\delta_0 |I_2|. \quad (6)$$

При подходящем δ_0 справедливо неравенство

$$\mu B_1 < |I_2|/4. \quad (7)$$

Возьмем $\delta_0 = 2^{-3}$. Тогда на множестве $B_2 = I_2 \setminus B_1$, $\mu B_2 \geq 3|I_2|/4$, выполняется система неравенств

$$|qx - p| < Q^{-1}, \quad \delta_0 Q < q \leq Q. \quad (8)$$

Для $x_1 \in B_2$ из (8) следует

$$|x_1 - p_1/q_1| < q_1^{-1}Q^{-1} < \delta_0^{-1}Q^{-2}. \quad (4)$$

Это означает, что при достаточно большой величине c_6 справедливо $p_1/q_1 \in I_2$. Обозначим через D_1 множество решений неравенства (9). Ясно, что $\mu D_1 < 2\delta_0^{-1}Q^{-2}$. Возьмем точку $x_2 \in B_2 \setminus D_1$. Для нее также найдется рациональное число $p_2/q_2 \neq p_1/q_1$ в интервале $D_2 = \{y \in I_2 : |x_2 - y| < \delta_0^{-1}Q^{-2}\}$. Затем возьмем точку $x_3 \in (B_2 \setminus D_1) \setminus D_2$ и т. д. Такое построение рациональных чисел $p_i/q_i \in I_2$, $1 \leq i \leq t$, можно продолжать до тех пор пока интервалами D_i не покроем все множество B_2 . Поэтому

$$2t\delta_0^{-1}Q^{-2} \geq \mu B_2 > 3|I_2|/4,$$

откуда $t > 2^{-3}3\delta_0 Q^2 |I_2|$, что и доказывает теорему 3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Касселс, Дж. В. С.* Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – М. : Изд-во иностр.лит., 1961. – 213 с.
2. *Bugeaud, Y.* Approximation by algebraic numbers. Cambridge. / Y. Bugeaud. – Cambridge Tracts in Mathematics, 160. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. – 274 pp.
3. *Шмидт, В. М.* Диофантовы приближения. – М. : Мир, 1983. – 224 с.
4. *Bernik, V. I., Budarina N. V., O'Donnell H.* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2013. – Vol. 280, Suppl. 2. – P. 31–43.
5. *Фельдман, Н. И.* Приближение некоторых трансцендентных чисел // Известия Акад. наук СССР. Сер. матем. – 1951. – Т. 15, № 1. – С. 53–74.

Поступила в редакцию 14.07.2015 г.

Контакты: +375 17 263 81 22 (Рыкова Ольга Васильевна)

Rykova O.V., Sakovich N.V., Shamukova N.V. ON THE NUMBER OF RATIONAL POINTS WITH BOUNDED DENOMINATORS IN SHORT INTERVALS OF DIFFERENT TYPES.

The points in short intervals of the real axis have different arithmetic properties depending on the presence of rational numbers with small denominators in intervals. The classification of short intervals is presented in the article. The theorems on the distribution of rational and algebraic numbers in such intervals are provided.

Key word: root of polynomial, height of polynomial, resultant of polynomial, algebraic number, the system of Diophantine inequalities, order of approximation, set cover.

УДК 517.925.42

ПРИВЕДЕНИЕ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА К СПЕЦИАЛЬНОМУ ВИДУ. ЕСТЕСТВЕННЫЙ ГАМИЛЬТониАН СИСТЕМЫ

Н. П. Морозов

кандидат физико-математических наук, доцент
МГУ имени А. А. Кулешова

В работе предложено специальное представление автономных систем на плоскости, основанное на понятии естественного гамильтониана системы. Естественный гамильтониан определяется по правым частям системы однозначно. Этим объясняется выбор названия. Выражение естественного гамильтониана через правые части системы составляет основной результат данной работы. Важным элементом в предложенном представлении системы является величина σ , которая определяется дивергенцией векторного поля системы.

Ключевые слова: автономная система, естественный гамильтониан, дивергенция, специальный вид.

1. Приведение системы к специальному виду. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемые функции на всей плоскости.

Теорема 1. Пусть функции $P, Q \in C_{R^2}^1$ и $O(0,0)$ является состоянием равновесия системы. Тогда система (1) представима единственным образом в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + x\bar{\sigma}(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y\bar{\sigma}(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

где

$$H = \sin \varphi \int_0^\rho P(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau - \cos \varphi \int_0^\rho Q(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau, \quad (3)$$

$$\rho^2 \bar{\sigma}(x, y) = \int_0^\rho \tau \sigma(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau, \quad (4)$$

$$\sigma(x, y) = \operatorname{div}(P; Q), H(0,0) = 0, \bar{\sigma}(0,0) = \frac{\sigma(0,0)}{2}.$$

Доказательство. Пусть система представлена в виде (2). Покажем, что имеют место равенства (3) и (4). Положим

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + x\bar{\sigma}(x, y) = P(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y\bar{\sigma}(x, y) = Q(x, y), \quad (5)$$

Умножая первое равенство на y , а второе на x и вычитая из первого равенства второе, получим

$$y \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + x \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = yP(x, y) - xQ(x, y)$$

или в полярных координатах $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ имеем

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = \sin \varphi P(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) - \cos \varphi Q(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

Интегрируя это равенство по ρ , получим (3). Покажем теперь, что имеет место равенство (4). С этой целью продифференцируем первое из равенств (5) по x , а второе по y и сложим полученные равенства.

Будем иметь $x \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} + y \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial y} + 2 \bar{\sigma} = \sigma(x, y)$ или в полярных координатах

$\frac{\partial(\rho^2 \bar{\sigma})}{\partial \rho} = \rho \sigma(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$. Интегрируя это равенство по переменной ρ , получим (4). При этом положим

$$\bar{\sigma}(0,0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\int_0^\rho \tau \sigma(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau}{\rho^2} = \frac{\sigma(0,0)}{2}.$$

Пусть теперь дана система (1) и функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в \mathbb{R}^2 . Определим H и $\bar{\sigma}$ равенствами (3) и (4), соответственно, и покажем, что при этом

$$P(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + x \bar{\sigma}(x, y), \quad Q(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y \bar{\sigma}(x, y).$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = \cos \varphi \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \sin \varphi \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \tag{6}$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \rho \cos \varphi \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \tag{7}$$

находим

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \cos \varphi \frac{\partial H}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \sin \varphi \frac{\partial H}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos \varphi \frac{\partial H}{\partial \varphi}. \tag{8}$$

Используя равенства (3) и (4) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \varphi} + \rho^2 \bar{\sigma}(x, y) &= \cos \varphi \int_0^\rho P(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau + \sin \varphi \int_0^\rho Q(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau \\ &+ \sin \varphi \int_0^\rho \left(-\tau \sin \varphi \frac{\partial P}{\partial x} + \tau \cos \varphi \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\tau - \end{aligned}$$

$$\cos \varphi \int_0^{\rho} \left(-\tau \sin \varphi \frac{\partial Q}{\partial x} + \tau \cos \varphi \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\tau + \int_0^{\rho} \tau \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\tau =$$

[умножим последнее слагаемое на $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$] =

$$= \cos \varphi \int_0^{\rho} P(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau + \sin \varphi \int_0^{\rho} Q(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau +$$

$$\sin \varphi \int_0^{\rho} \left(-\tau \sin \varphi \frac{\partial P}{\partial x} + \tau \cos \varphi \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\tau -$$

$$\cos \varphi \int_0^{\rho} \left(-\tau \sin \varphi \frac{\partial Q}{\partial x} + \tau \cos \varphi \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\tau +$$

$$+ \int_0^{\rho} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \tau \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\tau =$$

= [сгруппируем слагаемые, содержащие частные производные P в одно слагаемое, а содержащие частные производные Q – в другое и представим каждое из них одним интегралом] =

$$= \cos \varphi \int_0^{\rho} P(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau + \sin \varphi \int_0^{\rho} Q(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau +$$

$$+ \int_0^{\rho} \left(\tau \cos^2 \varphi \frac{\partial P}{\partial x} + \tau \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\tau + \int_0^{\rho} \left(\tau \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial Q}{\partial x} + \tau \sin^2 \varphi \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\tau =$$

$$= \cos \varphi \int_0^{\rho} P(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau + \int_0^{\rho} Q(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau +$$

$$+ \cos \varphi \int_0^{\rho} \tau \left(\cos \varphi \frac{\partial P}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\tau + \sin \varphi \int_0^{\rho} \tau \left(\cos \varphi \frac{\partial Q}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\tau =$$

[учтем, что

$$\cos \varphi \frac{\partial P}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi)}{\partial \tau} \text{ и } \cos \varphi \frac{\partial Q}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi)}{\partial \tau}] =$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \varphi \int_0^{\rho} P(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau + \int_0^{\rho} Q(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi) d\tau + \\
&\cos \varphi \int_0^{\rho} \tau \frac{\partial P(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi)}{\partial \tau} d\tau + \sin \varphi \int_0^{\rho} \tau \frac{\partial Q(\tau \cos \varphi, \tau \sin \varphi)}{\partial \tau} d\tau = \\
&= [\text{вычисляя два последних интеграла по частям, окончательно получим}] = \\
&\quad xP(x, y) + yQ(x, y).
\end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \rho^2 \bar{\sigma}(x, y) = \rho \cos \varphi P(x, y) + \rho \sin \varphi Q(x, y).$$

Дифференцируя равенство (3) по переменной ρ , имеем

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = \sin \varphi P(x, y) - \cos \varphi Q(x, y).$$

Из этих двух равенств находим:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial H}{\partial \rho} \sin \varphi + \cos \varphi \rho \bar{\sigma}(x, y) = P(x, y) \text{ и}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial H}{\partial \rho} \cos \varphi + \sin \varphi \rho \bar{\sigma}(x, y) = Q(x, y).$$

С учетом соотношений (8) окончательно получим

$$P(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + x \bar{\sigma}(x, y), \quad Q(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y \bar{\sigma}(x, y).$$

Поскольку H определяется по правым частям системы (1) однозначно (с точностью до постоянного слагаемого), будем называть H *естественным гамильтонианом* для системы (1).

Лемма 1. В результате линейных невырожденных преобразований

$$x = \alpha u + \beta v, \quad y = \gamma u + \delta v, \quad \Delta = \alpha \delta - \beta \gamma \neq 0$$

система (2) приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial v}(u, v) + x \bar{\sigma}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v), \\ \dot{v} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial u}(u, v) + y \bar{\sigma}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v), \end{cases}$$

где $\bar{H}(u, v) = \frac{1}{\Delta} H(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$, т. е. вид системы инвариантен относительно линейных невырожденных преобразований.

Доказательство.

$$\alpha \dot{u} + \beta \dot{v} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + x \bar{\sigma}(x, y), \quad (9)$$

$$\gamma \dot{u} + \delta \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y \bar{\sigma}(x, y).$$

Учитывая, что $\frac{\partial H}{\partial u} = \alpha \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{\partial H}{\partial v} = \beta \frac{\partial H}{\partial x} + \delta \frac{\partial H}{\partial y}$, находим

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}(\delta \frac{\partial H}{\partial u} - \gamma \frac{\partial H}{\partial v}), \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}(-\beta \frac{\partial H}{\partial u} + \alpha \frac{\partial H}{\partial v}) \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_u \\ H_v \end{pmatrix}.$$

С учетом этого равенства (9) в матричном виде примут вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_u \\ H_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \bar{\sigma}(x, y). \quad \text{Отсюда}$$

находим

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_u \\ H_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \bar{\sigma}(x, y).$$

Окончательно имеем

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{H}_u \\ \bar{H}_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \bar{\sigma}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v). \quad (10)$$

Здесь $\bar{H}(u, v) = \frac{1}{\Delta} H(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$.

Пусть система (1) представлена в виде (2). Введем следующие обозначения

$$L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\partial H}{\partial \rho} = \cos \varphi \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \sin \varphi \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0 \right\},$$

$$D_+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\partial H}{\partial \rho} > 0 \right\}, D_- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\partial H}{\partial \rho} < 0 \right\},$$

где ρ и φ полярные координаты точки $M(x, y)$, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

Следствие 1. Если состояние равновесия системы (2) $O(0, 0)$ является изолированной точкой множества L , то гамильтониан $H(x, y)$ в проколотой окрестности точки $O(0, 0)$ является положительно (или отрицательно) определенной функцией Ляпунова. Если при этом $\bar{\sigma}(0, 0) = \frac{\sigma(0, 0)}{2} < 0$, то состояние равновесия

$O(0, 0)$ является асимптотически устойчивым, а при $\frac{\sigma(0, 0)}{2} > 0$ неустойчивым.

Действительно. Производная гамильтониана $H(x, y)$ в силу системы (2)

$$\frac{dH}{dt} = \rho \bar{\sigma}(x, y) \frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

Так как $H(0, 0) = 0$, то в указанной окрестности $H \frac{\partial H}{\partial \rho} > 0$. Тогда при $\frac{\sigma(0,0)}{2} < 0$ имеем $H \frac{dH}{dt} < 0$ или соответственно $H \frac{dH}{dt} > 0$ при $\frac{\sigma(0,0)}{2} > 0$.

Следствие 2. Пусть состояние равновесия системы (2) $O(0, 0)$ является изолированной точкой множества L и принадлежит границе области D_+ . Тогда в области D_+ система (2) в обобщенных полярных координатах R, φ , где $R = \sqrt{2H}$ приводится к уравнению

$$R \frac{dR}{d\varphi} = -\rho^2 \bar{\sigma}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi),$$

где ρ однозначно выражается через $R, \cos \varphi, \sin \varphi$ из равенства $R = \sqrt{2H(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}$ (т. е. $\rho = f(R, \cos \varphi, \sin \varphi)$).

Действительно. Для гамильтоновой системы состояние равновесия $O(0, 0)$ является центром и в области центра гамильтониан H положительно определенная функция. Введем в этой области обобщенные полярные координаты R, φ , где $R = \sqrt{2H}$. Тогда система (2) в этих координатах принимает вид:

$$R\dot{R} = \rho \bar{\sigma}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi),$$

$$\rho^2 \dot{\varphi} = -\rho \frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

Так как $\frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) > 0$ в области D_+ , то равенство $R = \sqrt{2H(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}$

однозначно разрешимо относительно ρ , т. е. $\rho = f(R, \cos \varphi, \sin \varphi)$.

Отметим еще очевидные и полезные в некоторых случаях факты.

Следствие 3. 1) Все состояния равновесия полной системы (2) и соответствующей ей гамильтоновой системы расположены (в конечной части плоскости) в множестве L .

2) Состояние равновесия $O_1(x_0, y_0)$ полной и гамильтоновой систем (отличное от $O(0, 0)$) совпадают тогда и только тогда, когда $\bar{\sigma}(x_0, y_0) = 0$.

2. Случай полиномиальной системы.

Случай полиномиальной системы рассмотрен автором ранее (см. [6]) с использованием иного подхода. Подмеченные там закономерности и позволили перенести полученный там результат на общий случай в данной статье. Для полиномиальной системы гамильтониан $H(x, y)$ и величина $\bar{\sigma}(x, y)$ имеют явное представление через коэффициенты многочленов исходной системы.

Пусть в системе (1) $P(x, y), Q(x, y)$ многочлены наибольшей степени n и $M_0(x_0, y_0)$ произвольная точка. Представим $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в виде многочленов Тейлора по степеням $x - x_0$ и $y - y_0$:

$$P(x, y) = P(x_0, y_0) + \sum_{m=1}^n P_k(x, y), Q(x, y) = Q(x_0, y_0) + \sum_{m=1}^n Q_k(x, y), n \geq 1,$$

$$P_k(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k C_k^m a_{k-mm} (x - x_0)^{k-m} (y - y_0)^m,$$

$$Q_k(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k C_k^m b_{k-mm} (x - x_0)^{k-m} (y - y_0)^m,$$

$$\text{где } a_{k-m m} = \frac{\partial^k P(x_0, y_0)}{\partial x^{k-m} \partial y^m}, b_{k-m m} = \frac{\partial^k Q(x_0, y_0)}{\partial x^{k-m} \partial y^m}.$$

Заменяя $u = x - x_0 \rightarrow x, v = y - y_0 \rightarrow y$ окончательно получим

$$\dot{x} = P(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n P_k(x, y), \dot{y} = Q(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n Q_k(x, y), \quad (11)$$

$$\text{где } P_k(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k C_k^m a_{k-mm} x^{k-m} y^m, Q_k(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k C_k^m b_{k-mm} x^{k-m} y^m.$$

Теорема 2. В представлении полиномиальной системы (11) в виде (2) $\bar{\sigma}(x, y)$ и естественный гамильтониан соответственно имеют вид

$$\bar{\sigma}(x, y) = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{\sigma}_{k-1}(x, y), \bar{\sigma}_{k-1}(x, y) = \frac{k}{(k+1)!} \sum_{m=1}^k C_{k-1}^{m-1} \sigma_{k-m m-1} x^{k-m} y^{m-1},$$

$$H(x, y) = yP(x_0, y_0) - xQ(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n H_{k+1}(x, y),$$

$$H_{k+1}(x, y) = \frac{1}{(k+1)!} \left(a_{0k} y^{k+1} - b_{k0} x^{k+1} + \sum_{m=1}^k C_k^{m-1} \frac{\mu_{k-m m-1}}{m} x^{k-m+1} y^m \right),$$

где

$$\mu_{k-m m-1} = m a_{k-m+1 m-1} - (k - m + 1) b_{k-mm},$$

$$\sigma_{k-m m-1} = a_{k-m+1 m-1} + b_{k-m, m}, k = \overline{1, n}, m = \overline{1, k}.$$

Доказательство. Используя равенство (3), находим:

$$\begin{aligned} H_{k+1}(x, y) &= \frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} \left(\sum_{m=0}^k C_k^m a_{k-mm} \cos^{k-m} \varphi \sin^{m+1} \varphi - \right. \\ &- \sum_{m=0}^k C_k^m b_{k-mm} \cos^{k-m+1} \varphi \sin^m \varphi \left. \right) = \frac{1}{(k+1)!} (a_{0k} y^{k+1} - b_{k0} x^{k+1} + \\ &+ \rho^{k+1} \sum_{m=1}^k C_k^{m-1} a_{k-m+1 m-1} \cos^{k-m+1} \varphi \sin^m \varphi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\rho^{k+1} \sum_{m=1}^k C_k^m b_{k-mm} \cos^{k-m+1} \varphi \sin^m \varphi = \\
 & = \frac{1}{(k+1)!} \left(a_{0k} y^{k+1} - b_{k0} x^{k+1} + \sum_{m=1}^k C_k^{m-1} \frac{\mu_{k-m, m-1}}{m} x^{k-m+1} y^m \right).
 \end{aligned}$$

Из соотношения (4) имеем:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{k-1}(x, y) & = \left(\frac{\partial P_k(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_k(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} C_k^m (k-m) a_{k-mm} x^{k-m-1} y^m + \\
 & + \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^k C_k^m m b_{k-mm} x^{k-m} y^{m-1} = \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^k C_k^{m-1} (k-m+1) a_{k-m+1, m-1} x^{k-m} y^{m-1} + \\
 & + \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^k C_k^m m b_{k-mm} x^{k-m} y^{m-1} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{m=1}^k C_{k-1}^{m-1} (a_{k-m+1, m-1} + b_{k-mm}) x^{k-m} y^{m-1} = \\
 & = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{m=1}^k C_{k-1}^{m-1} \sigma_{k-m, m-1} x^{k-m} y^{m-1}. \text{ Итак,}
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{k-1}(x, y) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{m=1}^k C_{k-1}^{m-1} \sigma_{k-m, m-1} x^{k-m} y^{m-1}$$

$$\sigma_{k-m, m-1} = a_{k-m+1, m-1} + b_{k-mm}.$$

Умножив $\sigma_{k-1}(x, y)$ на ρ , окончательно находим

$$\bar{\sigma}_{k-1}(x, y) = \frac{k}{(k+1)!} \sum_{m=1}^k C_{k-1}^{m-1} \sigma_{k-m, m-1} x^{k-m} y^{m-1}.$$

Замечание 1. В дальнейшем будем предполагать, что $M_0(x_0, y_0)$ есть состояние равновесия исходной системы. В этом случае у гамильтониана линейная часть отсутствует.

Замечание 2. Коэффициенты гамильтониана $\mu_{k-m, m-1}$ и коэффициенты $\sigma_{k-m, m-1}$ величины $\bar{\sigma}_{k-1}(x, y)$ выражаются линейно через одну и ту же пару $a_{k-m+1, m-1}, b_{k-m, m}$ коэффициентов исходной системы с определителем $k+1 \neq 0$. Поэтому можем считать, что коэффициенты $\mu_{k-m, m-1}$ и $\sigma_{k-m, m-1}$ изменяются независимо друг от друга, если коэффициенты исходной системы $a_{k-m+1, m-1}, b_{k-m, m}$ не зависят друг от друга.

Замечание 3. Свойство инвариантности вида системы (2) относительно линейных преобразований оказывается полезным при практическом использовании таких преобразований. Для этого достаточно, например, преобразовать

гамильтониан (или его части) к некоторому упрощенному виду по формуле $\bar{H}(u, v) = \frac{1}{\Delta} H(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$ и воспользоваться соотношениями (10).

Замечание 4. К линейным преобразованиям прибегают для приведения линейной части системы к некоторому каноническому виду (например, матрицы линейного приближения к жордановой форме) или для получения иных упрощений. Проиллюстрируем этот прием на примере полиномиальной системы.

3. Приведение квадратичной части гамильтониана к канонической форме.

Квадратичная часть гамильтониана имеет вид

$$H_2(x, y) = \frac{1}{2} (-b_{10}x^2 + \mu_{00}xy + a_{01}y^2).$$

В зависимости от знака $\Delta_h = -\frac{1}{4}\mu_{00}^2 - a_{01}b_{10}$, будем рассматривать три канонические формы $H_2(x, y)$ после преобразования

$$H_2(u, v) = \frac{a}{2}(u^2 - sv^2), \text{ где } s = \text{sign}\Delta_h a \neq 0, s \in \{1; -1; 0\}.$$

Лемма 2. 1) Если $\Delta_h \neq 0$ ($s = \pm 1$), то линейным преобразованием

$$x = \alpha u + k \left(\frac{\mu_{00}}{2} \alpha + a_{01} \gamma \right) v, \quad y = \gamma u + k \left(b_{10} \alpha - \frac{\mu_{00}}{2} \gamma \right) v, \quad (12)$$

H_2 приводится к канонической форме $H_2(u, v) = -\frac{1}{2k}(u^2 - sv^2)$, где $k = \pm \frac{1}{\sqrt{|\Delta_h|}}$ и определитель преобразования $\Delta = -2kH_2(\alpha, \gamma)$ отличен от нуля при любых α и γ таких, что $H_2(\alpha, \gamma) \neq 0$.

2) Если $\Delta_h = 0$ ($s = 0$), то линейным преобразованием

$$x = \alpha u + ap(\alpha, \gamma)\sqrt{|a_{01}|}v, \quad y = \gamma u + as_2s_1p(\alpha, \gamma)\sqrt{|b_{10}|}v$$

гамильтониан $H_2(x, y) = -\frac{s_1}{2}p^2(x, y)$ приводится к виду $H_2(u, v) = \frac{a}{2}u^2$, где $s_1 = \text{sign } b_{10}$, если $b_{10} \neq 0$, или $s_1 = -\text{sign } a_{01}$, если $a_{01} \neq 0$; $s_2 = \text{sign } \mu_{00} = \text{sign}(a_{10} - b_{01})$, $p(x, y) = s_2\sqrt{|b_{10}|}x - s_1\sqrt{|a_{01}|}y$.

Определитель преобразования $\Delta = -2aH_2(\alpha, \gamma) \neq 0$ при любых α, γ , для которых $H_2(\alpha, \gamma) \neq 0$ и $a \neq 0$.

Подробное доказательство леммы имеется в [7].

Замечание 1. Приведение квадратичной части гамильтониана к указанной канонической форме равносильно приведению матрицы линейного приближения

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{01} \\ b_{10} & b_{01} \end{pmatrix}$$

исходной системы (1) линейным преобразованием, указанным в лемме, к виду

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{00}}{2} & s\omega \\ -\omega & \frac{\sigma_{00}}{2} \end{pmatrix}, \text{ если } s = \text{sign}\Delta_h = \pm 1, \omega = \sqrt{|\Delta_h|}, k = -\frac{1}{\sqrt{|\Delta_h|}}$$

или $J = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{00}}{2} & 0 \\ a & \frac{\sigma_{00}}{2} \end{pmatrix}$ при $s = 0, a \neq 0$. Матрица J отличается от жордановой

формы матрицы только в случае действительных корней характеристического уравнения.

Замечание 2. Если состояние равновесия гамильтоновой системы является центром ($s = 1$), то квадратичная часть гамильтониана после приведения ее к каноническому виду не изменяется при преобразованиях поворота. Поэтому эти преобразования можно использовать для внесения дополнительных изменений в систему, не меняя квадратичной части гамильтониана.

Если же состояние равновесия гамильтоновой системы является седлом ($s = -1$), то квадратичная часть гамильтониана после приведения к каноническому виду, не изменяется при преобразованиях гиперболического поворота с матрицей преобразования

$$B = \begin{pmatrix} ch \theta & sh \theta \\ sh \theta & ch \theta \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. В случае полиномиальной системы n -й степени гамильтониан $\bar{H}(u, v)$ может быть многочленом степени k , где $2 \leq k \leq n + 1$. При этом если $k < n + 1$, то $\bar{\sigma}(u, v)$ имеет высшую степень $n - 1$. Если же гамильтониан $\bar{H}(u, v)$ имеет высшую степень $n + 1$, то $\bar{\sigma}(u, v)$ может иметь степень k , где $0 \leq k \leq n - 1$.

Замечание 4. С помощью семейства линейных преобразований (12), приводящих квадратичную часть гамильтониана к канонической форме при $\Delta_h \neq 0$, в систему вносятся дополнительно два произвольных параметра a и g . Это позволяет с помощью подходящего выбора этих параметров с соблюдением условия $H_2(\alpha, \gamma) \neq 0$ добиться определенных упрощений в системе после преобразования.

Обратим внимание еще на следующий смысл этих параметров. Если $u = u(t, \alpha, \gamma), v = v(t, \alpha, \gamma)$ есть решение задачи Коши $u(0, \alpha, \gamma) = 1, v(0, \alpha, \gamma) = 0$ для преобразованной системы, то для исходной системы (11) в соответствии с равенствами (12) имеем: $x(0) = \alpha, y(0) = \gamma$. Считая параметры исходной системы фиксированными (или, например, все коэффициенты числовые), после преобразования получим систему с двумя параметрами, причем роль параметров выполняют начальные данные решений исходной системы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Андронов, А. А.** Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. – М. : Наука, 1966. – 568 с.
2. **Андронов, А. А.** Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. – М. : Наука, 1967. – 587 с.
3. **Баутин, Н. Н.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М. : Наука, 1978. – 496 с.
4. **Ван, Д.** Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости / Д. Ван, Ч. Ли, Ш.-Н. Чоу. – М. : МЦНМО, 2005. – 415 с.
5. **Черкас, Л. А.** Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. М. Булгаков. – Гродно : ГрГУ им. Я. Купалы, 2013. – 489 с.
6. **Морозов, Н. П.** О приведении полиномиальных систем к специальному виду / Н. П. Морозов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2011. – № 2(38). – С. 43–49.
7. **Марченко, И. В.** Об одном подходе к изучению линейных стационарных систем на плоскости / И. В. Марченко, Н. П. Морозов // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2011. – № 2(46). С. 23–31.

Поступила в редакцию 04.01.2016 г.

Контакты: morozovnp@tut.by (Морозов Николай Порфирьевич)

Morozov N.P. FINALIZING AUTONOMOUS SYSTEMS OF THE SECOND ORDER TO SPECIAL TYPE. NATURAL HAMILTONIAN OF THE SYSTEM.

Special presentation of the autonomous systems on plane based on the concept of the system natural hamiltonian is provided. The natural hamiltonian is unambiguously defined in accordance with the right parts of the system, hence the name. The expression of the natural hamiltonian via the right parts of the system presents the major result of the research. The value $\bar{\sigma}$ serves as an important element in the suggested presentation of the system and is defined by the divergence of the system vector field.

Key words: autonomous system, natural Hamiltonian, divergence, special type.

УДК 519.65, 631.15

О ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

А. А. Ефремов

аспирант

Белорусский государственный экономический университет

В статье рассматривается класс оптимизационных задач, в которых заданная в n -мерном пространстве целевая функция является нелинейной и имеет разрывы первого рода по нескольким аргументам. Предлагается подход к решению таких негладких задач нелинейного программирования, основанный на аппроксимации целевой функции логистической кривой. Исследованы различные альтернативы инструментальных средств, способных обеспечить получение численного решения оптимизационной задачи. Также рассмотрена возможность практического применения описанного подхода для решения задачи оптимизации формирования и использования машинно-тракторного парка агропромышленного предприятия. Разрывы в целевой функции связаны с усовершенствованным способом учета амортизационных отчислений на сельскохозяйственные агрегаты при выполнении комплекса полевых работ. В заключении отдельно освещен вопрос ограничений применения данного подхода.

Ключевые слова: нелинейная оптимизация; кусочно-постоянные целевые функции; аппроксимирующая функция; решение оптимизационной экономической задачи.

Введение

Математическая наука, как исторически сложилось, традиционно тесно связана с различными сферами жизнедеятельности человека и общества. Математическое программирование и математическая теория управления как разделы математики считаются одними из наиболее важных для методологического и инструментального обеспечения прикладных исследований, особенно в условиях становления информационного общества и внедрения автоматизированных систем, предназначенных для компьютерных расчетов. В условиях постоянно возрастающих потребностей и ограниченности ресурсной базы все более значимую роль играет *принцип оптимальности* при научно обоснованном принятии решений. В общем виде этот принцип можно сформулировать следующим образом: оптимальная стратегия (поведение) обладает тем свойством, что, каковы бы ни были начальное состояние и решения на начальном этапе, решения на последующем этапе должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, которое получается в результате принятия решения на начальном этапе [1, с. 285]. С точки зрения экономики, оптимальность подразумевает, что любое решение должно исходить из задачи получения оптимального результата [2]. Важное значение при этом имеет правильный выбор критерия оптимальности и его математическая формализация. Под *критерием опти-*

мальности понимают признак, на основании которого проводится сравнительная оценка возможных решений (альтернатив) [3]. Количественным выражением критерия оптимальности в задачах математического программирования является целевая функция.

Расцвет математического программирования пришелся на середину XX в., когда, в частности, был разработан симплексный метод решения задач линейного программирования, а также созданы инструментальные средства, реализующие алгоритм метода обобщенного приведенного градиента [4, с. 116–121]. Тогда же были предприняты первые серьезные попытки решения прикладных задач большой размерности с помощью ЭВМ. Построенные в те годы математические модели были способны обеспечить высокую точность расчета, однако их недостатком было излишнее упрощение действительности, в первую очередь, при решении задач, связанных с отраслями народного хозяйства. Дело в том, что объекты и процессы окружающего мира на сегодняшний день характеризуются ярко выраженной тенденцией к усложнению. Перед исследователем возникает необходимость модификации существующих моделей, в ходе которой он может столкнуться с тем, что простые линейные зависимости далеко не во всех случаях можно использовать для описания поведения реальной системы. Зачастую приходится иметь дело с задачами, в которых как функции-ограничения, так и целевая функция выражены нелинейно. Более того, в последние годы специалисты-практики все чаще сталкиваются со сложными процессами, поведение которых может меняться в зависимости от комплекса внешних и внутренних условий, вследствие чего задача может быть описана только с помощью разрывных функций. При этом в практических приложениях чаще всего встречаются кусочно-постоянные функции с разрывами первого рода (скачками).

Решение данного класса задач на ЭВМ с помощью метода обобщенного приведенного градиента (ОПГ) крайне затруднительно: при поэтапном улучшении начального опорного плана, программа в большинстве случаев наталкивается на разрыв и прекращает работу, так и не получив координаты точки экстремума. Чтобы этого избежать, зададимся целью обеспечить математически обоснованную аппроксимацию целевой функции или той ее части, в которой имеются разрывы. Тогда метод ОПГ сможет сработать правильно и обеспечить нахождение локальных экстремумов с заданной точностью расчетов.

Математическая постановка задачи

Основная проблема, возникающая при решении такого класса задач, непосредственно связана с подбором такой непрерывно-дифференцируемой функции $\tilde{g}(x)$, зависящей от многомерного массива переменных X , которая бы достаточно точно аппроксимировала поведение (вариацию) исходной функции $g(x)$. Для построения такой функции \tilde{g} предлагается использовать логистическую функцию [5]

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 + \exp(-z)}. \quad (1)$$

Пусть $f(X)$ некоторая функция, зависящая от многомерного массива неизвестных X . Значения этой функции будем обозначать через y .

Пусть $h(y)$ – функция, зависящая от скаляра y (описывающего значения функции $f(X)$), заданная формулой

$$h(y) = \begin{cases} c, & \text{если } y \leq a; \\ d, & \text{если } y > a. \end{cases} \quad (2)$$

В конечном счете требуется получить функциональную зависимость вида $h[f(x)]$.

Путем элементарных преобразований (сжатия, растяжения, параллельного переноса) можно подобрать такой вид функции $\tilde{h}(y)$, чтобы ее можно было использовать для аппроксимации исходной целевой функции.

Предположим, что исходная целевая функция задана в виде

$$g = h[f(x)]. \quad (3)$$

На следующем этапе ставится задача некоторым образом аппроксимировать разрывную функцию $h(y)$ непрерывной функцией $\tilde{h}(y)$, чтобы иметь возможность аппроксимировать разрывную функцию (3) гладкой функцией

$$\tilde{g} = \tilde{h}[f(x)]. \quad (4)$$

В качестве основы для аппроксимации функции $h(y)$ возьмем логистическую функцию (1).

Заметим, что $\varphi(-\infty) = 0$ и $\varphi(\infty) = 1$. Причем при достаточно большом значении s можно считать, что $\varphi(-s) \approx 0$, $\varphi(s) \approx 1$. Например, уже при $s = 6$ значения $\varphi(-s)$ и $\varphi(s)$ достаточно близки, соответственно, к 0 и 1, а именно: $\varphi(-6) = 0,0025$, $\varphi(6) = 0,9975$.

Возьмем значение $b > a$ и на основе функции (1) построим функцию $\psi(y)$ таким образом, чтобы $\psi(a) = \varphi(-s)$ и $\psi(b) = \varphi(s)$ (и, следовательно, $\psi(a) \approx 0$, $\psi(b) \approx 1$). Для этого построим линейную функцию, которая ставит в соответствие значениям a и b значения $-s$ и s . Такая линейная функция задается формулой

$$z = \frac{2y - a - b}{b - a} s. \quad (5)$$

Здесь в качестве аргумента выступает переменная y , b – шаг процедуры сглаживания, s – коэффициент масштаба. Отметим, что в соответствии с вышеизложенным точность аппроксимации повышается при увеличении значения параметра s и уменьшении значения параметра b , причем $s > 0$, $b > 1$.

Подставив формулу (5) в равенство (1), получим искомую функцию $\psi(y)$

$$\psi(y) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{2y - a - b}{b - a} s\right)}. \quad (6)$$

На основе функции (6), для которой $\psi(a) \approx 0$ и $\psi(b) \approx 1$, модифицируем функцию $\tilde{h}(y)$ таким образом, чтобы имели место приближенные равенства $\tilde{h}(a) \approx c$

и $\tilde{h}(b) \approx d$. Для этого построим линейную функцию, которая ставит в соответствие значениям 0 и 1 значения c и d . Такая функция задается формулой

$$\chi = (d - c)\psi + c. \quad (7)$$

Здесь в качестве аргумента выступает переменная ψ .

Подставив формулу (6) в равенство (7), получим искомую функцию $\tilde{h}(y)$

$$\tilde{h}(y) = (d - c)\psi(y) + c = \frac{d - c}{1 + \exp\left(-\frac{2y - a - b}{b - a}s\right)} + c = \frac{d + c \cdot \exp\left(-\frac{2y - a - b}{b - a}s\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2y - a - b}{b - a}s\right)}.$$

Итак,

$$\tilde{h}(y) = \frac{d + c \cdot \exp\left(-\frac{2y - a - b}{b - a}s\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2y - a - b}{b - a}s\right)}. \quad (8)$$

Отметим, что в соответствии с использованным методом построения функция (8) возрастает, и выполняются следующие условия:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \tilde{h}(y) = c, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{h}(y) = d, \quad \tilde{h}(a) \approx c, \quad \tilde{h}(b) \approx d. \quad (9)$$

Следовательно, функция (8) аппроксимирует функцию (2). При этом точность аппроксимации повышается при уменьшении значения параметра b (напомним, что значение параметра b должно быть больше значения параметра a).

Рассмотрим теперь более сложный случай: когда в целевой функции содержится сразу несколько разрывов первого рода по каждой переменной.

Сначала обратимся к случаю двойного разрыва. Пусть

$$h(y; a, c, d) = \begin{cases} c, & \text{если } y \leq a \\ d, & \text{если } y > a \end{cases}. \quad (10)$$

Это разрывная (кусочно-постоянная) функция с параметрами a, c, d .

Пусть $\tilde{h}(y; a, b, c, d)$ – гладкая (непрерывно-дифференцируемая) функция, которая аппроксимирует функцию (10). Тогда, рассуждая аналогично по приведенной выше схеме, получим следующую аппроксимирующую функцию

$$\tilde{h}(y; a, b, c, d) = \frac{d + c \cdot \exp\left(-\frac{2y - a - b}{b - a}s\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2y - a - b}{b - a}s\right)}. \quad (11)$$

Здесь s – коэффициент масштаба, $b > a$ – дополнительный параметр, причем

$$\tilde{h}(y; a, b, c, d) \approx c \text{ при } y = a,$$

$$\tilde{h}(y; a, b, c, d) \approx d \text{ при } y = b.$$

Теперь рассмотрим общий случай (наличие кратного разрыва). Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ – так называемые точки смены формул. Тогда имеем:

$$f(y) = \begin{cases} c_0, & \text{если } y < a_1 \\ c_i, & \text{если } a_i \leq y < a_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ c_n & \text{если } y \geq a_n \end{cases} \quad (12)$$

$f(y)$ – кусочно-постоянная функция с несколькими разрывами.

Заметим, что

$$f(y) = c_0 + h(y; a_1, 0, c_1 - c_0) + h(y; a_2, 0, c_2 - c_1) + h(y; a_3, 0, c_3 - c_2) + \dots + h(y; a_n, 0, c_n - c_{n-1}). \quad (13)$$

Эту формулу можно записать в следующем виде

$$f(x) = c_0 + \sum_{i=1}^n h(y; a_i, 0, c_i - c_{i-1}), \quad (14)$$

где в соответствии с формулой (12)

$$h(y; a_i, 0, c_i - c_{i-1}) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq a_i \\ c_i - c_{i-1}, & \text{если } y > a_i \end{cases}.$$

В соответствии с формулой (14) аппроксимируем разрывную функцию $f(y)$ следующей гладкой функцией

$$\tilde{f}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{h}(y; a_i, b_i, 0, c_i - c_{i-1}). \quad (15)$$

В частности, если функции $\tilde{h}(y; a_i, b_i, 0, c_i - c_{i-1})$ определены в соответствии с формулой (11), то соотношение (15) принимает следующий вид

$$\tilde{f}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i - c_{i-1}}{1 + \exp\left(-\frac{2y - a_i - b_i}{b_i - a_i} s\right)}. \quad (16)$$

Отметим, что для осуществления процедуры сглаживания вместо логистической функции можно использовать также функции $\varphi_1(x) = \frac{x}{1 + |x|}$ и $\varphi_2(x) = \frac{x^3}{1 + |x|^3}$

(по выбору исследователя), и проводить рассуждения аналогично представленной выше схеме аппроксимации кусочно-постоянной функции с несколькими разрывами.

Практическое использование предлагаемой методики

На настоящем этапе развития практически любая серьезная прикладная задача в сфере экономики характеризуется достаточно большой размерностью. Оперировать тысячами переменных и сотнями ограничений вручную крайне непросто. В связи с этим возникает потребность в привлечении к решению оптимизационных задач специализированных программных продуктов. Однако даже это не гарантирует достижения результата, поскольку подавляющее большинство оптимизационных пакетов основано на использовании метода обобщенного приведенного градиента (ОПГ) либо его аналогах. Для корректного

применения такого подхода и целевая функция, и функции, участвующие в записи ограничений должны быть гладкими.

Вместе с тем, в разных отраслях хозяйственной деятельности сегодня встречаются объекты и процессы, при описании которых специалистам приходится использовать разрывные функции, т. е. функции, у которых имеются разрывы (первого либо второго рода) [6].

В качестве примера можно рассмотреть, в частности, проблему оптимизации использования машинно-тракторного парка (МТП) сельскохозяйственного предприятия [7].

Экономическая постановка задачи

Агропромышленное предприятие располагает машинно-тракторным парком, т. е. фиксированным набором тракторов, комбайнов и сельскохозяйственных машин определенных марок. В соответствии с планом весенне-полевых и уборочных работ предприятие должно выполнить комплекс взаимосвязанных механизированных операций в заданном объеме и в заданные агротехнические сроки. Перед лицом, принимающим решение, стоят следующие основные задачи:

1) определить, достаточно ли имеющихся производственных мощностей для выполнения плана по растениеводству;

2) в случае нехватки производственных мощностей составить научно обоснованный план пополнения машинно-тракторного парка за счет лизинга либо покупки новой техники;

3) составить оптимальное расписание выполнения комплекса полевых работ, при котором величина совокупных приведенных затрат будет минимальна [8].

Математическая модель

Управляемые параметры:

x_{ijkt} – количество тракторных агрегатов в составе трактора (комбайна) марки j и сельхозмашины (орудия) марки k на выполнении механизированной работы i в t -м периоде неизменных условий;

y_{ijkt} – время работы тракторных агрегатов в составе трактора (комбайна) марки j и сельхозмашины (орудия) марки k на выполнении работы j в течение рабочего дня (в часах) в t -м периоде неизменных условий;

l_j – количество вновь приобретаемых тракторов (комбайнов) марки j ;

r_k – количество вновь приобретаемых сельхозмашин (орудий) марки k .

Экзогенные переменные:

D_t – длительность t -го периода неизменных условий, в течение которого согласно плану необходимо выполнить рассматриваемые агротехнические работы (в рабочих днях);

T_{max} – максимальная продолжительность рабочей смены, т. е. наибольшее возможное время, которое в течение дня может быть отработано одним трактором либо комбайном (в часах);

V_i – общий объем механизированных работ вида i (в соответствующих единицах измерения: т, га);

L_j – количество наличных тракторов (комбайнов) марки j ;
 R_k – количество наличных сельхозмашин (орудий) марки k ;
 a_j – годовые амортизационные отчисления (в случае действующей техники) либо приведенные годовые затраты на приобретение (в случае закупки новой техники) трактора (комбайна) марки j ;

b_k – годовые амортизационные отчисления (в случае действующей техники) либо приведенные годовые затраты на приобретение (в случае закупки новой техники) сельхозмашины (орудия) марки k ;

F_j – установленный технической документацией нормативный годовой фонд времени работы трактора (комбайна) марки j ;

g_j – коэффициент повышения амортизации трактора (комбайна) марки j в случае, когда фактическая выработка превышает нормативную;

$\|p_{ijk}\|$ – матрица производительности тракторных агрегатов в составе трактора (комбайна) марки j и сельхозмашины (орудия) марки k при выполнении механизированной работы i ;

$\|u_{ijk}\|$ – матрица цен 1 часа работы тракторных агрегатов в составе трактора (комбайна) марки j и сельхозмашины (орудия) марки k при выполнении механизированной работы i без учета амортизации;

$\|c_{ijk}\|$ – матрица цен 1 часа работы тракторных агрегатов в составе трактора (комбайна) марки j и сельхозмашины (орудия) марки k при выполнении механизированной работы i с учетом амортизации.

Целевая функция:

$F(x_{ijk}, y_{ijk}, l_j, r_k)$ – совокупные приведенные затраты на выполнение всего комплекса механизированных работ (в ден. ед.).

$$F(x_{ijk}, y_{ijk}, l_j, r_k) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_t x_{ijkt} \cdot y_{ijkt} \cdot c_{ijk} \cdot D_t + \sum_j l_j \cdot a_j + \sum_k r_k \cdot b_k \rightarrow \min. \quad (18)$$

Ограничения:

а) По наличному количеству тракторов (комбайнов)

$$\sum_i \sum_k x_{ijkt} \leq L_j + l_j. \quad (19)$$

В каждый момент времени совокупное число тракторов (комбайнов) марки j , работающих одновременно на всех агротехнических операциях, не должно превышать их наличное количество (с учетом приобретаемых в текущем году).

б) По комплектованию тракторов (комбайнов) сельхозмашинами (орудиями)

$$\sum_i \sum_j x_{ijkt} \leq R_k + r_k. \quad (20)$$

В каждый момент времени совокупное число сельхозмашин (орудий) марки k , работающих одновременно на всех агротехнических операциях, не должно превышать их наличное количество.

в) По выработке в течение смены

$$y_{ijkt} \leq T_{\max}. \quad (21)$$

Количество часов, отработанных одним трактором (комбайном) не должно превышать максимально допустимой длительности рабочей смены.

г) По выполнению плановых объёмов отдельных агротехнических работ:

$$\sum_j \sum_k \sum_t x_{ijkt} \cdot y_{ijkt} \cdot p_{ijk} \cdot D_t \geq V_i. \quad (22)$$

Общий объем работ, выполненных тракторными агрегатами, закреплёнными за конкретной механизированной работой должен быть не меньше объема по плану (здесь считается, что превышение плана теоретически возможно).

д) По экономическому содержанию управляемых параметров:

$$x_{ijkt} \in R_+, y_{ij} \in R_+, l_j \in R_+, r_k \in R_+. \quad (23)$$

Количество агрегатов, тракторов (комбайнов), сельхозмашин (орудий) должно выражаться целым неотрицательным числом, т. е. допускается равенство нулю. Число часов работы в течение смены каждого трактора (комбайна) должно выражаться вещественным неотрицательным числом.

Таким образом, оптимизация формирования и использования МТП агропромышленного предприятия сводится к решению следующей задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x_{ijkt}, y_{ijkt}, l_j, r_k) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_t x_{ijkt} \cdot y_{ijkt} \cdot c_{ijk} \cdot D_t + \sum_j l_j \cdot a_j + \sum_k r_k \cdot b_k \rightarrow \min, \\ \sum_i \sum_k x_{ijkt} \leq L_j + l_j, \\ \sum_i \sum_j x_{ijkt} \leq R_k + r_k, \\ y_{ijkt} \leq T_{\max}, \\ \sum_j \sum_k \sum_t x_{ijkt} \cdot y_{ijkt} \cdot p_{ijk} \cdot D_t \geq V, \\ x_{ijkt} \geq 0, y_{ijkt} \geq 0, l_j \geq 0, r_k \geq 0. \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\text{где } c_{ijk} = u_{ijk} + a_j \cdot \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_i \sum_k \sum_t y_{ijkt} \cdot x_{ijkt} \cdot D_t \leq F_j \cdot L_j, \\ g_0, & \text{если } \sum_i \sum_k \sum_t y_{ijkt} \cdot x_{ijkt} \cdot D_t > F_j \cdot L_j. \end{cases} \quad (25)$$

Экономический смысл разрывов в целевой функции: если суммарная фактическая выработка тракторов (комбайнов) данного типа превысит нормативную, то амортизационные отчисления следует скорректировать в сторону их увеличения (путем домножения на корректирующий коэффициент).

Например, если нормативный годовой фонд времени работы комбайна, согласно техническим требованиям, составляет 900 часов, а он отработал 1000 часов, то амортизация должна быть списана на себестоимость готовой продукции в повышенном объеме, например, на 8% больше, чем при обычном режиме эксплуатации. Особенно актуально использовать такой подход в напряженные агротехнические периоды.

Реализация методологии

По своему математическому содержанию данная задача (24) относится к классу негладких оптимизационных задач, так как в целевой функции имеются разрывы первого рода.

В связи с этим, требуется подобрать такие инструментальные средства, которые способны успешно решать задачи данного типа. На настоящем этапе развития специализированного программного обеспечения, предназначенного для решения оптимизационных задач, существует ряд проблем, связанных с обработкой негладких функций. Компьютерные программы, которые способны решать такого рода задачи, обычно распространяются на коммерческой основе. Таким образом, не каждое сельскохозяйственное предприятие может себе позволить приобрести подобный программный продукт и периодически выделять немалые средства на его обновление. Более того, современные программные продукты, даже самые мощные, имеют ограничения по размерности решаемой задачи.

Поэтому для приложения данных моделей к оптимизации МТП реально существующих предприятий АПК (агропромышленного комплекса) возникает необходимость в приведении задачи к такому виду, в котором она может быть решена стандартными средствами, в частности пакетом "Поиск решения", встроенным в среду MsExcel либо бесплатной версией таких программных продуктов, как GAMS 24.5.

Для этого преобразуем целевую функцию так, чтобы она стала гладкой, т. е. устраним разрывы первого рода. Сначала перепишем формулу для расчета цены 1 часа работы МТА в следующем виде

$$c_{ijk} = u_{ijk} + a_j \cdot g_j, \quad (26)$$

где

$$g_j = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_i \sum_k \sum_t y_{ijkt} \cdot x_{ijkt} \cdot D_t \leq F_j \cdot L_j, \\ g_0, & \text{если } \sum_i \sum_k \sum_t y_{ijkt} \cdot x_{ijkt} \cdot D_t > F_j \cdot L_j. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь g_0 – заданная константа, значение которой больше 1.

Заметим, что в соответствии с формулой (12) коэффициент g_j является разрывной функцией переменных x_{ijkt} и y_{ijkt} .

Формулу (24) следует использовать для аппроксимации формулы (11), т. е.

$$c_{ijk} \approx u_{ij} + a_j \tilde{g}_j. \quad (28)$$

В нашем случае, когда функция g_j задана формулой (27), будем считать, что

$$f(X) = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijkt} \cdot x_{ijkt} \cdot D_t - F_j \cdot L_j, \quad (29)$$

а параметры a , c и d равны соответственно значениям 0, 1 и g_0 , т. е.

$$a = 0, \quad c = 1, \quad d = g_0. \quad (30)$$

В данном случае многомерный массив X состоит из переменных x_{ijkt} и y_{ijkt} .

В интересующем нас случае аппроксимирующая функция в силу формулы (8) равенства (27) примет вид

$$\tilde{g}_j = \frac{g_0 + \exp \left[\frac{2(\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk} \cdot x_{ijk} \cdot D_i - F_j \cdot L_j) - b}{b} s \right]}{\left[\frac{2(\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk} \cdot x_{ijk} \cdot D_i - F_j \cdot L_j) - b}{b} s \right]}. \quad (31)$$

Далее эту функцию можно использовать для построения компьютерной модели и получения численного решения задачи оптимизации МТП с помощью ЭВМ.

Выводы

Предложенный в данной статье подход к оптимизации негладких функций представляет не только теоретический, но и практический интерес. В настоящее время процессы, протекающие в реальных экономических системах, имеют тенденцию к усложнению. Для их корректного описания приходится использовать все более сложный математический аппарат. Одной из таких прикладных проблем является задача оптимизации формирования и использования машинно-тракторного парка предприятий АПК. Разрывы, возникающие в целевой функции – суммарных приведенных затратах – должны быть устранены с помощью математических инструментов, одним из которых является аппроксимация логистической кривой. Надо отметить, что существуют и другие элементарные функции, способные обеспечить необходимый результат. Что касается разобранной в качестве примера задачи оптимизации МТП, то предложенная методология позволяет определить целый ряд показателей, крайне востребованных менеджментом предприятий АПК, а именно: суммарный бюджет закупок новой техники, суммарные затраты по эксплуатации МТП при выполнении комплекса сельскохозяйственных работ, оптимальный план закрепления МТА за конкретными операциями. Грамотный учёт полученных результатов при разработке тактических и оперативно-производственных планов позволит существенно повысить эффективность агропромышленного производства в Республике Беларусь.

Следует заметить, что данная методика при всех ее достоинствах имеет серьезное ограничение: построенная с ее помощью компьютерная модель способна гарантированно найти лишь локальный экстремум. Для обеспечения нахождения глобального оптимума схема алгоритма нуждается в модификации. Тем не менее, для многих прикладных задач получение локального экстремума уже является большим достижением, поскольку это позволяет наметить возможные направления улучшения значения результирующего показателя и в некоторых случаях (например, при решении задачи оптимизации формирования и использования МТП) обеспечить конкретный экономический эффект.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Воронов, А. А.* Теория автоматического управления : учеб. для вузов по спец. “Автоматика и телемеханика” : в 2 ч. Ч. II : Теория нелинейных и специальных

- систем автоматического управления. / А. А. Воронов, Д. П. Ким, В. М. Лохин [и др.] ; под ред. А. А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1986. – С. 285.
2. *Лопатников, Л. И.* Экономико-математический словарь : словарь современной экономической науки / Л. И. Лопатников. – М. : Дело, 2003.
 3. Большая советская энциклопедия. – М. : Советская энциклопедия, 1969–1978.
 4. *Мицель А. А.* Методы оптимизации. – Часть 1 : учебное пособие / А. А. Мицель, А. А. Шелестов. – Томск : Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002. – 192 с.
 5. *Kingsland, S. E.* (1995) Modeling nature ISBN 0-226-43728-0 2. Weisstein, Eric W. “Logistic Equation”. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. Retrieved on 2008-10-21.
 6. *Демьянов, В. Ф.* Обобщение понятия производной в негладком анализе // Соросовский Образовательный Журнал. – 1996. – № 5. – С. 121–122.
 7. *Ефремов, А. А.* Планирование выполнения комплекса сельскохозяйственных работ с помощью негладкой оптимизационной модели / А. А. Ефремов // Материалы международной научно-практической конференции “Математика, статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании”. – Тверь : Тверской гос. ун-т, 2015. – С. 59–63.
 8. *Ефремов, А. А.* К вопросу о выборе критерия оптимальности при планировании комплекса сельскохозяйственных работ : материалы X международной научно-практической конференции “Научные горизонты”. – Шеффилд (Великобритания), 2014. – Том 2 : Экономические науки.

Поступила в редакцию 10.02.2016 г.

Контакты: andrefrem@tut.by (Ефремов Андрей Александрович)

Yefremov A.A. ON NONLINEAR OPTIMIZATION OF STEP OBJECTIVE FUNCTION.

The article considers a special class of optimization problems in which the target function given in n -dimensional space is nonlinear and has discontinuity of the first kind. A new approach to the solution of such non-smooth problems of nonlinear programming is suggested and it is based on the approximation of the target function by means of the logistic curve. The application of the given method for the optimization of the formation and exploitation of machine and tractor fleet of agro-industrial enterprise is regarded. The discontinuities of the target function are connected with the modified consideration of amortization of agricultural aggregates in the process of running field operations. In conclusion the problem of the bounds for the given approach is enlightened.

Key words: nonlinear optimization, step target functions, approximating function, solution of the optimization economic problem.

УДК 535.42

ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ ПОЛОСКОВЫМ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМ ЛАЗЕРОМ

В. И. ЛЕБЕДЕВ

доктор физико-математических наук, профессор

М. И. МАРУШЕНКО

аспирант

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

На основании измерений АКФ первого порядка исследована зависимость дисперсионного параметра второго порядка для 8 полосковых GaAsInP полупроводниковых лазеров видимого спектрального диапазона от тока накачки. Обнаружено, что этот параметр стремится к нулю, когда ток накачки стремится к пороговому значению для стационарной генерации. Это обуславливает генерацию фемтосекундных импульсов, спонтанно возникающих в лазерном резонаторе при токах накачки в несколько раз ниже порогового тока. Сделан вывод о том, что затравочный фемтосекундный импульс является сверхизлучением активной среды лазера.

Ключевые слова: автокорреляционная функция, полупроводниковый лазер, спектрально ограниченный импульс, фемтосекундные импульсы, дисперсионный параметр активной среды лазера, спектр излучения полупроводникового лазера.

Введение

Проблему создания полупроводниковых лазеров, генерирующих фемтосекундные импульсы и оптические частотные гребенки можно считать одной из важнейших в лазерной физике. В работе [1] было обнаружено, что промышленные полосковые AlGaInP полупроводниковые лазеры с накачкой постоянным током видимого спектрального диапазона генерируют регулярные фемтосекундные (~ 100 фс) импульсы. Причем, в режиме генерации фемтосекундных импульсов ток накачки лазеров ниже порогового значения для квазистационарной генерации. Существование такого режима не согласуется с общепринятой концепцией лазеров ультракоротких импульсов, в рамках которой возникновение импульсов связывают с синхронизацией продольных мод лазерного резонатора. Он указывает на принципиально иную физическую причину генерации фемтосекундных импульсов.

В настоящей работе исследованы спектры и автокорреляционная функция (АКФ) излучения полосковых полупроводниковых лазеров фемтосекундных импульсов для разных токов накачки. Цель такого исследования – изучение физических причин генерации фемтосекундных импульсов полосковыми полупроводниковыми лазерами.

© Лебедев В. И., 2016

© Марушенко М. И., 2016

Основная часть

В работе исследовано 8 образцов полосковых полупроводниковых лазеров, работающих на длинах волн, находящихся в спектральных диапазонах 630, 650 и 670 нм. Пороговое значение тока квазистационарной генерации определяется по зависимости средней мощности генерации от тока накачки. Ток, при дальнейшем увеличении которого начинается быстрое нарастание мощности генерации, считают пороговым. Для исследованных образцов лазеров пороговый ток накачки находится в диапазоне 35 .. 40 мА.

Спектр генерации измерялся цифровой камерой на выходе спектрографа ДФС-8, а также путем сканирования спектра на выходе спектрографа щелью. Спектральное разрешение спектрографа ДФС-8 достаточно для уверенного разрешения продольных мод резонатора лазера (рис. 1).

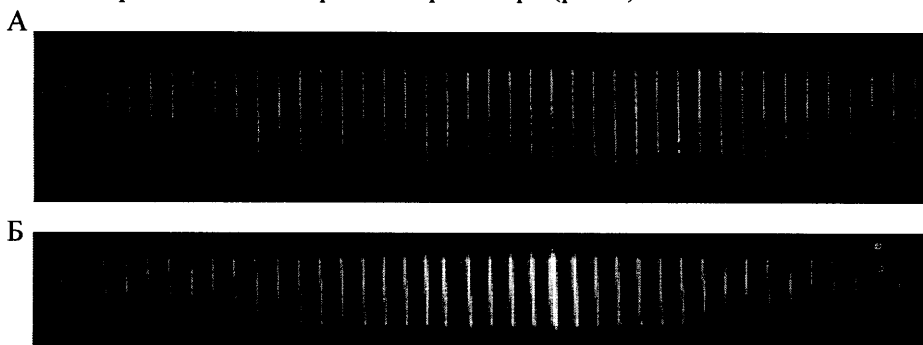


Рис. 1. Спектр оптической частотной гребенки полупроводникового лазера для случаев тока накачки (29 мА), А и тока накачки, превышающем пороговое значение стационарной генерации (35 мА), Б, снятые с разрешением дискретной структуры оптической частотной гребенки

На рисунке 1 показан спектр излучения лазера, снятый с высоким разрешением, позволяющим наблюдать его дискретную структуру. Расстояние между дискретными частотами спектра строго постоянно и равно $c/2L$, где L – оптическая длина лазерного резонатора. Однако эти частоты не являются стационарными продольными модами резонатора лазера (как обычно считают). Они возникают в спектральном приборе при разложении в спектр строго периодической последовательности ультракоротких импульсов. Такой спектр характерен для периодических процессов и следует из преобразований Фурье. Периодичность импульсов обусловлена тем, что в резонаторе циркулирует единственный импульс, который после каждого обхода резонатора появляется на его выходе. При токе накачки ниже порогового значения коэффициент усиления меньше потерь излучения и стационарные моды резонатора существовать не могут, они должны быть затухающими. Поэтому дискретная структура спектра рис. 1А есть простое следствие периодических пульсаций выходного излучения лазера.

В случае превышения порогового значения тока накачки (рис. 1 Б), усиление для стационарного излучения становится больше потерь. При этом возникает усиление излучения за счет вынужденных переходов в активной среде лазера и наибольшая мощность излучения уже присуща дискретным частотам

оптической гребенки, находящимся вблизи максимума спектрального контура усиления активной среды, и общая ширина спектра излучения лазера резко сужается (рис. 2).

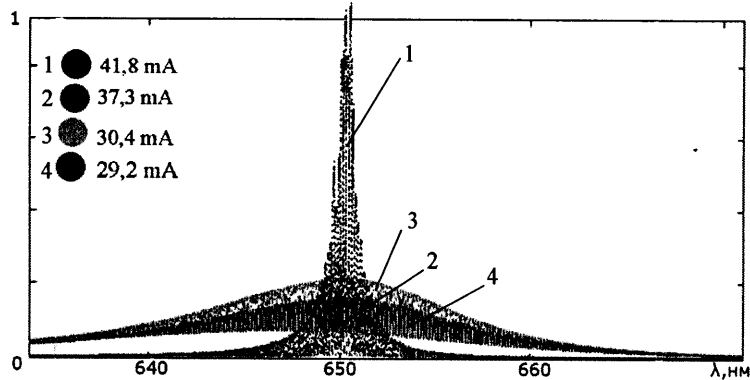


Рис. 2. Спектры выходного излучения полоскового полупроводникового лазера для разных токов накачки. Пороговый ток для стационарной генерации 35 мА. Пороговый ток возникновения ультракороткого импульса в резонаторе составляет ~ 10 мА

Одному и тому же спектру излучения могут соответствовать самые разные временные картины излучения. Более полную информацию о тонкой временной структуре излучения дают корреляционные измерения. Для фемтосекундных временных процессов измерения корреляционных функций излучения – единственная методика, которая позволяет судить о длительности импульсов и периоде их следования.

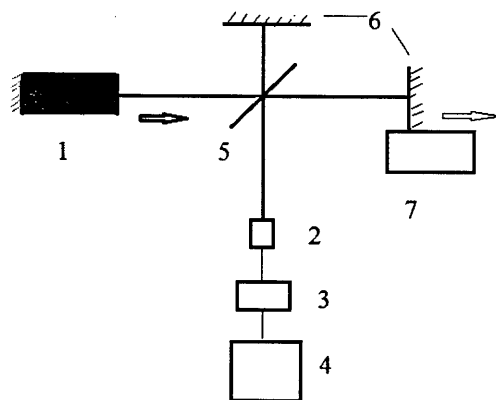


Рис. 3. Схема коррелятора. 1 – резонатор полупроводникового лазера, 2 – фотоумножитель, 3 – аналого-цифровой преобразователь, 4 – компьютер, 5 – светоделительное зеркало, 6 – зеркала интерферометра Майкельсона, 7 – микрометрический столик с приводом от электродвигателя

Автокорреляционная функция излучения (АКФ) измерялась коррелятором, представляющим собой интерферометр Майкельсона (рис. 3). Одно из зеркал

интерферометра 7 закреплено на столике и могло смещаться вдоль светового луча микрометрическим винтом с приводом от синхронного электродвигателя через редуктор. Скорость движения зеркала могла выбираться такой, чтобы регистрирующая система прописывала интерференционные полосы, последовательно возникающие и исчезающие на выходе интерферометра при движении зеркала. В качестве фотоприемника использовался фотоумножитель ФЭУ 140. Сигнал с фотоумножителя подавался на аналого-цифровой преобразователь, выходной цифровой сигнал с которого регистрировался компьютером. Сигнал представляет собой автокорреляционную функцию, на среднюю мощность излучения накладываются интерференционные полосы, расположенные под общей огибающей, которая периодически образует максимум, когда интерферирующие импульсы пространственно перекрываются и лучи находятся в фазе и минимум, который соответствует наложению лучей в противофазе.

Огибающая АКФ симметрична относительно нулевой разности хода лучей в интерферометре. Максимумы огибающей возникают при сдвиге разности хода от нулевого положения, кратном четному числу проходов света по лазерному резонатору: 2, 4, 6 Временная задержка между интерферирующими лучами в корреляторе равна, очевидно, разности хода, деленной на скорость света c . Глядя на рис. 3, можно заметить, что максимумы огибающей более высоких, чем нулевой, порядков возникают при тех же условиях, что и при регистрации кросс-корреляционной функции, когда интерферируют два луча, один из которых прошел через исследуемый образец, а другой – опорный по воздуху. В данном случае роль образца играет сам лазерный диод. Следовательно, наблюдаемое последовательное уширение максимумов огибающей АКФ обусловлено влиянием дисперсии активной среды лазера. Известно, что уширение кросс-корреляционной функции пропорционально длине образца, в данном случае числу обходов светом лазерного резонатора, умноженному на его оптическую длину [2]. Таким образом регистрация ширины максимумов АКФ нескольких порядков позволит определить дисперсионный параметр второго порядка активной среды лазера.

В приближении гауссовой формы огибающей импульса уширение импульса (и максимумов АКФ) с исходной длительностью τ_0 , прошедшего слой среды с дисперсией длиной L записывается в виде [3]

$$\tau(L) = \tau_0 \sqrt{1 + \left(\frac{4L \ln 2 k_0''}{\tau_0^2} \right)}, \quad (1)$$

где k_0'' – дисперсионный параметр второго порядка среды. Из формулы (1) следует, что при нулевом значении дисперсионного параметра второго порядка импульс, прошедший через слой среды не уширяется.

Для импульса гауссовой формы ширина максимума АКФ в 2,1 раза превышает длительность импульса [3].

Особенностью измерений АКФ излучения полупроводниковых лазеров является возможность измерения большого количества последовательных максимумов АКФ, которые возникают при изменении разности хода лучей в корре-

ляторе, равном двойной оптической длине резонатора лазера. При возрастании разности хода в корреляторе максимумы АКФ последовательно уширяются при соответствующем уменьшении их амплитуды (рис. 4). Эта особенность АКФ связана с дисперсией света в активной среде лазера. Она и позволяет измерить дисперсионный параметр второго порядка активной среды [2, 4].

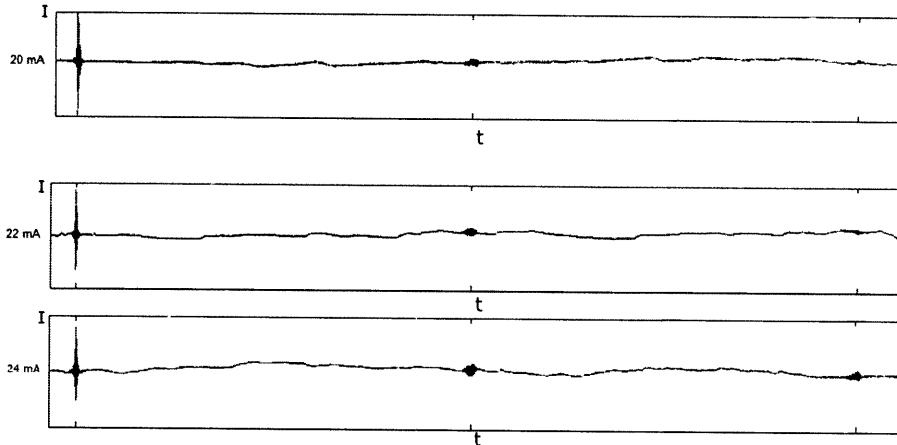


Рис. 4. Затухающая последовательность максимумов АКФ, измеренных для излучения полоскового полупроводникового лазера, для разных токах накачки

Результаты таких измерений для излучения лазера работающего при разных токах накачки показаны на рисунке 5.

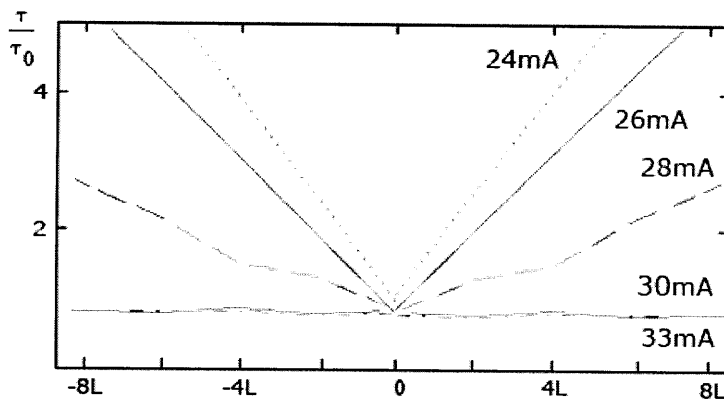


Рис. 5. Типичная зависимость относительного уширения максимумов АКФ излучения лазера, работающего при разных токах накачки

При малом токе накачки наблюдается единственный максимум АКФ регистрируемый вблизи нулевой разности хода интерферирующих лучей коррелятора. Этот максимум соответствует спектру люминесценции лазерного диода. Затем, при некотором пороговом токе накачки (~ 10 мА) в АКФ становится заметным максимум второго порядка. Его возникновение свидетельствует о по-

явлении периодичности огибающей АКФ. Это означает, что в лазерном резонаторе начинает циркулировать спонтанно возникший ультракороткий импульс. Причем усиление импульса выше, чем для непрерывного излучения. Это означает, что процесс усиления импульса имеет иную физическую природу, чем вынужденное излучение.

Периодичность АКФ возникает для тока накачки ~ 10 мА. Дисперсия активной среды при таких токах накачки, как показали измерения, имеет большое значение. Поэтому максимумы АКФ порядков более высоких, чем второй, зарегистрировать на используемой установке не удается (рис. 6).

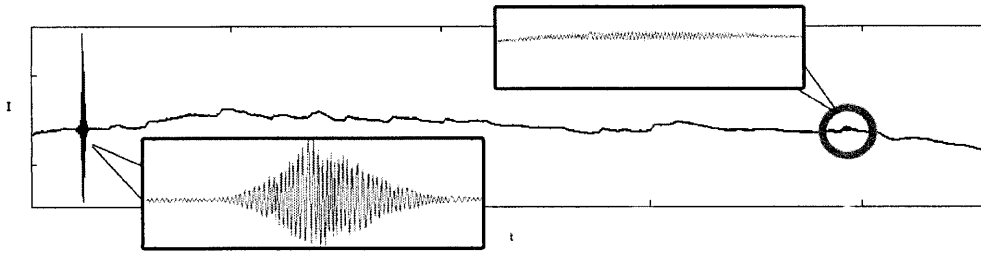


Рис. 6. АКФ лазера для тока накачки (13 мА), при котором регистрируется единственный вторичный максимум АКФ, свидетельствующий о возникновении на выходе лазера периодической последовательности фемтосекундных импульсов. На вставках показаны максимумы АКФ, снятые с разрешением интерференционных полос, на них видно, что при задержке последовательностей импульсов в корреляторе, равном времени обхода светом резонатора, максимум АКФ испытывает сильное дисперсионное расширение

Для тока накачки 33 мА, находящегося вблизи порога стационарной генерации для данного образца лазера, АКФ излучения лазера представляет собой слабо затухающую последовательность интерференционных максимумов. Дисперсионный параметр второго порядка, вызывающий дисперсионное уширение импульса, циркулирующего в лазерном резонаторе, при этом стремится к нулю (рис. 7).

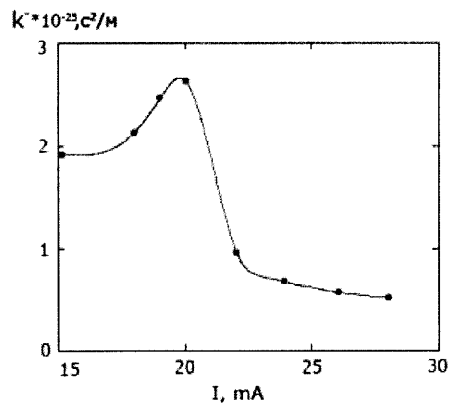


Рис. 7. Зависимость дисперсионного параметра второго порядка активной среды лазера от тока накачки, определенная по измерениям уширения последовательных максимумов АКФ

Заклучение

Приведенные результаты измерений показывают, что одиночный затравочный ультракороткий импульс спонтанно возникает в активной среде лазера при токе накачки в несколько раз меньшем порога стационарной генерации. Затем он циркулирует между зеркалами в лазерном резонаторе усиливается и создает на его выходе регулярную последовательность импульсов, разделенных временным интервалом, равным времени обхода светом резонатора. Спектр излучения лазера при этом представляет собой оптическую частотную гребенку. Малость дисперсионного уширения фемтосекундных импульсов при определенном токе накачки лазера, находящимся вблизи порога стационарной генерации, связана со стремлением при этом токе накачки дисперсионного параметра второго порядка активной среды к нулю. Физическая причина такой зависимости не ясна.

Затравочный импульс фемтосекундной длительности, возникающий в активной среде с усилением, которое существенно меньше потерь резонатора, может быть только импульсом сверхизлучения. Как известно, длительность затухания квантового кооперативного эффекта – сверхизлучения сокращается по сравнению с длительностью спонтанного излучения в N раз, где N – число кооперативно испускающих атомов [5]. В волноводном резонаторе полупроводникового лазера существуют идеальные условия для взаимодействия излучения с активными частицами и возникновения сверхизлучения. Высокая концентрация активных частиц в волноводе, образующем лазерный резонатор, приводит к тому, что длительность импульса сверхизлучения сокращается в миллионы раз, становится предельно короткой и определяется уже не концентрацией излучающих частиц, а общей шириной спектрального контура усиления активной среды. Именно такой случай и реализуется в полосковых полупроводниковых лазерах.

Наблюдаемый нами физический сценарий возникновения и генерации ультракоротких импульсов полупроводниковыми лазерами принципиально отличается от общепринятого и излагаемого в многочисленных учебниках и монографиях механизма “синхронизации продольных мод лазерного резонатора”. “Синхронизация мод” может реализовываться только в процессе квазистационарной лазерной генерации, возникающей при накачке выше пороговой. Поэтому общепринятая причина генерации ультракоротких импульсов лазерами, которую связывают с “синхронизацией продольных мод лазерного резонатора” скорее всего, ошибочна.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Lebedev, V., Kotiashov, E., Makarevich V.* Generation of regular fs pulses in AlGaInP semiconductor laser // Optics Communications. – 2011. – Vol. 284. – P. 3008–3010.
2. *Борисов, В. И.* Определение хроматической дисперсии полупроводникового лазера по временной когерентности его излучения / В. И. Борисов, В. И. Лебедев // ЖПС. – 1992. – Т. 57, № 3. – С. 340.
3. *Борисов, В. И.* Введение в оптику ультракоротких лазерных импульсов / В. И. Борисов, В. И. Лебедев, С. Н. Перепечко. – Могилев : МГУ им. А.А. Кулешова, 2005. – 328 с.

4. *Лебедев, В. И.* Особенности формирования автокорреляционной функции излучения фемтосекундного полупроводникового лазера / В. И. Лебедев, М. И. Марушенко // ЭЛЕКТРОНИКА ИНФО. – Минск. – 2014. – № 1. – С. 42–44.
5. *Меньшиков, Л. И.* Сверхизлучение и некоторые родственные явления / Л. И. Меньшиков // УФН. – 1999. – Т. 169, № 2. – С. 113.

Поступила в редакцию 13.10.2015 г.

Контакты: emryte@tut.by (Марушенко Максим Иванович).

vilebedev@newmail.ru (Лебедев Владимир Иванович)

Lebedev V.I., Marushenko M.I. SOME FEATURES OF FEMTOSECOND PULSE GENERATION BY SEMICONDUCTOR LASER.

On the base of the first order autocorrelation measurements the dependence of the dispersion parameter of the second order on the pumping current for 8 strip-line GaAsInP semiconductor lasers has been investigated. This parameter is proved to tend to zero when the pumping current approximates the threshold value for the stationary generation. It determines fs pulse generation which spontaneously arises in the laser resonator under the pumping current several times lower than its threshold value. It is concluded that the priming fs pulse is the superradiation of the laser active medium.

Key words: autocorrelation function, semiconductor laser, transform-limited pulse, femtosecond pulses, dispersion parameter of laser active medium, emission spectrum of semiconductor laser.

УДК 535.42

ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ЛАЗЕРА ПО АКФ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

М. И. МАРУШЕНКО

аспирант

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Измерена длительность спектрально ограниченных фемтосекундных импульсов, генерируемых полосковым полупроводниковым GaAsInP лазером с длиной волны излучения 650 нм по АКФ первого порядка. Длительность импульсов составляет 66 фс.

Ключевые слова: автокорреляционная функция, полупроводниковый лазер, спектрально ограниченный импульс, фемтосекундные импульсы, дисперсионный параметр активной среды лазера.

Введение

Измерение длительности фемто- и пикосекундных лазерных импульсов с помощью электронных приборов: фотоэлементов, фотодиодов, электронно-оптических преобразователей с разверткой обеспечивает в лучшем случае временное разрешение $\sim 10^{-12}$ секунды. Это как минимум на два порядка меньше величины, необходимой для регистрации фемтосекундных импульсов, генерируемых современными лазерами. Для измерений длительностей импульсов фемтосекундного диапазона применяют исключительно оптические методы, основанные на корреляционных нелинейно-оптических методиках [1–3]. Эти методы хорошо работают для твердотельных лазеров, генерирующих импульсы с мощностями, достаточными для возбуждения в нелинейных кристаллах второй гармоники излучения или других нелинейно-оптических явлений. Полосковые полупроводниковые лазеры, от которых удалось получить фемтосекундные импульсы [4], не обладают достаточной мощностью и методы, основанные на нелинейных оптических эффектах для них неприменимы.

Автокорреляционная функция излучения первого порядка представляет собой зависимость интенсивности излучения на выходе интерферометра Майкельсона от разности хода интерферирующих лучей. Это АКФ первого порядка. Нелинейное преобразование этого сигнала во вторую гармонику на выходе интерферометра дает АКФ второго порядка.

Лазеры генерируют периодические ультракороткие импульсы с большой скважностью: отношение промежутка между импульсами к длительности импульсов обычно превышает значение 10^3 . Это позволяет производить регистрацию АКФ непосредственно излучаемого лазерами света без выделения отдельных импульсов из последовательности с помощью электрооптического затво-

ра. Цель настоящей работы – более точное измерение длительности маломощных фемтосекундных импульсов, генерируемых полупроводниковыми лазерами на основе измерений АКФ первого порядка. Такая возможность возникает, когда лазер генерирует спектрально-ограниченные импульсы при определенном токе накачки.

Основная часть

Для импульсов, обычно генерируемых лазерами ультракоротких импульсов, наличие фазовой модуляции несущей частоты излучения (чирпа) приводит к сужению нулевого максимума АКФ первого порядка и уширению максимумов более высоких порядков. Поэтому длительность ультракороткого импульса по ширине максимума АКФ первого порядка обычно можно оценить лишь приближенно.

Малая оптическая длина лазерного резонатора полосковых полупроводниковых лазеров, составляет порядка нескольких миллиметров. Поэтому использование интерферометра Майкельсона с возможностью смещения зеркала на несколько сантиметров позволяет зарегистрировать десятки максимумов АКФ, отличающихся разностью хода, соответствующей кратному числу обхода светом лазерного резонатора. При этом оказывается, что последовательные максимумы АКФ расширяются, а их амплитуда уменьшается (рис. 1). Это связано с наличием фазовой модуляции несущей частоты излучения лазера. Причина фазовой модуляции – дисперсия активной среды лазера.

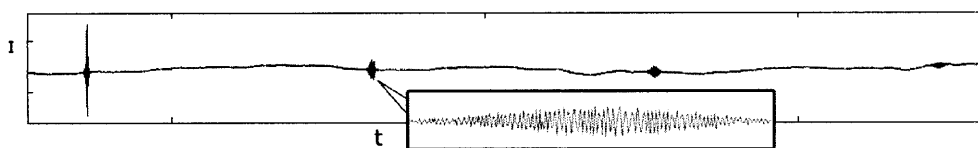


Рис. 1. АКФ излучения полупроводникового полоскового лазера, генерирующего на длине волны 0,65 мкм. По мере увеличения разности хода лучей максимумы АКФ расширяются

Для тока накачки 29 мА, находящегося вблизи порога стационарной генерации АКФ излучения данного образца лазера представляет собой слабо затухающую последовательность интерференционных максимумов [5]. Это свидетельствует о том, что фазовая модуляция несущей частоты излучения отсутствует и лазер генерирует практически спектрально ограниченные импульсы. Дисперсионный параметр второго порядка, вызывающий дисперсионное уширение импульса, циркулирующего в лазерном резонаторе, при этом стремится к нулю. Это предоставляет уникальную возможность прямо измерить длительность фемтосекундного импульса по ширине максимума АКФ.

Как известно [6], ширина максимума АКФ превышает ширину импульса (в гауссовом приближении) в 2,1 раза. Ненулевой максимум АКФ на рис. 2 по уровню 0,5 от максимального значения, содержит 64 интерференционных полосы. Временная задержка в корреляторе, соответствующая сдвигу интерференционной картины на одну полосу равна $\lambda/c = 2,17$ фс. Это означает, что дли-

тельность фемтосекундного импульса равна 66 фс. Точность измерения определяется степенью оправданности используемых приближений: гауссовой формы импульса и спектральной ограниченности импульсов. Судя по степени уширения последовательных максимумов АКФ, которая все же имеет место, погрешность измерения можно оценить порядком 10%.

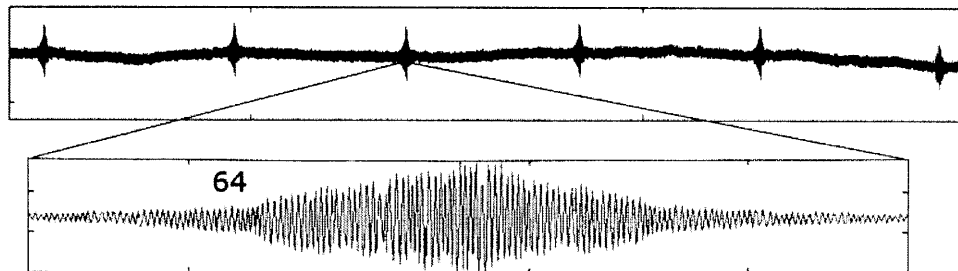


Рис. 2. Слабо затухающая АКФ излучения лазера при токе накачки (29,2 мА), при котором лазер генерирует практически спектрально ограниченные импульсы. На вставке изображен максимум АКФ, зарегистрированный с разрешением интерференционных полос, содержащий по уровню 0,5 от максимума 64 полосы

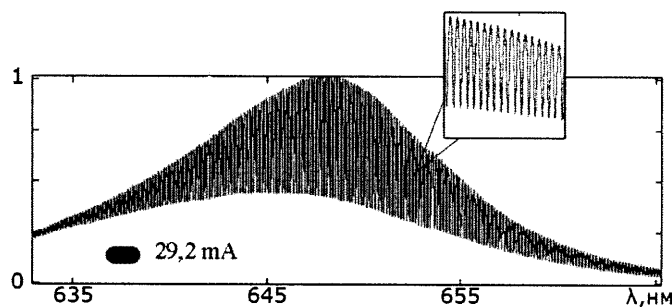


Рис. 3. Спектр излучения лазера при токе накачки 29,2 мА, при котором лазер генерирует спектрально ограниченную последовательность ультракоротких импульсов. На вставке показана дискретная структура спектра – оптическая частотная гребенка. Спектральный промежуток между строго эквидистантными частотами гребенки равен $c/2L = 1,25 \cdot 10^{11}$ Гц или 0,176 нм L – оптическая длина резонатора лазера

Спектр импульсного периодического излучения, представляющий собой оптическую частотную гребенку на рис. 3 наложен на непрерывный спектр спонтанной люминесценции лазерного диода. Причем, максимум спектра оптической гребенки сдвинут в красную область спектра по отношению к максимуму спектра люминесценции. Такая особенность спектра характерна для сверхизлучения [7].

Заключение

Для спектрально ограниченных регулярных импульсов ширина спектра излучения $\Delta\nu$ связана с длительностью импульса Δt соотношением неопределенности [6]. В приближении гауссовой формы импульса, которое обычно хорошо оправдывается на практике, оно имеет вид:

$$\Delta\nu \cdot \Delta t = 0,4416... .$$

Для спектра, показанного на рис. 3 ($\Delta\nu = 12$ нм), в этом приближении минимальная длительность импульса равна 52 фс. Таким образом длительность импульса, реально генерируемая лазером, измеренная по ширине АКФ излучения, несколько превышает минимально возможную длительность спектрально ограниченного импульса, однако в общем ей соответствует. Этот факт подтверждает предельную длительность импульсов лазеров ультракоротких импульсов: их длительность в случае компенсации дисперсии активной среды определяется и ограничивается шириной спектрального контура усиления активной среды.

Именно такая особенность характерна для сверхизлучения в случае кооперативного испускания света большим числом атомов активной среды. Для полупроводниковых лазеров концентрация активных частиц составляет $\sim 10^{23}$ см⁻³. Поэтому число атомов в объеме с размерами длины волны излучения 0,65 мкм превышает 10^5 . Как минимум в такое число раз длительность ультракороткого импульса сверхизлучения меньше времени спонтанного излучения атомов активной среды. Поэтому длительность ультракороткого импульса не зависит от концентрации кооперативно испускающих свет активных частиц.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Iacinis, C., Walmsley, I. A.* // Optics Lett. – 1998. – Vol. 23. – P. 792.
2. *Nicholson, J. W.* et. al. // Optics Lett. – 1999. – Vol. 25. – P. 1774.
3. *Messager, V.* et.al. // Optics Lett. – 2003. – Vol. 28. – P. 743.
4. *Lebedev, V.* Generation of regular fs pulses in AlGaInP semiconductor laser / V. Lebedev, E. Kotiashov, V. Makarevich // Optics Communications. – 2011. – Vol. 284. – P. 3008–3010.
5. *Лебедев, В. И.* Особенности формирования автокорреляционной функции излучения фемтосекундного полупроводникового лазера / В. И. Лебедев, М. И. Марушенко // ЭЛЕКТРОНИКА ИНФО. – 2014. – Минск. – № 1. – С. 42–44.
6. *Борисов, В. И.* Введение в оптику ультракоротких лазерных импульсов / В. И. Борисов, В. И. Лебедев, С. Н. Перепечко. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2005. – 328 с.
7. *Васильев, П. П.* Роль сильного усиления среды в возникновении сверхизлучения и наблюдении когерентных эффектов в полупроводниковых лазерах / П. П. Васильев // Квантовая электроника. – 1999. – 29, № 1. – С. 4–8.

Поступила в редакцию 13.10.2015 г.

Контакты: empyte@tut.by. (Марушенко Максим Иванович)

Marushenko M.I. MEASURING THE DURATION OF FEMTOSECOND PULSES OF SEMICONDUCTOR LASER ON THE BASE OF THE FIRST ORDER AUTOCORRELATION.

The duration of spectrally limited 66 fs pulses from GaAsInP stripe semiconductor laser with 650 nm wavelength on the base of the first order autocorrelation has been measured.

Key words: autocorrelation function, semiconductor laser, transform-limited pulse, femtosecond pulses, dispersion parameter of laser active medium.

УДК 539.144

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГИПЕРЯДЕР В ПРОСТЫХ МОДЕЛЯХ

С. М. ЧЕРНОВ

кандидат физико-математических наук, доцент
МГУ имени А. А. Кулешова

Проведен качественный анализ Λ -гиперядер в рамках двухчастичной модели при нулевом радиусе действия ΛN -сил. Оценено значение объемного интеграла ΛN -потенциала, энергии связи гиперядер, размеры нуклонного остова и длины Λp -рассеяния.

Ключевые слова: Гиперядра, основное и возбужденные состояния, энергия связи, размеры ядер, длина рассеяния и эффективный радиус.

Введение

Гиперядра – связанные состояния барионов, из которых, по крайней мере, один является гипероном со странностью, отличной от нуля. В настоящей работе будут рассмотрены лишь гиперядра, в состав которых входит единственный Λ -гиперон.

Λ -гиперядра были открыты польскими физиками М. Данышем и Е. Пниевским в 1952 г. За последние 60 лет в гиперядерной физике достигнут значительный прогресс: экспериментально идентифицировано около 30 гиперядер, для которых удалось измерить энергии связи гиперядер (энергии отделения Λ -гиперона B_Λ) с достаточно хорошей точностью, а также дать теоретическую интерпретацию свойств ΛN -потенциалов и описать структуру многих гиперядер. Состояние физики гиперядер систематически освещается в журнале “Успехи физических наук” [1], а также в работах [2–3]. В исследованиях физики гиперядер удалось решить целый комплекс важнейших вопросов физики ядра и элементарных частиц. Назовем лишь некоторые из них, которые будут затронуты в настоящей работе.

1) Построение моделей строения гиперядер, в рамках которых можно оценить параметры ΛN -потенциала.

2) Оценка энергии связи открытых гиперядер.

3) Рассмотрение вопроса о размерах нуклонного остова в гиперядрах, включая ядра, для которых отсутствуют данные для свободного состояния.

4) Проведение сравнительного анализа результатов, полученных на основе расчетов связанных состояний, с данными по низкоэнергетическому Λp -рассеянию.

Разумеется, что описанный круг проблем решался по-разному во многих работах [1–3]. При этом, как правило, проводились громоздкие аналитические и численные расчеты с большой затратой машинного времени, и которые, кроме автора, не могут быть воспроизведены. В настоящей работе показано, что

многие указанные вопросы могут быть качественно решены в рамках достаточно простых моделей, доступных студенту университета.

1. Выбор модели гиперядра и основные предположения

При анализе энергий связи гиперядер в первом приближении ограничимся рассмотрением центрального и спиново независимого ΛN -потенциала $V_{\Lambda N}(r)$. В дальнейшем расчет энергий связи гиперядер будем проводить в модели Λ -недеформированный нуклонный остов. При этом нуклонный остов рассматривается как сплошная среда, в которой ядерная материя распределена в пространстве с плотностью $\rho(r)$, где $\rho(r)$ – усредненная по углам плотность распределения нуклонов остова.

В рамках этой модели нахождение энергий связи гиперядер сводится к решению уравнения Шредингера для Λ -частицы, движущейся в поле ядра – остова

$$V_{\Lambda O}(r) = \int V_{\Lambda N}(|\vec{r} - \vec{r}_1|) \rho(r_1) d^3 r_1. \quad (1)$$

В случае гиперядер интеграл (1) допускает существенное упрощение, которое для дальнейшего будет иметь принципиальное значение. Можно показать, что выражение (1) можно представить в виде [4]:

$$V_{\Lambda O}(r) = -\Omega_{\Lambda N} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\langle R_{\Lambda N}^{2m} \rangle}{(2m+1)!} \nabla^{2m} \rho(r), \quad (2)$$

где введены обозначения:

$$\Omega_{\Lambda N} = - \int V_{\Lambda N}(r) d^3 r; \quad \langle R_{\Lambda N}^{2m} \rangle = - \frac{1}{\Omega_{\Lambda N}} \int V_{\Lambda N}(r) r^{2m} d^3 r. \quad (3)$$

В дальнейшем ограничимся первыми двумя членами последнего разложения:

$$V_{\Lambda O}(r) \approx -\Omega_{\Lambda N} \left(1 + \frac{R_{\Lambda N}^2}{6} \nabla^2 \right) \rho(r). \quad (4)$$

Здесь объемный интеграл $\Omega_{\Lambda N}$ и среднеквадратичный радиус $R_{\Lambda N} = \sqrt{\langle R_{\Lambda N}^2 \rangle}$ являются интегральными характеристиками ΛN -потенциала и не зависят от структуры ядра-остова.

Это приближение оправдано двумя причинами. Во-первых, оценка более высоких поправок, например $\langle R_{\Lambda N}^4 \rangle$, ограничена точностью измерений энергий связи гиперядер. Во-вторых, разложение (2) фактически ведется по малому параметру δ , равному отношению радиуса действия ΛN -сил ($\approx 0,5 \text{ Фм}$) к размерам ядра-остова ($\approx 4 \text{ Фм}$), т. е. $\delta \approx 0,1$.

Зная экспериментальные значения B_{Λ} двух гиперядер и параметры нуклонной плотности их остовов, можно определить величины $\Omega_{\Lambda N}$ и $R_{\Lambda N}$. Для этой

цели были выбраны гиперядра ${}^5_{\Lambda}\text{He}$ и ${}^{13}_{\Lambda}\text{C}$, для которых надежно установлены как энергии связи B_{Λ} , так и плотности распределения нуклонов остова. Кроме того, ядра ${}^4\text{He}$ и ${}^{12}\text{C}$ наименее подвержены деформациям [2] и имеют нулевые спины, вследствие чего ни спиновые, ни тензорные компоненты ΛN -потенциала не могли бы давать вклада в B_{Λ} .

2. Оценка параметров ΛN потенциала в однородной модели

Предполагая тождественность распределения протонов и нейтронов в ядрах, плотность распределения ядерной материи в ядре с массовым числом A будем описывать функцией $\rho(r) = A\rho_0(r)$, где $\rho_0(r)$ нормирована на 1 нуклон:

$$\int \rho_0(r) d^3r = 4\pi \int_0^{\infty} \rho_0(r) r^2 dr = 1. \quad (5)$$

Как следует из опытов по рассеянию быстрых электронов на ядрах [5], данные экспериментов не очень чувствительны к выбору формы функции $\rho_0(r)$, а определяются, главным образом, среднеквадратичным радиусом ядра $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ ($\langle R^2 \rangle = \int \rho_0(r) r^2 d^3r$) или эквивалентным радиусом $R_0 = \sqrt{5/3} \langle R^2 \rangle^{1/2}$, равным радиусу шара, в котором нуклоны равномерно распределены по объему с плотностью $\rho = \frac{3A}{4\pi R_0^3}$ (однородная модель). Экспериментальные значения $\langle R^2 \rangle^{1/2}$ и, следовательно, R_0 ядер-остовов соответствующих гиперядер указаны в таблице 1 [5].

Таблица 1 – Результаты численных расчетов параметров основного состояния гиперядер в однородной модели (экспериментальные значения $B_{\Lambda}^{\text{эксп.}}$, R_0 и μ взяты из работ [2] и [5])

Гиперядро	$B_{\Lambda}^{\text{эксп.}}$, МэВ	$B_{\Lambda}^{\text{теор.}}$, МэВ	$\langle R^2 \rangle^{1/2}$, Фм	R_0 , Фм	R_g , Фм	μ , МэВ
${}^5_{\Lambda}\text{He}$	3,12	4,32	1,6753	2,1628	2,299	858,666
${}^6_{\Lambda}\text{He}$	4,18				2,537	900,460
${}^7_{\Lambda}\text{Li}$	5,58	2,13	2,5432	3,2833	2,670	930,375
${}^7_{\Lambda}\text{Be}$	5,16				2,739	952,968
${}^8_{\Lambda}\text{He}$	7,16				2,753	953,209
${}^8_{\Lambda}\text{Li}$	6,80	4,20	2,4173	3,1207	2,787	952,960
${}^8_{\Lambda}\text{Be}$	6,84				2,783	952,968

Окончание таблицы 1

Гиперядро	$B_{\Lambda}^{\text{эксп}}$, МэВ	$B_{\Lambda}^{\text{теор}}$, МэВ	$\langle R^2 \rangle^{1/2}$, ФМ	R_0 , ФМ	R_g , ФМ	μ , МэВ
${}^9_{\Lambda}\text{Li}$	8,50	6,75	2,3270	3,0041	2,836	970,727
${}^9_{\Lambda}\text{Be}$	6,71				3,009	970,447
${}^9_{\Lambda}\text{B}$	8,29				2,854	970,743
${}^{10}_{\Lambda}\text{Be}$	9,11	6,33	2,5180	3,2507	2,962	984,773
${}^{11}_{\Lambda}\text{B}$	10,24	8,99	2,4277	3,1341	3,028	996,455
${}^{12}_{\Lambda}\text{B}$	11,37	11,07	2,4060	3,1061	3,084	1006,189
${}^{12}_{\Lambda}\text{C}$	10,76				3,130	1006,204
${}^{13}_{\Lambda}\text{C}$	11,69	11,69	2,4702	3,1890	3,189	1014,406
${}^{14}_{\Lambda}\text{C}$	12,17	13,54	2,4614	3,1777	3,273	1021,563
${}^{15}_{\Lambda}\text{N}$	13,59	13,30	2,5582	3,3026	3,283	1027,754
${}^{16}_{\Lambda}\text{O}$	12,50				3,467	1033,178
${}^{28}_{\Lambda}\text{Si}$	16,60				4,098	1068,257
${}^{32}_{\Lambda}\text{S}$	17,50				4,264	1074,142
${}^{40}_{\Lambda}\text{Ca}$	18,70	20,21	3,4595	4,4662	4,574	1082,406
${}^{51}_{\Lambda}\text{V}$	19,90				3,788	1089,028
${}^{89}_{\Lambda}\text{Y}$	22,00	27,84	4,2449	5,4801	4,952	1100,682
${}^{139}_{\Lambda}\text{La}$	23,80	30,51	4,8464	6,2567	5,963	1106,074
${}^{208}_{\Lambda}\text{Pb}$	26,50	32,23	5,4943	7,0931	6,874	1109,323

Так как радиус действия ΛN -сил меньше области действия $N N$ -потенциала, по крайней мере, вдвое [1], то для упрощения задачи положим $R_{\Lambda N} = 0$. В этом случае ΛN -потенциал будет описываться единственным параметром – объемным интегралом $\Omega_{\Lambda N}$, а потенциал взаимодействия Λ -гиперона с нуклонным остовом в однородной модели примет вид прямоугольной ямы ширины R_0 и глубины $V_0 = \frac{3A\Omega_{\Lambda N}}{4\pi R_0^3}$:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq r \leq R_0 \\ 0, & r > R_0 \end{cases} \quad (6)$$

Тогда динамика движения Λ -частицы в гиперядре для s -состояния ($l = 0$) будет описываться радиальным уравнением Шредингера:

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} (B_{\Lambda} + V(r)) f(r) = 0, \quad (7)$$

где μ – приведенная масса Λ -остова, $f(r) = rR(r)$. Функция $f(r)$ удовлетворяет граничным условиям $f(0) = f(\infty) = 0$. Решая поставленную краевую задачу,

и сшивая решения на границе внутренней и внешней областей при $r = R_0$, получим дисперсионное уравнение, связывающее параметры задачи [6]:

$$\beta \cdot \operatorname{ctg} \beta R_0 + \gamma = 0, \quad (8)$$

где введены обозначения:

$$\beta^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0 - B_\Lambda); \quad \gamma^2 = \frac{2\mu B_\Lambda}{\hbar^2}. \quad (9)$$

Решая численно уравнение (8) для любого гиперядра, можно оценить значение объемного интеграла $\Omega_{\Lambda N}$ в предположении $R_{\Lambda N} = 0$. В частности, для гиперядра ${}^{13}_\Lambda C$ ($A = 12, B_\Lambda = 11,69 \text{ МэВ}, R_0 = 3,189 \text{ Фм}, \mu = 1014,406 \text{ МэВ}$) получаем $\Omega_{\Lambda N} = 253,24 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3$. В случае использования в качестве опорного гиперядра ${}^5_\Lambda He$, получается близкое значение $\Omega_{\Lambda N} = 230,22 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3$. Таким образом, в дальнейшем будем использовать следующие параметры ΛN -потенциала:

$$\Omega_{\Lambda N} = 253,24 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^3, \quad R_{\Lambda N} = 0. \quad (10)$$

3. Оценка энергий связи и размеров нуклонных остовов гиперядер в однородной модели

Для количественного определения указанных параметров обратимся к основному уравнению (8), в котором по известным параметрам ($\Omega_{\Lambda N}, A, \mu, R_0$) определяется $B_\Lambda^{\text{теор}}$, а также радиусы ядра-остова R_g для заданных значений $B_\Lambda^{\text{эксп}}$. Результаты численных расчетов приведены в таблице 1 и для иллюстрации изображены на рисунках 1 и 2. В таблице 1 свободные ячейки соответствуют ядрам, для которых отсутствуют экспериментальные данные о их размерах [5].

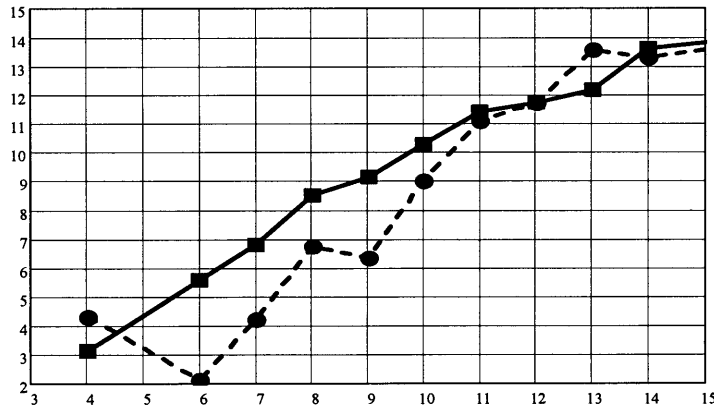


Рис. 1. Зависимость энергии связи гиперядер B_Λ (МэВ) от массового числа остова.
(Эксперимент – сплошная линия, теория – пунктирная линия)

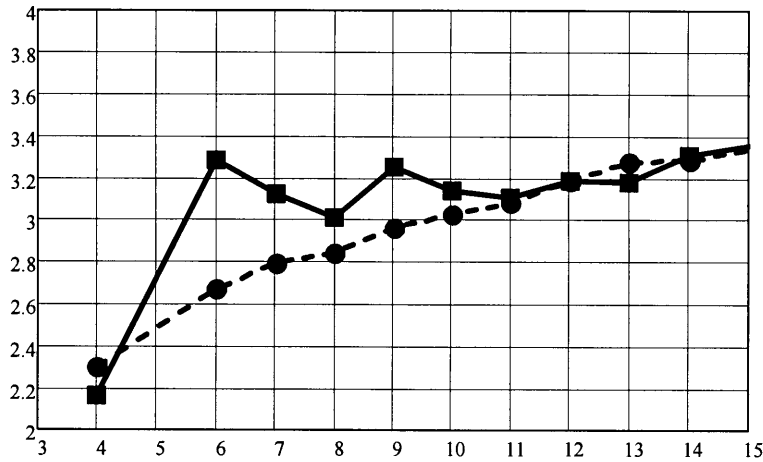


Рис. 2. Размеры нуклонного остова (Фм) из опытов по электронному рассеянию R_0 (сплошная линия) и гиперядер R_g (пунктирная линия)

Разумеется, в данной простейшей модели не следует ожидать удовлетворительного согласия теоретических оценок и экспериментальных данных по энергиям связи всех гиперядер B_Λ , а также размерам нуклонных остовов R_0 , кроме области вблизи опорного гиперядра $^{13}_\Lambda C$. В частности, если считать плотность бесконечной ядерной материи равной [5] $\rho_0 = 0,17 \text{ нуклон}/\text{Фм}^3$, то энергия насыщения гиперядер ($A \rightarrow \infty$) должна составлять величину порядка $D_\Lambda = \Omega_{\Lambda N} \cdot \rho_0 \approx 43 \text{ МэВ}$, что примерно на 10 МэВ превышает ожидаемый результат [1–3]. Из таблицы 1, например, видно, что указанное завышение энергии связи гиперядра $^{208}_\Lambda Pb$ составляет 5,7 МэВ (20%), однако, точность в определении R_0 составляет всего 3,5%. Этот результат можно объяснить, оценив зависимость вариации энергии связи гиперядра B_Λ от изменения радиуса ядра-остова R_0 . Для количественного анализа этой зависимости удобно ввести *параметр дисперсии*: $D = dB_\Lambda/dR_0$, который можно оценить, применив процедуру численного дифференцирования неявно заданной функции из уравнения (8) [7]. При этом параметр дисперсии практически совпадает для различных гиперядер, например,

$$D(^{13}_\Lambda C) = -13,4 \text{ МэВ}/\text{Фм}; \quad D(^{208}_\Lambda Pb) = -11,4 \text{ МэВ}/\text{Фм}.$$

Таким образом, изменение энергии связи ΔB_Λ на 1 МэВ позволяет оценивать R_0 по указанной схеме с точностью $\Delta R_0 \approx 0,1 \text{ Фм}$.

Очевидно, с ростом массового числа A , в соответствии с условием (6), увеличивается как глубина, так и ширина ямы для потенциала $V_{\Lambda O}$, так что в яме может находиться несколько дискретных уровней энергии, соответствующих возбужденным $n\pi$ состояниям гиперядер [8]. Определение таких состояний и величину их энергий можно также оценить из основного уравнения (8), сменив на-

чальные условия поиска соответствующих параметров. Результаты проведенных численных расчетов для основного ($1s$) и возбужденных состояний (ns) приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Энергии возбужденных состояний гиперядер

Гиперядро	$B_{\Lambda}(1s),$ МэВ	$B_{\Lambda}^*(2s),$ МэВ	$B_{\Lambda}^{**}(3s),$ МэВ
${}^{40}_{\Lambda}\text{Ca}$	20,21	3,27	
${}^{89}_{\Lambda}\text{Y}$	27,84	14,18	
${}^{139}_{\Lambda}\text{La}$	30,51	20,03	3,85
${}^{208}_{\Lambda}\text{Pb}$	32,23	23,81	10,29

Следует указать на возможность ошибочной интерпретации этих возбужденных состояний ($l = 0$), как состояния Λ -гиперона с не нулевыми орбитальными моментами ($l \neq 0$).

4. Низкоэнергетическое Λp -рассеяние

В низкоэнергетической области сечение рассеяния ядерных частиц обычно рассматривается в приближении эффективного радиуса путем введения длины рассеяния a и эффективного радиуса r_s [1], которые связаны с потенциалом $V_{\Lambda N}(r)$ условием [9]:

$$a = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_0^{R_0} V_{\Lambda N}(r) r^2 dr = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \Omega_{\Lambda N}; \quad (11)$$

$$r_s = \frac{4\hbar^2}{3\mu} \cdot \frac{R_{\Lambda N}^2}{\Omega_{\Lambda N}}. \quad (12)$$

Подставляя численные значения параметров Λp -потенциала (10) и приведенной массы $\mu_{\Lambda p} = 509,65 \text{ МэВ}$, получим:

$$a = -0,53 \text{ Фм}; \quad r_s = 0. \quad (13)$$

Полученная оценка (13), в целом, согласуется с экспериментальными результатами [10], не смотря на большой разброс опытных данных [1]. Как и ожидалось, отрицательное значение длины рассеяния говорит об отсутствии связанного ΛN -состояния в полном согласии с экспериментом.

Заключение

Простейшей задачей в квантовой механике является задача о движении частицы в прямоугольной яме. Эта задача может служить как предельный случай реалистических потенциалов, способной описывать некоторые общие характеристики квантовых систем. Естественно ожидать, что применение простой методики решения задачи о частицы в яме может быть полезной при каче-

ственном описании свойств гиперядер в двухчастичной модели, микроскопический анализ которых, как правило, требует проведения достаточно громоздких теоретических и численных расчетов в рамках нетривиальных, а иногда и спорных моделей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Хрылин, Б. А. Гиперядра и ΛN -взаимодействие / Б. А. Хрылин // Успехи физических наук. – 1971. – 105 т., вып. 2. – С. 185–205.
2. Калачей, С. А. Энергии связи гиперядер и взаимодействие ΛN и $\Lambda\Lambda$: дис. ... канд. физ-мат наук : 01.04.02 / С. А. Калачей. – Москва, 2005. – 119 л.
3. Ланской, Д. Е. Физика гиперядер / Д. Е. Ланской. – Web-версия учебного пособия, 2002.
4. Колесников, Н. Н. ΛN -потенциал из совместного анализа гиперядер и Λp -рассеяния / Н. Н. Колесников, С. М. Чернов // Ядерная физика. – 1976. – 23 т., вып. 5. – С. 960–969.
5. Варламов, В. В. Физика ядра и банки ядерных данных / В. В. Варламов [и др.]. – Москва : НИИЯФ МГУ, 2010. – 245 с.
6. Чернов, С. М. Квантовая механика : курс лекций / С. М. Чернов. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2013. – 196 с.
7. Шушкевич, Г. Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14 : учеб. пособие : в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск : Изд-во Гревцова, 2012. – Ч. 2. – 256 с.
8. Богданова, Л. Н. Возбужденные состояния гиперядер / Л. Н. Богданова, В. Е. Маркушкин // Физика элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ). – 1984. – 15 т., вып. 4. – С. 808–869.
9. Бабиков, В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике / В. В. Бабиков. – Москва, 1968. – 224 с.
10. Alexander, G. Study of the ΛN -System in Low-Energy Λp -Elastic Scattering / G. Alexander, U. Karshon, A. Shapira [et al.] // Phys. Rev. – 1968. – V. 173. – P. 1452–1460.

Поступила в редакцию 18.11.2015 г.

Контакты: stanislavchernof2011@yanlex.by (Чернов Станислав Михайлович)

Chernov S.M. THE ESTIMATION OF PARAMETERS OF HYPER-NUCLEI IN SIMPLE MODELS.

The qualitative analysis of Λ -hypernuclei in the framework of the two-particle model with zero-radius of ΛN -force is presented in the article. The value of the volume integral of ΛN -potential, the energy of the hypernucleus connection, the size of the nucleon frame and Λp -scattering length are assessed.

Key words: hypernuclei, ground and excited states, binding energy, nucleus size, scattering length, effective radius.

УДК 539.21

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОБРАЗОВАНИЯ ДВОЙНИКОВ У ГРАНИЦ ЦАРАПИНЫ ПРИ СКРАЙБИРОВАНИИ ПОВЕРХНОСТИ (111) МОНОКРИСТАЛЛА ВИСМУТА ИНДЕНТОРОМ ВИККЕРСА

Н. М. Кульгейко

магистрант,

ГГТУ имени П. О. Сухого (Гомель)

О. М. Остриков

кандидат физико-математических наук, доцент

ГГТУ имени П. О. Сухого (Гомель)

Изучены закономерности механического двойникования монокристаллов висмута при скрайбировании их поверхности (111) индентором Виккерса. Установлено, что с ростом нагрузки на индентор число двойников у царапины уменьшается. С ростом длины царапины число двойников увеличивается, но при больших длинах царапин скорость роста числа двойников уменьшается. Степень некогерентности двойниковых границ с ростом нагрузки на индентор при скрайбировании увеличивается.

Ключевые слова: деформационное двойникование, скрайбирование, монокристалл висмута.

Введение

Двойникование наряду со скольжением является одним из основных видов пластической деформации [1–3]. При этом большая часть экспериментальных данных о формах локализации пластической деформации относится к деформации дислокационного скольжения [4]. В то же время характер локализации пластической деформации при двойниковании представляет несомненный интерес. Известные механизмы зарождения трещин [5, 6] в своей основе опираются на пластическое течение кристалла, среди которого значительная роль принадлежит механизмам, обусловленным деформационным двойникованием [2]. Исследование механизма зарождения и развития двойников выполняются при различных способах и режимах деформационного нагружения [1–3]. Среди этого многообразия способов деформирования представляет несомненный интерес исследования закономерностей двойникования при царапании поверхности материала путем скрайбирования индентором, так как при этом моделируется часто наблюдаемая на практике ситуация контактного динамического деформирования твердых тел.

Целью работы является исследование количественных закономерностей образования двойников вдоль царапины при скрайбировании монокристалла висмута пирамидой Виккерса.

© Кульгейко Н. М., 2016

© Остриков О. М., 2016

Методика эксперимента. Исследования проводились на монокристаллах висмута, выращенных горизонтальным методом Бриджмена. Образцы получали раскалыванием выращенных монокристаллов вдоль плоскости спайности (111). Образование царапины выполняли на микротвердомере ПМТ-3 путем вдавливания индентора с нагрузкой до 0,4 Н и последующего скрайбирования в направлении ребра пирамиды. Геометрия и форма двойников, их количественная характеристика и деформационная картина изучалась методом оптической микроскопии при различных условиях и режимах скрайбирования.

Результаты и их обсуждение. Двойникование в условиях скрайбирования поверхности предварительно внедренным индентором Виккерса целесообразно изучать, выделяя три области образования и развития двойников: область отпечатка двух граней индентора при его опускании; область вдоль границ царапины; область отпечатка двух других граней индентора при его остановке. Картина двойникования в первой и третьей области во многом аналогична образованию двойников при вдавливании индентора [3]. Значительные особенности образования двойниковых ансамблей наблюдаются во второй области, т. е. вдоль царапины.

При изучении механического двойникования при скрайбировании на микрофотографиях царапины следует выделять длину царапины $L_{ц}$ и величину пути перемещения индентора, т. е. длину скрайбирования $L_{с}$. Особенно важно такое разделение в условиях анализа коротких широких царапин, полученных при малой длине пути скрайбирования с большой нагрузкой на индентор. В таких условиях скрайбирования $L_{с}$ может быть в 2-3 раза меньше $L_{ц}$, т. е. след от внедрения индентора больше, чем путь перемещения индентора (рис. 1). Следовательно, основное влияние на образование ансамбля двойников в этом случае оказывает картина двойникования непосредственно у статического индентора. Поэтому при анализе закономерностей двойникования необходимо учитывать особенности образования двойников у статического индентора и вдоль царапины с учетом соотношения $L_{ц}$ и $L_{с}$.

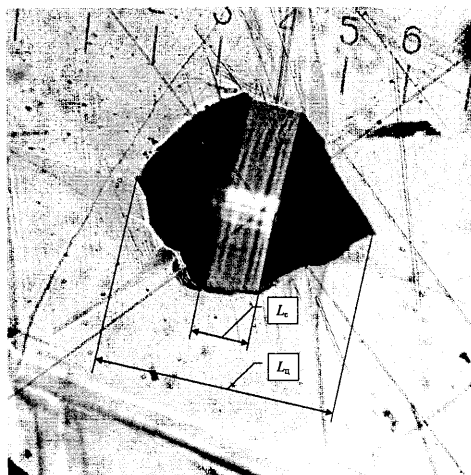


Рис. 1. Область изучения механических двойников вдоль границ царапины $L_{ц}$ при длине пути скрайбирования $L_{с}$

На рис. 2 представлены графики зависимости количества двойников $N_{\text{дв}}$, образовавшихся вдоль царапины, от нагрузки на индентор P и длины скрайбирования L_c при различных значениях L_c и P соответственно. С увеличением нагрузки на индентор при скрайбировании количество двойников уменьшается (см. рис. 2, а). А при большой нагрузке ($P = 0,4$ Н) и относительно небольшой длине пути скрайбирования ($L_c \sim 100$ мкм), меньшей половины длины диагонали отпечатка индентора, во второй области образуются единичные двойники. То есть картина двойникового соответствует расположению двойников у индентора при вдавливании пирамиды без перемещения вдоль поверхности монокристалла. Полученные результаты объясняются проявлением масштабного и силового факторов, которые влияют на величину деформации материала, а также скоростной деформационной зависимости механических характеристик твердых тел [7].

Количество образующихся двойников с увеличением длины пути скрайбирования закономерно увеличивается, так как увеличивается длина границ царапины, т. е. увеличивается область возможного образования источников двойникоующих дислокаций. Однако с увеличением длины пути скрайбирования эта зависимость имеет некоторое отклонение от линейной (рис. 2, б). Как отмечалось выше, при относительно малой длине перемещения индентора, т. е. при $L_c \ll L_{\text{ц}}$ у границ царапины образуются единичные двойники, особенно при увеличении нагрузки на индентор. При небольшой длине пути скрайбирования с большой нагрузкой на индентор механическое разрушение материала подавляет деформационные процессы, изменяя напряженное состояние, вызывающее необратимые пластические деформации. У выхода индентора наблюдаются четко выраженные линии вспучивания материала (стрелка 1 на рис. 3), вызванные деформацией сдвига. Количество же двойников в этой области ограничено (как правило, не более трех). Далее с увеличением длины царапины количество двойников увеличивается, однако интенсивность увеличения несколько замедляется. Это связано с особенностями деформирования и разрушения материала при скрайбировании [8]. Так, отмечаются различные механизмы образования царапин: удлинение отпечатка путем пластического деформирования материала; резание материала с отделением стружки; хрупкое разрушение с диспергированием и скалыванием материала. В данных исследованиях наблюдалось сочетание разных механизмов царапания. Так пластическое деформирование сопровождалось хрупким разрушением с образованием выколов. Об этом свидетельствует форма границ царапины: при пластическом деформировании вдоль ее сторон возникают навалы 2 выдавленного материала; образование выколов 3 и возникновение неровных зазубренных краев 4 (см. рис. 3).

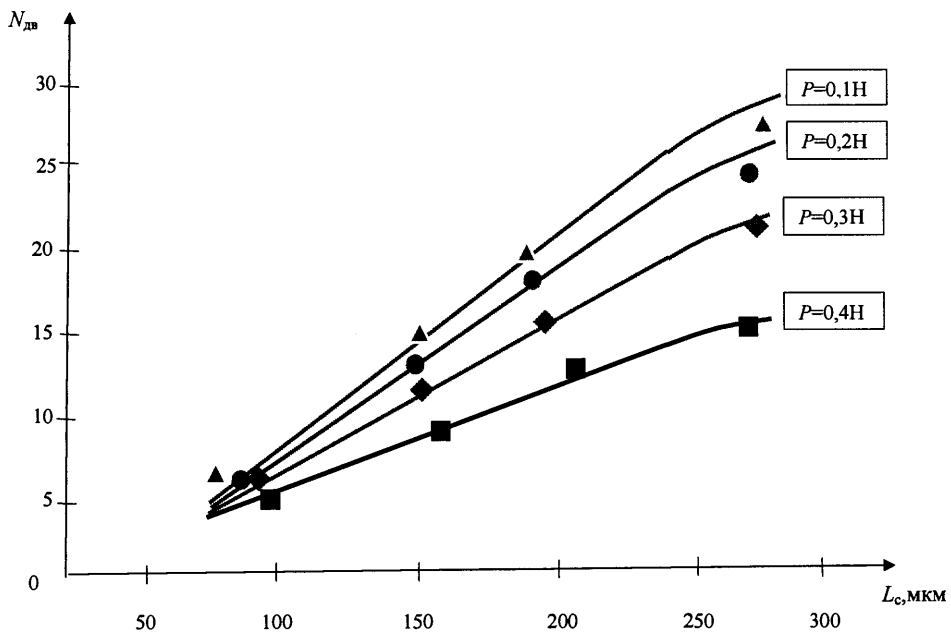
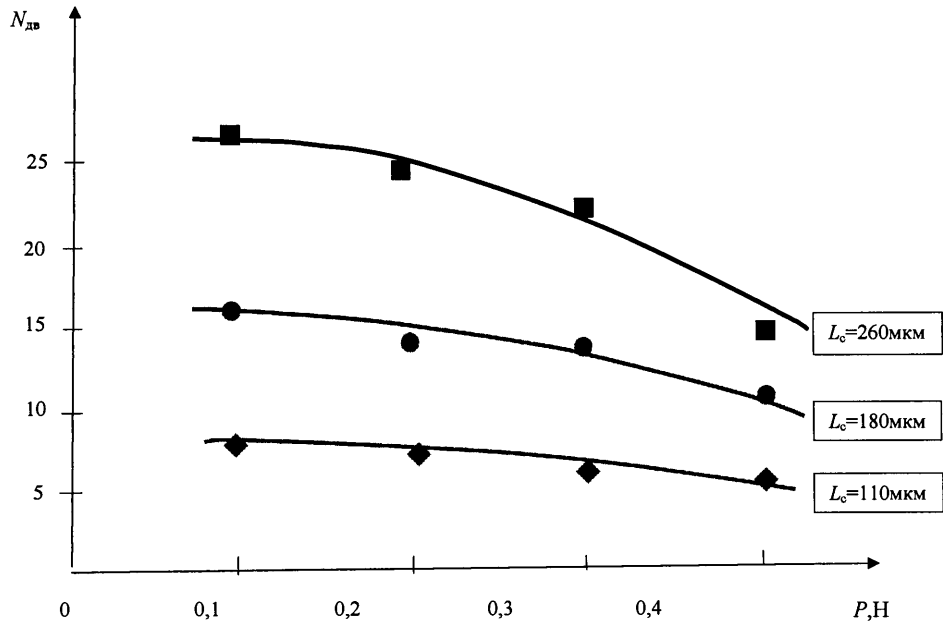


Рис. 2. Зависимость количества двойников $N_{дв}$ у границ царапины от нагрузки на индентор P (а) и длины пути скрайбирования L_c (б)

Механизм царапания зависит от многих факторов [8], в том числе, от величины нагрузки, приложенной к индентору, формы индентора, скорости царапания и др. Увеличение нагрузки приводит к увеличению глубины и ширины ца-

рапины, следовательно, процесс скрайбирования сопровождается значительными деформационными процессами. Это вызывает увеличение навалов материала и неровностей по краям царапины. А образование навалов, впереди индентора, их увеличение и периодическое разрушение с увеличением длины скрайбирования способствует усилению деформаций по ходу образования царапины. В результате происходит релаксация напряжений, в том числе процессами скольжения при остановке индентора, т. е. энергия деформации уходит на скольжение. При этом образование двойников затормаживается, что подтверждается характером зависимости $N_{дв}$ от P и L_c на рис. 2, на котором видно, что с увеличением нагрузки P количество двойников уменьшается и с увеличением длины скрайбирования несколько падает скорость увеличения двойников.

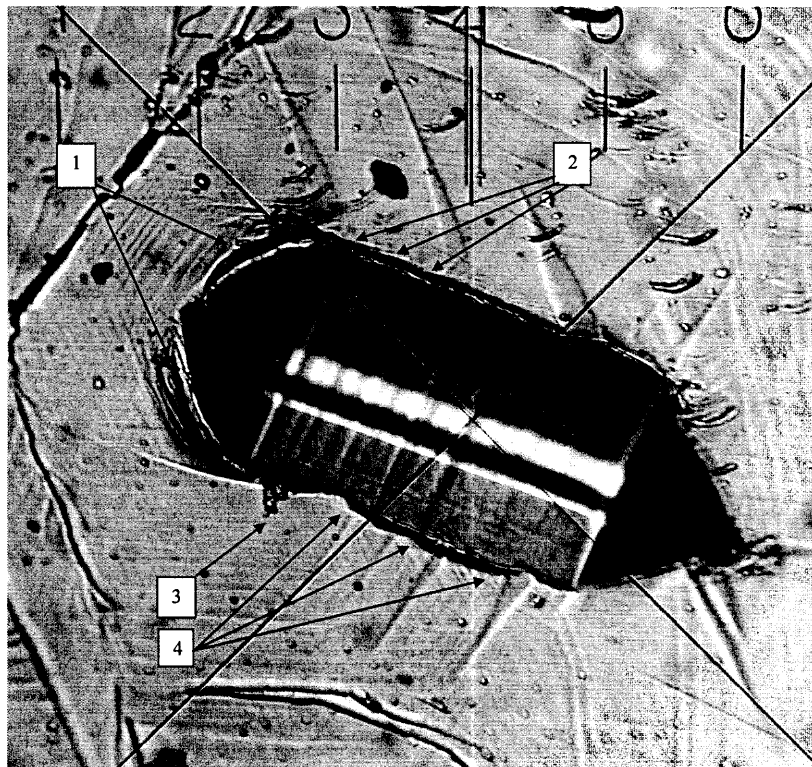


Рис. 3. Форма границ царапины при пластическом деформировании с образованием навалов и зазубренных краев с выколами

Важным фактором, ограничивающим развитие двойникования, является конкуренция со стороны скольжения [9]. Скользящие дислокации способны релаксировать напряжения на различных концентраторах, не давая возможности достичь порога двойникования $\tau_{дв}$. Поэтому реализация того или иного вида деформации определяется соотношением между $\tau_{дв}$ и $\tau_{ск}$ — критическим напряжением скольжения [2, 3]. Указанные факторы также оказывают существенное влияние на наблюдаемую картину механического двойникования при скрайбировании.

На рис. 4 представлена зависимость отношения $H_{дв}/L_{дв}$ от нагрузки на индентор P . Параметр $H_{дв}/L_{дв}$ характеризует степень некогерентности двойниковых границ и связан с плотностью двойниующих дислокаций на двойниковых границах. График показывает тенденцию зависимости плотности дислокаций от нагрузки, т. е. область нахождения параметра в границах исследуемых факторов ΔP и ΔL_c . Экспериментальные данные свидетельствуют в целом о росте средних значений степени некогерентности границ двойника с увеличением нагрузки на инденторе при скрайбировании. Так как увеличение ширины происходит более интенсивно по сравнению с увеличением длины, то отношение $H_{дв}/L_{дв}$ возрастает и указывает на то, что процесс генерации двойниующих дислокаций с ростом нагрузки на индентор активизируется в большей степени, чем процесс активизации подвижности двойниующих дислокаций.

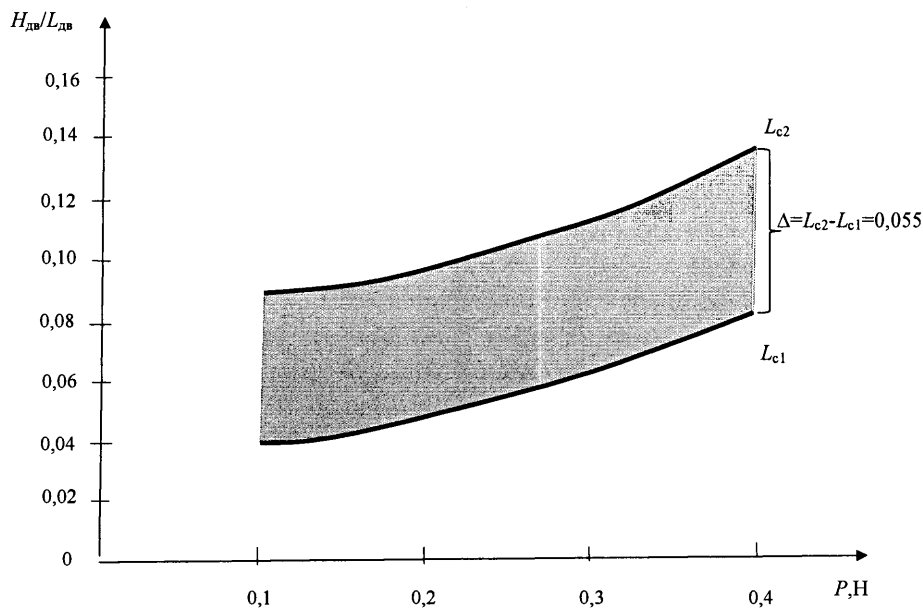


Рис. 4. Область нахождения параметра $H_{дв}/L_{дв}$ степени некогерентности двойниковых границ в области исследованных значений ΔP и ΔL_c

Результаты исследований свидетельствуют о неоднозначной зависимости геометрических характеристик двойников $H_{дв}$ и $L_{дв}$ от конкретных условий (численных значений P и L_c) двойниования при скрайбировании. Это объясняется многофакторной зависимостью механизма образования царапины, о чем сказано выше, а также анизотропией механических свойств кристаллов. Анизотропия свойств проявляется в различной ширине и в различном виде царапин, проведенных вдоль разных кристаллографических направлений. Кристаллы висмута имеют слоистую структуру и обладают совершенной спайностью по плоскостям $\{111\}$, параллельным плоскостям слоев, и менее совершенную – по плоскостям $\{1\bar{1}1\}$. Установлено, что ширина деформированных зон, возникающих вокруг царапины, растет с увеличением ширины царапины [8]. Плотность дислокаций убывает по экспоненциальному закону по мере удаления от края цара-

пины. Методом многократного травления определено, что релаксационное движение дислокаций, вызванное релаксацией упругих напряжений, в зонах царапины выражено более резко, чем у отпечатков, нанесенных индентором.

В условиях наличия пластической деформации и при большом количестве образующихся дислокаций пластическую релаксацию обеспечивают дислокационные процессы. Обнаружено различие дислокационных зон царапин, проведенных вдоль разных направлений на одной и той же грани кристалла. Таким образом, с учетом имеющихся данных в [8] сделан вывод, что анизотропия твердости связана с тем, что при царапании в разных направлениях скольжение происходит по разным плоскостям и распространяется на разную глубину. Также путем выделения ямок травления обнаружено, что дислокационные зоны царапин могут отличаться в два раза в зависимости от направления образования царапин.

Заключение

В целом картина двойникования при скрайбировании отличается большой многофакторностью, и, следовательно, большей неопределенностью по сравнению с образованием двойниковых ансамблей при вдавливании индентора. Наиболее значительные особенности двойникования наблюдаются вдоль границ царапины. В результате исследований определены отдельные зависимости формирования двойниковых ансамблей, которые позволили установить некоторые закономерности двойникования при скрайбировании.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Бойко, В. С.** Обратимая пластичность кристаллов / В. С. Бойко, Р. И. Гарбер, А. М. Косевич. – М. : Наука, 1991.
2. **Федоров, В. А.** Дислокационные механизмы разрушения двойникующихся металлов / В. А. Федоров, Ю. И. Тялин, В. А. Тялина. – М. : Издательство машиностроение-1, 2004. – 336 с.
3. **Остриков, О. М.** Механика двойникования твердых тел : монография / О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2008. – 301 с.
4. **Баранникова, С. А.** Локализация пластической деформации двойникования в монокристаллах легированного γ -Fe / С. А. Баранникова, В. И. Данилов, Л. Б. Зуев // Журнал технической физики. – 2002. – Т. 72, вып. 9. – С. 63–66.
5. **Владимиров, В. И.** Физическая природа разрушения металлов / В. И. Владимиров. – М. : Металлургия, 1984. – 280 с.
6. **Финкель, В. М.** Физика разрушения / В. М. Финкель. – М. : Металлургия, 1970. – 367 с.
7. **Головин, Ю. И.** Вклад масштабного и скоростного факторов в формирование числа твердости при динамическом наноиндентировании / Ю. И. Головин, А. И. Тюрин, В. В. Хлебников // Актуальные проблемы прочности : материалы XLII междунар. конф., Калуга, 26–29 мая 2004 г. – Калуга, 2004. – С. 97.
8. **Боярская, Ю. С.** Деформирование кристаллов при испытаниях на микротвердость / Ю. С. Боярская. – Кишинев : Изд-во “Штиинца”, 1972. – 263 с.
9. **Трефилов, В. И.** Физические основы прочности тугоплавких металлов / В. И. Трефилов, Ю. В. Мильман, Ф. А. Фирстов. – К. : Наук. думка, 1976. – 315 с.

Поступила в редакцию 04.06.2015 г.

Контакты: oostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Kulgeiko N.M., Ostrikov O.M. THE LAWS OF TWINS' FORMATION AT THE SCRATCH BORDERS BY SCRIBING THE SURFACE (111) OF BISMUTH SINGLE-CRYSTAL WITH VICKERS INDENTER.

The laws of the mechanical twinning of bismuth single crystals while scribing the surface (111) with the Vickers indenter are studied. It has been found out that with the increasing load on the indenter the number of the scratch twins decreases. With the growing length of the scratch the number of twins increases, but with the long lengths of scratches the growth rate of twins is reduced. The degree of incoherence of the twin boundaries with the growing load on the indenter increases in the course of scribing.

Key words: deformation twinning, scribing, bismuth single crystal.

УДК 582 : 612+57.042+57.043+574.24

ПРОТИВООПУХОЛЕВЫЙ ФАРМАКОЛОГИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ СЕМЕЙСТВА *SACTACEAE JUSS*, ВЫРАЩЕННЫХ В УСЛОВИЯХ ОРАНЖЕРЕИ, (ЭКСПЕРИМЕНТЫ *IN VITRO*)

А. В. СОРОКА

кандидат биологических наук, доцент
МГУ имени А. А. Кулешова

Н. В. АКУЛИЧ

кандидат биологических наук, доцент
МГУ имени А. А. Кулешова

Н. А. КНЯЗЕВА

и.о. заведующего гематологическим отделением
Могилевская областная больница

В. А. БРУХНОВ

студент 5-го курса, Витебский государственный медуниверситет

Лекарственная резистентность опухолевых клеток является важнейшей проблемой клинической онкологии. Процесс привыкания можно до известной степени замедлить путем комбинированного применения препаратов с разной структурой и неодинаковым механизмом действия.

Поэтому актуальность представляют исследования, направленные на поиск нового класса веществ, имеющих более сильный фармакологический и низкий токсический эффекты.

Мы исследовали противоопухолевый фармакологический потенциал экстрактов растений сем. Sactaceae, выращенных в условиях оранжереи.

*В ходе проведения исследований установлено, что инкубация крови больных хроническим лимфолейкозом с алкалоидами *Pereskia aculeata* увеличивает интенсивность экспрессии и плотность распределения рецепторов CD95 на мембране лимфоцитов и сопровождается ростом числа лимфоцитов с признаками разрыва ДНК.*

Ключевые слова: *Pereskia aculeata*, противоопухолевый фармакологический потенциал, проточная цитометрия.

Введение

Несмотря на достижения в лечении онкологических заболеваний farmпрепаратами, некоторые из них (за исключением таргетной терапии и применения искусственных комплексов из моноклональных антител) имеют достаточно выраженные побочные эффекты, приводят к резистентности опухолевых клеток к лекарственным средствам. Процесс привыкания можно до известной сте-

© Сорока А. В., 2016

© Акулич Н. В., 2016

© Князева Н. А., 2016

© Брухнов В. А., 2016

пени замедлить путем комбинированного применения препаратов с разной структурой и неодинаковым механизмом действия.

Комбинации лекарственных препаратов, различных по структуре и механизмам действия, используемые при интенсивной химиотерапии, оказывают значительное токсическое действие на организм в целом и приводят к развитию множественной лекарственной устойчивости. Поэтому актуальность представляют исследования, направленные на поиск нового класса веществ, имеющих более сильный фармакологический и низкий токсический эффекты.

Одной из задач современной медицины является поиск принципиально новых лекарственных соединений, созданных на основе сложных композиций, полученных из растительного сырья [1, 2, 3].

Фармакология и фармакогнозия Беларуси при производстве новых субстанций ориентируется по понятным причинам на аборигенные виды лекарственных растений. Вместе с тем, оранжерейные виды – могут содержать уникальные вещества, обладающие выраженным фармакологическим потенциалом. Так, многие представители сем. *Cactaceae* Juss. имеют разнообразные биологически активные вещества и композиции для создания новых лекарственных средств [1, 4]. Их можно использовать в пролонгированном лечении: в амбулаторно-поликлинических условиях, на “межмедикаментозном” реабилитационном этапе. При лечении некоторых заболеваний фитотерапию можно расценивать как поддерживающий метод лечения для предупреждения рецидивов, обострений, для улучшения результатов амбулаторного, стационарного или санаторного лечения.

Преимущество препаратов из лекарственных растений в том, что при их употреблении в организм человека поступает целый комплекс родственных ему биологически активных соединений. Созданные на основе лекарственных растений препараты влияют на организм мягче, чем синтетические, имеют меньше побочных эффектов.

Наибольший интерес для нашего исследования представляют следующие виды семейства *Cactaceae*: *Pereskia aculeata* (Plum.) Mill., *Pereskia grandifolia* Mill., *Coryphantha pectinata* (Engelm.) Britton et Rose. (*C. echinus* (Engelm.), *Hylocereus polyrhizus* Britton et Rose., *Eriocereus martini* (Lab.) Ricc., *Eriocereus quelichii* (Speg.) Backeb., *Trichocereus pachanoi* Britton et Rose, *Trichocereus spachianus* (Lem.). Они произрастают в тропическом и субтропическом климате и применяются при купировании некоторых классов онкологических заболеваний [1]. В Республике Беларусь эти растения произрастают в условиях оранжереи, что может оказать влияние на их лекарственные свойства.

Таким образом, цель исследования: оценить противоопухолевый фармакологический потенциал экстрактов представителей сем. *Cactaceae*, выращенных в условиях оранжереи.

Материалы и методы

1. *Ботанико-биохимические методы.* Растения выращивали в оранжерее ГНУ “ЦБС НАНБ” в емкостях 150-500 мл при температуре 20-25°C, относительной влажности воздуха 60–90% и притенении. Почвенный субстрат состоял из смеси верхового торфа и песка в соотношении (1:1), pH 5,7. Частота поли-

ва устанавливалась согласно изменению влажности субстрата, которая колебалась между 100–70%. Растительный материал отбирался в весенний период, после выхода растений с зимнего покоя.

Для выделения алкалоидов стебли и листья растений высушивали при комнатной температуре, хранили в сухом прохладном месте. Высушенный материал (100 г.), гомогенизированный в 200 мл 95% этанола. Спиртовой раствор фильтровали и выпарили спирт. Экстракт растворяли в 60 мл 0.1 МНСI и 60 мл хлороформа. Водная фаза дважды экстрагировалась хлороформом¹.

В исследованиях использовался хроматограф Thermo Scientific LTQ ORBITRAP, США с масс-детектором Finnigan DSQ II (Thermo Scientific, США). В качестве матриц в ВЭЖХ использовался оксид кремния (силикагель). Производитель декларирует чувствительность хромато-масс-спектрометрии на уровне 10^{-6} - 10^{-9} г.

2. Цитологические методы

Гематологическое исследование проводилось (*in vitro*) на венозной крови пациентов с антикоагулянт (гепарин) 11 доноров-добровольцев (группа 1) и 11 больных с диагнозом С91.1 МКБ 10 пересмотра (группа 2), поскольку большинство опухолевых клеток у пациентов этой группы являются покоящимися лимфоцитами, находящимися в G0-фазе клеточного цикла. Группы пациентов были рандомизированы по возрасту и отсутствию сопутствующих заболеваний.

Забор крови производился у больных, проходивших курс стационарного лечения в учреждении здравоохранения “Могилевская областная больница” при получении информированного согласия на участие в исследовании. В качестве антикоагулянта использовался гепарин 5 Ед/мл, поскольку для индукции апоптоза необходимы ионы Ca^{2+} . Перед проведением иммунофенотипирования кровь исследовалась на количество лейкоцитов и лейкоцитарную формулу.

Общий анализ крови производили на полуавтоматическом гемоанализаторе “Abacus” (Австрия) и микроскопе AxioImagerA1 (Zeiss) с DIC-системой ($\times 1000/NA 1.3$) и видеокамерой AxioCam MRc5. Для каждого пациента создавался видеoaрхив из 100 цифровых изображений клеток.

Для анализа клеточного цикла и иммунофенотипирования кровь разводили фосфатно-солевым буфером (PBS), пробирку с кровью помещали на 30 минут в термостат ($37^{\circ}C$) для предварительного оседания эритроцитов. Собирали взвесь лейкоцитов, которые затем центрифугировали в течение 10 минут для удаления тромбоцитов. Оставшиеся на дне пробирки лейкоциты разводили раствором Хенкса до объема 2 мл и ресуспендировали. Наслоение клеток на градиент плотности осуществляли по общепринятому протоколу.

3. Методика окрашивания клеток. Клетки (9×10^5 в 1 см^3) инкубировали при $37^{\circ}C$ в течение приемлемого для исследования цельной крови времени (до 8 ч). Контролем служили интактные клетки, инкубированные в тех же условиях, но

¹ Исследования на хромато-масс-спектрометре проводили в Национальной антидопинговой лаборатории (Республика Беларусь, поселок Лесной) совместно с доктором медицинских наук Хоменко Александром Игнатьевичем, предварительно переведя алкалоиды в диэтиловый эфир.

без экстракта. Использовалась различная концентрация изучаемых алкалоидов *Pereskia aculeata* (0-3.125 мг/мл). В работе проанализирована максимальная концентрация, обладавшая наиболее высокой фармакологической активностью.

Определение доли апоптотных клеток производилось при оценке количества и плотности рецепторов на CD95-позитивных лимфоцитах. Анализ гистограмм проводили с учетом интенсивности флуоресценции на проточном цитофлуориметре CellLabQuanta (Beckman Coulter, USA).

Для анализа клеточного цикла добавляли 1 каплю калибратора ДНК к 1 мл NIM-DAPI, затем суспензию клеток смешивали с 1 мл NIM-DAPI, достигая финальной концентрации $1-2 \times 10^6$ клеток/мл. Образец пропускали через фильтр с диаметром пор 25 мкм и анализировали клеточную суспензию методом проточной цитометрии на проточном цитофлуориметре CellLabQuanta (Beckman Coulter, USA). В каждой пробе анализировали не менее 10000 клеток.

Статистический анализ включал в себя подсчет средних значений для каждого случая, анализ распределения данных, сравнение серий экспериментальных исследований проводился с использованием параметрического теста Стьюдента.

Результаты и их обсуждение

1. Хроматографический анализ

В результате проведенного исследования изучен качественный состав алкалоидов представителей сем. *Cactaceae* на основе хромато-масс-спектрометрического анализа.

Проведенные исследования позволили установить наличие следующих веществ у видов: *Coryphantha pectinata* (тирамин, горденин), *Hylocereus polyrhizus* (тирамин), *Pereskia aculeata* (тирамин, анхаланин, анхалонидин), *Trichocereus pachanoi* (тирамин, горденин, анхаланин, анхалонидин).

На следующем этапе с помощью количественного хромато-масс-спектрометрического анализа были определены концентрации метанольных экстрактов у видов: *Hylocereus polyrhizus*, *Pereskia aculeata*, *Trichocereus pachanoi*, *Coryphantha pectinata* (рис. 1).

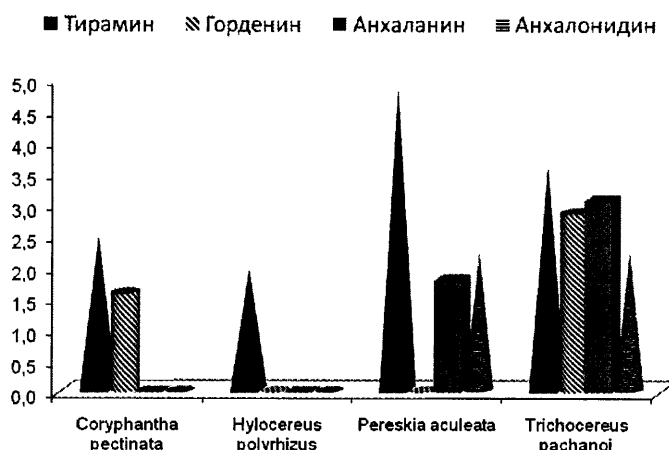


Рис. 1. Концентрация веществ (мкг/кг сухого вещества) у видов сем. *Cactaceae*

2. Гематологический анализ

При анализе клеточного звена иммунитета больных ХЛЛ отмечен более высокий уровень лейкоцитов и абсолютного количества лимфоцитов, в обоих случаях превышавший норму. Показатели эритронов у больных ХЛЛ можно охарактеризовать как тенденцию к анемии, о чем свидетельствует снижение на 19% относительно уровня нормы концентрации гемоглобина (известно, что для ХЛЛ характерна анемия, вследствие иммунного лизиса клеток крови).

При анализе лейкоцитарной формулы при 8-часовой инкубации цельной крови с экстрактом *Pereskia* было установлено, что количество лимфоцитов и в контроле, и эксперименте превышает норму. Число лимфоцитов в эксперименте больше количества данных клеток в контроле на 2,9%.

Таким образом, аппликация экстракта *Pereskia* не влияет на лейкоцитарную формулу и у больных отмечается относительный лимфоцитоз и моно- и нейтрофилия.

Для лимфоцитов больных ХЛЛ случаев характерен следующий фенотип: CD19+CD5+CD23+CD79b+dimCD20+dimCD22, рестрикция легких цепей (κ либо λ). Поскольку наш проточный цитометр имеет только 3 фотодетектора, то диагностическая панель имела следующий вид: FITC – CD19 CD5; PE – CD16CD56; PC5 – CD45, причем на одном фотодетекторе (PE) разместили два взаимоисключающих маркера.

Фенотипирование лимфоцитов больных ХЛЛ показало, что Т-лимфоциты CD45+CD19–CD5+CD16+56– составляли 5% от всех проанализированных иммуноцитов; доля клеток, имеющих фенотип CD45+CD19+CD5+/-CD16+56– (В-лимфоциты, часть клеток имело aberrantный иммунофенотип) составляла – 85%, а 10% – являлись НК клетками, с фенотипом CD45+ CD16+56+CD19–.

Открытие мембранного CD95/Fas/APO-1-рецептора и его лиганда (CD95L) позволило по-новому взглянуть на молекулярные механизмы лекарственно-индуцированного апоптоза. Взаимодействие CD95 с его лигандом или с МКА против CD95 является пусковым моментом для активации процесса апоптоза (CD95-опосредованный механизм) [5].

На следующем этапе был проведен анализ интенсивности флуоресценции лимфоцитов, окрашенных моноклональными антителами к CD95 антигену, который имеет гомологию с TNF-рецептором и обеспечивает передачу апоптозного сигнала [12]. Полученные результаты свидетельствуют о том, что экстракт *Pereskia* приводит к росту CD95-позитивных клеток с 41.82 ± 12.12 до 75.36 ± 3.82 ($p < 0,05$) процентов через 8 часов после аппликации.

Оценка плотности распределения рецепторов на поверхности клеточных мембран лимфоцитов больных хроническим лимфолейкозом при аппликации экстракта *Pereskia* (рисунок 2) выявила повышение (на 350%) плотности распределения рецепторов Fas/APO-1.

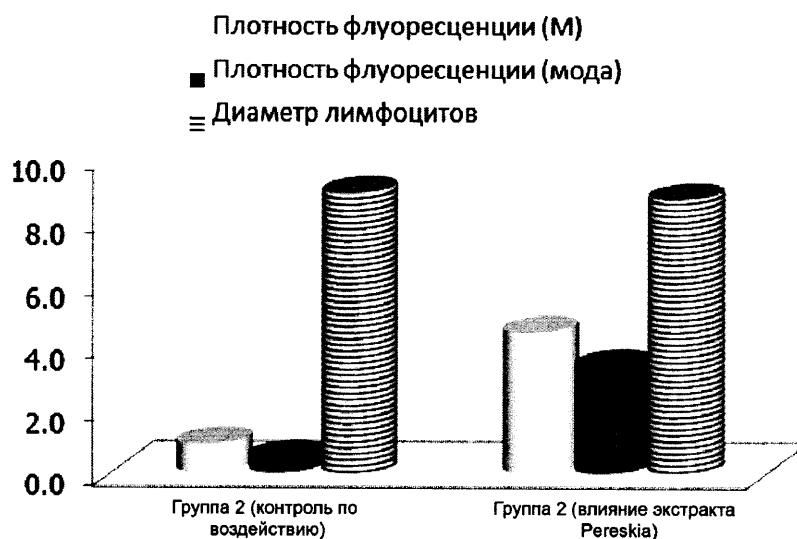


Рис. 2. Оценка апоптоза лимфоцитов у больных ХЛЛ

Эта особенно факт позволяет предположить активацию внешних путей апоптоза. Примечательно, что рост плотности распределения рецепторов не связан с изменением диаметра лимфоцитов, что указывает на ранние стадии программируемой клеточной гибели и является отличительным признаком механизма действия экстракта *Pereskia aculeata*.

На заключительном этапе был проведен цитометрический анализ периферической крови при добавлении в нее (эксперименты *in vitro*) экстракта *Pereskia aculeata*.

Установлено, что при инкубации периферической крови здоровых добровольцев с метанольным экстрактом *Pereskia aculeata* признаки апоптоза лимфоцитов периферической крови не выявлены.

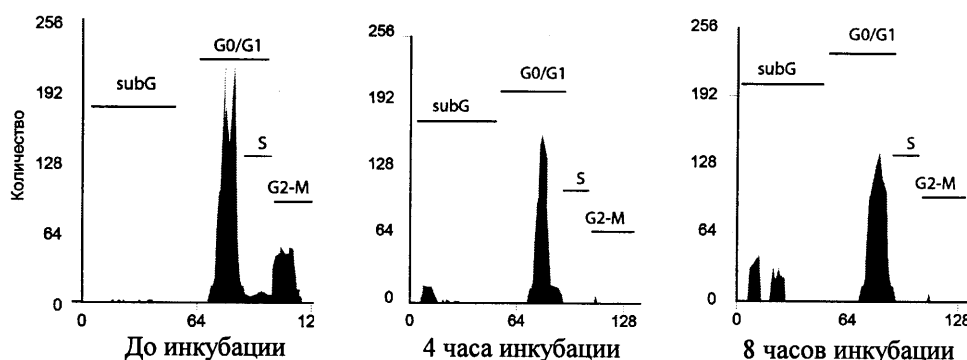


Рис. 3. Оценка клеточного цикла лимфоцитов у больных ХЛЛ

В группе 2 8-часовая инкубация цельной крови больных ХЛЛ с алкалоидами *Pereskia* не вызвала изменений лейкоцитарной формулы, которая соответ-

ствуется типичной картине заболевания. В мазках крови появлялись (7%) лимфоциты с признаками апоптоза; в контрольных образцах (группа 2 контроль по воздействию) значимых морфологических изменений не выявлено. 4-часовая инкубация цельной крови больных ХЛЛ с экстрактом *Pereskia* сопровождалась появлением лимфоцитов с признаками разрыва ДНК, а также практическим отсутствием клеток в S- и G2/M фазе. 8-часовая инкубация приводила к дальнейшему нарастанию (14%) числа клеток, имевших субдиплоидный пик, указывающий на разрыв ДНК.

Заключение

Среди многообразия растений, представленных в Республике Беларусь, наш выбор остановился на сем. *Cactaceae*, поскольку по данным литературы в кактусах, произрастающих в открытом грунте, обнаружены соединения, обладающие отчетливым биологическим эффектом.

Например, синтез кактусовых алкалоидов начинается с аминокислоты фенилаланина и посредством специфических ферментов (например, пейот-О-метилтрансферазу) образуются конечные продукты. Наиболее известными веществами, встречающимися в данном семействе, являются: биогенные амины (горденин, тирамин), алкалоиды (анхаламин, анхалидин, анхалинин, анхалонидин, лофофорин, мескалин, пеллотин и др.), N-ацетилалкалоиды, алкалоид-лактамы, алкалоид-имиды.

В Республике Беларусь создана и поддерживается уникальная коллекция представителей сем. *Cactaceae*. Одной из наших задач являлась оценка химического состава сем. *Cactaceae*, произрастающих в условиях оранжереи. По данным проведенного нами хроматографического анализа искусственные условия, создаваемые в оранжерее для растений, существенно не изменяют их физиологию и биохимию видов: *Hylocereus polyrhizus*, *Pereskia aculeata*, *Trichocereus pachanoi*, *Coryphantha pectinata*.

В настоящей работе мы остановились на оценке индуцированного апоптоза лимфоцитов периферической крови больных хроническим лимфолейкозом при аппликации экстрактов представителей сем. *Cactaceae*. Общеизвестно, что у больных ХЛЛ апоптоз, являющийся проявлением физиологического процесса программированной клеточной смерти, подавлен, поскольку отмечается повышение экспрессии Bcl-2, снижена экспрессия Bax, мутация p53 и другие механизмы, связанные с репарацией двойных разрывов ДНК [5–11].

Используемый в нашем исследовании методический подход применялся в ряде работ, где на культуре клеток проводилась оценка индуцированного лекарственными экстрактами апоптоза [5, 7, 11]. При аппликации экстрактов отмечена активация программы апоптоза в определенной части клеточного пула [5, 11].

Механизмы апоптоза в культуре клеток различны, несмотря на раннюю, массивную экспрессию ассоциированных с апоптозом рецепторов (в первую очередь, Fas рецептора). Так, в краткосрочных культурах преобладают не связанные с рецепторами механизмы гибели, в то время как в длительных культурах преобладают рецепторные механизмы. По мнению ряда исследователей,

это отражает динамику изменения чувствительности лимфоцитов к апоптозу в эффекторной и индуктивной фазах иммунного ответа [10, 11, 12].

Таким образом, из проведенного экспериментального исследования можно сделать следующие выводы:

1. Инкубация цельной крови больных ХЛЛ с экстрактом *Pereskia aculeata* не вызывает изменений лейкоцитарной формулы, которая соответствует типичной картине заболевания, но приводит к появлению в мазках крови лимфоцитов с признаками апоптоза. В контрольных образцах значимых морфологических изменений не выявлено.

2. 8-часовая инкубация цельной крови больных ХЛЛ с алкалоидами *Pereskia aculeata* увеличивает интенсивность экспрессии плотность распределения рецепторов CD95 на мембране лимфоцитов.

3. Инкубация цельной крови больных ХЛЛ с экстрактом *Pereskia* сопровождалась прямо пропорциональным ростом числа лимфоцитов с признаками разрыва ДНК, а также снижением количества клеток в S- и G2/M фазах.

Поскольку в доступной нам литературе отсутствуют сведения о механизмах влияния экстрактом *Pereskia aculeata* на лимфоциты больных ХЛЛ, то мы считаем необходимым продолжить проведение экспериментальных исследований, а экстракт *Pereskia aculeata* предлагаем рассматривать как источник лекарственного сырья для создания противоопухолевых препаратов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Блинова, Н. А.** Ботанико-фармакогностический словарь : справ. пособие / К. Ф. Блинова, Н. А. Борисова, Г. Б. Гортинский и др. ; под ред. К. Ф. Блиновой, Г. П. Яковлева. – Москва : Высш. шк., 1990. – 272 с.
2. **Горяев, М. И.** Растения, обладающие противоопухолевой активностью / М. И. Горяев, Ф. С. Шарипова. – Алма-Ата : АН КазССР, 1983. – 173 с.
3. **Садритдинов, Ф. С.** Фармакология растительных алкалоидов и их применение в медицине / Ф. С. Садритдинов, А. Г. Курмуков. – Ташкент : Медицина, 1980. – 311 с.
4. **Карцев, В. Г.** Биологическая активность и новые направления в химии изохинолиновых алкалоидов / В. Г. Карцев // Азотистые гетероциклы и алкалоиды: материалы Первой Международной конференции Москва, 9–12 октября 2001 г. / Компания Inter Bio Screen Ltd. ; под ред. В. Г. Карцева, Г. А. Толстикова. – Москва, 2001. – С. 97–104.
5. **Atassi, G.** Доклинические и клинические исследования новых противоопухолевых препаратов / G. Atassi, B. Giroux // Современная онкология. – 2002. – Т. 4, № 2. – С. 154–158
6. **Frenkel, G. D.** A Prevention strategy for circumventing drug resistance in cancer chemotherapy / G. D. Frenkel, P. B. Caffrey // Curr. Pharm. Design. – 2001. – Vol. 7. – P. 1595–1614.
7. **Germann, U. A.** Chemosensitizers to Overcome and Prevent Multidrug Resistance? / U. A. Germann, M. W. Harding // J. Natl. Cancer Inst. – 1995. – Vol. 87. – P. 1573–1575.
8. **Mata, R.** Tetrahydroisoquinoline Alkaloids of the Mexican Columnar Cactus *Pachycereus weberi* / R. Mata [et al.] // Phytochemistry. – 1980. – Vol. 19. – P. 673–678.
9. **Niranjan, P. S.** A new saponin of oleanolic acid from *Pereskia grandifolia* / P. S. Niranjan, B. Nilima, N. C. Ram // Phytochemistry. – 1974. – Vol. 13. – P. 529–530.

10. **Tan, M. L.** Methanolic extract of *Pereskia* (Kunth) DC. (Cactaceae) induces apoptosis in breast carcinoma, T47-D cell line / M. L. Tan, S.F. Sulaiman, N. Najimuddin, M. R. Samian, T. S. Tengku Muhammad // *Journal of Ethnopharmacology*. – 2005. – V. 96. – P. 287–294.
11. **Yonehara, S.** A cell killing monoclonal antibody (anti-Fas) to cell surface antigen co-down-regulated with the receptor to tumor necrosis factor / S. Yonehara, A. Ishii // *J Exp Med* – 1989. – Vol. 109. – P. 1747–1756.
12. **Волкова, Т. О.** Биологические эффекты *in vitro* стирольных производных ряда хинолина и пиридина на примере клеток опухолевых линий / Т. О. Волкова, Н. Н. Немова // Азотистые гетероциклы и алкалоиды: материалы Первой Международной конференции, Москва, 9–12 октября 2001 г. / Компания Inter Bio Screen Ltd. ; под ред. В. Г. Карцева, Г. А. Толстикова. – Москва, 2001. – С. 254–258.

Поступила в редакцию 05.01.2016 г.

Контакты: akulichn@gmail.com (Акулич Николай Васильевич)

Soroka A.V., Akulich N.V., Kniazeva N.A., Bruhnov V.A. ANTINEOPLASTIC PHARMACOLOGICAL POTENTIAL OF THE FAM. CACTACEAE JUSS GROWN IN THE GREENHOUSE CONDITIONS (in vitro experiments).

The tumor cells' drug resistance is an urgent problem in clinical oncology. The drug addictive process can be reduced to some extent by the mixed application of medication with different structure and mechanism of action. Thus the studies aimed at the search for a new class of compounds with stronger pharmacological and low toxic effects are of importance. The antitumor pharmacological potential of the extraction of the fam. *Cactaceae* cultivated in the greenhouse has been investigated. It has been stated that the blood incubation of leukemia patients with the alkaloids of *Pereskia aculeata* increases the expression intensity and density of CD95 receptors on a lymphocyte membrane, and is accompanied by the increases of cells with DNA breaks.

Key words: *Pereskia aculeata*, antitumor pharmacological potential, flow cytometry.

УДК 582.29 (476)

РЕВИЗИЯ ЛИШАЙНИКОВ РОДА *LEPRARIA* В БЕЛАРУСИ: *L. JACKII* И *L. RIGIDULA*

А. Г. Цуриков

кандидат биологических наук, доцент,
ГГУ имени Ф. Скорины (г. Гомель, РБ)

В. В. Голубков

кандидат биологических наук, доцент,
ГрГУ имени Я. Купалы (г. Гродно, РБ)

П. Н. Белый

кандидат биологических наук, старший научный сотрудник
Центральный ботанический сад НАН Беларуси

360 коллекционных образцов лишайников рода *Lepraria*, собранных различными авторами на территории Республики Беларусь в период 1957–2015 гг. и хранящихся в гербариях Минска (*MSKH*, *MSKU*, *MSK*), Гродно (*GRSU*) и Гомеля (*GSU*) были исследованы методом тонкослойной хроматографии. Установлено, что 19,7 % общего числа исследованных сборов (71 гербарный образец) содержат комплекс жирных кислот и относятся к видам *Lepraria jackii* (69 образцов) и *Lepraria rigidula* (2 образца). Последний вид впервые приводится для территории Беларуси. В статье приводится морфологическое описание видов, а также и их химический состав. В результатах исследований установлены экология и распространение указанных видов, как в пределах нашей страны, так и Европы в целом.

Ключевые слова: лишайник, *Lepraria jackii*, *Lepraria rigidula*, биоразнообразие, хемотаксономия, тонкослойная хроматография, вторичные метаболиты, жирные кислоты.

Введение

Род *Lepraria* Ach. объединяет стерильные виды лишайников с талломом, состоящим из более или менее скученных агрегаций, плотно расположенных различной окраски соредий. Ввиду того, что эти виды никогда не образуют плодовых тел, представители рода в основном игнорировались исследователями на протяжении предыдущих столетий. Только в последние 25 лет систематике и таксономии этого рода было уделено должное внимание ввиду внедрения химических и молекулярно-генетических методов исследований [1–7]. В результате, для некоторых стран была проведена ревизия имеющегося гербарного материала с целью пересмотра как всего видового разнообразия, так и уточнения экологии отдельных видов рода *Lepraria* [2, 3, 5, 8, 9]. Тем не менее, для многих стран подобные исследования не проводились, что затрудняет проведе-

© Цуриков А. Г., 2016

© Голубков В. В., 2016

© Белый П. Н., 2016

ние комплексной оценки как мирового распространения видов рода *Lepraria*, так и более глубокого понимания их экологии.

В Беларуси первые указания представителей данного рода, полученные с использованием современных точных методов идентификации, относятся к середине 2000-х гг. В работах [10–12] приводятся 6 видов рода *Lepraria*: *L. eburnea* J.R. Laundon, *L. elobata* Tonsberg, *L. incana* (L.) Ach., *L. jackii* Tonsberg, *L. neglecta* (Nyl.) Erichsen, *L. vouauxii* (Hue) R.C. Harris.

Поскольку большая часть исследований лишенобиоты Беларуси относится к периоду конца XX в. и основана на данных, которые часто не использовали химические методы идентификации, возникла необходимость инвентаризации образцов лишайников рода *Lepraria*, собранных на территории Беларуси за весь период исследований.

Методы исследований

Материалом для данного исследования послужили образцы лишайников рода *Lepraria*, хранящиеся в гербариях Белорусского государственного университета (MSKU), Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины (GSU), Гродненского государственного университета им. Я. Купалы (GRSU), Института экспериментальной ботаники НАН Беларуси (MSK) и Центрального ботанического сада НАН Беларуси (MSKH). Всего было исследовано 360 гербарных образцов сборов 1957–2015 гг. Морфологию образцов изучали с помощью стереомикроскопа Nikon SMZ-745, состав вторичных метаболитов – методом тонкослойной хроматографии в системе растворителей С [13].

Результаты и их обсуждение

В результате проведенных исследований было установлено, что 19,7% общего числа исследованных сборов (71 гербарный образец) содержат комплекс жирных кислот и относятся к *Lepraria jackii* Tonsberg (69 образцов) и *Lepraria rigidula* (B. de Lesd.) Tonsberg (2 образца). Последний вид впервые приводится для территории Беларуси. Ниже мы приводим морфологическое описание видов, основанное на результатах собственных исследований и данных других авторов, а также их химический состав.

Lepraria jackii Tonsberg, *Sommerfeltia* 14: 200 (1992).

Таллом состоит из мелких, вначале разрозненных, позднее образующих цельное слоевище соредий от светло-зеленого до серовато-зеленоватого цвета, сердцевина отсутствует, подслоевище хорошо развито, белое, образовано гифами, обильно развивающимися на нижней стороне соредиозных гранул.

Систематика группы видов рода *Lepraria*, содержащих только жирные кислоты и атранорин, неоднократно пересматривалась [14, 15], и к настоящему времени, помимо *L. jackii*, известно 7 таких видов: *L. bergensis* Tonsberg, *L. borealis* Loht. & Tonsberg, *L. celata* Slavikova, *L. humida* Slavikova & Orange, *L. rigidula*, *L. sylvicola* Orange и *L. toensbergiana* Bayerova & Kukwa (последний вид иногда рассматривают как разновидность *L. jackii* var. *toensbergiana* (Bayerova & Kukwa) Kukwa [16]). Из них 4 вида отличаются химически, по-

сколькx содержат другие жирные кислоты, не свойственные *L. jackii*: *L. borealis* (содержит нефростерановую кислоту), *L. celata* (ангардиановую), *L. sylvicola* (тонсбергиановую и рочелловую кислоты) и *L. toensbergiana* (тонсбергиановую). Помимо этого, *L. sylvicola* приурочен к деревьям с нейтральной корой (рябина, ольха, ясень), а также нередко имеет окрашенное подслоевище из-за наличия антрахинонов; *L. celata* и *L. toensbergiana* – монтанные виды, приуроченные к горным регионам Европы [14–16].

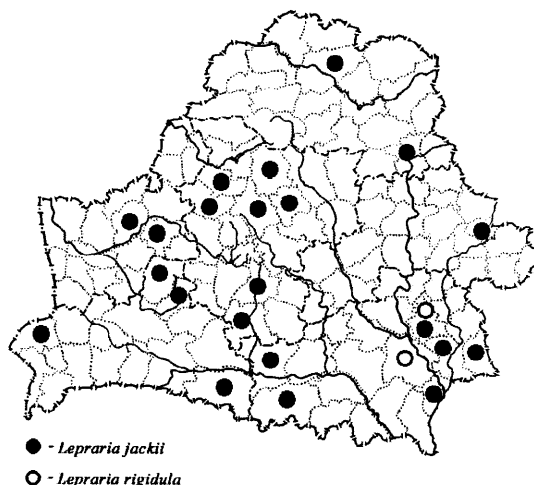
Оставшиеся три вида отличаются морфологически и своей экологией (произрастают на камнях и почве): *Lepraria bergensis* и *L. borealis* имеют толстый лопастной таллом, *L. bergensis* и *L. humida* характеризуются окрашенным подслоевищем.

Химический состав. Отличительной особенностью *Lepraria jackii* является наличие джекиновой и/или рочелловой кислоты, иногда с примесью норджекиновой кислоты [8].

Экология. На территории Беларуси *Lepraria jackii* характерен для хвойных лесов (в еловых лесах было собрано 40 образцов, в сосновых – 27 образцов). 1 образец был собран в дубраве. Одним из наиболее характерных субстратов для произрастания этого вида была отмечена кора деревьев (65 образцов). В меньшей степени *L. jackii* поселяется на древесине (3 образца). Из форофитов этот вид предпочитает сосну обыкновенную (36 образцов), ель европейскую (27). 2 образца были найдены на дубе черешчатом. Приуроченность вида к деревьям с кислой корой была также отмечена и польскими исследователями [8].

Распространение. *Lepraria jackii* является космополитным видом, представленным преимущественно в Северном полушарии (Европа, Азия, Северная Америка), а также в Австралии [9, 14].

В Беларуси вид распространен достаточно равномерно (рисунок). Малое число локалитетов *L. jackii* на территории Брестской, Витебской и Могилевской областей свидетельствует скорее о слабой изученности распространения этого вида в данных регионах, чем о низкой встречаемости *L. jackii*.



Распространение *Lepraria jackii* и *L. rigidula* на территории Беларуси

Исследованные образцы. БРЕСТСКАЯ ОБЛАСТЬ, Барановичский район, 1 км С г. Барановичи, в ельнике мшистом на ели, П.Н. Белый, 27.08.2009 (MSKH-4665); 2 км З д. Лесная, в ельнике мшистом на ели, П.Н. Белый, 25.08.2009 (MSKH-898); 3,5 км З д. Полонка, в ельнике мшистом на ели, П.Н. Белый, 26.08.2009 (MSKH-827); 3 км СЗ д. Юшковичи, в ельнике мшистом на сосне, П.Н. Белый, 28.08.2009 (MSKH-838, MSKH-841); **Ляховичский район**, 1,5 км З д. Литва, ур. Литовский лес, в ельнике кисличном на ели, П.Н. Белый, 24.08.2009 (MSKH-819); **Столинский район**, 5 км СЗ г. Столин, в ельнике кисличном на дубе, П.Н. Белый, 06.08.2010 (MSKH-3000); **ВИТЕБСКАЯ ОБЛАСТЬ, Оршанский район**, 3,5 км Ю д. Шибечи, в ельнике мшистом на ели, П.Н. Белый, 16.06.2011 (MSKH-4041, MSKH-5690); **ГОМЕЛЬСКАЯ ОБЛАСТЬ, Буда-Кошелёвский район**, Чеботовичское л-во, 11 кв., в сосняке черничном на сосне, А.Г. Цуриков, 14.07.2013 (GSU-1727); то же л-во, 17 кв., в сосняке мшистом на сосне, А.Г. Цуриков, 14.07.2013 (GSU-1718); то же л-во, 5 кв., в сосняке кисличном на сосне, А.Г. Цуриков, 14.07.2014 (GSU-1922); **Гомельский район**, г. Гомель, окрестности ост. "Солнечная", А.Г. Цуриков, 26.04.2005 (GSU-1871); Долголесское л-во, 223 кв., в сосняке черничном на сосне, А.Г. Цуриков, 07.08.2013 (GSU-1863, GSU-2143); Долголесское л-во, 232 кв., в сосняке орляковом на сосне, А.Г. Цуриков, 07.08.2013 (GSU-1865); то же л-во, 244 кв., в сосняке орляковом на сосне, А.Г. Цуриков, 05.08.2013 (GSU-1796); то же л-во, 4 кв., в сосняке орляковом на сосне, А.Г. Цуриков, 06.08.2013 (GSU-1816); Калининское л-во, 12 кв., в сосняке мшистом на сосне, А.Г. Цуриков, 02.10.2012 (GSU-1319); то же л-во, 9 кв., в сосняке черничном на сосне, А.Г. Цуриков, 02.10.2012 (GSU-1317); то же л-во, кв. 141, в сосняке орляковом, на сосне, А.Г. Цуриков, 08.08.2011 (GSU-924); то же л-во, кв. 174, в сосняке багульниковом на сосне, А.Г. Цуриков, 08.08.2011 (GSU-923); то же л-во, кв. 7, в сосняке орляковом на сосне, А.Г. Цуриков, 03.08.2011 (GSU-926); то же л-во, кв. 7, в сосняке кисличном на сосне, А.Г. Цуриков, 03.08.2011 (GSU-927); то же л-во, кв. 8, в сосняке мшистом на сосне, А.Г. Цуриков, 03.08.2011 (GSU-928, GSU-1915); Макеевское л-во, 86 кв., в сосняке мшистом на сосне, А.Г. Цуриков, 02.08.2013 (GSU-1776); Приборское л-во, 295 кв., в сосняке кисличном, на сосне, А.Г. Цуриков, 10.10.2012 (GSU-01315); то же л-во, 297 кв., в сосняке долгомошном на сосне, А.Г. Цуриков, 10.10.2012 (GSU-1314); то же л-во, 309 кв., в сосняке черничном, на сосне, А.Г. Цуриков, 10.10.2012 (GSU-1318); Старо-Дятловичское л-во, 24 кв., в сосняке приручейно-травяном на сосне, А.Г. Цуриков, 31.07.2013 GSU-1923; **Добрушский район**, Добрушское л-во, 428 кв., в сосняке брусничном на сосне, А.Г. Цуриков, 20.08.2013 (GSU-2082); **Житковичский район**, окр. д. Белев, в сосняке на коре пня, А.В. Тейкин, 01.02.2006 (GSU-1521); НП "Припятский", Переровское л-во, 3 кв., в дубраве орляковой на дубе, Л.Н. Парукова, 18.06.1973 (GSU-1872); **Лельчицкий район**, 1 км С г. Лельчицы, в ельнике черничном на ели, П.Н. Белый, 18.09.2009 (MSKH-1839, MSKH-5699); **Лоевский район**, Лоевское л-во, кв. 63, в сосняке вересковом на сосне, А.Г. Цуриков, 09.08.2011 (GSU-925); **ГРОДНЕНСКАЯ ОБЛАСТЬ, Лидский район**, окр. д. Тарпова, в сосновом лесу на сосне, Н. Матяс, 12.08.2006 (GRSU); Новогрудский район, 3 км ССВ д. Понемонь, в ельнике мшистом на

ели, П.Н. Белый, 12.09.2010 (MSKH-4779); **МИНСКАЯ ОБЛАСТЬ, Воложинский район**, 2,5 км В д. Малая Дайновка, в ельнике кисличном на ели и на гниющей древесине, П.Н. Белый, 24.10.2010 (MSKH-3771, MSKH-5867); 1,5 км ЮВ д. Чабаи, в ельнике кисличном на ели, П.Н. Белый, 23.10.2010 (MSKH-2661, MSKH-3656); Раковское л-во, кв. 40, в ельнике мшистом на ели, П.Н. Белый, 28.07.2009 (MSKH-101, MSKH-112, MSKH-122); **Логойский район**, 2 км к ЮЗ г.п. Плещеницы, в ельнике мшистом на ели, П.Н. Белый, 17.11.2010 (MSKH-2518); 2 км СЗ д. Дуброво, в ельнике кисличном на ели, сосне, гниющей древесине, П.Н. Белый, 28.06.2010 (MSKH-3139, MSKH-3141, MSKH-3149, MSKH-3154, MSKH-3155); Семковское л-во, кв. 114, в ельнике кисличном, на ели, П.Н. Белый, 17.06.2009 (MSKH-530); **Минский район**, г. Минск (ЮВ, ост. 14-й км), в ельнике мшистом на ели, П.Н. Белый, 18.07.2010 (MSKH-3269); 2,5 км З д. Сосновая, в ельнике кисличном на ели и на сосне, П.Н. Белый, 12.10.2010 (MSKH-3450, MSKH-3456); 1,5 км к СЗ д. Ходаково, в ельнике кисличном на ели и на сосне, П.Н. Белый, 25.09.2010 (MSKH-2248, MSKH-2257, MSKH-2258); 1 км ЮВ н.п. Колодищи, в ельнике кисличном на сосне, П.Н. Белый, 01.10.2010 (MSKH-2188); окр. д. Слободщина, Прилепская лесная дача, в сосновом лесу на сосне, О.М. Масловский, 03.10.1976 (MSK); Ратомское л-во, кв. 31, в ельнике мшистом на ели, П.Н. Белый, 10.06.2009 (MSKH-519); то же л-во, кв. 54, в ельнике кисличном на ели, П.Н. Белый, 11.06.2009 (MSKH-550); **Молодечненский район**, Роговское л-во, кв. 125, в ельнике кисличном на ели, П.Н. Белый, 03.08.2009 (MSKH-358); **Слуцкий район**, 0,5 км З д. Вежи, в ельнике кисличном на ели, П.Н. Белый, 15.09.2010 (MSKH-3159); **Смолевичский район**, 1 км Ю д. Стриево, в ельнике кисличном на ели, П.Н. Белый, 04.04.2011 (MSKH-4008); **Солигорский район**, 2 км ССЗ д. Домановичи, в ельнике кисличном на ели, П.Н. Белый, 14.09.2010 (MSKH-2792); **МОГИЛЕВСКАЯ ОБЛАСТЬ, Кричевский район**, 1,5 км З д. Сычики, в ельнике кисличном на сосне, П.Н. Белый, 23.07.2011 (MSKH-4324).

Lepraria rigidula (B. de Lesd.) Tonsberg, Sommerfeltia 14: 205 (1992).

Слоевище лепрозное, от войлочного до рассыпчатого, часто белое, реже зеленоватое, иногда с хорошо выраженной сердцевинной, соредии с длинными выступающими гифами. Вариабельность морфологических признаков часто обусловлена разнообразием экологических условий произрастания [8]. Это также подтверждается результатами наших исследований, поскольку эпигейный образец характеризуется белесым толстым слоевищем, напоминающим такое *Lepraria finkii* (B. de Lesd.) R.C. Harris, в то время как эпифитное слоевище имеет явный зеленоватый оттенок и более тонкое, морфологически схожее с *L. jackii*.

Lepraria rigidula – единственный вид рода, для которого характерно наличие нефростерановой кислоты. Морфологически схожие *Lepraria humida* и *L. jackii* не содержат это вещество (см выше), кроме этого *L. humida* является эпилитным видом.

Химический состав. Отличительной особенностью *Lepraria rigidula* является наличие атранорина и нефростерановой кислот [8, 17].

Экология. В Беларуси *Lepraria rigidula* был собран в сосновом лесу, а также на открытой местности (обрывистый берег р. Днепр). Согласно [8] вид приурочен в основном к открытым местообитаниям, в основном встречаясь на одиноко стоящих деревьях.

Распространение. *Lepraria rigidula* распространен преимущественно в Северном полушарии (Европа, Азия, Северная Америка, северная часть Африки) [17]; известно также местонахождение в Южной Америке [18]. В Беларуси вид является редким и известен из 2 локалитетов в Гомельской области (рисунок 1).

Исследованные образцы. Гомельская область, Буда-Кошелевский район, Чеботовичское л-во, 17 кв., в сосняке мшистом на сосне, А.Г. Цуриков, 13.07.2014 (GSU); Речицкий район, окр. д. Унорица, берег р. Днепр, на почве, А.Г. Цуриков, 10.08.2008 (GSU).

Заключение

В результате ревизии образцов лишайников рода *Lepraria*, хранящихся в изученных коллекциях (MSKU, GSU, GRSU, MSK, MSKH), установлено, что 19,7% от количества всех исследованных сборов (71 образец) содержат комплекс жирных кислот и относятся к *Lepraria jackii* (69 образцов) и *Lepraria rigidula* (2 образца). Последний вид впервые приводится для территории Беларуси. Полученными результатами была уточнена экология и распространение указанных видов, как в пределах республики, так и Европы в целом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Laundon, J. R.** The species of *Lepraria* – the name for the *Lepraria membranacea* group / J. R. Laundon // Lichenologist. – 1989. – Vol. 21. – P. 1–22.
2. **Laundon, J. R.** *Lepraria* in the British Isles / J. R. Laundon // Lichenologist. – 1992. – 24. – P. 315–350.
3. **Tonsberg, T.** The sorediate and isidiate, corticolous, crustose lichens in Norway / T. Tonsberg // Sommerfeltia. – 1992. – Vol. 14. – P. 1–331.
4. **Leuckert, C.** Chemotaxonomy of *Lepraria* Ach. and *Lepraria* Nyl ex. Crombie, with particular reference to Central Europe / C. Leuckert, H. Kummerling, W. Wirth // Bibliotheca Lichenologica. – 1995. – Vol. 58. – 245–259.
5. **Lohtander, K.** The genus *Lepraria* in Finland / K. Lohtander // Annales Botanici Fennici. – 1994. – Vol. 31. – P. 223–231.
6. **Kukwa, M.** Taxonomic notes on the lichen genera *Lepraria* and *Lepraria* / M. Kukwa // Annales Botanici Fennici. – 2002. – Vol. 39. – P. 225–226.
7. **Ekman, S.** Most species of *Lepraria* and *Lepraria* form a monophyletic group closely related to *Stereocaulon* / S. Ekman, T. Tonsberg // Mycological Research. – 2002. – Vol. 106. – P. 1262–1276.
8. **Kukwa, M.** The lichen genus *Lepraria* in Poland / M. Kukwa // The Lichenologist. – 2006. – Vol. 38, № 4. – P. 293–305.
9. **Lendemer, J. C.** A monograph of the crustose members of the genus *Lepraria* Ach. s. str. (Stereocaulaceae, Lichenized Ascomycetes) in North America north of Mexico / J. C. Lendemer // Opuscula Philolichenum. – 2013. – Vol. 11. – P. 27–141.
10. **Czyzewska, K.** Notes on two species of *Lepraria* from Belarus / K. Czyzewska, M. Kukwa // Graphis Scripta. – 2005. – Vol. 17. – P. 20–21.

11. **Golubkov, V. V.** Contribution to the lichen biota of Belarus / V. V. Golubkov, M. Kukwa // *Acta Mycologica*. – 2006. – Vol. 41, № 1. – P. 155–164.
12. **Tsurykau, A.** New or otherwise interesting records of lichens and lichenicolous fungi from Belarus / A. Tsurykau, V. Golubkov, M. Kukwa // *Herzogia*. – 2014. – Vol. 27, № 1. – P. 111 – 120.
13. **Orange, A.** Microchemical methods for the identification of lichens / A. Orange, P. W. James, F. J. White. – London: British Lichen Society, 2001. – 101 p.
14. **Bayerova, S.** A New Species of *Lepraria* (Lichenized Ascomycetes) from Europe / S. Bayerova, M. Kukwa, J. Fehrer // *The Bryologist*. – 2015. – Vol. 108, № 1. – P. 131–138.
15. **Slavikova-Bayerova, S.** Three new species of *Lepraria* (Ascomycota, Stereocaulaceae) containing fatty acids and atranorin // S. Slavikova-Bayerova, A. Orange // *The Lichenologist*. – 2006. – Vol. 38, № 6. – P. 503–513.
16. **Sliwa, L.** New distribution data for sterile crustose lichens in the polish Tatra mts and its surroundings / L. Sliwa, M. Kukwa // *Polish Botanical Journal*. – 2012. – Vol. 57, № 1. – P. 259–278.
17. **Saag, L.** World survey of the genus *Lepraria* (Stereocaulaceae, lichenized Ascomycota) / L. Saag, A. Saag, T. Randlane // *The Lichenologist*. – 2009. – Vol. 41, № 1. – P. 25–60.
18. **Flakus, A.** New species and records of *Lepraria* (Stereocaulaceae, lichenized Ascomycota) from South America / A. Flakus, M. Kukwa // *Lichenologist*. – 2007. – Vol. 39. – P. 463–474.

Поступила в редакцию 11.01.2016 г.

Контакты: tsurykau@gmail.com (Цуриков Андрей Геннадьевич)

vgolubkov@tut.by (Голубков Владимир Владимирович)

pavel.bely@tut.by (Белый Павел Николаевич)

Tsurykov A.G., Golubkov V.V., Bely P.N. REVISION OF THE LICHENS *LEPRARIA* IN BELARUS: *L. JACKII* AND *L. RIGIDULA*.

360 lichen specimens of the genus *Lepraria* collected in Belarus by different scientists during 1957–2015 and housed in GRSU, GSU, MSKH, MSKU and MSK herbaria were studied by thin layer chromatography. 71 specimens contain fatty acids and appear to be *Lepraria jackii* (69 samples) and *Lepraria rigidula* (2 samples). The latter species is new to the county. Their morphological description and chemistry are provided in the article. The data obtained clarify the ecology and distribution of these species, both within our country and Europe.

Key words: lichen, *Lepraria jackii*, *Lepraria rigidula*, biodiversity, chemotaxonomy, thin-layer chromatography, secondary metabolites, fatty acids.

УДК 561.581 (476)

ФИТОРАЗНООБРАЗИЕ ТЕРРИТОРИИ БЕЛАРУСИ В ГОЛОЦЕНЕ И ГЛЯЦИОПЛЕЙСТОЦЕНЕ (по палинологическим данным)

Я. К. Еловичева

доктор географических наук,
Белорусский государственный университет, г. Минск, РБ

Установлено, что фиторазнообразие и богатство флоры белорусского региона в оптимумы межледниковых эпох гляциоплейстоцена и голоцена к нынешнему этапу человечества снизилось в связи с похолоданием климата в конце голоценового межледниковья и проявлением антропогенного фактора, вызвавшего трансформацию природных ландшафтов.

Ключевые слова: палинофлора, экзоты, редковстречаемые растения, гляциоплейстоцен, голоцен.

Введение

Палинологические исследования отложений кайнозоя Беларуси позволили в наиболее полном объеме охарактеризовать историю развития растительного покрова и оценить богатство и разнообразие состава ископаемой палинофлоры. Географическое положение белорусского региона в центре Восточно-Европейской равнины дает возможность проследить неоднократную смену 8-ми ледниковых и 9-ти межледниковых флор на протяжении гляциоплейстоцена (10 тыс. лет – 800 тыс. лет назад) и голоцена (последние 10 тыс. лет) [1] и динамику природных зон.

Основная часть

В составе ископаемой палинофлоры за последние 800 тыс. лет (1-19 изотопные ярусы стратиграфической шкалы Северного полушария [1, 2] установлено 327 таксонов, относящихся к 180 видам, 124 родам из 95 семейств, принадлежащих 6 классам. Это дает возможность охарактеризовать состав палинофлоры различных стратиграфических интервалов: разграничить неогеновую (субтропическую) и гляциоплейстоценовую (умеренную) лесные флоры, а для решения вопроса о месте последней в эволюционном ряду палеофлор и возрасте вмещающих их межледниковых отложений выделить основные этапы ее формирования (таблица 1), определить состав географических элементов (в особенности экзотов) в оптимальные интервалы.

Таблица 1 – Основные этапы формирования гляциоплейстоценовой и голоценовой умеренной лесной флоры и группы флор

Абсолют. возраст (тыс.л.н.)	Изотопно-кислородные ярусы	Индексы	Голоцен и подразделение гляциоплейстоцена	Группы флор	Межледниковые флоры
0–10,3	1	Q ₁	голоцен	бореальная	голоценовая
70–110	5	Q ₃	поздний гляциоплейстоцен	неморальная	муравинская
125–180	7	Q ₂	средний гляциоплейстоцен	протонеморальная	шкловская
240–280	9				смоленская
330–380	11				александрийская
400–470	13	Q ₁	ранний гляциоплейстоцен	пранеморальная	ишкольдская
480–550	15				беловежская
610–670	17				корчевская
700–800	19				брестская
800–1000	Древнее 20	PreQ	Эоплейстоцен	Тропическая и субтропическая	
Более 1 млн лет		N	Неоген		

Общей закономерностью для территории Беларуси явился процесс постепенного обеднения состава ископаемой флоры от неогена к голоцену, что выражается в уменьшении количества географических групп родов и их числа от раннего межледниковья к позднему. Каждый межледниковый период гляциоплейстоцена характеризовался определенной закономерностью в последовательном снижении роли одних и увеличении значимости других географических элементов флоры (таблица 2).

Таблица 2 – Соотношение экзотических географических элементов флоры межледникового гляциоплейстоцена Беларуси

Межледниковые горизонты гляциоплейстоцена и неоген	Тропич.-субтроп.	Средиз.-азиатск.	Сев.-американск.	Ам.-средиз.-азиат.	Вост.-азиатск.	Ам.ер.-вост.-азиат.	Зап.-азиатск.	Амер.-евр.-азиат.	Панголарктич.	Европейские	Евро-азиатские
	Количество таксонов										
Голоценовый	—	—	—	—	—	—	—	3	12	7	2
Муравинский	—	—	—	—	1	1	—	1	2	1	2
Шкловский	—	—	—	1	3	—	—	6	1	4	1
Смоленский	—	—	—	1	3	—	—	2	1	3	1
Александрийский	—	—	—	7	4	2	2	4	1	3	2
Ишкольдский	—	—	—	—	1	—	—	1	1	3	—
Беловежский	—	—	—	2	—	—	—	2	—	—	1
Корчевский	—	—	—	2	—	—	—	5	—	—	—
Брестский	—	—	2	5	1	—	—	—	—	—	—
Неоген	3	1	2	4	8	2	—	—	—	—	—

Окончание таблицы 3

Растения	Горизонт, индекс, географические элементы флоры									
	As	Brs	Kr	Bv	Ish	A	Sm	Sk	Mr	Hl
	N	Q ₁	Q ₁	Q ₁	Q ₂	Q ₂	Q ₂	Q ₂	Q ₃	Q ₄
американо-средиземно-азиатские										
<i>Rhus sp.</i>	—	—								
<i>Rhododendron sp.</i>	—	—								
<i>Cupressus sp.</i>	—	—								
<i>Cotinus sp.</i>	—									
средиземно-азиатские										
<i>Cedrus sp.</i>	—									
американо-восточноазиатские										
<i>Brasenia sp.</i>	—	—				—			—	
<i>Carya sp.</i>	—	—				—				
<i>Tsuga sp. (T. canadensis L.)C</i>	—	—				—				
<i>Nyssa sp.</i>	—	—								
<i>Libocedrus sp.</i>	—									
североамериканские										
<i>Taxodium sp.</i>	—	—								
<i>Sequoia sp.</i>	—	—								
тропические и субтропические										
<i>Podocarpus sp.</i>	—	—								
<i>Gleichenia sp.</i>	—									
<i>Palmae</i>	—									

Ископаемая палинофлора гляциоплейстоцена включает также и виды редко встречаемые в составе современной флоры Беларуси:

Betula nana, *Polycnemum*, *Aldrovanda vesiculosa*, *Sanguisorba officinalis*, *Betula humilis*, *Salsola*, *Drosera anglica* и др.

В поздне- и раннеледниковые этапы оледенений на территории Беларуси существовал особый тип растительности – перигляциальный, объединявший экзотических представителей лесной, тундровой, альпийской горной (аркто-бореальные растения) и степной (ксерофиты, галофиты, мезоксерофиты) флор (таблица 4).

Таблица 4 – Представители перигляциальной флоры Беларуси

аркто-бореальные растения		
<i>Alnaster fruticosus</i>	<i>Pinus sibirica</i>	<i>Lycopodium pungens</i>
<i>Selaginella selaginoides</i>	<i>Abies sibirica</i>	<i>Lycopodium alpinum</i>
<i>Selaginella sibirica</i>	<i>Picea orientalis</i>	<i>Botrychium cf. simplex</i>
<i>Dryas</i>	<i>Picea obovata</i>	<i>Botrychium virginianum</i>
<i>Nymphaea tetragona</i>	<i>Larix sibirica</i>	<i>Botrychium cf. robustum</i>
<i>Cornus cuccica</i>	<i>Betula cf. exilis</i>	
горные европейские, дальневосточные и восточноазиатские (Япония, Китай) растения		
<i>Selaginella helvetica</i>	<i>Selaginella Aitchisonii</i>	
степные (ксерофиты, галофиты, мезоксерофиты) растения		
<i>Chenopodium acuminatum</i>	<i>Salicornia herbaceae</i>	<i>Kochia prostrata</i>
<i>Axyris amaranthoides</i>	<i>Echinopsilon hirsuta</i>	<i>Polycnemum</i>
<i>Corispermum hyssophifolium</i>	<i>Salsola</i>	<i>Suaeda</i>
	<i>Hippophaë rhamnoides</i>	

По мере отступления ледников из пределов Беларуси ее территория постепенно заселялась миграционными потоками бетулярной приледниковой флоры → бетулярной раннемежледниковой → хвойных лесов → южной кверцетальной → неморальной → хвойных лесов → бетулярной позднемежледниковой → бетулярной приледниковой.

На естественный ход развития флоры и растительности в гляциоплейстоцене наложился антропогенный фактор, проявившийся в последние 2500 лет в виде увеличения роли травянистых ассоциаций в ландшафтах (*Gramineae*, *Artemisia*, *Chenopodiaceae*), снижения лесистости, обогащении флоры региона растениями (синантропами), имеющими отношение к проявлению хозяйственной деятельности человека. В первую очередь это относится к находкам пыльцы культурных растений – *Hordeum* (ячмень), *Triticum* (пшеница), *Secale* (рожь), *Fagopyrum sagittatum* (*F. esculentum* – гречиха посевная), а также дикой моркови (*Daucus carota*). Наряду с этим процессом флора Беларуси обогатилась новыми компонентами, расширившими свой ареал за счет заносных ксероморфных теплолюбивых видов южного (степных, пустынных, полупустынных типов обитания, в т. ч. *Coryspermum*, *Salsola*, *Calligonum*, *Echinops* и др.), реже азиатского и европейского происхождения. Значительная часть видов, главным образом холодостойких, умеренно влаголюбивых (аркто-бореальных, бореальных, европейских горных и др., в том числе древесных и кустарниковых (*Picea abies*, *Betula humilis*, *Abies alba*) заметно сократили свой ареал и находятся на грани выпадения. И, тем не менее, даже при нынешнем процессе глобального потепления климата общий фон растительного покрова территории Беларуси сохранил черты зональных и провинциальных различий со времени его становления и сдвига природных зон не произошло.

Заключение

Эволюция природной растительности и состав флоры в течение гляциоплейстоцена и голоцена были зависимы преимущественно от климатического фактора. В постоптимальное время голоцена (с 5 тыс. л. н.) богатство и разнообразие флоры постепенно снижалось в связи с похолоданием климата, а около 2500 лет назад и по современный этап оно было осложнено и антропогенным воздействием на природные ландшафты, нарастание которого ведет к их постепенной трансформации. Ритмичность природной среды полагает в будущем два основных сценария: а) завершение голоцена как однооптимальной межледниковой эпохи и переход к новейшему оледенению, что предопределяет последовательную динамику в регионе растительности зоны средней и северной тайги, лесотундры, последующей приледниковой зоны с элементами флоры тундры, лесостепи и степи; б) дальнейшее потепление климата до ранга второго оптимума голоцена, а затем уж переход к новейшему оледенению.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Еловичева, Я. К. Эволюция природной среды антропогена Беларуси / Я. К. Еловичева. – Минск : БелСЭНС, 2001. – 292 с.

2. *Махнач, Н. А.* Флора и растительность Белоруссии в палеогеновое, неогеновое и антропогенное время / Н. А. Махнач, Я. К. Еловичева, А. Ф. Бурлак [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1981. – 106 с.
3. *Еловичева, Я. К.* Голоцен Беларуси / Я. К. Еловичева, О. Ф. Якушко, Э. А. Крутоус [и др.]. – Минск, 2004. – 241 с. Монография деп. БелИСА 10.08.2004 г., № Д-200482. Рефер. сборн. непублик. работ, № 32, 2004 г.

Поступила в редакцию: 15.02.2016 г.

Контакты: yelovicheva@yandex.ru (Еловичева Ядвига Казимировна)

Yelovicheva Y.K. PHYTODIVERSITY OF THE TERRITORY OF BELARUS IN HOLOCENE AND GLACIO PLEISTOCENE (by palynological data).

The phytodiversity and richness of flora in Belarus in the optima of interglacial epochs of Glacio Pleistocene and Holocene to the present stage of mankind has decreased due to climate cooling at the end of Holocene interglaciation and manifestations of the anthropogenic factors causing transformation of natural landscapes.

Key words: palynoflora, exotic plant, rare plants, Glacio Pleistocene, Holocene.