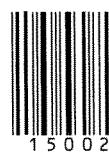
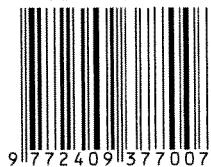


ISSN 2409-3777



ВЕСНИК

Магілёўскага дзяржаўнага
універсітэта
імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца с снежня 1998 года

Серый В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

2 (46)
2015

Галоўная рэдакцыйная камегія:

д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (галоўны рэдактар);
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара);
д-р гіст. навук дацэнт Д.С. Лаўрыновіч (нам. галоўнага рэдактара);
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В);
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)

*Научно-методический журнал “Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
універсітэта імя А.А. Куляшова” включен в РИНЦ
(Российский индекс научного цитирования),
лицензионный договор № 811–12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫИ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

ЗМЕСТ

ИЗОБОВ Н. А., ПЛАТОНОВ А. С., ФИЛИПЦОВ А. В. Мера множества решений линейной системы Пифаффа с m -мерным временем, имеющих попарно различные нижние характеристические множества.....	4
БУДАРИНА Н. В., БЕРНИК В. И., О'ДОННЕЛЛ Х. Значения неприводимых делителей целочисленных полиномов.....	17
МАРЧЕНКО И. В., МОРОЗОВ Н. П. Об одном подходе к изучению линейных стационарных систем на плоскости	23
КИРЬЯЦКИЙ Э. Г., МАТИЮХИН В. И. Решение задач на проекционном чертеже	32
ЮРЕВИЧ Ю. В., ЮРЕВИЧ В. А. Импульсы сверхизлучения в тонком инверсном слое	45
ЮРЕВИЧ Ю. В., ТИТОВ В. Л. Неустойчивость излучения, отраженного двуслойной пленочной структурой	53
РЮМЦЕВ А. А., ОСТРИКОВ О. М. Методика расчета полей напряжений в металлических стеклах у полос сдвига в форме изогнутых лучей	63
ЦУРИКОВ А. Г., ГОЛУБКОВ В. В., ЦУРИКОВА Н. В. Ревизия лишайников группы видов <i>Cladonia chlorophaea</i> в Беларуси: <i>C. chlorophaea s. str.</i> и <i>C. conista</i>	73
МИЛОСТИВАЯ Д. Ф. Влияние микроэлементов на показатели обмена веществ и привесы откормочного молодняка крупного рогатого скота украинской мясной породы	84
АТАНАСОВА Ю. В., ДЕГТЕЯРЕВА Е. И., НИКИФОРЕНКО В. А. Микробиологическая эффективность гигиенической обработки рук различными сортами кускового мыла	89
ДОЛИНКО Н. П. Влияние Гинкго билоба на морфологические и функциональные показатели сперматозоидов в условиях хронической этаноловой интоксикации	99

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 517.936

МЕРА МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЛІНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПФАФФА С m -МЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ, ИМЕЮЩИХ ПОПАРНО РАЗЛИЧНЫЕ НІЖНІЕ ХАРАКТЕРИСТИЧСКІЕ МНОЖЕСТВА

Н. А. Изобов

доктор физико-математических наук, профессор,
академик НАН Беларуси

А. С. Платонов

кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. В. Филипцов

кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет

Установлена реализуемость m -мерных характеристических и нижних характеристических векторов по m -мерному аналогу арифметической временной последовательности. Доказано, что почти все (в смысле n -меры Лебега) решения линейной вполне интегрируемой системы Пфаффа с m -мерным временем ($m \leq n$) имеют нижние характеристические множества, совпадающие с точной верхней границей нижнего характеристического множества этой системы.

Ключевые слова: линейная система Пфаффа, нижнее характеристическое множество, точная верхняя граница, мера Лебега.

Рассматриваем линейную систему Пфаффа

$$\frac{\partial x}{\partial t_i} = A_i(t)x, \quad x \in R^n, \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in R_+^m, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

с ограниченными непрерывно дифференцируемыми в $R_+^m = \{t \in R^m \mid t \geq 0\}$ матрицами коэффициентов $A_i(t)$, удовлетворяющими в ней условию полной интегрируемости [1, с. 14–24; 2, с. 16–26]

$$\frac{\partial A_i(t)}{\partial t_j} + A_i(t)A_j(t) = \frac{\partial A_j(t)}{\partial t_i} + A_j(t)A_i(t), \quad i, j \in \{1, \dots, m\}, \quad t \in R_+^m,$$

© Изобов Н.А., 2015

© Платонов А.С., 2015

© Филипцов А.В., 2015

Характеристический [1, с. 83; 3] $\lambda[x] = \lambda$ и нижний характеристический [4] $p[x] = p$ векторы нетривиального решения $x: R_+^m \rightarrow R^n \setminus \{0\}$ системы (1) будем определять условиями

$$L_x(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x(t)\| - (\lambda, t)}{\|t\|} = 0, \quad L_x(\lambda - \varepsilon e_i) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$l_x(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x(t)\| - (p, t)}{\|t\|} = 0, \quad l_x(p + \varepsilon e_i) < 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0) \in R_+^m$, – орт.

Под нижним характеристическим множеством [4] P_x нетривиального решения $x: R_+^m \rightarrow R^n \setminus \{0\}$ системы (1) понимают объединение всех нижних характеристических векторов $P_x = \bigcup p[x]$ этого решения. Множество [4] $P(A) = \bigcup_{x \neq 0} P_x$ называют нижним характеристическим множеством системы (1).

Определение 1. Множество $D \subset R^m$ будем называть ограниченным сверху (снизу), если существует такое $r \in R^m$, что $d \leq r$ ($d \geq r$) для всех $d \in D$ ($d \leq r \Leftrightarrow d_i \leq r_i, i = \overline{1, m}$).

Введем аналог понятий точной верхней и точной нижней границ одномерного множества для ограниченного сверху множества $D \subset R^m$:

Определение 2. Множество $\sup D \subset R^m$, $\inf D \subset R^m$ являющееся пересечением множеств $S \subset \overline{D}$, таких, что для всякого $d \in \overline{D}$ существует $s \in S$, $s \geq d$, ($s \leq d$) будем называть точной верхней (точной нижней) границей ограниченного сверху (снизу) множества $D \subset R^m$.

Определение 3. Множество $D \subset R^m$ назовем замкнутым сверху (снизу), если оно содержит свою точную верхнюю (нижнюю) границу.

В работах [5, 6] было установлено, что почти все решения системы $\dot{x} = A(t)x$, $x \in R^n$, $t \in [0, +\infty)$, с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами, начинающиеся на произвольном k -мерном подпространстве R^k , $k \in \{1, \dots, n\}$, пространства R^n , имеют нижние показатели, равные точной верхней границе нижних показателей этих решений. В работе [7] установлено, что почти все (в смысле k -меры Лебега) решения линейной вполне интегрируемой системы Пфаффа (1) с двумерным временем $t = (t_1, t_2) \in R_+^2$, и ограниченными непрерывно дифференцируемыми коэффициентами, начинающиеся при $t = t_0$ на произвольном k -мерном подпространстве R^k , $k \in \{1, \dots, n\}$, пространства R^n , имеют нижние характеристические множества, совпадающие с точ-

ной верхней границей всего множества нижних характеристических векторов этих решений. В настоящей работе этот результат обобщен для m -мерного случая ($t \in R_+^m$).

Для ограниченного сверху множества D пространства R^m , справедлива

Лемма 1. *Если множество $D \subset R^m$ ограничено сверху, то оно имеет и точную верхнюю грань $\sup D$.*

Доказательство. В пространстве R^m , всякой точке $r = (r_1, \dots, r_m)$ поставим в соответствие множество $K(r) = \{p \in R^m : p \geq r\}$, которое назовем верхним прямым m -гранным углом с вершиной в точке r . Пусть $S_D \equiv \left\{ r \in R^m : \overline{D} \cap K(r) = \{r\} \right\}$ есть множество вершин всех тех верхних прямых m -гранных углов $K(r)$, каждый из которых имеет с множеством \overline{D} единственную общую точку – вершину этого угла. Очевидно, это множество S_D не пусто в силу ограниченности сверху множества D .

Доказав, что построенное таким образом множество S_D : 1) содержится во всяком множестве S из определения точной верхней грани ограниченного сверху множества $D \subset R^m$; 2) само является одним из таких множеств, – мы тем самым докажем существование у D точной верхней грани $\sup D = S_D$.

Предположим, что для некоторого $S \in \overline{D}$ существует $s_0 \in S_D \subset \overline{D}$, $s_0 \notin S$. Тогда, по определению множества S для точки $d = s_0 \in \overline{D}$ найдется такое $s \in S$, что выполняются неравенства $s \geq s_0$ и $s \neq s_0$, из которых вытекает принадлежность точки $s \in \overline{D}$ множеству $K(s_0) \setminus \{s_0\}$, что противоречит построению S_D . Следовательно, наше предположение неверно и $S_D \subset S$.

Пусть d – произвольная точка множества \overline{D} . В силу ограниченности и замкнутости одномерного множества $\{\|d' - d\| \in R : d' \in K(d) \cap \overline{D}\}$ существует по крайней мере одна точка $s_d \in \overline{D}$, удовлетворяющая условию $\|s_d - d\| = \sup_{d' \in K(d) \cap \overline{D}} \{\|d' - d\|\}$. То есть верхний прямой угол $K(s_d)$ имеет с множеством \overline{D} единственную общую точку, свою вершину s_d . Поэтому для всякого $d \in \overline{D}$ существует $s_d \in S_D$, $s_d \geq d$. Это означает, что S_D является одним из множеств S из определения множества $\sup D$. Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Из леммы 1 непосредственно следует, что всякое замкнутое ограниченное сверху множество $D \subset R^m$ замкнуто сверху.

Доказательство основного результата данной работы опирается на два нижеследующих утверждения.

Обобщим для характеристических и нижних характеристических векторов решений линейной системы Пфаффа (1) доказанное в работе [7] для случая $m = 2$ утверждение, аналогичное лемме Н.А. Изобова [5], согласно которому, в частности, характеристический показатель Ляпунова и нижний показатель Perrona всех нетривиальных решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений могут быть реализованы по некоторой арифметической временной последовательности $\{t_k\} \subset [0, +\infty)$.

Будем рассматривать систему уравнений

$$\frac{dx}{dt_i} = F_i(t, x), \quad x \in R^n, \quad t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in R_+^m, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

удовлетворяющую условиям теоремы существования и единственности решений и условию

$$\|F_i(t, x)\| \leq \delta \|t\|^\eta \|x\|, \quad 0 \leq \eta < 1, \quad x \in R^n, \quad t \in R_+^m, \quad (3)$$

а также последовательность $\{t(j)\}$, $\|t(j)\| \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow \infty$, являющуюся достаточно плотной на R_+^m : для любой точки $t \in R_+^m$, $\|t\| \geq T_0$, существует такая точка $t(j_i) \in \{t(j)\}$, что выполнено неравенство

$$\|t - t(j_i)\| \leq \|t\|^{1-\eta-\varepsilon}, \quad 1-\eta-\varepsilon > 0, \quad \varepsilon > 0. \quad (4)$$

В частности, таким свойством обладает последовательность, определяемая по правилу: точка $(i_1 T, \dots, i_m T) \in R_+^m$, $i_1, \dots, i_m \in \{0\} \cup N$, $T = const > 0$, является точкой последовательности $\{t(j)\}$ (нумерация по ребрам m -мерного куба с противоположными вершинами в начале координат и точке $(\mu T, \dots, \mu T)$, где $\mu = \max\{i_1, \dots, i_m\}$).

Лемма 2. *Любое предельное значение*

$$\omega_x(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x(t'(k))\| - (p, t'(k))}{\|t'(k)\|},$$

в котором $p = (p_1, \dots, p_m)$ – произвольный фиксированный вектор плоскости R^m , $\|t'(k)\| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, для любого нетривиального решения $x(t)$ системы (2) реализуется по некоторой подпоследовательности $\{t(j_k)\}$, $\|t(j_k)\| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, последовательности $\{t(j)\} \subset R_+^m$.

Доказательство. Построим такую последовательность $\{t(j_k)\} \subset \{t(j)\}$, для которой было бы выполнено равенство

$$\omega_x(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x(t(j_k))\| - (p, t(j_k))}{\|t(j_k)\|}.$$

Существование такой последовательности и доказывает лемму.

В силу нетривиальности решения $x(t)$ справедлива следующая оценка

$$\left| \partial \|x\| / \partial t_i \right| = \left| \|\partial x / \partial t_i\| \cos(x, \partial x / \partial t_i) \right| \leq \|\partial x / \partial t_i\| \stackrel{(2),(3)}{\leq} \delta \|t\|^{\eta} \|x\|, \quad (5)$$

а тем самым и оценка

$$\left| \partial \ln \|x\| / \partial t_i \right| = \left| \|x\|^{-1} \partial \|x\| / \partial t_i \right| \stackrel{(5)}{\leq} \delta \|t\|^{\eta} \leq \delta (t_1 + \dots + t_m)^{\eta}.$$

Из нее при фиксированных $i=1$ и t_2, \dots, t_m , проинтегрировав последнее неравенство по t_1 , получим оценку

$$\left| \ln \frac{\|x(t_1, \dots, t_m)\|}{\|x(0, t_2, \dots, t_m)\|} \right| \leq \delta(\eta+1)^{-1} [(t_1 + \dots + t_m)^{\eta+1} - (t_2 + \dots + t_m)^{\eta+1}].$$

Интегрируя то же неравенство по t_2 при фиксированных $i=2$, $t_1=0$, и t_3, \dots, t_m , получим оценку

$$\left| \ln \frac{\|x(0, t_2, \dots, t_m)\|}{\|x(0, 0, t_3, \dots, t_m)\|} \right| \leq \delta(\eta+1)^{-1} [(t_2 + \dots + t_m)^{\eta+1} - (t_3 + \dots + t_m)^{\eta+1}].$$

Продолжив интегрирование до переменной t_m при $t_1 = \dots = t_{m-1} = 0$, получим оценку

$$\left| \ln \frac{\|x(0, \dots, 0, t_m)\|}{\|x(0, \dots, 0)\|} \right| \leq \delta(\eta+1)^{-1} t_m^{\eta+1}.$$

Сложив полученные неравенства, будем иметь

$$\left| \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|} \right| \leq \delta(\eta+1)^{-1} (t_1 + \dots + t_m)^{\eta+1}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| \exp \left(\delta \frac{(t_1 + \dots + t_m)^{\eta+1}}{\eta+1} \right). \quad (6)$$

Последовательность $\{t(j_k)\}$ будем строить по последовательности $\{t'(k)\}$ следующим образом. В силу (4) для всякой точки $t'(k)$, $\|t'(k)\| \geq T_0 \geq 2^{1/(\eta+\varepsilon)}$, существует точка $t(j_k)$ такая, что

$$\|t'(k) - t(j_k)\| \leq \|t'(k)\|^{1-\eta-\varepsilon}, \quad 1-\eta-\varepsilon > 0, \quad k \geq k_0. \quad (7)$$

Сравним теперь значения функции $v_x(t, p) \equiv [\ln \|x(t)\| - (p, t)] / \|t\|$, $t \in R_+^m$, в точках $t'(k)$ и $t(j_k)$. Для этого предварительно сравним ее значения в некоторых произвольных точках $\tau' = (\tau'_1, \dots, \tau'_m)$ и $\tau'' = (\tau''_1, \dots, \tau''_m)$ множества R_+^m .

Зафиксируем $t_2 = \tau''_2, \dots, t_m = \tau''_m$ и применим к функции $v_x((t_1, \tau''_2, \dots, \tau''_m), p)$ как функции параметра t_1 на промежутке $\Delta_1 = [\min\{\tau'_1, \tau''_1\}, \max\{\tau'_1, \tau''_1\}]$ теорему о среднем. Получим следующее неравенство

$$\begin{aligned} & |v_x((\tau''_1, \tau''_2, \dots, \tau''_m), p) - v_x((\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_m), p)| = \\ & = \left| \frac{\partial v_x(t, p)}{\partial t_1} \right|_{t=(\xi_1, \tau''_2, \dots, \tau''_m)} \cdot |\tau''_1 - \tau'_1| \leq \left| \frac{\partial v_x(t, p)}{\partial t_1} \right|_{t=(\xi_1, \tau''_2, \dots, \tau''_m)} \cdot \|\tau'' - \tau'\|, \end{aligned}$$

где $\xi_1 \in \Delta_1$. Оценим теперь $|\partial v_x(t, p)/\partial t_1|$ при $t = (\xi_1, \tau''_2, \dots, \tau''_m)$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial v_x(t, p)}{\partial t_1} \right| = \left| \frac{\partial \|x(t)\|/\partial t_1}{\|x(t)\| \cdot \|t\|} - \frac{\ln \|x(t)\|}{\|t\|^3} t_1 - \frac{p_1}{\|t\|} + \frac{(p, t)}{\|t\|^3} t_1 \right|^{(5),(6)} \leq \\ & \leq \frac{\delta \|t\|^\eta}{\|t\|} + \frac{|\ln \|x(0)\||}{\|t\|^2} + \frac{\delta}{\eta+1} \frac{(t_1 + \dots + t_m)^{\eta+1}}{\|t\|^2} + \frac{2\|p\|}{\|t\|} = \\ & = \|t\|^{\eta-1} \left[\delta + \frac{|\ln \|x(0)\||}{\|t\|^{1+\eta}} + \frac{\delta}{\eta+1} \left(\frac{t_1 + \dots + t_2}{\|t\|} \right)^{1+\eta} + \frac{2\|p\|}{\|t\|^\eta} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, при достаточно удаленных от начала координат τ' и τ'' , будем иметь неравенство

$$|v_x((\tau''_1, \tau''_2, \dots, \tau''_m), p) - v_x((\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_m), p)| \leq K \|(\xi_1, \tau''_2, \dots, \tau''_m)\|^{\eta-1} \|\tau'' - \tau'\|, \quad (8)$$

где $K = \text{const} > 0$. Аналогично можно показать справедливость неравенства

$$\begin{aligned} & |v_x((\tau'_1, \dots, \tau'_{i-1}, \tau''_i, \dots, \tau''_m), p) - v_x((\tau'_1, \dots, \tau'_i, \tau''_{i+1}, \dots, \tau''_m), p)| \leq \\ & \leq K \|(\tau'_1, \dots, \tau'_{i-1}, \xi_i, \tau''_{i+1}, \dots, \tau''_m)\|^{\eta-1} \|\tau'' - \tau'\|, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\xi_i \in \Delta_i = [\min\{\tau'_i, \tau''_i\}, \max\{\tau'_i, \tau''_i\}]$.

Из (8) и (9) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & |v_x(\tau'', p) - v_x(\tau', p)| = |v_x((\tau''_1, \dots, \tau''_m), p) - v_x((\tau'_1, \tau''_2, \dots, \tau''_m), p) + \\ & + v_x((\tau'_1, \tau''_2, \dots, \tau''_m), p) - v_x((\tau'_1, \tau'_2, \tau''_3, \dots, \tau''_m), p) + \dots + \\ & + v_x((\tau'_1, \dots, \tau'_{m-1}, \tau''_m), p) - v_x((\tau'_1, \dots, \tau'_m), p)| \leq mK \|\tau_l\|^{\eta-1} \|\tau'' - \tau'\|, \end{aligned} \quad (10)$$

где τ_l – та из двух точек τ' и τ'' , у которой норма не превосходит нормы другой точки: $\|\tau_l\| = \min \{\|\tau'\|, \|\tau''\|\}$.

Вернемся теперь к значениям функции $v_x(t, p)$ в точках $t'(k)$ и $t(j_k)$. На основании (10) и (7) при $\|t'(k)\| \leq \|t(j_k)\|$ имеем оценку

$$\begin{aligned} |v_x(t(j_k), p) - v_x(t'(k), p)| &\leq mK \|t'(k)\|^{\eta-1} \|t(j_k) - t'(k)\| \leq \\ &\leq mK \|t'(k)\|^{\eta-1} \|t'(k)\|^{1-\eta-\varepsilon} = mK \|t'(k)\|^{1-\varepsilon}. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогичная оценка (с постоянной $2^{1-\eta} mK$) будет иметь место и в том случае, когда $\|t'(k)\| > \|t(j_k)\|$, $\|t'(k)\| \geq T_0$. Покажем это. Оценим $\|t(j_k)\|$ снизу через $\|t'(k)\|$. Из очевидных неравенств

$$\begin{aligned} \|t'(k)\| &= \|t(j_k) + [t'(k) - t(j_k)]\| \leq \|t(j_k)\| + \|t'(k) - t(j_k)\| \stackrel{(7)}{\leq} \|t(j_k)\| + \|t'(k)\|^{1-\eta-\varepsilon}, \\ \text{неравенства } 2^{1/(\eta+\varepsilon)} &\leq T_0 \text{ имеем требуемую оценку} \end{aligned}$$

$$\|t(j_k)\| \geq \|t'(k)\| \left[1 - \|t'(k)\|^{-\eta-\varepsilon} \right] \geq \|t'(k)\| / 2, \quad (12)$$

в силу того, что при $\|t'(k)\| \geq T_0$ справедливы неравенства

$$\|t'(k)\|^{-\eta-\varepsilon} \leq T_0^{-\eta-\varepsilon} \leq 2^{-1}.$$

В силу (10), (7) и (12) (для случая $\|t'(k)\| > \|t(j_k)\|$) получим оценку

$$\begin{aligned} |v_x(t'(k), p) - v_x(t(j_k), p)| &\leq mK \|t(j_k)\|^{\eta-1} \|t'(k) - t(j_k)\| \leq \\ &\leq 2^{1-\eta} mK \|t'(k)\|^{\eta-1} \|t'(k)\|^{1-\eta-\varepsilon} = 2^{1-\eta} mK \|t'(k)\|^{-\varepsilon}, \end{aligned} \quad (13)$$

справедливую и в случае $\|t'(k)\| \leq \|t(j_k)\|$.

Переходя в неравенствах (11) и (13) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим реализумость величины $\omega_x(p)$ по подпоследовательности $\{t(j_k)\} \subset \{t(j)\}$. Лемма 2 доказана.

Следствие 1. Для любого нетривиального решения $x(t)$ системы (1) величины $L_x(p)$ и $l_x(p)$, где $p = (p_1, \dots, p_m)$ – произвольный фиксированный вектор плоскости R^m , реализуются по последовательностям $\{t(j_L(k))\}$, $\|t(j_L(k))\| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, и $\{t(j_l(k))\}$, $\|t(j_l(k))\| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, являющимся некоторыми подпоследовательностями последовательности $\{t(j)\} \in R_+^m$.

Справедлива следующая

Лемма 3. Пусть для некоторого $k \in N$ заданы множество $\{r_0(j)\} \subset R$ действительных чисел и множество $\{r(j)\} \subset R^k \setminus \{0\}$ точек $r(j) = (r_1(j), \dots, r_k(j))$ k -мерного пространства R^k , где $j = (j_1, \dots, j_n)$, $j_l \in \{0\} \cup N$. Тогда множество $A(q)$, $q \in N$, составленное из всех тех точек $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in R^k$, для каждой из которых существует такая последовательность $\{j(h)\}$, $h \in N$, что справедливы неравенства

$$\frac{|r_0(j) + (r(j), \alpha)|}{\max_{1 \leq i \leq k} \{ |r_i(j)| \}} \leq ce^{-\|j\|/q}, \quad c = c(\alpha) = \text{const} > 0, \quad j \in \{j(h)\}, \quad (14)$$

имеет нулевую k -меру Лебега: $\text{mes}_k A(q) = 0$.

Доказательство. Для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ построим множество

$$J_i = \left\{ j \in \{j(h)\} : \max_{1 \leq l \leq k} \{ |r_l(j)| \} = |r_i(j)| \right\},$$

которое, вообще говоря, может оказаться пустым. Введем обозначение

$$\nu_i(\alpha, j) \equiv -\frac{1}{r_i(j)} \left(r_0(j) + \sum_{l \neq i} \alpha_l r_l(j) \right).$$

Будем считать, что $\alpha \in A_i(q)$, если существует бесконечная последовательность $\{j(h_s)\} \subset J_i$, для которой выполняются неравенства (14), то есть

$$|\alpha_i - \nu_i(\alpha, j)| \leq ce^{-\|j\|/q}, \quad j \in J_i.$$

Зафиксируем некоторое $\rho \in N$ и введем вспомогательные множества

$$B_\rho = \{\alpha \in A_i(q) : |\alpha_l| \leq \rho, l \neq i\},$$

$$M_\rho(j) = \{\alpha \in R^k : |\alpha_i - \nu_i(\alpha, j)| \leq ce^{-\|j\|/q}, |\alpha_l| \leq \rho, l \neq i\}, \quad j \in J_i \subset R^m.$$

Объем $V_\rho(j)$ тела $M_\rho(j)$ равен

$$V_\rho(j) = \int_{-\rho}^{\rho} d\alpha_1 \dots \int_{-\rho}^{\rho} d\alpha_{i-1} \int_{\nu_i(\alpha, j) - ce^{-\|j\|/q}}^{\nu_i(\alpha, j) + ce^{-\|j\|/q}} d\alpha_i \int_{-\rho}^{\rho} d\alpha_{i+1} \dots \int_{-\rho}^{\rho} d\alpha_k = 2^k \rho^{k-1} ce^{-\|j\|/q}.$$

Совокупность множеств $M_\rho(j)$ для всех $j \in J_i$, $\|j\| \geq \mu \in N$, обозначим символом $N_\rho(\mu) = \bigcup_{\|j\| \geq \mu} M_\rho(j)$. Множество B_ρ будет принадлежать множеству $N_\rho(\mu)$ при любом $\mu \geq 2q$. Поэтому мера множества B_ρ не больше, чем мера множества $N_\rho(j)$. Оценим эту величину

$$\begin{aligned} \text{mes}_k N_\rho(j) &= \sum_{j \in J_i, \|j\| \geq \mu} \text{mes}_k M_\rho(j) = \sum_{j \in J_i, \|j\| \geq \mu} V_\rho(j) = \\ &= \sum_{j \in J_i, \|j\| \geq \mu} 2^k \rho^{k-1} ce^{-\|j\|/q} \leq 2^k \rho^{k-1} c \sum_{\|j\| \geq \mu} e^{-\|j\|/q} \leq 2^k \rho^{k-1} c \sum_{s=\mu}^{\infty} K(s) e^{-s/q}, \end{aligned}$$

где $K(s) \leq \left(1 - m^{-\frac{m}{2}}\right)(s+1)^m$ – число точек $j = (j_1, \dots, j_m) \in R_+^m$ с целочисленными координатами, обладающих свойством $s \leq \|j\| < s+1$. Последнее неравен-

ство справедливо в силу того, что непрерывная положительная функция $g(\tau) = \tau^2 e^{-\tau/q}$ убывает на промежутке $[2q, +\infty)$. Итак, получили неравенство

$$mes_k N_\rho(j) \leq c_1 \rho^{k-1} \sum_{s=\mu}^{\infty} s^2 e^{-s/q} \equiv c_1 \rho^{k-1} \sum_{s=\mu}^{\infty} g(s), \quad c_1 = const, \quad \mu \geq 2q. \quad (15)$$

Ряд $\sum_{s=2q}^{\infty} g(s)$ сходится по интегральному признаку сходимости рядов, так

как сходится интеграл $\int_{2q}^{+\infty} \tau^2 e^{-\tau/q} d\tau = q(\tau^2 + 2q\tau + 2q^2)e^{-\tau/q} \Big|_{\tau=2q} = 10e^{-2}q^3$. Рассмат-

ривая ряд $\sum_{s=\mu}^{\infty} g(s)$ как остаток сходящегося ряда $\sum_{s=2q}^{\infty} g(s)$, можем записать

$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sum_{s=\mu}^{\infty} g(s) = 0$. Отсюда, в силу произвола выбора μ , из (15) вытекает справедливость равенства $mes_k B_\rho = 0$, выполнимого при любом $\rho \in N$. Последнее означает,

что k -мера множества $A_i(q) = \bigcup_{\rho=1}^{\infty} B_\rho$ равна нулю как мера объединения счетного числа множеств нулевой k -меры.

Таким образом, $mes_k A(q) = mes_k \bigcup_{i=1}^k A_i(q) = 0$. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Почти все (в смысле k -меры Лебега) решения линейной вполне интегрируемой системы Пфаффа (1) с ограниченными непрерывно-дифференцируемыми матрицами коэффициентов $A_i(t)$, начинающиеся при $t = t_0$ на произвольном подпространстве $\Pi_k = R^k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, пространства R^n , имеют нижние характеристические множества, совпадающие с точной верхней границей всего множества нижних характеристических векторов этих решений.*

Доказательство (использующее элементы рассуждений работы [5]). Без ограничения общности можно считать $t(0) = 0$. Поэтому последовательность $\{t(j)\}$, $t(j) = j = (j_1, \dots, j_m)$, $j_i \in \{0\} \cup N$, $i = 1, \dots, m$, является последовательностью леммы 1. Запишем уравнение k -мерного подпространства Π_k пространства R^n в параметрической форме

$$x_h^{(0)} = a_h^{(0)} + (\alpha, a_h) = a_h^{(0)} + \sum_{l=1}^k \alpha_l a_h^{(l)}, \quad a_h^{(0)} \in R, \quad a_h \in R^k, \quad h = 1, \dots, n,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in R^k$ – параметр.

Пусть $X(t) = [x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)]$ – фундаментальная система решений системы (1), нормированная в точке $t = 0$, то есть $X(0) = E$, где E – единичная матрица

ца; $x^{(h)}(t) = (x_1^{(h)}(t), \dots, x_n^{(h)}(t))$ – h -ый столбец-решение матрицы $X(t)$. Тогда решение $x(t, x_0)$ системы (1) представимо в виде

$$x(t, x_0) = X(t)x_0 = \left(\sum_{h=1}^n x_h^{(h)}(t)x_h^{(0)}, \dots, \sum_{h=1}^n x_h^{(h)}(t)x_h^{(0)} \right).$$

А в обозначениях $\gamma_h^{(i)}(t) \equiv \sum_{l=1}^n a_l^{(i)} x_h^{(l)}(t)$, $i \in \{0, \dots, k\}$, $h \in \{1, \dots, n\}$, имеет вид

$$x(t, x_0(\alpha)) = (\gamma_1^{(0)}(t) + (\alpha, \gamma_1(t)), \dots, \gamma_n^{(0)}(t) + (\alpha, \gamma_n(t))), \quad (16)$$

где $\alpha, \gamma_i(t) \in R^k$, а $(\alpha, \gamma_i(t))$ – скалярное произведение этих векторов.

Выберем в плоскости R^m произвольный вектор $p = (p_1, \dots, p_m)$ и зафиксируем его. Введем обозначения

$$\underline{\Omega}_p(\alpha) \equiv l_{x(t, x_0(\alpha))}(p) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\|j\|} \left(\frac{1}{2} \ln \sum_{l=1}^n [\gamma_l^{(0)}(j) + (\alpha, \gamma_l(j))]^2 - (p, j) \right)$$

и покажем, что для почти всех $\alpha \in R^k$ выполнены неравенства $\underline{\Omega}_p(\beta) \leq \underline{\Omega}_p(\alpha)$, $\forall \beta \in R^k$.

Из представлений (16) получим равенство

$$x(t, x_0(\beta)) = ((\beta - \alpha, \gamma_1(t)), \dots, (\beta - \alpha, \gamma_n(t))) + x(t, x_0(\alpha)),$$

а отсюда неравенство

$$\|x(j, x_0(\beta))\| \leq kn \|\beta - \alpha\| |\gamma_{h(j)}^{(i(j))}(j)| + \|x(j, x_0(\alpha))\|, \quad (17)$$

где $|\gamma_{h(j)}^{(i(j))}(j)| = \max_{1 \leq h \leq n, 1 \leq i \leq k} \{|\gamma_h^{(i)}(j)|\}$. Пусть предел $\underline{\Omega}_p(\alpha)$ реализуется по последовательности $\{j(s)\}$, $\|j(s)\| \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow \infty$. Без ограничения общности, эту последовательность можно считать такой, что выполнены условия: $i(j(s)) = i$ и $h(j(s)) = j$ – фиксированные, одинаковые для всех $s \in N$ числа, $\gamma_h^{(i)}(j(s)) \neq 0$. Тогда из (17) получим неравенство

$$\underline{\Omega}_p(\beta) \leq \underline{\Omega}_p(\alpha) + d,$$

где

$$d = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\|j(s)\|} \ln \left[1 + \frac{kn \|\beta - \alpha\| |\gamma_h^{(i)}(j(s))|}{\|x(j(s), x_0(\alpha))\|} \right]. \quad (18)$$

Очевидно, что существование бесконечной последовательности $\{j(s_l)\} \subset \{j(s)\}$, для которой все $\gamma_h^{(i)}(j(s_l)) = 0$, $l \in N$, обеспечило бы выполнимость необходимого равенства $d = 0$.

Для любого $q \in N$ и каждой пары $h \in \{1, \dots, n\}$ и $i \in \{1, \dots, k\}$ введем в рассмотрение множество $A_h^{(i)}(q) \subset R^k$. Будем считать, что $\alpha \in A_h^{(i)}(q)$, если существует такая бесконечная последовательность $\{j(s_l)\} \subset \{j(s)\}$, $l \in N$, что выполняются неравенства

$$\rho_h^{(i)}(j, \alpha) \equiv \frac{|\gamma_h^{(0)}(j) + (\alpha, \gamma_h(j))|}{|\gamma_h^{(i)}(j)|} \leq ce^{-\|j\|/q}, \quad (19)$$

где $c = c(\alpha) = const > 0$, $j \in \{j(s_l)\}$. Согласно лемме 3 $mes_k A_h^{(i)}(q) = 0$, а, следовательно, мера множества $A = \bigcup_{q=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^n A_h^{(i)}(q)$ равна нулю как мера объединения счетного числа множеств нулевой меры.

Покажем теперь, что при $\alpha \notin A$ величина d , определяемая формулой (18), равна 0. Действительно, при $\alpha \notin A$ в силу (19) для каждого $q \in N$ найдется такое $s(\alpha, q)$, что для любых $h \in \{1, \dots, n\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$ и всех $s \geq s(\alpha, q)$ выполняются неравенства $\rho_h^{(i)}(j(s), \alpha) > ce^{-\|j(s)\|/q}$. Поэтому в этом случае справедливы оценки

$$\frac{|\gamma_h^{(i)}(j(s))|}{\|x(j(s), x_0(\alpha))\|} \leq \frac{|\gamma_h^{(i)}(j(s))|}{|\gamma_h^{(0)}(j(s)) + (\alpha, \gamma_h(j(s)))|} = \frac{1}{\rho_h^{(i)}(j(s), \alpha)} < ce^{\|j(s)\|/q}$$

для всех $h \in \{1, \dots, n\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$ и $s \geq s(\alpha, q)$. На основании последних оценок получаем неравенство

$$d \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln [1 + knc \|\beta - \alpha\| e^{\|j(s)\|/q}]}{\|j(s)\|} = \frac{1}{q}, \quad q \in N.$$

Отсюда, в силу произвола выбора q , получаем требуемое равенство $d = 0$. В итоге мы доказали, что для любых $\beta \in R^k$ и $\alpha \in R^k \setminus A$, $mes_k A = 0$, выполняется неравенство

$$\underline{\Omega}_p(\beta) \leq \underline{\Omega}_p(\alpha), \quad \forall p \in R^m, \quad \alpha \notin A. \quad (20)$$

Аналогично, исходя из β , можно показать, что при $\beta \notin A$ выполняется неравенство $\underline{\Omega}_p(\alpha) \leq \underline{\Omega}_p(\beta)$, являющееся обратным для неравенства (20).

Таким образом, для любых $\alpha, \beta \in R^k \setminus A$ и произвольного фиксированного p пространства R^m выполнено равенство

$$\underline{\Omega}_p(\alpha) = \underline{\Omega}_p(\beta), \quad \forall p \in R^2. \quad (21)$$

Рассмотрим решения $x_1(t) \equiv x(t, x_0(\alpha))$ и $x_2(t) \equiv x(t, x_0(\beta))$, где $\alpha, \beta \notin A$. Пусть $p = (p_1, \dots, p_m)$ является нижним характеристическим вектором решения $x_1(t)$,

тогда выполняется следующая цепочка равенств $0 = l_{x_1}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\Omega}_p(\alpha) = \underline{\Omega}_p(\beta) \stackrel{(21)}{=} l_{x_2}(p)$.

То есть выполняется равенство $l_{x_2}(p) = 0$, а тем самым и неравенства $l_{x_2}(p + \varepsilon e_i) < 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $i = \overline{1, m}$. Следовательно, вектор p по определению нижнего характеристического вектора принадлежит нижнему характеристическому множеству P_{x_2} решения $x_2(t)$, и, значит, верно включение $P_{x_1} \subset P_{x_2}$. Обратное включение $P_{x_2} \subset P_{x_1}$ доказывается аналогично. Итак, все решения $x(t, x_0(\alpha))$, $\alpha \notin A \subset R^k$, $x_0(\alpha) \in \Pi_k$, системы (1) имеют одинаковые нижние характеристические множества $P_{x(\cdot, x_0(\alpha))} = P_k$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что

$P_k = \sup \bigcup_{x_0 \in \Pi_k} P_{x(\cdot, x_0)}$. Предположим противное. Пусть для некоторой точки $p' \in P_k$ существует решение $x(t) \equiv x(t, x_0(\beta))$, $x_0(\beta) \in \Pi_k$, $\beta \in R^k$, с нижним характеристическим вектором $p[x(t)] = p \in R^m$ таким, что $p_i > p'_i$, $p_{l \neq i} \geq p'_{l \neq i}$, $i, l \in \{1, \dots, m\}$. Тогда найдется решение $x'(t) \equiv x(t, x_0(\alpha))$, $x_0(\alpha) \in \Pi_k$, $\alpha \notin A$, для которого p' является нижним характеристическим вектором. Для последовательности $\{t'(k)\}$, по которой реализуется предел $l_x(p' + \varepsilon e_i)$, справедливы следующие рассуждения:

$$\begin{aligned} 0 &> l_x(p' + \varepsilon e_i) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x'(t)\| - (p, t) + (p - p', t) - \varepsilon t_i}{\|t\|} \geq \\ &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x'(t)\| - (p, t)}{\|t\|} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(p - p', t'(k)) - \varepsilon t'_i(k)}{\|t'(k)\|} \stackrel{(20)}{\geq} \\ &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|x(t)\| - (p, t)}{\|t\|} + (p_i - p'_i - \varepsilon) \gamma_i + \sum_{l \neq i} (p_l - p'_l) \gamma_l \geq 0, \end{aligned}$$

где $0 < \varepsilon < p_i - p'_i$, $\gamma_i \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} t'_i(k)/\|t'(k)\| \geq 0$. Полученное противоречие устанавливает, что множество P_k есть точная верхняя грань множества всех нижних характеристических векторов решений линейной системы Пфаффа (1), начинающихся при $t = t_0$ на подпространстве $\Pi_k \subset R^n$. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть непрерывная поверхность G пространства R^m является множеством нижних характеристических векторов каждого из решений системы (1), образующих при $t = t_0$ подмножество $\Pi_G \subset \Pi_k \subset R^n$, поло-

жительной k -меры Лебега. Тогда G является точной верхней границей нижнегого характеристического множества всех решений, начинающихся на подпространстве Π_k при $t = t_0$.

Следствие 3. Нижнее характеристическое множество $P(A) \subset R^m$ линейной вполне интегрируемой системы Пфаффа (1) с ограниченными непрерывно-дифференцируемыми матрицами коэффициентов $A_i(t)$ замкнуто сверху.

Следствие 4. Почти все (в смысле n -меры) решения $x(t)$ линейной вполне интегрируемой системы Пфаффа (1) имеют нижние характеристические множества, совпадающие с точной верхней границей нижнего характеристического множества $P(A)$ этой системы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гайшун, И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И. В. Гайшун. – Минск, 1983. – 272 с.
2. Гайшун, И. В. Линейные уравнения в полных дифференциалах / И. В. Гайшун. – Минск, 1989. – 254 с.
3. Грудо, Э. И. Характеристические векторы и множества функций двух переменных и их основные свойства / Э. И. Грудо // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12. – № 12. – С. 2115–2128.
4. Изобов, Н. А. О существовании линейных систем Пфаффа с множеством нижних характеристических векторов положительной плоской меры / Н. А. Изобов // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 12. – С. 1623–1630.
5. Изобов, Н. А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы / Н. А. Изобов // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 4. – С. 469–477.
6. Изобов, Н. А. О мере множества решений линейной системы с наибольшим нижним показателем / Н. А. Изобов // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2168–2170.
7. Изобов, Н. А. О мере множества решений линейной системы Пфаффа с совпадающими нижними характеристическими множествами / Н. А. Изобов, А. С. Платонов // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 1599–1606.

Поступила в редакцию 27.02.2015 г.

Контакты: alexpltn@mail.ru (Платонов Александр Сергеевич)

Izobov N.A., Platonov A.S., Philiptsov A.V. THE MEASURE OF SOLUTIONS OF PFAFFIAN LINEAR SYSTEM WITH M-DIMENSIONAL TIME HAVING PAIRED DIFFERENT LOWER CHARACTERISTICS.

The authors establish the feasibility of m -dimensional characteristics and lower characteristic vectors for the m -dimensional analogue of the arithmetic time sequence. It is proved that almost all (in the sense of n -Lebesgue measure) solutions of a linear quite integrable Pfaffian system with m -dimensional time ($m \leq n$) have lower characteristic sets coinciding with the least upper boundary of the lower characteristic set of this system.

Key word: Linear Pfaff System, lower characteristic set, least upper boundary, Lebesgue measure.

УДК 511.42

ЗНАЧЕНИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОЛИНОМОВ

Н. В. Бударина

ассистент кафедры математики

Дублинский институт технологий, г. Дублин, Ирландия

В. И. Берник

доктор физико-математических наук, профессор

Белорусский государственный университет

Х. О'Доннелл

заведующий кафедрой математики

Дублинский институт технологий, г. Дублин, Ирландия

В известной лемме А.О. Гельфонда утверждается, что если в трансцендентной точке x целочисленный многочлен $P(x)$ степени n и высоты H (максимум модулей всех коэффициентов) удовлетворяет неравенству $|P(x)| < H^{-w}$, $w > 6n$, то существует его делитель $t(x)$, равный степени неприводимого многочлена, который удовлетворяет неравенству $|t(x)| < c_1(n)H^{-w+6n}$. В работе эта лемма усиливается: $w > 2,5n$ и $|t(x)| < c_2(n)H^{-w+2,5n}$.

Ключевые слова: приводимый полином, неприводимый делитель, приближения нуля значениями полиномов, лемма Гельфонда, диофантовы приближения.

Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ – целочисленный полином степени $\deg P = n$ и высоты $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$. В любой точке $x \in \mathbb{R}$ для каждого $Q \in \mathbb{N}_{>1}$ всегда можно найти многочлен $P(x)$, $H(P) \leq Q$, такой, что

$$|P(x)| < c_1(n)Q^{-n}. \quad (1)$$

Это следует из теоремы Минковского о линейных формах [1], и может быть доказано, используя принцип ящиков Дирихле. Неравенство (1) неулучшаемо.

Так, например, $|P(\sqrt[n+1]{2})| > c_2(n)H^{-n}$ для любого полинома $P(x)$, $\deg P \leq n$, а при показателе степени w вместо n в (1) и $w > n$ мера Лебега множества $x \in \mathbb{R}$, для которых выполняется неравенство $|P(x)| < Q^{-w}$, $H(P) \leq Q$, хотя бы для

© Бударина Н.В., 2015

© Берник В.И., 2015

© О'Доннелл Х., 2015

одного $P(x)$, мала, и может быть сделана меньше любого $\varepsilon > 0$ при $Q > Q_0(\varepsilon)$ [2]. Здесь и далее все величины $c_i = c_i(n)$ зависят только от n . В [3] получено точное значение для размерности Хаусдорфа множества тех $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство $|P(x)| < H^{-w}$, $w > n$, имеет бесконечное число решений в $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, равное $(n+1)/(w+1)$. В доказательстве утверждений такого типа важную роль играет приводимость и неприводимость полиномов $P(x)$ в (1) над кольцом целых чисел. В теории трансцендентных чисел и теории диофантовых приближений [4–6] вопросы приводимости и неприводимости $P(x)$ также играют большую роль. Приведем одну лемму Гельфонда.

Лемма 1. (Гельфонд [7], стр. 183). *Пусть x_1 – трансцендентное число, и многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \leq n$, удовлетворяет неравенству*

$$|P(x_1)| < Q^{-v}. \quad (2)$$

Тогда при $v > 6n$ существует делитель $d(x)$ полинома $P(x)$, $\deg d \leq n$, $H(d) < c_3 Q$, представляющий степень неприводимого над кольцом целых чисел полинома, удовлетворяющий неравенству

$$|d(x_1)| < c_4(n)Q^{-v+3n}. \quad (3)$$

Лемма Гельфонда была усиlena и обобщена в работе [3]. Неравенство (2) в [3] рассматривалось уже для точек x_1 из некоторого интервала $I \subset \mathbb{R}$, величина показателя степени v в (2) уменьшена до $v > 3n$, а неравенство (3) заменено на неравенство

$$|d(x_1)| < c_5(n)Q^{-v+2n}. \quad (4)$$

Недостатками обоих результатов, не позволяющими доказать ряд известных предположений [2; 6], являются слишком большие значения v , при которых они выполняются. Ниже мы предложим метод, который позволяет уменьшить v до $v > 2,5n - 1$. Возможно, метод позволит довести границу до $v > 2n - 2$, однако это требует весьма сложных и длинных вычислений.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 2$. Существует делитель полинома $P(x)$, $H(P) \leq Q$, в (2) полином $d(x)$, $\deg d \leq n$, $H(d) < c_6 Q$, представляющий степень неприводимого многочлена, который при $v > 2,5n - 1$ удовлетворяет неравенству*

$$|d(x_1)| < c_7(n)Q^{-v+1,5n-1}. \quad (5)$$

Вначале приведем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2. *Пусть полиномы $P_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $i = 1, 2$, не имеют общих корней и в трансцендентной точке $x_1 \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенствам*

$$\begin{aligned} |P_1(x_1)| &< Q^{-v_1}, \quad v_1 > 0, \quad H(P_1) \leq Q^{\lambda_1}, \deg P_1 = k, \\ |P_2(x_1)| &< Q^{-v_2}, \quad v_2 > 0, \quad H(P_2) \leq Q^{\lambda_2}, \deg P_2 = m. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$

$$k\lambda_2 + m\lambda_1 + \delta \geq \min(v_1, v_2). \quad (7)$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы Гельфонда [7].

Лемма 3. Пусть $P(x) = t_1(x)t_2(x)$ – разложение приводимого многочлена на множители. Тогда

$$c_8 H(t_1(x))H(t_2(x)) < H(P(x)) < c_9 H(t_1(x))H(t_2(x)).$$

Лемма 3 – известная лемма о почти мультипликативности высоты многочлена. Доказательство ее можно найти в [2; 7]. Заметим, что правое неравенство доказывается просто. Трудность при доказательстве левого неравенства состоит в нахождении неулучшаемого значения c_8 .

Лемма 4. В области

$$D = \{(\lambda_1, n_1) : 0 \leq \lambda_1 \leq 1; 1 \leq n_1 \leq n-1\}$$

справедливо неравенство

$$f(\lambda_1, n_1) = \lambda_1(n - n_1) + (1 - \lambda_1)n_1 \leq n - 1$$

при $n \geq 2$.

Доказательство. В области D лежит точка экстремума функции $f(\lambda_1, n_1)$.

Это точка $(\lambda_1 = 1/2, n_1 = n/2)$, в которой $f(\lambda_1, n_1) = n/2$. На границе $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_1 = 1$, и $n_1 = 1$ или $n_1 = n-1$ находим две точки максимума $(\lambda_1 = 0, n_1 = n-1)$ и $(\lambda_1 = 1, n_1 = 1)$ при $n \geq 2$, в которых $f(\lambda_1, n_1) = n-1$.

Лемма 5. Пусть полином $P(x) = t_1(x)t_2(x)$, где $t_1(x)$ и $t_2(x)$ – неприводимые полиномы, или степени неприводимых полиномов. Тогда при выполнении $|P(x)| < Q^{-v}$, $H(P) \leq Q$ и $v > 2n-2$ один из полиномов $t_i(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|t_i(x)| < c_{10}(n)Q^{-v+n-1}. \quad (8)$$

Доказательство леммы 5. Лемма 5 – это частный случай теоремы 1, когда количество сомножителей у $P(x)$ равно двум. В этом случае условие для v и неравенство (8) сильнее чем в теореме 1. Предположим $|t_1(x)| \leq |t_2(x)|$ и $|t_i(x)| = Q^{-v_i}$, $i = 1, 2$. Тогда при выполнении $|P(x)| < Q^{-v}$ имеем

$$v_1 \geq v_2 = v - v_1, \quad v_1 \geq v/2. \quad (9)$$

Если $v_2 > n-1$, то в (7)

$$\min(v_1, v_2) \geq v_2 > n-1. \quad (10)$$

Из леммы 3 имеем $\deg t_1 + \deg t_2 = n$, $\deg t_1 = n_1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Перепишем левую часть неравенства (7) в новых обозначениях:

$$(1 - \lambda_1)n_1 + \lambda_1(n - n_1) + \delta \geq \min(v_1, v_2) > n - 1.$$

Левая часть этого неравенства по лемме 4 не превосходит $n - 1 + \delta$ и, значит, оно противоречиво для любого $\delta < \varepsilon$, где $\min(v_1, v_2) = n - 1 + \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$. Поэтому должно выполняться неравенство $v_2 \leq n - 1$ и

$$|t_1(x)| < c_{11}Q^{-v+n-1}. \quad (11)$$

Неравенство (11) и доказывает лемму 5.

Доказательство теоремы 1.

Пусть

$$P(x) = t_1(x)t_2(x)\cdots t_j(x)\cdots t_s(x), \quad (12)$$

где $s \geq 3$, так как при $s = 2$ теорема 1 доказана. В (12) все полиномы $t_i(x)$ – степени неприводимых многочленов. Будем считать, что полиномы $t_i(x)$ упорядочены по величине $|t_i(x)|$ в точке $x = x_1$:

$$|t_1(x_1)| \leq |t_2(x_1)| \leq \cdots \leq |t_j(x_1)| \leq \cdots \leq |t_s(x_1)|. \quad (13)$$

В [5] доказано, что в таком случае в (12) существует $j < s/2$, что

$$|t_1(x_1)\cdots t_{j-1}(x_1)| > |t_j(x_1)\cdots t_s(x_1)|, \quad (14)$$

$$|t_1(x_1)\cdots t_j(x_1)| < |t_{j+1}(x_1)\cdots t_s(x_1)|. \quad (15)$$

Обозначим $t_1(x)\cdots t_{j-1}(x) = k_1(x)$, $t_{j+1}(x)\cdots t_s(x) = k_2(x)$. Если $|k_2(x_1)| < Q^{-n+1}$

или $|k_1(x_1)| < Q^{-n+1}$, то как в лемме 5 придет к противоречию. Поэтому

$|k_2(x_1)| \geq Q^{-n+1}$, $|k_1(x_1)| \geq Q^{-n+1}$ и

$$|t_j(x)| < c_{12}(n)Q^{-v+2n-2}. \quad (16)$$

Но показатель степени в (16) должен быть меньше $-n + 1$, что приводит к неравенству $v > 3n - 3$, что при больших n хуже, чем в теореме 1. Поэтому предположим, что

$$|k_1(x_1)| = Q^{-u_1}, |k_2(x_1)| = Q^{-u_2}, \frac{n}{2} \leq u_1 \leq n - 1, \frac{n}{2} \leq u_2 \leq n - 1. \quad (17)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \deg k_1 &= n_1, \deg(k_1 k_2) = l, \deg k_2 = l - n_1, \\ H(k_1) &= Q^{\lambda_1}, H(k_1 k_2) = Q^\lambda, H(k_2) \ll Q^{\lambda-\lambda_1}, \\ D_1 &= \{2 \leq l \leq n - 1, 0 \leq \lambda \leq 1\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Оценка $l \geq 2$ следует из того, что l – это степень произведения двух многочленов. Определим функцию

$$f_1(\lambda_1, n_1) = \lambda_1(l - n_1) + (\lambda - \lambda_1)n_1.$$

Ее максимальное значение равно

$$\max_{D_1} f_1(\lambda_1, n_1) = \lambda(l-1) \leq l-1.$$

Пусть $u_2 \geq u_1$. Тогда

$$\min(u_1, u_2) \geq u_1,$$

и если $u_1 > l-1$, то как в лемме 5 получаем противоречие. Поэтому далее по (17)

$$n/2+1 < 1+u_1 \leq l. \quad (19)$$

Из неравенства

$$P(x) < Q^{-v}, |k_1(x)| > c_{13}Q^{-n+1}, |k_2(x)| > c_{14}Q^{-n+1}$$

при $v > 2,5n-1$ получаем

$$|t_j(x)| < c_{15}Q^{-v+2n-2} < c_{16}Q^{-0,5n-1}. \quad (20)$$

Сейчас рассмотрим три результата

$$R_1 = R_1(k_1, k_2), \quad R_2 = R_2(k_1, t_j), \quad R_3 = R_3(k_2, t_j).$$

Каждый из них не равен нулю, и поэтому по модулю не меньше 1. Запишем для всех трех пар многочленов неравенства, аналогичные (7), (10) в обозначениях (18). Получим, учитывая (17) и (20),

$$\min(u_1, u_2) < \lambda_1(l - n_1) + (\lambda - \lambda_1)n_1 = f_1(\lambda_1, n_1), \quad (21)$$

$$\min(u_1, n/2+1) < \lambda_1(n-l) + (1-\lambda)n_1 = f_2(\lambda_1, n_1), \quad (22)$$

$$\min(u_2, n/2+1) < (\lambda - \lambda_1)(n-l) + (1-\lambda)(l - n_1) = f_3(\lambda_1, n_1). \quad (23)$$

Покажем, что хотя бы одно из неравенств (21)–(23) противоречиво. Из (17) и (20) следует, что левые части всех неравенств (21)–(23) не менее $n/2$. Максимальное значение функции $f_1 = f_1(\lambda_1, n_1)$ при фиксированных λ и l по лемме 4 равно $\lambda(l-1)$. Получаем

$$n/2 < \lambda(l-1). \quad (24)$$

Так как $\lambda \leq 1$, $l-1 \leq n-2$, то из (24) имеем

$$\lambda \geq \frac{n}{2(n-2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n-2}, \quad l \geq \frac{n}{2} + 1. \quad (25)$$

Пусть $D_2 = \{(\lambda, l) : 1/2 + 1/(n-2) \leq \lambda \leq 1, n/2 + 1 \leq l \leq n-1\}$. Убедимся, что хотя бы одно из неравенств (22), (23) при выполнении условий (25)

противоречиво. Если они выполняются оба, то сложим (22) и (23). Учитывая, что левые части неравенств (22)–(23) не менее $n/2$, имеем

$$n < \lambda(n-l) + l(1-\lambda) = f_4(\lambda, l). \quad (26)$$

Максимальное значение функции $f_4 = f_4(\lambda, l)$ в области D_2 равно $n/2 - 2/(n-2)$ при $n \geq 4$ и 1 при $n = 3$. Так как $P(x)$ разлагается на произведение трех многочленов, то $n \geq 3$ и правая часть неравенства (26) не более $n/2 - 2/(n-2)$ при $n \geq 4$ и не более 1 при $n = 3$. Неравенство (26) противоречиво, а вместе с ним противоречиво и хотя бы одно из неравенств (22), (23). Это означает, что пара чисел (u_1, u_2) не может удовлетворять (17). Пусть тогда, например, $u_1 < n/2$. Тогда из $|P(x_1)| < Q^{-v}$, $|k_1(x_1)| > c_{17}Q^{-n/2}$, $|k_2(x_1)| < c_{18}Q^{-n+1}$ получаем $|t_j(x_1)| < c_{19}Q^{-v+3n/2-1}$, а из (13) –

$$|t_1(x_1)| < c_{20}Q^{-v+3n/2-1},$$

что завершает доказательство теоремы 1.

Настоящая работа частично финансировалась фондом РФФИ (грант 14-01-90002 Бел.) и фондом БРФФИ (грант Ф14Р-034).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Касселс, Дж. В.С.* Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В.С. Касселс. – Москва, 1961.
2. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967.
3. *Берник, В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник. – Acta Arith. 42 (1983), no. 3, 219–253.
4. *Baker, A.* Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. Schmidt, Proc. London Math. – Soc. 21 (1970), no. 3, 1–11.
5. *Beresnevich, V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich, Acta Arith. 90 (1999), no. 2, 97–112.
6. *Берник, В. И.* Метрическая теорема о приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник. – Изв. АН СССР. – Сер. матем. 44(180), no. 1, 24–45.
7. *Гельфонд, А. О.* Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – Москва, 1952.

Поступила в редакцию 10.06.2015 г.

Контакты: bernik@im.bas-net.by (Берник Василий Иванович)

Budarina N.V., Bernik V.I., O'Donnell H. THE VALUES OF THE IRREDUCIBLE DIVISORS OF INTEGER POLYNOMIALS.

In this paper the authors improve Gelfond's lemma from the theory of transcendental numbers on order of approximation of zero by irreducible divisor of reducible polynomial.

Key words: reducible polynomial, irreducible divisor, approximations of zero by values of polynomials, Gelfond's lemma, diophantine approximations.

УДК 517.937

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

И. В. Марченко

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Н. П. Морозов

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В данной работе предлагается новый подход при изучении линейных стационарных систем на плоскости в курсе дифференциальных уравнений [1–3]. Методика основана на специальном представлении полиномиальных систем двух уравнений, полученном в [4].

Ключевые слова: Линейная стационарная система, общее решение, форма Коши, состояние равновесия.

Основные вопросы, рассматриваемые при изучении линейной системы, это:

- 1) приведение системы к каноническому виду;
- 2) построение общего решения;
- 3) качественное изучение системы (классификация состояний равновесия).

Рассмотрим перечисленные вопросы в указанной последовательности.

1. Приведение линейной системы к каноническому виду

Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{10}x + a_{01}y, \\ \dot{y} = b_{10}x + b_{01}y. \end{cases} \quad (1)$$

Положив $\sigma_{00} = a_{10} + b_{01}$, $\mu_{00} = a_{10} - b_{01}$, представим систему в виде (см. [4])

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\sigma_{00}}{2}x, \\ \dot{y} = -\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\sigma_{00}}{2}y, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(-b_{10}x^2 + \mu_{00}xy + a_{01}y^2) \quad (3)$$

есть естественный гамильтониан для линейной системы (1). Введем следующие обозначения

© Марченко И.В., 2015

© Морозов Н.П., 2015

$$\Delta_h = -\frac{1}{4}\mu_{00}^2 - a_{01}b_{10}, s = \operatorname{sign} \Delta_h.$$

Как показано в [4], вид системы (2) инвариантен относительно линейных невырожденных преобразований

$$x = \alpha u + \beta v, y = \gamma u + \delta v. \quad (4)$$

А именно, после преобразования к новым переменным u, v полученная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial v} + \frac{\sigma_{00}}{2}u, \\ \dot{v} = -\frac{\partial \bar{h}}{\partial u} + \frac{\sigma_{00}}{2}v \end{cases} \quad (5)$$

системы (2) с гамильтонианом

$$\bar{h}(u, v) = \frac{1}{\Delta} h(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v), \quad (6)$$

где $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ – определитель преобразования. Это свойство позволяет осуществлять линейные преобразования системы (2) путем приведения гамильтониана h к новым переменным по формуле (6) с последующей записью системы в виде (5).

Будем рассматривать три канонические формы гамильтониана $\bar{h}(u, v)$ после преобразования

$$\bar{h}(u, v) = \frac{a}{2}(u^2 + sv^2), \text{ где } a \neq 0, s \in \{1; -1; 0\}.$$

Пусть сначала $\Delta_h \neq 0$ ($s = \pm 1$). Найдем линейные преобразования (4), приводящие гамильтониан к первому каноническому виду. Выразим коэффициенты гамильтониана (6) через коэффициенты линейного преобразования и исходного гамильтониана (3). Из равенства (6) после несложных преобразований находим

$$\bar{h}(u, v) = \frac{1}{\Delta} (h(\alpha, \gamma)u^2 + (\beta \frac{\partial h}{\partial x}(\alpha, \gamma) + \delta \frac{\partial h}{\partial y}(\alpha, \gamma))uv + h(\beta, \delta)v^2). \quad (7)$$

Чтобы гамильтониан (7) принял вид канонической формы ($s = \pm 1$), потребуем выполнения условий:

1) при $\Delta_h > 0$ ($s = 1$) пусть

$$h(\alpha, \gamma) = h(\beta, \delta), \beta = k \frac{\partial h}{\partial y}(\alpha, \gamma), \delta = -k \frac{\partial h}{\partial x}(\alpha, \gamma), \quad (8)$$

2) при $\Delta_h < 0$ ($s = -1$) пусть

$$h(\alpha, \gamma) = -h(\beta, \delta), \beta = k \frac{\partial h}{\partial y}(\alpha, \gamma), \delta = -k \frac{\partial h}{\partial x}(\alpha, \gamma). \quad (9)$$

Здесь k пока произвольный параметр.

Из последних двух равенств (8) (или (9)) имеем $\beta = k(\frac{\mu_{00}}{2}\alpha + a_{01}\gamma)$, $\delta = k(b_{10}\alpha - \frac{\mu_{00}}{2}\gamma)$. Найдем коэффициент $h(\beta, \delta)$. Поскольку β и δ выражаются линейно через α и γ , воспользуемся для вычислений соотношением (7), полагая в нем $u = \alpha, v = \gamma, \alpha = k\frac{\mu_{00}}{2}, \beta = k a_{01}, \gamma = kb_{10}, \delta = -k\frac{\mu_{00}}{2}$.

Будем иметь

$$h(\beta, \delta) = k^2 \left(h\left(\frac{\mu_{00}}{2}, b_{10}\right) \alpha^2 + \left(a_{01} \frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\mu_{00}}{2}, b_{10}\right) - \frac{\mu_{00}}{2} \frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{\mu_{00}}{2}, b_{10}\right) \right) \alpha\gamma + \right. \\ \left. + h\left(a_{01}, -\frac{\mu_{00}}{2}\right) \gamma^2 \right).$$

После элементарных вычислений находим

$$h\left(\frac{\mu_{00}}{2}, b_{10}\right) = -\frac{1}{2}b_{10}\Delta_h, a_{01} \frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\mu_{00}}{2}, b_{10}\right) - \frac{\mu_{00}}{2} \frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{\mu_{00}}{2}, b_{10}\right) = \frac{\mu_{00}}{2}\Delta_h, \\ h\left(a_{01}, -\frac{\mu_{00}}{2}\right) = \frac{1}{2}a_{01}\Delta_h. \text{ Окончательно имеем } h(\beta, \delta) = k^2\Delta_h h(\alpha, \gamma).$$

При $\Delta_h > 0$ и $h(\alpha, \gamma) \neq 0$ из первого равенства (8) получим $k^2 = \frac{1}{\Delta_h}$.

При $\Delta_h < 0$ и $h(\alpha, \gamma) \neq 0$ из первого равенства (9) получим $k^2 = -\frac{1}{\Delta_h}$. Та-

ким образом, условия (8), (9) выполнены при $k = \pm \frac{1}{\sqrt{|\Delta_h|}}$. Искомое линей-
ное преобразование имеет вид

$$x = \alpha u + k\left(\frac{\mu_{00}}{2}\alpha + a_{01}\gamma\right)v, y = \gamma u + k\left(b_{10}\alpha - \frac{\mu_{00}}{2}\gamma\right)v, \quad (10)$$

где определитель преобразования $\Delta = -2kh(\alpha, \gamma)$ отличен от нуля при любых α и γ таких, что $h(\alpha, \gamma) \neq 0$.

Рассмотрим теперь случай $\Delta_h = 0$ или $\frac{1}{4}\mu_{00}^2 + a_{01}b_{10} = 0$. Для сокраще-
ния записей введем следующие обозначения.

$$s_1 = \begin{cases} \operatorname{sign} b_{10}, & \text{если } b_{10} \neq 0, \\ -\operatorname{sign} a_{01}, & \text{если } a_{01} \neq 0, \end{cases} s_2 = \operatorname{sign} \mu_{00} = \operatorname{sign}(a_{10} - b_{01}).$$

Из условия $\Delta_h = 0$ следует, что $\frac{\mu_{00}}{2} = s_2 \sqrt{|b_{10}a_{01}|}, |a_{01}| + |b_{10}| \neq 0$,
или $a_{01} = b_{10} = \mu_{00} = 0$.

Пусть сначала $b_{10} a_{01} \leq 0$, $|a_{01}| + |b_{10}| \neq 0$ и $\frac{\mu_{00}}{2} = s_2 \sqrt{|b_{10} a_{01}|}$.

Тогда система (2) при этих обозначениях принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|a_{01}|} (s_2 \sqrt{|b_{10}|} x - s_1 \sqrt{|a_{01}|} y) + \frac{\sigma_{00}}{2} x, \\ \dot{y} = s_2 s_1 \sqrt{|b_{10}|} (s_2 \sqrt{|b_{10}|} x - s_1 \sqrt{|a_{01}|} y) + \frac{\sigma_{00}}{2} y, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|a_{01}|} p(x, y) + \frac{\sigma_{00}}{2} x, \\ \dot{y} = s_1 s_2 \sqrt{|b_{10}|} p(x, y) + \frac{\sigma_{00}}{2} y, \end{cases} \quad (11)$$

где $p(x, y) = s_2 \sqrt{|b_{10}|} x - s_1 \sqrt{|a_{01}|} y$, а гамильтониан

$$h(x, y) = -\frac{s_1}{2} p^2(x, y). \quad (12)$$

Найдем линейные преобразования (4), приводящие гамильтониан к третьей канонической форме ($s = 0$). Из условий

$$\beta = a \frac{\partial h}{\partial y}(\alpha, \gamma), \delta = -a \frac{\partial h}{\partial x}(\alpha, \gamma), h(\beta, \delta) = 0$$

получаем $\beta = ap(\alpha, \gamma) \sqrt{|a_{01}|}$, $\delta = as_2 s_1 p(\alpha, \gamma) \sqrt{|b_{10}|}$, $h(\beta, \delta) = 0$ при любых $a \neq 0$.

Искомое преобразование имеет вид

$$x = \alpha u + ap(\alpha, \gamma) \sqrt{|a_{01}|} v, y = \gamma u + as_2 s_1 p(\alpha, \gamma) \sqrt{|b_{10}|} v. \quad (13)$$

Определитель преобразования

$$\Delta = as_2 s_1 p(\alpha, \gamma) \sqrt{|b_{10}|} \alpha - ap(\alpha, \gamma) \sqrt{|a_{01}|} \gamma = s_1 ap^2 = -2ah(\alpha, \gamma) \neq 0$$

при любых α, γ , таких, что $h(\alpha, \gamma) \neq 0$ и $a \neq 0$.

Таким образом, с помощью двухпараметрического семейства невырожденных при $h(\alpha, \gamma) \neq 0$ и $\Delta_h \neq 0$ линейных преобразований (10) или преобразований (13) при $h(\alpha, \gamma) \neq 0$ и $\Delta_h = 0$ гамильтониан (3) приводится к канонической форме

$$\bar{h}(u, v) = -\frac{1}{2k} (u^2 + sv^2), \text{ а система (2) (в соответствии с системой (5)) к виду}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{1}{k} sv + \frac{\sigma_{00}}{2} u, \\ \dot{v} = \frac{1}{k} u + \frac{\sigma_{00}}{2} v, \end{cases} \quad (14)$$

где $k = -\frac{1}{\omega}$, $\omega = \sqrt{|\Delta_h|}$, если $s = \pm 1$, и $k = -a$, если $s = 0$, при этом a может быть любым отличным от нуля числом ($s = \text{sign } \Delta_h$).

Если $a_{01} = 0$, $\mu_{00} = 0$, $b_{10} = 0$, то система (2) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\sigma_{00}}{2}x, \\ \dot{y} = \frac{\sigma_{00}}{2}y. \end{cases}$$

Для завершения исследования осталось рассмотреть случай равенства нулю определителя $\Delta = a_{10}b_{01} - b_{10}a_{01}$ системы (1). Это означает, что

$$\Delta = \frac{\sigma_{00}^2}{4} + \Delta_h = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\sigma_{00}}{2} = s_3\omega, \quad \text{где } s_3 = \text{sign } \sigma_{00} = \text{sign}(a_{10} + b_{01}).$$

Так как $\Delta_h < 0$, то линейным преобразованием (10) система (2) приводится к

виду (14). Полагая $\frac{\sigma_{00}}{2} = s_3\omega$ и $k = -\frac{1}{\omega}$ в (14), получим

$$\begin{cases} \dot{u} = s_3\omega(u - s_3v), \\ \dot{v} = -\omega(u - s_3v). \end{cases} \quad (15)$$

2. Общее решение линейной системы.

Положив

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\mu_{00}}{2} & a_{01} \\ b_{10} & -\frac{\mu_{00}}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

запишем систему (2) в векторном виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} = H \boldsymbol{x} + \frac{\sigma_{00}}{2} \boldsymbol{x}. \quad (16)$$

Пусть $\Delta_h = \det H = -\frac{1}{4}\mu_{00}^2 - a_{01}b_{10} \neq 0$, $\omega = \sqrt{|\Delta_h|}$, $k = -\frac{1}{\omega}$. Из предыдущего пункта следует, что линейным преобразованием (10) $\boldsymbol{x} = B(\alpha, \gamma)\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, с матрицей

$$B(\alpha, \gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & -\frac{1}{\omega} \left(\frac{\mu_{00}}{2} \alpha + a_{01} \gamma \right) \\ \gamma & -\frac{1}{\omega} \left(b_{10} \alpha - \frac{\mu_{00}}{2} \gamma \right) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

система (16) приводится к виду (14). Аналогично при $\Delta_h = 0$ преобразованием (13) с матрицей преобразования

$$B(\alpha, \gamma) = \begin{pmatrix} \alpha & ap(\alpha, \gamma)\sqrt{|a_{01}|} \\ \gamma & as_2s_1p(\alpha, \gamma)\sqrt{|b_{10}|} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $p(\alpha, \gamma) = s_2\sqrt{|b_{10}|}\alpha - s_1\sqrt{|a_{01}|}\gamma$, система приводится к виду (14).

Проинтегрируем систему (16). Пусть сначала $\Delta_h > 0$ ($s = 1$). Очевидно,

что $u = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} \cos wt$, $v = -e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} \sin wt$ есть решение системы (14), удовлетворяющее начальному условию $u(0) = 1$, $v(0) = 0$. Тогда, с учетом соотношения $\mathbf{x} = B(\alpha, \gamma)\mathbf{u}$, решение системы (16) имеет вид

$$\mathbf{x} = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} B(\alpha, \gamma) \begin{pmatrix} \cos wt \\ -\sin wt \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица $B(\alpha, \gamma)$ определена равенством (17), а решение удовлетворяет начальному условию $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$. Как отмечалось ранее, элементы α, γ в матрице B принимают произвольные значения. Заменяя α, γ в матрице B на начальные данные x_0 и y_0 , получим общее решение линейной системы в форме Коши

$$\mathbf{x} = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} B(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \cos wt \\ -\sin wt \end{pmatrix},$$

где матрица $B(\alpha, \gamma)$ определена равенством (17).

Пусть теперь $\Delta_h < 0$. Очевидно, что $u = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} \operatorname{ch} wt$, $v = -e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} \operatorname{sh} wt$ есть решение системы (14), удовлетворяющее начальному условию $u(0) = 1$, $v(0) = 0$. Аналогично тому, как это делалось в предыдущем случае, приходим к общему решению системы (16) вида

$$\mathbf{x} = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} B(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \operatorname{ch} wt \\ -\operatorname{sh} wt \end{pmatrix},$$

где матрица $B(\alpha, \gamma)$ определена равенством (17).

Замечание. Решение задачи Коши $u(0) = 1$, $v(0) = 0$ для приведенной системы (11) как при $\Delta_h > 0$, так и при $\Delta_h < 0$ можно записать следующим образом

$$u = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} \cos \sqrt{s}wt, v = -e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} \sin \sqrt{s}wt,$$

с учетом связи $\operatorname{ch} \theta = \cos i\theta$, $\operatorname{sh} \theta = i \sin i\theta$. Тогда в обоих случаях общее решение системы (16) выражается одной формулой

$$\mathbf{x} = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} B(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \cos \sqrt{s}\omega t \\ -\sqrt{s} \sin \sqrt{s}\omega t \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $\Delta_h = 0$ и $b_{10} a_{01} < 0$. В этом случае система функций $u = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}$, $v = -\frac{t}{a} e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t}$ есть решение системы (11), удовлетворяющее начальному условию $u(0) = 1$, $v(0) = 0$, а общее решение системы (14) имеет вид

$$\mathbf{x} = e^{\frac{\sigma_{00}}{2}t} B(x_0, y_0) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{t}{a} \end{pmatrix},$$

где матрица $B(\alpha, \gamma)$ определена равенством (18).

Если $\Delta = \frac{\sigma_{00}^2}{4} + \Delta_h = 0$ или, что тоже самое, $\frac{\sigma_{00}}{2} = s_3 \omega$, то система функций $u = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\omega t})$, $v = -\frac{1}{2}(1 - e^{-2\omega t})$ являются решением задачи Коши $u(0) = 1$, $v(0) = 0$ для приведенной системы (14).

Решение системы (16) в этом случае имеет вид

$$\mathbf{x} = B(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{s_3 \omega t}) \\ \frac{s_3}{2}(1 - e^{s_3 \omega t}) \end{pmatrix},$$

где матрица $B(\alpha, \gamma)$ определена равенством (17).

Замечание. При приведении линейной системы к каноническому виду предполагалось, что $h(\alpha, \gamma) \neq 0$. Легко убедиться, что при интегрировании системы (16) допускается равенство $h(x_0, y_0) = 0$.

3. Качественное исследование линейной системы

Приведем качественный анализ линейной системы в зависимости от двух параметров Δ_h и σ_{00} в сравнении с гамильтоновой системой, соответствующей $\sigma_{00} = 0$.

Лемма. Если:

1) $\Delta_h > 0$, то точка $O(0,0)$ для гамильтоновой системы центр, для полной – устойчивый фокус при $\sigma_{00} < 0$ и неустойчивый фокус при $\sigma_{00} > 0$;

2) $-\frac{\sigma_{00}^2}{4} < \Delta_h < 0$, то точка $O(0,0)$ для гамильтоновой системы седло, для полной – устойчивый узел при $\sigma_{00} < 0$ и неустойчивый при $\sigma_{00} > 0$. При этом

сепаратрисы седла $b_{10}x + (\omega - \frac{\mu_{00}}{2})y = 0$, $(\omega - \frac{\mu_{00}}{2})x - a_{01}y = 0$ являются траекториями полной системы;

3) $\Delta_h < -\frac{\sigma_{00}^2}{4}$, то точка $O(0,0)$ для гамильтоновой системы седло, для полной седло с теми же сепаратрисами $b_{10}x + (\omega - \frac{\mu_{00}}{2})y = 0$, $(\omega - \frac{\mu_{00}}{2})x - a_{01}y = 0$;

4) $\Delta_h = 0$, то при

a) $a_{01}b_{10} \leq 0$, $|a_{01}| + |b_{10}| \neq 0$ прямая $s_2\sqrt{|b_{10}|}x - s_1\sqrt{|a_{01}|}y = 0$ для гамильтоновой системы будет прямой состояний равновесия, а прямые $s_2\sqrt{|b_{10}|}x - s_1\sqrt{|a_{01}|}y = C$ ($C \neq 0$) – траекториями. Для полной системы точка $O(0,0)$ – вырожденный узел, устойчивый при $\sigma_{00} < 0$ и неустойчивый при $\sigma_{00} > 0$, при этом прямая $s_2\sqrt{|b_{10}|}x - s_1\sqrt{|a_{01}|}y = 0$ является траекторией полной системы;

b) $a_{01} = b_{10} = \mu_{00} = 0$, для гамильтоновой системы плоскость xOy есть плоскость состояний равновесия. Для полной системы точка $O(0,0)$ – дикритический узел, устойчивый при $\sigma_{00} < 0$ и неустойчивый при $\sigma_{00} > 0$;

5) $\Delta_h = -\frac{\sigma_{00}^2}{4} \neq 0$, то точка $O(0,0)$ – для гамильтоновой системы седло с сепаратрисами $b_{10}x + (\omega - \frac{\mu_{00}}{2})y = 0$, $(\omega - \frac{\mu_{00}}{2})x - a_{01}y = 0$; для полной – одна из этих прямых является прямой состояний равновесия, а траектории полной системы параллельны другой из этих прямых.

Убедимся, что прямые равновесия и сепаратрисы седла гамильтоновой системы являются также или прямыми равновесия или состоят из траекторий полной системы в случае узла или седла.

Естественный гамильтониан линейной системы имеет вид

$$h = \frac{1}{2}(-b_{10}x^2 + \mu_{00}xy + a_{01}y^2).$$

Производная гамильтониана в силу полной системы $\frac{dh}{dt} = \sigma_{00}h$. Отсюда получаем первый интеграл линейной системы

$$h(x, y) = h(x_0, y_0)e^{t\sigma_{00}}.$$

Сепаратрисы седла (или прямые равновесия) гамильтоновой системы находятся из равенства $h(x, y) = 0$. Из первого интеграла видим, что эти же прямые являются либо траекториями, либо прямыми равновесия и для полной линейной системы.

Остальные утверждения следуют из анализа характеристического уравнения гамильтоновой системы $\lambda^2 + \Delta_h = 0$ и характеристического уравнения

$(\lambda - \frac{\sigma_{00}}{2})^2 + \Delta_h = 0$ полной системы, либо из непосредственного исследования приведенной системы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Степанов, В. В.* Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 436 с.
2. *Матвеев, Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – М. : Высшая школа, 1967. – 565 с.
3. *Черкас, Л. А.* Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. М. Булгаков. – Гродно : ГрГУ им. Я. Купалы, 2013.
4. *Морозов, Н. П.* О приведении полиномиальных систем к специальному виду / Н. П. Морозов // Веснік МДУ ім Я. А. Кульшова. – 2011. – № 2(38). – С. 43–49.

Поступила в редакцию 13.05.15 г.

Контакты: vk.com/fizmat_info (Марченко Ирина Васильевна)

Marchenko I.V., Morozov N.P. NEW APPROACH TO THE STUDY OF LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS IN THE PLANE.

A new approach to the study of linear time-invariant systems in the plane in a university course of differential equations is suggested. The technique is based on a special representation of polynomial systems of two equations obtained in [4].

Key words: linear stationary system, general solution, Caushy's form, critical point.

УДК 514

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРОЕКЦИОННОМ ЧЕРТЕЖЕ

Э. Г. Кирьяцкий

габилитированный доктор наук, профессор

Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса

В. И. Матюхин

учитель-эксперт, Вильнюсская средняя школа “Сантарос”

Детально обсуждается с привлечением большого количества примеров и задач метод параллельных проекций. Основная методическая цель при использовании этого метода – развитие пространственного воображения обучаемого.

Ключевые слова: изображение, проектирование, чертеж, задача, метрические свойства, аффинные свойства.

1. Слова “дан треугольник”, “дана пирамида” и т.д. в условиях задач являются сокращениями словосочетаний “дано изображение треугольника”, “дано изображение пирамиды” и т.д.

При параллельном проектировании сохраняются (аффинные свойства) [1; 3; 4]: 1) свойство фигуры – быть точкой, прямой, плоскостью; 2) свойство фигуры – иметь пересечение; 3) деление отрезка в данном отношении; 4) свойство прямых, плоскостей, прямой и плоскости – быть параллельными; 5) свойство фигуры – быть треугольником, параллелограммом, трапецией; 6) отношение длин параллельных отрезков; 7) отношение площадей двух фигур и др.

Не сохраняются при параллельном проектировании (но сохраняются при преобразовании подобия) метрические свойства: 1) свойство прямых, плоскостей, прямой и плоскости образовывать между собой определенный угол (в частности, быть перпендикулярными); 2) отношение длин непараллельных отрезков; 3) отношение величин углов между прямыми (в частности, биссектриса при проектировании не переходит в биссектрису); 4) отношение величин двугранных углов; 5) отношение величин углов между прямыми и плоскостями и др.

На построенном по правилам параллельного проектирования изображении не отражаются указанные в условии задачи метрические данные (размеры). Дополняя чертеж метрическими условиями, мы, как говорят, расходуем параметры. Например, если параллелограмм ABCD является изображением ромба и мы пишем: “ABCD – ромб”, то тем самым мы на изображение налагаем одно метрическое условие, то есть расходуем один параметр.

Построив же на чертеже параллелограмм и добавив при этом, что дано изображение квадрата, мы расходуем два параметра. Если изображение обладает только

аффинными свойствами оригинала, то параметры не расходуются, так как аффинные свойства оригинала при параллельном проектировании сохраняются.

Если при выполнении проекционного чертежа на изображение плоской фигуры израсходованы два параметра, то тем самым однозначно определено изображение каждой точки, лежащей в плоскости этой фигуры, и дальнейшие метрические построения в плоскости этой фигуры, которые могут потребоваться для решения задачи, уже нельзя выполнять произвольно.

Аналогично, если при выполнении проекционного чертежа на изображение пространственной фигуры израсходовано пять параметров, тем самым однозначно определено изображение каждой точки этой фигуры и, следовательно, метрические построения на этом чертеже уже нельзя выполнять произвольно.

Найдем в качестве примера параметрическое число изображения треугольной пирамиды, у которой в основании лежит равносторонний треугольник, а одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания и является равносторонним треугольником. Изображая два правильных треугольника произвольными треугольниками, мы на каждое изображение расходуем по два параметра. Так как плоскости этих треугольников в оригиналe перпендикулярны, нужно наложить на изображение еще одно метрическое условие, то есть израсходовать еще один параметр. Итак, параметрическое число данного изображения равно пяти, а потому никаких других метрических построений на этом изображении выполнить произвольно уже нельзя.

Подсчет параметрического числа при выполнении изображения необходим, так как в процессе решения задачи могут потребоваться дополнительные построения метрического характера, которые при наличии свободных параметров можно выполнять произвольно.

Если при построении изображения требуется израсходовать более пяти параметров, то та часть построения изображения, выполнение которой требует расхода пяти параметров, не описывается в решении, дальнейшие же необходимые построения обязательно описываются и выполняются по правилам параллельного проектирования. Если в задаче указывается, что некоторые элементы фигуры надо построить (например, сечение многогранника), то построение изображений этих элементов фигуры описывается обязательно.

При решении задач, речь в которых идет о комбинации геометрических фигур в пространстве, ввиду сложности выполнения чертежей иногда приходится прибегать к их упрощению. Изображать, например, лишь сечение фигуры (в большинстве задач на комбинацию тел вращения), изображать одну фигуру полностью, а другую – лишь частично и т.д.

При решении ряда аффинных задач стереометрии выгодно выбрать направление проектирования так, чтобы некоторые прямые изображались точками, плоскости – прямыми, а произвольные треугольники – правильными. Обоснованием такой возможности служит тот факт, что любой треугольник мы можем изобразить любым треугольником, любую треугольную пирамиду – любым полным (с диагоналями) четырехугольником. Исследование многих отношений между элементами произвольных фигур можно свести при этом к доказательству соответствующих утверждений для “удобных” фигур. Например, доказательства многих свойств треугольной пирамиды упрощается, если за ее изображение принять квадрат.

Основными задачами, которые успешно решаются методом параллельных проекций, являются:

- вычисление отношений отрезков, на которые делятся пересекающейся отрезки точкой пересечения (при этом в качестве проектирующей прямой выбирается прямая, параллельная одному из этих отрезков);
- нахождение отношений отрезков, лежащих на параллельных прямых;
- исследование взаимного расположения прямых на плоскости;
- вычисление отношений отрезков, на которые плоскость делит данный отрезок (плоскость при этом изображается прямой линией);
- доказательство компланарности двух прямых (в таких задачах за проекцию одной прямой принимается точка);
- определение отношения, в каком данная плоскость делит ребро или диагональ многогранника (секущая плоскость изображается при этом прямой);
- построение прямой, параллельной данной плоскости и пересекающей данную прямую;
- исследование взаимного расположения некомпланарных прямых (за изображение одной из них принимается точка);
- доказательство параллельности прямых;
- доказательство принадлежности точек одной прямой или плоскости;
- исследование взаимного расположения трех прямых (одна из них при этом выбирается в качестве проектирующей);
- построение прямой в пространстве с заданными свойствами;
- исследование взаимного расположения плоскости и многогранника или тела вращения (за изображение плоскости при этом берется прямая);
- доказательство параллельности прямой и плоскости (плоскость при этом изображается прямой);
- доказательство параллельности двух плоскостей (за изображение одной из плоскостей при этом выбирается прямая);
- построение сечений многогранников плоскостью (многогранник при этом изображается так, чтобы образом секущей плоскости была прямая);
- вычисление площадей многоугольников и сечений многогранников (при этом используется свойство, что если площади лежащих в одной плоскости многоугольников равны S_1 и S_2 , а площади их проекций на другую плоскость равны S'_1 и S'_2 , то $S_1 : S_2 = S'_1 : S'_2$).

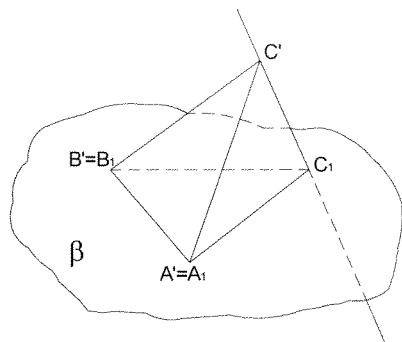
Особенность решения задач на проекционном чертеже состоит в том, что при этом приходится, как правило, выполнять два чертежа: на первом должны быть хорошо видны все элементы фигуры, о которой говорится в задаче; при выполнении второго чертежа выбираются нужным образом направление проектирования и плоскость проекций.

Главная обучающая цель метода решения задач на проекционном чертеже – развитие пространственного воображения учащихся.

2. Приведем примеры решения задач с помощью метода проектирования [1–3].

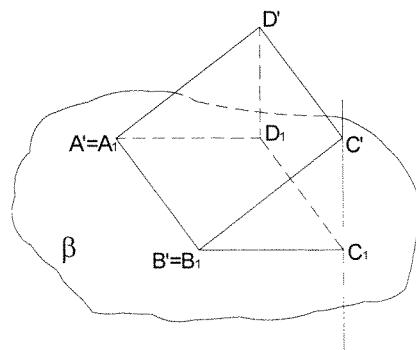
Задача 1. Докажите, что любой треугольник можно считать изображением треугольника любой заданной формы.

Решение. Пусть $A_1B_1C_1$ – произвольный треугольник, лежащий в плоскости β . Построим к его стороне A_1B_1 треугольник $A'B'C'$, подобный данному треугольнику ABC и не лежащий в плоскости β . В качестве проектирующей прямой выберем прямую $C'C_1$. При этом $A'=A_1$, $B'=B_1$ и утверждение доказано.



Задача 2. Докажите, что любой параллелограмм можно считать изображением данного параллелограмма $ABCD$.

Решение. Построим к стороне A_1B_1 произвольного параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, лежащего в плоскости β , параллелограмм $A'B'C'D'$, подобный данному параллелограмму $ABCD$ и не лежащий в плоскости β . В качестве проектирующей возьмем прямую $C'C_1$. Четырехугольник $C_1D_1D'C'$ является параллелограммом, поэтому $D_1D' \parallel C_1C'$. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ является проекцией параллелограмма $A'B'C'D'$, подобного параллелограмму $ABCD$.

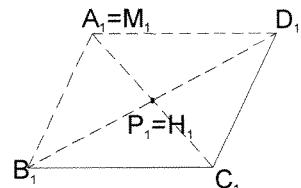
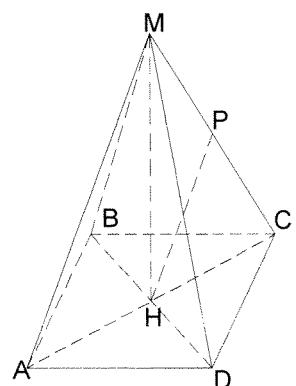


Задача 3. Ребро тетраэдра равно 100. Можно ли построить такую его параллельную проекцию, площадь которой равна 0,01? (Под тетраэдром здесь и дальше понимается треугольная пирамида, у которой боковые грани и основание – равные равносторонние треугольники).

Решение. По теореме Польке – Шварца за изображение любой треугольной пирамиды можно принять любой полный (с диагоналями) четырехугольник. Поэтому построить такую проекцию можно.

Задача 4. $MABCD$ – правильная четырехугольная пирамида, у которой все ребра равны между собой. Точка P – середина ребра MC , H – точка пересечения диагоналей AC и BD основания. Построить изображение этой пирамиды на плоскости, параллельной плоскости BCM , приняв HP за направление проектирования.

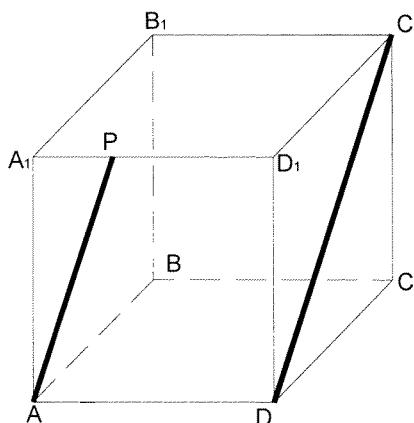
Решение. Треугольник BCM правильный и его плоскость параллельна плоскости проекций. Поэтому сначала строим правильный треугольник $B_1C_1M_1$. Отрезок PH проектируется в точку $P_1=H_1$, которая лежит на середине отрезка M_1C_1 . Так как $AM \parallel HP$,



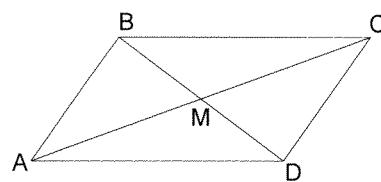
то ребро АМ изображается точкой $A_1=M_1$. Строим точку D_1 , симметричную точке B_1 относительно точки $P_1=H_1$ (в пирамиде $BH=HD$). Изображение пирамиды построено.

Задача 5. Можно ли две параллельные прямые считать изображением скрещивающихся прямых?

Решение. Да. Нужно в качестве проектирующей взять прямую, параллельную двум параллельным плоскостям, каждая из которых проходит через одну из данных скрещивающихся прямых.



скрещивающихся прямых (AP или C_1D). Поэтому и прямая ℓ не пересекает эти прямые.



Задача 7. Изображением какой пространственной фигуры может служить этот рисунок?

Решение. 1. Изображена треугольная пирамида $CABD$ и ее сечение плоскостью, проходящей через точки B , D и середину M ребра AC .

2. Изображена четырехугольная пирамида с основанием $ABCD$ и вершиной M . Высота этой пирамиды изображается точкой M_1 .

3. Изображена четырехугольная пирамида с основанием $ABCD$ и диагональными сечениями BDM и ACM , которые изображаются диагоналями основания.

4. Изображена четырехугольная пирамида, основанием которой является параллелограмм $ABCD$, а одно из боковых ребер перпендикулярно основанию и диагональное сечение, не перпендикулярное основанию.

5. Изображена прямая четырехугольная призма с основанием $ABCD$. Отрезки A_1C_1 и B_1D_1 изображают ее диагональные сечения, а точка M_1 – проекцию отрезка, по которому пересекаются эти сечения.

6. Изображены две четырехугольные пирамиды с общим основанием. Точка M_1 является изображением высот этих пирамид (которых, вообще говоря, может быть больше двух).

7. Изображены две треугольные пирамиды с общей вершиной M и основаниями ABC и ACD , которые принадлежат одной плоскости.

Задача 6. Скрещивающиеся прямые AP и C_1D , указанные на параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, изображены параллельными прямыми. Верно ли, что прямая ℓ , параллельная направлению проектирования, пересекает прямые AP и C_1D ?

Решение. Нет. По доказанному в предыдущей задаче, скрещивающиеся прямые изображаются параллельными прямыми только в том случае, если проектирующая прямая не пересекает две плоскости, которые параллельны и каждая из которых проходит через одну из скрещивающихся прямых (AP или C_1D). Поэтому и прямая ℓ не пересекает эти прямые.

Задача 7. Изображением какой пространственной фигуры может служить этот рисунок?

Решение. 1. Изображена треугольная пирамида $CABD$ и ее сечение плоскостью, проходящей через точки B , D и середину M ребра AC .

2. Изображена четырехугольная пирамида с

основанием $ABCD$ и вершиной M . Высота этой пирамиды изображается точкой M_1 .

3. Изображена четырехугольная пирамида с основанием $ABCD$ и диагональными сечениями BDM и ACM , которые изображаются диагоналями основания.

4. Изображена четырехугольная пирамида, основанием которой является параллелограмм $ABCD$, а одно из боковых ребер перпендикулярно основанию и диагональное сечение, не перпендикулярное основанию.

5. Изображена прямая четырехугольная призма с основанием $ABCD$. Отрезки A_1C_1 и B_1D_1 изображают ее диагональные сечения, а точка M_1 – проекцию отрезка, по которому пересекаются эти сечения.

6. Изображены две четырехугольные пирамиды с общим основанием. Точка M_1 является изображением высот этих пирамид (которых, вообще говоря, может быть больше двух).

7. Изображены две треугольные пирамиды с общей вершиной M и основаниями ABC и ACD , которые принадлежат одной плоскости.

8. Изображены две треугольные пирамиды, основания которых ABC и ACD лежат на одной плоскости. Точка M является изображением вершин (и высот) этих пирамид, которые расположены по разные стороны от плоскости ABC.

Можно предложить попытаться найти и другие возможности.

Замечание. Здесь, как и в некоторых других задачах, допускается изображение невидимых линий сплошными линиями.

Задача 8. Докажите, что ортогональная проекция тетраэдра DABC с ребром a на плоскость α будет иметь наибольшую площадь, когда плоскость α параллельна двум скрещивающимся ребрам тетраэдра.

Решение. Скрещивающиеся ребра AB и CD равны и взаимно перпендикулярны (докажите). Если прямые AB и CD параллельны плоскости проекций α , то ортогональной проекцией тетраэдра будет квадрат $A_1B_1C_1D_1$, диагонали которого равны a . Площадь этого квадрата равна

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2} a^2.$$

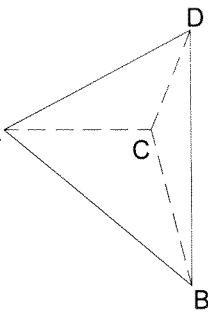
Если α не параллельна ребрам AB и CD, то ортогональной проекцией тетраэдра будет четырехугольник, диагонали которого меньше a .

Задача 9. Дан произвольный треугольник ABC. Точки M и K лежат на сторонах AB и BC соответственно,

$$AM = \frac{2}{3} AB, CK = KB. \text{ Отрезки } AK \text{ и } CM \text{ пересекаются в}$$

точке E. Найдите отношение отрезков AE и EK, CE и EM.

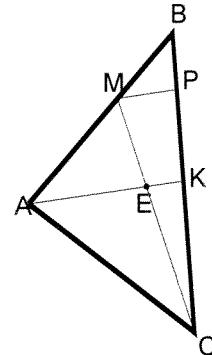
Решение. Будем считать данный треугольник изображением правильного треугольника. Приняв за направление проектирования прямую, параллельную AK, спроектируем на BC точки M, A и E. По условию задачи $AM:MB = 2:1$, $CK:KB = 1:1$. Для удобства вычислений пусть, например, $A_1B_1=C_1C_1=A_1C_1=6$, где $A_1B_1C_1$ – образ треугольника ABC. Тогда $C_1K_1=K_1B_1=3$, $B_1P_1=1$, $P_1K_1=2$, $C_1P_1=5$. Так как $\Delta C_1K_1E_1 \sim \Delta C_1P_1M_1$, то $C_1E_1:C_1M_1 = K_1E_1:P_1M_1 = C_1K_1:C_1P_1 = 3:5$ и $C_1E_1:E_1M_1 = 3:2$. Поэтому $CE:EM = 3:2$.

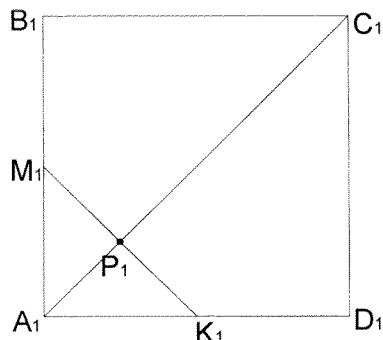


Так как $\Delta B_1M_1P_1 \sim \Delta B_1A_1K_1$, то $M_1P_1:A_1K_1 = B_1P_1:B_1K_1 = 1:3$, и т.к. $M_1P_1 = \frac{5}{3} K_1E_1$, то $\frac{5}{3} K_1E_1:A_1K_1 = 1:3$, $K_1E_1:A_1K_1 = 1:5$. Отсюда $A_1E_1:E_1K_1 = 4:1$, а потому $AE:EK = 4:1$.

Ответ. $AE:EK = 4:1$, $CE:EM = 3:2$.

Задача 10. Дан параллелограмм ABCD. Точка M – середина стороны AB, точка K лежит на стороне AD, причем $AK:KD = 1:2$. Найдите, в каком отношении точка P пересечения AC и MK делит отрезок MK.



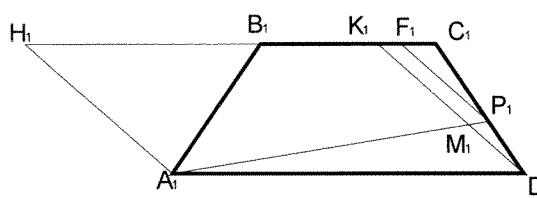


Решение. Пусть данный параллелограмм является изображением квадрата $A_1B_1C_1D_1$, A_1P_1 – биссектриса прямого угла A_1 треугольника $A_1K_1M_1$, поэтому по свойству биссектрисы $M_1P_1:P_1K_1 = A_1M_1:A_1K_1 = A_1B_1: A_1D_1 = 3:2$.

Значит $MP:PK=3:2$.

Ответ. 3:2.

Задача 11. $ABCD$ – трапеция, у которой AD и BC – основания, $AD=2 \cdot BC$, Точка K – середина основания BC , P – точка, лежащая на боковой стороне DC ,



причем $DP_1 = \frac{1}{4} DC$. Отрезки AP_1

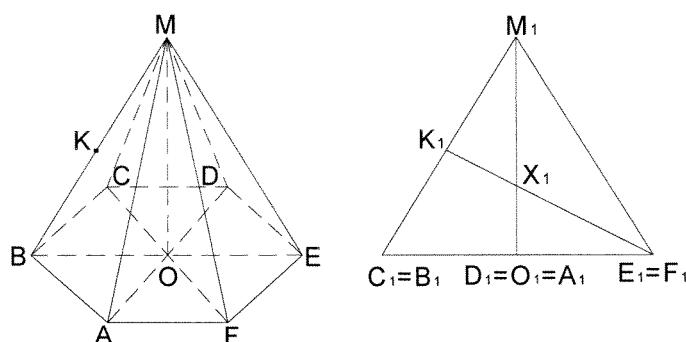
и DK_1 пересекаются в точке M_1 . Найдите отношение отрезков AM_1 и MP_1 .

Решение. Пусть данная трапеция является изображением равнобедренной трапеции $A_1B_1C_1D_1$, у которой (для удобства вычислений) $A_1D_1=16$, $B_1C_1=8$.

Выбрав в качестве направления проектирования прямую, параллельную прямой D_1K_1 , спроектируем на прямую B_1C_1 точки A_1 , M_1 , P_1 . Получим соответственно точки H_1 , K_1 , F_1 . Так как $A_1M_1:M_1P_1=H_1K_1:K_1F_1$ и $H_1K_1=A_1D_1=16$, то остается найти K_1F_1 . По теореме Фалеса, $K_1F_1:F_1C_1=P_1D_1:P_1C_1=1:3$. А так как $K_1C_1=K_1B_1=4$, то отсюда $K_1F_1=1$ и $A_1M_1:M_1P_1=16:1$. Значит, $AM_1:MP_1=16:1$.

Ответ. 16:1.

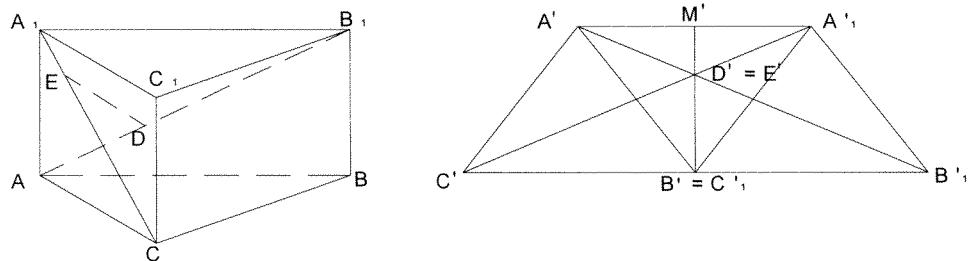
Задача 12. Данна правильная шестиугольная пирамида $MABCDEF$. Точка K делит ребро BM пополам. В каком отношении плоскость FEK делит ребро AM ?



Решение. Пусть X – точка пересечения ребра AM с плоскостью FEK . Примем за направление проектирования прямую, параллельную прямой EF , и построим ортогональную проекцию данной пирамиды. При этом плоскость FEK будет изображаться прямой K_1E_1 . Отрезки M_1A_1 и K_1E_1 – медианы треугольника $M_1B_1E_1$, поэтому $M_1X_1:X_1A_1=2:1$. Следовательно, $MX:XA=2:1$.

Ответ. 2:1.

Задача 13. На диагоналях AB_1 и CA_1 боковых граней призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ взяты точки D и E так, что прямые DE и BC_1 параллельны. Найдите отношение длин отрезков DE и BC_1 .



Решение. Строим изображение нижнего основания призмы в виде правильного треугольника $A_1 B_1 C_1$. При этом диагональ BC_1 изобразится точкой $B'=C'$. Отрезок DE , параллельный BC_1 , изобразится при этом точкой $D'=E'$. Так как $DE \parallel BC_1$, то прямые $C'E'$, $B'D'$, $A_1 A'_1$ пересекаются в точке M' . А так как $M'D':D'B'=1:2$, то $DE:BC_1=1:3$.

Ответ. 1:3.

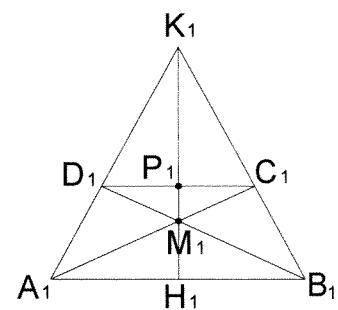
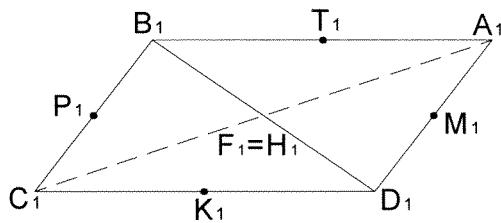
Задача 14. Через середины противолежащих ребер треугольной пирамиды $DABC$ проведены прямые. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

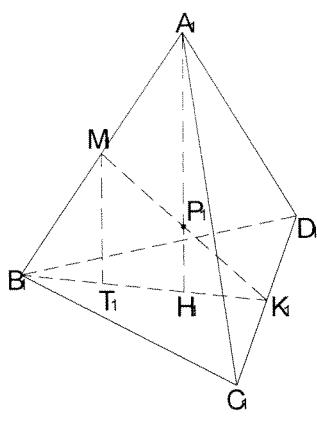
Решение. Примем за направление проектирования, например, прямую FH , где F и H – середины ребер BD и AC пирамиды. Тогда пирамида $DABC$ изобразится параллелограммом $D_1 A_1 B_1 C_1$ вместе с его диагоналями $A_1 C_1$ и $B_1 D_1$. Середины противолежащих сторон параллелограмма K_1, M_1, T_1, P_1 симметричны относительно точки $F_1 = H_1$, что и доказывает утверждение задачи.

Задача 15. Данна произвольная трапеция $ABCD$. Прямые AD и BC пересекаются в точке M . Докажите, что прямая KM проходит через середины H и P оснований AB и CD трапеции.

Решение. Это хорошо известная задача, имеющая несколько способов решения.

Примем треугольник AKB за изображение правильного треугольника $A_1 K_1 B_1$, а трапецию $ABCD$ – за изображение равнобедренной трапеции $A_1 B_1 C_1 D_1$. Прямая $M_1 K_1$ – ось симметрии треугольника $A_1 K_1 B_1$ и трапеции $A_1 B_1 C_1 D_1$. Поэтому прямая $M_1 K_1$ делит пополам отрезки $C_1 D_1$ и $A_1 B_1$. Точки P и H являются образами точек P_1 и H_1 , поэтому прямая MK проходит через середины сторон CD и AB трапеции $ABCD$.





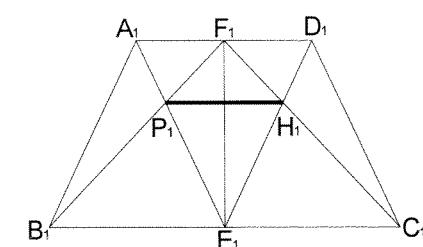
Задача 16. Точки М и К – середины сторон АВ и СD выпуклого плоского четырехугольника АВСD. Докажите, что точка Н пересечения медиан треугольника ВСD, середина Р отрезка МК и вершина А принадлежат одной прямой.

Решение. Примем данный четырехугольник за изображение правильной треугольной пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ с основанием $B_1C_1D_1$.

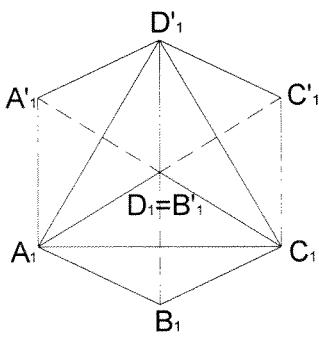
Проведем $M_1T_1 \parallel A_1H_1$, где A_1H_1 – высота пирамиды. Так как $B_1M_1 = M_1A_1$, то $B_1T_1 = T_1H_1$, а значит $T_1H_1 = H_1K_1$ и $M_1P_1 = P_1K_1$. Точка P_1 пересечения M_1K_1 и A_1H_1 является серединой отрезка M_1K_1 . Следовательно, точки Н, Р и А лежат на одной прямой.

Задача 17. В трапеции АВСD точка Е – середина основания ВС, F – середина основания АD. Отрезки BF и АЕ пересекаются в точке Р, а отрезки DE и FC пересекаются в точке Н. Докажите, что отрезок РН параллелен основаниям трапеции.

Решение. Пусть данная трапеция является изображением равнобедренной трапеции $A_1B_1C_1D_1$. Тогда F_1E_1 – ее ось симметрии и ось симметрии равнобедренных треугольников $A_1E_1D_1$ и $B_1F_1C_1$. Поэтому точки P_1 и H_1 симметричны относительно прямой F_1E_1 , а значит $P_1H_1 \parallel A_1D_1$,



$P_1H_1 \parallel B_1C_1$. Так как при параллельном проектировании параллельность прямых сохраняется, то $RH \parallel AD$, $RH \parallel BC$.



Задача 18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите на его поверхности точки, наиболее удаленные от прямой DB_1 .

Решение. Строим ортогональную проекцию куба на плоскость AD_1C . При этом отрезок DB_1 проектируется в точку $D_1=B_1'$, а перпендикуляры к этому отрезку изображаются без искажения их длины, причем один их конец совпадает с этой точкой $D_1=B_1'$. Наиболее удалены от точки $D_1=B_1'$ точки A_1 , A_1 , B_1 , C_1 , C_1 , D_1 – проекции вершин куба.

Если ребро куба равно a , то вершины куба А, В, С, A_1 , C_1 , D_1 удалены от

прямой DB_1 на $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ (наибольшее расстояние точек на поверхности куба до прямой DB_1).

Задача 19. Докажите, что площади S_1 и S_2 треугольников, лежащих в одной плоскости, относятся как площади их проекций S'_1 и S'_2 , лежащих в другой плоскости.

Решение. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией треугольника ABC ; K и P – точки на сторонах AB и AC соответственно, а K_1 и P_1 – проекции этих точек. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle B_1A_1C_1 = \alpha'$. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha; S_{AKP} = \frac{1}{2} AK \cdot AP \cdot \sin \alpha;$$

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin \alpha',$$

$$S_{A_1K_1P_1} = A_1K_1 \cdot A_1P_1 \cdot \sin \alpha'. \text{ Отсюда } \frac{S_{ABC}}{S_{AKP}} = \frac{AB \cdot AC}{AK \cdot AP};$$

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_1K_1P_1}} = \frac{A_1B_1 \cdot A_1C_1}{A_1K_1 \cdot A_1P_1}. \text{ Но } \frac{AB}{AK} = \frac{A_1B_1}{A_1K_1} \text{ и } \frac{AC}{AP} = \frac{A_1C_1}{A_1P_1}, \text{ поэтому } \frac{S_{ABC}}{S_{AKP}} = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_1K_1P_1}}.$$

Замечание. Так как всякий многоугольник можно разбить на треугольники, то утверждение задачи справедливо для любых многоугольников.

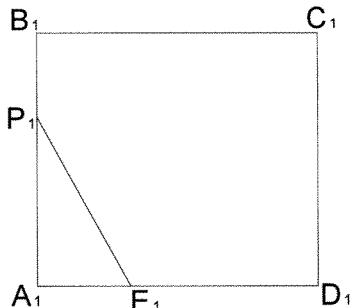
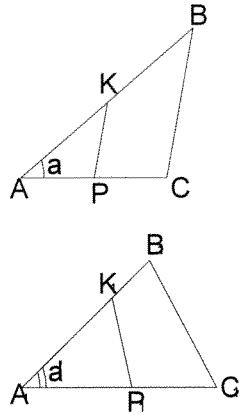
Задача 20. В параллелограмме $ABCD$ точки P и E лежат на сторонах AB и AD соответ-

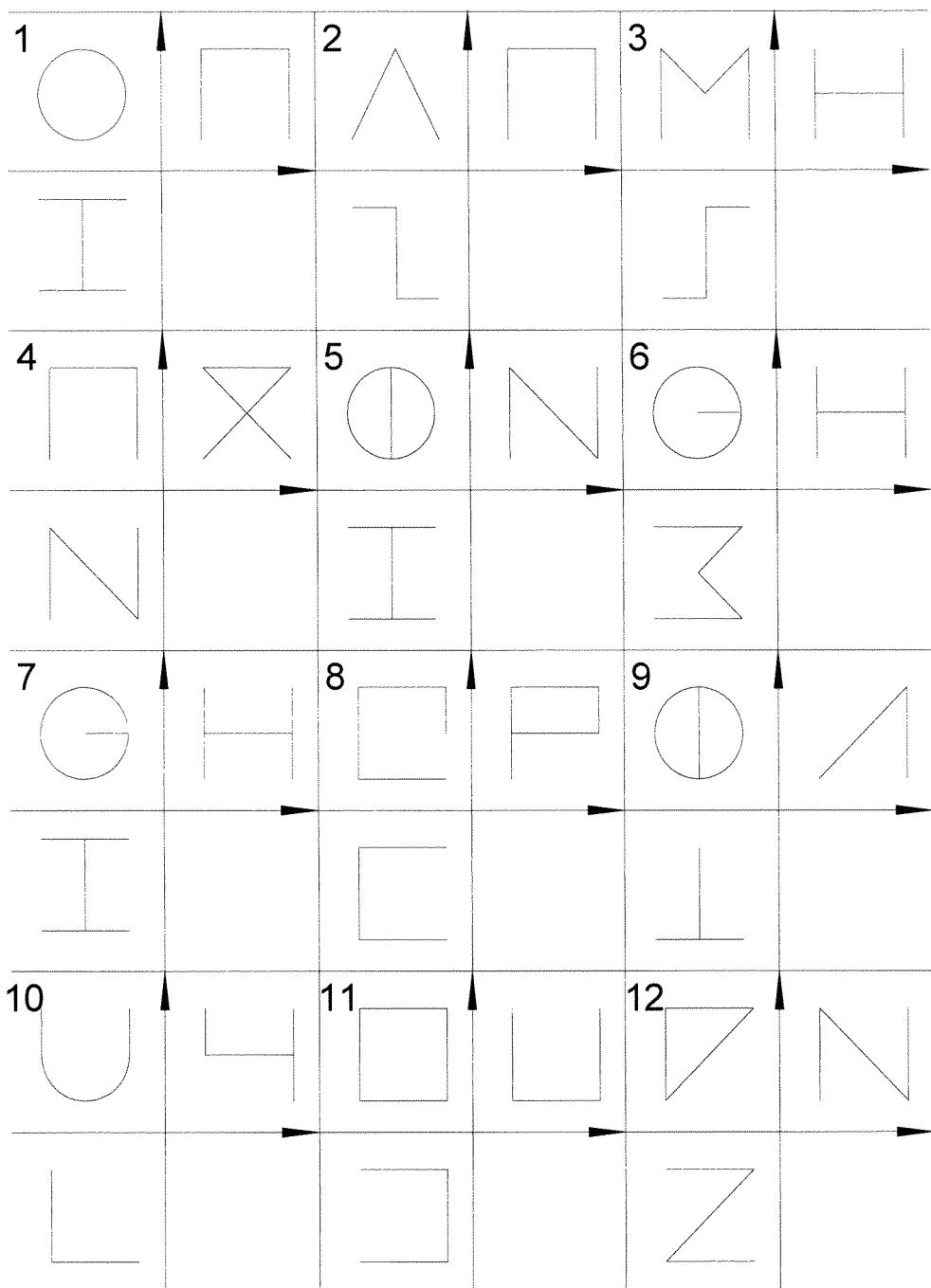
ственно, причем $AP = \frac{2}{3} AB$ и $AE = \frac{1}{3} AD$. Найдите площадь треугольника APE , если площадь параллелограмма равна 18.

Решение. Примем данный параллелограмм за изображение квадрата $A_1B_1C_1D_1$ и для удобства вычислений будем считать, что сторона этого квадрата равна $3a$. Тогда $A_1E_1 = a$, $A_1P_1 = 2a$, площадь квадрата равна $9a^2$, а площадь треугольника $A_1P_1E_1$ равна a^2 . По доказанному в предыдущей задаче $\frac{18}{S_{APE}} = \frac{9a^2}{a^2}$, $S_{APE} = 2$.

Ответ. 2.

Задача 21. Даны проекции фигур на три плоскости – фронтальная, горизонтальная и профильная (вид спереди, сверху и сбоку). Постройте наглядные изображения этих фигур.





Указание. При решении этой задачи полезно использовать кусок проволоки длиной 35–40 см, с помощью которого “методом проб и ошибок” попытаться изготовить искомую фигуру. После этого нужно выполнить аксонометрическую проекцию полученной фигуры.

Например, на первом виде указаны проекции двух окружностей одинакового радиуса, лежащих в параллельных плоскостях и соединенных сверху отрезком, перпендикулярным к этим плоскостям.

Задача 22. Дано изображение окружности и вписанного в нее треугольника. Постройте изображения высот треугольника.

Решение. На изображении окружности строим изображение ее центра O_1 (как это сделать?). Соединяем полученную точку O_1 с серединами M_1 и N_1 отрезков A_1C_1 и B_1C_1 . Проводим $A_1D_1 \parallel O_1N_1$ и $B_1H_1 \parallel O_1M_1$. Через точку E_1 пересечения отрезков A_1D_1 и B_1H_1 проводим отрезок C_1F_1 . Отрезки A_1D_1 , B_1H_1 , C_1F_1 – изображения высот вписанного в окружность треугольника.

Задача 23. Дано изображение окружности и описанного около нее треугольника. Постройте изображения высот этого треугольника.

Для решения можно воспользоваться решением предыдущей задачи, приняв за точки M и N изображения точек касания.

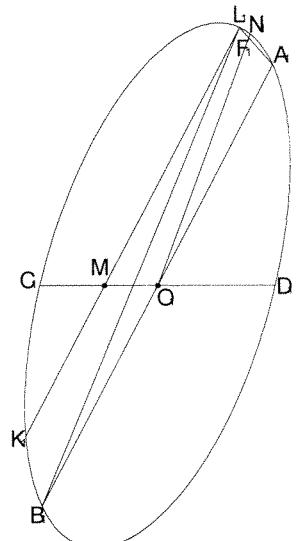
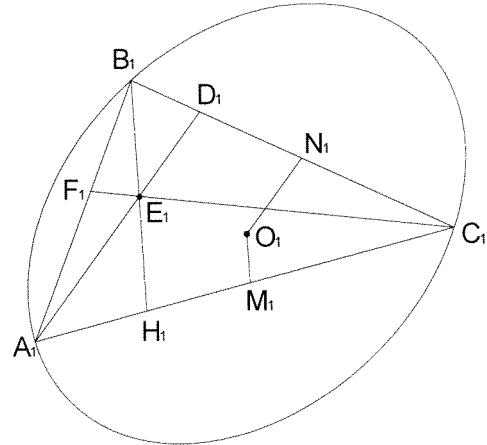
Задача 24. На изображении круга постройте изображение сектора с углом 15° и сегмента с дугой 150° .

Решение. Строим сопряженные диаметры A_1B_1 и C_1D_1 (как это сделать?). Делим пополам отрезок C_1O_1 и через полученную точку M_1 проводим $K_1L_1 \parallel A_1B_1$. Разделим пополам отрезок A_1L_1 и через полученную точку F_1 проводим отрезок O_1N_1 . Сектор $A_1O_1N_1$ – искомый сектор, а сегмент $L_1C_1B_1$ – искомый сегмент.

Задача 25. Можно ли любой четырехугольник параллельно спроектировать на плоскость в четырехугольник с равными и перпендикулярными сторонами?

Учтем, что середины сторон данного четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Спроектируем этот параллелограмм на плоскость в квадрат.

3. Линии чертежа. Линии, которыми на чертеже изображают видимые очертания предмета, называются сплошными основными. Эти линии имеют толщину 0,6–1,5 мм.



Для невидимых очертаний предмета применяют линию, называемую штриховой. Штриховая линия состоит из отдельных черточек одинаковой длины. Длину каждого штриха в зависимости от величины изображения выбирают от 2 до 8 мм, но на одном и том же чертеже длина всех штрихов должна быть обязательно одинаковой. Расстояния между штрихами должны быть от 1 до 2 мм, но одинаковыми на всем чертеже. Толщина штриховой линии должна быть в 2-3 раза меньше, чем толщина основной сплошной линии.

Для обозначения оси симметрии фигуры используют штрихпунктирную тонкую линию, которую называют осевой. Она состоит из длинных тонких штрихов, длина которых равна 5–30 мм, и точек между ними. Расстояние между штрихами 3–5 мм. Толщина тонкой линии в 2-3 раза меньше, чем толщина основной сплошной линии. Штрих-пунктирная линия используется для указания центра окружности. При этом положение центра должно определяться пересечением штрихов, а не точек.

Для указания размеров на чертеже с помощью выносных размерных линий, для обозначений линий сгиба на развертках фигур применяются сплошные тонкие линии, толщина которых в 2-3 раза меньше, чем толщина основной сплошной линии.

На чертежах изображения больших фигур уменьшают, а малых – увеличивают по сравнению с действительными размерами (пользуются масштабом). Но при этом размеры на чертеже проставляют действительные, то есть те, которые фигура имеет в натуре.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Василевский, А. Б.** Метод параллельных проекций / А. Б. Василевский. – Минск : Народная асвета, 1985.
2. Сборник задач по геометрии для 9–10 классов / И. С. Герасимова [и др.]. – М. : Просвещение, 1977.
3. **Лоповок, Л. М.** Изображение фигур в стереометрии. “Преподавание геометрии в 9–10 классах” / Л. М. Лоповок. – М. : Просвещение, 1980.
4. **Четверухин, Н. Ф.** Изображение фигур в курсе геометрии / Н. Ф. Четверухин. – М. : Учпедгиз, 1958.

Поступила в редакцию 15.09.2014 г.

Контакты: Eduard.Kiriyatzkii@takas.lt (Кирьяцкий Эдуард Григорьевич)

Kiryatski E.G., Matiuhin V.I. SOLVING PROBLEMS ON THE PROJECTION DRAWING.

The method of parallel projections is discussed in much detail with a large number of examples and tasks. While applying this method the major methodological objective is to develop student's spacial imagination.

Key words: depiction, graphics, drawing, metric properties, affine properties.

УДК 532.88

ИМПУЛЬСЫ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ В ТОНКОМ ИНВЕРСНОМ СЛОЕ

Ю. В. Юревич

аспирант

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В. А. Юревич

доктор физико-математических наук, профессор

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Для модельных параметров полупроводниковых квантоворазмерных структур проведен численный расчет процесса сверхизлучения (СИ), который развивается в субмикронном планарном слое инверсной среды из инициирующего излучения спонтанной люминесценции на частоте резонанса, соответствующей экситонным переходам. При моделировании учитывается возможность диполь-дипольного взаимодействия, сделана оценка его влияния на характеристики импульса СИ. Получено аналитическое выражение для огибающей импульса СИ.

Ключевые слова: когерентные оптические эффекты, тонкая пленка активных атомов, плотная резонансная среда, квантоворазмерная полупроводниковая структура.

Введение

Явление сверхизлучения (СИ) происходит как следствие взаимного согласования фаз (фазировка) элементарных излучателей, образующих активную среду, через излучаемое ими поле. Сверхизлучение представляет эффект сверхбыстрого взаимодействия излучения с веществом, когда характерная длительность импульсов значительно меньше времени действия релаксационных механизмов в среде. Установление коллективного СИ-состояния в результате фазировки активных диполей подразумевает возникновение макроскопической поляризации, которая предполагает формирование упорядоченного состояния в ансамбле диполей [1]. Тогда в излучении формируется интенсивный импульс, мощность которого имеет особую зависимость от инверсии заселенностей – характерное время СИ обратно пропорционально числу активных диполей. СИ было экспериментально обнаружено во многих средах – газах, твердых телах и полупроводниках, в том числе в системах квантовых точек и экситонных конденсатах при низких температурах [2]. Квантоворазмерные полупроводниковые структуры используются как инверсные среды, в виде тонких слоев эти структуры могут быть применимы в качестве активных поверхностных пленок, способных модулировать резонансное излучение. Между тем, известно, что в тонких резонансных слоях могут быть реализованы режимы самовозбуждения [3]. Это явление перспективно к использованию для получения импульсной генерации в лазерных устройствах, где усиливающий элемент представляет собой тонкий слой плотной резо-

нансной среды (материала с относительно высокой концентрацией активных центров, для которого характерен сильный нелинейный отклик на поле резонансной частоты [4]). Квантоворазмерные полупроводниковые структуры обладают свойствами плотных резонансных сред [5]. Подобного рода материалы используют в лазерах с вертикальными резонаторами (или поверхностно излучающих лазерах), где активные элементы образованы тонкими планарными слоями [6].

Поэтому представляется логичной постановка задачи изучения особенностей СИ в тонком граничном слое с резонансной поляризацией. Отличием от уже решенных задач по тематике СИ является рассмотрение проблемы в рамках приближения особо тонкого слоя, который, как предполагается, образован полупроводниковой квантоворазмерной структурой. В полупроводниковых средах СИ развивается как коллективная спонтанная рекомбинация. Известно, что пропусканию и отражению особо тонких активных граничных слоев свойственна зависимость от сверхизлучательных компонент поляризованности [7]. Динамика компонентов отклика среды определяет процесс излучения в случае достижения пороговой инверсии в слое. Для возникновения СИ среда должна быть максимально инвертирована. Задача об энергообмене среды и светового поля в процессе СИ решается в приближении сверхтонкого граничного слоя, в сущности, для пленки, излучающей с поверхности. При этом допускается использование вместо волновых уравнений граничных электродинамических условий для плосковолновых полей в уравнениях Максвелла [7; 8]. В настоящей работе, однако, совместно с типичными для этого подхода соотношениями для полей, рассматриваются материальные уравнения квантовомеханической матрицы плотности, которые приведены, например, в [9].

Основные уравнения

Рассматривается планарная граничная пленка толщиной l , значительно меньшей длины волны света $\lambda = 2\pi c/\omega$, находящаяся на поверхности линейной оптической среды. Концентрация активных центров в тонком поверхностном слое предполагается максимально высокой (что типично для плотных резонансных сред [5]), но при этом расстояние между центрами считается достаточным, чтобы избежать перекрытия их электронных орбиталей. Тогда, следуя общепринятому описанию резонансного взаимодействия излучения с элементарными диполями, материальные уравнения для вероятностей поляризованности ρ и инверсной заселенности n в квантоворазмерной структуре аналогично [9] представляем в виде:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{2}{T_2} \frac{d\rho}{dt} + \omega_0^2 \rho = -\frac{2\mu}{\hbar} \omega_0 n \left(E + \frac{\mu N}{3\epsilon_0} \rho \right), \quad \frac{dn}{dt} + \frac{1}{T_1} (n - \alpha) = -\frac{2\mu}{\hbar \omega_0} \frac{d\rho}{dt} E. \quad (1)$$

Здесь $E(t)$ – напряженность действующего в среде поля, ω_0 и μ – резонансная частота и средний дипольный момент активных центров, N – их концентрация, T_1 и T_2 – времена продольной и поперечной релаксации основного перехода, α – скорость накачки. В системе (1) в приближении среднего поля учитывается сдвиг спектральной линии усиления, обусловленный влиянием близких полей диполей. Типичные для приближения сверхтонкого слоя условия для полей на границе раздела, известные, например, из работы [8], модифицируем с учетом того, что слой является усиливающим. Поэтому вместо френелевского компо-

нента, описывающего прошедшее в среду поле, запишем величину начального поля люминесценции $A(t)$ (возникающего из флуктуаций начальной поляризованности на частоте, близкой к резонансу [10]), резонансная поляризованность обуславливает сверхизлучательный вклад в действующее поле E , ее же величиной определено излучаемое поле E_r . Полученные в итоге соотношения для полей:

$$E = A(t) + \frac{\mu Nl}{\varepsilon_0(\eta+1)c} \frac{d\rho}{dt}, \quad E_r = \frac{\mu Nl}{\varepsilon_0(\eta+1)c} \frac{d\rho}{dt}. \quad (2)$$

совместно с уравнениями (1) образуют самосогласованную систему (здесь η – нерезонансный показатель преломления среды тонкого слоя). Процесс СИ представляет когерентный оптический эффект, поэтому считаем, что характерное время развития излучения значительно меньше времен T_1 и T_2 и, соответственно, пренебрегаем в (1) релаксационными членами. В результате масштабирования переменной поля и параметров системы (1), (2) путем замены

$$\epsilon_r(t) = \frac{c\varepsilon_0(\eta+1)}{\mu Nl\omega_0} E_r(t), \quad A = \frac{\mu Nl\omega_0}{c\varepsilon_0(\eta+1)} \varepsilon(t) \quad \text{кинетические уравнения СИ в}$$

виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{2n}{\tau_R} \frac{d\rho}{dt} + (\omega_0^2 + 2\gamma\omega_0 n) \rho &= -\frac{2\omega_0}{\tau_R} n\epsilon, \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{2}{\omega_0\tau_R} \left[\frac{d\rho}{dt} \left(\epsilon + \frac{1}{\omega_0} \frac{d\rho}{dt} \right) \right], \quad \epsilon_r = \frac{1}{\omega_0} \frac{d\rho}{dt}, \end{aligned} \quad (3)$$

где аналогично, например, [10], введен параметр $\tau_R = \frac{\hbar c \varepsilon_0(\eta+1)}{\mu^2 N l \omega}$, называемый временем сверхизлучения. При учете поправки к действующему полю, определяемой вкладом ближних полей диполей, осцилляторное уравнение для поляризованности в системе (3) содержит составляющую с коэффициентом

$$\gamma = \frac{\mu^2 N}{3\varepsilon_0\hbar}, \quad \text{которая описывает смещение резонансной частоты, пропорциональ-}$$

ное инверсии заселенности. Изменение вероятности инверсии n (по мере насыщения усиления или нутационных осцилляций заселенности уровней) должно сопровождаться дрейфом или колебаниями резонансной частоты.

Результаты численного моделирования

Процесс СИ, развивающийся в инверсной среде тонкого слоя, моделировался в рамках численного решения разностного аналога системы (3). Зависимость от времени инициирующего поля спонтанной люминесценции на резонансной частоте задавалась гармонической функцией с постоянной амплитудой

дой ε_m : $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \exp(i\omega_0 t)$. Естественно было считать, что в начальный момент времени среда максимально инвертирована, т.е. $n(t=0) = 1.0$, а резонансная поляризованность отсутствует – $\rho(t=0) = 0$, также первоначально нулевое значение имеет и скорость поляризованности. Для этих условий решалась известная задача Коши, т.е. при расчете аналога системы (3) непосредственно определялась зависимость $\rho(t)$. Напряженность поля СИ $e_r(t)$ выражалась на основе полученной зависимости, следуя соотношениям (2) с учетом масштабирования переменных; результаты расчета иллюстрированы для нормированной плотности энергии $S_R(t) = e_r^2(t)$ на временной шкале в долях пикосекунд. В выборе материальных параметров моделирования, которые использовались при определении коэффициентов системы (3) в расчетах, исходили из оценок, сделанных, например, в работе [11], а также в работах [12, 13] для квантоворазмерных полупроводниковых структур на основе $InGaAs/GaAs$ или $GaInNAsSb$. Время сверхизлучения τ_R в этом случае не превышает сотни фемтосекунд. Значения параметров начальных флуктуаций поля A , которые могут изменяться в относительно широком диапазоне, взяты из работы [14].

На основе многократных расчетов динамики СИ, варианты которых приведены на рисунках 1 и 2, можно убедиться в том, что процесс СИ представляется изолированным выбросом мощности светового поля (на рисунках – в относительных единицах). Для указанных модельных параметров длительность импульсов составляет десятки или сотни фемтосекунд, несущая частота незначительно отлична от резонансной.

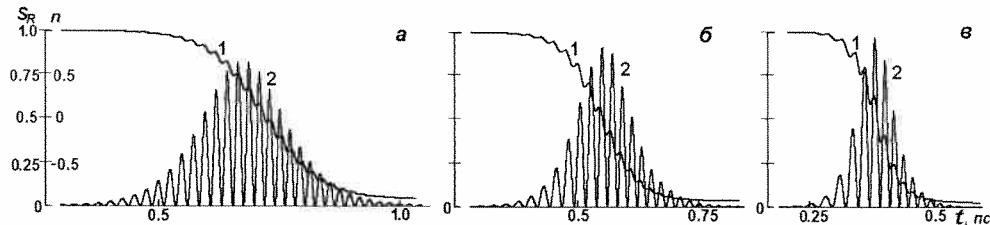


Рисунок 1 – Динамика инверсии (кривые 1) и импульсы сверхизлучения (кривые 2):

$$N = 2 \cdot 10^{18} (a), 2.8 \cdot 10^{18} (b), 4 \cdot 10^{18} \text{ см}^3 (c), \mu = 8 \cdot 10^{-29} \text{ Кл} \cdot \text{м},$$

$$\lambda = 2\pi c/\omega = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}, \eta = 3.6.$$

Огибающая импульса незначительно асимметрична – задний фронт развивается в условиях поглощения, поэтому по отношению к переднему несколько “срезан”. Это особенно заметно на рисунке 1, где картина СИ иллюстрирована на фоне изменения (броса) инверсии, для более коротких импульсов асимметрия возрастает. Изменение начального усиления, связанное с увеличением плотности активных центров N (устанавливающейся за счет изменения неравновесной концентрации экситонов), приводит к сокращению времени формирования излучения и длительности импульса (рис. 1). Пиковое значение импульса плотности поля возрастает пропорционально N (из-за принятой нормировки это не отражено в рисунках), поэтому и указывают на зависимость мощности импульса от квадрата инверсной заселенности как о характерности процесса СИ [1; 10; 11].

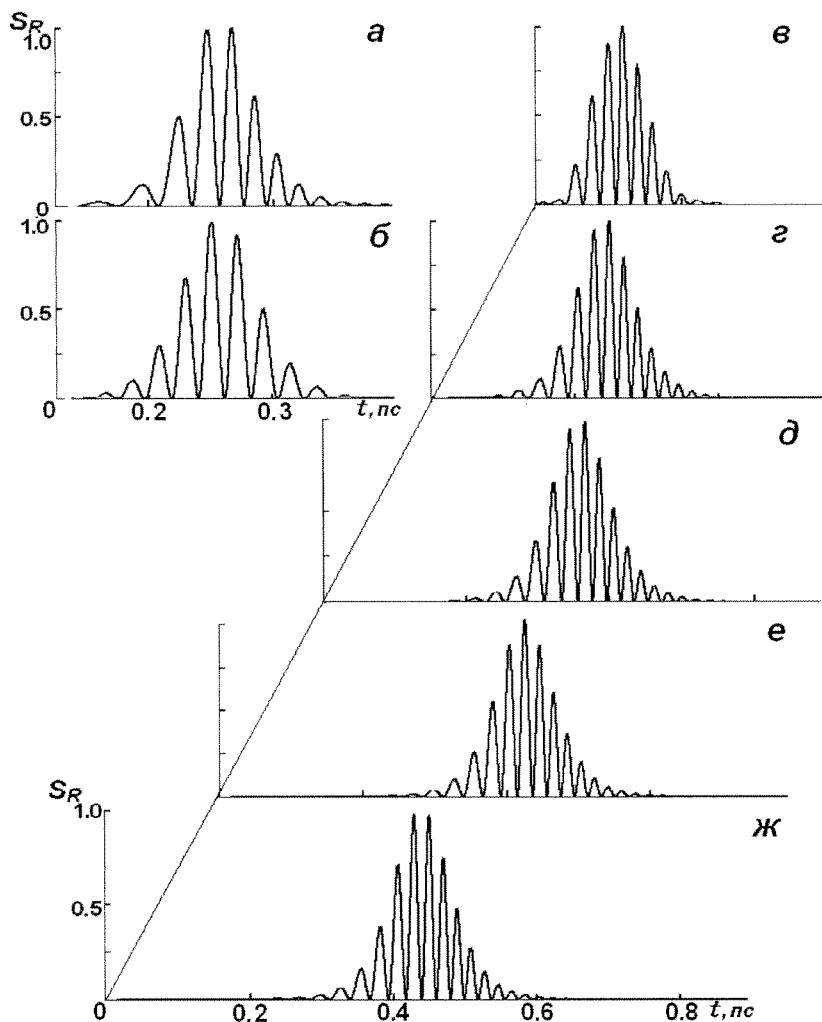


Рисунок 2 – Динамика процеса сверхизлучения:
 $N = 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^3$, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ (*a*, *b*), $\gamma = 0$ (*b*); $N = 5 \cdot 10^{18}$ (*в-ж*), $\varepsilon = 0.1$ (*в*), 0.01 (*г*), $2 \cdot 10^{-4}$ (*д*), $1 \cdot 10^{-5}$ (*е*), $2 \cdot 10^{-6}$ (*ж*); $\mu = 8 \cdot 10^{-29} \text{ Кл м}$, $\lambda = 2\pi c/\omega = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $\eta = 3.6$

Отметим также, что влияние фазового эффекта, вызванного присутствием диполь-дипольного взаимодействия на динамику СИ для используемых параметров, невелико несколько изменяется лишь соотношение пиковых значений “несущих” колебаний плотности энергии и происходит некоторое снижение их частоты (рис. 2, *a*, *b*). Следовало ожидать, и это отражено в вариантах расчета, что на время формирования импульса должен влиять уровень инициирующего поля люминесценции (рис. 2, *в-ж*). При высоких значениях “затравочного” поля время развития СИ снижается (рис. 2, *в*, *г*), при этом несколько сокращается длительность импульса, для относительно низкого уровня ε его вклад в динамику процесса, естественно, несуществен (рис. 2, *е*, *ж*).

Расчетная форма огибающей импульсов СИ

В этом разделе приведена приближенная аналитическая оценка зависимости временных характеристик импульсов СИ от основных материальных параметров. Для квазистационарных амплитуд поля и поляризованности, то есть в представлении $E(t) = E_m(t) \exp(i\omega t)$, $\rho(t) = \rho_m(t) \exp(i\omega t)$, а также $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \exp(i\omega t)$, в случае точного резонанса ($\omega = \omega_0$, $\gamma = 0$) уравнения (3) могут быть преобразованы (укорочены) и в принятой выше нормировке запишутся как одна из модификаций системы Максвелла – Блоха:

$$\frac{d}{dt} \rho_m = \frac{n}{\tau_R} (\varepsilon_m + \rho_m), \quad \frac{d}{dt} n = -\frac{1}{\tau_R} (\varepsilon_m + \rho_m) \rho_m. \quad (4)$$

Решения (4) для ρ_m и n удовлетворяют соотношению $\rho_m^2 + n^2 = 1$, известному как закон сохранения полярного угла вектора Блоха [1], и формально могут быть представлены в виде:

$$\rho_m = \sin F, \quad n = \cos F, \quad F = \frac{1}{\tau_R} \int_0^t (\varepsilon_m + \rho_m) dt. \quad (5)$$

Из выражений (5) следует, что величина F , известная как “площадь” поля когерентного светового импульса, удовлетворяет соотношению

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{\tau_R} (\varepsilon_m + \sin F),$$

то есть интегрируемому выражению: $\frac{dF}{\varepsilon_m + \sin F} = \frac{dt}{\tau_R}$. Для величины F

нетрудно получить:

$$F = \arctg \frac{1 - \varepsilon_m f}{f \sqrt{1 - \varepsilon_m^2}} + \arctg \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_m^2}}{f - \varepsilon_m}, \quad (6)$$

где $f = \exp[-(t - \tau) \sqrt{1 - \varepsilon_m^2} / \tau_R]$, $\tau = \ln[(1 + \sqrt{1 - \varepsilon_m^2}) / \varepsilon_m]$. Определив из соотношения (6) величину поляризованности, для нормированной плотности поля СИ $S_{Rm} = \rho_m^2$ получим выражение:

$$S_{Rm}(t) = \left\{ \frac{\operatorname{sech} \left[(t - \tau) \sqrt{1 - \varepsilon_m^2} / \tau_R \right] - \varepsilon_m}{1 - \varepsilon_m \operatorname{sech} \left[(t - \tau) \sqrt{1 - \varepsilon_m^2} / \tau_R \right]} \right\}^2. \quad (7)$$

Формула (7) описывает импульс СИ, рассчитываемый в принятом нами приближении. Отметим, что импульс (7) должен характеризоваться симметрич-

ными фронтами, но, в остальном, его особенности соответствуют тем, которые проявляются в результатах моделирования системы (3). Очевидно, что повышение начального уровня инверсии за счет концентрации активных частиц или вероятности дипольного перехода должно приводить к сокращению времени развития когерентного выброса световой энергии, к уменьшению его длительности. В изменение характерного интервала формирования импульса должна вносить вклад и величина интенсивности начальной спонтанной люминесценции, значения которой, конечно, предполагаются крайне малыми; именно с этого начального уровня поля излучения должен “стартовать” импульс СИ.

Результаты расчетов, приведенных на рисунке 3, различаются уровнем усиления, устанавливающимся за счет изменения неравновесной концентрации экситонов. Импульс СИ формируется по мере выхода ансамбля элементарных излучателей из инвертированного состояния (рис. 3, а). Заметно, что, как и в случае численного моделирования процесса, с увеличением начальной концентрации экситонов происходит изменение динамики СИ – импульсы сокращаются по длительности, период их развития снижается (рис. 3, б).

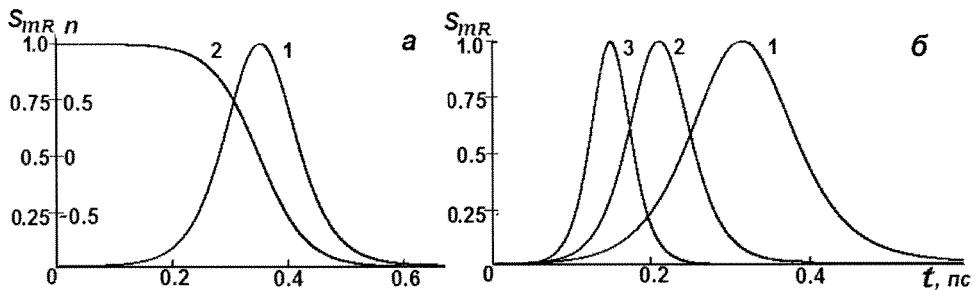


Рисунок 3 – Форма импульсов сверхизлучения (а, кривая 1, б, кривые 1 – 3) и динамика инверсии (а, кривая 2), рассчитанные по соотношениям (5)–(7):

$$\begin{aligned} N &= 5 \cdot 10^{18} \text{ (а), } 2.5 \cdot 10^{18} \text{ (кривая 1), } 4 \cdot 10^{18} \text{ (2), } 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^3 \text{ (3) (б); } \mu = 8 \cdot 10^{-29} \text{ Кл} \cdot \text{м,} \\ \lambda &= 2\pi c/\omega = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ м, } \varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}, \eta = 3.6 \end{aligned}$$

Заключение

Проведенное моделирование и аналитическая оценка динамики СИ позволили характеризовать зависимость формирования коротких световых импульсов от материальных параметров в условиях сверхбыстрых процессов резонансного взаимодействия излучения с особо тонкими слоями оптических сред. Когерентность поля, высвечиваемого в процессе СИ, и поляризованности тонкого слоя, позволяет рассматривать это явление как способ получения сверхкоротких импульсов. В диапазоне ИК-частот до сих пор отмечается отсутствие электрооптических материалов, позволяющих применять стандартные методы модуляции добротности и сокращения длительности импульсов. Поэтому в настоящее время исследование СИ интенсивно развивается применительно к технологиям формирования коротких и сверхкоротких импульсов именно в этой спектральной области. Результаты приведенных в статье расчетов будут полезными для разработок методов получения или профилирования сверхкоротких световых импульсов.

Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ (проект № Ф14М 146).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Аллен, Л.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы / Л. Аллен, Дж. Эберли. – М. : Мир, 1978. – 224 с.
2. *Васильев, П. П.* Сравнение когерентных свойств сверхизлучения и лазерного излучения в полупроводниковых структурах / П. П. Васильев, Р. В. Пенти, И. Х. Уайт // Квант. электрон. – 2012. – Т. 42, № 12. – С. 1081–1086.
3. *Петров, Н. С.* Лазерная генерация тонких инверсных слоев / Н. С. Петров, А. Б. Зимин // Журн. прикл. спектр. – 2010. – Т. 77, № 1. – С. 69–73.
4. Local-feld effects in a dense ensemble of resonant atoms: Model of a generalized two-level system / A. A. Afanas'ev [et al.] // Phys. Rev. A. – 1999. – Vol. 60, № 2. – P. 1523–1529.
5. *Kaplan, A. E.* Nanoscale stratification of optical excitation in self – interacting one – dimensional arrays / A. E. Kaplan, S. N. Volkov // Phys. Rev. – 2009. – Vol. A79. – P. 053834-1-053834-16.
6. *Захаров, С. М.* Оптоэлектронные интегральные схемы с применением вертикально излучающих лазеров // С. М. Захаров, В. Б. Федоров, В. В. Цветков // Квант. электрон. – 1999. – Т. 28, № 3. – С. 189–206.
7. *Гадомский, О. Н.* Эхо-спектроскопия поверхности / О. Н. Гадомский, Р. А. Власов. – Минск : Навука і тэхніка, 1990. – 216 с.
8. *Рупасов, В. И.* О граничных задачах в нелинейной оптике резонансных сред / В. И. Рупасов, В. И. Юдсон // Квант. электрон. – 1982. – Т. 9, № 11. – С. 2179–2186.
9. *Пантел. Р.* Основы квантовой электроники / Р. Пантел, Г. Путхоф. – М. : Мир, 1972. – 384 с.
10. Когерентное усиление УКИ в активированных кристаллах / О. П. Варнавский [и др.] // ЖЭТФ. – 1984. – Т. 84, № 4. – С. 1227–1239.
11. *Васильев, П. П.* Роль сильного усиления среды в возникновении сверхизлучения и наблюдения когерентных эффектов в полупроводниковых лазерах / П. П. Васильев // Квант. электрон. – 1999. – Т. 29, № 1. – С. 4–8.
12. Excitonic Nonlinearities of Semiconductor Microcavities in Nonperturbative Regime / S. W. Koch [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1996. – V. 77. – P. 5257–5260.
13. Rabi oscillations in a semiconductor quantum dot: Influence of local fields / G. Ya. Slepyan [et al.] // Phys. Rev. – 2004. – Vol. B70, No 4. – P. 045320-1–045320-5.
14. *Морозов, Ю. А.* Влияние спонтанных флуктуаций носителей тока и фотонов на динамику инжекционного лазера в режиме генерации пикосекундных импульсов / Ю. А. Морозов, А. В. Красовский // Квант. электрон. – 1994. – Т. 21, № 8. – С. 748–752.

Поступила в редакцию 09.03.2015 г.

Контакты: (+375 222) 25-17-37 (Юревич Юрий Владимирович)

Yurevich Y.V., Yurevich V.A. SUPERRADIATION PULSES IN THIN INVERSE FILM.

For model parameters of semiconductor quantum-dimensional structures numerical calculation of the dynamics of superradiation (SR) which is developed in a submicronic planar layer of the inverse medium on the basis of the initiating radiation of a spontaneous luminescence on the frequency of exciton resonance is given. Modeling considers chances of dipole – dipolar interaction, its influence on SR pulse characteristics is assessed. Analytical expression for the bending-around curve of SR pulse is received.

Key words: coherent optical effects, thin film of active atoms, dense resonant medium, semiconductor quantum-dot structure

УДК 535.378.334

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ, ОТРАЖЕННОГО ДВУСЛОЙНОЙ ПЛЕНОЧНОЙ СТРУКТУРОЙ

Ю. В. Юрьевич

аспирант

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова;

В. Л. Титов

кандидат физико-математических наук, доцент

Могилевский государственный университет продовольствия

В рамках динамической модели резонансного отражения, сформулированной на основе полуклассического подхода к изучению взаимодействия света с веществом, изучены светомодуляционные свойства системы из двух тонких планарных пленок. Материал пленок рассматривается как плотная резонансная среда, в нелинейном отклике которой существенно влияние диполь-дипольного взаимодействия. Для модельных параметров полупроводниковых квантоворазмерных структур предсказывается возможность самоиндущей неустойчивости в отраженном излучении, представленной автомодуляционной регулярной временной структурой. Неустойчивость порождена резким переключением резонансного отражения, определяемым внутренней бистабильностью пленочной системы.

Ключевые слова: резонансное отражение, оптические тонкие пленки, диполь-дипольное взаимодействие, оптическая бистабильность, автомодуляция излучения.

Введение

Изучению свойств полупроводниковых тонкопленочных систем уделено особое внимание в связи с очевидным назначением их использования. Реализация нелинейных режимов срабатывания оптических элементов на их основе при действии когерентного поля перспективна для создания практически безынерционных модулирующих устройств в системах обработки и передачи оптической информации. Наряду с большими возможностями по управлению светом пленочным модулирующим элементам естественно присущи компактность и высокая надежность. В нелинейном поведении этих систем значительную роль играет резонансная нелинейность поглощения и рефракции при взаимодействии световым полем с пленочными слоями. Несмотря на предельно малую толщину слоя по сравнению с длиной волны света, нелинейная зависимость оптических свойств резонансной среды от интенсивности поля действующих на атомы волн может привести к возникновению обратной связи (амплитудно-фазовым девиациям). Обратная связь реализуется благодаря самоиндущему изменению фазовых соотношений между полем и поляризацион-

© Юрьевич Ю.В., 2015

© Титов В.Л., 2015

ным откликом среды. При квазистационарном воздействии света это приводит к явлениям бистабильности, обычно называемой внутренней, и оптического гистерезиса в пропускании даже единственного резонансного слоя [1–3]. В определенных условиях нелинейная динамика системы излучение – планарная граничная пленка может носить характер самопульсаций, даже оптического хаоса [4], или приводить к формированию поперечных статических и движущихся пространственных структур [5, 6]. Фазовую чувствительность пленочной системы, т.е. зависимость ее динамических свойств от фазовых соотношений светового поля в цепи обратной связи, можно оптимизировать. Это осуществимо, когда дополнительную обратную связь в системе реализуют не с помощью пассивного в динамическом отношении элемента (например, зеркала), а элемента, поведение которого также нелинейно и меняется со временем, но с другим темпом релаксации. Такой тип связи как раз и реализуется в многослойных резонансных структурах.

В настоящей работе анализируется динамика отклика на когерентное излучение простого варианта пленочной системы – планарной структуры, состоящей из двух тонких нелинейных пленок с различием времен релаксации. Характерно, что рассматриваются тонкие слои плотных резонансных сред, то есть материалов с высокой концентрацией активных центров (атомов, молекул, ионов или экситонов). К плотным резонансным средам относят интенсивно изучаемые в последнее время квантоворазмерные структуры на используемых в оптике и лазерной физике полупроводниках [7].

Постановка задачи

Типичным для этих материалов является спектральное смещение линии поглощения, обусловленное близким диполь-дипольным взаимодействием атомов. Влияние локального поля дипольных атомов на положение центра и форму линии резонансного поглощения надежно подтверждено данными спектроскопических измерений [8].

Известно также, что в средах, используемых в оптике полупроводников, существуют механизмы, обуславливающие связь амплитуды и фазы светового поля, которая отличается от аналогичной связи в среде двухуровневых атомов [9], играющей существенную роль в системах с фазочувствительной обратной связью. Следствия этих механизмов, тем не менее, могут быть учтены в рамках обобщенной двухуровневой модели путем введения коэффициента, который связывает относительное изменение показателя преломления с коэффициентом поглощения при вариациях плотности свободных носителей, – так называемого α -фактора. Дестабилизирующая роль этого фактора изучена в работе [10] для двух разнесенных в пространстве идентичных пленок. В работах [11, 12] возможность развития самоиндукционной неустойчивости поля, обусловленной α -фактором, изучена для излучения, прошедшего единую двуслойную планарную систему, и подтверждена результатами эксперимента. Отметим также, что в работе [13] для объяснения наблюдаемых в этом эксперименте автоколебаний интенсивности, привлечена более общая теоретическая модель с учетом действенности нерезонансной рефракцион-

ной нелинейности двух типов – керровской и тепловой. Задача изучения проявлений неустойчивости в отраженном нелинейной пленочной системой первоначально непрерывном излучении, безусловно, представляет интерес. В данной работе она решена для случая существования амплитудно-фазовой связи, обусловленной влиянием близких полей ансамбля дипольных частиц в структуре пленки плотной резонансной среды на положение резонанса линии поглощения. Двухслойная пленочная система освещается квазистационарным когерентным плосковолновым полем лазерного излучения, нормально падающим на планарную поверхность системы.

При формулировке основных уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие светового поля с пленочной структурой, далее будем придерживаться довольно распространенного в литературе приближения граничного сверхтонкого слоя резонансных атомов [14]. Хотя концентрация активных центров относительно высока, что типично для плотных резонансных сред, расстояние между активными центрами в среде обоих слоев предполагается достаточным, чтобы избежать перекрытия их электронных орбиталей. В этом допущении можно придерживаться традиционного описания взаимодействия атомарных диполей в квантоворазмерной структуре [7]. Применение квантовой резонансной модели взаимодействия при анализе динамики оптических явлений в используемых в лазерной физике полупроводниках детально обосновано, например, в [15].

Уравнения модели

Из граничных электродинамических условий для полей следуют выражения для связи между напряженностями внешнего (с несущей частотой ω), прошедшего и отраженного электрического поля (E_r , E и E_s) и плотностями вероятности поверхностной резонансной поляризованности ρ_1 и ρ_2 . Эффективное поле, действующее на активные центры в структуре материалов обеих пленок, в приближении тонкого слоя (когда его толщина l меньше длины волны $\lambda = 2\pi c/\omega$) связано с падающим на пленки полем алгебраическими соотношениями. Величина действующего поля включает характеризующую диполь-дипольное взаимодействие лорентцову компоненту. Динамика последней, подобно [16] выражаемой в приближении среднего поля, определена резонансной поляризованностью. В качестве исходной для вывода материальных уравнений, описывающих систему из двух тонких полупроводниковых пленок, рассмотрена система, которая записана для активной среды, состоящей из двухуровневых атомов [17]. Из оптических уравнений Блоха для взаимодействия двухуровневой среды динамику поляризации активной среды в большинстве случаев можно адиабатически исключить из рассмотрения, считая ее безынерционной по отношению к действующим на активные центры в обеих пленках полям E_1 и E_2 . Это касается и квазистационарного взаимодействия света с полупроводниковыми средами, тогда можно выразить квазиравновесные значения комплексных вероятностей поляризованности ρ_{10} и ρ_{20} и, соответственно, записать выражения для связи полей:

$$\rho_{10,20} = \frac{1+n_{1,2}+i(\Delta_2+\gamma n_{1,2})}{(1+n_{1,2})^2+(\Delta_2+\gamma n_{1,2})^2} \frac{n_{1,2}}{\kappa_{1,2}} \sqrt{\sigma_{1,2}} E_i,$$

$$E_1 = \frac{2}{1+\eta} E_i - \frac{\kappa_1}{\sqrt{\sigma_1}} \rho_{10}, \quad E_2 = E_1 - \frac{\kappa_2}{\sqrt{\sigma_2}} \rho_{20}, \quad E_r = -\frac{1-\eta}{1+\eta} E_i - \frac{\kappa_1}{\sqrt{\sigma_1}} \rho_{10}. \quad (1)$$

Здесь $n_1(t)$ и $n_2(t)$ – соответственно, переменные показатели резонансного поглощения (пропорциональные плотности активных центров или разности заселенностей уровней основного перехода в обеих пленках), κ_1 и κ_2 , σ_1 и σ_2 – показатели ненасыщенного поглощения и значения сечения индуцированных переходов в первом и втором слоях, $\Delta_{1,2} = (\omega - \omega_{01,02})T_2$ – отстройки несущей частоты от центров линии резонансного поглощения ω_{01} и ω_{02} (значения отстроек нормированы по полуширине линий, выражаемой $1/T_2$); $\gamma n_{1,2}$ – значения лорентцовых поправок. Время фазовой релаксации T_2 , нерезонансный показатель преломления η , нормировочный коэффициент при лорентцовых поправках $\gamma = \frac{(\eta+1)\lambda}{6\pi l}$ для простоты считаем одинаковыми в обеих пленках.

Исключение переменных ρ_{10} и ρ_{20} , из уравнений для разностей заселенности по аналогии с [11], а также масштабирование переменных времени, поля и релаксационных параметров приводит к системе дифференциальных уравнений для эволюции резонансных показателей поглощения n_1 и n_2 :

$$\frac{dn_1}{d\tau} = \kappa_1 - n_1 - \frac{n_1 I}{(1+n_1)^2 + (\Delta_1 + \gamma n_1)^2} \frac{1 + (\Delta_2 + \gamma n_2)^2}{(1+n_2)^2 + (\Delta_2 + \gamma n_2)^2},$$

$$\tau_{12} \frac{dn_2}{d\tau} = \kappa_2 - n_2 - \frac{\sigma n_2 I}{(1+n_2)^2 + (\Delta_2 + \gamma n_2)^2} \frac{1 + (\Delta_1 + \gamma n_1)^2}{(1+n_1)^2 + (\Delta_1 + \gamma n_1)^2}, \quad (2)$$

где $\tau = \frac{t}{T_{11}}$, $I = \frac{\mu_1^2}{\hbar^2} T_{11} T_2 E_i^2$ – интенсивность внешнего излучения, нормированная по уровню насыщающей мощности в первой пленке (μ_1 – дипольный момент основного перехода в первой пленке), $\tau_{12} = T_{21}/T_{11}$ – отношение времен продольной релаксации (спонтанной рекомбинации) T_{11} и T_{21} , также $\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ – отношение сечений перехода в обеих пленках.

Система (2) допускает возможность качественного изучения устойчивости ее равновесных состояний (особых точек n_{1s} , n_{2s}) при условии, что на структуру падает стационарное поле с интенсивностью $I(\tau)=I_0$. Формально выражения для расчета зависимости этих состояний от характеристик излучения и среды определяются из нелинейной алгебраической системы, образованной сингулярными пределами уравнений (2):

$$n_{1s} I_0 F_1 F_2 = \frac{\kappa_1 - n_{1s}}{1 + (\Delta + \gamma n_{2s})^2}, \quad \sigma n_{2s} I_0 F_1 F_2 = \frac{\kappa_2 - n_{2s}}{1 + (\Delta + \gamma n_{1s})^2}, \quad F_{1,2} = \frac{1}{(1 + \kappa_{1,2} n_{1s,2s})^2 + (\Delta + \gamma n_{1s,2s})^2}. \quad (3)$$

Аналитическое решение системы этих уравнений относительно n_{1s}, n_{2s} ввиду высоких степеней неизвестных n_{1s}, n_{2s} невозможно; удобным представляется искать выражение для связи неизвестных, исключив величину I_0 , выражая ее, например, из первого соотношения в (3).

$$I_0 = \frac{1}{n_{1s}F_1F_2} \frac{\kappa_1 - n_{1s}}{1 + (\Delta + \gamma n_{2s})^2}. \quad (4)$$

Из полученного тем самым кубического уравнения

$$(\gamma n_{1s})^3 - (\kappa_1\gamma - 2\Delta_1)(\gamma n_{1s})^2 + \{1 - 2\kappa_1\gamma \Delta_1 + \frac{\kappa_2 - n_{2s}}{\sigma n_{2s}} [1 + (\Delta_2 + \gamma n_{2s})^2]\} \gamma n_{1s} - (1 + \Delta_1^2)\kappa_1\gamma = 0 \quad (5)$$

можно определить соотношение для n_{1s} и n_{2s} для разных сочетаний материальных характеристик и значений отстройки и далее, зная физические пределы изменения обеих величин ($0 < n_{1s,2s} < \kappa_{1,2}$), параметрическим расчетом определить их зависимость от I_0 .

Качественный анализ

Линеаризация (2) в окрестности особых точек n_{1s}, n_{2s} , выражения для которых могут быть получены решением (3), позволяет сформулировать качественный полином $\Phi(\beta) = \beta^2 + 2\alpha\beta + \chi/\tau_{12}$. Устойчивость состояния равновесия (3) определяется корнями $\beta_{1,2}$ полинома $\Phi(\beta)$. Их значения, действительные или комплексные, выражаются через коэффициенты полинома:

$$2\alpha = 1 + I_0 R_2 F_1 F_2 (1 - 2P_1 F_1 n_{1s}) + \frac{1}{\tau_{12}} [1 + \sigma I_0 R_1 F_1 F_2 (1 - 2P_2 F_2 n_{2s})], \quad (6)$$

$$\chi = [1 + I_0 R_2 F_1 F_2 (1 - 2P_1 F_1 n_{1s})][1 + \sigma I_0 R_1 F_1 F_2 (1 - 2P_2 F_2 n_{2s})] - 4\sigma n_{1s} n_{2s} (I_0 F_1 F_2)^2 (R_1 P_1 F_1 - \gamma \delta_1) (R_2 P_2 F_2 - \gamma \delta_2),$$

где $\delta_{1,2} = \Delta_{1,2} + \gamma n_{1s,2s}$, $R_{1,2} = 1 + \delta_{1,2}^2$, $P_{1,2} = 1 + n_{1s,2s} + \delta_{1,2}$.

Существование пары комплексно-сопряженных корней $\beta_{1,2} = \alpha \pm i\sqrt{-D}$ (D – дискриминант полинома $\Phi(\beta)$) с положительной действительной частью указывает на возможность нестабильности, соответствующей гармоническим решениям линеаризованной системы с частотой $\Omega = \sqrt{\chi/\tau_{12} - \alpha^2}$:

$$\Omega^2 = 16 \frac{\sigma}{\tau_{12}} n_{1s} n_{2s} F_1 F_2 I_0 (R_1 P_1 F_1 - \gamma \delta_1) (R_2 P_2 F_2 - \gamma \delta_2) -$$

$$-\left\{ 1 + I_0 R_2 F_1 F_2 (1 - 2P_1 F_1 n_{1s}) - \frac{1}{\tau_{12}} [1 + \sigma I_0 R_1 F_1 F_2 (1 - 2P_2 F_2 n_{2s})] \right\}^2.$$

Особая точка, характеризующая равновесное состояние, тогда представляет собой неустойчивый фокус. Система (2), однако, такова, что учитываемая в ней нелинейность, описывает насыщение поглощения, поэтому нарастание функций $n_1(\tau)$ и $n_2(\tau)$ неизбежно ограничено. Соответствующие фазовые тра-

ектории решений исходной нелинейной системы (2) при $I(t)=I_0$ в качестве аттрактора тогда могут иметь предельный цикл и описывать периодическую зависимость напряженности отраженного поля E_r .

Область возможных осцилляторных решений (2) может быть установлена расчетом (3) – (6) при задании n_{2s} как неотрицательного линейно нарастающего параметра в пределах $0 < n_{2s} < \kappa_2$ и вычислении n_{1s} из выражения:

$$\kappa_1\gamma n_{1s} = \frac{1}{3}(\kappa_1\gamma - 2\Delta_1) - \sqrt[3]{S + \sqrt{S^2 + M^3}} + \sqrt[3]{-S + \sqrt{S^2 + M^3}}, \quad (7)$$

где $S = (\kappa_1\gamma - 2\Delta_1)[M + (\kappa_1\gamma - 2\Delta_1)^2/9]/6$, $M = 1 - (\kappa_1\gamma + \Delta_1)^2/3 + (\kappa_2 - n_{2s})(1 + \delta_2^2)/\sigma n_{2s}$.

Одновременно вычисляются значения коэффициента затухания α , дискриминанта $D = \alpha^2 - \chi/\tau_{12}$ и I_0 как функций n_{2s} при фиксированных значениях остальных коэффициентов (2). Описанная таким образом процедура параметрического расчета дает возможность построения зависимости α и χ , а также D или частоты Ω на нелинейной шкале I_0 . Неустойчивым осцилляторным решениям, которые могут проявляться при условиях $D < 0$ и $\alpha \leq 0$ должно соответствовать формирование регулярной автомодуляционной составляющей в интенсивности отраженного излучения. Примеры кривых $\alpha(I_0)$, $D(I_0)$ для подобных случаев при различии параметров соотношений (3) – (7) приведены на рисунке 1.

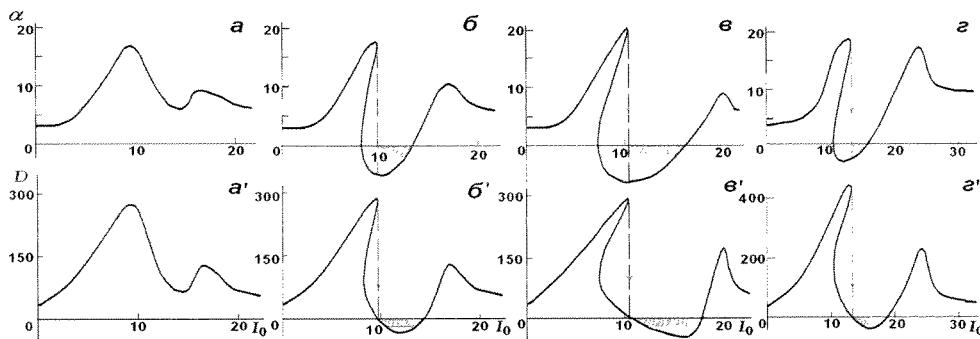


Рисунок 1 – Зависимость коэффициента затухания ($a – e$) и дискриминанта характеристического уравнения ($a' – e'$) от интенсивности поля возбуждения I_0 : $\Delta_1 = 0.0$ (a), -0.3 (b , e), -0.5 (c), $\tau_{12} = 0.2$ ($a – e$), 0.15 (e), $\sigma = 4.0$ ($a – e$), 2.5 (e), $\kappa_1 = 1.0$, $\kappa_2 = 1.5$, $\Delta_2 = -0.1$, $\eta = 3.6$, $T_{11} = 1.0 \cdot 10^{-9}$ с, $T_2 = 1.0 \cdot 10^{-12}$ с. Область неустойчивости на шкале I_0 выделена штриховкой, пунктиром на вариантах ($b – e$) указано направление бистабильного скачка

Анализ данных от многократных расчетов, подобных тем, результаты которых продемонстрированы на рисунке 1, позволил сделать следующие выводы. Режим может возникать в определенном диапазоне внешней интенсивности I_0 , который должен соответствовать области бистабильной зависимости $n_{1s}(I_0)$ и $n_{2s}(I_0)$. Это заметно по различию в ходе кривых на рисунке 1, а и на рисунках 1, б – в; эти три варианта нелинейной зависимости иллюстрируют возможность неустойчивого режима отражения. Отрицательные значения дискриминанта (рис. 1, б' – в') “стартуют” в точке бистабильного скачка коэффициента α , который также в этой точке становится отрицательным (рис. 1, б – в).

Поиск и определение области бистабильности на основе параметрического расчета соотношений, вообще, представляет самостоятельную задачу и довольно сложен из-за множества параметров, определяющих релаксационные и нелинейные характеристики реакции сред, а также фазовые соотношения внешнего и действующего в пленках излучения. Поэтому просто отметим, что возможность неустойчивого поведения светового потока, отраженного системой резонансных пленок, проявляется в условиях бистабильности резонансного отражения. Свойство бистабильности в этом случае определяется смещением центра линии поглощения из-за влияния близких полей диполей. Положение и размер этой области зависит от величин отстройки Δ_1 и Δ_2 при том, что для существования бистабильности необходимо различие релаксационных констант T_{11} и T_{21} , характеризующих обратимость пропускания пленок с насыщаемым поглощением при снижении мощности возбуждения. Различными должны быть величины сечения поглощения, выражающие нелинейность резонансного поглощения пленок, то есть зависимость степени насыщения поглощения от уровня входной интенсивности.

Численное моделирование

В оценке величин коэффициентов при параметрическом расчете (3) – (7), а также при моделировании процесса отражения на основе интегрирования (1), (2), представлялось целесообразным исходить из тех оценок, которые известны, например, из работ [18, 19], где рассмотрены структуры на основе *InGaAs/GaAs* или *GaInNAsSb*, нелинейно реагирующие на когерентное излучение в экситонной области спектра. Масштаб моделируемого явления по уровню мощности соответствовал резонансному отражению квазинепрерывного излучения с интенсивностью порядка 10^5 Вт/см² субмикронными пленками толщины l , не превышающей $\sim 10^{-7}$ м; величина μ взята в диапазоне $(8\dots 10)\cdot 10^{-29}$ Кл·м, время спонтанной рекомбинации порядка $-1.0\cdot 10^{-9}$ с, частота резонанса ω_0 выбрана примерно равной $1.45\cdot 10^{15}$ рад/с. Разность релаксационных и нелинейных параметров пленок лежит в тех пределах, которые определяются обычным разбросом соответствующих величин в их экспериментальных измерениях [20].

Использование результатов качественной оценки устойчивости равновесных состояний в ходе численного моделирования процесса резонансного отражения дало возможность выявить довольно различающиеся сценарии динамического поведения интенсивности отраженного излучения. Численное интегрирование исходной системы уравнений (1), (2) проводилось методом Рунге – Кутты; для начальных условий, соответствующих возбуждению двухслойной системы излучением с нормированной стационарной мощностью I_0 , была рассчитана зависимость $I_r(t) = \mu_1^2 T_{11} T_2 E_r^2(t)/\hbar^2$. Вид решений $I_r(t)$ в наносекундном масштабе для материальных параметров, совпадающих с теми, что использованы в вариантах в, г рисунка 1, представлен на рисунке 2. Варианты рисунка 2 различаются значениями I_0 , которые соответствуют равновесным состояниям n_{1s} и n_{2s} с качественно разной устойчивостью.

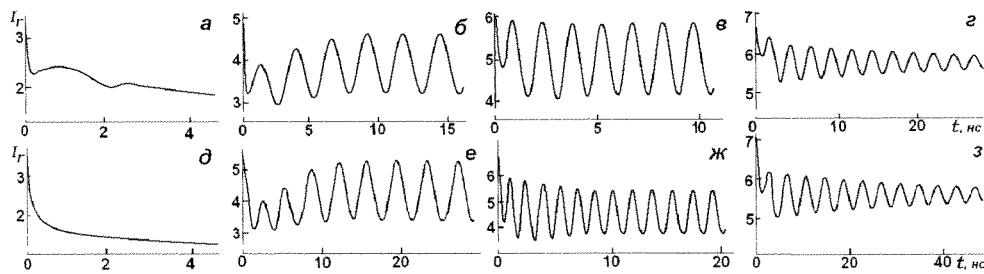


Рисунок 2 – Временна́я зависимость интенсивности I_r для устойчивых и неустойчивых режимов резонансного отражения: $I_0 = 9.8$ (а, д), 11.5 (б, е), 12.5 (г, ж), 14.5 (ж), 16.5 (з)

На рисунках 2, а, 2, д зависимость $I_r(t)$ проявляет экспоненциальный спад интенсивности до ее устойчивого значения. Рисунки 2, а, 2, д, 2, ж, 2, з демонстрируют автоколебательный режим отражения, определяемый неустойчивостью процесса энергообмена излучения со средой и представляющий автомодуляцию излучения. Модуляционной составляющей $I_r(t)$ присущ относительно низкий контраст, в целом определенным образом связанный с величиной частоты модуляции. Переходу к устойчивой регулярной структуре в интенсивности предшествует этап “разгорания” – несколько всплесков с несколько нарастающим периодом и амплитудой колебаний. Варианты 2, г, 2, з соответствуют колебательному переходу к стационарному режиму отражения. Осцилляторные сценарии типа 2, б – г и 2, е – з возможны для довольно небольшой области изменения I_0 , и при дальнейшем увеличении мощности возбуждения динамика отражения снова представлена экспоненциальным переходом к стационарному уровню интенсивности.

Заключение

В настоящей работе исследована динамическая реакция на световое поле системы, состоящей из двух тонких полупроводниковых пленок, рассматриваемых как плотные резонансные среды. Уравнения для такой системы, записанные для сверхтонкого слоя и с адиабатически исключенной поляризацией нелинейной среды, учитывают влияние близких полей диполей на диэлектрическую проницаемость. Это влияние приводит к дрейфу собственных частот диполей, зависящему от концентрации активных центров, следствием которого является дополнительная динамическая фазовая связь между прошедшим полем и плотностью активных центров (насыщаемым резонансным поглощением). Для оценки ее динамического эффекта использованы модельные параметры используемых в оптике и лазерной физике квантоворазмерных полупроводниковых структур, резонансно реагирующих на когерентное световое поле в экситонной области спектра.

Вследствие большой чувствительности подобной резонансной системы к фазовым соотношениям действующего и прошедшего полей в цепи обратной связи учет диполь-дипольного взаимодействия оказывает влияние на устойчивость системы. В лазерных схемах это влияние проявляется главным образом в динамических режимах, таких, как самопульсации [21]; в пассивной системе

из двух пленок наличие сильной амплитудно-фазовой связи способно обусловить бистабильность и, как следствие, повлечь качественную трансформацию стационарных состояний. Обусловленное именно диполь-дипольным взаимодействием в системе из пленок плотных резонансных сред нарастание нелинейности приводит к увеличению зоны бистабильности на шкале уровня внешнего возбуждения. С изменением уровня возбуждения в области бистабильного скачка происходит резкое переключение режимов нелинейного отражения, что, в частности, способно обусловить возникновение автомодуляционного осцилляторного режима. Подобный эффект развития неустойчивости в виде регулярной модуляции отраженного светового поля можно использовать для формирования временной структуры излучения или для разработки приемов диагностики физических свойств тонких пленок.

Соавтор Юревич Ю.В. признателен Белорусскому Фонду фундаментальных исследований за частичную поддержку работы (Проект Ф14М-146).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Башаров, А. М.* Тонкая пленка двухуровневых атомов – простая модель оптической бистабильности и самопульсаций / А. М. Башаров // ЖЭТФ. – 1988. – Т. 94. – С. 12–18.
2. *Loiko, N. A.* Delay instabilities in light transmission of thin film with mirror / N. A. Loiko, Yu.A. Logvin, A.M. Samson // Optics Commun. – 1996. – Vol. 124. – P. 383–391.
3. *Хаджи, П. И.* Особенности стационарного пропускания (отражения) тонкой пленки полупроводника с экситонной областью спектра / П. И. Хаджи, С. Л. Гайван // Квант. электрон. – 1997. – Т. 24. – С. 546–550.
4. *Paulau, P. V.* Self-sustained pulsations of light in nonlinear thin-film system / P. V. Paulau, N. A. Loiko // Phys. Rev. A. – 2005. – Vol. 72, № 1. – P. 013819-1–013819-8.
5. Triadic hopf-static structures in two-dimensional optical pattern formation / A. A. Afanas'ev [et al.] // Phys. Rev. E. – 1996. – Vol. 54. – P. R4548–R4551.
6. *Malyshev, V.* Spatial effects in nonlinear resonant reflection from the boundary of a dense semi-infinite two-level medium: normal incidence / V. Malyshev, E. C. Jarque // J. Opt. Soc. Am. B. – 1997. – Vol. 14, No 5. – P. 1167–1172.
7. *Kaplan, A. E.* Nanoscale stratification of optical excitation in self-interacting one-dimensional arrays / A. E. Kaplan, S. N. Volkov // Phys. Rev. – 2009. – Vol. A79. – P. 1053834–1–16.
8. *Boyd, R. W.* Local feld effects in enhancing the nonlinear susceptibility of optical materials / R. W. Boyd, J. J. Maki, J. E. Sipeb // Nonlinear Optics: Fundamentals, Materials and Devices. – 1992. – P. 63–76.
9. *Garmire, E.* Resonant optical nonlinearities in semiconductors / E. Garmire // IEEE Journ. Sel. Top. Quant. Electron. – 2000. – Vol. 6, № 6. – P. 1094–1110.
10. *Бабушкин, И. В.* Влияние α -фактора на динамику двухслойной полупроводниковой структуры / И. В. Бабушкин, П. В. Павлов, Н. А. Лойко // Квант. электрон.– 2004. – Т. 34, № 4. – С. 355–360.
11. *Редько, В. П.* Автомодуляция лазерного излучения, отраженного от двухслойной резонансной среды / В. П. Редько, А. В. Хомченко, В. А. Юревич // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 1. – С. 57–61.

12. *Glasunova, E. V.* Self-induced instability of radiation in thin-film planar structure / E. V. Glasunova, A. V. Khomchenko, V. A. Yurevich // Proc. SPIE. – 2006. – Vol. 6259. – P. 62590Y-1– 62590Y-10.
13. *Сотский, А. Б.* Расчет автоколебаний в схеме призменного возбуждения нелинейного оптического волновода / А. Б. Сотский, А. В. Хомченко // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 4. – С. 29–33.
14. *Юдсон, В. И.* Нелинейная резонансная оптика тонких пленок: метод обратной задачи / В. И. Юдсон, В. И. Рупасов // ЖЭТФ. – Т. 93. – 1987. – С. 494–501.
15. *Haug, H.* Quantum theory of the optical and electronic properties of semiconductors / H. Haug, S. W. Koch // Singapore: World Scientific, 1994. – 492 р.
16. *Захаров, С. М.* Взаимодействие УКИ света с тонкопленочными резонаторными структурами / С. М. Захаров // ЖЭТФ. – 1998. – Т. 114, вып. 5(11). – С. 1578–1594.
17. *Аллен, Л.* Оптический резонанс и двухуровневые атомы / Л. Аллен, Дж. Эберли. – Москва : Мир, 1978. – 224 с.
18. *Schneider, S.* Self-induced transparency in *InGaAs* quantum-dot waveguides / S. Schneider [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2003. – Vol. 83, № 18. – P. 3668–3670.
19. Parameter tunable *GaInNAs* saturable absorbers for mode locking of solid-state lasers / A. Rutz [et al.] // J. Cryst. Growth. – 2007. – Vol. 301. – P. 570–574.
20. *Khomchenko, A.V.* Waveguide spectroscopy of thin films / A. V. Khomchenko // NY: Academic Press, 2005. – 220 р.
21. *Тимошенко, Е. В.* Динамика излучения в структурах из квантовых точек при учете близких дипольных взаимодействий / Е. В. Тимошенко, В. А. Юрьевич, Ю. В. Юрьевич // Доклады НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 6. – С. 61–66.

Поступила в редакцию 03.06.2015 г.

Контакты: va_yurevich@mail.ru (Юревич Юрий Владимирович)

Yurevich Y.V., Titov V.L. THE INSTABILITY OF RADIATION REFLECTED BY TWO-LAYER FILM STRUCTURE.

Light modeling properties of the system formed by two thin planar films are examined in the context of the dynamic model of resonance reflection formulated on the basis of the semiclassical approach to the study of the interaction of light and substance. The material of the films is considered as a dense resonance medium in the nonlinear echo of which the influence of dipole-dipolar interaction is sufficient. For model parameters of semiconductor quantum-size structures the authors prognosticate an opportunity of self-induced instability in the reflected radiation presented by automodulation regular time structure. The instability is caused by a rapid switch of resonance reflection determined by the inner bistability of the film structure.

Key words: resonance reflection, optical thin films, dipole – dipolar interaction, optical bistability, automodulation of radiation.

УДК 548.24

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ В МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕКЛАХ У ПОЛОС СДВИГА В ФОРМЕ ИЗОГНУТЫХ ЛУЧЕЙ

A. A. Рюмцев

магистр технических наук, аспирант

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого

O. M. Остриков

кандидат физико-математических наук, доцент

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого

Предложена методика расчета полей напряжений у полос сдвига в форме изогнутых лучей. Описан характер распределения напряжений в материале у полос сдвига при различных закономерностях распределения квазидислокаций. Определены области локализации напряжений.

Ключевые слова: металлическое стекло, полоса сдвига, поля напряжений.

1. Введение

Для дальнейшего развития техники необходимо применение материалов нового поколения с заранее заданными физическими свойствами. Примером таких материалов являются металлические стекла. Однако недостаточное исследование материала данного типа по вопросам напряженного состояния, особенностей деформации, не позволяет создать полную картину о сферах и областях применения металлических стекол [1–10].

Согласно [1], пластическая деформация в металлических стеклах, как правило, протекает негомогенно, и деформирование реализуется через канал сдвиговой деформации, именуемый полосой сдвига – результат проявления негомогенной пластической деформации. Форма полос сдвига, в зависимости от величины приложенной нагрузки в условиях антиплюского сдвига, может иметь форму, представляющую собой луч [1]. На пути развития полосы сдвига, как правило, встречаются стопоры в виде кристаллических включений, ввиду чего происходит изменение направления развития полосы сдвига. При большом увеличении на лучах заметны волнистости, вызванные дефектами структуры материала. Таким образом, полосу сдвига в виде лучей с волнистостью можно представить как прямую с наложенными на нее гармониками.

В виду вышеизложенного, целью работы являлась разработка методики расчета обусловленных полосой сдвига в виде луча полей напряжений в металлических стеклах.

2. Постановка задачи

Если учесть схожесть процесса развития пирамидального скольжения, двойникования в монокристаллах и негомогенной пластической деформации в

© Рюмцев А.А., 2015

© Остриков О.М., 2015

аморфных средах при их локальном деформировании становится целесообразным использование математического моделирования дислокационных процессов для описания деформирования аморфных материалов, применяемых для кристаллических твердых тел [2]. Основываясь на методе Грина, произведем расчет полей напряжений $\sigma_{ij}(x, y)$ у полосы сдвига, находящейся вдали от поверхности аморфного материала. След полосы сдвига в плоскости XOY будет проецироваться на ось OX в виде отрезка длиной L . Согласно [11], напряжения у полосы сдвига могут быть рассчитаны по формуле

$$\sigma_{ij}(x, y) = \int_0^L \sigma_{ij}^0(x, y, \xi) \rho(\xi) \sqrt{1 + (T(\xi))^2} d\xi, \quad (1)$$

где $\sigma_{ij}^0(x, y, \xi)$ – компоненты тензора напряжений, создаваемых единичной дислокацией полосы сдвига, и определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{zx}^0 &= -\frac{\mu b_e}{2\pi} \frac{y - f(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f(\xi))^2}; \\ (2) \end{aligned}$$

$$\sigma_{zx}^0 = -\frac{\mu b_e}{2\pi} \frac{y - f(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f(\xi))^2},$$

где μ – модуль сдвига; ξ – параметр интегрирования; b_e – модуль винтовой квазидислокации полосы сдвига; $\rho(\xi)$ – плотность квазидислокаций; $f(\xi)$ – функция, определяющая форму полосы

$$T(\xi) = \frac{df(\xi)}{d\xi}. \quad (3)$$

Форму полосы сдвига типа криволинейного луча (см. рис. 1, а) можно описать функцией

$$f(\xi) = -3A_1 \cdot \ln(\xi), \quad (4)$$

где A_1 – эмпирический коэффициент.

Согласно экспериментальным данным [1], полоса сдвига вдоль всей своей длины имеет волнистости, которые можно описать гармонической функцией. В этом случае форма полосы сдвига, образованная винтовыми дислокациями (рис. 1, б), может быть описана функцией

$$f(\xi) = A_2 \cdot \ln\left(\frac{1}{\xi^3}\right) + B_2 \cdot \sin(C_2 \cdot \xi) + D_2, \quad (5)$$

где A_2, B_2, C_2 и D_2 – эмпирические коэффициенты.

Рассмотрим четыре различных вида функции плотности квазидислокаций $\rho(\xi)$. Пусть в первом случае плотность квазидислокаций описывается функцией

$$\rho(\xi) = 10^6. \quad (6)$$

Пусть во втором случае закон распределения квазидислокаций носит линейный характер и описывается функцией

$$\rho(\xi) = A_3 \cdot \xi + B_3, \quad (7)$$

где A_3, B_3 – эмпирические константы.

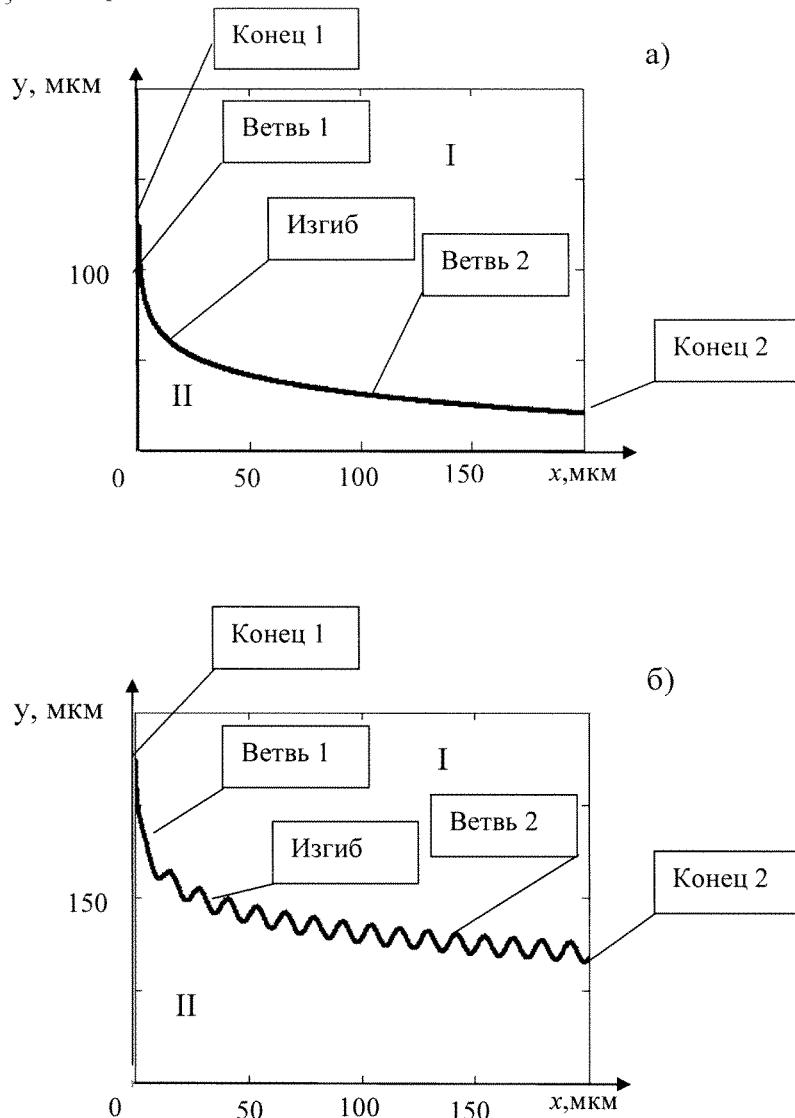


Рисунок 1 – Схематичне зображення форм полос сдвигу: а – в виде лучей, форма которых описывается функцией (4); б – в виде лучей, форма которых описывается функцией (5)

В третьем случае закон распределения квазидислокаций носит нелинейный характер и описывается функцией

$$\rho(\xi) = A_4 \cdot \xi^2 + B_4 \cdot \xi + C_4, \quad (8)$$

где A_4, B_4 и C_4 – эмпирические коэффициенты.

В четвертом случае плотность квазидислокаций пусть изменяется по гармоническому закону, и для варианта формы полосы, описанного формулой (4), закон распределения квазидислокаций пусть будет задан функцией

$$\rho(\xi) = A_5 \cdot \sin(\xi), \quad (9)$$

где A_5 – эмпирический коэффициент.

Для случая формы полосы сдвига, описанной функцией (5), закон распределения квазидислокаций пусть будет задан функцией

$$\rho(\xi) = \sin(A_6 \cdot \xi) \cdot B_6, \quad (10)$$

где A_6, B_6 – эмпирические коэффициенты.

3. Результаты расчетов полей напряжений и их обсуждение

Для варианта формы полосы сдвига, описываемой функцией (4), где $A_1=5$ мкм, при распределении плотности квазидислокаций по функции (6), напряжения σ_{xy} сконцентрированы у конца 1 полосы сдвига и положительны (см. рис. 2, а). В положительном направлении оси OX в области I напряжения также положительны и убывают при удалении от полосы вокруг конца 2, где происходит переход от положительных напряжений к отрицательным. В области II напряжения максимальны по модулю у ветви 2 и отрицательны. Также максимальные по модулю отрицательные напряжения сконцентрированы в отрицательном направлении оси OX от изгиба ветви 1, уменьшаясь у этой зоны при перемещении против и по часовой стрелке.

Видно, что положительные напряжения σ_{xy} локализованы у конца 2, постепенно убывая в направлении от него (см. рис. 2, б). В положительном направлении оси OY напряжения также положительны и убывают в направлении от нее вокруг конца 1 полосы сдвига, где меняются с положительных на отрицательные. Максимум растягивающих напряжений находится в отрицательном направлении оси OX от полосы у изгиба ветви 1, постепенно убывая по мере удаления от этой зоны вокруг конца 1 по часовой стрелке и при перемещении вокруг ветви 2 против часовой.

В случае варианта формы полосы сдвига, описываемой функцией (4), при линейном распределении плотности квазидислокаций, описываемом функцией (7) где $A_3=0,9 \text{ мкм}^{-2}$; $B_3=6 \text{ мкм}^{-1}$, наибольшие напряжения σ_{xy} сконцентрированы у полосы сдвига на некотором расстоянии от конца 2 (см. рис. 3, а). Причем в области I данные напряжения положительны, а в области II – отрицательны. Напряжения σ_{xy} уменьшаются по модулю при удалении от этой зоны и меняются с положительного на отрицательный вокруг конца 2 полосы сдвига, а также с отрицательного на положительный в области II относительно центра изгиба полосы по часовой стрелке.

Для напряжений σ_{xy} можно отметить, что наибольшие их значения наблюдаются у конца 2 полосы сдвига и постепенно убывают при удалении от этой зоны (см. рис. 3, б). Также напряжения σ_{xy} концентрируются у центра изгиба полосы, где они отрицательны. При этом в области II у изгиба напряжения по модулю значительно больше напряжений в области I. Смена напряжений с положительных на отрицательные происходит в области II вокруг центра ветви 2

по часовой стрелке, а в области I также вокруг центра ветви 2, но против направления хода часовой стрелки.

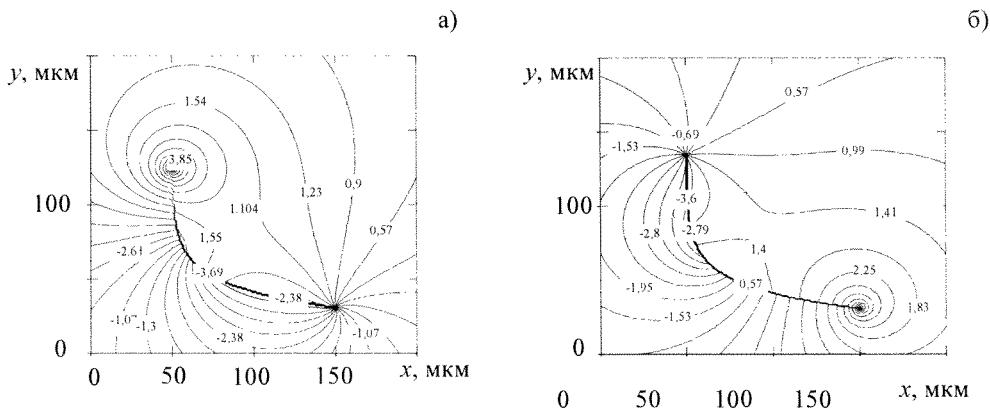


Рисунок 2 – Распределение напряжений у полосы сдвига формы, описываемой функцией (4) при распределении плотности квазидислокаций по функции (6): а) σ_{zx} ; б) σ_{zy} (МПа)

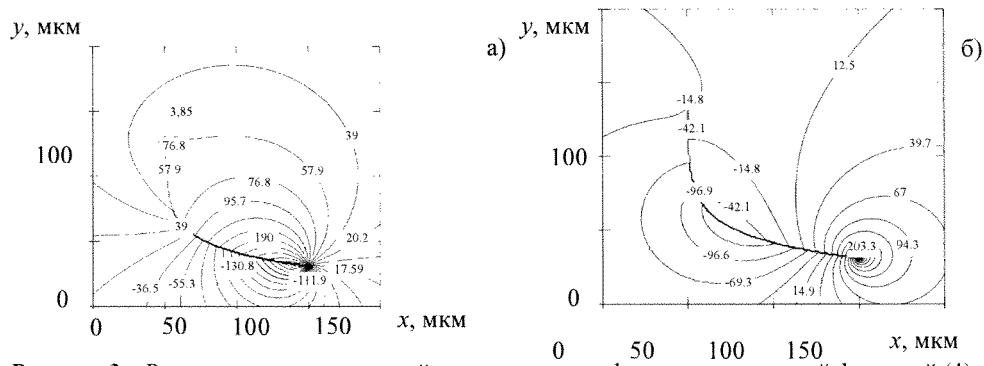


Рисунок 3 – Распределение напряжений у полосы сдвига формы, описываемой функцией (4), при линейном распределении плотности квазидислокаций, описываемом функцией (7):

$$\text{а)} \sigma_{zx}; \text{ б)} \sigma_{zy} \text{ (МПа)}$$

Для следующего варианта формы полосы сдвига, которая описывается функцией (4), где $A_1=5$ мкм, при нелинейном распределении плотности квазидислокаций, описываемом функцией (8), где $A_4=1/10$ мкм⁻³; $B_4=1/5$ мкм⁻²; $C_4=5$ мкм⁻¹, напряжения σ_{zx} сконцентрированы у ветви 2 ближе к концу 2 (см. рис. 4, а). В области I напряжения положительны, в области II – отрицательны.

Наибольшие напряжения σ_{zy} в этом случае сконцентрированы у конца 2 (см. рис. 4, б). Данные напряжения положительны. Максимальные отрицательные напряжения сконцентрированы вокруг изгиба ветви 2. На уровне середины ветви 2 напряжения меняются с отрицательных на положительные.

Следует отметить, что для варианта формы полосы сдвига, описываемой функцией (4), где $A_1=5$ мкм, при распределении плотности квазидислокаций по гармоническому закону, описываемому функцией (9), в которой эмпирический коэффициент был принят $A_5=1/5$ мкм⁻¹, наибольшие напряжения σ_{zx} локализованы у середины ветви 1. Данные напряжения положительны (см. рис. 5, а).

Примерно на уровне изгиба ветви 1 происходит смена знака напряжений σ_{zx} . Другая область концентрации напряжений находится на некотором расстоянии от изгиба ветви 1. Данные напряжения отрицательны и убывают при удалении от этой зоны до вышеуказанного уровня, где напряжения меняются с отрицательных на положительные. Незначительные напряжения локализованы вдоль ветви 2 и изгиба полосы сдвига.

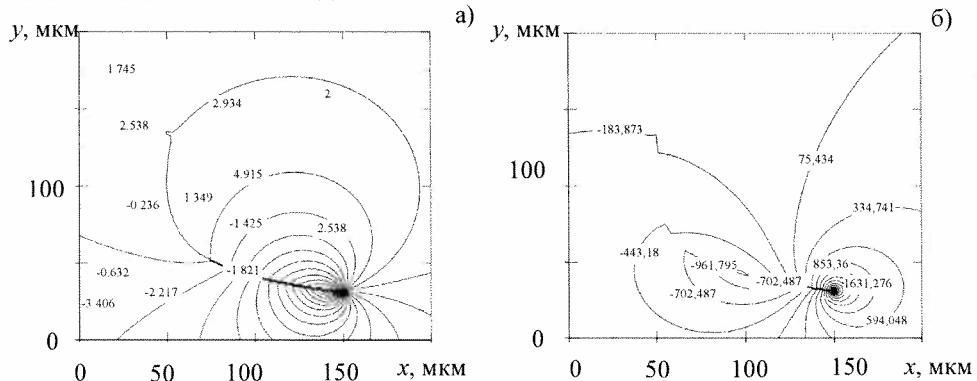


Рисунок 4 – Распределение напряжений у полосы сдвига формы, описываемой функцией (4), при нелинейном распределении плотности квазидислокаций, описываемом функцией (8): а) σ_{zx} ; б) σ_{zy} (МПа)

Касательно напряжений σ_{zy} можно отметить, что наибольшие значения данные напряжения имеют в местах локализации на ветви 1 полосы сдвига на некотором расстоянии от начала изгиба ветви 1, постепенно убывая вокруг этой зоны, причем в положительном направлении оси OX от полосы напряжения положительны, а в отрицательном направлении оси OX – отрицательны (см. рис. 5, б). Вдоль ветви 2 и изгиба по гармоническому закону изменяются напряжения со стабильными знакопеременными значениями в пиках гармоник. Также присутствуют точечные концентраторы напряжений в положительном направлении оси OX от конца 2. Данные напряжения положительны по знаку.

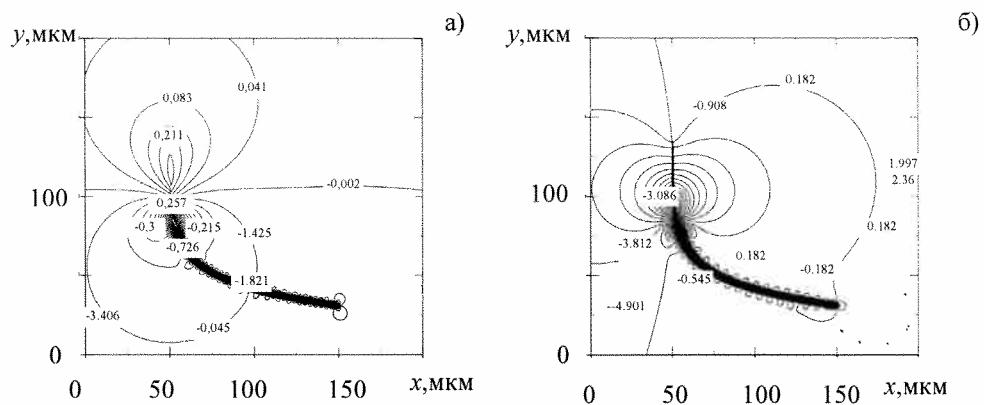


Рисунок 5 – Распределение напряжений у полосы сдвига формы, описываемой функцией (4), при распределении плотности квазидислокаций по гармоническому закону, описываемому функцией (9): а) σ_{zx} ; б) σ_{zy} (МПа)

Для варианта формы полосы сдвига, описываемой функцией (5), где $A_2=5$ мкм; $B_2=5$ мкм; $C_2=1/2$, при распределении плотности квазидислокаций по функции (6), в области II в положительном направлении оси OY от полосы сдвига напряжения σ_{zx} положительны по знаку (см. рис. 6, а). В области II в отрицательном направлении оси OX напряжения с положительных меняются на отрицательные и уменьшаются с удалением от полосы сдвига. Наибольшие положительные напряжения сконцентрированы в области у конца 1 полосы сдвига. Отрицательные напряжения в области II имеют максимальные значения у ветви 2 полосы сдвига, постепенно убывая по мере удаления от этой зоны вокруг конца 2 против часовой стрелки, и вокруг середины изгиба по часовой стрелке.

Наибольшие по модулю напряжения σ_{zy} локализованы в области II в отрицательном направлении оси OX от нее в месте изгиба полосы сдвига и отрицательны, а также в области у конца 2 полосы (см. рис. 6, б). Напряжения постепенно уменьшаются при удалении от этого конца, достигая минимума по модулю в отрицательном направлении оси OY от середины ветви 2 полосы, где напряжения с отрицательных меняются на положительные. Значения напряжений растут вокруг изгиба ветви 2, достигая максимума у середины изгиба и уменьшаются по часовой стрелке вокруг конца 1 полосы сдвига вновь меняясь уже с положительных на отрицательные в области I.

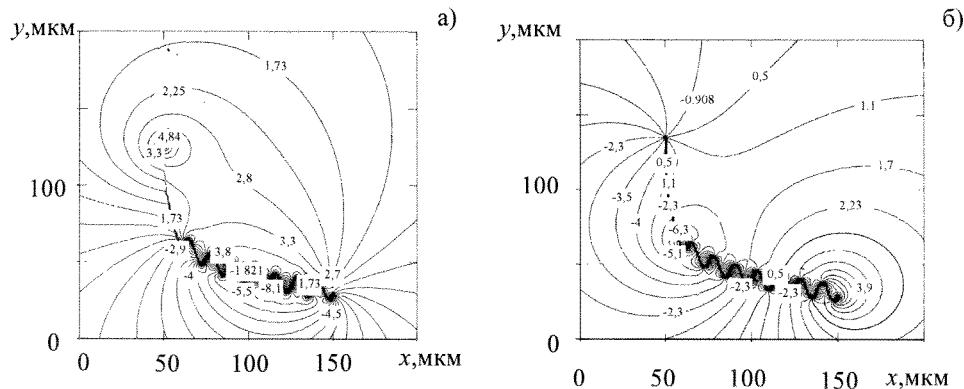


Рисунок 6 – Распределение напряжений у полосы сдвига формы, описываемой функцией (5), при распределении плотности квазидислокаций по функции (6): а) σ_{zx} ; б) σ_{zy} (МПа)

Для формы полосы сдвига, которая описывается функцией (5), где $A_2=5$ мкм; $B_2=5$ мкм; $C_2=1/2$, при линейном распределении плотности квазидислокаций, описываемом функцией (7), где $A_3=0,9$ мкм $^{-2}$; $B_3=6$ мкм $^{-1}$, наибольшие напряжения σ_{zx} сконцентрированы у середины ветви 2 полосы сдвига, причем, в области I напряжения положительны, в области II – отрицательны (см. рис. 7, а). Напряжения меняются с положительных на отрицательные вокруг конца 2 полосы сдвига, а также с отрицательных на положительные вокруг центра изгиба полосы сдвига.

Наибольшие напряжения σ_{zy} сконцентрированы у конца 2 полосы сдвига и постепенно убывают при удалении от этой зоны (см. рис. 7, б). Данные напряжения положительны. Другой областью концентрации напряжений является изгиб полосы, причем, и в области I, и в области II напряжения отрицатель-

ны. Напряжения от положительных к отрицательным меняются вокруг центра ветви 2 в области 2: по часовой стрелке, в области I – против.

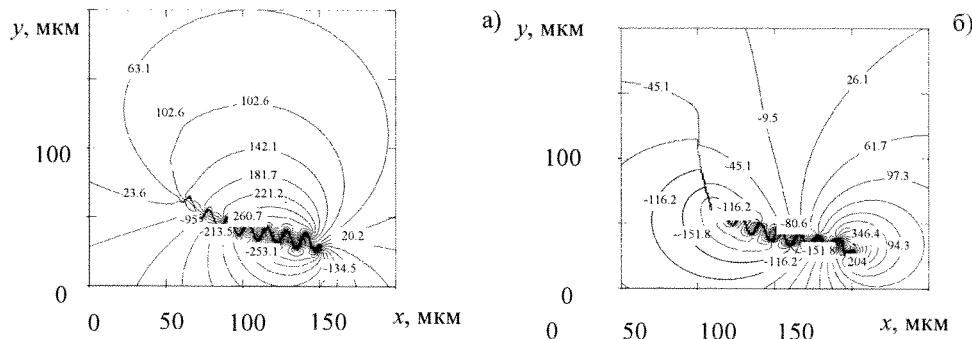


Рисунок 7 – Распределение напряжений у полосы сдвига формы, описываемой функцией (5), при линейном распределении плотности квазидислокаций, описываемом функцией (7):

a) σ_{zx} ; б) σ_{zy} (МПа)

Для варианта формы полосы сдвига, описываемой функцией (5), при $A_2=5$ мкм; $B_2=5$ мкм; $C_2=1/2$, в случае нелинейного распределения плотности квазидислокаций, описываемом функцией (8), где $A_4=1/10$ мкм⁻³; $B_4=1/5$ мкм⁻²; $C_4=5$ мкм⁻¹, максимальные напряжения σ_{zx} локализуются на некотором расстоянии от конца 2 (см. рис. 8, а). В области I напряжения положительны и убывают по мере удаления от полосы сдвига. В области II сдвига напряжения положительны и убывают по мере удаления от полосы сдвига. В области II напряжения отрицательны. От конца 2 к концу 1 разброс значений напряжений в пиках гармоник уменьшается.

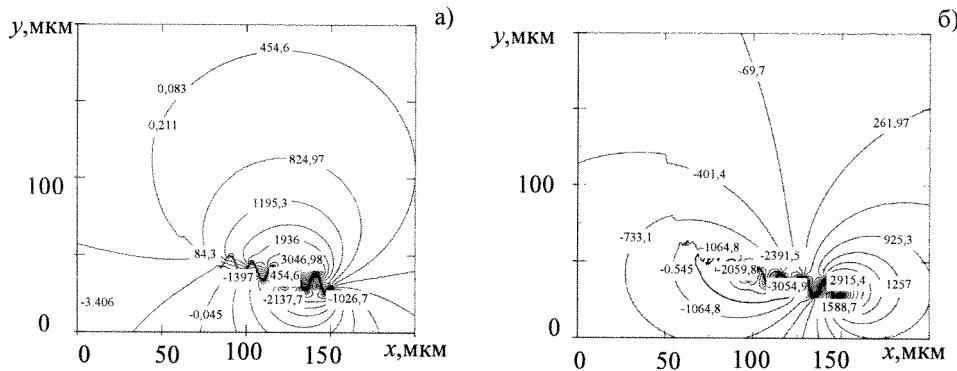


Рисунок 8 – Распределение напряжений у полосы сдвига формы, описываемой функцией (4), при нелинейном распределении плотности квазидислокаций, описываемом функцией (8):

a) σ_{zx} ; б) σ_{zy} (МПа)

На картине полей напряжений σ_{zy} наблюдается две зоны локализации напряжений (см. рис. 8, б). Одна находится у конца 2 полосы сдвига, другая расположена у изгиба ветви 2. Отчетливо видна ступень на полях напряжений при переходе линий поля через полосу сдвига. У конца 2 напряжения положительны

и убывают по мере удаления от него. У области изгиба ветви 2 напряжения отрицательны и убывают по модулю при удалении от него.

Для варианта формы полосы сдвига, описываемой функцией (5), где $A_2=5 \text{ мкм}$; $B_2=5 \text{ мкм}$; $C_2=1/2$, при распределении плотности квазидислокаций по гармоническому закону, описываемому функцией (10), где $A_6=0,3$; $B_6=20 \text{ мкм}^{-1}$, сжимающие напряжения σ_{zx} локализованы у конца 1 и постепенно убывают в направлении от этого края (см. рис. 9, а). В области изгиба находится другой центр локализации напряжений, но отрицательных. По мере удаления от изгиба напряжения убывают по модулю, причем в положительном направлении оси OX от полосы значительно быстрее и примерно на уровне середины ветви 1 напряжения меняются с отрицательных на положительные.

Центр локализации напряжений σ_{zx} – у изгиба ветви 1, причем в отрицательном направлении оси OX от полосы напряжения отрицательные, а в положительном направлении оси OX – положительные (см. рис. 9, б). В областях II в областях между впадинами гармоник наблюдаются положительные напряжения, в области I между вершинами гармоник – отрицательные.

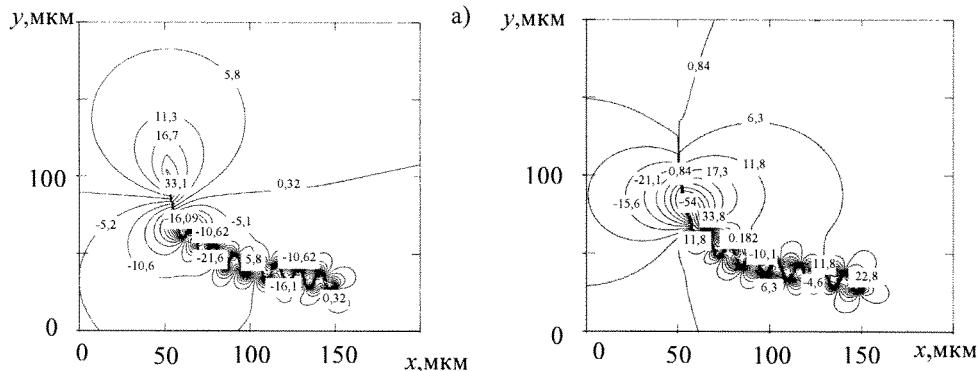


Рисунок 9 – Распределение напряжений у полосы сдвига формы, описываемой функцией (4), при распределении плотности квазидислокаций по гармоническому закону, описываемому функцией (9): а) σ_{zx} ; б) σ_{zy} (МПа)

4. Заключение

Основываясь на применении математического моделирования дислокационных процессов для описания деформирования аморфных материалов, была предложена методика расчета полей напряжений в металлических стеклах у полос сдвига в виде лучей. В работе представлены расчеты полей напряжений при различных закономерностях распределения плотностей квазидислокаций, на основании которых были выявлены области локализации напряжений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Верещагин, М. Н.* Негомогенная пластическая деформация аморфных сплавов на основе железа : монография / М. Н. Верещагин, В. Г. Шепелевич, О. М. Остrikов. – Гомель : ГГТУ имени П. О. Сухого, 2004. – 134 с.
2. *Верещагин, М. Н.* Аналогии и различия в развитии сдвиговой пластической деформации при локальном деформировании аморфных и монокристаллических

- материалов / М. Н. Верещагин, О. М. Остриков // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2003. – № 3. – С. 35–37.
3. Глезер, А. М. Структура и механические свойства аморфных сплавов / А. М. Глезер, Б. В. Молотилов. – М. : Металлургия, 1992. – 208 с.
 4. Аморфные металлы. Судзуки К., Фудзимори Х., Хасимото К. / под ред. Ц. Масумото. – Москва : Металлургия, 1987. – 328 с.
 5. Прецизионные сплавы / А. И. Радьков [и др.]. – М. : Металлургия, 1980. – С. 11–16.
 6. Металлические стекла / под ред. Д. Д. Гильмана, Х. Д. Лими. – Москва : Металлургия, 1984. – 264 с.
 7. Золотухин, И. В. Физические свойства аморфных металлических материалов / И. В. Золотухин. – Москва : Металлургия, 1986. – 176 с.
 8. Алексин, В. П. // Металловедение и термическая обработка металлов / В. П. Алексин, В. Помпе, К. Ветциг. – 1982. – № 5. – С. 72–74.
 9. Конверистый, Ю. К. Физико-химические основы создания аморфных металлических сплавов / Ю. К. Конверистый, Э. К. Осипов, Е. А. Трофимова. – М. : Наука, 1983. – 145 с.
 10. Структура аморфных металлических сплавов / Ю.А. Скаков [и др.]. Тез. докл. МИСиС, 1980. – С. 136.
 11. Остриков, О. М. Механика двойникования твердых тел : монография / О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ имени П. О. Сухого, 2008. – 301 с.

Поступила в редакцию 01.06.2015 г.

Контакты: omostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Ryumtsev A.A., Ostrikov O.M. THE METHOD OF CALCULATION OF STRESS FIELDS IN METALLIC GLASSES IN SHEAR BANDS IN THE FORM OF CURVED BEAMS.

The method of calculation of stress in shear bands in the form of curved beams is suggested. The article describes the nature of the distribution of stresses in the material in shear bands with different patterns of distribution of quasidislocations. The regions of localization of stress are defined.

Key words: metallic glass, shear, stress field.

УДК 582.29 (476.1)

РЕВІЗІЯ ЛИШАЙНИКОВ ГРУППЫ ВІДОВ *CLADONIA CHLOROPHAEA* В БЕЛАРУСІ: *C. CHLOROPHAEA* S. STR. И *C. CONISTA*

A. Г. Цуриков

кандидат біологіческих наук, доцент

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

B. В. Голубков

кандидат біологіческих наук, доцент

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

H. В. Цурикова

ассистент кафедры довузовской подготовки и профориентации

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

514 коллекционных образцов группы лишайников *Cladonia chlorophaea*, собранных различными авторами на территории Республики Беларусь в период 1937–2014 гг. и хранящихся в гербариях Минска (MSKU, MSK), Гродно (GRSU) и Гомеля (GSU) были исследованы методом тонкослойной хроматографии (TCX). Установлено, что 77 образцов содержат фумарпротоцетратовую кислоту и относятся к виду *Cladonia chlorophaea* s. str. 3 гербарных образца содержали также бургебановую кислоту и относились к *Cladonia conista*, ранее не указанной для территории Беларуси. В статье приводится морфологическое описание видов, основанное на результатах собственных исследований, а также и их химический состав. В результатах исследований установлены экология и распространение указанных видов, как в пределах нашей страны, так и Европы в целом.

Ключевые слова: лишайник, *Cladonia chlorophaea*, *Cladonia conista*, биоразнообразие, хемотаксономия, хроматография, вторичные метаболиты.

Введение

За период 1871–2015 гг. на территории республики было собрано около 100 тысяч образцов лишайников, половина из которых сохранилась в различных коллекциях Беларуси (GSU, GRSU, MSK, MSKH, MSKU) и за рубежом (LE, KW). 10 % (около 60 видов) всей лихенобиоты Беларуси (около 600 видов) представлено видами лишайников, относящихся к роду *Cladonia* P. Browne. Разнообразие чешуек первичного слоевища и вертикальных выростов вторичного слоевища (подециев) лишайников этого рода выделяют его представителей среди других известных форм организмов.

Однако недостаточное количество исследований по изучению биоразнообразия лихенобиоты этого рода (включая и группу видов *Cladonia chlorophaea* s. lat.), проведенных на территории Беларуси, является одной из причин, создающей

© Цуриков А.Г., 2015

© Голубков В.В., 2015

© Цурикова Н.В., 2015

проблемы их инвентаризации и идентификации. В итоге возникла необходимость использования методов, выводящих на более высокий уровень изучения представителей рода *Cladonia*.

Известно, что определение видов рода *Cladonia* основано как на морфологических признаках (форма подециев, размер чешуек первичного слоевища, размер и обилие органов вегетативного размножения, цвет апотециев и др.), так и на анализе содержания в них химических веществ методом тонкослойной хроматографии (депсиды, депсидоны, дibenзофураны, антрахиноны, жирные кислоты и тритерпеноиды) [1; 2]. Ввиду большой вариабельности вышеназванных признаков, определение многих видов является затруднительной задачей. Более того, видовой статус многих таксонов и их отличительные признаки остаются дискуссионными до настоящего времени.

Дискуссии о внутри- и межвидовых признаках группы *Cladonia chlorophaea* s. lat. ведутся с момента описания этого вида [3; 4]. Вид *Cladonia chlorophaea* (Flörke ex Sommerf.) Spreng., для которого характерны сцифовидные подеции и зернистые соредии, был описан в качестве промежуточного таксона между *Cladonia fimbriata* (L.) Fr., имеющей мучнистые соредии, и *Cladonia pyxidata* (L.) Hoffm., не имеющей соредий вообще. В 1908 г. В. Цопф подтвердил разграничение видов химически, показав наличие хлорофеевой кислоты у *Cladonia chlorophaea* и отсутствие такой у *Cladonia pyxidata* [5]. С этого момента большое развитие получила хемотаксономия этой группы видов. Позднее Х. Зандштеде [6] сузил понимание вида *Cladonia chlorophaea*, отнеся к нему только образцы, имеющие горький вкус и дающие положительную красную реакцию с парафенилендиамином (PD+), т.е. содержащие фумарпротоцетратровую кислоту. Образцы, не обладающие горьким вкусом и дающие отрицательную реакцию PD – он отнес к новому виду *Cladonia grayi* G. Merg. ex Sandst. Ю. Асахина [7, 8] поддержал взгляды Х. Зандштеде, а в последствии развил их, обосновав наличие четырех видов лишайников (*C. chlorophaea*, *C. grayi*, *C. cryptochlorophaea* Asahina, *C. merochlorophaea* Asahina) вместо предложенных ранее двух. Выделение новых видов основывалось только на их химическом составе и не сопровождалось морфологическими различиями.

Вышеуказанные новшества по-разному были восприняты учеными. Одни их не признавали и рассматривали как хеморасы [9–11], а другие приняли и включили их в региональные списки видов лишайников [12; 13]. В Европе был признан один вид (*C. chlorophaea*), либо, реже, два (*C. chlorophaea* и *C. grayi*). Е. Даль считал, что химические вещества вообще не имеют никакого таксономического значения, при этом отметив, что часто в одном подеции может содержаться более одного химического вещества [14]. В своих дальнейших исследованиях он обнаружил еще два новых хемотипа в дополнение к четырем, признанным Ю. Асахина, – с новохлорофеевой и с усниновой кислотами [15].

В 1966 г. Т. Ахти провел параллели между морфологической характеристикой отдельных видов и их химическим составом, а также сравнил европейские (Финляндия) и американские (Онтарио) популяции. Кроме этого, он четко отграничил группу *Cladonia chlorophaea* s.l. от морфологически близких *C. pyxidata*, *C. fimbriata*, *C. pocillum* (Ach.) Grognot, *C. humilis* (With.) J.R. Laundon и *C. cyathomorpha* Stirt. ex Walt. Watson [16].

Развитие молекулярной биологии положило начало новому уровню исследований таксонов группы *C. chlorophaea*. Финский лихенолог С. Стенрус с соавторами показала, что различные таксоны изучаемой группы при филогенетическом анализе рода не формируют единого кластера, и сделала вывод, что их морфологическое сходство является результатом конвергентной эволюции [17]. И, несмотря на то, что не все вышеперечисленные таксоны были вовлечены в упомянутое исследование, можно полагать, что хотя бы часть из них заслуживает видового статуса. Только дополнительные филогенетические исследования смогут дать окончательно решить эту задачу.

Поскольку большая часть исследований по лихенобиоте Беларуси относится к периоду конца XX в. и основана на данных, которые часто не использовали современные методы идентификации, возникла необходимость инвентаризации и идентификации образцов лишайников группы видов *Cladonia chlorophaea*, собранных на территории Беларуси за весь период исследований.

Методы исследований

Материалом для данного исследования послужили образцы лишайников рода *Cladonia* со сцифовидными подециями, хранящиеся в гербариях Белорусского государственного университета (MSKU), Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины (GSU), Гродненского государственного университета им. Я. Купалы (GRSU) и Института экспериментальной ботаники НАН Беларуси (MSK). Всего было исследовано 514 гербарных образцов сборов 1937–2014 гг. Морфологию образцов изучали с помощью стереомикроскопа Nikon SMZ-745, состав вторичных метаболитов – методом тонкослойной хроматографии в системе растворителей С [18] в лаборатории при кафедре ботаники и физиологии растений Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины.

Результаты и их обсуждение

Первые сообщение о лишайниках Беларуси относятся к XVIII в. [19]. Среди указанных 42 таксонов лишайников были приведены *Cladonia fimbriata* (L.) Fr. (как *Lichen fimbriatus* L.) и *Cladonia pyxidata* (L.) Hoffm. (как *Lichen pyxidatus* L.). В этот же период натуралист и ботаник А. Мейер на территории Могилевской области находит *Cladonia pyxidata* [20]. Однако одним из пионеров, приводивших описание видов лишайников группы *Cladonia chlorophaea*, собранных в период 1908–1910 гг. на территории республики, оказался российский лихенолог-систематик Г. К. Крейер [21]. Среди 190 таксонов лишайников он дает описание 3 разновидностям и 3 формам *Cladonia fimbriata* (L.) Fr. и 2 разновидностям *Cladonia pyxidata* (L.) Fr.

В 1923 г., изучая болотные и лесные ассоциации в окрестностях г. Минска, В.П. Савич приводит описание морфологии, местообитания и произрастания 2 таксонов *Cladonia pyxidata* (L.) Fr. var. *chlorophaea* Flk. и *Cladonia fimbriata* (L.) Fr. var. *simplex* (Weis.) Flot. По данным В.П. Савича, обитатель открытых местообитаний и светлых и сухих сосновых лесов *C. pyxidata* var. *chlorophaea* отличался от близкой к нему *C. fimbriata* б. м. крупными зернышками, являющимися корой ее подеция, в то время, как у *C. fimbriata* кора подеция мучнисто соредиозная, причем цвет соредиозной массы серовато-беловатый [22]. Здесь же он отмечает, что

C. pyxidata var. chlorophaea является переходной между *C. pyxidata* и *C. fimbriata*, поскольку большая часть подеция имеет крупнозернистую или сплошную кору, а в верхней части развиваются участки с соредиями, как у *C. fimbriata*. Последний лишайник автор считает наиболее распространенным видом, который замещает в теневых местообитаниях, лесах *Cl. pyxidata*. Как чрезвычайно полиморфный вид *Cl. fimbriata* была рекомендована дальнейшему изучению [22].

В этот же период, изучая ассоциации напочвенных лишайников соснового леса в окрестностях г. Минска, украинский лихенолог-систематик А.Н. Окснер приводит *Cladonia pyxidata var. chlorophaea* и var. *neglecta* (Floerk.) Mass. f. *lophyra* Ach., отличающейся мелкобугорчатыми подециями до 2,5 см с пролифицирующими и односторонне развитыми сцифами, края которых, как и подециальная их поверхность, была покрыта вверх загнутыми филлокладиями [23]. Автор отметил, что в районе исследований *C. pyxidata* и *C. fimbriata* являются обычными лишайниками.

В 1936 г. белорусский систематик-лихенолог М.П. Томин предложил Н.О. Цеттерман использовать микрохимический метод, предложенный Ю. Асахина для разработки ключа в определении лишайников рода *Cladonia*, произрастающих на территории Беларуси. В 1948 г. он был опубликован в монографии “Кладонии БССР” [24] и в дальнейшем использовался в последующих изданиях [25; 26].

Накопившаяся информация за период XX–XXI вв. требовала обобщений и пересмотра некоторых таксономических позиций группы видов *Cladonia chlorophaea* s. lat., для чего была проведена ревизия многих образцов лишайников этой группы, хранящихся в основных гербариях Беларуси. В результате было установлено, что 236 гербарных образцов (45,9% от количества исследованных сборов) содержат только комплекс фумарпротоцетаровой кислоты, из которых 77 образцов (15,0% от количества исследованных сборов) относятся к виду *Cladonia chlorophaea* (Florke ex Sommerf.) Spreng. 3 гербарных образца (0,6% от количества исследованных сборов) содержали также бургеановую кислоту и относились к *Cladonia conista* (Nyl.) Robbins, ранее не указанной для территории Беларуси. Ниже мы приводим морфологическое описание видов, основанное на результатах собственных исследований и данных других авторов, а также их экологическую и субстратную приуроченность в условиях республики.

***Cladonia chlorophaea* (Florke ex Sommerf.) Spreng., Caroli Linnaei systema vegetabilium 4(1): 273 (1827)**

Чешуйки первичного слоевища маленькие, незаметные. Подеции чаще небольшие, до 1 см высотой, реже до 3 см, зеленовато-серые, редко с коричневым оттенком. Сцифы простые, редко с пролиферациями. Поверхность подециев и внутренняя сторона сциф всегда покрыты зернистым соредиозным налетом. Основание подециев может нести ареолированный коровий слой, отдельные гранулы, образующие кору, а также филлокладии. Апотеции встречаются часто, коричневые чаще темных оттенков. Пикники также могут развиваться на краях сциф.

Cladonia chlorophaea s. str. относится к группе видов, содержащих только комплекс фумарпротоцетаровой кислоты. Типичные образцы этого вида отличаются крупными соредиями, напоминающими гранулы, располагающимися на наружной и внутренней сторонах сциф. *Cladonia chlorophaea* морфологи-

чески очень близка к *Cladonia grayi*, поэтому для их различия всегда необходимы данные о составе лишайниковых кислот.

Хіміческий склад. Отличительной особенностью *Cladonia chlorophaea* является наличие фумарпротоцетратовой и протоцетратовой кислот [2].

Екологія. На территории Беларуси *Cladonia chlorophaea* имеет достаточно широкую экологическую амплитуду (рисунок 1). 20 образцов были собраны в сухих или влажных сосновых лесах, 19 – в дубравах, 6 – в черноольшаниках, 5 – в ельниках и 3 – в березняках.

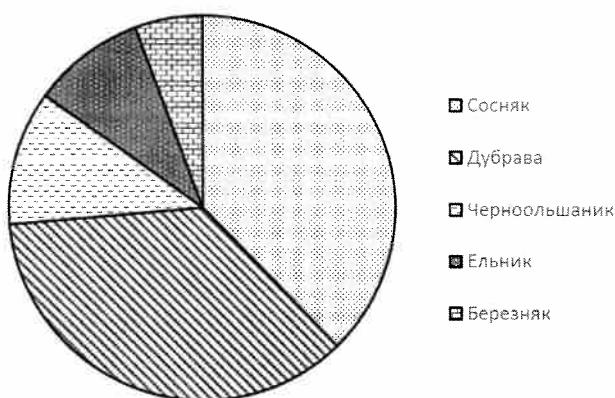


Рисунок 1 – Экологическая приуроченность *Cladonia chlorophaea* в Беларуси

В качестве субстрата вид предпочитает кору деревьев (43 образца; рисунок 2). В меньшей степени *C. chlorophaea* заселяет древесину (19 образцов), почву (11 образцов) и каменистые субстраты (1 образец). Эпифитные образцы были собраны на дубе (15 образцов), березе (8), сосне (7), ольхе (5), иве, липе (по 2), клене, лиственнице, осине и рябине (по 1). По-видимому, *C. chlorophaea* s. str. является наименее требовательным к субстрату видом из всего изучаемого комплекса таксонов.

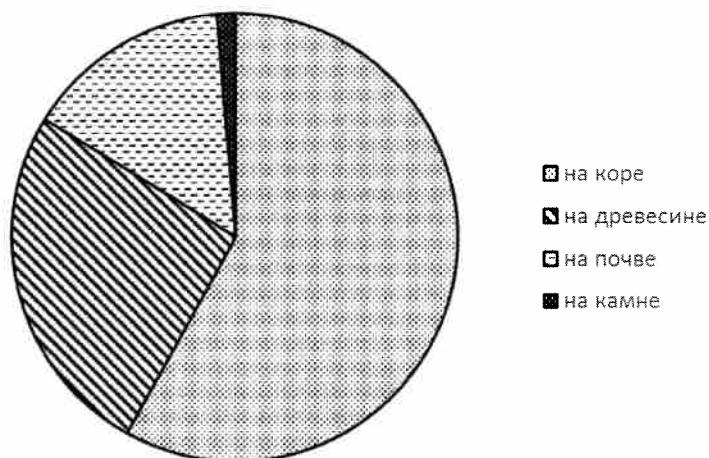


Рисунок 2 – Субстратная приуроченность *Cladonia chlorophaea* в Беларуси

Распространение. *Cladonia chlorophaea* является космополитным видом, представленным на всех континентах, включая Антарктиду [2, 27].

Согласно результатам исследований, в Беларуси вид распространен достаточно равномерно (рисунок 3). Малое число локалитетов *C. chlorophaea* на территории Гродненской и Могилевской областей свидетельствует скорее о слабой изученности этих регионов страны, чем о снижении встречаемости этого вида.

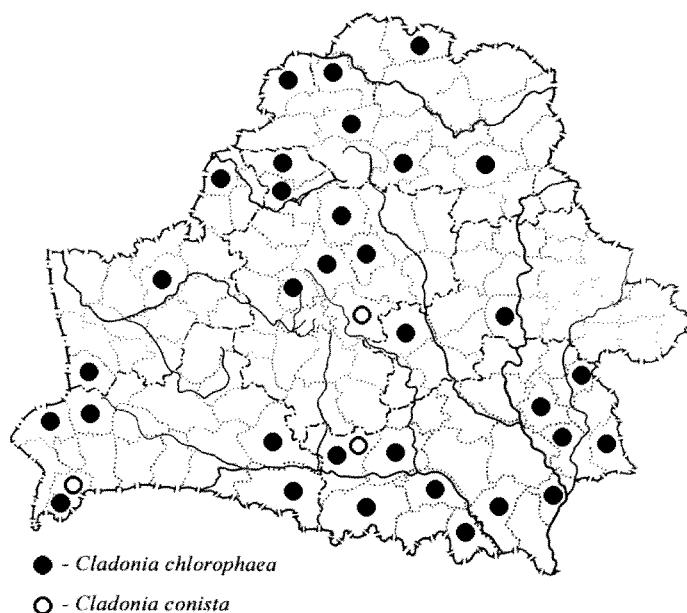


Рисунок 3 – Распространение *Cladonia chlorophaea* и *C. conista* на территории Беларуси

Исследованные образцы. **БРЕСТСКАЯ ОБЛАСТЬ**, Каменецкий район, Беловежская Пуща, Дмитровичское л-во, кв. 946, окр. д. Каменюки, в сосняке лишайником, Голубков В.В., 24.04.1983 (MSK); окр. д. Каменюки, 100 м ЮВ гостиницы № 2, в черноольшанике крапивном на ольхе, Голубков В.В., 08.07.1983 (MSK); окр. д. Каменюки, 200 м от гостиницы №2, пойма р. Лесная Правая, в черноольшанике на иве, Голубков В.В., 19.06.1983 (MSK); Беловежская Пуща, Королево-Мостовское л-во, кв. 824, 2 км ЮЗ д. Каменюки, в черноольшанике крапивном на ольхе, Голубков В.В., 16.06.1983 (MSK); Беловежская Пуща, Пошуковское л-во, на почве, Горбач Н.В., 1965 (MSK); **Лунинецкий район**, окр. пос. Полесский, в дубраве черничной на дубе, Горбач Н.В., 15.07.1972 (MSK-9246); **Малоритский район**, 10 км СВ г. Малорита, долина р. Рита, опушка сосновка на почве, Голубков В.В., 19.09.1984 (MSK); **Пружанский район**, ООПТ “Ружанская пуща”, Ружанское л-во, кв. 18, на просеке на гнилом ольховом пне, Кобзарь Н.Н., 14.07.1984 (MSK-9647); **Столинский район**, д. Дубой, на пне, Хлебовец Т.С., 17.03.2014 (GSU-2010); **ВИТЕБСКАЯ ОБЛАСТЬ**, **Браславский район**, НП “Браславские озера”, д. Старая Друя, на кладбище на валуне, Яцына А.П., 31.07.2012 (MSK-10425); **Глубокский район**, д. Залесье, в парке на лиственнице, Горбач Н.В., 14.07.1958 (MSK); **Лепельский**

район, Березинский заповедник, ур. Савелий бор, кв. 401, 402, на гнилом бересковом пне, Кобзарь Н.Н., 11.07.1978 (MSK); Березинский заповедник, в ельнике кисличном, на коре полууснувшегося пня, Горбач Н.В., 24.06.1960 (MSK); **Миорский район**, по дороге Веретея – Василевичи, Пидопличка А., 09.07.1946 (MSK); **Россонский район**, 5 км СЗ д. Горы, в черноольшанике касатиковом на ольхе, Голубков В.В., 22.06.1986 (MSK); **Сенненский район**, окр. д. Шитовка, бывший пионерский лагерь, в сосновке мшистом на березе, Яцына А.П., 13.08.2007 (MSKU-2864); **ГОМЕЛЬСКАЯ ОБЛАСТЬ**, Буда-Кошелевский район, окр. д. Рудня-Ольховка, на почве, Карловская Т.А., 15.06.2005 (GSU); Чеботовичское л-во, 11 кв., 6 выд., в сосновке вересковом на сосне, Цуриков А.Г., 13.07.2014 (GSU-1948); в дубраве на дубе, Горбач Н.В., 06.06.1967 (MSK); **Гомельский район**, Калининское л-во, 9 кв., 9 выд., в сосновке черничном на сосне, Цуриков А.Г., 02.10.2012 (GSU-1946); окр. д. Уза, в сосновке на пне, Винокурова О.М., 08.06.2013 (GSU); окр. д. Шарпиловка, в сосновке на сосне, Горленко Н.С., 04.03.2014 (GSU); Старо-Дятловичское л-во, 126 кв., 9 выд., в сосновке мшистом на сосне, Цуриков А.Г., 31.07.2013 (GSU); **Добрушский район**, г. Добруш, остров, на дубе, Заборенко А., 29.09.2008 (GSU); Добрушское л-во, 428 кв., 3 выд., в сосновке брусличном на сосне, Цуриков А.Г., 20.08.2013 (GSU); **Житковичский район**, Найденское л-во, кв. 76, в дубраве на дубе, Голубков В.В., 17.08.2010 (GRSU); НП «Припятский», Озерансское л-во, 15 кв., в дубраве папоротниковой на дубе, Шахрай О.П., (GSU-36); то же л-во, в черноольшанике у основания ольхи черной, Голубков В.В., 22.08.2010 (GRSU); Переровское л-во, кв. 1, в пойменной дубраве на березе, Голубков В.В., 21.08.1981 (MSK); то же л-во, кв. 1, окр. д. Хлупин, в пойменной дубраве на дубе и на древесине, Голубков В.В., 19.08.1982 (MSK); то же л-во, окр. д. Хлупин, урочище “Голова”, в дубраве черничной у основания ствола дуба, Горбач Н.В., 17.07.1971 (MSK-9343); то же л-во, кв. 3, в дубраве разнотравной на пне, Шахрай О.П., 28.05.1973 (GSU); то же л-во, кв. 21, 1,5 км З д. Хлупин, в дубраве грабово-лещиново-разнотравной на рябине, Голубков В.В., 27.08.1982 (MSK); то же л-во, кв. 81, в пойменной дубраве на дубе, Голубков В.В., 19.08.1982 (MSK); **Лельчицкий район**, НП “Припятский”, Млынокское л-во, кв. 72, в сосновке лишайниковом на почве, Шахрай О.П., 16.06.1972 (GSU); то же л-во, кв. 98, в ельнике черничном (со сфагнумом) на осине, Голубков В.В., 16.08.1982 (MSK); то же л-во, кв. 582/602, в ельнике черничном на пне, Голубков В.В., 08.08.1982 (MSK); то же л-во, в сосновке вересковом на почве, Шахрай О.П., 10.06.1975 (GSU-100); **Лоевский район**, Лоевское л-во, кв. 60, выд.35., в сосновке лишайниковом на древесине, Цуриков А.Г., 09.08.2011 (GSU); **Мозырский район**, Мозырская гряда, на склоне оврага на березе, Голубков В.В., 11.11.1984 (MSK); окр. д. Протюки, березовое мелколесье, на стволе березы, Голубков В.В., 26.08.1977 (MSKU-2212); окр. д. Протюки, в ольсе разнотравном на стволе ольхи, Голубков В.В., 24.08.1976 (MSKU-2213); окр. д. Протюки, в дубраве орляковой на пне, Голубков В.В., 26.08.1977 (MSKU-2309); **Наровлянский район**, окр. г. Наровля, в сосновом лесу на пне, Горбач Н.В., 02.06.1967 (MSK); **Петриковский район**, Припятский заповедник, 23 кв. Снядинского л-ва, в дубраве разнотравной на дубе и на почве, Шахрай О.П., 18.06.1974 (GSU-34, GSU-1560); **Хойникинский район**, Хой-

никский л-з, Ленинское л-во, в дубраве разнотравной на сосне, Горбач Н.В., 29.05.1969 (MSK); **Чечерский район**, окр. д. Покоть, на березе, Цуриков А.Г., 25.05.2010 (GSU); **ГРОДНЕНСКАЯ ОБЛАСТЬ**, **Лидский район**, Лидское л-во, окр. д. Бурносы, на пне, Горбач Н.В., 06.1964 (MSK); **Островецкий район**, к западу от оз. Свирь, оз. Воробьи, у основания ствола дуба, Гесь Д.К., 26.06.1962 (MSK); **Свислочский район**, Беловежская Пуща, Язвенское л-во, кв. 137, в сосновяке черничном, Голубков В.В., 25.07.1984 (MSK); то же л-во, окр. д. Немержа, у реки на замшелой иве, Голубков В.В., 21.07.1984 (MSK); **МИНСКАЯ ОБЛАСТЬ**, **Вилейский район**, д. Остюковичи, ППМЗ парк “Остюковичи”, в парке у основания ствола липы, Яцына А.П., 08.08.2012 (MSK-10619); **Дзержинский район**, Негорельский л-з, в бересовой роще, на почве, Горбач Н.В., 18.07.1968 (MSK); **Логойский район**, 1,5 км ЮВ д. Чуденичи, в бересняке черничном у основания березы, Яцына А.П., 01.03.2008 (MSKU-2359); г.п. Логойск, в парке, дубрава с липой и кленом, у основания ствола дуба, Яцына А.П., 03.04.2005 (MSK-1435); г.п. Логойск, в дубраве разнотравной на почве, Голубков В.В., 16.04.1972 (MSKU-1433); **Минский район**, д. Аннополь, в парке на стволе липы, Яцына А.П., 23.03.2012 (MSK-9618); д. Калинино, парк Игнатичи, в парке на *Acer saccharinum*, Яцына А.П., 12.04.2012 (MSK-9705); д. Семково, в парке (дубрава разнотравная) на березе, Яцына А.П., 01.04.2011 (MSK-6873); д. Семково, в парке у основания ствола дуба, Яцына А.П., 25.10.2011 (MSK-8294); **Мядельский район**, ЛЗ “Голубые озера”, 3 км СВ д. Ольшево, СВ берег оз. Глубелька, в сосновяке разнотравном на почве, Голубков В.В., 08.05.1976 (MSK); окр. д. Урлики, у основания ствола березы, Ярохович В.И., 04.07.2002 (MSKU-2266); окр. оз. Глубокое, в сосновяке вересково-мшистом на почве, Голубков В.В., 28.05.1972 (MSKU-2211); окр. оз. Нарочь, опушка соснового леса на почве, Голубков В.В., 14.07.1978 (MSKU-2448); **Смолевичский район**, д. Шипяны, ППМЗ “Шипяны”, в парке у основания ствола дуба, Яцына А.П., 19.07.2012 (MSK-10374); **МОГИЛЕВСКАЯ ОБЛАСТЬ**, **Быховский район**, около г. Быхов, ур. Борок, в пойме Днепра на дубе, Горбач Н.В., 06.1959 (MSK); **Осиповичский район**, окр. д. Елизово, в сосновяке на пне, Гесь Д.К., 08.06.1960 (GSU-1974).

Cladonia conista (Ach.) Robbins, Rhodora 32: 92 (1930)

Первичное слоевище достаточно развито, отдельные чешуйки достигают 0,5 см. Сцифовидные подеции простые, без пролифераций, достигающие 2 см высоты и до 0,7 см ширины, серые или зеленовато-серые. Поверхность их покрыта гладким ареолированным коровым слоем и только края сциф и их внутренняя часть имеют тонкий соредиозный налет. Апотеции коричневые, встречаются редко. Пикники могут развиваться по краям сциф.

Морфологически вид практически идентичен *Cladonia humilis* (With.) J.R. Laundon и потому долгое время считался его синонимом. Тем не менее, согласно результатам молекулярных исследований [28] *C. conista* является самостоятельным видом, отличающимся от *Cladonia humilis* содержанием бургеноевой кислоты. Последний вид в отличие от *C. conista* содержит атранорин и имеет океаническое распространение [2, 27].

В работах белорусских авторов *Cladonia humilis* и *C. conista*, по всей видимости, сводились в синонимы, однако, как было указано выше, это отдельные виды. Ревизия образцов лишайников, собранных на территории республики, позволила прийти к заключению, что на сегодняшний день в лихенобиоте Беларуси известна только *C. conista*, образцы которой могут быть похожи на *Cladonia fimbriata* (L.) Fr., у которой на нижней части подециев иногда образуется коровий слой. В таком случае только наличие бургевановой кислоты является четким признаком, который разграничивает оба вида. В данном случае метод тонкослойной хроматографии является единственным способом подтверждения этого вида.

Хіміческий состав. Отличительной особенностью *Cladonia conista* является наличие бургевановой и фумарпротоцетратровой кислот [2].

Экология. В Беларуси *Cladonia conista* была собрана в лесных сообществах, образованных как хвойными (сосна – 2 образца) так и широколиственными (дуб – 1 образец) породами. Согласно [2, 27] *C. conista* произрастает на почве в хорошо освещенных открытых местообитаниях (опушки, окраины дорог). 2 белорусских образца были найдены на почве, третий – в пристволовой части осины.

Распространение. *Cladonia conista* является космополитным видом, представленным на всех континентах, кроме Антарктиды [2]. В Беларуси вид является редким и известен из 3 локалитетов в Гомельской, Минской и Брестской областях (рисунок 3).

Исследованные образцы. **БРЕСТСКАЯ ОБЛАСТЬ**, Малоритский район, 6 км СВ д. Ляховцы, долина р. Рита, опушка сосняка верескового, Голубков В.В., 20.09.1984 (MSK); **ГОМЕЛЬСКАЯ ОБЛАСТЬ**, Житковичский район, НП “Припятский”, Переровское л-во, кв. 35, окр. д. Хлупинская Буда, в дубраве оряжевой на осине, Голубков В.В., 24.08.1982 (MSK); **МИНСКАЯ ОБЛАСТЬ**, Пуховичский район, Матеевичский заказник, Талькское л-во, кв. 27, в сосняке мшистом у основания ствола березы, Яцына А.П., 13.04.2011 (MSK-7217).

Заключение

Ревизия гербарного материала по роду *Cladonia* выявила неполноту опубликованных данных по рассматриваемой группе видов. Установлено, что 77 образцов (15,0% от количества исследованных сборов) относятся к виду *Cladonia chlorophaea* s. str. 3 гербарных образца (0,6% от количества исследованных сборов) содержали также бургевановую кислоту и относились к *Cladonia conista*, ранее не приводимой для территории Беларуси. Полученными результатами была уточнена экология и распространение указанных видов, как в пределах республики, так и Европы в целом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Osyczka, P. A morphometric evaluation of the *Cladonia chlorophaea* group and allied taxa (Cladoniaceae, Ascomycota) / P. Osyczka // Herzogia. – 2013. – Vol. 26. – P. 49–64.
2. Ahti, T. Nordic Lichen Flora. Volume 5. Cladoniaceae / T. Ahti, S. Stenroos, R. Moberg. – Uppsala : Museum of Evolution, 2013. – 117 p.

3. *Sommerfelt, S. C.* Supplementum Florae Lapponicae / S. C. Sommerfelt. – Oslo : Christiania, 1826. – 133 p.
4. *Flörke, H. G.* De Cladoniis, difficillimo lichenum genere, commentatio nova / H. G. Florke. – Rostochii: Apud Stillerum, 1828. – 186 p.
5. *Zopf, W.* Beitrage zu einer chemischen Monographie der Cladoniaceen / W. Zopf // Berichte der Deutschen Botanischen Gesellschaft. – 1908. – Vol. 26. – P. 51–113.
6. *Sandstede, H.* Ergänzungen zu Wainio's Monographia Cladoniarum Universalis unter besonderer Berücksichtigung des Verhaltens der Cladonien zu Asahina's Diaminprobe / H. Sandstede // Feddes Repertorium Specierum Novarum Regni Vegetabilis Beiheft. – 1938. – Vol. 103. – P. 1–103.
7. *Asahina, Y.* Chemismus der Cladonien unter besonderer Berücksichtigung der japanischen Arten. I. Cladonia chlorophaea und verwandte Arten / Y. Asahina // J. Jap. Bot. – 1940. – Vol. 16. – P. 709–727.
8. *Asahina, Y.* Chemismus der Cladonien unter besonderer Berücksichtigung der japanischen Arten (Fortsetzung) / Y. Asahina // J. Jap. Bot. – 1943. – Vol. 19. – P. 47–56, 227–244.
9. *Lamb, I. M.* On the morphology, phylogeny, and taxonomy of the lichen genus Stereocaulon / I. M. Lamb // Canadian Journal of Botany. – 1951. – Vol. 29. – P. 522–584.
10. *Luttrell, E. S.* The Cladoniaceae of Virginia / E. S. Luttrell // Lloydia. – 1954. – Vol. 17, № 4. – P. 275–306.
11. *Imshaug, H. A.* Alpine lichens of Western United States and adjacent Canada I. The Macrolichens / H. A. Imshaug // The Bryologist. – 1957. – Vol. 60, № 4. – P. 177–272.
12. *Evans, A. W.* Supplementary Report on the Cladoniae of Connecticut / A. W. Evans // Trans. Connecticut Acad. Arts & Sci. – 1944. – Vol. 35. – P. 519–626.
13. *Hale, M. E.* A third checklist of the lichens of the continental United States and Canada / M. E. Hale, W. L. Culberson // Bryologist. – 1966. – Vol. 69, № 2. – P. 141–182.
14. *Dahl, E.* Studies in the macrolichen flora of South West Greenland / E. Dahl // Meddr. Gronland. – 1950. – Vol. 150, № 2. – P. 1–176.
15. *Dahl, E.* On the use of lichen chemistry in lichen systematics / E. Dahl // Rev. Bryol. Lichenol. – 1952. – Vol. 21. – P. 119–134.
16. *Ahti, T.* Correlation of the chemical and morphological characters in Cladonia chlorophaea and allied lichens / T. Ahti // Ann. Bot. Fenn. – 1966. – Vol. 3. – P. 380–390.
17. Phylogeny of the genus Cladonia s. lat. (Cladoniaceae, Ascomycetes), inferred from molecular, morphological and chemical data / S. Stenroos // Cladistics. – 2002. – Vol. 18. – P. 237–278.
18. *Orange, A.* Microchemical methods for the identification of lichens / A. Orange, P. W. James, F. J. White. – London : British Lichen Society, 2001. – 101 p.
19. *Gilibert, J. E.* Flora lithuanica inchoata, seu Enumeratio plantarum Quas Circa Grodnam coll'egit et determinavit Joannes Emmanuel Gilibert / J. E. Gilibert. – Grodnae : Typis S.R.M., 1781. – 118–119.
20. *Мейер, А.* Описание Кричевского графства 1786 г. / А. Мейер // Могилевская старина : сб. ст. “Могилевских губернских ведомостей”. Вып. 2. / Могилев Губернский ; ред. Е. Р. Романов. – Могилев, 1900–1901. – С. 86–137.
21. *Крейер, Г. К.* К флоре лишайников Могилевской губернии. Сборы 1908–1910 годов. / Г. К. Крейер // Труды Императорского С.-Петербургского Ботанического Сада. – 1913. – Т. 31, № 2. – С. 263–440.

22. **Савич, В. П.** Результаты лихенологических исследований 1923 года в Белоруссии / В. П. Савич // Зап. Белорус. Гос. Ин-та сельск. и лесн. хоз-ва. – 1925. – № 4. – С. 1–33.
23. **Окснер, А. Н.** Материалы к флоре лишайников Белоруссии. Предварительное сообщение / А. Н. Окснер // Изв. Киев. ботан. сада. – 1924. – № 1. – С. 27–36.
24. **Цеттерман, Н. О.** Кладонии БССР / Н. О. Цеттерман // Учен. зап. Белорус. ун-та. Сер. Биология. – 1948. – № 7. – С. 110–113.
25. **Горбач, Н. В.** Определитель листоватых и кустистых лишайников БССР / Н. В. Горбач. – Минск : Наука и техника, 1965. – 179 с.
26. **Горбач, Н. В.** Лишайники Белоруссии: Определитель / Н. В. Горбач. – Минск : Наука и техника, 1973. – 528 с.
27. The lichens of the *Cladonia pyxidata-chlorophaeae* group and allied species in Poland / A. Kowalewska [et al.] // Herzogia. – 2008. – Vol. 21. – P. 61–78.
28. *Cladonia conista* and *C. humilis* (Cladoniaceae) are different species / R. Pino-Bodas [et al.] // Bibliotheca Lichenologica. – 2012. – Vol. 108. – P. 161–176.

Поступила в редакцию 06.03.2015 г.

Контакты: tsurykau@gmail.com (Цуриков Андрей Геннадьевич)

vgolubkov@tut.by (Голубков Владимир Владимирович)

tsurikova@outlook.com (Цурикова Наталья Владимировна)

Tsurykov A.G., Golubkov V.V., Tsurikova N.V. THE REVISION OF LICHEN GROUP *CLADONIA CHLOROPHAEA* IN BELARUS: *C. CHLOROPHAEA* S. STR. И *C. CONISTA*.

514 lichen specimens within *Cladonia chlorophaea* group collected in Belarus by several authors during 1937–2014 and housed in GRSU, GSU, MSKU and MSK herbaria were studied by means of thin layer chromatography (TLC). It has been proved that 77 specimens contain fumarprotocetraric acid and appear to be *Cladonia chlorophaea* s. str. 3 specimens contain both fumarprotocetraric and bourgeanic acids and are identified as *Cladonia conista*. The latter species is new to the county. Their morphological description and chemical composition are provided in the article. The data obtained clarify the ecology and distribution of these species both within our country and Europe.

Key words: lichen, *Cladonia chlorophaea*, *Cladonia conista*, biodiversity, chemotaxonomy, chromatography, secondary metabolites.

УДК 636.22/28:612.015.3:636.22/28.087.7

ВЛИЯНИЕ МИКРОЭЛЕМЕНТОВ НА ПОКАЗАТЕЛИ ОБМЕНА ВЕЩЕСТВ И ПРИВЕСЫ ОТКОРМОЧНОГО МОЛОДНЯКА КРУПНОГО РОГАТОГО СКОТА УКРАИНСКОЙ МЯСНОЙ ПОРОДЫ

Д. Ф. Милостивая

аспирант

Днепропетровский государственный аграрно-экономический университет
(Украина)

Изучено влияние микроэлементов (медь, кобальт и марганец) на показатели белкового обмена и их продуктивность. Установлено, что применение микроэлементов не имеет существенного влияния на содержание общего белка в сыворотке крови, но происходит перераспределение белковых фракций в пределах физиологической нормы. По отношению к контролю концентрация альбуминов уменьшалась, а глобулинов – увеличивалась, что связано с усилением синтетических процессов в мышечной ткани. Увеличение синтеза белков под влиянием микроэлементов положительно отразилось на привесах животных.

Ключевые слова: микроэлементы, откормочный молодняк медь, марганец, кобальт, альбумины, глобулины, белки, кровь.

Введение

Одной из главных задач аграрной науки и практики в области животноводства Украины является обеспечение населения полноценной по всем показателям продукцией, среди которой одно из основных мест занимает мясо. Из пород крупного рогатого скота, которые характеризуются высокими показателями мясной продуктивности большое внимание заслуживает украинская мясная порода [1, 2], для выведения которой использовали серую украинскую, шароле, кианскую и симментальскую породы.

В отличие от пород крупного рогатого скота молочного направления, у животных мясных пород синтез и обмен белка имеет существенные различия. У мясных пород и их помесей синтез белка протекает в мышцах быстрее, что и обуславливает быстрое наращивание мышечной ткани с большим использованием кормов [3].

К группе биотических, то есть жизненно необходимых, микроэлементов относится цинк, марганец, медь, кобальт, селен и йод [4, 5]. Оптимальное содержание и соотношение именно этих биогенных металлов в организме животных обуславливает нормальное протекание обменных процессов и более высокий уровень их продуктивности. Отсутствие, недостаток или, наоборот, избыток отдельных минеральных элементов в составе рациона могут вызывать уменьшение эффективности использования питательных веществ корма, нарушения процессов метаболизма и снижения продуктивности животных [6].

Медь является третьим, после железа и цинка, самым распространенным микроэлементом в организме животных. Находясь в структуре таких фермен-

тов, как уратоксидаза и ксантинооксидаза, медь берет участие в метаболизме нуклеиновых кислот – трансформирует пуринсодержащие соединения в ксантины, а в дальнейшем, в мочевую кислоту [5].

Такой жизненно важный микроэлемент как кобальт, входит в состав ферментов, катализирующих реакции йодирования и, таким образом, берет участие в синтезе гормонов щитовидной железы и является специфичным активатором фермента глицил-глицингидролазы (глицилглициндипептидазы) [5]. Физиологическая функция кобальта обусловлена тем, что этот микроэлемент входит в состав цианокобаломина (B_{12}). У жвачных микроорганизмы рубца синтезируют цианокобаломин при участии кобальта, и он является стимулятором роста бактерий [7].

Марганец стимулирует синтез белка в мышцах, гликогена – в печени, способствует повышению активности Mg-АТФ-фазы, что увеличивает живую массу животных [6, 8].

Одним из путей коррекции минеральной недостаточности является использование как кормовых минеральных премиксов, так и введение отдельных дефицитных микроэлементов. Подкормка животных микроэлементами усиливает синтетические процессы в рубце, способствует увеличению амило- и протеолитическую активность микроорганизмов, образование летучих жирных кислот, синтез микробиального белка, повышению содержания РНК, ДНК при сохранении их структурной интактности [9, 10].

Целью исследований было изучение и основание эффективности использования в практике микроэлементов при повышении продуктивности откормочного молодняка украинской мясной породы.

Основная часть

Основным материалом и объектом наших исследований были: откормочный молодняк, сыворотка крови, привесы животных. Для достижения намеченной цели нами были проведены исследования влияния дефицитных по рациону микроэлементов на белковый обмен и приросты откормочного молодняка украинской мясной породы.

Экспериментальная часть проводилась на базе племенного хозяйства “Поливановка” Магдалиновского района Днепропетровской области Украины и на кафедре физиологии и биохимии сельскохозяйственных животных Днепропетровского государственного аграрно-экономического университета.

По принципу аналогов было сформировано четыре группы 15-месячного молодняка украинской мясной породы (по 13 голов в каждой). Молодняк первой опытной группы получал вместе с основным рационом сульфат меди; второй – хлорид кобальта; третий – сульфат марганца; контрольная группа получала только основной рацион. Микроэлементы давали в дозах, возмещающих их дефицит в рационе. Продолжительность скармливания добавок составляла 30 дней. После экспериментального периода были отобраны пробы крови, где путем отстаивания получили сыворотку и в ней определяли уровень общего белка – биуретовым методом, концентрацию альбуминов колориметрическим методом с бромкрезоловым зеленым. Приросты живой массы определяли на основании ежедневных индивидуальных взвешиваний. Полученные данные

статистически обрабатывались при помощи компьютерной программы Excel. Достоверность результатов сверяли с таблицами критерия Стьюдента.

По результатом наших исследований было отмечено, что балансирование основного рациона дефицитными микроэлементами, существенно повлияло на показатели белкового обмена. Так, у животных I-й опытной группы по сравнению с показателями контроля уровень общего белка был больше на 5,7% ($p < 0,05$) за счет увеличения альбуминовой фракции (на 11,0%, $p < 0,05$). Концентрация глобулинов была без видимых изменений.

Во II опытной группе под влиянием хлорида кобальта уровень общего белка увеличивается на 7,7% ($p < 0,05$), глобулинов – на 11,2% ($p < 0,05$), одновременно наблюдалось небольшое увеличение концентрации альбуминов на 3,4 %.

Влияние микроэлементов на белковый обмен у откормочного молодняка украинской мясной породы представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Обмен белков под влиянием микроэлементов

Показатели	Группы			
	Контрольная	I опытная	II опытная	III опытная
Общий белок, г\л	84,8±0,27	89,9±0,28*	91,9±0,28*	91,8±0,46*
Глобулины, г\л	45,0±0,07	45,2±0,32	50,7±0,36*	46,4±0,40
Альбумины, г\л	39,8±0,24	44,7±0,20*	41,2±0,21	45,4±0,21*
Белковый коэффициент	0,88±0,004	0,99±0,006	0,81±0,016*	0,98±0,010*

Примечание: * – $p < 0,05$; ** – $p < 0,01$

Несколько другие результаты были получены в III опытной группе (под влиянием марганца): отмечалось увеличение концентрации общего белка на 7,6% ($p < 0,05$) за счет увеличения альбуминов – на 12,3% ($p < 0,05$) и тенденция роста глобулинов.

Отмеченные изменения соотношения белковых фракций сыворотки крови у животных опытных групп при балансировании рационов микроэлементами проявились в изменениях белкового коэффициента. У животных I опытной группы его величина была $0,99 \pm 0,006$; во II опытной группе – $0,81 \pm 0,16$ и в III опытной – $0,98 \pm 0,010$.

Отмеченные в наших исследованиях изменения метаболизма белков положительно отразились на уровне приростов живой массы откормочного молодняка, что отображают данные таблицы 2.

Таблица 2 – Энергия роста откормочного молодняка украинской мясной породы при подкормке микроэлементами ($M \pm m$; $n = 10$)

Группа животных	Показатель		
	Живая масса, кг	Прирост	
		общий, кг	среднесуточный, г
Контрольная	434,0 ± 1,585	26,09 ± 0,122	870 ± 0,40
I опытная	437,47 ± 0,990	27,61 ± 0,620	920 ± 0,21
II опытная	437,53 ± 1,161	26,93 ± 0,731	898 ± 0,24
III опытная	438,14 ± 1,385	27,77 ± 0,893*	926 ± 0,30

Примечание: * – $p < 0,05$

У животных, которые вместе с основным рационом получали медь и марганец среднесуточный прирост был выше на 50,0 и 56,0 г (5,4 и 6,0% соответственно); у животных второй опытной группы под влиянием хлорида кобальта – на 28 г (3,1%).

Наибольшие изменения в сторону увеличения показателей приростов отмечались у животных, которые получали марганец. У животных второй опытной группы под влиянием хлористого кобальта, показатели приростов были несколько ниже в сравнении с животными других опытных групп.

Таким образом, полученные данные свидетельствуют о том, что соли некоторых микроэлементов, нормализующие рацион откормочного молодняка крупного рогатого скота, вызывают повышение синтетических процессов, приводя к приросту живой массы.

Заключение

При балансировании основных рационов откормочного молодняка украинской мясной породы дефицитными микроэлементами отмечались изменения белкового обмена в сторону увеличения. Хотя наибольшие изменения в концентрации общего белка были во II опытной группе, по живой массе и привесам лидировали животные, получавшие вместе с основным рационом марганец.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Козырь, В. С.* Мясные породы скота в Украине / В. С. Козырь, Н. И. Соловьев – Дніпропетровськ : Поліграфіст. – 1997. – С. 211–230.
2. *Мельник, Ю. Ф.* Формування м'ясної продуктивності у тварин порід великої рогатої худоби, яких розводять в Україні / [Ю. Ф. Мельник, Й. З. Сірацький, Є. І. Федорович та ін.]. – Корсунь-Шевченковський. – Видавець Гаврищенко В.М. – 2010. – 392 с.
3. М'ясне скотарство / О. Г. Тимченко, М. В. Зубець, В. С. Козир [та ін.] ; за ред. О. Г. Тимченка. – К. : Урожай, 1992. – 192 с.
4. Ионы металлов в биологических системах / под ред. Х. Зигеля. – М., 1982. – 282 с.
5. *Кравців, Р. Й.* Біологічна роль мікроелементів в організмі тварин. / Р. Й. Кравців, Р. П. Маслянко, О. І. Жеребецька, М. Б. Лаба // Науковий вісник ЛНАВМ ім. С. З. Гжицького. – Львів, 2004. – Т. 7, № 2, ч. 6. – С. 63–70.
6. *Кузнецов, С.* Микроэлементы в кормлении животных / С. Кузнецов, А. Кузнецов // Животноводство России. 2003. – № 3. – С. 16–17.
7. *Самохин, В. Т.* Дефицит микроэлементов в организме – важнейший экономический фактор / В. Т. Самохин // Аграрная Россия. – 2000. – № 5. – С.69–72.
8. *Poole, D. B.* Traceelement deficiencies in cattle // Veterinary Surgeon. – 1993. – Vol. 15, N 10. – P. 17–20.
9. *Комкова, Е. А.* Возможности микроэлементной стимуляции роста и развития молодняка крупного рогатого скота / Е. А. Комкова, Д. Л. Арсанукаев // Молочное и мясоное скотоводство. – 2009. – № 7. – С. 22–24.
10. *Simon, O.* Metabolism of proteins and amino acids // Protein Metabolism in Farm Animals. – Berlin. – 1989. – P. 273–367.

Поступила в редакцию 15.05.2015 г.

Контакты: scally@email.ua (Милостивая Дарья Федоровна)

Milostivaya D.F. THE INFLUENCE OF MICROELEMENTS ON METABOLISM INDICES AND ADDITIONAL WEIGHTS OF FEEDING YOUNG CATTLE OF UKRAINIAN MEAT BREED.

The impact of microelements (copper, cobalt and manganese) on protein exchange indices and their productivity has been studied. It has been found out that the application of additives does not affect greatly the serum protein content, but results in redistribution of protein fractions in the limits of physiological norm. In relation to control the concentration of albumens diminished, and globulins increased which is related to the enforcement of anabolic processes in peripheral tissues. The increase of protein synthesis under the influence of microelements produced a positive effect on additional weights of animals.

Key words: cattle fattening microelements, feeding young cattle, copper, manganese, cobalt, albumens, globulins, protein, blood.

УДК 579:[612.79.015:611.976]:543.856

МИКРОБІОЛОГІЧЕСКАЯ ЕФФЕКТИВНОСТЬ ГІГІЕНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ РУК РАЗЛИЧНИМИ СОРТАМИ КУСКОВОГО МЫЛА

Ю. В. Атанасова

старший преподаватель

Гомельский государственный медицинский университет

Е. И. Дегтярева

кандидат биологических наук, доцент

Гомельский государственный медицинский университет

В. А. Никифоренко

студент

Гомельский государственный медицинский университет

В ходе бактериологического исследования выявлено, что при использовании кускового мыла сразу после мытья рук имело место незначительное снижение, а в некоторых случаях увеличение количества микроорганизмов, составляющих микрофлору кожи рук. При массовом использовании кускового мыла для гигиенической обработки рук доказана возможность его контаминации микрофлорой, которая находилась на коже рук использовавших его людей. Показано, что при использовании кускового мыла, для предупреждения его контаминации микроорганизмами, его нужно применять в виде маленьких фрагментов для однократного индивидуального использования.

Ключевые слова: гигиеническая обработка рук, кусковое мыло, колонеобразующие единицы, минимальная подавляющая концентрация, *staphylococcus aureus*, *escherichia coli*, *pseudomonas aeruginosa*.

Введение

В современном мире невозможно сохранить свое здоровье без регулярной гигиенической обработки рук: именно через руки большинство болезнетворных микробов может попасть в организм человека.

Интактная кожа человека, даже тщательно вымытая, колонизирована различными микроорганизмами, которые образуют постоянную (резидентную) микрофлору. Ее состав варьирует в зависимости от части тела, возраста, пола, влажности, температуры, гигиенического состояния кожи, а также от времени года. Резидентная (собственная) микрофлора представлена преимущественно коагулазонегативными кокками (прежде всего *Staphylococcus epidermidis*) и дифтероидами (*Corinebacterium spp.*). Численность резидентной микрофлоры кожи составляет примерно 10^2 - 10^3 микробных клеток на 1 см². Около 80–90% постоянных микроорганизмов находятся в поверхностных слоях кожи и примерно 10–20% из них могут находиться в дерме, преимущественно в сальных и потовых железах, волосяных фолликулах (глубокая микро-

© Атанасова Ю.В., 2015

© Дегтярева Е.И., 2015

© Никифоренко В.А., 2015

флора). Резидентная микрофлора достаточно важна для иммунитета, так как, с одной стороны, она стимулирует образование антител и, с другой стороны, придает коже сопротивляемость к колонизации на ней других микроорганизмов, так как она производит свободные жирные кислоты, которые обладают бактерицидным действием [1]. Микрофлора кожи представлена не только постоянными (резидентными), но и временными (транзиторными) микроорганизмами. Наличие транзиторной микрофлоры является результатом контакта кожи с внешней средой. Транзиторная микрофлора (кишечные палочки, клебсиеллы, псевдомонады, сальмонеллы, золотистый стафилококк, дрожжеподобные грибы, синегнойная палочка, ротавирусы и др.), попав на кожу, сохраняется на руках не более 24 часов и может быть легко удалена с помощью обычного мытья рук или обработки антисептиками [2].

Мыло – один из самых распространенных антисептиков для обработки рук. Моющая способность мыла зависит от величины его поверхностной активности и значения pH. Резидентные микроорганизмы практически невозможно полностью удалить или уничтожить с помощью обычного мытья рук или даже антисептических процедур, хотя их численность при этом может быть значительно снижена. Полное удаление микроорганизмов с поверхности кожи рук не только невозможна, но и нежелательна: нормальная микрофлора препятствует колонизации кожи другими, гораздо более опасными микроорганизмами, прежде всего грамотрицательными бактериями.

Проблема выбора и эффективного использования кускового мыла для гигиенической обработки рук является и на данный момент актуальной.

Цель исследования: оптимизировать применение кускового мыла как дезинфицирующего средства с целью повышения эффективности управления эпидемическим процессом инфекций.

Научной новизной данной работы является, то, что впервые была изучена МПК различных сортов мыла отечественного и зарубежных производителей для условно-патогенных микроорганизмов.

Объект исследования. Объектом исследования данной работы являются различные сорта кускового мыла отечественного и зарубежного производства, применяемые для гигиенической обработки рук. В ходе наших исследований были изучены сорта мыла, которые сведены в таблицу 1 [3].

Таблица 1 – Различные сорта кускового мыла отечественного и зарубежного производства

№	Наименование	Производство
1	Хозяйственное “Блестер”	Гомельский ЖК, РБ
2	Greenelle Ag+ (Аргентум)	Гомельский ЖК, РБ
3	“Нарцисс”	Гомельский ЖК, РБ
4	“Детское”	Гомельский ЖК, РБ
5	“Земляничное”	Гомельский ЖК, РБ
6	“Цветочное”	Гомельский ЖК, РБ
7	“Хвойное”	Гомельский ЖК, РБ
8	“Антибактериальное”	Гомельский ЖК, РБ
9	“Фруктовое”	Гомельский ЖК, РБ
10	“Palmolive Naturals”	Турция
11	Болгарское ручной работы	Болгария
12	“Safeguard Nature”	Россия
13	“Yves rocher” (ив роше)	Франция

Вышеперечисленные сорта мыла были приобретены в объектах розничной торговли г. Гомеля. Исследования по изучению бактерицидных свойств данных сортов мыла производились на базе учебной лаборатории кафедры микробиологии, вирусологии и иммунологии УО “Гомельский государственный медицинский университет”.

Методы исследования

Определение количества КОЕ микрофлоры кожи рук

Для изучения количества КОЕ резидентной и транзиторной микрофлоры кожи рук нами был использован метод отпечатков. С этой целью мы использовали бакпечатки с питательным агаром (ПА ГРМ-агар). Бакпечатки представляют собой модифицированный вариант стандартных чашек Петри. Они позволяют получить лучшие по сравнению с обычными чашками Петри результаты, причем с меньшими трудозатратами. Бакпечатки применяются для контроля микробной загрязненности в лечебно-профилактических учреждениях, в фармацевтической и косметической промышленности, в пищевой, молочной и мясной промышленности, их можно использовать в санитарной и ветеринарной микробиологии и т. д.

Бакпечатки были изготовлены из двойного слоя стерильной медицинской марли фрагментами диаметром 4 см, которые заливали стерильным питательным агаром.

Технические характеристики бакпечатки:

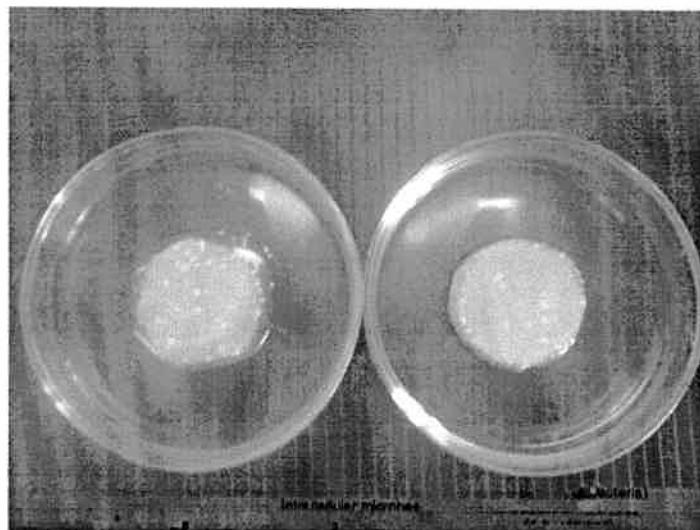
- материал – двухслойная медицинская марля;
- диаметр рабочей поверхности бакпечатки, см – 4,0;
- объем питательной среды, мл – 2,5.

Стерилизация питательных сред, марли – автоклавирование, режим 1 атм, 121°С, время экспозиции – 40 мин. Стерилизация чашек Петри – сухожаровой шкаф, основной режим – 170°С, время экспозиции – 20 мин. Сразу после заливания бакпечатки были помещены в стерильные чашки Петри.

Было обследовано 80 студентов 2 курса лечебного и медико-диагностического факультетов. В ходе эксперимента было сформировано 8 групп по 10 студентов в каждой, использовалось 8 наименований кускового мыла, произведенных на ОАО “Гомельском жировом комбинате” (РБ). Исследовалась кожа рук в области тыльной стороны ладони. Посев производился методом отпечатков до мытья рук и после мытья рук. Посевы производились двумя бакпечатками с кожи руки до и после гигиенической обработки соответственно.

Бакпечатку стерильным пинцетом прижимали к поверхности кожи, время ее экспозиции на коже составляло 20 сек, после чего бакпечатки помещали в чашки Петри и культивировали в термостате 24–48 часов при температуре 37°С.

Для определения числа КОЕ резидентной микрофлоры кожи рук студентов было подсчитано количество колоний выросших микроорганизмов на ПА ГРМ-агаре до и после мытья кусковым мылом (рисунок 1).



**Рисунок 1 – Чашки Петри с колониями на бакпептатах (ПА ГРМ-агаре)
до и после гигиенической обработки рук кусковым мылом**

Определение поверхностного натяжения и pH различных наименований кускового мыла

Для определения поверхностного натяжения и pH различных наименований кускового мыла сотрудниками кафедры общей и биоорганической химии были использованы следующие методики:

а) для измерения поверхностного натяжения: готовилась серия проб: 0,1 г, 0,2 г, 0,3 г на 150 мл дистиллированной воды и измерялась с помощью сталагмометрического метода поверхностное натяжение раствора исследуемого мыла.

Для определения поверхностного натяжения использовался сталагмометром Траубе. Раствор мыла набирался немного выше верхней кольцевой метки, затем свободно вытекал, и подсчитывалось количество капель, образующихся при вытекании отмеченного на сталагмометре объема (от верхней до нижней метки), и по формуле (1) определяют поверхностное натяжение

$$\sigma = \sigma(H_2O) \cdot \frac{n(H_2O)}{n}, \quad (1)$$

где $\sigma(H_2O)$ – поверхностное натяжение воды,

$\sigma(H_2O) = 72,75 \text{ мН/м}$ ($72,75 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$ или $72,75 \cdot 10^{-3} \text{ Дж/м}^2$);

n и $n(H_2O)$ – число капель исследуемого раствора мыла и воды.

После расчета поверхностного натяжения данного образца мыла, строился график зависимости поверхностного натяжения мыла от концентрации раствора. Затем графически определялось поверхностное натяжение исследуемого мыла.

б) Для измерения pH: готовился раствор мыла 0,2 г / 150 мл дистиллированной воды, с помощью pH-метра измерялась pH раствора мыла.

Определение МПК различных сортов кускового мыла

Для определения минимальной подавляющей концентрации различных сортов кускового мыла отечественного и зарубежного производства был использован метод двукратных серийных разведений.

Вначале готовили исходное разведение исследуемого мыла – 1/100 с последующим автоклавированием. Затем производили двукратные разведения мыла в МПБ от 1/100 до 1/3200. Для этого в стерильные пробирки, кроме 1-й, наливали по 5 мл МПБ и автоклавировали в режиме 1 атм, 121°C, время экспозиции 40 мин. Затем в 1-ю и 2-ю пробирки вливали 5 мл основного разведения исследуемого мыла. Из 2-й пробирки, в которой объем и разведение мыла увеличились в 2 раза, 5 мл содержимого переносили в 3-ю, из 3-й в 4-ю и т.д. до последней, из которой 5 мл выливали для уравновешивания объемов. Было приготовлено по три ряда двукратных разведений для каждого сорта мыла, соответственно, так как МПК определялось в отношении трех видов индикаторных культур.

Для приготовления инокулюма тест-культур использовали чистые суточные бактериальные культуры *E. coli*, *S. aureus*, *Ps. aeruginosa*, выращенные на скоженном ПА ГРМ-агаре. В центрифужную пробирку с 5 мл изотонического раствора хлорида натрия стерильным хлопковым тампоном вносили необходимое количество бактериальной культуры до оптической плотности 0,5 по МакФарланду (контроль с помощью денситометра), соответствующей $1,5 \times 10^8$ КОЕ/мл.

Вносили приготовленный инокулюм соответствующей культуры в объеме 20 мкл в каждое разведение исследуемого сорта мыла и инкубировали в термостате при температуре 37°C в течение 24 ч.

Учет МПК различных сортов мыла в отношении индикаторных культур производили на пластинчатой среде Мюллер-Хинтон. Из каждой пробирки двукратных разведений производили забор содержимого в объеме 20 мкл и делали посев на пластинчатую питательную среду в соответствующие сектора. Чашки Петри помещали в термостат вверх дном и инкубировали при температуре 37°C в течение 24-48 часов.

О МПК исследуемых сортов мыла судили по минимальному разведению мыла, которое подавляет рост индикаторной культуры на пластинчатой питательной среде (рисунок 2). Минимальная подавляющая концентрация мыла вызывает полное подавление заметного невооруженным глазом роста индикаторных культур на пластинчатых питательных средах в стандартных для них условиях.

Рисунок 2 – Учет МПК различных сортов мыла в отношении индикаторных культур на среде Мюллер-Хинтон



Данные, полученные в ходе микробиологических исследований, были обработаны с помощью программы Microsoft Office Excel 2007.

Уровень антимикробной активности различных наименований мыла рассчитывали по формуле 2

$$R = \log(N_K / N_T), \quad (2)$$

где R – уровень антимикробной активности;

N_K – среднее число колонеобразующих единиц микрофлоры кожи рук до их мытья кусковым мылом;

N_T – среднее число колонеобразующих единиц микрофлоры кожи рук после их мытья кусковым мылом.

Результаты исследований и их анализ

Уровень антимикробной активности испытуемых сортов кускового мыла в отношении микрофлоры кожи рук

Используя результаты, полученные в ходе исследований по изменению числа колонеобразующих единиц микрофлоры кожи рук до и после их мытья кусковым мылом, был рассчитан уровень антимикробной активности восьми наименований мыла по формуле (2). Полученные результаты представлены на рисунке 3.

Уровень антимикробной активности исследуемых наименований мыла колеблется от 39% до 59%. Наиболее высоким антимикробным действием облашают: мыло “Greenelle Ag+” (59%), “Нарцисс” (55%), “Хозяйственное” (54%), “Антибактериальное” (51%), а наименьшим – “Земляничное” (34%).

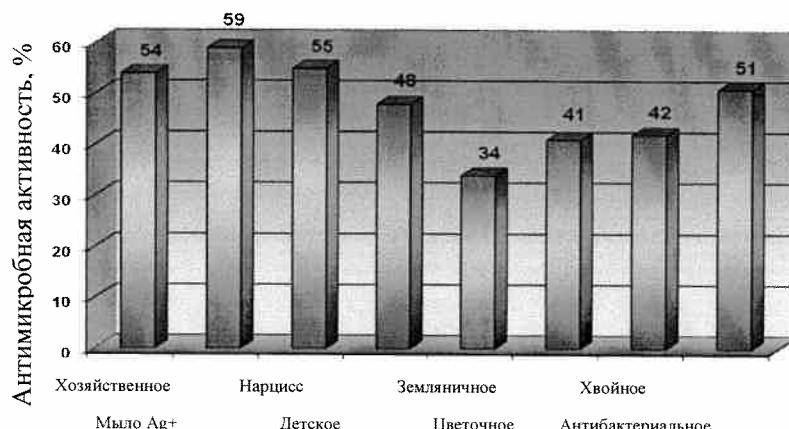


Рисунок 3 – Уровень антимикробной активности различных наименований мыла, %

Моющая способность мыла зависит от его поверхностной активности и значения pH раствора этого мыла. Определение поверхностного натяжения и pH различных наименований кускового мыла проводили, используя методики, описанные в разделе статьи “Материалы и методы”. Полученные результаты сведены в таблицу 2.

Таблица 2 – Уровень антимикробной активности мыла в соответствии с их физико-химическими свойствами

Название мыла	pH	Поверхностная активность мыла, г	Уровень антимикробной активности (%)
“Хвойное”	10,4	20,00	42
“Цветочное”	10,7	20,40	41
“Земляничное”	10,4	14,90	34
“Антибактериальное”	10,7	21,05	51
“Хозяйственное”	10,4	24,50	54
“Детское”	10,5	18,20	48
“Нарцисс”	10,5	23,54	55
“Greenelle Ag+”	10,5	21,80	59

Чем выше значение поверхностной активности мыла, а также значение его щелочной среды, тем большей моющей способностью обладает данное мыло.

Щелочность растворов исследуемых мыл изменялась в узком диапазоне pH 10,4-10,7, таким образом, она для всех наименований мыла оказалась весьма высокой. Из полученных экспериментальных результатов, следует, что наибольшей моющей способностью из 8 исследуемых наименований кускового мыла обладают: “Greenelle Ag+”, “Нарцисс”, “Хозяйственное”, “Антибактериальное”, “Детское”.

Число колонеобразующих единиц резидентной микрофлоры кожи рук до и после их мытья кусковым мылом определяли, подсчитывая количество колоний выросших микроорганизмов на ПА ГРМ-агаре бакпептатков. Полученные результаты сведены в таблицу 3.

Таблица 3 – Количество колоний на бакпептатах с ПА до и после мытья рук мылом

Название мыла	KOE до мытья рук $M \pm m$	KOE после мытья рук $M \pm m$
“Хвойное”	$73,6 \pm 64,0$	$61,9 \pm 19,5$
“Цветочное”	$90,0 \pm 15,1$	$86,0 \pm 19,9$
“Земляничное”	$97,0 \pm 64,3$	$89,5 \pm 15,4$
“Антибактериальное”	$62,0 \pm 25,1$	$52,5 \pm 12,0$
“Хозяйственное”	$119,0 \pm 24,6$	$64,9 \pm 19,7$
“Детское”	$94,3 \pm 44,1$	$88,1 \pm 20,1$
“Нарцисс”	$112,1 \pm 78,6$	$83,3 \pm 19,2$
“Greenelle Ag+”	$85,1 \pm 56,7$	$45,9 \pm 13,3$

Число колоний микрофлоры кожи рук на питательной среде после их гигиенической обработки мылом уменьшается. Это подтверждается тем, что мыло удаляет транзиторную и часть резидентной микрофлоры. Как видно из результатов, представленных в таблице 3, в каждой экспериментальной группе были бакпептатки с увеличением KOE микроорганизмов после гигиенической обработки рук, что можно объяснить тем, что с кожи рук микроорганизмы попадают на влажный кусок мыла и контаминируют его. В результате этого, кусок мыла может становиться источником распространения той микрофлоры, которая попадает на него во время гигиенической обработки рук при его массовом использовании. Для предупреждения контаминации микроорганизмами куско-

вого мыла, его лучше использовать индивидуально или одноразово маленькими фрагментами.

Определение МПК различных сортов кускового мыла в отношении *S. aureus*, *E. coli*, *P. aeruginosa*

Благодаря определению минимальной подавляющей концентрации мы можем выбрать наиболее эффективные сорта мыл, обладающих наилучшей бактерицидной активностью в отношении *E. coli*, *S. aureus*, *P. aeruginosa*.

Полученные результаты по определению минимальной подавляющей концентрации различных сортов кускового мыла сведены в таблицу 4.

Таблица 4 – Бактерицидные свойства различных сортов мыла отечественного и зарубежных производителей

Фруктовое мыло								
Разведение мыла	1/100	1/200	1/400	1/800	1/1600	1/3200	Контроль культур	Контроль мыла
I	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>E. coli</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
<i>St. aur.</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
<i>Ps. aer.</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
Мыло "Yves rocher"								
<i>E. coli</i>	-	-	+	+	+	+	+	-
<i>St. aur.</i>	-	-	+	+	+	+	+	-
<i>Ps. aer.</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
Мыло "Greenelle Ag+"								
<i>E. coli</i>	-	-	+	+	+	+	+	-
<i>St. aur.</i>	-	-	+	+	+	+	+	-
<i>Ps. aer.</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
Мыло Болгарское ручной работы								
<i>E. coli</i>	+	+	+	+	+	+	+	-
<i>St. aur.</i>	+/-	+	+	+	+	+	+	-
<i>Ps. aer.</i>	+	+	+	+	+	+	+	-
Мыло "Нарцисс"								
<i>E. coli</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
<i>St. aur.</i>	-	-	+	+	+	+	+	-
<i>Ps. aer.</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
Мыло "Safeguard Nature"								
<i>E. coli</i>	+	+	+	+	+	+	+	-
<i>St. aur.</i>	-	-	-	-	-	+	+	-
<i>Ps. aer.</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
Мыло "Антибактериальное"								
<i>E. coli</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
<i>St. aur.</i>	+/-	+	+	+	+	+	+	-
<i>Ps. aer.</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
Мыло "Хвойное"								
<i>E. coli</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
<i>St. aur.</i>	+	+	+	+	+	+	+	-
<i>Ps. aer.</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
Мыло "Земляничное"								
<i>E. coli</i>	-	+	+	+	+	+	+	-
<i>St. aur.</i>	+/-	+	+	+	+	+	+	-
<i>Ps. aer.</i>	-	+	+	+	+	+	+	-

Окончание таблицы 4

Фруктовое мыло								
Разведение мыла	1/100	1/200	1/400	1/800	1/1600	1/3200	Контроль культур	Контроль мыла
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Мыло хозяйственное “Блестер”								
E. coli	-	+	+	+	+	+	+	-
St. aur.	-	-	-	+	+	+	+	-
Ps. aer.	-	+	+	+	+	+	+	-
Мыло “Детское”								
E. coli	-	-	+	+	+	+	+	-
St. aur.	-	+	+	+	+	+	+	-
Ps. aer.	-	+	+	+	+	+	+	-
Мыло “Цветочное”								
E. coli	+/-	+	+	+	+	+	+	-
St. aur.	-	+	+	+	+	+	+	-
Ps. aer.	+/-	+	+	+	+	+	+	-
Мыло “Palmolive naturals”								
E. coli	-	+	+	+	+	+	+	-
St. aur.	+	+	+	+	+	+	+	-
Ps. aer.	-	+	+	+	+	+	+	-

Примечание: “+” наличие роста индикаторных культур; “-” отсутствие роста; “+/-” – одиночные колонии.

Из результатов, представленных в таблице 4 видно, что наиболее эффективными в отношении кишечной палочки являются мыла: “Greenelle Ag+”, “Детское” (производство РБ) и “Yves rocher” (производство Франция). Мыла хозяйственное “Блестер” (производство РБ) и “Safeguard Nature” (производство Россия) обладают наибольшей бактерицидностью в отношении золотистого стафилококка.

Заключение

1. В ходе данной работы установлено, что после гигиенической обработки рук исследуемыми сортами мыла число КОЕ микрофлоры кожи рук на питательной среде уменьшается. Это подтверждает то, что мыло удаляет транзиторную и часть резидентной микрофлоры. Однако в каждой экспериментальной группе были случаи увеличения КОЕ микроорганизмов после гигиенической обработки рук, что можно объяснить тем, что с кожи рук микроорганизмы попадают на влажный кусок мыла и контактируют с ним. На основании этого использовать кусковое мыло в общественных местах и ЛПУ необходимо в виде маленьких фрагментов для однократного индивидуального использования с целью предупреждения его контаминации микроорганизмами, находящимися на коже рук предыдущего пользователя.

2. Из полученных экспериментальных результатов, следует, что наибольшей моющей способностью из 8 исследуемых наименований кускового мыла обладают: “Greenelle Ag+”, “Нарцисс”, хозяйственное “Блестер”, “Антибактериальное”, “Детское”. Наиболее высоким антимикробным действием облада-

ют: “Greenelle Ag+”, (59%), “Нарцисс” (55%), хозяйственное “Блестер” (54%), “Антибактериальное” (51%), а наименьшим – “Земляничное” (34%).

3. На основании полученных результатов по определению МПК различных сортов кускового мыла рекомендуется с целью гигиенической обработки рук для индивидуального использования, в общественных местах и ЛПУ применять мыла “Greenelle Ag+”, хозяйственное “Блестер”, “Детское” отечественного производства.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Ванюков, Д. А.* Хирургическая и гигиеническая обработка рук медицинского персонала / Д. А. Ванюков, Л. С. Сверчкова // Поликлиника. – 2010. – № 4. – С. 36–42.
2. *Афигенов, Г. Е.* Современные подходы к гигиене рук медицинского персонала / Г. Е. Афигенов, А. Г. Афигенова // Российский НИИ Травматологии и ортопедии им. В. Р. Вредина. – 2010. – № 3. – С. 68–77.
3. Новый ассортимент туалетного мыла / авт.-сост. В. Е. Сыцко. – Гомель : УО “Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации”, 2001. – С. 4–6.

Поступила в редакцию 19.02.2015 г.

Контакты: hroft92@mail.ru (Атанасова Юлия Васильевна)
elena.degyaryova@tut.by (Дегтярева Елена Ивановна)

Atanasova Y.V., Degtyareva Y.I., Nikiforenko V.A. MICROBIOLOGICAL EFFICACY OF HYGIENIC CLEANING OF HANDS WITH DIFFERENT VARIETIES OF BAR SOAP.

In the course of the bacteriological examination it has been revealed that using bar soap immediately after hand washing there is a slight decrease, in some cases increase of the number of microorganisms constituting skin microflora of hands. Mass use of bar soap for hygienic cleaning of hands proves the possibility of its contamination by the microflora from the skin of the hands of people who used it. It is shown that to prevent bar soap contamination by microorganisms, it should be used in the form of small pieces for a single individual use.

Key words: staphylococcus aureus, escherichia coli, pseudomonas aeruginosa.

УДК 616.681: 547.262: 599

ВЛИЯНИЕ ГИНКГО БИЛОБА НА МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ СПЕРМАТОЗОИДОВ В УСЛОВИЯХ ХРОНИЧЕСКОЙ ЭТАНОЛОВОЙ ИНТОКСИКАЦИИ

Н. П. Долинко

аспирант

Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника
(Ивано-Франковск, Украина)

Нами установлено, что длительная (28 суток) алкоголизация животных и введение им экстракта из листьев Гинкго билоба привела к уменьшению (28,19% против 56,20%) количества мертвых сперматозоидов, (33,52% против 42,20%) количества патологических форм сперматозоидов. Возросло до 69,8% количество сперматозоидов с нормальной морфологией, до 71% количество живых сперматозоидов и до 41,5% – количество сперматозоидов с прогрессивным движением.

Ключевые слова: сперматозоиды, этанол, Гинкго билоба.

Введение

Как известно, в условиях современного развития репродуктивных технологий важное значение имеют морфологические параметры спермограммы [1–3, 4]. Всестороннее исследования морфологии сперматозоидов является обязательным при отборе донорских сперматозоидов с целью их возможного применения для интрацитоплазматической инъекции в яйцеклетку [3, 5, 6].

Вместе с тем вопрос влияния хронической этаноловой интоксикации на показатели спермограммы, как и ангиопротекторные свойства экстракта из листьев Гинкго билоба в этих условиях, остаются мало исследованными [6, 7].

В связи с этим целью данной экспериментальной работы было изучить морфологические и функциональные особенности сперматозоидов в условиях хронической этаноловой интоксикации и обнаружить в них изменения при применении экстракта из листьев Гинкго билоба, как безопасного и нетоксического ангиопротектора [7].

Основная часть

Объект и методы исследования. Работа выполнена на 46 крысах линии “Вистар”, возрастом 8–10 недель, массой 180–200 г, которых содержали в стандартных условиях вивария со свободным доступом к сбалансированной пище и воде. Животные были разделены на группы. Крысам первой группы внутрижелудочно вводили 30% раствор этанола из расчета 2 мл на 100 г массы тела в течение 7, 14, 21 и 28 суток один раз в сутки [8]. Животным второй группы в эти

же сроки, кроме этанола, вводили спиртовой экстракт из листьев Гинкго билоба в дозе 0,5 млг на кг. Контролем служили интактные животные соответствующего возраста. Сперматозоиды забирали из хвостовой части придатка яичка. Определяли их концентрацию, процент патологических форм и подвижность по общепринятым методикам [3, 7, 9]. Статистический анализ проводили с помощью компьютерной системы STATISTICA for Windows®, оценку результатов осуществляли методами непараметрического анализа с использованием критерия Манна-Уитни, разницу считали достоверной при $p < 0,05$. Содержание и манипуляции с животными осуществляли в соответствии с положением “Общие этические принципы экспериментов над животными”, утвержденного I Национальным конгрессом по биоэтике (2011). Комиссией по вопросам биоэтики Прикарпатского национального университета имени Василия Стефаника нарушения морально-этических норм при проведении научно-исследовательской работы не обнаружено (протокол № 1 от 04.02.2015 г.).

Результаты исследования и их обсуждение. Нами установлено, что в отдаленные сроки опытов (на 28 сутки), в эякуляте алкоголизированных животных, получавших экстракт из листьев Гинкго билоба, характер восстановительных процессов в яичках проявляется увеличением концентрации сперматозоидов ($63,21 \pm 3,50$) млн/мл против ($56,20 \pm 2,30$) млн / мл у животных, не получавших корректор. Обращает на себя внимание тот факт, что в данных условиях в эякуляте уменьшается до ($28,19 \pm 2,50$)% против ($56,20 \pm 2,30$)% количество мертвых сперматозоидов. Важны полученные нами данные о том, что в отдаленные сроки опыта значительно уменьшилось ($33,52 \pm 2,36$)% против ($42,20 \pm 3,56$)% количество патологических форм сперматозоидов. При этом оказалось, что наиболее частой патологией со стороны половых клеток являются изменения со стороны их головки (вакуолизирована или маленькая головка), которые составляют 16,23% против 21,26%.

До 10,39% против 13,50% уменьшилось количество сперматозоидов с патологией основной части жгутика (укороченный и согнутый жгутик). По данным литературы морфологически нормальными считают сперматозоиды, имеющие овальную или заостренную головку с хорошо выраженной акросомой и жгутиком [3, 10].

По нашим наблюдениям, после применения экстракта из листьев Гинкго билоба количество сперматозоидов с нормальной морфологией возросло до 69,8% против 57,7% по сравнению с эякулятом алкоголизированных животных. Важны полученные нами данные по количеству живых сперматозоидов. В условиях применения корректора оно составляет 71,8% против 61,7%.

Кроме исследования морфологических особенностей сперматозоидов нами также изучались показатели кинезограммы, применив новую классификацию их подвижности, предложенную ВОЗ в 2010 г., которая предлагает выделять сперматозоиды с прогрессивным движением, не прогрессивным движением и неподвижные формы. Согласно новым критериям оценки подвижности сперматозоидов, сперматозоиды с быстрым поступательным движением (тип а) и сперматозоиды с медленным поступательным движением (тип в) сведены в одну группу – сперматозоиды с прогрессивным движением [1, 10].

Полученные нами данные свидетельствуют о положительных сдвигах в кинезисграмме алкоголизированных животных, получавших экстракт из листьев Гinkго билоба. В частности, количество неподвижных сперматозоидов уменьшилось до 28,3% против 35,1%. В этих условиях количество сперматозоидов с прогрессивным движением возросло до 41,5% против 36,3% в группе животных без коррекции сперматогенеза.

Таким образом, из полученных нами экспериментальных данных применение фитопрепарата экстракта из листьев Гinkго билоба не привело к полному восстановлению морфологических и функциональных характеристик сперматозоидов в яичках алкоголизированных животных. Эти данные в значительной степени согласуются с выводами В.А. Пастуховой, которая исследовала влияние на сперматогенез хронической гипертермии с испытанием корректора – экстракта из листьев Гinkго билоба и инозина [6, 10].

Вместе с тем, в предыдущих работах [3, 5] нами обнаружен положительный эффект экстракта из листьев Гinkго билоба на развитие компенсаторно-приспособительных процессов в яичках алкоголизированных животных, которые проявились тем, что значительное количество извитых семенных канальцев сохранили свою структурную организацию. К собственной оболочке семенных канальцев прилегали несколькими слоями сперматогонии, сперматоциты и сперматиды, а в просвете находились зрелые сперматозоиды. Исследование спермограмм в этих условиях показало увеличение на 7% общего количества сперматозоидов с нормальной морфологией. Улучшены в условиях проведенного эксперимента функциональные показатели сперматозоидов. Возросло на 10% количество живых сперматозоидов, сперматозоидов с прогрессивным движением, что, по нашему мнению, является важным для обеспечения репродуктивной функции.

Заключение

1. Количественный морфологический анализ сперматозоидов в эякуляте алкоголизированных животных, получавших экстракт из листьев Гinkго билоба (достоверное уменьшение количества патологических и увеличение количества нормальных форм) свидетельствует о его стимулирующем влиянии на сперматогенез.
2. Функциональные показатели сперматозоидов (достоверное увеличение количества живых и прогрессивно движущихся форм), подтверждают целесообразность применения экстракта из листьев Гinkго билоба, как корректора сперматогенеза при хронической алкогольной интоксикации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Бойко, М. І.* Лабораторне дослідження еякуляту в прогнозі успішності циклів ДРТ при чоловічій неплідності / М. І. Бойко, І. С. Чорнокульський // Урологія. – 2013. – № 2(65). – С. 52–53.
2. *Гладкова, А. И.* Андрологические проявления стресса. – Харьков, 2013. – 267 с.
3. *Грицюляк, Б. В.* Характер морфофункциональних змін в сперматозоїдах після травми яєчка / Б. В. Грицюляк, В. Б. Грицюляк, Н. П. Долинко // Вісник проблем біології і медицини. – 2014. – Вип. 4, Том 2(114). – С. 220–223.

4. *Schill, W. B.* Andrology for the Clinician / W. B. Schill, F. N. Comhaire, T. B. Hargreave // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2011. – 800 s.
5. *Грицуляк, Б. В.* Гістота ультраструктурні зміни в яечку щурів з хронічною алкогольною інтоксикацією / Б. В. Грицуляк, В. Б. Грицуляк, М. Б. Пастух, Н. П. Долинко // Світ медицини та біології. – 2014. – № 2(44). – С. 114–117 .
6. *Пастухова, В. П.* Вплив Гінкго білоби на ультраструктуру яєчок щурів при дії експериментальної гіпертурмії
7. *Литвинець, С.А.* Гинкго билоба: фармакологические и лечебные свойства / С. А. Литвинець, О. Р. Винтонив // Здоровье мужчин. – 2012. – № 4. – С. 39–42.
8. *Дереча, Л.М.* Склад фосфоліпідів клітин крові, печінки та головного мозку тварин при тривалій дії етанолу / Л. М. Дереча // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: біологія. – 2007. – Вип. 5, № 768. – С. 25–28.
9. *Пархоменко, Ю. Н.* Характерные метаболические нарушения в тканях крыс, вызванные длительным приёмом алкоголя / Ю. М. Пархоменко, Б. В. Данченко, С. Ю. Пилипчук // Укр. біохім. журнал. – 2007. – № 3. – С. 62–68.
10. *Чорнокульський, І. С.* Морфофункциональні особливості чоловічих еякульованих сперматозоїдів в нормі та при неплідності / І. С. Чорнокульський, Ю. Б. Чайковський, М. І. Бойко, С.В. Базилевич// Світ медицини і біології. – 2013. – № 4(42). – С. 52–53.

Поступила в редакцию 29.04.2015 г.

Контакты: neonila.d@i.ua (Долинко Неля Петровна)

Dolynko N.P. GINKGO BILOBA INFLUENCE ON MORPHOLOGICAL AND FUNCTIONAL PARAMETERS OF SPERM IN CONDITIONS OF CHRONIC ETHANOL INTOXICATION

It has been found out that long-term (28 days) alcoholization of animals and introduction of the extract from the leaves of Ginkgo biloba have led to the decrease (28,19% versus 56,20%) in the number of dead sperm (33,52% vs. 42,20%), in the number of pathological forms of spermatozoa. The number of sperm with normal morphology has increased to 69,8%, the number of live sperm – up to 71%, the number of sperm with progressive movement – up to 41,5%.

Key words: spermatozoa, ethanol, Ginkgo biloba.