ISSN 2409-3777

В Е С Н І К

Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

1 (45)
2015

Галоўная рэдакцыйная калегія:
д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (галоўны рэдактар);
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара);
д-р гіст. навук дацэнт Д.С. Лаўрыновіч (нам. галоўнага рэдактара);
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (нам. галоўнага рэдактара);
д-р фіз.-мат. навук прафесар С.В. Жасткоў (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В);
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)

Научно-методический журнал "Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова" включен в РИНЦ (Российский индекс научного цитирования), лицензионный договор № 811–12/2014

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
пакой 223, т. (8-0222) 28-31-51

© МДУ імя А.А. Куляшова, 2015

ЗМЕСТ

ГАЛЬМАК А.М. О симметрических кубических матрицах 4

ЖЕСТКОВ С.В. О существовании топологических и нетопологических солитонов уравнений Шредингера с потенциалом Бома и степенными законами нелинейности 16

КЕМЕШ О.Н., МОРОЗОВА И.М., САКОВИЧ Н.В. Алгебраические точки в кубах малого объема 31

БУДАРИНА Н.В., О'ДОННЕЛЛ Х., ШАМУКОВА Н.В. Зависимость количества алгебраических чисел на интервалах единичной длины от расположения интервала 37

МИХАЙЛОВА Н.В. Идея "математической конструкции" Брауэра в проблеме существования 44

ВЕКО О.В., ОВСИЮК Е.М., РЕДЬКОВ В.М. Формализм матриц Мюллера в поляризационной оптике и диагонализация квадратичных форм 52

ОСТРИКОВ О.М., ВЛАШЕВИЧ В.В. Напряженное состояние, обусловленное динамическим нанодвойником в условиях электропластического эффекта 64

КОРБАН Ю.В. Психофизиологическое восприятие цвета, основанное на отражательной поляриметрии 73

СОРОКА А.В. Фармакологический потенциал растений сем. *Cactaceae Juss.* 78

Жестков Сергей Васильевич 89

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

О СИММЕТРИЧЕСКИХ КУБИЧЕСКИХ МАТРИЦАХ

А. М. Гальмак
доктор физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет продовольствия,
г. Могилев, РБ

В статье изучаются кубические матрицы порядка $n \geq 2$ над произвольным кольцом P, у которых для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают. Множество всех таких кубических матриц совпадает с множеством $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ всех симметрических кубических матриц порядка n над P. Приводятся критерии симметричности кубической матрицы. Указан один из возможных способов конструирования всех кубических матриц из $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$. Показано, что множество всех кубических матриц порядка n над P, у которых определители ориентаций (i), (j) и (k) совпадают, шире множества $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$.

1 Введение

В теории кубических матриц, которые являются пространственными аналогами квадратных матриц, значительное место занимают исследования, связанные с изучением пространственных обобщений обычных определителей. К числу таких обобщений относятся кубические детерминанты из [1, 2]. Кроме того, в [3] для любой кубической матрицы A порядка n над ассоциативным, коммутативным кольцом P с единицей были определены четыре вида определителей: $\det^{(i)}A$ – определитель ориентации (i); $\det^{(j)}A$ – определитель ориентации (j), $\det^{(k)}A$ – определитель ориентации (k) и полный определитель $\det A$. Напомним эти определения из [3].

Определителем ориентации (s) кубической матрицы $A = (a_{ijk})$, где $s \in \{i, j, k\}$, называется [3] произведение определителей всех ее сечений ориентации (s).

Полным определителем кубической матрицы $A = (a_{ijk})$ называется [3] произведение ее определителей ориентаций (i), (j) и (k).

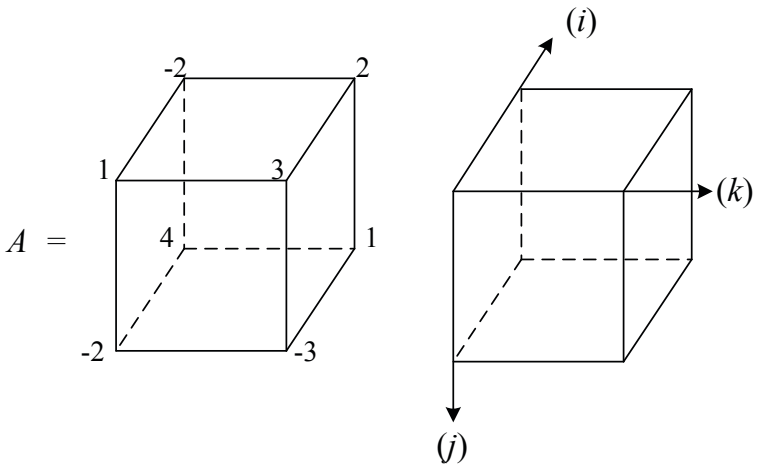
Таким образом, согласно определению,

$$\det^{(i)}(a_{ijk}) = \det(a_{1jk})\det(a_{2jk}) \ldots \det(a_{mjk}),$$
$$\det^{(j)}(a_{ijk}) = \det(a_{i1k})\det(a_{i2k}) \ldots \det(a_{imk}),$$
$$\det^{(k)}(a_{ijk}) = \det(a_{ij1})\det(a_{ij2}) \ldots \det(a_{ijm}),$$
$$\det(a_{ijk}) = \det^{(i)}(a_{ijk})\det^{(j)}(a_{ijk})\det^{(k)}(a_{ijk}).$$

Сравнивая приведенные выше определения определителей из [3] с определением кубических детерминантов из [1, 2], видим, что определители из [3] и кубические детерминанты из [1, 2] – это совершенно разные понятия.

© А.М. Гальмак, 2015

Пример 1.1. Пусть $n = 2$, $P = \mathbb{Z}$,



Найдем все определители пространственной матрицы A:

$$\det{}^{(i)}A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-10) = -30;$$

$$\det{}^{(j)}A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot 10 = 80;$$

$$\det{}^{(k)}A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot\ 9 = 0;$$

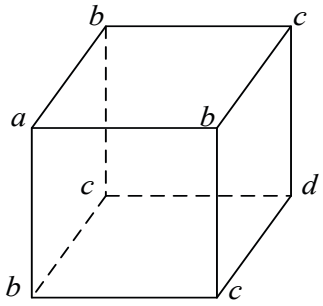
$$\det A = 30\cdot 80\cdot 0 = 0.$$

Отметим, что для кубической матрицы A из рассмотренного примера кубический детерминант сигнатуры $[{}^{+}_{i}]$ равен – 1.

Представляет интерес следующий

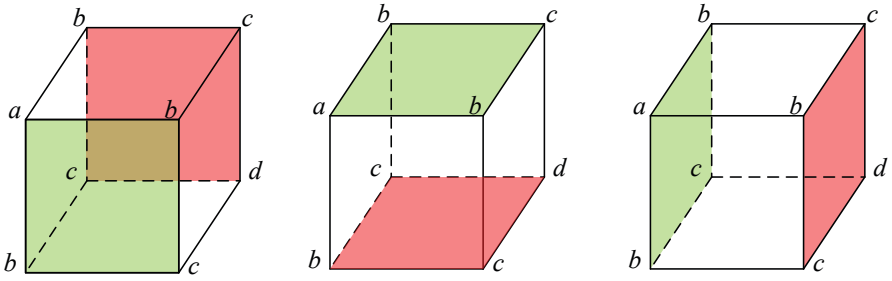
Вопрос 1.1. *Существуют ли для любого* $n \geq 2$ *кубические матрицы, у которых определители ориентаций* (i), (j) *и* (k) *совпадают*?

Пример 1.2. Рассмотрим кубическую матрицу



(1.1)

и ее сечения ориентаций (i), (j) и (k)



сечения ориентации (i) | сечения ориентации (j) | сечения ориентации (k)

где a, b, c и d – произвольные элементы кольца P (первые сечения каждой ориентации имеют зелёный цвет, вторые – красный цвет). Эта кубическая матрица примечательна тем, что у нее первые сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают, совпадают и вторые сечения ориентаций (i), (j) и (k). Понятно, что у этой кубической матрицы определители ориентаций (i), (j) и (k) совпадают и равны

$$(ac - b^2)(bd - c^2).$$

Таким образом, при $n = 2$ ответ на сформулированный выше вопрос 1.1 является положительным. Для $n > 2$ ответ будет также положительным, если будет получен утвердительный ответ на

Вопрос 1.2. *Существуют ли для любого* $n > 2$ *кубические матрицы порядка* n, *у которых для любого* $r = 1, 2, \ldots, n$ *r-е сечения ориентаций* (i), (j) *и* (k) *совпадают*?

2. Симметрические кубические матрицы

Можно заметить, что кубическая матрица (1.1) является симметрической в смысле следующего определения. Кубическая матрица (a_{ijk}) порядка n называется [1] *симметрической*, если

$$a_{ijk} = a_{ikj} = a_{jik} = a_{jki} = a_{kij} = a_{kji}$$

для любых $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Множество всех симметрических кубических матриц порядка n над P непусто, так как содержит любую кубическую матрицу порядка n над P, у которой все элементы совпадают с одним и тем же элементом из P.

Ясно, что если зафиксировать $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то r-е сечения ориентаций (i) и (j)

$$(a_{rjk}) = \begin{pmatrix} a_{r1} & \ldots & a_{r1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{rnn} \end{pmatrix}, (a_{irk}) = \begin{pmatrix} a_{1r1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nrn} \end{pmatrix}$$

кубической матрицы (a_{ijk}) порядка n совпадают тогда и только тогда, когда $a_{rst} = a_{srt}$ для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Аналогично, r-е сечения ориентаций (i) и (k) кубической матрицы (a_{ijk}) порядка n совпадают тогда и только тогда, когда $a_{rst} = a_{str}$ для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Точно также, r-е сечения ориентаций (j) и (k) кубической матрицы (a_{ijk}) порядка n совпадают тогда и только тогда, когда $a_{srt} = a_{str}$ для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Таким образом, у кубической матрицы (a_{ijk}) порядка n r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ тогда и только тогда, когда

$$a_{rst} = a_{srt} = a_{str}$$

для любых $r, s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Можно показать, что если у кубической матрицы (a_{ijk}) порядка n для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают, то у этой кубической матрицы все сечения любой ориентаций являются симметрическими матрицами. Поэтому у кубической матрицы (a_{ijk}) порядка n r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ тогда и только тогда, когда

$$a_{rst} = a_{rts} = a_{srt} = a_{trs} = a_{str} = a_{tsr}$$

для любых $r, s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то есть имеет место

Предложение 2.1. *Множество всех кубических матриц порядка n над P, у которых r-е сечения ориентаций* (i), (j) и (k) *совпадают для любого* $r = 1, 2, \ldots, n$, *совпадает с множеством всех симметрических кубических матриц порядка n над P.*

Таким образом, кубические матрицы из вопроса 1.2 это ни что иное, как симметрические кубические матрицы.

Обозначим через $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка n над P, а через $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех симметрических кубических матриц порядка n над P. Согласно предложению 2.1,

$$\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P) = \{(a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{n\times n\times n}(P) \mid (a_{rjk}) = (a_{irk}) = (a_{ijr}),\ r = 1, \ldots, n\}.$$

Поэтому справедливо

Предложение 2.2. *У любой кубической матрицы* $A \in \mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ *ее определители ориентаций* (i), (j) *и* (k) *совпадают*:

$$\det^{(i)} A = \det^{(j)} A = \det^{(k)} A.$$

Для $n = 1$ считаем $\mathbf{\Sigma}_{1\times 1\times 1}(P) = P$.

Легко проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Множество* $\mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P)$ *совпадает с множеством всех кубических матриц второго порядка вида* (1.1).

3. Критерии симметричности кубической матрицы

Укажем один из способов получения всех кубических матриц порядка n, у которых для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ r-е сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают.

Обозначим через $\mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка n над P, у которых первые сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают и являются симметрическими матрицами, то есть

$$\mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) = \{A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{n\times n\times n}(P) \mid (a_{1jk}) = (a_{i1k}) = (a_{ij1}) \in \mathbf{\Sigma}_n(P)\},$$

где $\Sigma_n(P)$ – множество всех симметрических матриц порядка n над P.

Если у кубической матрицы A порядка n над P удалить первые сечения ориентаций (i), (j) и (k), то получится кубическая подматрица порядка $n - 1$ над P, которую будем обозначать символом ${}^{\neg 1}A$.

Обозначим через ${}^{\neg 1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка n над кольцом P, у которых кубическая подматрица ${}^{\neg 1}A$ принадлежит множеству $\mathbf{\Sigma}_{(n-1)\times(n-1)\times(n-1)}(P)$.

При доказательстве приведенной ниже теоремы будет использоваться следующий простой факт: *если у матриц A и B равны подматрицы, получающиеся вычеркиванием первых строк и первых столбцов, то для равенства самих матриц A* и *B достаточно равенства их первых строк и равенства их первых столбцов*.

Для произвольной матрицы A будем использовать следующие обозначения: $A^{(i)}$ – (i)-я строка, $A_{(j)}$ – (j)-й столбец.

Теорема 3.1. *Для любого целого $n \geq 2$ верно равенство*

$$\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P) = \mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{\neg 1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P).$$

Доказательство. Так как, согласно лемме 2.1, любая кубическая матрица из $\mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P)$ имеет вид (1.1), то

$$\mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) = \mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P).$$

Кроме того, из условия $\mathbf{\Sigma}_{1\times 1\times 1}(P) = P$ следует

$${}^{\neg 1}\mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P) = \mathbf{M}_{2\times 2\times 2}(P).$$

Поэтому при $n = 2$ равенство из формулировки теоремы верно.

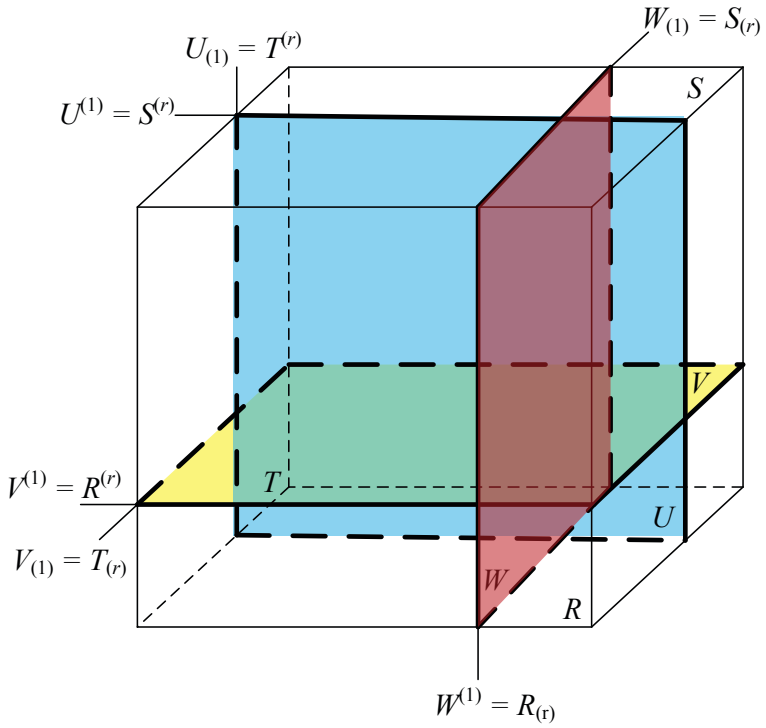
Далее считаем $n \geq 3$.

Пусть

$$A \in \mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{\neg 1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P).$$

Выберем произвольно $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и пусть R, S и T – первые сечения соответственно ориентаций (i), (j) и (k) кубической матрицы A; U, V и W – r-е сечения соответственно ориентаций (i), (j) и (k) этой же кубической матрицы A.

Далее для наглядности будем пользоваться следующим изображением указанных сечений кубической матрицы A.



Первая строка $U^{(1)}$ матрицы U является r-й строкой $S^{(r)}$ матрицы S, то есть

$$U^{(1)} = S^{(r)}. \tag{3.1}$$

Так как $A \in \mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$, то $S = R$, откуда

$$S^{(r)} = R^{(r)}, \tag{3.2}$$

но r-я строка $R^{(r)}$ матрицы R совпадает с первой строкой $V^{(1)}$ матрицы V:

$$R^{(r)} = V^{(1)}. \tag{3.3}$$

Из (3.1) – (3.3) следует

$$U^{(1)} = V^{(1)}. \tag{3.4}$$

Первый столбец $U_{(1)}$ матрицы U является r-й строкой $T^{(r)}$ матрицы T:

$$U_{(1)} = T^{(r)}. \tag{3.5}$$

Снова, так как $A \in \mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$, то T – симметрическая матрица, откуда

$$T^{(r)} = T_{(r)}. \tag{3.6}$$

Но r-й столбец $T_{(r)}$ матрицы T является первым столбцом $V_{(1)}$ матрицы V:

$$T_{(r)} = V_{(1)}. \tag{3.7}$$

Из (3.5) – (3.7) следует

$$U_{(1)} = V_{(1)}. \tag{3.8}$$

Так как $A \in {}^{\neg 1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$, то ${}^{\neg 1}\mathrm{A} \in \mathbf{\Sigma}_{(n-1)\times(n-1)\times(n-1)}(P)$. Тогда из (3.4) и (3.8) ввиду замечания перед доказываемой теоремой, следует

$$U = V. \tag{3.9}$$

Так как S – симметрическая матрица, то

$$S^{(r)} = S_{(r)}, \tag{3.10}$$

а так как $S = R$, то

$$S_{(r)} = R_{(r)}. \tag{3.11}$$

Кроме того,

$$R_{(r)} = W^{(1)}. \tag{3.12}$$

Из (3.1), (3.10) – (2.12) следует

$$U^{(1)} = W^{(1)}. \tag{3.13}$$

Так как $T = S$, то

$$T_{(r)} = S_{(r)}. \tag{3.14}$$

Кроме того,

$$S_{(r)} = W_{(1)}. \tag{3.15}$$

Из (3.5), (3.6), (3.14) и (3.15) следует

$$U_{(1)} = W_{(1)}. \tag{3.16}$$

Из (3.13) и (3.16), ввиду замечания перед доказываемой теоремой, следует

$$U = W. \tag{3.17}$$

Из (3.9) и (3.17), ввиду произвольного выбора $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, следует

$$A \in \mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P).$$

Таким образом, доказано включение

$$\mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{\neg 1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P) \subseteq \mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P).$$

Пусть теперь $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$. Ясно, что

$$A \in {}^{\neg 1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P).$$

Для наглядности снова обратимся к приведенному выше рисунку, считая, что на нём изображена указанная кубическая матрица.

Выберем произвольно $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Так как $A \in \mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$, то согласно предложению 2.1, $U = V$, откуда следует равенство первых столбцов этих матриц: $U_{(1)} = V_{(1)}$. Из рисунка видно, что

$$U_{(1)} = T^{(r)},\ V_{(1)} = T_{(r)},$$

откуда и из предыдущего равенства следует $T^{(r)} = T_{(r)}$. Следовательно, матрица T – симметрическая.

А так как $T = R = S$, то матрицы R и S – также являются симметрическими. Таким образом,

$$A \in \mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$$

и более того,

$$A \in \mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{\neg 1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P).$$

Тем самым доказано включение

$$\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P) \subseteq \mathbf{\Sigma}^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{\neg 1}\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P),$$

а значит и требуемое равенство. Теорема доказана.

Согласно теореме 3.1, у любой кубической матрицы A из $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ первые сечения ориентаций (i), (j) и (k) являются симметрическими. В действительности верно, как отмечалось в замечании 2.1, следующее более общее утверждение.

Предложение 3.1. *Если у кубической матрицы порядка n для любого* $r = 1, 2, \ldots, n$ *r-е сечения ориентаций* (i), (j) *и* (k) *совпадают, то у этой кубической матрицы все сечения любой ориентации являются симметрическими матрицами*.

Это легко показать, если в фрагменте доказательства теоремы 3.1, касающегося установления симметричности матрицы T, заменить эту матрицу любым q-м сечением (a_{ijq}) ориентации (k), где $q \in \{2, \ldots, n\}$, оставив всё остальное без изменений. В результате будет установлена симметричность этого сечения (a_{ijq}). А так как для матрицы $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ q-е сечения (a_{qjk}), (a_{iqk}) и (a_{ijq}) ориентаций (i), (j) и (k) совпадают, то симметрическими будут и сечения (a_{qjk}) и (a_{iqk}).

Сформулируем еще одно

Предложение 3.2. *Кубическая матрица, у которой все сечения любой ориентации являются симметрическими матрицами, сама является симметрической*.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ijk})$ – кубическая матрица, у которой все сечения любой ориентаций являются симметрическими матрицами.

Для элемента a_{rst} имеем:

$$a_{rst} = a_{rts} \text{ (в } r\text{-м сечении ориентаций } (i)); \tag{3.18}$$

$$a_{rst} = a_{tsr} \text{ (в } s\text{-м сечении ориентаций } (j)); \tag{3.19}$$

$$a_{rst} = a_{srt} \text{ (в } t\text{-м сечении ориентаций } (k)). \tag{3.20}$$

Для элемента a_{rts} имеем

$$a_{rts} = a_{str} \text{ (в } t\text{-м сечении ориентаций } (j)). \tag{3.21}$$

Для элемента a_{tsr} имеем

$$A_{tsr} = a_{trs} \text{ (в } t\text{-м сечении ориентаций } (i)). \qquad (3.22)$$

Из (3.18) – (3.22) вытекает

$$a_{rst} = a_{rts} = a_{tsr} = a_{srt} = a_{str} = a_{trs}$$

для любых $r, s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Следовательно, $A = (a_{ijk})$ – симметрическая кубическая матрица. Предложение доказано.

Предложения 2.1, 3.1 и 3.2 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Для любой кубической матрицы A порядка* $n \geq 2$ *следующие утверждения равносильны*:

1) *у A r-е сечения ориентаций* (i), (j) *и* (k) *совпадают для любого* $r = 1, 2, \ldots, n$;

2) *у A все сечения любой ориентации являются симметрическими матрицами*;

3) *A – симметрическая*.

Замечание 3.1. Теорема 3.1 дает способ конструирования всех кубических матриц из $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ для любого n.

Вначале фиксируем множество $\mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P)$, которое согласно лемме 2.1, совпадает с множеством всех кубических матриц второго порядка вида (1.1).

Затем для любой кубической матрицы из $\mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P)$ и любой симметрической матрицы третьего порядка строится кубическая матрица третьего порядка, у которой первые сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают с выбранной симметрической матрицей третьего порядка, а кубическая подматрица, получающаяся удалением этих первых сечений, совпадает с выбранной кубической матрицей из $\mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P)$. Согласно теореме 3.1, множество всех таких кубических матриц совпадает с множеством $\mathbf{\Sigma}_{3\times 3\times 3}(P)$.

Далее с помощью кубических матриц из $\mathbf{\Sigma}_{3\times 3\times 3}(P)$ и симметрических матриц четвёртого порядка аналогично конструируется множество $\mathbf{\Sigma}_{4\times 4\times 4}(P)$.

После того, как построено множество $\Sigma_{(n-1)\times(n-1)\times(n-1)}(P)$, с помощью кубических матриц из этого множества и симметрических матриц n-го порядка строится множество $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$.

Возможны и другие способы “сборки” кубических матриц из множества $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$.

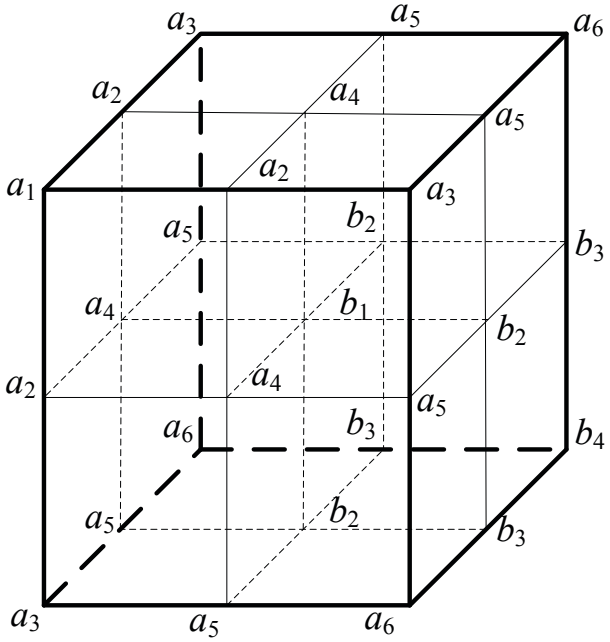
Замечание 3.2. “Сборку” кубических матриц из множества $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ можно начинать не с множества $\mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P)$, а с множества $\mathbf{\Sigma}_{1\times 1\times 1}(P) = P$. Схема при этом та же, что и описанная выше. Для любого элемента d из $\mathbf{\Sigma}_{1\times 1\times 1}(P) = P$ и любой

симметрической матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ второго порядка строится кубическая матрица второго порядка, у которой первые сечения ориентаций (i), (j) и (k) совпадают с выбранной симметрической матрицей второго порядка, а кубическая подматрица, получающаяся удалением этих первых сечений, совпадает с выбранным элементом d из $\mathbf{\Sigma}_{1\times 1\times 1}(P) = P$. В результате получается

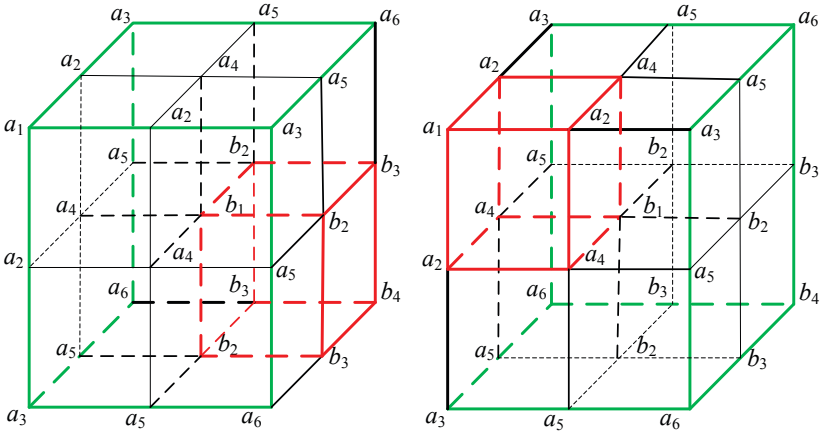
кубическая матрица (1.1). Множество всех таких кубических матриц совпадает с множеством $\mathbf{\Sigma}_{2\times2\times2}(P)$.

4. Примеры

Пример 4.1. На рисунке ниже показан общий вид кубической матрицы из $\mathbf{\Sigma}_{3\times3\times3}(P)$.



На следующем рисунке указаны два способа “сборки” кубической матрицы, из которых первый соответствует теореме 3.1. Кубическая матрица второго порядка, с которой начинается “сборка” окрашена красным цветом; а пристраиваемые грани – матрицы третьего порядка окрашены зелёным цветом.

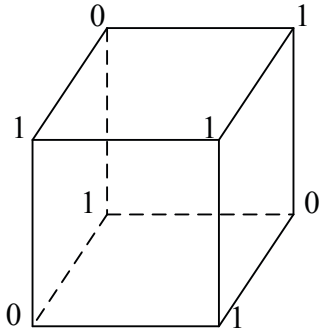


Следующий пример показывает, что множество всех кубических матриц A порядка n над P, обладающих свойством

$$\det^{(i)}A = \det^{(j)}A = \det^{(k)}A$$

шире множества $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$.

Пример 4.2. Для кубической матрицы

$A =$ 

выпишем все ее сечения

$$(a_{1jk}) = (a_{i1k}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij1}),$$

$$(a_{2jk}) = (a_{i2k}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (a_{ij2}).$$

Следовательно, $A \notin \mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P)$.

С другой стороны,

$$\det(a_{1jk}) = \det(a_{i1k}) = \det(a_{ij1}) = 1,$$
$$\det(a_{2jk}) = \det(a_{i2k}) = \det(a_{ij2}) = -1,$$

откуда следует

$$\det^{(i)}A = \det(a_{1jk})\det(a_{2jk}) = 1(-1) = -1,$$
$$\det^{(j)}A = \det(a_{i1k})\det(a_{i2k}) = 1(-1) = -1,$$
$$\det^{(k)}A = \det(a_{ij1})\det(a_{ij2})) = 1(-1) = -1.$$

Таким образом, кубическая матрица A обладает свойством

$$\det^{(i)}A = \det^{(j)}A = \det^{(k)}A,$$

но не принадлежит множеству $\mathbf{\Sigma}_{2\times 2\times 2}(P)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Соколов, Н.П.*** Пространственные матрицы и их приложения / Н.П. Соколов. – М. : Наука, 1960. – 300 с.

2. ***Соколов, Н.П.*** Введение в теорию пространственных матриц / Н.П. Соколов. – Киев : Наукова думка, 1972. – 175 с.
3. ***Гальмак, А.М.*** О вектор-матрицах и пространственных матрицах / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 110). – С. 75–86.

Поступила в редакцию 26.11.2014 г.
Контакты: (+375 222) 46-40-19 (Гальмак)

Summary

The article deals with cubic matrices of order $n \geq 2$ over an arbitrary ring P whose r-th sections of orientations (i), (j), (k) for any $r = 1,2, \ldots n$ are the same. A set of all such cubic matrices coincide with a set $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ of all symmetric cubic matrices of order n over P. Criteria of symmetry of a cubic matrix are given. One of the possible ways for the formation of all cubic matrices $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$ is described. It is shown that a set of all cubic matrices of order n over P whose determinants of orientations (i), (j), (k) coincide are wider than a set $\mathbf{\Sigma}_{n\times n\times n}(P)$.

УДК 517+530.1

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И НЕТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ БОМА И СТЕПЕННЫМИ ЗАКОНАМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

С. В. Жестков
доктор физико-математических наук, профессор
МГУ имени А. А. Кулешова, г. Могилев, РБ

В [1] на основе полу-обратного вариационного принципа исследованы солитонные решения возмущенного резонансного нелинейного уравнения Шредингера с полной нелинейностью, включая потенциал Бома. Специфика этого подхода заключается в том, что параметры солитона определяются из вариационного принципа, а не прямой подстановкой анзаца в исходное уравнение. Поэтому остается открытым вопрос о сравнительном анализе результатов, полученных на основе вариационного принципа [1] и известных методов построения солитонных решений [2]. В связи с этим обстоятельством представляют интерес математические модели с потенциалом Бома, допускающие точные солитонные решения.

Цель работы – построение топологических и нетопологических солитонов, указанных в заглавии уравнений, на основе результатов работ [3-7].

I. Уравнение Шредингера с потенциалом Бома и степенными законами нелинейности и затухания

1. Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iu_t + a_1 u_{xx} + a_2 |u|^{2m} u = i\left[a_3 u + a_4 |u|^{2m} u + a_5 u \frac{|u|_{xx}}{|u|} \right], \quad m > 0, \quad (1)$$

где a_1, a_5 – произвольные действительные числа. Солитонное решение уравнения (1) строится в виде

$$u(t,x) = I(t,x)\exp(i\eta), \quad \eta = kx + \omega t + \varphi, \quad (2)$$

где $I(t,x)$ – неизвестная гладкая неотрицательная функция, k, ω – параметры солитона. Подставляя (2) в (1), найдем

$$i\left[I_t + i\omega I\right] + a_1\left[I_{xx} + 2ikI_x - k^2 I\right] + a_2 I^{2m+1} = i\left[a_3 I + a_4 I^{2m+1} + a_5 I_{xx}\right].$$

Из последнего уравнения получим:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}: \quad I_t + 2a_1 k I_x = a_3 I + a_4 I^{2m+1} + a_5 I_{xx}, \\ &\mathrm{Re}: \quad -\omega I + a_1 I_{xx} - a_1 k^2 I + a_2 I^{2m+1} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

© С.В. Жестков, 2015

Система (3) является определяющей системой уравнений относительно неизвестной функции $I(t,x)$, т.е. справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение (1) имело решение (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (3).*

Для решения системы (3) представим $I(t,x)$ в виде

$$I(t,x)=f(\xi),\quad \xi=\alpha x-vt+\psi, \tag{4}$$

где v – скорость солитона, α,ψ – действительные числа. Тогда подставляя (4) в (3), найдем:

$$\begin{aligned}&\left(-v+2a_1\alpha k\right)f'(\xi)=a_3f(\xi)+a_4f^{2m+1}(\xi)+\alpha^2a_5f''(\xi),\\&a_1\alpha^2f''(\xi)-\left(\omega+a_1k^2\right)f(\xi)+a_2f^{2m+1}(\xi)=0.\end{aligned} \tag{5}$$

Предположим, что

$$v=2a_1\alpha k. \tag{6}$$

Тогда система (5) преобразуется к виду:

$$a_3f(\xi)+a_4f^{2m+1}(\xi)+\alpha^2a_5f''(\xi)=0, \tag{7}$$

$$a_1\alpha^2f''(\xi)-\left(\omega+a_1k^2\right)f(\xi)+a_2f^{2m+1}(\xi)=0. \tag{8}$$

Известно [5], что уравнения (7), (8) допускают решения в форме нетопологичского солитона, т. е.

$$f(\xi)=Ach^{-\mu}(\xi),\quad \mu>0, \tag{9}$$

где A – амлитуда солитона μ – неизвестный параметр. Подставляя (9) в (7), найдем

$$a_3ch^2\xi+a_4A^{2m}ch^{-2m\mu+2}(\xi)+a_5\alpha^2\left[\mu(\mu+1)sh^2\xi-\mu ch^2\xi\right]=0. \tag{10}$$

Из анализа уравнения (10) следует, что $\mu=\dfrac{1}{m}$. В этом случае в силу линейной независимости экспонент, найдем

$$a_3+a_5\alpha^2\mu^2=0,\quad A^{2m}=\left(\mu+\mu^2\right)\alpha^2\frac{a_5}{a_4},\quad \frac{a_5}{a_4}>0. \tag{11}$$

Подставляя (9) в (8) при $\mu=\dfrac{1}{m}$, получим

$$a_1\alpha^2\left[\mu^2ch^2\xi-\mu(\mu+1)\right]-\left(\omega+a_1k^2\right)ch^2\xi+a_2A^{2m}=0. \tag{12}$$

Из уравнения (12) следует, что

$$\omega+a_1k^2=a_1\alpha^2\mu^2,\quad A^{2m}=\alpha^2\mu(\mu+1)\frac{a_1}{a_2},\quad \frac{a_1}{a_2}>0. \tag{13}$$

Из (11) и (13) вытекает важное соотношение

$$a_1 a_4 = a_2 a_5, \tag{14}$$

выполнение которого обеспечивает существование нетопологического солитона (2), (9). Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены соотношения (6), (11), (13), (14) и* $\mu = \frac{1}{m}$.

Тогда уравнение (1) имеет решение в виде нетопологического солитона

$$u(t,x) = Ach^{-\mu}(\xi)\exp(i\eta). \tag{15}$$

Отметим, что соотношения (11), (13), (14) являются законами распространения солитона (15) и связывают параметры солитона с коэффициентами уравнения (1).

2. При $m = 1$ система уравнений (7), (8) принимает вид:

$$a_3 f(\xi) + a_4 f^3(\xi) + a_5 \alpha^2 f''(\xi) = 0, \tag{16}$$

$$a_1 \alpha^2 f''(\xi) - \left(\omega + a_1 k^2\right) f(\xi) + a_2 f^3(\xi) = 0. \tag{17}$$

В этом случае она допускает топологический солитон в виде кинка

$$f(\xi) = Ath\xi, \quad \xi \geq 0, \tag{18}$$

где $A > 0$ – неизвестный параметр. Подставляя (18) в (16), (17), найдем

$$a_3 = 2\alpha^2 a_5, \quad A = \sqrt{-\frac{a_3}{a_4}}, \quad \frac{a_3}{a_4} < 0, \tag{19}$$

$$\omega + a_1 k^2 = -2a_1\alpha^2, \quad A = \sqrt{\frac{\omega + a_1 k^2}{a_2}}, \quad \frac{\omega + a_1 k^2}{a_2} > 0. \tag{20}$$

Из (19), (20) также следует соотношение (14), которое обеспечивает существование и топологических солитонов.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть выполнены соотношения (6), (19), (20),* $m = 1$. *Тогда уравнение (1) имеет решение вида*

$$u(t,x) = Ath\xi \exp(i\eta), \quad \xi \geq 0.$$

II. О существовании топологических солитонов НУШ с потенциалом Бома и нелинейным членом, содержащим первую производную

Аналитическое моделирование уравнений Шредингера позволяет построить и исследовать новые классы нелинейных уравнений, допускающих солитонные решения. При этом используется дробно-рациональная форма солитонов, которая позволяет получить законы их распространения. Они представляют собой нелинейные алгебраические соотношения, связывающие параметры солитона с коэффициентами исходного уравнения.

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) вида

$$iu_t + a_1 u_{xx} + a_2 |u|^{2m} u = i\left[a_3 u + a_4 |u|^{2m} u + a_5 u \frac{|u|_{xx}}{|u|} \right] + a_6 \frac{u}{|u|} |u|_x \qquad (21)$$

с произвольными действительными коэффициентами $\overline{a_1, a_6}$. В отличие от (1) уравнение (21) содержит нелинейный член

$$a_6 \frac{u}{|u|} |u|_x,$$

который обеспечивает существование кинковых волновых решений, отличных от классических (18). Решение уравнения (21) строится в виде (2). Подставляя (2) в (21), найдем

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}: \quad I_t + 2a_1 k I_x = a_3 I + a_4 I^{2m+1} + a_5 I_{xx}, \\ &\mathrm{Re}: \quad -\omega I + a_1 I_{xx} - a_1 k^2 I + a_2 I^{2m+1} = a_6 I_x. \end{aligned} \qquad (22)$$

Система (22) является определяющей системой уравнений относительно неизвестной функции $I(t,x)$. Ее решение строится в виде

$$I(t,x) = f(\xi) = (\lambda_0 + \lambda_1 th\xi)^{\mu}, \quad \mu > 0, \qquad (23)$$

где $\lambda_0 > 0, \lambda_0 \geq |\lambda_1|, \mu > 0$ – неизвестные параметры кинка.

Предположим, что

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda, \quad \alpha = 1, \quad \mu = \frac{1}{m}. \qquad (24)$$

Тогда подставляя (23) в (22), найдем

$$\begin{aligned} &\lambda^2 = -\frac{a_1}{a_2}(\mu^2 + \mu) = -\frac{a_5}{a_4}(\mu^2 + \mu), \quad \frac{a_5}{a_4} < 0, \\ &v = 2a_1 k - 2a_5(1 + 2\mu), \quad \omega + a_1 k^2 = -4a_1(\mu^2 + \mu). \end{aligned} \qquad (25)$$

$$a_3 = 4a_5 \mu(1 + \mu), \quad a_6 = 2a_1(1 + 2\mu).$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (24), (25). Тогда уравнение (21) имеет кинковое волновое решение вида*

$$u(t,x) = \left[-\frac{a_5}{a_4}(\mu^2 + \mu) \right]^{\frac{\mu}{2}} (1 + th\xi)^{\mu} \exp(i\eta).$$

Отметим, что из (25) также вытекает соотношение (14)

$$a_1 a_4 = a_2 a_5 .$$

III. Уравнение Шредингера с потенциалом Бома и законом нелинейности удвоенной степени. Существование нетопологических солитонов

Известно [8], что закон нелинейности удвоенной степени является одним из важных законов, описывающих механизм баланса между нелинейными и дисперсионными членами, который обеспечивает существование солитонов. Рассмотрим НУШ вида

$$iu_t + a_1 u_{xx} + a_2 |u|^{2m} u + a_3 |u|^{4m} u = i\left[a_4 u + a_5 |u|^{2m} u + a_6 |u|^{4m} u + a_7 u \frac{|u|_{xx}}{|u|} \right], \quad m > 0 , \quad (26)$$

где $\overline{a_1, a_7}$ – произвольные действительные числа. Решение уравнения (26) строится в виде (2). Подставляя (2) в (26), получим следующие определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}: \quad I_t + 2a_1 k I_x = a_4 I + a_5 I^{2m+1} + a_6 I^{4m+1} + a_7 I_{xx}, \\ &\mathrm{Re}: \quad -\left(\omega + a_1 k^2\right) I + a_1 I_{xx} + a_2 I^{2m+1} + a_3 I^{4m+1} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Решение системы (27) строится в виде (4). Подставляя (4) в (27), найдем

$$\begin{aligned} &\left(-v + 2a_1 k\alpha\right) f'(\xi) = a_4 f(\xi) + a_5 f^{2m+1}(\xi) + a_6 f^{4m+1}(\xi) + a_7 \alpha^2 f''(\xi), \\ &-\left(\omega + a_1 k^2\right) f(\xi) + a_1 \alpha^2 f''(\xi) + a_2 f^{2m+1}(\xi) + a_3 f^{4m+1}(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Система (28) представляет собой систему двух уравнений относительно неизвестной функции $f(\xi)$. Если положить, что

$$v = 2a_1 \alpha k , \quad (29)$$

то из (28) получим систему определяющих уравнений для нетопологических солитонов:

$$\begin{aligned} &a_4 f(\xi) + a_5 f^{2m+1}(\xi) + a_6 f^{4m+1}(\xi) + a_7 \alpha^2 f''(\xi) = 0, \\ &-\left(\omega + a_1 k^2\right) f(\xi) + a_2 f^{2m+1}(\xi) + a_3 f^{4m+1}(\xi) + a_1 \alpha^2 f''(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Решение системы (30) строится в виде [9]

$$f(\xi) = \left[\lambda_0 + \lambda_1 \exp\xi + \lambda_2 \exp(-\xi)\right]^{-\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2m}, \quad (31)$$

где $\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ – неизвестные параметры солитона. Подставляя (31) в первое уравнение системы (30), получаем следующие соотношения:

$$\mu^2 = -\frac{a_4}{\alpha^2 a_7}, \quad \left(\frac{a_4}{a_7} < 0\right), \quad \lambda_0 = \frac{a_5}{\alpha^2 a_7\left(\mu + 2\mu^2\right)}, \quad \left(\frac{a_5}{a_7} > 0\right), \tag{32}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{4\left(\mu^2+\mu\right)}\left[\frac{a_5^2}{\alpha^4 a_7^2\left(\mu+2\mu^2\right)} + \frac{a_6}{\alpha^2 a_7} + \frac{a_4 a_5^2}{\alpha^6 a_7^3\left(\mu+2\mu^2\right)^2}\right] > 0.$$

Аналогично, используя второе уравнение системы (30), находим

$$\mu^2 = \frac{\omega + a_1 k^2}{\alpha^2 a_1} > 0, \quad \lambda_0 = \frac{a_2}{\alpha^2 a_1\left(\mu+2\mu^2\right)}, \quad \left(\frac{a_1}{a_2} > 0\right),$$
$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{4\alpha^2 a_1\left(\mu+\mu^2\right)}\left[a_3 + \frac{a_2^2(1+\mu)}{\alpha^2 a_1\mu(2\mu+1)^2}\right] > 0. \tag{33}$$

Сравнивая соотношения (32), (33), приходим к важным зависимостям для коэффициентов уравнения (26):

$$\omega = -\frac{a_1 a_4}{a_7} - a_1 k^2, \quad a_1 a_5 = a_2 a_7,$$
$$a_7\left[\frac{a_2^2(\mu+1)}{\alpha^2 a_1\mu(2\mu+1)} + a_3\right] = a_1\left[\frac{a_5^2(\mu+1)}{\alpha^2 a_7\mu(2\mu+1)^2} + a_6\right]. \tag{34}$$

Таким образом, на основании изложенного устанавливаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (29), (32)-(34). Тогда уравнение (26) имеет нетопологический солитон вида*

$$u(t,x) = \left[\lambda_0 + \lambda_1 \exp\xi + \lambda_2 \exp(-\xi)\right]^{-\mu} \exp(i\eta).$$

IV. О существовании топологических солитонов НУШ с потенциалом Бома и законом нелинейности удвоенной степени

Математический анализ баланса нелинейных и дисперсионных членов показывает, что существование топологических солитонов возможно для уравнения

$$iu_t + a_1 u_{xx} + a_2|u|^{2m}u + a_3|u|^{4m}u =$$
$$= i\left[a_4 u + a_5|u|^{2m}u + a_6|u|^{4m}u + a_7 u\frac{|u|_{xx}}{|u|}\right] + a_8\frac{u}{|u|}|u|_x, \tag{35}$$

которое отличается от уравнения (26) нелинейным членом

$$a_8 \frac{u}{|u|}|u|_x .$$

Решение уравнения (35) строится в виде (2). Подставляя (2) в (35), получим следующие определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}: \quad I_t + 2a_1 k I_x = a_4 I + a_5 I^{2m+1} + a_6 I^{4m+1} + a_7 I_{xx}, \\ &\mathrm{Re}: \quad -\left(\omega + a_1 k^2\right) I + a_1 I_{xx} + a_2 I^{2m+1} + a_3 I^{4m+1} = a_8 I_x . \end{aligned} \tag{36}$$

Решение системы (36) строится в виде (4). Подставляя (4) в (36), находим

$$\begin{aligned} &\left(-v + 2a_1 k\alpha\right) f'(\xi) = a_4 f(\xi) + a_5 f^{2m+1}(\xi) + a_6 f^{4m+1}(\xi) + a_7 \alpha^2 f''(\xi), \\ &a_1 \alpha^2 f''(\xi) - \left(\omega + a_1 k^2\right) f(\xi) + a_2 f^{2m+1}(\xi) + a_3 f^{4m+1}(\xi) = a_8 \alpha f'(\xi). \end{aligned} \tag{37}$$

В отличие от (30) система (37) содержит первые и вторые производные неизвестной функции $f(\xi)$. Поэтому ее решение строится в виде (23), т. е.

$$f(\xi) = \left(\lambda_0 + \lambda_1 th\xi\right)^{\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2m}, \tag{38}$$

где $\lambda_0 > 0, \lambda_0 \geq |\lambda_1|$. Подставляя (38) в первое и второе уравнения системы (37), находим соответственно:

$$\begin{aligned} &th^0\xi: \quad a_7\alpha^2\mu(\mu-1)\lambda_1^2 + (v - 2a_1 k\alpha)\mu\lambda_0\lambda_1 + a_4\lambda_0^2 + a_5\lambda_0^3 + a_6\lambda_0^4 = 0, \\ &th\xi: \quad -2\mu\lambda_0\lambda_1 a_7\alpha^2 + (v - 2a_1 k\alpha)\mu\lambda_1^2 + 2a_4\lambda_0\lambda_1 + 3\lambda_0^2\lambda_1 a_5 + 4\lambda_0^3\lambda_1 a_6 = 0, \\ &th^2\xi: \quad -2\mu^2\lambda_1^2 a_7\alpha^2 - \mu\lambda_0\lambda_1(v - 2a_1 k\alpha) + a_4\lambda_1^2 + 3\lambda_0\lambda_1^2 a_5 + 6\lambda_0^2\lambda_1^2 a_6 = 0, \\ &th^3\xi: \quad 2\mu\lambda_0\lambda_1 a_7\alpha^2 - \mu\lambda_1^2(v - 2a_1 k\alpha) + \lambda_1^3 a_5 + 4\lambda_0\lambda_1^3 a_6 = 0, \\ &th^4\xi: \quad \left(\mu^2 + \mu\right)\lambda_1^2 a_7\alpha^2 + a_6\lambda_1^4 = 0, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} &th^0\xi: \quad \mu(\mu-1)a_1\alpha^2\lambda_1^2 - \alpha\mu\lambda_0\lambda_1 a_8 - \left(\omega + a_1 k^2\right)\lambda_0^2 + a_2\lambda_0^3 + a_3\lambda_0^4 = 0, \\ &th\xi: \quad -2\mu\lambda_0\lambda_1 a_1\alpha^2 - \alpha\mu\lambda_1^2 a_8 - \left(\omega + a_1 k^2\right)2\lambda_0\lambda_1 + 3\lambda_0^2\lambda_1 a_2 + 4\lambda_0^3\lambda_1 a_3 = 0, \\ &th^2\xi: \quad -2\mu^2\lambda_1^2 a_1\alpha^2 + \mu\lambda_0\lambda_1\alpha a_8 - \left(\omega + a_1 k^2\right)\lambda_1^2 + 3\lambda_0\lambda_1^2 a_2 + 6\lambda_0^2\lambda_1^2 a_3 = 0, \\ &th^3\xi: \quad 2\mu\lambda_0\lambda_1 a_1\alpha^2 + \mu\lambda_1^2\alpha a_8 + a_2\lambda_1^3 + 4\lambda_0\lambda_1^3 a_3 = 0, \\ &th^4\xi: \quad \left(\mu^2 + \mu\right)\lambda_1^2 a_1\alpha^2 + a_3\lambda_1^4 = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Анализ разрешимости системы (39), (40) устанавливает существование топологических солитонов вида (38), т. е. справедлива следующая

Теорема 6. *Для того чтобы система (37) имела решение вида (38) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (39), (40).*

Исследуем эти соотношения. Для этого положим, что $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda > 0$. Тогда из (39) найдем

$$\lambda^2 = -\alpha^2\left(\mu^2+\mu\right)\frac{a_7}{a_6}, \quad \frac{a_7}{a_6} < 0,$$

$$a_5\lambda = 2\mu(2\mu+1)a_7\alpha^2 + \mu\left(v - 2a_1k\alpha\right), \tag{41}$$

$$a_4 = -2\mu\left(v-2a_1k\alpha\right) - 4\mu^2 a_7\alpha^2.$$

Остальные уравнения системы (39) превращаются в тождества. Из (40) получаем

$$\lambda^2 = -\alpha^2\left(\mu^2+\mu\right)\frac{a_1}{a_3}, \quad \frac{a_1}{a_3} < 0,$$

$$a_2\lambda = \left(4\mu^2+2\mu\right)a_1\alpha^2 - \alpha\mu a_8, \tag{42}$$

$$\left(\omega + a_1k^2\right) = 4\mu^2 a_1\alpha^2 - 2\alpha\mu a_8.$$

Остальные уравнения системы (40) превращаются в тождества. Из (41), (42) находим

$$\frac{a_7}{a_6} = \frac{a_1}{a_3} \text{ или } a_3a_7 = a_1a_6.$$

Остальные четыре уравнения системы (41), (42) представляют собой линейную алгебраическую систему относительно восьми коэффициентов $\overline{a_1, a_8}$. Поэтому система (41), (42) имеет бесконечное множество решений. Из проведенного анализа вытекает

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (41), (42). Тогда уравнение (35) имеет топологический солитон*

$$u(t,x) = \lambda^{\mu}(1+th\xi)^{\mu}\exp(i\eta), \quad \mu = \frac{1}{2m}.$$

V. Уравнение Шредингера с потенциалом Бома и законом нелинейности утроенной степени. Существование нетопологических солитонов

Закон утроенной степени нелинейности [8] требует, чтобы уравнение Шредингера содержало дисперсионные члены высших порядков и нелинейные члены более сложной структуры, чем потенциал Бома. Такому требованию удовлетворяет уравнение вида

$$i(u_t + a_1 u_x + a_2 u_{xxx}) + a_3 u_{xx} + a_4 u_{xxxx} + a_5 |u|^{2m} u + a_6 |u|^{4m} u + a_7 |u|^{6m} u =$$
$$= i\left[a_8 u + a_9 |u|^{2m} u + a_{10} |u|^{4m} u + a_{11} |u|^{6m} u + a_{12} \frac{u}{|u|} |u|_{xx} + a_{13} \frac{u}{|u|} |u|_{xxxx} \right] \quad (43)$$

с произвольными действительными коэффициентами $\overline{a_1, a_{13}}$. Решение уравнения (43) строится в виде (2). Подставляя (2) в (43), находим

$$i\left[I_t + i\omega I\right] + ia_1\left[I_x + ikI\right] + ia_2\left[I_{xxx} + 3ikI_{xx} - 3k^2 I_x - ik^3 I\right] + a_3\left[I_{xx} + 2ikI_x - k^2 I\right] +$$
$$+ a_4\left[I_{xxxx} + 4ikI_{xxx} - 6k^2 I_{xx} - 4ik^3 I_x + k^4 I\right] + a_5 I^{2m+1} + a_6 I^{4m+1} + a_7 I^{6m+1} =$$
$$= i\left[a_8 I + a_9 I^{2m+1} + a_{10} I^{4m+1} + a_{11} I^{6m+1} + a_{12} I_{xx} + a_{13} I_{xxxx}\right]. \quad (44)$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (44) получаем:

$$\mathrm{Im}: \quad I_t + a_1 I_x + a_2 I_{xxx} - 3k^2 a_2 I_x + 2ka_3 I_x + 4a_4 k I_{xxx} - 4a_4 k^3 I_x =$$
$$= a_8 I + a_9 I^{2m+1} + a_{10} I^{4m+1} + a_{11} I^{6m+1} + a_{12} I_{xx} + a_{13} I_{xxxx}, \quad (45)$$

$$\mathrm{Re}: \quad -\omega I - ka_1 I - 3ka_2 I_{xx} + a_2 k^3 I + a_3 I_{xx} - a_3 k^2 I + a_4 I_{xxxx} -$$
$$- 6a_4 k^2 I_{xx} + a_4 k^4 I + a_5 I^{2m+1} + a_6 I^{4m+1} + a_7 I^{6m+1} = 0. \quad (46)$$

Система (45), (46) является определяющей системой уравнений для нетопологических солитонов. Для ее исследования предположим, что

$$I(t,x) = f(\xi), \quad \xi = \alpha x - vt + \psi. \quad (47)$$

Подставляя (47) в (45), (46), находим:

$$\left(-v + a_1\alpha - 3k^2 a_2\alpha + 2ka_3\alpha - 4a_4 k^3\alpha\right) f'(\xi) + \left(a_2\alpha^3 + 4a_4 k\alpha^3\right) f'''(\xi) =$$
$$= a_{12}\alpha^2 f''(\xi) + a_{13}\alpha^4 f''''(\xi) + a_8 f(\xi) + a_9 f^{2m+1}(\xi) + a_{10} f^{4m+1}(\xi) + a_{11} f^{6m+1}(\xi),$$
$$\left(-\omega - ka_1 + a_2 k^3 - a_3 k^2 + a_4 k^4\right) f(\xi) + \left(-3ka_2\alpha^2 + a_3\alpha^2 - 6a_4 k^2\alpha^2\right) f''(\xi) + \quad (48)$$
$$+ a_4\alpha^4 f''''(\xi) + a_5 f^{2m+1}(\xi) + a_6 f^{4m+1}(\xi) + a_7 f^{6m+1}(\xi) = 0.$$

Потребуем, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$a_2 + 4a_4 k = 0, \quad v = a_1\alpha - 3k^2 a_2\alpha + 2ka_3\alpha - 4a_4 k^3\alpha. \quad (49)$$

Тогда система (48) принимает вид

$$a_8 f(\xi)+a_9 f^{2m+1}(\xi)+a_{10} f^{4m+1}(\xi)+a_{11} f^{6m+1}(\xi)+a_{12}\alpha^2 f''(\xi)+a_{13}\alpha^4 f''''(\xi)=0,$$

$$Qf(\xi)+a_5 f^{2m+1}(\xi)+a_6 f^{4m+1}(\xi)+a_7 f^{6m+1}(\xi)+\alpha^2 R f''(\xi)+a_4\alpha^4 f''''(\xi)=0, \qquad (50)$$

$$Q\equiv -\omega-ka_1+a_2k^3-a_3k^2+a_4k^4, \quad R\equiv -3ka_2+a_3-6a_4k^2.$$

Решение системы (50) строится в виде:

$$f(\xi)=\left[\lambda_0+\lambda_1\exp\xi+\lambda_2\exp(-\xi)\right]^{-\mu}, \quad \mu=\frac{1}{2m}, \qquad (51)$$

где $\lambda_0>0, \lambda_1>0, \lambda_2>0$ – неизвестные параметры солитона. Подставляя (51) в систему (50) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях экспонент, находим

$$a_8+\alpha^2\mu^2 a_{12}+\alpha^4(I_4-6I_3+7I_2-\mu)a_{13}=0,$$

$$4\lambda_0 a_8+a_9+\alpha^2\lambda_0(2I_2-3\mu)a_{12}+\alpha^4\lambda_0(-6I_3+14I_2-3\mu)a_{13}=0$$

$$\left(6\lambda_0^2+4\lambda_1\lambda_2\right)a_8+3\lambda_0 a_9+a_{10}+\alpha^2\left[\lambda_0^2 I_2-\mu\left(3\lambda_0^2+4\lambda_1\lambda_2\right)\right]a_{12}+$$

$$+\alpha^4\left[-4I_4\lambda_1\lambda_2+3I_2\left(4\lambda_1\lambda_2+\lambda_0^2\right)+4I_2\lambda_0^2-\mu\left(3\lambda_0^2+4\lambda_1\lambda_2\right)\right]a_{13}=0,$$

$$\left(4\lambda_0^3+12\lambda_0\lambda_1\lambda_2\right)a_8+3\left(\lambda_0^2+3\lambda_1\lambda_2\right)a_9+2\lambda_0 a_{10}+a_{11}+\alpha^2\left[-2I_2\lambda_0\lambda_1\lambda_2-\right.$$

$$\left.-\mu\left(\lambda_0^3+9\lambda_0\lambda_1\lambda_2\right)\right]a_{12}+\alpha^4\left[6I_3\lambda_0\lambda_1\lambda_2+10I_2\lambda_0\lambda_1\lambda_2-\mu\left(\lambda_0^3+9\lambda_0\lambda_1\lambda_2\right)\right]a_{13}=0,$$

$$\left(\lambda_0^4+12\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2+6\lambda_1^2\lambda_2^2\right)a_8+\left(\lambda_0^3+6\lambda_0\lambda_1\lambda_2\right)a_9+\left(\lambda_0^2+2\lambda_1\lambda_2\right)a_{10}+\lambda_0 a_{11}+$$

$$+\alpha^2\left[I_2\left(-2\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2-2\lambda_1^2\lambda_2^2\right)-\mu\left(6\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2+6\lambda_1^2\lambda_2^2\right)\right]a_{12}+\alpha^4\left[6I_4\lambda_1^2\lambda_2^2+12I_3\lambda_1^2\lambda_2^2+\right.$$

$$\left.+3I_2\left(2\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2+6\lambda_1^2\lambda_2^2\right)+4I_2\left(-2\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2-2\lambda_1^2\lambda_2^2\right)-\mu\left(6\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2+6\lambda_1^2\lambda_2^2\right)\right]a_{13}=0,$$

$$\begin{aligned}
&Q+\alpha^2\mu^2 R+\alpha^4\left(I_4-6I_3+7I_2-\mu\right)a_4=0,\\
&4\lambda_0 Q+a_5+\alpha^2\lambda_0 R(2I_2-3\mu)+\alpha^4\lambda_0 a_4\left(-6I_3+14I_2-3\mu\right)=0,
\end{aligned} \qquad (52)$$

$$Q\left(6\lambda_0^2+4\lambda_1\lambda_2\right)+3\lambda_0 a_5+a_6+\alpha^2\left[I_2\lambda_0^2-\mu\left(3\lambda_0^2+4\lambda_1\lambda_2\right)\right]R+$$

$$+\alpha^4\left[-4I_4\lambda_1\lambda_2+3I_2\left(\lambda_0^2+4\lambda_1\lambda_2\right)+4I_2\lambda_0^2-\mu\left(3\lambda_0^2+4\lambda_1\lambda_2\right)\right]a_4=0,$$

$$Q\left(4\lambda_0^3+12\lambda_0\lambda_1\lambda_2\right)+3a_5\left(\lambda_0^2+3\lambda_1\lambda_2\right)+2\lambda_0 a_6+a_7+\alpha^2R[-2I_2\lambda_0\lambda_1\lambda_2-$$
$$-\mu\left(\lambda_0^3+9\lambda_0\lambda_1\lambda_2\right)]+\alpha^4a_4\left[(6I_3+10I_2)\lambda_0\lambda_1\lambda_2-\mu\left(\lambda_0^3+9\lambda_0\lambda_1\lambda_2\right)\right]=0,$$

$$Q\left(\lambda_0^4+12\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2+6\lambda_1^2\lambda_2^2\right)+a_5\left(\lambda_0^3+6\lambda_0\lambda_1\lambda_2\right)+a_6\left(\lambda_0^2+2\lambda_1\lambda_2\right)+a_7\lambda_0+$$
$$+\alpha^2R\left[I_2\left(-2\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2-2\lambda_1^2\lambda_2^2\right)-\mu\left(6\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2+6\lambda_1^2\lambda_2^2\right)\right]+\alpha^4a_4\left[6I_4\lambda_1^2\lambda_2^2+12I_3\lambda_1^2\lambda_2^2+\right.$$
$$\left.+3I_2\left(2\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2+6\lambda_1^2\lambda_2^2\right)+4I_2\left(-2\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2-2\lambda_1^2\lambda_2^2\right)-6\mu\left(\lambda_0^2\lambda_1\lambda_2+\lambda_1^2\lambda_2^2\right)\right]=0,$$

где

$$I_2=\mu(\mu+1),\quad I_3=\mu(\mu+1)(\mu+2),\quad I_4=\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3).$$

Таким образом, совместность системы (52) обеспечивает существование нетопологических солитонов уравнения (43).

Предположим, что $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*$ произвольные фиксированные положительные числа. Тогда система (52) превратится в линейную алгебраическую систему десяти уравнений относительно коэффициентов a_1, a_{13}, к которой следует добавить уравнение из (49) $a_2+4a_4k=0$. Такая система имеет бесконечно много решений.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия (49), (52). Тогда по заданным положительным числам* $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*$ *можно подобрать коэффициенты* $\overline{a_1, a_{13}}$ *так, чтобы уравнение (43) имело решение вида (2), (51).*

VI. О существовании топологических солитонов НУШ с потенциалом Бома и законом нелинейности утроенной степени

Известно [6], что топологические солитоны отличаются от нетопологических солитонов своей структурой и поведением на бесконечности. С математической точки зрения мы связываем с ними анзац вида

$$f(\xi)=(\lambda_0+\lambda_1 th\xi)^\mu,\quad \mu>0.$$

При этом оказывается, что соответствующее НУШ имеет более простую структуру нелинейных членов чем уравнение (43). Баланс между нелинейными и дисперсионными членами обеспечивается наличием производных третьего порядка. Такому требованию отвечает уравнение

$$i\left(u_t+a_1u_x+a_2u_{xxx}\right)+a_3u_{xx}+a_4u_{xxx}+a_5|u|^{2m}u+a_6|u|^{4m}u+a_7|u|^{6m}u+$$
$$+M\frac{u}{|u|}|u|_x=i\left[a_8u+a_9|u|^{2m}u+a_{10}|u|^{4m}u+a_{11}|u|^{6m}u+N\frac{u}{|u|}|u|_{xx}\right] \qquad (53)$$

с произвольными действительными коэффициентами $\overline{a_1, a_{11}}, M, N$. Решение уравнения (53) строится в виде (2). Подставляя (2) в (53), находим

$$\begin{aligned} &i\left[I_t + i\omega I\right] + ia_1\left[I_x + ikI\right] + ia_2\left[I_{xxx} + 3ikI_{xx} - 3k^2 I_x - ik^3 I\right] + a_3\left[I_{xx} + 2ikI_x - k^2 I\right] + \\ &+ a_4\left[I_{xxx} + 3ikI_{xx} - 3k^2 I_x - ik^3 I\right] + a_5 I^{2m+1} + a_6 I^{4m+1} + a_7 I^{6m+1} + MI_x = \\ &= i\left[a_8 I + a_9 I^{2m+1} + a_{10} I^{4m+1} + a_{11} I^{6m+1} + NI_{xx}\right]. \end{aligned} \tag{54}$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (54) получаем:

$$\begin{aligned} \text{Im}: \quad & I_t + a_1 I_x + a_2 I_{xxx} - 3k^2 a_2 I_x + 2a_3 k I_x + 3a_4 k I_{xx} - a_4 k^3 I = \\ & = a_8 I + a_9 I^{2m+1} + a_{10} I^{4m+1} + a_{11} I^{6m+1} + NI_{xx}, \\ \text{Re}: \quad & -\omega I - a_1 kI - 3a_2 kI_{xx} + a_2 k^3 I + a_3 I_{xx} - k^2 a_3 I + a_4 I_{xxx} - \\ & - 3a_4 k^2 I_x + a_5 I^{2m+1} + a_6 I^{4m+1} + a_7 I^{6m+1} + MI_x = 0. \end{aligned} \tag{55}$$

Система (55) является определяющей системой уравнений для топологических солитонов. Ее решение строится в виде (47).

Подставляя(47) в (55), находим:

$$\begin{aligned} &\left(-v + a_1\alpha - 3k^2 a_2\alpha + 2a_3 k\alpha\right) f'(\xi) + \left(3a_4 k\alpha^2 - N\alpha^2\right) f''(\xi) + a_2\alpha^3 f'''(\xi) = \\ &= \left(a_4 k^3 + a_8\right) f(\xi) + a_9 f^{2m+1}(\xi) + a_{10} f^{4m+1}(\xi) + a_{11} f^{6m+1}(\xi), \\ &\left(M - 3a_4 k^2\right)\alpha f'(\xi) + \left(a_3 - 3a_2 k\right)\alpha^2 f''(\xi) + a_4\alpha^3 f'''(\xi) + \\ &+ \left(-\omega - a_1 k + a_2 k^3 - k^2 a_3\right) f(\xi) + a_5 f^{2m+1}(\xi) + a_6 f^{4m+1}(\xi) + a_7 f^{6m+1}(\xi) = 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Предположим, что выполнены следующие соотношения:

$$v = a_1\alpha - 3k^2 a_2\alpha + 2a_3 k\alpha, \quad 3a_4 k = N, \quad M = 3a_4 k^2, \quad a_3 = 3a_2 k. \tag{57}$$

Тогда система (56) примет вид

$$a_2\alpha^3 f'''(\xi) = \left(a_4 k^3 + a_8\right) f(\xi) + a_9 f^{2m+1}(\xi) + a_{10} f^{4m+1}(\xi) + a_{11} f^{6m+1}(\xi), \tag{58}$$

$$a_4\alpha^3 f'''(\xi) = \left(\omega + a_1 k - a_2 k^3 + k^2 a_3\right) f(\xi) - a_5 f^{2m+1}(\xi) - a_6 f^{4m+1}(\xi) - a_7 f^{6m+1}(\xi). \tag{59}$$

Таким образом, искомая волновая функция $f(\xi)$ должна удовлетворять уравнениям (58), (59). В качестве решения возьмем следующий анзац:

$$f(\xi) = F^{\mu}(\xi) \equiv \left(\lambda_0 + \lambda_1 th\xi\right)^{\frac{1}{2m}}, \tag{60}$$

где $\lambda_0 > 0, \lambda_0 > |\lambda_1|$. Тогда, подставляя (60) в (58), найдем

$$a_2\alpha^3\left[I_3\left(F'(\xi)\right)^3 + 3I_2F(\xi)F'(\xi)F''(\xi) + \mu F^2(\xi)F'''(\xi)\right] = \\ = \left(a_4k^3 + a_8\right)F^3(\xi) + a_9F^4(\xi) + a_{10}F^5(\xi) + a_{11}F^6(\xi), \qquad (61)$$

$$I_2 = \mu(\mu-1), \quad I_3 = \mu(\mu-1)(\mu-2), \quad \mu = \frac{1}{2m}.$$

Из (61), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $th\xi$, получим

$$th^6(\xi): \quad -a_2\alpha^3\left(I_3 + 6I_2 + 6\mu\right) = a_{11}\lambda_1^3,$$

$$th^5(\xi): \quad -a_2\alpha^3\left(6I_2 + 12\mu\right)\lambda_0 = \lambda_1^3\left(a_{10} + 6a_{11}\lambda_0\right),$$

$$th^4(\xi): \quad a_2\alpha^3\left[3I_3\lambda_1^2 + 12I_2\lambda_1^2 - 2\mu\left(3\lambda_0^2 - 4\lambda_1^2\right)\right] = a_9\lambda_1^3 + 5a_{10}\lambda_0\lambda_1^3 + 15a_{11}\lambda_0^2\lambda_1^3,$$

$$th^3(\xi): \quad a_2\alpha^3\left(12I_2 + 16\mu\right)\lambda_0 = \left(a_4k^3 + a_8\right)\lambda_1 + 4a_9\lambda_0\lambda_1 + 10a_{10}\lambda_0^2\lambda_1 + 20a_{11}\lambda_0^3\lambda_1,$$

$$th^2(\xi): \quad a_2\alpha^3\left[-3I_3\lambda_1^2 - 6I_2\lambda_1^2 - 2\mu\left(\lambda_1^2 - 4\lambda_0^2\right)\right] = 3\left(a_4k^3 + a_8\right)\lambda_0\lambda_1 + \\ + 6a_9\lambda_0^2\lambda_1 + 10a_{10}\lambda_0^3\lambda_1 + 15a_{11}\lambda_0^4\lambda_1, \qquad (62)$$

$$th(\xi): \quad -a_2\alpha^3\left(6I_2 + 4\mu\right)\lambda_0\lambda_1 = 3\left(a_4k^3 + a_8\right)\lambda_0^2 + 4a_9\lambda_0^3 + 5a_{10}\lambda_0^4 + 6a_{11}\lambda_0^5,$$

$$th^0(\xi): \quad a_2\alpha^3\left(I_3\lambda_1^3 - 2\mu\lambda_0^2\lambda_1\right) = \left(a_4k^3 + a_8\right)\lambda_0^3 + a_9\lambda_0^4 + a_{10}\lambda_0^5 + a_{11}\lambda_0^6.$$

Аналогично, подставляя (60) в (59) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $f(\xi)$, находим:

$$a_4\alpha^3\left(I_3 + 6I_2 + 6\mu\right) = a_7\lambda_1^3,$$

$$a_4\alpha^3\left(6I_2 + 12\mu\right)\lambda_0 = \lambda_1^3\left(a_6 + 6a_7\lambda_0\right),$$

$$a_4\alpha^3\left[3I_3\lambda_1^2 + 12I_2\lambda_1^2 - 2\mu\left(3\lambda_0^2 - 4\lambda_1^2\right)\right] = -\left(a_5\lambda_1^3 + 5a_6\lambda_0\lambda_1^3 + 15a_7\lambda_0^2\lambda_1^3\right),$$

$$a_4\alpha^3\left(12I_2 + 16\mu\right)\lambda_0 = H\lambda_1 - 4a_5\lambda_0\lambda_1 - 10a_6\lambda_0^2\lambda_1 - 20a_7\lambda_0^3\lambda_1, \qquad (63)$$

$$a_4\alpha^3\left[-3I_3\lambda_1^2 - 6I_2\lambda_1^2 - 2\mu\left(\lambda_1^2 - 4\lambda_0^2\right)\right] = 3H\lambda_0\lambda_1 - 6a_5\lambda_0^2\lambda_1 - 10a_6\lambda_0^3\lambda_1 - 15a_7\lambda_0^4\lambda_1,$$

$$-a_4\alpha^3\left(6I_2 + 4\mu\right)\lambda_0\lambda_1 = 3H\lambda_0^2 - 4a_5\lambda_0^3 - 5a_6\lambda_0^4 - 6a_7\lambda_0^5,$$

$$a_4\alpha^3\left(I_3\lambda_1^3 - 2\mu\lambda_0^2\lambda_1\right) = H\lambda_0^3 - a_5\lambda_0^4 - a_6\lambda_0^5 - a_7\lambda_0^6,$$

$$H \equiv \omega + a_1k + a_3k^2 - a_2k^3.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 9. *Для того чтобы система (58), (59) имела решение вида (60) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (62), (63).*

Изучим эти соотношения. Для этого положим, что $\lambda_0 = \lambda_1 \equiv \lambda > 0$. Тогда соотношения (62), (63) принимают вид:

$$\begin{gathered}
a_2\alpha^3(I_3 - 2\mu) = \left(a_4k^3 + a_8\right) + a_9\lambda + a_{10}\lambda^2 + a_{11}\lambda^3, \\
a_2\alpha^3(3I_3 + 12I_2 + 2\mu) = a_9\lambda + 5a_{10}\lambda^2 + 15a_{11}\lambda^3, \\
-a_2\alpha^3(6I_2 + 12\mu) = a_{10}\lambda^2 + 6a_{11}\lambda^3, \\
-a_2\alpha^3(I_3 + 6I_2 + 6\mu) = a_{11}\lambda^3, \qquad (64) \\
a_4\alpha^3(I_3 - 2\mu) = H - a_5\lambda - a_6\lambda^2 - a_7\lambda^3, \\
a_4\alpha^3(3I_3 + 12I_2 + 2\mu) = -\left(a_5\lambda + 5a_6\lambda^2 + 15a_7\lambda^3\right), \\
a_4\alpha^3(6I_2 + 12\mu) = \lambda^2(a_6 + 6a_7\lambda), \\
a_4\alpha^3(I_3 + 6I_2 + 6\mu) = a_7\lambda^3
\end{gathered}$$

соответственно. При этом остальные соотношения из (62), (63) обращаются в тождества. Таким образом, мы получили линейную алгебраическую систему (64) из 8 уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\overline{a_1, a_{11}}$, к которой следует добавить соотношение $a_3 = 3a_2k$. Такая система имеет бесконечно много решений. Поэтому справедлива

Теорема 10. *Пусть выполнены условия (57), (64). Тогда для* $\forall\lambda > 0$ *можно подобрать коэффициенты* $\overline{a_1, a_{11}}, M, N$ *так, чтобы уравнение (53) имело решение вида*

$$u(t,x) = \left(\lambda + \lambda th\xi\right)^{\frac{1}{2m}} \exp(i\eta).$$

Таким образом, в работе найдены законы существования топологических и нетопологических солитонов уравнений Шредингера с потенциалом Бома и степенными законами нелинейности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Biswas, A.*** Soliton solutions of the perturbed resonant nonlinear Schrodinger's equntion with full nonlinearity by semi-inverse variational principle / A. Biswas // Quantum Physics Letters. – 2013. – Vol. 1, N 2. – P. 79–83.
2. ***Жестков, С. В.*** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных : монография / С. В. Жестков. – Могилев : МГУ им. А. А. Кулешова, 2006. – 220 с.

3. ***Жестков, С. В.*** О существовании солитонных решений (2+1)-мерного уравнения Шредингера со степенно-показательным законом нелинейности / С. В. Жестков // Ергинские чтения – 2013. XV : Междунар. науч. конф. по диф. уравнениям : тез. докл., Гродно, 13–16 мая 2013. Ч. 2. – Минск : Ин-т математики НАН Беларуси, 2013. – С. 6–7.
4. ***Жестков, С. В.*** О существовании светлых и темных солитонов нелинейных уравнений Шредингера с потенциалом Бома и степенным законом затухания / С. В. Жестков // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57. – № 4. – С.65–67.
5. ***Жестков, С. В.*** О существовании нетопологических солитонов (2+1)-мерного уравнения Шредингера с потенциалом Бома и степенными законами нелинейности / С. В. Жестков // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : матер. науч. конф. "Герценовские чтения – 2014". LXVII. 14–18 апр. 2014. – С. 56–58.
6. ***Жестков, С. В.*** О солитонных решениях обобщенного нелинейного уравнения Шредингера / С. В. Жестков // Весці НАНБ. Сер. фіз.мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 77–81.
7. ***Жестков, С. В.*** О построении топологических солитонов (2+1)-мерного уравнения Шредингера с потенциалом Бома и степенным законом нелинейности / С. В. Жестков, В. С. Новашинская // XVI Междунар. науч. конф. по диф. уравнениям (Ергинские чтения – 2014): тез.докл. Ч.2, Новополоцк, 20–22 мая 2014. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 2014. – С. 8–9.
8. ***Biswas, A.*** Theory of non-Kerr law generalized vector solitons / A. Biswas // Appl. math. and comput. – 2003. – Vol. 136. – P. 443–452.
9. ***Жестков, С. В.*** О построении оптических солитонов (2+1)-мерного уравнения Шредингера с зависящими от времени коэффициентами и законом нелинейности удвоенной степени / С. В. Жестков, В. С. Новашинская // Некоторые проблемы соврем. математики и математич. образования : матер. науч. конф. "Герценовские чтения – 2013". – LXVII. 14–18 апр., 2014. – V2014. – С. 56–58.

Поступила в редакцию 10.10.2014 г.

Summary

The theory of topological and nontopological solitons of nonlinear Shrodinger's equations with potential Bohm and power laws of nonlinearity is developed.

УДК 511.42

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ТОЧКИ В КУБАХ МАЛОГО ОБЪЕМА

О. Н. Кемеш
старший преподаватель кафедры высшей математики БГАТУ, г. Минск, РБ
И. М. Морозова
декан факультета предпринимательства и управления БГАТУ, г. Минск, РБ
Н. В. Сакович
кандидат физико-математических наук, доцент
МГУ имени А. А. Кулешова, г. Могилев, РБ

В работе доказаны два утверждения о корнях α_1, α_2, α_3 целочисленных многочленов P третьей степени. Оказывается, что существуют кубы со стороной c_1Q^{-1}, в которых нет корней P. С другой стороны, можно найти $c_2 > 0$, что в любом кубе со стороной большей c_2Q^{-1} не менее c_3Q точек $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Зависимость корней многочленов от коэффициентов многочлена является одной из классических задач математики. В настоящей статье мы исследуем проблему плотности векторов $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в $\mathbb{R}^3$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – действительные корни многочлена

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]. \quad (1)$$

Эта задача имеет прямое отношение к построению эффективных регулярных систем векторов с алгебраическими координатами. Понятие регулярной системы введено в [1]. Это понятие близко к понятию равномерного распределения и дает количественную картину для всюду плотных множеств. Например, в [1] доказано, что действительные алгебраические числа образуют регулярную систему, что позволило получить точную нижнюю оценку размерности Хаусдорфа множества действительных чисел, с заданным порядком приближаемых алгебраическими числами. В 1999 г. В.В. Бересневич [2] доказал более сильную версию регулярности распределения алгебраических чисел, и доказал полный аналог теоремы Хинчина [3] для многочленов.

В монографии [4] отмечается, что единственным неэффективным условием при построении регулярных систем является зависимость высоты алгебраических чисел от длины интервалов, объемов кубов, в которых они лежат. Эта задача была решена только в случае многочленов первой и второй степени [2], [4]. Недавно появилось решение и для $n = 3$ [5]. Однако даже для них указанная в [2], [4] зависимость не является наилучшей, и в работе [5] показано, что логарифмический множитель можно опустить.

© О.Н. Кемеш, 2015
© И.М. Морозова, 2015
© Н.В. Сакович, 2015

В данной работе будут доказаны две теоремы о распределении векторов с алгебраическими координатами.

Пусть $E=[0,1)^3$ –единичный куб. Обозначим через $H=H(P)=\max_{0\le j\le 3}|a_j|$ высоту многочлена (1), а через $H(\alpha)$ высоту алгебраического числа α, определяемую как высоту минимального многочлена для α. Введем класс многочленов, связанный с достаточно большим натуральным числом $Q>Q_0$:

$$\mathcal{P}_3(Q)=\{P\in\mathbb{Z}[x]:\deg P=3, H(P)\le Q\}. \tag{2}$$

Через $c_1=c_1(n), c_2=c_2(n),\ldots$ будем обозначать постоянные величины, зависящие от n, не зависящие от H и Q. При достаточно малом $\delta\in\mathbb{R}_+$ определим множество

$$M_\delta:=\{\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)\in E:|x_i-x_j|<\delta, i\ne j\}. \tag{3}$$

Будем считать, что кубы $T=I_1\times I_2\times I_3$ со стороной $|I_j|=c_1Q^{-\mu}$, $0\le\mu\le 1$, взяты из множества

$$B_1\subset(E\setminus M_\delta). \tag{4}$$

Теорема 1. *Существуют кубы $T\subset B_1$ со стороной c_2Q^{-1}, которые не содержат векторов $\overline{\alpha}$ с координатами, являющимися корнями многочлена $P\in\mathcal{P}_3(Q)$.*

Теорема 2. *При любом $0\le\mu\le\frac{1}{2}$ и достаточно большой величине c_3 в каждом кубе T, где $\mu T=c_3^3Q^{-3\mu}$, есть не менее $c_3'Q^4\mu T$ векторов $\overline{\alpha}$, координаты которых являются корнями $P\in\mathcal{P}_3(Q)$ при условии $H(P)>c_4Q$.*

Доказательство теорем основывается на следующих леммах.

Лемма 1 ([6]) Пусть $|P(x)|<Q^{-w}$, $w>0$, и α_1 – ближайший к x корень полинома $P(x)$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned}&|x-\alpha_1|\le 3Q^{-w}|P'(x)|^{-1} \text{ для } P'(x)\ne 0,\\ &|x-\alpha_1|\le 4Q^{-w}|P'(\alpha_1)|^{-1} \text{ для } P'(\alpha_1)\ne 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Лемма 2. *Для того, чтобы полином $P\in\mathbb{Z}[x]$ степени $\deg P=n$ имел ограниченные по модулю корни (не стремящиеся по модулю к $+\infty$, при $H\to\infty$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$|a_n|\ge c_4H,$$

где $0 < c_4 < 1$ и a_n – старший коэффициент многочлена P.

В лемме 2 в [6] доказана только достаточность. Докажем необходимость. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корни многочлена $P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$. Если корни $|\alpha_j| < c_5$, то запишем P в виде

$$P(x) = a_n(x^n - S_1(\bar{\alpha})x^{n-1} + \ldots \pm S_j(\bar{\alpha})x^{n-j} \mp \ldots \pm S_{n-1}(\bar{\alpha})x \mp S_n(\bar{\alpha})),$$

где $S_j(\bar{\alpha})$ – j-ая элементарная симметрическая функция от корней P, например, $S_1(\bar{\alpha}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ и $S_n(\bar{\alpha}) = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$. Пусть высота $H(P)$ у многочлена P достигается при коэффициенте a_j, т. е. $|a_n S_{n-j}(\bar{\alpha})| = H$. Так как из вида $S_{n-j}(\bar{\alpha})$ и условия $|\alpha_i| < c_5$ следует $|S_{n-j}(\bar{\alpha})| \le C_n^j c_5^{n-j} \le 2^n \max\{c_5, c_5^n\}$, то $|a_n| > 2^{-n} H / \max\{c_5, c_5^n\}$.

Доказательство теоремы 1. Построим куб T, внутри которого нет корней многочлена $P \in \mathcal{P}_3(Q)$. Рассмотрим куб T с центром в точке $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ и ребром $c_2 Q^{-1}$. Числа $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ являются корнями многочлена $P_1(x) = 24(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}[x]$. Возьмем многочлен $P_2 \in \mathcal{P}_3(Q)$ среди корней которого нет чисел $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Все корни многочлена P_2 удовлетворяют неравенству $|\alpha_j| < 1$, так как лежат в $T \subset E$. Все модули разностей $|\alpha_i - \beta_j| < 1$, $1 \le i, j \le 3$, $\beta_j \in \{\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\}$. Один из корней α_1 удовлетворяет неравенству $|\alpha_1 - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2} c_2 Q^{-1}$, второй $|\alpha_2 - \frac{1}{3}| < \frac{1}{2} c_2 Q^{-1}$, третий $|\alpha_3 - \frac{1}{4}| < \frac{1}{2} c_2 Q^{-1}$. Рассмотрим результант целочисленных многочленов P_1 и P_2, и оценим его модуль снизу единицей. Имеем

$$1 \le |R(P_1, P_2)| = 24^3 |a_3|^3 \prod_{1 \le s \le 3} \left| \frac{1}{s+1} - \alpha_s \right| < 24^3 |a_3|^3 \, 2^{-3} c_2^3 Q^{-3} < 2^{12} c_2^3. \quad (6)$$

Если $c_2 < 2^{-4}$, то неравенство (6) противоречиво, что доказывает существование куба со стороной $2^{-4} Q^{-1}$, в котором нет векторов $\bar{\alpha}$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} |P(x_1)| < 8Q^{-1/3}, \\ |P(x_2)| < 8Q^{-1/3}, \\ |P(x_3)| < 8Q^{-1/3}, \end{cases} \tag{7}$$

где $P \in \mathcal{P}_3(Q)$. Используя принцип ящиков Дирихле, нетрудно доказать, что она разрешима в каждой точке $\overline{x} \in T$. Для производных $P'(x_i)$ очевидно справедлива оценка $|P'(x_i)| < 9Q < 2^4 Q$. Для того, чтобы применить к системе (7) лемму 1 необходимо получить оценку снизу для производных $P'(t)$ в точках $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ или $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Если будут выполняться оценки $|P'(\alpha_i)| > \delta_0 Q$ для любого $1 \le i \le 3$, где $\delta_0 \in \mathbb{R}_+$, то из леммы 1 мы можем заключить, что $|x_i - \alpha_i| < 2^5 \delta_0^{-1} Q^{-4/3}$ и внутри T окажется вектор $\overline{\alpha}$. Покажем, что если хотя бы одна из оценок снизу для $|P'(\alpha_i)| > \delta_0 Q$ не выполняется, то мы сможем выбрать такую малую величину δ_0, что система неравенств (7) вместе с новыми условиями

$$|P'(\alpha_1)| \le \delta_0 Q, \ |P'(\alpha_2)| < 2^4 Q, \ |P'(\alpha_1)| < 2^4 Q \tag{8}$$

разрешима только на множестве $B_2 \subset T$, $\mu B_2 < \frac{1}{4} \mu T$.

Из условий (7) следует, что каждый корень α_j полинома третьей степени $P \in \mathcal{P}_3(Q)$ близок к своей координате x_j точки $\overline{x}$. Поскольку по условию (3) переменные разделены, то разделены и корни α_j, что можно записать в виде

$$|\alpha_i - \alpha_j| > \frac{\delta}{2}, \ 1 \le i, j \le 3, i \ne j. \tag{9}$$

Если a_3 – старший коэффициент P, то можно считать $a_3 > 0$ и используя (9), получить

$$|P'(\alpha_1)| = |a_3(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)| > 2^{-2} \delta^2 a_3. \tag{10}$$

Из первого неравенства (8) и (10) имеем

$$a_3 < 2^2 \delta_0 \delta^{-2} Q. \tag{11}$$

Отметим, что неравенство (10) выполняется для $|P'(\alpha_2)|$ и $|P'(\alpha_3)|$. При фиксированном полиноме $P \in \mathcal{P}_3(Q)$ с помощью леммы 1 и (10) оценим меру $\sigma(P)$ решений системы неравенств (7):

$$|x_i - \alpha_i| < 2^5 Q^{-1/3} 2^2 \delta^{-2} a_3^{-1} = 2^7 \delta^{-2} a_3^{-1} Q^{-1/3}, 1 \le i \le 3. \quad (12)$$

Для произведения $M = \prod_{i=1}^{3} |x_i - \alpha_i|$ из (12) получим оценку

$$M < 2^{21} \delta^{-6} a_3^{-3} Q^{-1}. \quad (13)$$

Оценку (13) надо просуммировать по всем полиномам P, для которых выполняется система неравенств (7), (8) и вектор $\overline{x} \in T$. Обозначим через d_i середину интервала I_i. Тогда любую точку из I_i можно записать в виде

$$x_i = d_i + \gamma_i c_3 Q^{-\mu}, 0 < |\gamma_i| < \frac{1}{2}. \quad (14)$$

Подставим x_i из (14) в (7) и проведем упрощения. Получаем

$$|P(d_i)| < c_6 a_3 Q^{-\mu}, \ 1 \le i \le 3, \quad (15)$$

согласно лемме 2 и (11). Преобразуем (15) в систему уравнений

$$P(d_i) = \lambda_i c_6 a_3 Q^{-\mu}, \ |\lambda_i| \le 1, 1 \le i \le 3. \quad (16)$$

Зафиксируем коэффициент a_3 полинома $P \in \mathcal{P}_3(Q)$ и полином $P_1(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \in \mathcal{P}_3(Q)$, для которого выполняются (14) и (16). Тогда для $P_1(t)$ и любого другого полинома $P_2(t) = a_3 t^3 + a_2' t^2 + a_1' t + a_0' \in \mathcal{P}_3(Q)$, для которого верно равенство (16), имеем

$$\begin{aligned} |P_2(d_i) - P_1(d_i)| &= |(a_2' - a_2) d_i^2 + (a_1' - a_1) d_i + (a_0' - a_0)| \\ &< \lambda_i' c_6 a_3 Q^{-\mu}, \ |\lambda_i'| \le 2, 1 \le i \le 3. \end{aligned} \quad (17)$$

Разрешим (17) относительно каждой из разностей $a_k' - a_k$, $0 \le k \le 2$. Получим

$$|a_k' - a_k| < c_7 a_3 Q^{-\mu}.$$

Это означает, что все многочлены P_2 должны иметь коэффициенты a_k', $0 \le k \le 2$, отличающиеся от коэффициентов a_k не более чем на $2c_7 a_3 Q^{-\mu}$. Их общее число не превосходит $S = 2^3 c_7^3 a_3^3 Q^{-3\mu}$. Тогда мера всех $\overline{x}$, для которых выполняется система неравенств (7), (8) не превосходит по (13) величины SM и

$$SM < 2^{24} c_7^3 a_3^3 Q^{-3\mu} a_3^{-3} Q^{-1} \delta^{-6} = 2^{24} c_3^{-3} c_7^3 \delta^{-6} Q^{-1} \mu T. \quad (18)$$

Просуммируем оценку (18) по всем a_3 из (11). Получим оценку

$$2^{26} \delta_0 \delta^{-8} c_3^{-3} c_7^3 \mu T,$$

которую за счет выбора δ_0 можно сделать меньше $\frac{1}{4}\mu T$. Теорема 2 доказана, так как на дополнении этого множества до T все производные имеют максимальный порядок.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Baker A., Schmidt W. M.*** // Proc. London Math. Soc. 1970. – Vol. 21. – P. 1–11.
2. ***Beresnevich V. V.*** // Acta Arith. 1999. Vol. 90, N 2. P. 97-112.
3. ***Khintchine A. J.*** // Math. Ann. 1924. – Vol. 92. – P. 115–125.
4. ***Bugeaud Y.*** Approximation by algebraic numbers. Cambridge: CUP, 2004.
5. ***Bernik V. I., Budarina N.V., O'Donnell H.*** // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. – Vol. 280, Suppl. 2. – P. 31–43.
6. ***Спринджук, В. Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967.

Поступила в редакцию 24.11.2014 г.
Контакты: (+375 017) 263-81-22 (Кемеш Оксана Николаевна)

Summary

The distribution of the roots of the integer polynomials of third degree in the small cubes is investigated.

УДК 511.42

ЗАВИСИМОСТЬ КОЛИЧЕСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ НА ИНТЕРВАЛАХ ЕДИНИЧНОЙ ДЛИНЫ ОТ РАСПОЛОЖЕНИЯ ИНТЕРВАЛА

Н. В. Бударина
ассистент кафедры математики
Дублинский институт технологий, г. Дублин, Ирландия
Х. О'Доннелл
заведующий кафедрой математики
Дублинский институт технологий, г. Дублин, Ирландия
Н. В. Шамукова
доцент кафедры естественных наук
Командно-инженерный институт МЧС, г. Минск, РБ

Известны оценки для количества алгебраических чисел заданной степени и высоты, лежащих на интервале (0,1). *В работе впервые получены оценки снизу для количества алгебраических чисел на отрезке* (k, k+1) *при произвольном* k.

В последние годы появилось много работ, в которых изучаются распределения алгебраических чисел [1–4], их дискриминантов [5, 6], результантов [7], а также расстояний между сопряженными алгебраическими числами [3, 8]. В этих работах выяснено, что регулярные системы образуют не только алгебраические числа в $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p$, но и системы векторов с алгебраическими координатами в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ [9, 10]. Это позволило получить оценки снизу для размерности Хаусдорфа множеств чисел с заданной аппроксимацией алгебраическими числами [11], а также установить аналоги теоремы Хинчина [13] в случае расходимости ряда [12].

В данной работе мы покажем, что количество действительных алгебраических чисел в интервалах единичной убывает с удалением центров этих интервалов от начала координат.

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

– многочлен с целыми рациональными коэффициентами степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = max_{0 \le j \le n} |a_j|$. Определим класс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[z] : \deg P \le n,\ H(P) \le Q\} \qquad (1)$$

© Н.В. Бадурина, 2015
© Х.О. Доннел, 2015
© Н.В. Шамукова, 2015

для любого достаточно большого натурального числа $Q > Q_0(n)$. Далее $I_k = [k-1,k), k \geq 1$ – интервалы единичной длины и $I_0 = [-1/2, 1/2)$. Обозначим через $\mathcal{M}_n(Q,k)$ количество действительных алгебраических чисел $\alpha \in I_k$, являющихся корнями $P \in P_n(Q)$.

Теорема 1. *Для величины $\mathcal{M}_n(Q,k)$ справедливы неравенства*

$$M_n(Q,0) \geq n^{-1}2^{-n-24}Q^{n+1} \tag{2}$$

$$M_n(Q,k) \geq n^{-4}2^{-n-24}k^{-2n}Q^{n+1},\ k \geq 1 \tag{3}$$

Доказательство.

Вначале докажем неравенство (2)

Пусть $x \in I_0$ и $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ с условием $0 \leq a_j \leq Q$, $0 \leq j \leq n$, откуда

$$|P(x)| = |a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \leq Q(1 + 1/2 + \cdots + 1/(2^n)) \leq 2Q. \tag{4}$$

Поделим интервал [-2Q, 2Q] на интервалы J длины $c_1 Q^{-v}$. Количество таких интервалов равно $4c_1^{-1}Q^{1+v}$. Возьмем полиномы $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ с условием $0 \leq a_j \leq Q$, $0 \leq j \leq n$. Количество полиномов P равно $(Q+1)^{n+1}$.

Если

$$4c_1^{-1}Q^{1+v} \leq Q^{n+1} < (Q+1)^{n+1}, \tag{5}$$

то, по принципу Дирихле, найдется интервал J, на котором лежит по крайней мере две точки $P_1(x)$, $P_2(x)$. Очевидно, что

$$P(x) = P_2(x) - P_1(x) \in \mathcal{P}_n(Q), |P(x)| < c_1 Q^{-v}. \tag{6}$$

Из неравенства (5) следует, что можно взять $v = n$ и $c_1 = 4$, откуда

$$|P(x) < 4Q^{-n}. \tag{7}$$

Пусть α_1 – ближайший к x корень полинома P.

Лемма 1. [5, 15] Справедливы неравенства:

$$|x - \alpha_1| < 4nQ^{-n}|P'(x)|^{-1}, \quad P'(x) \neq 0, \tag{8}$$

$$|x - \alpha_1| < 2^{n+1}Q^{-n}|P'(\alpha_1)|^{-1}, P'(\alpha_1) \neq 0. \tag{9}$$

Из (8), (9) заключаем, что для существования корня α_1 в окрестности точки x необходимо к неравенству (7) добавить оценку снизу для $|P'(x)|^{-1}$ или $|P'(\alpha_1)|^{-1}$. Получить такие оценки при любых x задача очень сложная, однако для "большей части" $x \in I_0$ это можно сделать на основании следующей леммы. Далее μA – мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$.

Лемма 2. Обозначим через $\mathcal{L}_n(Q,\delta_0)$ *множество* $x \in I_0$, *для которых система неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < 4Q^{-n}, \\ |P'(x)| < \delta_0 Q \end{cases} \tag{10}$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. *Тогда при* $\delta_0 \le n^{-1}2^{-n-21}$ *справедлива оценка*

$$\mu\mathcal{L}_n(Q,\delta_0) < 1/4. \tag{11}$$

Доказательство леммы 2. Пусть α_1 – ближайший к x корень P.

Нетрудно доказать, что при $|P'(x)| > Q^{-1}$ справедливы неравенства

$$3|P'(x)|/4 < |P'(\alpha_1)| < 4|P'(x)|/3, \tag{12}$$

откуда можно получить, что $\mu\mathcal{L}_n(Q,\delta_0)$ содержится во множестве решений системы неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 4Q^{-n}, \\ |P'(\alpha_1)| < 4\delta_0 Q/3. \end{cases} \tag{13}$$

Определим интервалы $\sigma(P)$ и $\sigma_1(P)$:

$$\sigma(P) : |x-\alpha_1| < 2^4 3^{-1} n Q^{-n} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \tag{14}$$

$$\sigma_1(P) : |x-\alpha_1| < c_2 Q^{-1} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \ c_2 > 0. \tag{15}$$

Из (14) и (15) имеем

$$\mu\sigma(P) < 2^4 3^{-1} n c_2^{-1} Q^{-n+1} \mu\sigma_1(P). \tag{16}$$

Составим вектор $\bar{b} = (a_n, \dots, a_2)$. Класс многочленов с одним вектором b обозначим $P_n\left(Q,\bar{b}\right)$. Поделим интервалы $\sigma_1(P)$, $P \in P_n\left(Q,\bar{b}\right)$, на существенные и несущественные. Интервал $\sigma_1(P)$ будем называть существенным, если для любого $\sigma_1(P_2)$, $P_2 \in P_n\left(Q,\bar{b}\right)$, верно неравенство

$$\mu\left(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)\right) < 2^{-1}\mu\sigma_1(P_1). \tag{17}$$

Если же существует такой интервал, что

$$\mu\left(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)\right) \ge 2^{-1}\mu\sigma_1(P_1), \tag{18}$$

то интервал $\sigma_1(P_1)$ будем называть несущественным.

Рассмотрим случай существенных интервалов. Из (17) имеем

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\bar{b})} \mu\sigma_1(P) \le 2. \tag{19}$$

Так как количество векторов $\bar{b}$ при $Q > 2n$ не превосходит $(2Q+1)^{n-1} \le 2^n Q^{n-1}$, то из (16) и (19) получаем

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q,\bar{b})} \mu\sigma(P) \le 2^{n+4} n c_2^{-1} Q^{-n+1+n-1} = n c_2^{-1} 2^{n+4} \le 2^{-4} \qquad (20)$$

для $c_2 \ge 2^{n+8} n$.

В случае несущественных интервалов разложим $P(x)$ и $P'(x)$ на $\sigma_1(P)$ в ряд Тэйлора и оценим $|P(x)|, |P'(x)|$ сверху. При этом будем считать, что

$$Q^{5/8} < |P'(\alpha_1)| < 4\delta_0 Q/3. \qquad (21)$$

Имеем:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} (i!)^{-1} P^{(i)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^i,$$

$$|P'(\alpha_1)(x-\alpha_1)| < c_2 Q^{-1},$$

$$|2^{-1}P''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2| < 2^{-1} n(n-1)(1+1/2+\cdots+1/(2^{n-2}))c_2^2 Q^{-2} Q^{-5/4}$$

$$< c_2 Q^{-1}/(n-1) \qquad (22)$$

при $Q > Q_0(n)$. Оценка (22) будет справедлива и для остальных слагаемых в разложения P, и поэтому

$$|P(x)| < 2c_2 Q^{-1}, \qquad x \in \sigma_1(P). \qquad (23)$$

Для P' аналогично получим

$$|P'(x)| < 4\delta_0 Q, \quad x \in \sigma_1(P). \qquad (24)$$

У многочленов P_1 и P_2 на пересечении $\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)$ выполняются неравенства (23) и (24). Их разность $R(x) = P_2(x) - P_1(x)$ – линейный многочлен $R(x) = ax + b$, для которого из (23) и (24) имеем:

$$|ax+b| < 4c_2 Q^{-1}, \qquad |a| < 8\delta_0 Q.$$

На всем интервале $\sigma_1(P_1)$ верны неравенства:

$$|ax+b| < 12c_2 Q^{-1}, \qquad |a| < 8\delta_0 Q. \qquad (25)$$

Оценим меру тех x, для которых справедлива система неравенств (25). Первое неравенство в (25) верно для x из интервала $|x + b/a| < 12c_2 Q^{-1} a^{-1}$, длина которого не превосходит $2^5 c_2 Q^{-1} a^{-1}$. Просуммируем эту оценку по всем b, при которых b/a принадлежит I_0. Их количество не более $a + 2 \le 2a$, $a \ge 2$. Оценку для количества a возьмем из (25). Ясно, что можно считать $a > 0$. Имеем оценку

$$\sum_a \sum_b \mu\sigma_1(P) < 2^9\delta_0 c_2. \tag{26}$$

Если $|P'(\alpha_1)| \le Q^{5/8}$, то из [14] следует, что мера решений системы неравенств с таким условием не превосходит $1/8$ для $Q > Q_0(n)$. Выберем в (26) $\delta_0 = 2^{-13}c_2^{-1}$ и $c_2 = n2^{n+8}$, тогда $\delta_0 = n^{-1}2^{-n-21}$. Получили (11). Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 имеем, что на множестве $B_1 = I_0/\mathcal{L}_n(Q,\delta_0)$ при $\delta_0 = n^{-1}2^{-n-21}$ с мерой $\mu B_1 > 3/4$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 4Q^{-n}, \\ |P'(x)| > n^{-1}2^{-n-21}Q. \end{cases} \tag{27}$$

Воспользуемся леммой 1 и установим оценку

$$|x-\alpha_1| < n2^{n+23}Q^{-n-1}. \tag{28}$$

Около каждой точки $x \in B_1$ интервал (28) можно найти алгебраическое число. Пусть t – количество интервалов вида (28). Тогда $tn2^{n+23}Q^{-n-1} > 3/4$, откуда

$$t > n^{-1}2^{-n-24}Q^{n+1}, \tag{29}$$

что и доказывает оценку (2) в теореме.

Докажем теперь неравенство (3)

Если $x \in I_k, k \ge 1$, то

$$|P(x)| \le Q(k^n + k^{n-1} + \cdots + k + 1) < 2nk^nQ. \tag{30}$$

Воспользуемся принципом Дирихле, как в (5)–(7), и получим из (30) в каждой точке $x \in I_k$ оценку

$$|P(x)| < 4nk^nQ^{-n}. \tag{31}$$

Как и в (13) заменим оценку $|P'(x)| < \delta_0 Q$ на оценку $|P'(\alpha_1)| < 4\delta_0 Q/3$.

Лемма 3. Обозначим через $S_n(Q,\delta_0)$ множество $x \in I_k$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 4nk^nQ^{-n}, \\ |P'(\alpha_1)| < 4\delta_0 Q/3 \end{cases} \tag{32}$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Тогда при $\delta_0 \le n^{-2}k^{-n}2^{-n-21}$ справедлива оценка

$$\mu S_n(Q,\delta_0) < 1/4.$$

Доказательство леммы 3. Определим интервалы $\sigma_2(P)$ и $\sigma_3(P)$:

$$\sigma_2(P) : |x-\alpha_1| < 2^3n^2k^nQ^{-n}|P'(\alpha_1)|^{-1}, \tag{33}$$

$$\sigma_3(P) : |x-\alpha_1| < c_3 Q^{-1}|P'(\alpha_1)|^{-1}, \qquad c_3 > 0, \tag{34}$$

зафиксируем вектор $\bar{b} = (a_n, \dots, a_2)$ и класс $\mathcal{P}_n(Q,\bar{b})$. Поделим интервалы $\sigma_3(P)$ на существенные и несущественные как в (17)–(18).

Рассмотрим случай существенных интервалов. Из (18), (33) и (34) имеем

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P\in\mathcal{P}_n(Q,\bar{b})} \mu\sigma_2(P) < \sum_{\bar{b}} \sum_{P\in\mathcal{P}_n(Q,\bar{b})} 8n^2k^n c_3^{-1} Q^{-1n+1}\mu\sigma_3(P) \le$$

$$\le \sum_{\bar{b}} 2^4 n^2 k^n c_3^{-1} Q^{-n+1} \le 2^{n+4} n^2 k^n c_3^{-1}. \tag{35}$$

В случае несущественных интервалов для $x \in \sigma_3(P)$ получаем оценки, аналогичные (23) и (24) при достаточно большом Q:

$$|P(x)| < 2c_3 Q^{-1}, \qquad |P'(x)| < 4\delta_0 Q.$$

Разность многочленов $P_2(x) - P_1(x)$, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q,\bar{b})$, есть линейный многочлен $ax + b$ и

$$|ax+b| < 4c_3 Q^{-1}, \qquad |a| < 8\delta_0 Q \tag{36}$$

на пересечении $\sigma_3(P_1) \cap \sigma_3(P_2)$. На всем интервале $\sigma_3(P_1)$ верно

$$|ax+b| < 12c_3 Q^{-1}, \qquad |a| < 8\delta_0 Q. \tag{37}$$

Сумма мер решений неравенств (37) не превосходит, как и в (26), величины

$$2^9 \delta_0 c_3. \tag{38}$$

Опять, если $|P'(\alpha_1)| \le Q^{5/8}$ заключаем из [14], что мера $x \in I_k$, для которых неравенство (32) выполняется в полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ не превосходит 1/8.

Выберем в (35) число $c_3 = 2^{n+8} n^2 k^n$, а в (38) – число $\delta_0 = n^{-2} k^{-n} 2^{-n-21}$. Получим, что

$$\mu S_n(Q, \delta_0) < 1/4.$$

Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует, что на множестве $B_2 = I_k \setminus S_n(Q,\delta_0)$ с мерой $\mu B_2 > 3/4$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < 4nk^n Q^{-n}, \\ |P'(x)| > n^{-2} k^{-n} 2^{-n-21} Q. \end{cases} \tag{39}$$

Применим к неравенству (39) лемму 1 для $x_1 \in B_2$. Получим

$$|x_1 - \alpha_1| < 2^{n+23} n^4 k^{2n} Q^{-n-1}. \tag{40}$$

Интервалы вида (40) покрывают множество B_2. Обозначим через t_1 их количество. Тогда

$$t_1 2^{n+23} n^4 k^{2n} Q^{-n-1} > 3/4$$

и

$$t_1 > 2^{-n-24} n^{-4} k^{-2n} Q^{n+1}.$$

Сравним эту оценку с оценкой (29). Она в $n^3 k^{2n}$ раз меньше.

Этим завершено доказательство теоремы 1.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Beresnevich V. V., Bernik V. I., Goetze F.*** The distribution of close conjugate algebraic numbers, Compositio Math. 146 (2010), 1165–1179.
2. ***Bugeaud Y.*** Approximation by algebraic numbers, Cambridge Tracts in Mathematics, 160. Cambridge University Press, Cambridge, 2004, 274 pp.
3. ***Bugeaud Y., Dujella A.*** Root separation for reducible integer polynomials, Acta Arith. 162 (2014), no. 4, 393–403.
4. ***Budarina N., O'Donnell H.*** On a problem of Nesterenko: when is the closest root of a polynomial a real number? International Journal of Number Theory (IJNT). – 2012. – Vol. 8, no. 3. – P. 801–811.
5. ***Bernik V., Goetze F., Kukso O.*** Lower bounds for the number of integral polynomials with given order of discriminants, Acta Arith. 133 (2008), no. 4, 375–390.
6. ***Beresnevich V. V., Bernik V. I., Goetze F.*** Simultaneous approximations of zero by an integral polynomial, its derivative, and small values of discriminants, Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi 54 (2010), no. 2, 26–28.
7. ***Beresnevich V. V., Bernik V. I., Goetze F.*** On the distribution of the values of the resultants of integral polynomials, Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi 54 (2010), no. 5, 21–23.
8. ***Budarina N., Goetze F.*** Distance between conjugate algebraic numbers in clusters, Mathematical Notes 94 (2013), no. 5, 816–819.
9. ***Bernik V., Budarina N., Dickinson D.*** A divergent Khintchine theorem in the real, complex, and p-adic fields, Lith. Math. J. 48 (2008), no. 2, 158–173.
10. ***Bernik V., Budarina N., Dickinson D.*** Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 149 (2010), no. 2, 193–216.
11. ***Bernik V. I.*** Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations, Acta Arith. 42 (1983), no. 3, 219–253.
12. ***Beresnevich V. V.*** On approximation of real numbers by real algebraic numbers, Acta Arith. 90 (1999), no. 2, 97–112.
13. ***Khintchine A.J.*** Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Z. 24 (1926), no. 1, 706–714.
14. ***Bernik V., Kleinbock D., Margulis G.A.*** Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standart and multiplicative versions, Internat. Math. Res. Notices 2001, no. 9, 453–486.
15. ***Sprindzuk V.G.*** Mahler's problem in metric Number Theory, Minsk, Nauka i Tehnika, 1967 [Transl. Math. Monogr. 25, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969].

Поступила в редакцию 09.12.2014 г.
Контакты: (+375 29) 835-84-65 (Шамукова Наталья Валентиновна)

Summary

There exist known estimates for the number of algebraic numbers of given degrees and heights lying in the interval [0,1). In this paper we present first known estimates of this type for the intervals [k,k+1) with an arbitrary k.

УДК 51

ИДЕЯ "МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ" БРАУЭРА В ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Н. В. Михайлова
кандидат философских наук, доцент
Минский государственный высший радиотехнический колледж,
г. Минск, РБ

В статье анализируется идея "математической конструкции" Брауэра в интуиционистском существовании бесконечных математических объектов, которая не признает неконструктивные доказательства существования абстрактных объектов, существование актуальной бесконечности и некоторые законы классической математической логики.

Введение

Голландский философ и математик Лёйтзен Эгберт Ян Брауэр положил начало новому направлению в математике – интуиционизму. Он подверг философскому сомнению неограниченную применимость в математических рассуждениях классических законов исключенного третьего, снятия двойного отрицания, корректность косвенного доказательства (доказательства от противного). Наиболее ясно и последовательно интуиционистские взгляды Лёйтзена Брауэра были сформулированы в его диссертации "Об основании математики", опубликованной в 1907 г. на голландском языке. А после завершения в 1918 г. работы с неожиданным для того времени названием "Обоснование теории множеств независимо от логического принципа исключенного третьего" в математике и логике окончательно сформировалось новое философское направление, которое называется "интуиционизм".

Основная часть

Главная методологическая идея интуиционистской точки зрения в философии математики была связана с идеей "математической конструкции", согласно которой существование математических сущностей и возможность их построения являлись для него синонимами. Эту идею можно, например, рассматривать как конечный результат развития той линии математического мышления, которая началась с Платона. Требования конструктивности математических объектов были связаны с попытками устранить из математики возможность противоречия, но Брауэр проявляет в этом направлении не только математический интерес, но и собственное чисто философское понимание проблемы обоснования математики. Кроме того, Брауэр разработал совершенно новый подход к обоснованию математического анализа и теории множеств. Его суть со-

© Н.В. Михайлова, 2015

стояла в том, что, признавая "изначальную интуицию" натурального числа, в программе интуиционизма арифметику рассматривают как основу всей математики, хотя при этом отвергается представление о континууме в виде геометрического пространства как "интуитивно ясное", которое было характерно еще для древнегреческой математики. Отправляясь от понятия натурального числа, на основе интуиционистских представлений можно построить своеобразную математическую теорию.

Название "интуиционизм" в философии науки не всеми признается как удачное, поскольку оно ассоциируется с понятием "математической интуиции". С точки зрения математики, суть этого направления в философии математики состоит в другом. Вот как объясняет философско-математическую специфику интуиционистского направления в обосновании математики сам Лёйтзен Брауэр. Если цель формалистов базируется на "непреложной вере в волшебный характер языка", то интуиционизм "выдвигает на первый план существование чистой математики, независимой от языка, и на этой основе пытается доказать истинность математики, построенной до сих пор" [1, с. 257]. Брауэр исследует, насколько логические принципы, которые играли существенную роль в генезисе математики, могут быть применены для связи чисто математических построений, поэтому озабочен не обоснованием корректности математических процедур, а исследованием когнитивной деятельности мысли как таковой. Его методологический анализ направлен на обоснование основных математических понятий как производных от форм интеллектуальной деятельности. В таком контексте математика являлась для интуиционистов продуктом человеческого ума, описывающим математические утверждения не как абстрактную истину и ложь, а как специальные предложения о возможности выполнить некоторое "умственное построение".

Брауэр настаивал также на том, что для соответствующих конструктивных построений требуется применять особую интуиционистскую логику, в которой ни закон исключенного третьего, ни закон снятия двойного отрицания уже не могут претендовать на роль универсальных логических принципов. Хотя закон исключенного третьего критиковали и до Брауэра, именно он предположил, что безграничное применение этого логического принципа способствовало появлению парадоксов теории множеств. Принцип исключенного третьего в интуиционистской математике не является верным, но если он применяется только для конечных совокупностей свойств, то он тогда допустим. Поэтому Брауэр ограничивал его применение только конечными множествами и, принимая лишь абстракцию потенциальной бесконечности, ограничивался рассмотрением "конструктивных" математических объектов, требующих иной логики, связанной с проверкой возможности реализации таких объектов, либо установления, что такой реализации не существует. Следует упомянуть, органически присущий интуиционизму, конвенционализм французского математика Анри Пуанкаре, согласно которому в основе математических теорий лежат условные соглашения или конвенции, то есть системы идей, свободные от противоречий. Разработанное им учение о математической интуиции было одним из основных ис-

точников возникновения интуиционизма, поэтому конвенционализм можно рассматривать как направление, близкое к интуиционизму, точнее как ранний интуиционизм. Брауэр даже охарактеризовал Пуанкаре как одного из основных создателей "прединтуиционистской", или "полуинтуиционистской", школы.

В философии классической математики понятия "утверждения" и "отрицания" дополняют друг друга, в том смысле, что отрицание истины есть ложь, а отрицание лжи есть истина, в результате чего двойное отрицание возвращало все на исходную позицию. Даже при конструктивном определении математического существования такая симметрия могла быть сохранена, если бы отрицание было бы определено как невозможность построения. Однако, по Брауэру, отрицание – это по существу доказательство абсурдности самого предположения о возможности существования этого объекта. Это принципиально "неклассический" подход, по отношению к классической дихотомии истинности и ложности. Зададимся вопросом: нуждается ли современная математика в опровержении закона исключенного третьего? Все аргументы Брауэра относительно некоторых законов классической логики прямо или косвенно связаны с его строгим критерием приемлемости математических суждений, который он интерпретировал в свойстве интуитивной ясности исходных математических объектов и в конструктивном введении производных от них объектов. В контексте интуиционистской логики проблема конструктивности сводится к пониманию утверждения и его отрицания с точки зрения логики математического мышления и, в итоге, к философско-методологической проблеме назначения и сущности математики. Анализируя этот вопрос, философ математики В.Я. Перминов пришел к выводу, что "требование содержательности не проистекает из функции математики и не может определять логику математического мышления" [2, с. 206]. В философско-математической литературе хорошо исследована гипотеза Брауэра о законе исключенного третьего как источнике парадоксов в теории множеств. В защиту подхода Брауэра заметим, что закон исключенного третьего экстраполирован на бесконечные совокупности, исходя из его понимания в конечных ситуациях, а многие свойства конечных множеств не выполняются для бесконечных множеств, хотя бы такое, что всякая собственная часть меньше целого. Кроме того, применение закона исключенного третьего к конечным множествам с большим числом элементов может привести к неконструктивным доказательствам существования.

Интуиционистское понимание доказательства истинности математического суждения всегда предполагает, что можно извлечь способ построения математических объектов, существование которых утверждается. Рассмотрим, например, не удовлетворяющее интуиционистским канонам доказательство того, что существуют два иррациональных действительных числа a и b такие, что a^b рационально. Используя доказательство от противного, древние греки сумели доказать, что число $\sqrt{2}$ не представимо в виде обыкновенной дроби. Раннее все числа, с которыми люди имели дело, были представимы как целые числа или обыкновенные дроби, но иррациональные числа игнорировали традиционное представление чисел. Не существует иного способа описать число, равное кор-

ню из 2, как записать его в виде $\sqrt{2}$. Любая попытка записать $\sqrt{2}$ не позволяет получить ничего, кроме приближения, например, такого, как 1,414213562373... С точки зрения математики, но не здравого смысла, довольно тривиально утверждение о том, что произведение двух иррациональных чисел может быть равно рациональному числу. Действительно, $\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2$, хотя доказательство того, что иррациональное число в иррациональной степени тоже может быть рациональным числом уже не столь явно математически конструктивно. Искомое доказательство использует разбор случаев. Пусть $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ – рациональное число, тогда $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ и искомая пара иррациональных чисел была бы найдена. Пусть теперь $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ – иррациональное число, тогда $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$, то есть тогда его степень $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ – рациональное число. Это короткое, но неэффективное рассуждение "чистого существования", которое характерно для классической математики.

Другое доказательство, позволяющее исключить неэффективный разбор случаев, несравненно сложнее, поскольку использует глубокий результат советского математика А.О. Гельфонда, что из иррациональности $\sqrt{2}$ следует трансцендентность и, следовательно, иррациональность $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Его основное отличие в том, что "если утверждается существование конструкции, то предполагается, что онтологически имеется потенциально осуществимый процесс построения этой конструкции" [3, с. 15]. Приведенный в этом примере способ доказательства – разбор случаев – был известен уже в XIX веке, хотя в то время еще было неизвестно, является ли число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рациональным. Только в 30-е гг. XX в. было дано довольно сложное доказательство того, что это число иррационально. В рассмотренных примерах мы по существу не пользовались никакой математической техникой. На первый взгляд, более простой следующий вопрос: является ли число $2^{\sqrt{2}}$ рациональным или иррациональным? Он известен под названием "7-й проблемы Гильберта". Хотя она была поставлена Давидом Гильбертом в более общем виде, сам он считал, вопрос о числе $2^{\sqrt{2}}$ в этой проблеме является наиболее показательным. Ответ на этот вопрос удалось найти не сразу, а лишь спустя три десятка лет, еще при жизни Давида Гильберта, русскому математику Р.О. Кузьмину. Он доказал иррациональность числа $2^{\sqrt{2}}$. Заметим, что непонимание математики происходит иногда от того, что в ней пытаются найти что-то сверхъестественное, а надо искать именно естественное, не только вне себя, а что-то и в себе, чего мы, несмотря на естественность математики, не понимаем. Кроме того, нестандартные примеры не только стимулируют творческую активность, но и дают нам прочувствовать сущность математического знания.

Как правило, математическое рассуждение осуществляется в следующих двух формах: во-первых, как основанное на интуитивно ясной конструкции объекта, а во-вторых, как вывод из принятых посылок, посредством некоторого набора логических принципов. Для философии математики Брауэра первичной является первая форма. Но тогда, если конструктивность математических объектов признается им в качестве необходимого свойства, то закон исключенного третьего не имеет универсальной значимости для математических рассуждений, так как он требует признания существования математических объектов,

недопустимых с точки зрения конструктивного анализа. Например, числовое множество считается заданным, если на основании его определения относительно каждого числа можно определенным образом установить, принадлежит оно этому множеству или нет. Проблема состоит в том, что вопрос о принадлежности элемента к бесконечному множеству не может быть решен как в случае конечного множества, когда гипотетически в этом случае достаточно перебрать его элементы один за другим. Но гораздо труднее дать ответ на следующий вопрос: существует ли в бесконечном множестве, например во множестве рациональных чисел, подмножество, удовлетворяющее некоторым заданным условиям? Ведь математики по существу оперируют с множествами, которые заданы с помощью каких-то характерных для элементов этого множества свойств.

Вероятно, трудность состоит в том, что в основе использования в современной математике актуальной бесконечности лежит концепция экзистенциальности, которая иногда обуславливает указанную неэффективность математических методов, когда существование некоторого математического объекта устанавливается не при помощи последовательного применения какой-либо конструкции к более простым объектам, а апелляцией к его логической неизбежности. Вопрос "Правомерен ли такой подход к существованию математического объекта?" остается без надлежащей философской рефлексии, поскольку сам предмет исследования довольно сложен. Подытоживая, выдающийся немецкий математик, сторонник интуиционизма Герман Вейль сказал: "Теория множеств откидывает все эти идеалистические сомнения, связанные с размышлениями о том, как множества могут быть задаваемы по самому своему смыслу; она убеждена в том, что ответ на вопрос: "существует или не существует?" в применении к бесконечному множеству элементов или подмножеств кроется при любых условиях в некотором существующем само по себе фактическом обстоянии, хотя бы нашему разуму удавалось лишь благодаря счастливому случаю набрести на математический метод, позволяющий найти и высказать этот, до того сокровенный ответ" [4, с. 15]. Такая точка зрения на "абсолютистскую концепцию существования" хорошо коррелирует с аналогичными убеждениями, согласно которым в процессах внешнего мира не заключается никакой неопределенности, несмотря на то, что наша врожденная интуиция лишь приближенно различает качества и не в состоянии разделить их одни от других абсолютно точно.

Мотивы, которые побуждали математиков принимать некоторые положения интуиционистской, а затем и развивающей ее конструктивистской программы обоснования математики, носили и чисто математический, и философский характер. Они вытекали из размышлений о роли интуиции в математическом познании вообще. Согласно интуиционизму, математическое высказывание должно быть утверждением о выполнении некоторого построения, которое должно быть ясным само по себе, чтобы не нуждаться ни в каких обоснованиях. В интуиционистской программе можно выделить негативный и позитивный аспекты: первый состоит в отрицании существования некоторых понятий теоретико-множественной математики, а второй – в разработке конструктивных аспек-

тов математики. Философский вопрос об экзистенциальных математических высказываниях, то есть о высказываниях, которые утверждают существование математических объектов, представляет интерес не только в связи с проблемами, поднятыми в программе обоснования Брауэра. С такой же остротой он стоит и в физических теориях. Так, понятие "формального существования элементарных частиц" приобретает смысл в рамках теоретической системы или, как принято сейчас говорить, парадигмы, используемой для описания природы. Безусловно, тезис Брауэра "существовать – значит быть построенным" потенциально произвел огромное впечатление на его современников. Из этого радикального тезиса о доказательстве экзистенциального высказывания вытекают различные ограничения, налагаемые интуиционизмом на допустимые методы математики.

Для новой философской идеи "математической конструкции", осознанной Брауэром, в философии науки его времени не были выработаны механизмы концептуализации в виде точного понятия алгоритма, то он предпочел ссылаться на интуицию как инструмент познания. В соответствии с таким подходом к обоснованию математики, использующей в математическом анализе чистые теоремы существования, он дал ему название "интуиционизм", хотя, подчеркивая процессуальную роль конструкции, использовал также название "конструктивизм", видя в требовании конструктивности математических объектов способ их непротиворечивого существования. Философ математики В.Н. Тростников утверждает, что "здание анализа не может стать логически прочным, если не узаконить "декретивным образом", т. е. взять в качестве постулата одно из следующих шести эквивалентных утверждений, относящихся к свойствам действительных чисел: 1. Лемма Гейне–Бореля. 2. Теорема Больцано–Вейерштрасса. 3. Аксиома дедекиндова сечения. 4. Критерий Коши. 5. Лемма Кантора. 6. Теорема о монотонной возрастающей последовательности. Чтобы построить наиболее естественный вариант анализа, нужно взять за аксиому то утверждение, которое ближе всего соответствует нашему интуитивному представлению о действительных числах" [5, с. 18]. Интуиционисты исключают из математической практики чистые теоремы существования. Но ценность доказательства чистого существования состоит в том, что благодаря ему исключаются отдельные лишние построения. Поэтому отказ от экзистенциальности усложняет некоторые способы аргументации и рассуждений в современной математике.

Критика обоснования классической математики представляет собой основу последовательного проведения позитивной программы Брауэра. Отличие конструктивизма от интуиционизма состоит в том, что конструктивная математика не разделяет интуиционистское убеждение в первоначальном характере математической интуиции, считая, что сама эта интуиция формируется под влиянием деятельности человека, кроме того, в ее основе лежит формализованное понятие алгоритма. В конструктивистском направлении интуиционизма Брауэра исследуется конструктивная часть математики в отвлечении от неконструктивных разделов. Следует подчеркнуть, что термин "конструктивный" в обоснованной или необоснованной математике, часто используется неформальным образом, так как его уточнение не является простым делом, в силу открытости этого понятия. Тем не менее, до сих пор многие философы предпочитают упот-

реблять первое название, интуиционизм, так как оно отводит ведущую философско-методологическую роль понятию математической истины и проблеме обоснования математики, а не только задачам математики и конструктивным способам их решения.

Понимание конструктивности в современной математике предполагает, во-первых, использование абстракции потенциальной бесконечности, а, во-вторых, рассмотрение в математике исключительно конструктивных объектов. Речь идет о конструктивном понимании математических объектов, как возможности их построения, которое исторически традиционно для математического мышления многих ученых, начиная с античности. Говоря о математике прошлого столетия, философ математики М.И. Панов подчеркнул: "Интуиционисты в XX в. были первыми, кто ввел требование конструктивного характера математических объектов. Они также первыми в нашем столетии реализовали это требование на практике, построив интуиционистскую математику. Но было бы неверным считать интуиционистов «первооткрывателями» конструктивности" [6, с. 92]. Так, например, эмпирическая математика "догреческого периода" была по своей сути конструктивной, так как она занималась способами построений математических объектов, выдавая практические способы действий с ними. В настоящее время в связи с развитием компьютерной математики и компьютерных доказательств, аргументы о некоторых необоснованных запретах интуиционизма, препятствующих получению новых результатов в современной математике, во многом сняты. Тем не менее, сравнительная громоздкость конструктивных теорий сдерживает пока внедрение интуиционистской техники в математику. Кроме того, для математиков-прикладников, использующих в доказательствах компьютеры, важна не потенциальная, а фактическая осуществимость.

Современную ориентацию не только на методологическое совершенство математических теорий, но и на практику их применений можно проследить, сравнивая две крупнейшие дискуссии прошлого века. Во-первых, между немецким физиком Альбертом Эйнштейном и датским физиком Нильсом Бором по вопросам квантовой механики и, во-вторых, между немецким математиком Давидом Гильбертом и голландским математиком Лёйтзеном Брауэром по вопросам обоснования математики. В ходе создания квантовой механики возникло несколько конкурирующих программ ее осмысления и обоснования, которые физики, а затем и философы физики назвали интерпретациями, соответственно "эйнштейновской" и "копенгагенской". Такая же ситуация, возникшая в математике, есть определенная аналогия дискуссии Эйнштейна–Бора с дискуссией Гильберта–Брауэра, порожденная теорией бесконечных множеств Кантора, наиболее отличительным признаком которых является их мощность. Для сторонников интуиционистского направления, в отличие от формалистского направления, важнейшим критерием является интуитивная ясность определений математических объектов и интуитивная ясность законов логики. В связи с этим заметим, что в философии математики можно выделить два направления. Согласно одному из них, философская точка зрения является следствием занятий основаниями математики, а согласно другому, философские поиски в математике сами по себе не менее важны, чем математические основания.

Заключение

Не ставя перед собой трудно разрешимую задачу экспликации всего философско-теоретического ядра методологических программ формализма и интуиционизма в плане критического анализа контекста их дополнительности, необходимо все же зафиксировать наличие таких направлений обоснования в современной философии математике. Идейный раскол в среде философов математики выявил, с одной стороны, проблему неполноты программы формализации математических теорий, а с другой – наличие элементов субъективизма в основаниях математики. Но в различных работах по философии математики проанализировано, какие понятия, утверждения и методы доказательств могут быть приняты как не внушающие опасения в рамках указанных программ обоснования математики. Противоборствующие стороны, прежде всего сторонники программ Гильберта и Брауэра, не нашли веских доводов в обосновании предлагаемых ими изменений математических принципов. Сам Лёйтзен Брауэр говорил: "Для того чтобы разобраться в развитии существующих в этой области противостоящих друг другу теорий, необходимо сначала достигнуть ясного понимания относительно понятия "наука", поскольку именно как ее часть математика изначально и возникает в человеческой мысли (культуре)" [7, с. 149]. Хотя не только математики, но и ученые естественных и технических наук считают математику наиболее объективной наукой, изучающей предельно строгие преобразования произвольных абстрактных объектов, их свойств и связей с действительностью.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Брауэр, Л. Э. Я.*** Математика, наука и язык / Л. Э. Я. Брауэр // Вестник Российского государственного гуманитарного университета. – 2010. – № 13. – С. 249–258.
2. ***Перминов, В. Я.*** Об аргументах Брауэра против закона исключенного третьего / В. Я. Перминов // Бесконечное в математике: философские и исторические аспекты. – М. : Янус-К, 1997. – С. 199–221.
3. ***Драгалин, А. Г.*** Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств / А. Г. Драгалин. – М. : Наука, 1979. – 256 с.
4. ***Вейль, Г.*** О философии математики / Герман Вейль. – 2-е изд., стереотипное. – М. : КомКнига, 2005. – 128 с.
5. ***Тростников, В. Н.*** Конструктивные процессы в математике (философский аспект) / В. Н. Тростников. – М. : Наука, 1975. – 255 с.
6. ***Панов, М. И.*** Можно ли считать Л. Э. Я. Брауэра основателем конструктивной философии математики? / М. И. Панов // Методологический анализ математических теорий. – М. : АН СССР, 1987. – С. 77–119.
7. ***Брауэр, Л. Э. Я.*** Интуиционизм и формализм / Л. Э. Я. Брауэр // Метафизика. Век XXI. Альманах. Вып. 4: метафизика и математика. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – С. 149–161.

Поступила в редакцию 22.12.2014 г.
Контакты: e-mail: michailova_mshrc@mail.ru (Михайлова Наталия Викторовна)

Summary

The article analyses Brouwer's idea of "mathematical structure" in intuitionistic existence of infinite mathematical objects that rejects the non-constructive proof of the existence of abstract objects, the existence of actual infinity and some laws of classical mathematical logic.

УДК 535.51

ФОРМАЛИЗМ МАТРИЦ МЮЛЛЕРА В ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ И ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

О. В. Веко, магистрант
Е. М. Овсиюк, кандидат физико-математических наук, доцент
Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, г. Мозырь, РБ
В. М. Редьков, ведущий научный сотрудник, Институт физики НАНБ, г. Минск, РБ

Исследовано условие сохранения свойства положительной определенности 4-мерного вектора Стокса под действием преобразований с помощью матриц Мюллера произвольного вида. Решена в общем виде задача о приведении квадратичной формы Мюллера к диагональному виду. Это позволяет анализировать условие положительной определенности 4-мерного вектора Стокса, и тем самым исследовать условие применимости каждого отдельного преобразования на принадлежность его к мюллеровскому типу.

Введение

Для аналитического описания состояния поляризации света используются четыре параметра Стокса [1]. При любом линейном оптическом процессе параметры Стокса падающего пучка линейно преобразуются в параметры Стокса вышедшего пучка с помощью матриц Мюллера [2]. Поляризация света может описываться также в рамках формализма Джонса [3-6]; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным вектором, линейные оптические элементы описываются 2-мерными матрицами Джонса. Стоит отметить, что 2-мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим также и для описания частично поляризованного света.

В Беларуси теория матриц Мюллера недеполяризующих оптических систем развивалась в работах П.И. Ламекина [7-14]. В частности, были описаны собственные поляризации всех типов недеполяризующих оптических систем; в рамках формализма матриц Мюллера построена общая классификация недеполяризующих оптических систем; построены полярные формы матриц Мюллера недеполяризующих систем.

В настоящей работе основное внимание уделяется другим аспектам теории матриц Мюллера. Известно, что при описании полностью или частично поляризованного света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразований, изоморфная группе Лоренца. Это означает, что техника оперирования с преобразованиями Лоренца, хорошо развитая в релятивистской

© О.В. Веко, 2015
© Е.М. Овсиюк, 2015
© В.М. Редьков, 2015

физике [15–17], может сыграть существенную эвристическую роль при анализе вопросов оптики поляризованного света. А.А. Богушем и др. были инициированы исследования теории матриц Мюллера с акцентом на их групповой структуре, в частности, на группе псевдоортогональных преобразований, изоморфных группе Лоренца [18–30]. При этом была описана общая факторизованная структура возможных матриц Мюллера, показана эффективность применения параметризации Федорова в теории матриц Мюллера лоренцевского типа, найден способ построения 4-мерных спиноров Джонса для частично поляризованного света, выполнен теоретико-групповой анализ задачи восстановления матриц Мюллера оптического элемента из результатов поляризационных измерений, построена классификация возможных вырожденных матриц Мюллера с нулевым определителем.

В настоящей работе исследуется условие сохранения свойства положительной определенности 4-мерного вектора Стокса. С использованием пространства 3-мерных векторов поляризации решена в общем виде задача о приведении квадратичной формы Мюллера к диагональному виду, что позволяет, в принципе, относительно легко анализировать условие положительной определенности квадратичной формы Мюллера F', и тем самым исследовать условие применимости каждого отдельного преобразования, на предмет принадлежности его к мюллеровскому типу.

1. Диагонализация квадратичных форм. Пусть M_{ab} обозначает матрицу Мюллера, связывающую два 4-мерных вектора Стокса

$$S'_a = M_{ab}S_b \;\Rightarrow\; S'_0 = M_{00}S_0 + M_{0i}S_i\,,\quad S'_j = M_{j0}S_0 + M_{ji}S_i\,; \qquad (1)$$

в терминах компонент 3-мерного вектора поляризации это преобразование выглядит как проективное преобразование в трехмерном пространстве (это открывает возможности применения методов проективной геометрии в поляризационной оптике)

$$p'_j = \frac{M_{j0}S_0 + M_{ji}S_i}{M_{00}S_0 + M_{0i}S_i} = \frac{M_{j0} + M_{ji}p_i}{M_{00} + M_{0i}p_i}\,. \qquad (2)$$

Ограничения на преобразования мюллеровского типа имеют вид следующих неравенств:

$$S_0 > 0\,,\quad S_0 > 0\,,\quad p_j p_j \le 1\,,\quad p'_j p'_j \le 1\,,$$

$$M_{00}S_0 + M_{0i}S_i > 0 \quad\Rightarrow\quad M_{00} + M_{0i}p_i > 0\,;$$

$$(M_{j0} + M_{jk}p_k)(M_{j0} + M_{jl}p_l) \le (M_{00} + M_{0k}p_k)(M_{00} + M_{0l}p_l)\,. \qquad (3)$$

Квадратичное неравенство в (3) представимо так:

$$A_{11}p_1^2 + A_{22}p_2^2 + A_{33}p_3^2 + 2A_{12}p_1p_2 + 2A_{13}p_1p_3$$
$$+2A_{23}p_2p_3 + 2A_1p_1 + 2A_2p_2 + 2A_3p_3 + A_0 \ge 0\,, \qquad (4)$$

где используются обозначения

$$A_{11} = M_{01}M_{01} - M_{11}M_{11} - M_{21}M_{21} - M_{31}M_{31},$$
$$A_{22} = M_{02}M_{02} - M_{12}M_{12} - M_{22}M_{22} - M_{32}M_{32},$$
$$A_{33} = M_{03}M_{03} - M_{13}M_{13} - M_{23}M_{23} - M_{33}M_{33},$$
$$A_{12} = M_{01}M_{02} - M_{11}M_{12} - M_{21}M_{22} - M_{31}M_{32},$$
$$A_{13} = M_{01}M_{03} - M_{11}M_{13} - M_{21}M_{23} - M_{31}M_{33},$$
$$A_{23} = M_{02}M_{03} - M_{12}M_{13} - M_{22}M_{23} - M_{32}M_{33},$$
$$A_{1} = M_{00}M_{01} - M_{10}M_{11} - M_{20}M_{21} - M_{30}M_{31},$$
$$A_{2} = M_{00}M_{02} - M_{10}M_{12} - M_{20}M_{22} - M_{30}M_{32},$$
$$A_{3} = M_{00}M_{03} - M_{10}M_{13} - M_{20}M_{23} - M_{30}M_{33},$$
$$A_{0} = M_{00}^2 - M_{10}M_{10} - M_{20}M_{20} - M_{30}M_{30}.$$

Цель работы – решить в общем виде задачу о приведении мюллеровских квадратичных форм из (4) к диагональному виду с помощью 3-мерных ортогональных преобразований в сочетании с 3-мерными сдвигами. При решении этой задачи будем использовать параметризации матриц вращения согласно [16]

$$O(n_0,\mathbf{n}) = \begin{vmatrix} 1-2(n_2^2+n_3^2) & -2n_0n_3+2n_1n_2 & +2n_0n_2+2n_1n_3 \\ +2n_0n_3+2n_1n_2 & 1-2(n_3^2+n_1^2) & -2n_0n_1+2n_2n_3 \\ -2n_0n_2+2n_1n_3 & +2n_0n_1+2n_2n_3 & 1-2(n_1^2+n_2^2) \end{vmatrix},$$

или в несколько ином виде:

$$n_0 = \cos\frac{b}{2}, \quad \mathbf{n} = \sin\frac{b}{2}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e}^2 = 1, \quad f = 1-\cos b,$$

$$O = \begin{vmatrix} 1-f(e_2^2+e_3^2) & -\sin be_3 + fe_1e_2 & +\sin be_2+fe_1e_3 \\ +\sin be_3 + fe_1e_2 & 1-f(e_3^2+e_1^2) & -\sin be_1 + fe_2e_3 \\ -\sin be_2 + fe_1e_3 & +\sin be_1+fe_2e_3 & 1-f(e_1^2+e_2^2) \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Вещественная квадратичная форма $F = p_iA_{ij}p_j + 2A_ip_i + A_0$ должна приводиться к диагональному виду с помощью преобразования $p_i = O_{ik}p'_k + d_i$. С использованием индексной техники результат преобразования формы $F \Rightarrow F'$ представляем в виде

$$F' = O_{ik}p'_kA_{ij}O_{jl}p'_l + \left(O_{ik}p'_kA_{ij}d_j + d_iA_{ij}O_{jl}p'_l + 2A_iO_{ik}p'_k\right) + d_iA_{ij}d_j + 2A_id_i + A_0;$$

отсюда, принимая во внимание свойство ортогональности $\tilde{0} = O^{-1}$, получаем

$$F' = p'_k[O_{ki}^{-1}A_{ij}O_{jl}]p'_l + 2p'_kO_{ki}^{-1}(A_{ij}d_j + A_i) + \left(d_iA_{ij}d_j + 2A_id_i + A_0\right). \qquad (6)$$

Квадратичная форма будет приведена к диагональному виду

$$F' = \lambda_1 p_1^{'2} + \lambda_2 p_2^{'2} + \lambda_3 p_3^{'2} + A'_0, \quad A'_0 = d_i A_{ij} d_j + 2A_i d_i + A_0 \qquad (7)$$

в том случае, если, во-первых, решена задача о диагонализации 3×3-матрицы

$$O^{-1}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} O = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}, \qquad (8)$$

во-вторых, если затем решена неоднородная линейная система относительно d_j:

$$A_{ij} d_j = -A_i, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A_1 \\ -A_2 \\ -A_3 \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

Отмечаем, что структура неравенства (7) позволяет относительно легко анализировать условие положительной определенности квадратичной формы Мюллера F', и тем самым исследовать условие применимости каждого отдельного преобразования, как принадлежащего к мюллеровскому типу.

Задача (8) приводит к однородным системам уравнений с одинаковой структурой основной матрицы

$$\begin{aligned}
&(A_{11} - \lambda_1)O_{11} + A_{12}O_{21} + A_{13}O_{31} = 0, \\
&A_{12}O_{11} + (A_{22} - \lambda_1)O_{21} + A_{23}O_{31} = 0, \\
&A_{13}O_{11} + A_{23}O_{21} + (A_{33} - \lambda_1)O_{31} = 0; \\
&(A_{11} - \lambda_2)O_{12} + A_{12}O_{22} + A_{13}O_{32} = 0, \\
&A_{12}O_{12} + (A_{22} - \lambda_2)O_{22} + A_{23}O_{32} = 0, \\
&A_{13}O_{12} + A_{23}O_{22} + (A_{33} - \lambda_2)O_{32} = 0; \\
&(A_{11} - \lambda_3)O_{13} + A_{12}O_{23} + A_{13}O_{33} = 0, \\
&A_{12}O_{13} + (A_{22} - \lambda_3)O_{23} + A_{23}O_{33} = 0, \\
&A_{13}O_{13} + A_{23}O_{23} + (A_{33} - \lambda_3)O_{33} = 0.
\end{aligned} \qquad (10)$$

Условием существования решений является равенство нулю определителя основной матрицы:

$$\det\begin{vmatrix} (A_{11} - \lambda) & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & (A_{22} - \lambda) & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & (A_{33} - \lambda) \end{vmatrix}, \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3. \qquad (11)$$

В явном виде кубическое уравнение для λ имеет вид:

$$\lambda^3-(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda^2$$
$$+(A_{11}A_{22}+A_{11}A_{33}+A_{22}A_{33}-A_{12}^2-A_{13}^2-A_{23}^2)\lambda$$
$$+A_{11}A_{23}^2+A_{22}A_{13}^2+A_{33}A_{12}^2-A_{11}A_{22}A_{33}-2A_{12}A_{13}A_{23}=0. \qquad (12)$$

Каждая из трех систем в (10) содержит только по два независимых уравнения:

$$\begin{aligned}
&(A_{22}-\lambda_1)O_{21}+A_{23}O_{31}=-A_{12}O_{11},\\
&A_{23}O_{21}+(A_{33}-\lambda_1)O_{31}=-A_{13}O_{11};\\
&(A_{11}-\lambda_2)O_{12}+A_{13}O_{32}=-A_{12}O_{22},\\
&A_{13}O_{12}+(A_{33}-\lambda_2)O_{32}=-A_{23}O_{22};\\
&(A_{11}-\lambda_3)O_{13}+A_{12}O_{23}=-A_{13}O_{33},\\
&A_{12}O_{13}+(A_{22}-\lambda_3)O_{23}=-A_{23}O_{33}. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Очевидно, что каждая подсистема в (13) содержит по одному произвольному параметру. Эти три пока произвольных параметра O_{11}, O_{22}, O_{33} предстоит зафиксировать, требуя, чтобы строящаяся таким образом матрица O_{ij} была ортогональной. Для дальнейшего удобно упростить обозначения. Пусть

$$(A_{11},A_{22},A_{33})=(a_1,a_2,a_3),\quad (A_{23},A_{13},A_{12})=(b_1,b_2,b_3); \qquad (14)$$

приведенное выше кубическое уравнения записывается как

$$\lambda^3-(a_1+a_2+a_3)\lambda^2+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-b_1^2-b_2^2-b_3^2)\lambda$$
$$+(a_1b_1^2+a_2b_2^2+a_3b_3^2-a_1a_2a_3-2b_1b_2b_3)=0, \qquad (15)$$

а решения уравнений в (13) представимы в виде (вводим сокращающие обозначения):

$$\begin{cases}
O_{11},\\
O_{21}=O_{11}\dfrac{b_2b_1-b_3(a_3-\lambda_1)}{(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)-b_1^2}=O_{11}m_{21};\\
O_{31}=O_{11}\dfrac{b_3b_1-b_2(a_2-\lambda_1)}{(a_2-\lambda_1)(a_3-\lambda_1)-b_1^2}=O_{11}m_{31}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
O_{12}=O_{22}\dfrac{b_1b_2-b_3(a_3-\lambda_2)}{(a_1-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)-b_2^2}=O_{22}m_{12}\\
O_{22}\\
O_{32}=O_{22}\dfrac{b_3b_2-b_1(a_1-\lambda_2)}{(a_1-\lambda_2)(a_3-\lambda_2)-b_2^2}=O_{22}m_{32}
\end{cases};$$

$$\begin{cases} O_{13} = O_{33}\dfrac{b_1 b_3 - b_2(a_2-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_3)(a_3-\lambda_3)-b_3^2} = O_{33}m_{13} \\ O_{23} = O_{33}\dfrac{b_2 b_3 - b_1(a_1-\lambda_3)}{(a_1-\lambda_3)(a_2-\lambda_3)-b_3^2} = O_{33}m_{23}\,. \\ O_{33} \end{cases} \qquad (16)$$

Потребуем, чтобы строящаяся матрица O_{ij} была ортогональной. Недиагональные элементы произведения матриц $O\tilde{O}$ должны обращаться в ноль:

$$O = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{22}m_{12} & O_{33}m_{13} \\ O_{11}m_{21} & O_{22} & O_{33}m_{23} \\ O_{11}m_{31} & O_{22}m_{32} & O_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{O} = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{11}m_{21} & O_{11}m_{31} \\ O_{22}m_{12} & O_{22} & O_{22}m_{32} \\ O_{33}m_{13} & O_{33}m_{23} & O_{33} \end{pmatrix}$$

$$12-21:\ O_{11}^2 m_{21} + O_{22}^2 m_{12} + O_{33}^2 m_{13}m_{23} = 0\,,$$

$$13-31:\ O_{11}^2 m_{31} + O_{22}^2 m_{12}m_{32} + O_{33}^2 m_{13} = 0\,,$$

$$23-32:\ O_{11}^2 m_{21}m_{31} + O_{22}^2 m_{32} + O_{33}^2 m_{23} = 0\,; \qquad (17)$$

диагональные элементы произведения $O\tilde{O}$ должны равняться единице:

$$11:\ O_{11}^2 + O_{22}^2 m_{12}^2 + O_{33}^2 m_{13}^2 = 1\,,$$

$$22:\ O_{11}^2 m_{21}^2 + O_{22}^2 + O_{33}^2 m_{23}^2 = 1\,,$$

$$33:\ O_{11}^2 m_{31}^2 + O_{22}^2 m_{32}^2 + O_{33}^2 = 1\,. \qquad (18)$$

Для решения задачи наиболее важными являются уравнения (18) – они позволяют найти явный вид трех величин $O_{11}^2, O_{22}^2, O_{22}^2$; уравнения (17) должны при этом выполняться тождественно. Нужное решение задается формулами (достаточно использовать только положительные корни)

$$O_{11} = +\sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}\,, \quad O_{22} = +\sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}\,, \quad O_{33} = +\sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta}}\,, \qquad (19)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & m_{12}^2 & m_{13}^2 \\ m_{21}^2 & 1 & m_{23}^2 \\ m_{31}^2 & m_{32}^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m_{32}^2 m_{13}^2 m_{12}^2 - m_{31}^2 m_{13}^2 - m_{12}^2 m_{21}^2 - m_{23}^2 m_{32}^2\,,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & m_{12}^2 & m_{13}^2 \\ 1 & 1 & m_{23}^2 \\ 1 & m_{32}^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + m_{32}^2 m_{13}^2 + m_{12}^2 m_{23}^2 - m_{32}^2 m_{23}^2 - m_{13}^2 - m_{12}^2 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m_{13}^2 \\ m_{21}^2 & 1 & m_{23}^2 \\ m_{31}^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + m_{21}^2 m_{13}^2 + m_{23}^2 m_{31}^2 - m_{31}^2 m_{13}^2 - m_{21}^2 - m_{23}^2 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & m_{12}^2 & 1 \\ m_{21}^2 & 1 & 1 \\ m_{31}^2 & m_{32}^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + m_{21}^2 m_{32}^2 + m_{12}^2 m_{31}^2 - m_{21}^2 m_{12}^2 - m_{31}^2 - m_{32}^2 .$$

Окончательная форма решения выглядит так:

$$O_{11} = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}} , \quad O_{12} = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}\, m_{12} , \quad O_{13} = \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta}}\, m_{13} ,$$

$$O_{21} = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}\, m_{21} , \quad O_{22} = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}} , \quad O_{23} = \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta}}\, m_{23} ,$$

$$O_{31} = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta}}\, m_{31} , \quad O_{32} = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta}}\, m_{32} , \quad O_{33} = \sqrt{\frac{\Delta_3}{\Delta}} . \qquad (20)$$

Поскольку любая ортогональная матрица может быть параметризована как:

$$O_{11} = 1 - f(e_2^2 + e_3^2), \quad O_{12} = -\sin b\, e_3 + f e_1 e_2 , \quad O_{13} = +\sin b\, e_2 + f e_1 e_3 ,$$
$$O_{21} = +\sin b\, e_3 + f e_1 e_2, \quad O_{22} = 1 - f(e_3^2 + e_1^2), \quad O_{23} = -\sin b\, e_1 + f e_2 e_3 ,$$
$$O_{31} = -\sin b\, e_2 + f e_1 e_3 , \quad O_{32} = +\sin b\, e_1 + f e_2 e_3 , \quad O_{33} = 1 - f(e_1^2 + e_2^2) ,$$

то ее антисимметричная часть:

$$O_{32} - O_{23} = 2\sin b\, e_1 , \quad O_{13} - O_{31} = 2\sin b\, e_2 , \quad O_{21} - O_{12} = 2\sin b\, e_3$$

позволяет найти выражения для sin$b$ и единичного вектора **e**:

$$2\sin b = +\sqrt{(O_{32} - O_{23})^2 + (O_{13} - O_{31})^2 + (O_{21} - O_{12})^2} ,$$

$$e_1 = \frac{O_{32} - O_{23}}{\sqrt{(O_{32} - O_{23})^2 + (O_{13} - O_{31})^2 + (O_{21} - O_{12})^2}} ,$$

$$e_2 = \frac{O_{13} - O_{31}}{\sqrt{(O_{32} - O_{23})^2 + (O_{13} - O_{31})^2 + (O_{21} - O_{12})^2}} ,$$

$$e_3 = \frac{O_{21} - O_{12}}{\sqrt{(O_{32} - O_{23})^2 + (O_{13} - O_{31})^2 + (O_{21} - O_{12})^2}}. \qquad (21)$$

В свою очередь след матрицы дает

$$\mathrm{Sp}\, O = 3 - 2(1 - \cos b) \quad \Rightarrow \quad \cos b = \frac{\mathrm{Sp}\, O - 1}{2}. \qquad (22)$$

Эти формулы дают общее решение задачи восстановления параметров ортогонального преобразования, приводящего мюллеровскую квадратичную форму к диагональному виду; уравнения (9) относительно вектора d_j решается по известным формулам Крамера.

2. Случай вырожденной квадратичной формы. Рассмотрим кратко специальный случай вырожденной квадратичной формы, его необходимо рассматривать отдельно. Кубическое уравнение (15) с использованием обозначений:

$$r = -(a_1 + a_2 + a_3), \quad s = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2,$$
$$t = a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2 - a_1a_2a_3 - 2b_1b_2b_3$$

перепишем в виде

$$\lambda^3 + r\lambda^2 + s\lambda + t = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0;$$

отмечаем тождества

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -r, \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = s, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -t. \qquad (23)$$

Поскольку определитель матрицы A_{ij} равен

$$\det\begin{vmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2 - a_1a_2a_3 - 2b_1b_2b_3) = -t, \qquad (24)$$

то произведение трех корней равно

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(A_{ij}). \qquad (25)$$

В случае вырожденной квадратичной формы с $\det A = 0$, кубическое уравнение упрощается

$$\lambda(\lambda^2 + r\lambda + s) = 0, \qquad (26)$$

это означает, что, по крайней мере, один корень обращается в ноль.

Детализируем известную процедуру построения корней в общем случае. Сделав замену переменной $\Lambda = \lambda + r/3$, преобразуем уравнение к виду:

$$\Lambda^3 + p\Lambda + q = 0, \quad p = s - \frac{1}{3}r^2, \quad q = \frac{2}{27}r^3 - \frac{1}{3}rs + t; \qquad (27)$$

отметим два простых случая:

$$q=0, \qquad \Lambda^3+p\Lambda=0, \qquad \Lambda_{1,2,3}=0,\pm\sqrt{-p};$$

$$p=0, \qquad \Lambda^3+q=0, \qquad \Lambda_{1,2,3}=(-q)^{1/3}. \tag{28}$$

Для p и q имеем следующие явные выражения:

$$p=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-b_1^2-b_2^2-b_3^2-\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)^2,$$

$$q=-\frac{2}{27}(a_1+a_2+a_3)^3+\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)\left(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3-b_1^2-b_2^2-b_3^2\right)$$

$$+\left(a_1b_1^2+a_2b_2^2+a_3b_3^2-a_1a_2a_3-2b_1b_2b_3\right). \tag{29}$$

Для дискриминанта D:

$$D=(\frac{p}{3})^3+(\frac{q}{2})^2 \tag{30}$$

выполняется тождество

$$D=-\frac{1}{4\cdot 27}(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda_1-\lambda_3)^2(\lambda_2-\lambda_3)^2. \tag{31}$$

Если все три корня вещественные, то $D<0$. Если имеем пару комплексно сопряженных корней, то:

$$\lambda_1=A+iB, \qquad \lambda_2=A-iB, \qquad \lambda_3=C, \quad D=\frac{1}{27}B^2\left[(a-C)^2+B^2\right]^2>0.$$

Приведем явное выражение для дискриминанта через параметры (r, s, t):

$$D=\frac{1}{27}s^3-\frac{1}{4\cdot 27}s^2r^2+\frac{1}{27}r^3t-\frac{1}{6}rst+\frac{1}{4}t^2. \tag{32}$$

Отмечаем существование трех простых случаев с отрицательным D:

$$t=0, \qquad D=\frac{s^2}{27}\left(s-\frac{1}{4}r^2\right)<0;$$

$$s=0, \qquad D=t(\frac{r^3}{27}+\frac{1}{4}t)<0;$$

$$r=0, \qquad D=\frac{1}{27}s^3+\frac{1}{4}t^2<0. \tag{33}$$

В случае нулевого определителя (det A = $-t$ =0) выражение (32) для D также упрощается

$$D=\frac{s^2}{27}\left(s-\frac{1}{4}r^2\right); \tag{34}$$

здесь выделяются три простых варианта:

$$I \qquad \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0,$$

$$D = -\frac{1}{4 \cdot 27}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \frac{s^2}{27}\left(s - \frac{1}{4}r^2\right) < 0,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -r, \qquad \lambda_1 \lambda_2 = s, \qquad t = 0; \tag{35}$$

$$II \qquad \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

$$D = -\frac{1}{4 \cdot 27}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 = \frac{s^2}{27}\left(s - \frac{1}{4}r^2\right) = 0,$$

$$2\lambda = -r, \qquad \lambda^2 = s, \qquad t = 0; \tag{36}$$

$$III \qquad \lambda_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

$$D = \frac{s^2}{27}\left(s - \frac{1}{4}r^2\right) = 0,$$

$$r = 0, \qquad s = 0, \qquad t = 0. \tag{37}$$

Заключение

В развитие формализма Мюллера в поляризационной оптике исследовано условие сохранения свойства положительной определенности 4-мерного вектора Стокса

$$S_0^2 - \vec{S}^2 \geq 0 \overset{M}{\Longrightarrow} S_0'^2 - \vec{S}'^2 \geq 0$$

под действием преобразований с помощью матриц Мюллера $M = M_{ab}$ произвольного вида. С использованием пространства 3-мерных векторов поляризации $p_j = S_j/S_0$ решена в общем виде задача о приведении квадратичной формы Мюллера к диагональному виду

$$F' = \lambda_1 p_1'^2 + \lambda_2 p_2'^2 + \lambda_3 p_3'^2 + A'_0 \geq 0.$$

Структура неравенства позволяет анализировать условие положительной определенности квадратичной формы Мюллера F', и тем самым исследовать условие применимости каждого отдельного преобразования, как принадлежащего к мюллеровскому типу.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Stokes, G. G.*** On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources / G. G. Stokes // Trans. Cambridge Phil. Soc. – 1852. – Vol. 9. – P. 399–416.

2. ***Mueller, H.*** Memorandum on the polarization optics of the photo-elestic shutter; Report № 2 of the OSRD project OEMsr576, Boston, MA, USA, 1943.
3. ***Jones, R. C.*** New calculus for the treatment of optical systems. I. Description and discussion of the calculus / R. C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 488–493.
4. ***Hurwitz, H.*** A new calculus for the treatment of optical systems. II. Proof of three general equivalence theorems / H. Hurwitz, R. C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 493–499.
5. ***Jones, R. C.*** A new calculus for the treatment of optical systems. III. The Sohncke Theory of optical activity / R. C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 500–503.
6. ***Jones, R. C.*** A new calculus for the treatment of optical systems, IV / R. C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1942. – Vol. 32. – P. 486–493.
7. ***Lamekin, P. I.*** Intrinsic polarization states of corner reflectors / P. I. Lamekin // Sov. J. Opt. Tech. – 1987. – Vol. 54. – P. 658–661.
8. ***Ламекин, П. И.*** Необходимые и достаточные условия недеполяризуемости оптических систем / П. И. Ламекин // Оптика и спектроскопия. – 1996. – Т. 81, вып. 1. – С. 164–168.
9. ***Ламекин, П. И.*** Преобразование степени поляризации излучения оптическими системами / П. И. Ламекин // Оптический журнал. – 1997. – № 6. – С. 50–55.
10. ***Lamekin, P. I.*** Polar forms of Mueller matrices of nondepolarizing optical systems / P. I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2000. – Vol. 88, № 5. – P. 737–742.
11. ***Lamekin, P. I.*** Polarization Eigenstates of Nondepolarizing Optical Systems / P. I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2001. – Vol. 91, № 5. – P. 741–748.
12. ***Lamekin, P. I.*** Formalism of Mueller matrices and its application to calculation of phase-shifting devices / P. I. Lamekin, Yu. V. Sivaev, K. G. Predko // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V. V. Shepelevich, N. N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 289–293.
13. ***Lamekin, P. I.*** Mueller matrices of nondepolarizing optical systems: the theory and a new method of determination / P. I. Lamekin // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V. V. Shepelevich, N. N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 294–302.
14. ***Ламекин, П. И.*** Кратные собственные значения и собственные состояния поляризации матриц Мюллера частичных поляризаторов / П. И. Ламекин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 5 (8). – С. 128–132.
15. ***Гельфанд, И. М.*** Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 367 с.
16. ***Федоров, Ф. И.*** Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
17. ***Березин, А. В.*** Кватернионы в релятивистской физике / А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.
18. ***Bogush, A. A.*** On Unique Parametrization of the Linear Group and Its Subgroups by Using the Dirac Algebra Basis / A. A. Bogush, V. M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.
19. ***Богуш, А. А.*** Матрицы Мюллера в поляризационной оптике / А. А. Богуш // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 96–102.
20. ***Red'kov, V. M.*** Lorentz group and polarization of the light / V. M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.
21. ***Овсиюк, Е. М.*** Транзитивность в теории группы трехмерных вращений и формализм Стокса-Мюллера в поляризационной оптике / Е. М. Овсиюк // Веснік

Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2011. – № 1(37). – С. 69–75.

22. ***Редьков, В. М.*** Транзитивность в теории группы Лоренца и формализм Стокса-Мюллера в поляризационной оптике / В. М. Редьков, Е. М. Овсиюк // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 18–23.
23. ***Овсиюк, Е. М.*** Полугруппы Мюллера ранга 1 и 2 / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко, В. М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 34–40.
24. ***Овсиюк, Е. М.*** Возможна ли финслерова геометризация поляризационной оптики / Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2012. – Т. 9, № 1 (17). – С. 106–161.
25. ***Овсиюк, Е. М.*** Degenerate 4-dimensional matrices with semi-group structure and polarization optics / E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. – 2013. – № 1. – С. 245–259.
26. ***Веко, О. В.*** О 4-спинорах Джонса частично поляризованного света / О. В. Веко, Е. М. Овсиюк, В.М. Редьков // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1(14). – С. 13–18.
27. ***Веко, О. В.*** О 4-спинорах Джонса полностью поляризованного света / О. В. Веко, Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2013. – № 1(41). – С. 56–64.
28. Некоторые свойства параметров группы Лоренца и уравнения транзитивности в поляризационной оптике / Е. Овсиюк, О. Веко, М. Неагу, В. Балан, В. Редьков // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 18–29.
29. Some properties of parameters of Lorentz matrices and transitivity equations / E. Ovsiyuk, O. Veko, M. Neagu, V. Balan, V. Red'kov // Balkan Society of Geometers Proceedings (BSGP). – 2013. – Vol. 20. – P. 51–63.
30. Spinors, matrix strictures, and projective geometry in polarization optics / E. Ovsiyuk, O. Veko, M. Neagu, V. Balan, V. Red'kov // Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics. – 2013. – Vol. 10, no 2 (20). – P. 315–328.

Поступила в редакцию 17.10.2014 г.
Контакты: e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru (Овсиюк Елена Михайловна)

Summary

The conditions of preserving the positive definiteness of 4-dimensional Stokes vector under the action of the transformations of Mueller matrices of arbitrary form are studied. The problem of reducing the quadratic form to a diagonal Muller form is solved in a general form. It permits us to analyze the condition of positive definiteness of the quadratic Muller form and thereby investigate the condition of applicability of each individual transformation as belonging to Mueller's type.

УДК 539.21

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ДИНАМИЧЕСКИМ НАНОДВОЙНИКОМ В УСЛОВИЯХ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

В. В. Влашевич, магистр технических наук, аспирант
О. М. Остриков, кандидат физико-математических наук, доцент
ГГТУ имени П. О. Сухого, г. Гомель, РБ

Разработана модель динамического нанодвойника. На основании данной модели показана эволюция напряженного состояния у развивающегося нанодвойника в условиях электропластического эффекта.

Введение

Электропластический эффект впервые был обнаружен в 1969 г. при изучении воздействия на материал одиночных импульсов тока плотностью ~ 10^5 А/см^2 и длительностью ~ 10^{-4} с в процессе деформирования кристаллов цинка растяжением и сжатием [1]. В основе этого эффекта лежит ускорение пластического течения металла потоком электронов проводимости, которые помимо эффекта джоулевого тепла способны оказывать особое специфическое электропластическое действие на металл, находящийся под механическими нагрузками, включающее в себя как действие "электронного ветра", так и вибрации решетки под влиянием пинч-эффекта [2]. Основываясь на экспериментальных исследованиях установлено, что электропластический эффект фиксируется на всех образцах, проводящих электрический ток. Возникло обоснованное предположение, что с помощью импульсов тока можно повлиять на процесс двойникования в металлических кристаллах. Влияние импульсов тока на двойникование металлических кристаллов слабо изучено. Это является определенным пробелом, так как двойникование, как и скольжение, в равной степени ответственно за реализацию пластической деформации [3].

Цель данной работы – разработка наномасштабной (мезоскопической) модели динамического нанодвойника в условиях электропластического эффекта и расчет обусловленных им напряжений.

Постановка задачи. Схема на рис. 1. представляет схематическое изображение динамического нанодвойника в момент времени $t \neq 0$ при отсутствии дополнительной генерации двойникующих дислокаций их источником. Параметры d_i и h_i отвечают за расстояние между двойникующими дислокациями на некогерентном участке границы нанодвойника; L – длина некогерентного участка нанодвойника, а H – его наибольшая ширина (см. рис. 1).

Параметр $\mathbf{b}$ – вектор Бюргерса [4] – раскладывается на две составляющие: краевую ($\mathbf{b}_{кр}$) и винтовую ($\mathbf{b}_{в}$). Направление этих составляющих показано на рис. 1. Время зарождения нанодвойника принимаем $t = 0$. В этот момент времени некогерентный участок нанодвойника находится у источника двойникующих дислокаций, т. е. вначале декартовой системы координат.

© В.В. Влашевич, 2015
© О.М. Остриков, 2015

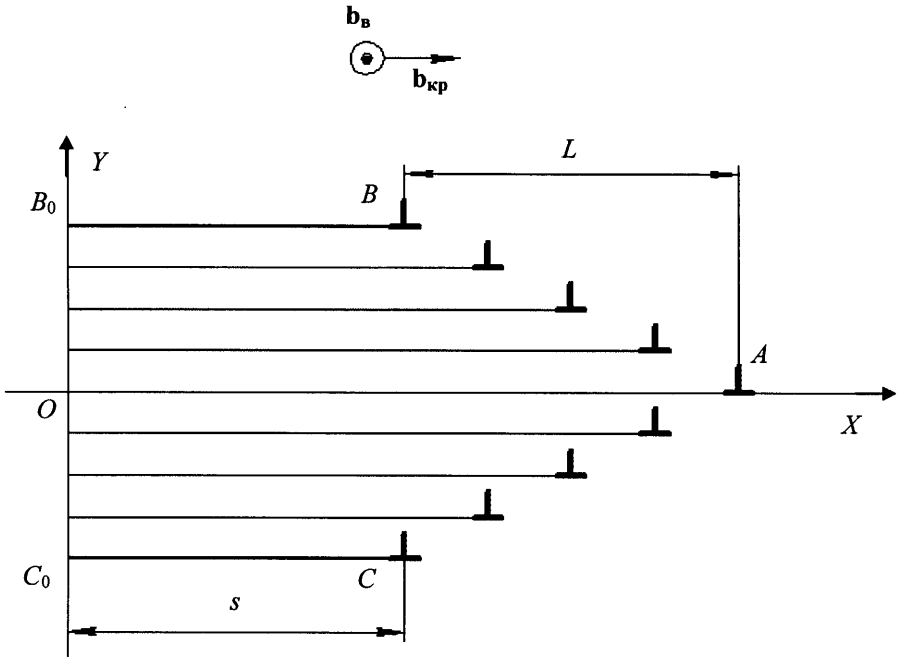


Рисунок 1. Схематическое изображение динамического нанодвойника в виде совокупности двойникующих дислокаций

Движение вершины нанодвойника происходит вдоль оси OX при $t > 0$. При этом наличие когерентного участка длиной s, говорит об отсутствии генерации новых двойникующих дислокаций.

Пусть d_i и h_i постоянны на всем рассматриваемом промежутке времени. Очевидно, что $s = v(j)t$, где $v(j)$ – зависящая от плотности электрического тока j скорость движения вдоль оси OX вершины двойника.

Используя известные соотношения для расчета полей напряжений у движущейся единичной дислокации, на основании наномасштабной модели двойника [5] получим формулы для расчета компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{xy}(x,y,j) = \frac{\mu b_{кр} c_t^2}{2\pi v^2}\left\{\sum_{n=0}^{N}\left[\frac{\left(1+\gamma_t(j)^2\right)^2\left(x-L+nd_1-v(j)\cdot t\right)}{\left(x-L+nd_1-v(j)\cdot t\right)^2+\gamma_t(j)^2\left(y+nh_1\right)^2}-\right.\right.$$
$$-\frac{4\gamma_t(j)\left(1+\gamma_t(j)^2\right)^2\left(x-L+nd_1-v(j)\cdot t\right)}{\left(x-L+nd_1-v(j)\cdot t\right)^2+\gamma_t(j)^2\left(y+nh_1\right)^2}\Bigg]+$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{\left(1+\gamma_t(j)^2\right)^2\left(x-L+md_2-v(j)\cdot t\right)}{\left(x-L+md_2-v(j)\cdot t\right)^2+\gamma_t(j)^2\left(y-mh_2\right)^2}+\right. \quad (1)$$
$$\left.\left.+\frac{4\gamma_t(j)\left(x-L+md_2-v(j)\cdot t\right)}{\left(x-L+md_2-v(j)\cdot t\right)^2+\gamma_t(j)^2\left(y-mh_2\right)^2}\right]\right\}$$

$$\sigma_{xx}(x,y,j)=\frac{b_{\text{кр}}c_t^2}{\pi v^2}\left\{\sum_{n=0}^{N}\left[\frac{\gamma_l(j)\left(\lambda+2\mu-\gamma_l(j)^2\lambda\right)(y+nh_1)}{(x-L+nd_1-v(j)\cdot t)^2+\gamma_l(j)^2(y+nh_1)^2}-\right.\right.$$
$$-\left.\frac{\mu\gamma_t\left(1+\gamma_t(j)^2\right)(y+nh_1)}{(x-L+nd_1-v(j)\cdot t)^2+\gamma_t(j)^2(y+nh_1)^2}\right]+$$
$$\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{\gamma_l(j)\left(\lambda+2\mu-\gamma_l(j)^2\lambda\right)(y-mh_2)}{(x-L+md_2-v(j)\cdot t)^2+\gamma_l(j)^2(y-mh_2)^2}-\right. \tag{2}$$
$$\left.\left.-\frac{\mu\gamma_t(j)\left(1+\gamma_t(j)^2\right)(y-mh_2)}{(x-L+md_2-v(j)\cdot t)^2+\gamma_t(j)^2(y-mh_2)^2}\right]\right\}$$

$$\sigma_{yz}(x,y,j)=\frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi}\left\{\sum_{n=0}^{N}\left[\frac{\gamma_t(j)(x-L+nd_1-v(j)\cdot t)}{(x-L+nd_1-v(j)\cdot t)^2+\gamma_t(j)^2(y+nh_1)^2}\right]+\right.$$
$$\left.\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{\gamma_t(j)(x-L+md_2-v(j)\cdot t)}{(x-L+md_2-v(j)\cdot t)^2+\gamma_t(j)^2(y-mh_2)^2}\right]\right\} \tag{3}$$

$$\sigma_{yy}(x,y,j)=\frac{b_{\text{кр}}c_t^2}{\pi v^2}\left\{\sum_{n=0}^{N}\left[\frac{\gamma_l(j)\left[\lambda-\gamma_l(j)^2(\lambda+2\mu)\right](y+nh_1)}{(x-L+nd_1-v(j)\cdot t)^2+\gamma_l(j)^2(y+nh_1)^2}-\right.\right.$$
$$-\left.\frac{\mu\gamma_t(j)\left(1+\gamma_t(j)^2\right)^2(y+nh_1)}{(x-L+nd_1-v(j)\cdot t)^2+\gamma_t(j)^2(y+nh_1)^2}\right]+$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{\gamma_l(j)\left[\lambda-\gamma_l(j)^2(\lambda+2\mu)\right](y-mh_2)}{(x-L+md_2-v(j)\cdot t)^2+\gamma_l(j)^2(y-mh_2)^2}-\right. \tag{4}$$
$$\left.\left.-\frac{\mu\gamma_t\left(1+\gamma_t(j)^2\right)^2(y-mh_2)}{(x-L+md_2-v(j)\cdot t)^2+\gamma_t(j)^2(y+mh_2)^2}\right]\right\}$$

$$\sigma_{xz}(x,y,j)\frac{\mu b_{\text{в}}}{2\pi}\left\{\sum_{n=0}^{N}\left[\frac{\gamma_t(j)(y+nh_1)}{(x-L+nd_1-v(j)\cdot t)^2+\gamma_t(j)^2(y+nh_1)^2}\right]+\right.$$
$$\left.\sum_{m=1}^{M}\left[\frac{\gamma_t(j)(y-mh_2)}{(x-L+md_2-v(j)\cdot t)^2+\gamma_t(j)^2(y-mh_2)^2}\right]\right\} \tag{5}$$

$$\sigma_{zz}(x,y,j)=\nu\left(\sigma_{xx}(x,y,j)+\sigma_{yy}(x,y,j)\right). \quad (6)$$

В формулах присутствуют: N и M – число двойникующих дислокаций на каждой из двойниковых границ; d_i и h_i – проекции на оси OX и OY отрезка, соединяющие две соседние двойникующие дислокации на одной из двойниковых границ (i – индекс, определяющий принадлежность двойникующей дислокации к той или иной двойниковой границе); μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона;

$$c_t=\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}};\ c_l=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}};\ \lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$\gamma_t(j)=\sqrt{1-\frac{v^2(j)}{c_t^2}};\ \gamma_l(j)=\sqrt{1-\frac{v^2(j)}{c_l^2}}. \quad (7)$$

Здесь ρ_0 – плотность среды, в которой движется дислокация; λ – коэффициент Ламе.

Основываясь на теории О.А. Троицкого, И.И. Новикова, В.И. Спицина [6], которыми было установлено влияние электромагнитного поля на процесс пластической деформации скольжением металлов и сплавов, для дрейфовой скорости электронов запишем соотношение [6]:

$$v_d(j)=\frac{Be\cdot j}{e\cdot n\cdot b^2\cdot\mu^2\cdot\rho}; \quad (8)$$

где Be – коэффициент вязкости для случая деформации с током; j – плотность тока; e – заряд электрона; n – концентрация электронов; b – модуль вектора Бюргерса.

Скорость рассеивания упругих волн, обусловленная пинч-эффектом, находится с учетом ее радиальной и продольной составляющей [6]

$$v_l=\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}};\ v_p=\sqrt{\left(\frac{1}{\rho}\right)\cdot\mu};\ v_n=\sqrt{v_p^2+v_l^2}; \quad (9)$$

где ν_l – продольная составляющая скорости; ν_p – радиальная составляющая скорости; ν_n – скорость, обусловленная пинч-эффектом.

Влияние на скорость дислокации выделения Джоулева тепла определяется по формуле [6]:

$$v_t=\frac{\Delta T\cdot\alpha\cdot E}{b\cdot\mu^2\cdot\rho}; \quad (10)$$

где ΔT – изменение температуры материала, обусловленное электрическим током; α – коэффициент термического расширения; E – эффективный модуль упругости.

Суммарная скорость, входящая в приведенные выше формулы расчета компонент тензора напряжений динамического нанодвойника, равна

$$v(j) = v_d(j) + v_n + v_t + v_\tau + v. \qquad (11)$$

Здесь v – скорость вершинной дислокации нанодвойника при отсутствии электрического тока.

Результаты расчетов и их обсуждение. Пользуясь известными соотношениями для расчета полей напряжений у движущейся единичной дислокации (1) – (6) и подставляя в эти соотношения найденные скорости по всем наблюдаемым эффектам (8) – (11), получаем зависимости напряженного состояния от плотности j импульсного тока (рис. 2). Расчеты велись для висмута. Принималось: N=100; M=99; μ=12,4 ГПа; ρ=9,8 кгс/м^3; ν=0,33; E=32,0·10^9 Па; d_i=0,10 нм; h_i=0,01 нм; v = 10^5 м/с. Рассчитывалось распределение компонент тензора напряжений у динамического нанодвойника в момент времени t=10^{-3} с. Напряженное состояние рассматривалось в трех точках: у устья нанодвойника, где $x = 0$; вначале некогерентного участка нанодвойника (в точке с $x = v(j) \cdot t$) и у вершины нанодвойника (в точке с $x = L + v(j) \cdot t$).

Зависимость нормальных напряжений σ_{xx} от плотности электрического тока изображена на рис. 2, а. Наблюдается плавный рост напряжений в трех рассматриваемых точках. Напряжения у вершины нанодвойника выше, чем у устья и вначале некогерентного участка, что говорит об облегчении процесса переползания вершиной двойникующей дислокации и преодоления ею структурных несовершенств кристаллической решетки.

Сдвиговые напряжения σ_{xy} в зависимости от плотности тока j представлены на (рис. 2, б). Значения в точках 1б и 1в равны. Напряжения у вершины некогерентного участка с ростом плотности тока падают, это тормозит рост двойника. Но напряжения у устья растут, значит, процесс генерации двойникующих дислокаций импульсным током активируется. Так как сдвиговые напряжения ответственны за междислокационное взаимодействие, то представленные на рис. 2, б результаты указывают на то, что рост длины двойника обеспечивается отталкиванием двойникующих дислокаций друг от друга.

Зависимость компоненты тензора напряжений σ_{xz} от плотности тока показана на рис. 2, в. Значения данных напряжений отрицательны. Значения в точках 1б и 1в, 2б, 3б и 4б, 2в, 3в и 4в приблизительно равны. Напряжения у устья и у вершины некогерентного участка нанодвойника с ростом плотности тока падают.

Нормальные напряжения σ_{yy} в зависимости от плотности тока представлены на рис. 2, г, откуда видно, что они отрицательны. Это указывает на затруднение процесса преодоления дислокациями структурных несовершенств кристаллической решетки в направлении оси OY.

На рис. 2, д и е отображены результаты зависимости от плотности электрического тока компонент σ_{yz} и σ_{zz}. У устья и вначале некогерентного участка напряжения σ_{yz} положительны, а σ_{zz} – отрицательны. Вклад этих компонент в процесс роста длины и генерации новых дислокаций незначителен.

а)

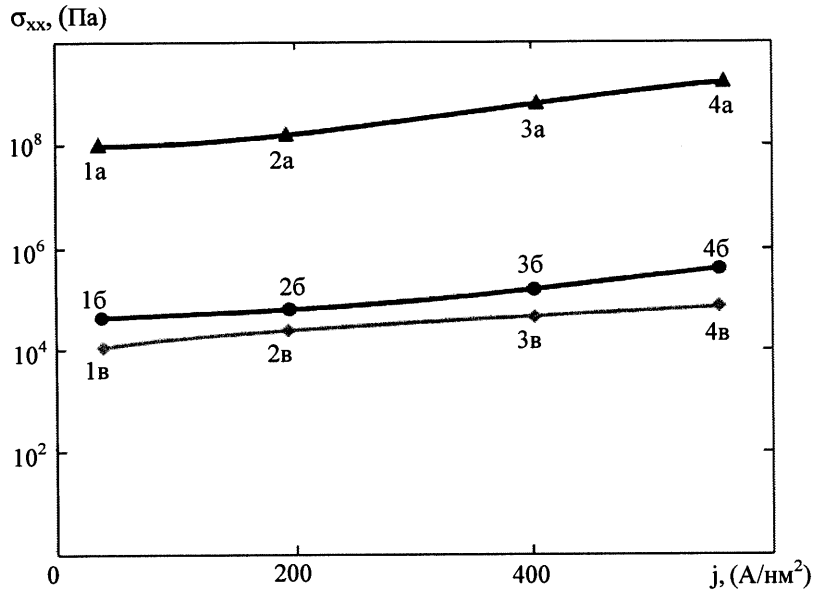
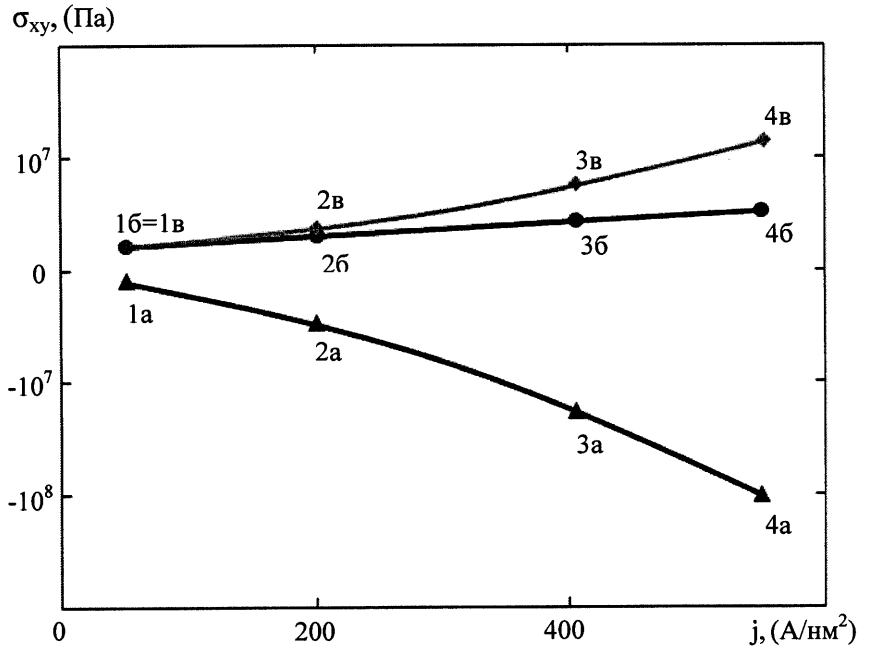
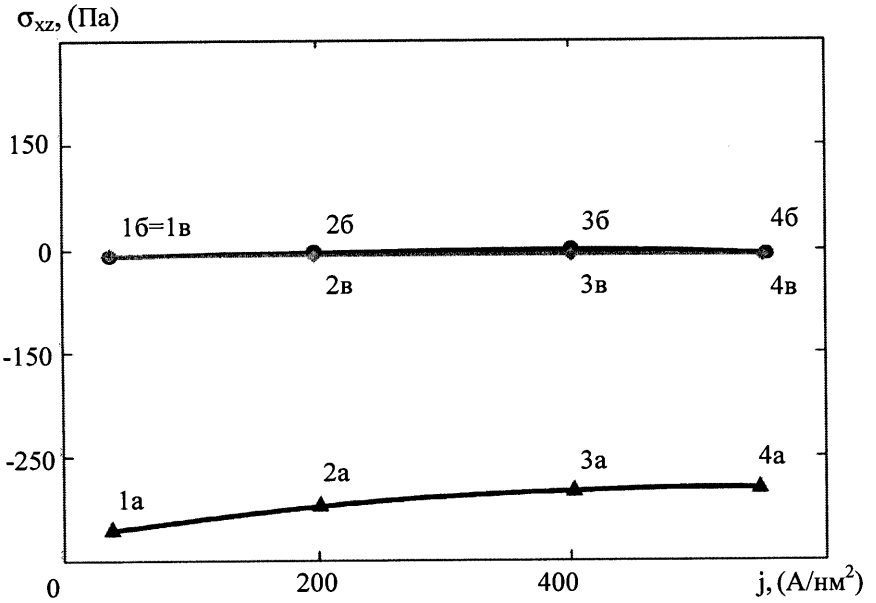


Рисунок 2. Зависимости компонент тензора напряжений у динамического нанодвойника в момент времени $t=10^{-3}$ с: а) $\sigma_{xx}(j)$; б) $\sigma_{xy}(j)$; в) $\sigma_{xz}(j)$; г) $\sigma_{yy}(j)$; д) $\sigma_{yz}(j)$; е) $\sigma_{zz}(j)$ (Па);
▲ – напряжения у вершины нанодвойника;
◆ – напряжения у устья нанодвойника;
● – напряжения вначале некогерентной области нанодвойника

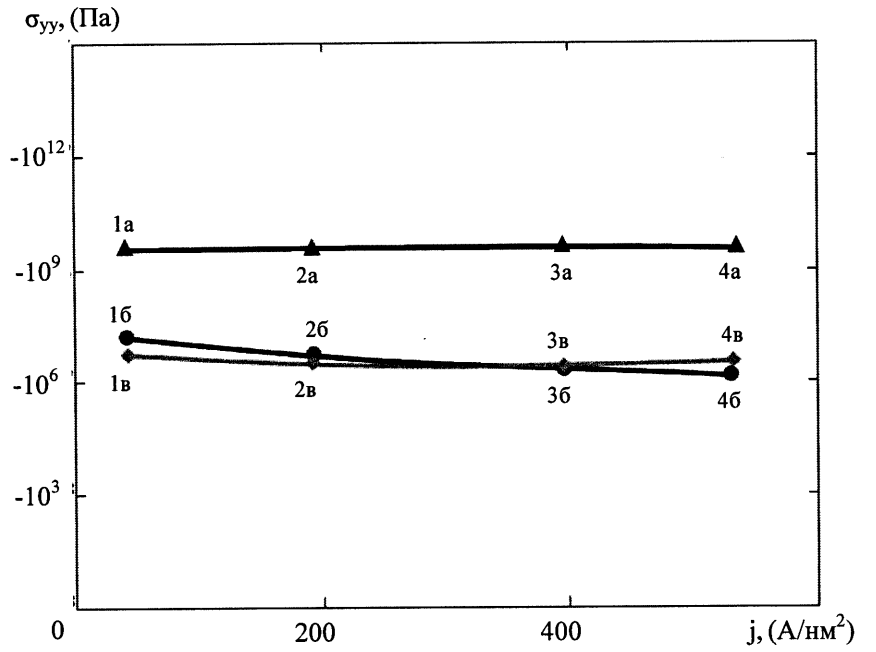
б)



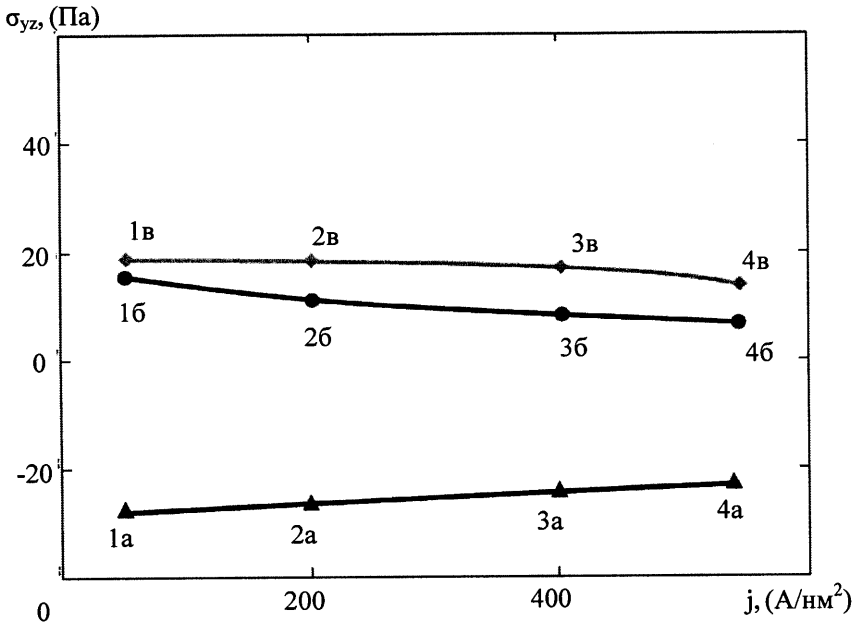
в)


σxz, (Па)
150
0
-150
-250
1б=1в
2б
3б
4б
2в
3в
4в
2a
3a
4a
1a
0
200
400
j, (А/нм2)

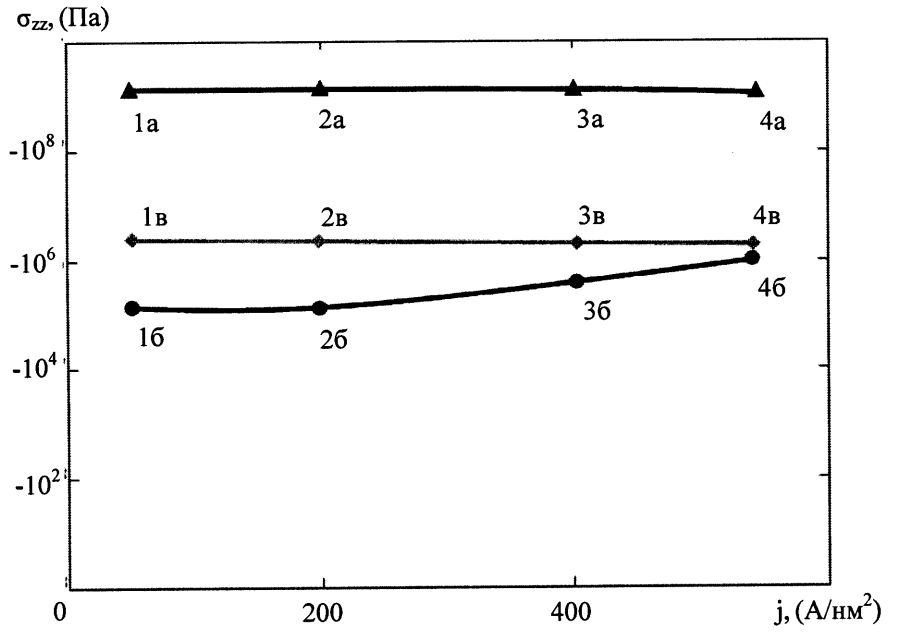
г)


σyy, (Па)
-10^12
-10^9
-10^6
-10^3
1a
2a
3a
4a
1б
2б
3в
4в
1в
2в
3б
4б
0
200
400
j, (А/нм2)

д)


σyz, (Па)
40
20
0
-20
0
200
400
j, (А/нм2)
1в
2в
3в
4в
1б
2б
3б
4б
1a
2a
3a
4a

е)


σzz, (Па)
-10^8
-10^6
-10^4
-10^2
0
200
400
j, (А/нм2)
1a
2a
3a
4a
1в
2в
3в
4в
1б
2б
3б
4б

Заключение

Таким образом, на основании наномасштабной дислокационной модели проведены расчеты напряжений у динамического нанодвойника в условиях электропластического эффекта. Установлено, под воздействием импульсов тока происходит трансформация напряженного состояния у динамического нанодвойника.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Троицкий, О. А.*** Электромеханический эффект в металлах / О. А. Троицкий // Письма в ЖЭТФ. – 1969. – № 10. – С. 18–22.
2. Физические основы и технологии обработки современных материалов / О. А. Троицкий [и др.]. – М-И, I и II тома. – Ижевск : Изд-во РХД, АНО ИКИ.
3. Влияние импульсов электрического тока на двойникование монокристаллов висмута, облученных ионами углерода / В. С. Савенко [и др.] // Физика металлов и металловедение. – 1998. – Т. 85, № 5. – С. 96–105.
4. ***Хирт, Дж.*** Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М. : Атомиздат, 1972. – 600 с.
5. ***Остриков, О. М.*** Механика двойникования твердых тел: монография / О. М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П.О. Сухого, 2008. – 301 с.
6. ***Спицин, В. И.*** Электропластическая деформация металлов / В. И. Спицин, О. А. Троицкий. – М. : Наука, 1985. – 158 с.
7. ***Савенко, В. С.*** Влияние импульсов тока на двойникование металлических кристаллов / В. С. Савенко // Институт физики твердого тела и полупроводников. – 1982. – Автореферат дис. к. ф.-м. н. – 16 с.

Поступила в редакцию 29.09.2014 г.
Контакты: e-mail: omostrikov@mail.ru (Остриков Олег Михайлович)

Summary

A model of dynamic nanotwin developed. On the basis of this model shows the evolution of the state of stress in the developing nanodtwin under electroplastic effect.

УДК: 535.5+543.47

ПСИХОФИЗИОЛОГИЧЕСКОЕ ВОСПРИЯТИЕ ЦВЕТА, ОСНОВАННОЕ НА ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ ПОЛЯРИМЕТРИИ

Ю. В. Корбан, аспирант
Южноукраинский национальный педагогический университет
им. К. Д. Ушинского, г. Одесса

В статье рассмотрена взаимосвязь между психофизиологическим восприятием и поляризационными параметрами цветовой волны видимого диапазона у студентов художественных специальностей.

До настоящего времени основополагающими научными знаниями о цвете как физическом, так и психологическом явлении остаются разработанные Г. Гельмгольцем основы строгой научной систематизации цвета [1]. Однако Г. Гельмгольц не обнаружил доказательства существования трех цветоощущающих зрительных волокон, указанных Томасом-Юнгом, и этого доказательства нет до сих пор. Имеется ряд новых данных о цветовом зрении [2]. Но иная теория взамен созданной Г. Гельмгольцем с позиции психофизиологии цветоощущения пока не создана. Г. Гельмгольц нашел способ измерения цвета путем числового выражения трех его характеристик – цветового тона, насыщенности и светлоты. Разработал трехкомпонентную теорию цветового зрения, нашел отличия результатов смешения цветных лучей света и красок аналогичного цветового тона. Цветовая система смешения цветов из трех основных цветовых тонов в соответствии с работой [3] геометрически изображается в виде равностороннего треугольника, в углах которого обозначены три первичных цвета: красный, зеленый, синий. Аддитивным смешением монохроматического света трех основных цветов получают широкий диапазон цветов и цветовых тонов. Это возможно только при совершенно определенном соотношении между яркостями красного, зеленого и синего цвета и расстоянии до экрана, на который проектируются монохроматические потоки основных цветов. Однако в красках нет субтрактивного способа смешения цветов в чистом виде, поскольку связующее вещество не является прозрачным и бесцветным. И. Ньютон предложил линейный спектр цветов изображать в виде светового круга, включающего семь последовательно расположенных и радиально ориентированных секторов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего и фиолетового цветов. Гёте предложил цветовой круг в виде шестиконечной звезды, более соответствующей смешению красок, в которой три основные цвета – красный, желтый и синий, располагались в углах равностороннего треугольника, а между ними находились фиолетовый, оранжевый и зеленый. Затем на основе цветового круга Ньютона были предложены двенадцати, двадцати, двадцати четырех, сорока восьми и ста секторные цветовые круги. На основе этой цветовой систе-

© Ю.В. Корбан, 2015

мы разработаны и выпущены цветовые атласы. В международной практике принят метод определения цвета, разработанный международной комиссией по освещению (МКО), по которому можно определить, какие цвета получаются при смешении двух и более световых потоков известных цветов. Для представления чистых ахроматических цветов был разработан трехмерный цветовой шар Отто Рунге и цветовое тело В. Оствальда в виде двойного конуса.

По психофизиологическому восприятию цвета разделяют на отступающие и выступающие [3]. К отступающим относятся: зеленый, сине-зеленый, голубой, синий, сине-фиолетовый, фиолетовый. К выступающим – красный, красно-оранжевый, оранжевый, желто-оранжевый, желтый. Выделяют цвета возбуждающие и успокаивающие.

Типология цветовых гармоний имеет определенную полезность для художественного творчества и анализа написания художественного произведения при подготовке специалистов в художественных учебных заведениях.

Сочетание различных цветов проявляет определенное психофизиологическое воздействие не только на посетителей художественных выставок, но и на самих живописцев при написании художественного произведения. По нашему мнению, это воздействие проявляется через определенную психофизиологическую связь в нашем организме, основанную на собственных поляризационных связях зрительных органов с работой мозга. Поэтому психофизиологические особенности зрительного восприятия цветов характеризуются собственными поляризациями, которые полностью пропускаются через биологические идеальные поляризаторы, представляющие собой предельные случаи частичных поляризаторов, реагирующих на изменение цвета. Зрительная память определенного цвета (цветосочетаний) возникает за счет воздействия параметров поляризации на определенные мозговые центры. Оптическая система человеческого глаза обладает максимальным и минимальным пропусканием на двух ортогональных поляризациях, причем она способна разложить произвольную поляризацию на два ортогональных состояния и определить функцию близости того или иного цвета.

Оптическая система нашего глаза приспособлена для пропускания света по интенсивности в зависимости от его поляризации. Обозначим интенсивность света определенной поляризации æ через $I(æ)$. Интенсивность света, которую пропускает наш глаз изменяется от $I(æ)_{мин}$ до $I(æ)_{макс}$. В молодом возрасте оптическая система человека практически одинаково прозрачна и для поляризации $æ_{мин}$ и $æ_{макс}$. С возрастом это соотношение нарушается и оптическая система становится наиболее прозрачной для поляризации $æ_{макс}$ и наименее прозрачной для поляризации $æ_{мин}$. Пропускание света оптической системой нашего глаза $I(æ)$ с возрастом падает постепенно при оптимальном питании и здоровом образе жизни и более быстро от $I(æ)_{макс}$ до $I(æ)_{мин}$ – при различных болезнях. Состояние оптической системы глаза оказывает существенное влияние на психофизиологическое восприятие цвета в зависимости от его поляризации.

Обозначим отношение квадратов модулей поляризаций через K^2 [4]:

$$K^2 = \frac{|æ - æ_{макс}|^2}{|æ - æ_{мин}|^2}. \qquad (1)$$

Из (1) видно, что если пропускание оптической системы глаза по интенсивности света $I(æ)$ сохраняется постоянным ($I(æ) = const$), то отношение К, равное расстоянию от æ до $æ_{макс}$ и $æ_{мин}$ на построенном по ним треугольнике (Рисунок), должно оставаться постоянным.

Обозначим через η^2 отношение, в котором начало координат делит расстояние между $æ_{макс}$ и $æ_{мин}$:

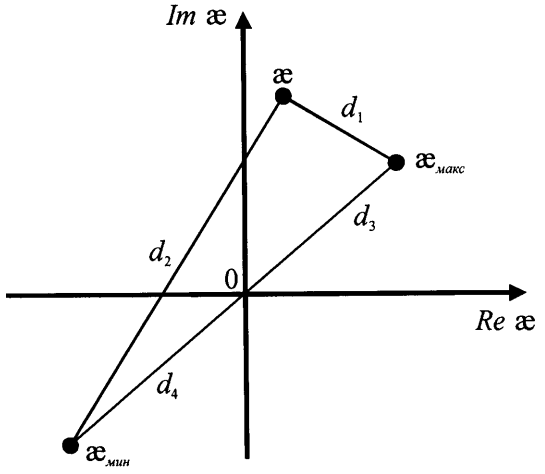
$$\eta^2 = \frac{|æ_{макс}|^2}{|æ_{мин}|^2}. \qquad (2)$$

В формуле (2) $æ_{мин} \cdot æ^*_{макс} = -1$, то есть состояния поляризации, соответствующие $æ_{макс}$ и $æ_{мин}$ пропусканию оптической системы глаза, ортогональны. Из (2) также следует, что

$$|æ_{макс}|^2 = \eta;\ |æ_{мин}|^2 = \eta^{-1}. \qquad (3)$$

Тогда

$$I = \frac{\eta}{\eta + К} I_{макс} + \frac{К^2}{\eta + К^2} I_{мин} \qquad (4)$$



Представление тремя точками комплексной плоскости значения поляризации, соответствующее определенной цветности световой волны

Уравнение (4) описывает зависимость пропускания света оптической системой глаза по интенсивности I от æ, которая характеризует цветовое состояние поступающего света. Пропускание оптической системы глаза заданы двумя ортогональными состояниями поляризаций $æ_{макс}$ и $æ_{мин}$, которым соответствуют максимальное $I_{макс}$ и минимальное $I_{мин}$ пропускание при прохождении света через оптическую систему глаза.

Значение поляризации, соответствующее на сфере Пуанкаре определенной цветности, представляются на рисунке тремя точками поляризационной комплексной плоскости. Отношение расстояний K и η определяются следующим образом:

$$К = \frac{|æ - æ_{макс}|}{|æ - æ_{мин}|};\ \eta = \frac{|æ_{макс}|}{|æ_{мин}|}, \qquad (5)$$

Тогда I равняется:

$$I = I_{мин} + \frac{\eta}{\eta + К^2} \ell. \qquad (6)$$

Из уравнения (6) видно, что зависимость от поляризации, поступающего света на оптическую систему глаза, содержится только в одном коэффициенте ℓ, равном:

$$\ell = I_{макс} - I_{мин}. \quad (7)$$

Состояние поляризации света, поступающего на оптическую систему глаза, выражено лишь через одну комплексную переменную æ, а коэффициенты К и η на комплексной плоскости (рисунок) определяются с помощью отношения расстояний d_1, d_2, d_3, d_4 между тремя точками плоскости как $K = d_1/d_2$ и $\eta = d_3 / d_4$.

Выразим пропускание света оптической системой глаза в явной форме через цветность, которой соответствуют параметры эллипса поляризации световой волны – азимут θ и угол эллиптичности ε. $æ = \mathrm{tg}\left(\varepsilon + \frac{\pi}{4}\right)e^{-j2\theta}$;

$$æ_{макс} = \mathrm{tg}\left(\varepsilon_{макс} + \frac{\pi}{4}\right)\exp\left[-j2\theta_{макс}\right],$$

$$æ_{мин} = \mathrm{tg}\left(-\varepsilon_{макс} + \frac{\pi}{4}\right)\exp\left[-j2\left(\theta_{макс} - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (8)$$

$$K = \frac{g^2 + g_{макс}^2 - 2gg_{макс}\cos 2(\theta - \theta_{макс})}{g^2 + g_{макс}^{-2} + 2gg_{макс}^2\cos 2(\theta - \theta_{макс})}, \quad (9)$$

$$\eta = g_{макс}^2, \quad (10)$$

где параметр $g = \mathrm{tg}\left(\varepsilon + \frac{\pi}{4}\right)$, а $g_{макс} = \mathrm{tg}\left(\varepsilon_{макс} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Связь параметра g с эллиптичностью поляризационного эллипса определяется следующей зависимостью:

$$g = \frac{(1+\mathbf{e})}{(1-\mathbf{e})}. \quad (11)$$

Так как наш глаз является идеальным поляризатором, то $I_{мин} = 0$, тогда для любой поляризации света, поступающего в оптическую систему глаза, т. е. для любой его цветности, пропускание характеризуется следующим выражением:

$$I = \frac{1 + g^2 g_{макс}^2 + 2gg_{макс}\cos 2(\theta - \theta_{макс})}{(1+g^2)(1+g_{макс}^2)} I_{макс}. \quad (12)$$

Взаимосвязь основных характеристик цвета можно представить в условно-графической координатной системе на сфере Пуанкаре, на которой азимут θ и угол эллиптичности ε поляризационного состояния цветовой волны соответствуют точке с долготой 2θ и широтой 2ε. Линии долготы и широты являются кривыми постоянного азимута и постоянной эллиптичности.

Световые волны имеют электромагнитную природу, а их поляризация определяется изменением во времени вектора напряженности электрического поля,

наблюдаемого в фиксированной точке пространства. Фурье-анализ изменений напряженности электрического поля во времени для световых волн дает спектральные компоненты с частотами от 10^{12} Гц (далекая инфракрасная область) до 10^{16} Гц (далекая ультрафиолетовая область), которые и охватывают оптическую часть спектра электромагнитных колебаний, причем видимому спектру соответствует только одна октава (4-8 $\cdot 10^{14}$ Гц).

В нашем организме взаимосвязь различных органов с центральным управляющим "компьютером" – мозгом осуществляется с помощью электромагнитных сигналов, в том числе и с оптической системой глаз. Так как цвет световой волны соответствует определенным ее электрическим параметрам, то с выхода оптической системы глаз эти сигналы поступают в мозг, вызывая определенную реакцию организма на цветовую волну определенной поляризации, которая в свою очередь влияет на психофизиологическое состояние в зависимости от цветности. Поэтому художник, занимаясь живописью, будет отражать в своем произведении реальные изменения цвета видимых или воспроизводимых в памяти объектов, рассеивающих свет определенной поляризации. В соответствии с этим разные живописцы, в том числе и студенты художественных учебных заведений, обладают различным цветовым восприятием, в зависимости от которого происходит корректировка поступающей информации о цвете. Из этого можно сделать предположение, что поляризация – это одна из многих составляющих понимания того, как цвет воспринимается человеком, в зависимости от его психофизиологических способностей.

Выводы

1. Показано, что психологические особенности зрительного восприятия цветов обусловлены поляризационными свойствами световых волн.

2. Спектральные компоненты световых волн, соответствующие определенным частотам спектра, представляются через параметры поляризации, соответствующие определенным цветам на сфере Пуанкаре.

3. Воздействие цвета на психофизиологическое состояние живописцев обусловлено отражательной поляриметрией.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Медведев, В. Ю.*** Цветоведение и колористика : учебное пособие [Текст] / Ю. В. Медведев. – СПб. : ИПЦ СПГУТД, 2005. – 116 с.
2. ***Миронова, Л. Н.*** Цветоведение : учебное пособие [Текст] / Л. Н. Миронов. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – 286 с.
3. ***Фрилинг, Г.*** Человек. Цвет. Пространство. Прикладная цветопсихология [Текст] / Генрих Фрилинг, Ксавер Ауэр. – Сокращенный перевод с немецкого. – М. : Стройиздат, 1973. – 141 с.
4. ***Аззам, Р.*** Эллипсометрия и поляризованный свет [Текст] / Р. Аззам, Н. Башара. – М. : Изд-во "Мир", 1981. – 583 с.

Поступила в редакцию 16.06.2014 г.

Summary

The article describes the correlation between psycho-physiological state of the art students of the special values and polarization parameters of color wave of visible range.

УДК 582.852:581.192

ФАРМАКОЛОГИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ РАСТЕНИЙ СЕМ. *CACTACEAE JUSS.*

А. В. Сорока
кандидат биологических наук,
заведующий кафедрой геграфии и охраны природы
МГУ имени А. А. Кулешова, г. Могилев, РБ

В статье рассматриваются вопросы фармакологического потенциала представителей сем. Cactaceae Juss. Проанализированы исследования, посвященные изучению биохимического состава растений, которые могут представлять интерес для лечения некоторых заболеваний. Дан обзор некоторых алкалоидов, сердечных гликозидов и сапонинов, содержащихся в растениях сем. Cactaceae и эффекты, ими вызываемые. Описаны некоторые растения, традиционно используемые в народной медицине для лечения ряда заболеваний.

Введение

Применение лекарственных растений для лечения различных заболеваний началось задолго до открытия их действующих веществ. Несмотря на то, что в мире каждый год синтезируются новые препараты, фитотерапия не утратила своей актуальности [1]. В арсенале ботанических садов Республики Беларусь содержится богатая коллекция растений, имеющих не только эстетическую, но и медицинскую ценность.

Основными преимуществами препаратов из лекарственных растений, перед химически синтезированными соединениями являются: комплексное воздействие на организм человека родственных ему биологически активных соединений [2], уникально подобранный состав и соотношение компонентов [1], более мягкое влияние на организм [1]: препараты лучше переносятся, значительно реже вызывают побочные аллергические реакции. В настоящее время в современной научной медицине используется свыше 250 растений.

Целью нашей работы являлось изучение фармакологического потенциала представителей сем. *Cactaceae Juss.*

Фармакологически активные вещества сем. *Cactaceae*

Фармакологически активными веществами *сем. Cactaceae* являются алкалоиды – сложные азотистые органические вещества основного характера. В растениях алкалоиды содержатся в виде солей органических и неорганических кислот в активно растущих тканях, эпидерме и гиподермальных клетках, млечных ходах. Локализуются в клеточном соке. При содержании 1–3% растение считается богатым алкалоидами. Растение, как правило, включает не один, а несколько алкалоидов.

© Сорока А.В., 2015

Биологические функции алкалоидов разнообразны, они участвуют в обмене веществ, являются своеобразными стимуляторами и регуляторами биохимических процессов.

Почти все алкалоиды растений сем. *Cactaceae* являются или химическими дериватами β-фенил-этиламинов или 1, 2, 3, 4-тетрагидроизохинолина и относятся к изохинолиновой группе. Изохинолиновые алкалоиды представляют наиболее интересный класс лекарственных препаратов, отличающийся широтой спектра фармакологического действия [1].

Производные 4-хинолона используются в качестве антибактериальных препаратов широкого спектра действия. Исследования выявили противоопухолевую активность соединений данного ряда за счет способности ингибировать топоизомеразу II млекопитающих [2].

Представители сем. *Cactaceae* синтезируют эти алкалоиды из простой аминокислоты – фенилаланина, через различные промежуточные продукты с помощью катализирующих ферментов [3]. Известно более 120 различных алкалоидов, биогенных аминов и алкалоидных дериватов, которые обнаружены в 150 видах представителей сем. *Cactaceae*.

Самым распространенным является горденин (в 81 виде). За ним следует тирамин, N-метилтирамин, 3,4-диметоксифенетиламин, N-метил-3,4-диметоксифенитиламин, мескалин, 3-метокситирамин, синефрин, анхаламин, анхалидин, анхалинин, анхалонидин, анхалонин, анхалотин, лофофорин, лофотин, пеллотин, пейофорин, пейотин, N-ацетиланхалонин, N-формилмескалин, мескалотам, пейоглутам, мескалинцитримид, мескалинмалимид, пейорувиновая кислота, пейоксиловая кислота и другие [4].

Большинство из этих веществ оказывают выраженное действие на живые организмы.

Анхоланидин напоминает пеллотин в действии. У лягушки вызывает наркоз или парезис, сопровождаемый стадией увеличенной возбудимости. Большие дозы вызывают действие подобно кураре. На млекопитающих оказывается незначительное воздействие.

Анхоланин вызывает у животных повышенную возбудимость после стадии пареза. Вызывает галлюцинации.

Горденин возбуждает симпатическую нервную систему и воздействует, на гладкую мускулатуру, не вызывая судорог. Назначался в терапевтических целях как стимулятор, а также применялся против астмы и желудочно-кишечных колик. Высокие дозы могут привести к сильному возбужденному состоянию, параличам и остановке дыхания. Оказывает антисептическое действие.

Долихотелин первый имидазол-алкалоид, который был обнаружен в растениях сем. *Cactaceae*. Его определили в 1969 г. в *Dolichothele sphaerica* [5]. Фармакологически недостаточно изучен.

Карнегин простой тетрагидроизокунолин, который образуется из тирозина. При этом известно, что предшественником карнегина является сальсолидин [6]. Карнегин вызывает у животных очень сильные судороги.

При внутрибрюшинном введении доза 15 мг/кг карнегина является летальной. Токсический эффект проявляется на центральной нервной системе и со-

провождается конвульсиями, действие подобно стрихнину. На изолированном сердце лягушки и предсердии свиньи, карнегин вызывает синусовую брадикардию, при этом у свиньи отмечен отрицательный хронотропный эффект. Низкие концентрации карнегина блокируют этот эффект адреналина и норадреналина, не оказывая инотропного свойства.

В экспериментах на собаках карнегин (0,5-2 мг/кг) производил гипотензивный эффект. При введении внутривенно 1-2 мг/кг, алкалоид оказывал небольшое спазмолитическое и сосудорасширяющее действие, не влияя на активность фосфоэдистеразы мозга [7].

Предельной летальной дозой карнегина, при которой замедляется дыхание, является концентрация 80 мг/кг. Карнегин может иметь применение как аналог хинина, физостигмина и стрихнина [8].

Лофофорин наиболее ядовитый из группы изохинолиновых алкалоидов. Токсичность лофофорина сравнима с никотином. При парентальном введении у кроликов, доза от 13 мг/кг ведет к тетаническим приступам судорог, а доза от 15 до 30 мг/кг – смертельна. Оральный прием человеком дозы от 20 мг способствует вазодилатации, вызывает головную боль и жар.

Макромерин сходен по оказываемому действию с мескалином, но его эффективность в 5 раз меньше.

Мескалин наиболее известен по способности вызывать брадикардию, расширение зрачка. Ни анхалонидин, ни анхалонин в таких же дозах не вызывают подобных эффектов. У собак мескалин вызывает успокоение, вазопресорный эффект. Высокие дозы мескалина могут привести к повреждению печени, моторному параличу, депрессии центральной нервной системы и смерти через дыхательный паралич. При оральном приеме летальная доза для мыши составляет 680 мг/кг. Смерть наступает от паралича дыхательных путей. У морских свинок и хомяков мескалин оказывал тератогенное действие. Мескалин также обладает антисептическим, противовоспалительным и тонизирующим действием.

Пеллотин в количестве 15-30 мг на организм человека оказывает успокаивающее действие, а свыше 50 мг действует как снотворное. Пеллотин обладает высокой нейротоксичностью и по характеру воздействия на организм человека пеллотин напоминает стрихнин. Он вызывает конвульсии у лягушек и кошек. У собак смертельной дозой является 10 мг/кг, а доза 5 мг/кг вызывает замедление сердечного ритма, падение артериального давления. Наблюдаемые эффекты продолжались несколько минут и напоминали действие ацетилхолина, они исчезали при действии атропина и увеличивались при совместном действии с йохимбином и эрготамином.

Сальсолин обладает сходным действием с папаверином в эффектах на кровообращение и сходным действием гидрастидина в эффектах на гладкую мускулатуру. Салсолидин также может вызывать тремор.

Тирамин возбуждает симпатическую нервную систему и воздействует, не вызывая судорог, на гладкую мускулатуру, при этом дополнительно может возникнуть эффект стимуляции сокращения матки. В связи с сосудосуживающим действием повышает кровяное давление, влияет на процессы возбуждения и торможения в нервной системе.

Трихоцерин, подобно другим N-замещенным алкалоидам, не проявляет активности у человека.

Хелиамин в опытах с животными, оказал тормозящее действие на развитие саркомы 45, но не воздействовал на другие виды рака.

Кроме алкалоидов, в растениях сем. *Cactaceae* содержатся и другие биологически активные вещества, имеющие фармакологический эффект.

Сердечные гликозиды – сложные безазотистые соединения растительного происхождения, обладающие кардиотонической активностью. Они издавна применялись в народной медицине как противоотечные средства. Сердечные гликозиды состоят из несахаристой части (агликона или генина) и сахаров (гликона). Кардиотонический эффект сердечных гликозидов связан с агликоновой частью молекулы.

В растениях сем. *Cactaceae* встречаются: *каемпферол-7-рамнозид*, и *каемпферол-3-рамнозил (1-6) галактозид-7-рамнозид*, которые воздействуют на систолическое сокращение сердечной мышцы животных. Они содержатся в *Cephalocereus senilis* [9]. Подобные гликозиды содержатся и в *Selenicereus grandiflorus*.

Сапонины – это исторически сложившееся название большой группы соединений гликозидной природы, обладающих способностью при растворении в воде образовывать стойкую пену. В настоящее время известно, что сапонины являются гликозидами двух видов, различающихся строением неуглеводной части молекулы. К первой группе гликозидов относятся сапонины, которые по своему строению являются гликозидами тритерпеноидов и носят название тритерпеновых гликозидов. Ко второй группе относятся гликозиды стероидов (ряда спиростана и фуростана), они называются стероидными гликозидами.

Сапонины обладают раздражающим действием на слизистые оболочки млекопитающих, а при попадании в кровь вызывают гемолиз эритроцитов. Терапевтически используются сапонины как муколитическое (отхаркивающее), противовоспалительное, антибиотическое, мочегонное или цитостатическое лечебное средство. Некоторые из них оказывают также благоприятное воздействие на сердце и сердечно-сосудистую систему.

Бетулиновая кислота обладает гастро-, гепатопротекторными и антивирусными свойствами, а также противоопухолевой активностью. Подавляет рост раковых клеток и обладает анти-ВИЧ активностью. Многочисленные исследования показывают, что бетулин, частично лупеол и, особенно, бетулиновая кислота эффективны против вируса Эпштейна-Барра, а также – при лечении различных форм рака.

Лонгиспиногенин, макдугалин обнаружены у *Myrtillocactus geometrizans*, и некоторых других представителей рода *Myrtillocactus*.

Олеаноловая кислота содержится в растениях родов *Myrtillocactus, Rhodocactus*.

Тосилат – это лекарственное вещество, применяемое у больных с остановкой сердца для восстановления сокращения миокарда желудочков в случае, если не удается добиться этого с помощью электрической дефибрилляции. Содержится в *Myrtillocactus geometrizans*.

Эритродиол содержится в растениях рода *Lemaireocereus.*

β-ситостерин – тритерпен, обладающий эстрогенным, антисклеротическим, противоопухолевым, фунгицидным, антихолестеринемическим действием, гипохолестеринемической активностью для лечения и профилактики атеросклероза. *β-ситостерол* обладает эстрогенным, противоопухолевым, фунгицидным, антихолестеринемическим действием. *Machaerocereus eruca*, произрастающий в Калифорнии, содержит сапонин. Экстракты *Myrtillocactus geometrizans*, содержащие сапонины, обладают инстектецидной активностью. Возможно, в будущем природные гербициды и инсектициды растительного происхождения вытеснят синтетические препараты, поскольку они не причиняют какого-либо ущерба экологии, не влияют отрицательно на флору и фауну, не накапливаются в почве и в атмосфере. Их преимущество заключается в высокой биологической активности, что позволяет их применять в очень малых дозах [10].

Растения сем. *Cactaceae,* традиционно используемые в медицине

Семейство *Cactaceae Juss.* весьма разнообразно и широко распространено. В Новом свете оно является вторым по численности семейством покрытосеменных растений, насчитывает 1500-2200 видов и 100 родов. Традиционно представители сем. *Cactaceae Juss.* использовались в народной медицине коренного населения Америки. Основное фармацевтическое воздействие растений сем. *Cactaceae Juss.* связано с алкалоидами, сапонинами и другими гликозидами [11]. Кроме этого, у некоторых видов также обнаружены аглюконы производные тритерпенсапонинов: *Lemaireocereus* (эритродиол, керетаровая кислота, туберогенин, трелизегенин); *Machaerocereus* (гуммозогенин, махаэровая кислота, махаэриновая кислота, стеллатогенин, бетулиновая кислота); *Myrtillocactus* (кошаловая кислота, чичипегенин, лонгиспиногенин, миртиллогеновая кислота, олеаноловая кислота, стеллатогенин); *Rhodocactus* (олеаноловая кислота). Более 170 видов данного семейства содержат алкалоиды или биогенные амины в достаточных количествах, чтобы оказывать определенное физиологическое влияние на живые организмы (Таблица).

Роды, содержащие алкалоиды или биогенные амины

Род	Количество видов	Род	Количество видов	Род	Количество видов
Ariocarpus	5	Islaya	1	Pachycereus	5
Austrocylindropuntia	1	Lemaireocereus	1	Pereskiopsis	2
Azureocereus	1	Leocereus	1	Pelecyphora	2
Backebergia	1	Lophocereus	4	Pereskia	10
Carnegiea	1	Lobivia	4	Pierocereus	1
Cererus	8	Lopophora	3	Pilosocereus	4
Cephalocereus	1	Machaerocereus	1	Polaskia	1
Corynopuntia	5	Marginatocereus	1	Pseudolobivia	2
Coryphantha	15	Myrtillocactus	1	Pterocereus	1
Cylindropuntia	4	Mammillaria	3	Rhodocactus	5
Dolichothele	7	Melocaclus	2	Roseocactus	3

Окончание таблицы

Род	Количество видов	Род	Количество видов	Род	Количество видов
Echinocereus	3	Neogomesia	1	Selenicereus	1
Echinopsis	2	Neobuxbaumia	3	Solisia	1
Eriocereus	1	Nopalea	1	Stetsonia	1
Espostoa	1	Notocactus	1	Strombocactus	1
Gymnocactus	7	Obregonia	1	Trichocereus	26
Gymnocalycium	3	Opuntia	4	Turbinicarpus	1
Helianlhocereus	2			Wigginsia	3

Остановимся на самых известных представителях сем. *Cactaceae Juss*, традиционно используемых в качестве лекарственных растений.

Род Carnegiea. Carnegiea gigantea известен в народной медицине как средство для лечения ревматизма. Лечат пораженные суставы прикладыванием подогретых свежих плодов цереуса на больную часть тела. Эффект достигает за счет содержания в растениях алкалоидов карнегина и салсолидина.

Род Dolichotele. Виды рода *Dolichotele* традиционно используются в народной медицине Мексики. Долихотелин – первый имидазол-алкалоид в данном семействе – был выделен из *Dolichothele sphaerica* [5]. Перспективными для изучения являются *Dolichotele baumii, Dolichotele longimamma, Dolichotele melaleuca, Dolichothele sphaerica, Dolichotele surculosa, Dolichotele uberiformis.*

Род Eriocereus. Традиционно используется как противоотечное средство. *Eriocereus martinii* имеет сходное использование с *Selenicereus grandiflorus.*

Род Lophocereus. Традиционно в Мексике *Lophocereus schottii* используют при лечении раковых опухолей: отвар обладает цитостатическим действием. В данном растении содержатся алкалоиды лофоцереин, пилоцереин и пилоцередин, а также стерины лофенол и шоттенол.

Род Mammillaria. Средство, изготавливаемое из *Mammillaria heyderi,* используют против температуры, ревматических болей, головной боли и боли в ушах.

Род Lophophora. Lophophora williamsii – наиболее известное растение сем. *Cactaceae*, используемое в медицине. В индейской народной медицине данный вид использовался как жаропонижающее, противокашлевое, стимулирующее сердечную деятельность, болеутоляющее. При наружном применении мази использовали при ранах, ожогах, ревматизме, укусах змеи.

Общее содержание алкалоидов в *Lophophora williamsii* составляет примерно 0,5%, при этом стебель с 0,9% богаче, чем корень с 0,2%.

Наиболее ценным в фармакологическом отношении у *Lophophora williamsii* является группа алкалоидов: мескалин, пеллотин, анхалонидин, анхалонин, лофофорин. Мескалин (3, 4, 5 – триметоксифенилэтиламина), главный алкалоид растения, содержится в количестве от 1 до 6%. Лофофорин встречается в растении примерно в количестве 0,4% сухого вещества [12, 13].

Следует отметить, что различные виды одного рода *Lophophora* отличаются по биохимическому составу. У *Lophophora diffusa* преобладает алкалоид пел-

лотин (0,8% сухого вещества), а мескалин содержится в незначительных количествах. Вид *Lophophora fricii* содержит крайне незначительное количество мескалина. А более 95% общей суммы алкалоидов составляет пеллотин.

Исследования также обнаружили антибиотические свойства лофофоры. Оказалось, что вытяжки из тканей растения эффективно подавляли большинство болезнетворных микроорганизмов, в т. ч. различные штаммы золотистого стафилококка. Растения также обладает противовоспалительным и тонизирующим действием, стимулируют регенерацию тканей.

Род Nopalea. В народной медицине Филиппин широко используются экстракты стеблей *Nopalea cochinellifera (Linn.) Salm-Dyck* как средство, понижающее уровень сахара в крови. Анти-гипергликемические свойства этого растения подтверждаются и современными иследованиями [14].

Род Opuntia. Одним из наиболее известных представителей семейства *Cactaceae* является род *Opuntia* и его представитель *Opuntia ficus-indica.* В народной медицине плоды и стебли *Opuntia ficus-indica var. saboten* используют как противоожеговое, ранозаживляющее, противоотечное средство, применяют при бронхиальной астме, диабете и несварении желудка. Часто виды рода *Opuntia* применяются в качестве противовоспалительного, мочегонного средства.

Экстракты фруктов и стебля *Opuntia ficus indica* обладают противовоспалительными, гипогликемическими, ранозаживляющими и противоаллергическими свойствами [15].

При использовании лиофилизированных кладодиев или полученных из них экстрактов, отмечена регенерация эпителия и заживление язвы желудка (вызванной этанолом) у крыс. Предварительная обработка кладиями слизистой оболочки желудка проявляет защитный эффект перед ожогом [16]. Лечебный эффект связан с наличием растительных слизей. Полисахариды с массой 104-106 D оказывают положительный эффект при излечивании ран за счет их структуры, которая обеспечивает гигроскопичность, реологические и вязкоупругие свойства [17].

Выделенные из атилацетатной фракции плодов и стеблей *Opuntia ficus-indica var. Saboten* антиоксидантные флаваноиды, кверцетин, дигидрокверцетин кверцетин 3-метил-эфир обладают нейропротекторным эффектом [18].

Большинство видов рода *Opuntia* содержат флавоноиды (изораметин), гликозиды, кемферол, пендуметин, кверцетин, рутин, β-ситостерол, лютеин, диэтиловый эфир писцединовой кислоты, минералы (цинк, магний), пищевые волокна.

Opuntia vulgaris содержит тритерпеноиды фриделин, (фраиделин), фраиделан, тараксерон, тараксерол [19].

Род Pachycereus. Сок молодого побега *Pachycereus pectenaboriginum* находит применение при лечении язвы желудка и как средство при лечении онкологических заболеваний. Содержащийся в растении хелиамин показал тормозящее действие на развитие саркомы 45, но не воздействовал на другие виды рака. Алкалоид хелиамин содержится в *Pachycereus pringlei, Pachycereus weberi.* Растения *Pachycereus pectenaboriginum, Pachycereus pringlei* и *Pachycereus weberi* являются природными источниками карнегина [20].

Род Pelecyphora. Pelecyphora aselliformis в народной медицине Мексики используется как средство против температуры и ревматических болей, головных болей и болей в ушах. Растение содержит алкалоиды мескалин (0,003%), анхалидин, анхаладин, горденин, N-метилмескалин, пеллотин, 3-диметил-трихоцерин, В-фенэтиламин, N-метил-В-фенэтиламин, 3,4-диметокси-В-фенэтилэмин, N-метил- 3,4-диметокси-В-фенэтиламин и 4-метокси-В-фенэтиламин. *Pelecyphora pseudopectinata* содержит горденин.

Род *Pereskia.* В народной медицине виды *Pereskia bleo* и *Pereskia grandifolia* использовались как противопухолевое, противоревматическое, противоязвенное, противовоспалительное средства. Показано, что метанольные экстракты из *Pereskia bleo* оказывали положительный эффект на апоптоз в клетках опухоли рака груди [21]. Метанольная вытяжка оказывала цитотоксическое действие на опухоли Т-47D при концентрации 3,125 мг/мл, приводя к гибели (апоптозу) 100% клеток в культуре *in vitro*. Подавление роста отмечено и при более низких концентрациях. Действие вытяжки, скорее всего, связано с присутствием сложных гликозидов и сапонинов, которые встречаются в роде *Pereskia* [22].

Pereskia grandifolia – содержит тирамин, 3-метокситирамин, В-гидрокси-4-метоксифенэтиламин, а также – сапонины олеоновой кислоты. *Pereskia aculeate* – содержит тирамин, цитостеролы и стигмастеролы. *Pereskia tampicana* – содержит тирамин, мескалин (0,001%), фенэтиламин, 3,4-диметокситирамин, В-гидрокси-4-метоксифенэтиламин. *Pereskia corrugata* – содержит тирамин, мескалин (0,0005%), 3,4-диметокситирамин, 3-метокситирамин. *Pereskia pititache* – содержит тирамин, фенэтиламин. Виды *Pereskia autumnalis, Pereskia cubensis, Pereskia godseffiana, Pereskia guamacho* содержат тирамин.

Род *Rhodocactus.* В растениях *Rhodocactus corrugatus* обнаружены мескалин, олеаноловая кислота.

Род Selenicereus. Selenicereus grandiflorus оказывает эффект, подобный наперстянке (дигиталис), но без кумулятивного влияния, стимулируя сердце, расширяя коронарные и периферические сосуды, возбуждая двигательные нервы спинного мозга и препятствуя воспалительным процессам. Сок этих дикорастущих растений вызывает кожный зуд и образование прыщей, а принятый орально – тошноту, рвоту и диарею. В Европе применяется *Selenicereus grandiflorus*, выращиваемый в теплицах. Его используют в фармацевтических целях, а иногда терапевтически – при органических и функциональных сердечных болезнях, входит в состав гомеопатических припаратов. В Америке растения используют против цистита, удушья, водянки и против ревматических недугов. Аналогичное применение находит *Selenicereus grandiflorus*, который содержит флавон-гликозиды, такие, как кактицин, грандифлорин, нарциссин и рутин.

Род Trichocereus. Не менее 30 видов рода содержат значительное количество алкалоидов, чаще всего встречаются мескалин, тирамин, 3-метокситиламин, 3,4-диметоксифенилтирамин, N-метилтирамин, горденин и другие. Самыми примечательными являются виды *Trichocereus pachanoi* (содержит 0,11–0,3% мескалина, а также тирамин, хорденин, 3-метокситирамин, анхаланин, анхалонидин, 3,4-диметоксифенэтиламин, 3,4-диметокси-4-гидрокси-В-фенэтиламин

и 3,5-диметокси- 4-гидрокси-В-фенэтиламин, 4-гидрокси-3-метоксифенилтирамин, 3-гидрокси-4,5- диметоксифенилтиламин, 4-гидрокси-3,5-димеоксифенилтиламин) и *Trichocereus peruvianus* (содержит 0,82% мескалина, 0,02% 2-хлормескалина, 0,009% тирамина, 0,01% 3-метокситирамина, 3,4-диметоксифенитиламин, 0,004% 4-гидрокси-3,5- диметоксифенилтиламин), *Trichocereus spachianus, Trichocereus taquimbalensis, Trichocereus werdermannianus.*

Существуют и другие растения, в которых обнаружены вещества, возможные для использования в фармакологии. Перечислим некоторые из них.

Род Ariocarpus. Ariocarpus retusus, Ariocarpus fissuratus, Ariocarpus kotschoubeyanus, Ariocarpus trigonus, Ariocarpus scapharostrus.

Род Coryphantha. Coryphantha macromeris, Coryphantha pectinata, Coryphantha elephantides, Coryphantha runyonii и Coryphantha comifera v.echinus.

Род Cephalocereus. Cephalocereus senilis.

Род Cylindropuntia. Cylindropuntia spinosior.

Род Gymnocalycium. Gymnocalycium riojense, Gymnocalycium gibbosum.

Род Islaya. Islaya minor.

Род Melocactus. Melocactus delessertianus, Melocactus maxonii.

Род Myrtillocactus. Myrtillocactus geometrizans.

Род Obregonia Obregonia denegrii..

Род Neobuxbaumia. Neobuxbaumia multiareolata, Neobuxbaumia scoparia, Neobuxbaumia tetetzo.

Род Roseocactus. Roseocactus fissuratus, Roseocactus kotschoubeyanus, Roseocactus lloydii.

Род Pereskiopsis. Pereskiopsis chapistle, Pereskiopsis scandens.

Род Polaskia. Polaskia chende.

Род Pterocereus. Pterocereus gaumeri.

Род Stetsonia. Stetsonia coryne [23–25].

Заключение

Среди современных лекарственных средств около 40% приходится на препараты природного происхождения. Более 170 видов семейства *Cactaceae* содержат алкалоиды или биогенные амины в достаточных количествах, чтобы оказывать определенное физиологическое влияние на живые организмы. Основными группами соединений сем. *Cactaceae,* представляющих интерес для медицины, являются алкалоиды, сердечные гликозиды и сапонины. Алкалоиды семейства *Cactaceae* почти все относятся к изохинолиновой группе. Как известно, индолизинохинолиновые структуры являются весьма перспективными в плане биологической активности.

Растения *Opuntia ficus-indica, Pachycereus pectenaboriginum* традиционно использовались как ранозаживляющие, противоожеговые, средство, при лечении язвы желудка.

В народной медицине для лечения ревматоидных недугов используют *Carnegiea gigantea, Pelecyphora aselliformis, Pereskia bleo* и *Pereskia grandifolia, Selenicereus grandiflorus.*

Selenicereus grandiflorus используют в фармации, кардиотерапии, используется как противоотечное средство. Подобными свойствами обладает *Eriocereus martinii.*

Lophophora williamsii использовался в народной медицине индейцев как жаропонижающее, противокашлевое, стимулирующее сердечную деятельность, болеутоляющее. При наружном применении использовали при ранах, ожогах, ревматизме, укусах змеи. Некоторые растения семейства традиционно использовались для лечения злокачественных образований заболеваний: *Pereskia bleo, Pachycereus pectenaboriginum, Selenicereus grandiflorus, Lophocereus schottii.*

Таким образом, проведенный нами анализ показал, что растения семейства *Cactaceae*, традиционно используемые в народной медицине, имеют высокий фармакологический потенциал.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Карцев, В. Г.*** Биологическая активность и новые направления в химии изохинолиновых алкалоидов / В. Г. Карцев // Азотистые гетероциклы и алкалоиды: материалы Первой Международной конференции Москва, 9–12 октября 2001г. / Компания InterBioScreen Ltd. ; под ред. В. Г. Карцева, Г. А. Толстикова. – Москва, 2001. – С. 97–104.
2. ***Ботева, А. А.*** Синтез и биологическая активность производных 4-хинолона / А. А. Ботева, О. П. Красных // Новые лекарственные средства: успехи и перспективы ; под ред. И. Б. Абдрахманова. – Уфа : Гилем, 2005. – С. 21.
3. ***Anderson, T. H.*** Plant alkaloids / T. H. Anderson. – Philadelphia • Toronto : The Blakiston company, 1949. – 804 p.
4. ***Mata, R.*** Cactus alkaloids. 50. A. comprehensive tabular summary. R. Mata, J. L. McLaughlin, Rev. Latinoamer. Quim. – 1982. – Vol. 12. – P. 95–117.
5. ***Rosenberg, H.*** Dolichothelin, a novel imidazole alkaloid from *Dolichothele sphaerica* / H. Rosenberg, A. G. Paul // Tetrahedron. – 1969. – Vol. 13. – P. 1039–1042.
6. Cactus alkaloids 44. tetrahydroisoquinoline alkaloids of the mexican columnar cactus *Pachycereus weberi* / R. Mata, J. L. McLaughlin // Phytochemistry. – 1980. – Vol. 19. – P. 673–678.
7. ***Furlanut, M.*** Effects of some isoquinoline compounds and certain derivatives on brain phosphodiesterase activity / M. Furlanut, F. Carpenedo, M. Ferrari // Biochem Pharmacol. – 1973. – Vol. 22. – P. 2642–2644.
8. ***Andrea, B. J.*** Bracca and Teodoro S. Kaufman. Synthetic approaches to carnegine, a simple tetrahydroisoquinoline alkaloid / B. J. Bracca Andrea, S. Kaufman Teodoro // Tetrahedron. – 2004. – Vol. 60. – P. 10575–10610.
9. ***Liu, Q.*** Flavonol glycosides from *Cephalocereus senilis* / Q. Liu, M. Liu, T. J. Mabry, R.A. // Dixon Phytochemistry. – 1994. – Vol. 36, I. 1. – P. 229–231.
10. Insect growth regulatory effects of some extracts and sterols from *Myrtillocactus geometrizans (Cactaceae)* against *Spodoptera frugiperda* and *Tenebrio molitor* / C. L. Cespedes [et al.] // Phytochemistry. – 2005. – Vol. 66. – P. 2481–2493.
11. ***Dominguez, X. A.*** Preliminary Chemical study of thirthy-one cacti / X. A. Dominguez [et al.] // Rev. Soc. Quim. Mex. – 1969. – Vol. 13. – P. 8A–12A.
12. ***Pummangura, S.*** Cactus Alkaloids, XLIX. New Trace Alkaloids (Dehydrosalsolidine and Heliamine) from the Saguaro, *Carnegiea Gigantea*, and Confirmation by MIKES (MS/MS)Pummangura, J. L. McLaughlin, D. V. Davis, R. G. Cooks. – J. Nat. Prod. – 1982. – Vol. 45. – P. 277–281.
13. ***Ordaz, C.*** Dehydroheliamine, a trace alkaloid from the saguaro, *Carnegiea gigantea* (*Cactaceae*) / C. Ordaz, N. R. Ferrigni, J. L. McLaughlin // Phytochemistry. – 1983. – Vol. 22. – P. 2101–2102.

14. ***Villasenor, I. M.*** Comparative anti-hyperglycemic potentials of medicinal plants / I. M. Villasenor, Mary Rose A. Lamadrid // Journal of Ethnopharmacology. – 2006. – Vol. 104. – P. 129–131.
15. ***Lee, E. B.*** Effects of *Opuntia ficus-indica var. Saboten* stem on gastric damages in rats / E. B. Lee, J. E. Hyun, D. W. Li, Y. I. Moon // Arch. Pharm. Res. – 2002. – Vol. 25. – P. 67–70. [Lee 2002]
16. ***Galati E. M.*** Antiulcer activity of *Opuntia ficus indica (L.) Mill. (Cactaceae)*: ultrastructural study / E. M. Galati, M. T. Monforte, M. M. Tripodo, A. d'Aquino, M. R. Mondello // Journal of Ethnopharmacology. – 2001. – Vol. 76. – P. 1–9.
17. Effect of polysaccharides from *Opuntia ficus-indica (L.)* cladodes on the healing of dermal wounds in the rat / D. Trombetta [et al.] // Phytomedicine. – 2006. – Vol. 13. – P. 352–358.
18. Neuroprotective effects of antioxidative flavonoids, quercetin, (1)-dihydroquercetin and quercetin 3-methyl ether, isolated from *Opuntia ficus-indica var. saboten* / H. Dok-Go [et al] // Brain Research. – 2003. – Vol. 965. – P. 130–136.
19. Lewis acid catalysed rearrangement of triterpenoids / A. Chatterjee, S. Mukhopadhyay, K. Chattopadhyay // Tetrahedron. – 1976. – Vol. 32. – P. 3051–3053.
20. ***Kircher, K.*** In Chemical Composition of Cacti and its Relationship to Sonoran Desert Drosophila, in Ecological Genetics and Evolution: The Cactus-Yeast Drosophila Model System / K. W. Kircher, J. S. F. Barker, W. T. Starmer // Academic: Australia. – 1982. – P. 143–158.
21. ***Goh, K. L.*** Ethnic and demographic in helicobacter pylori infection / K. L. Goh // Journal of Gastroenterology and Hepatology. – 2000. – Vol. 15. – P. H21–H21.
22. ***Tan, M. L.*** Methanolic extract of *Pereskia bleo (Kunth) DC. (Cactaceae)* induces apoptosis in breast carcinoma, T47-D cell line / M. L. Tan, S. F. Sulaiman, N. Najimuddin, M. R. Samian, T. S. Tengku Muhammad // Journal of Ethnopharmacology. – 2005. – V. 96. – P. 287–294.
23. ***Starha, R.*** Constituents of *Gymnocalycium riojense Fric ex H.Till & W.Till (Cactaceae)* / R. Starha // Biochemical Systematics and Ecology. – 2002. – Vol. 30. – P. 365–366.
24. ***Flores Ortiz, C. M.*** Alkaloids from *Neobuxbaumia species (Cactaceae)* / C. M. Flores Ortiz, P. Davila, L. B. H. Portilla // Biochemical Systematics and Ecology. – 2003. – Vol. 31. – P. 581–585.
25. ***Michael, S.*** Smith Sacramental Amd Medicinal Cacti: Peyote, San Pedro and Other Ethnopharmacological *Cactaceae* / Michael S. Smith. – Rainbow Gardens Bookshop, 2003. – 53 p.

Поступила в редакцию 20.11.2014 г.
Контакты: (+375-29) 385-51-20 (Сорока Александрина Витальевна)

Summary

In article are considered of pharmacological potential of *Cactaceae* family. Were analysed the biochemical composition of plants important for treatment of some diseases. Effects of some compound (alkaloids, warm glycosides and saponins) family *Cactaceae* plants were surveyed. Were described some plants traditionally used in folk medicine for treatment of some diseases.

ЖЕСТКОВ СЕРГЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ

02.08.1952 – 04.12.2014

Сергей Васильевич Жестков, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и дифференциальных уравнений после тяжелой болезни скончался на 63 году жизни.

Сергей Васильевич родился в г. Дрибине Могилевской области. После окончания Дрибинской средней школы в 1969 г до апреля 1970 г. работал в Могилеве слесарем моторoремонтного завода. В 1970 г. поступает на механико-математический факультет Ленинградского государственного университета и в 1975 году оканчивает его по специальности "Механика". После этого вся дальнейшая жизнь С. В. Жесткова связана с Могилевом: работа стажером-исследователем в Могилевском филиале института физики АН БССР (1971–1978 гг.), младшим научным сотрудником (1978–1986 гг.), старшим научным сотрудником института прикладной оптики НАН Беларуси (1986–1993 гг.), ведущим научным сотрудником (1993–2005 гг.). С 1991 года Сергей Васильевич работает в Могилевском государственном университете имени А. А. Кулешова сначала по совместительству старшим преподавателем и доцентом, а потом на штатных должностях профессора (2005–2007 гг.) и заведующего кафедрой (с 2007 г.).

В 1984 г. Сергей Васильевич Жестков защищает кандидатскую диссертацию по специальности "Дифференциальные уравнения", а в 2003 г. – докторскую диссертацию "Развитие конструктивных методов построения глобальных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных".

В 1991 году Сергею Васильевичу ВАК СССР присваивает ученое звание старшего научного сотрудника по специальности "Дифференциальные уравнения", в 2000 году ВАК Республики Беларусь – звание доцента по специальности "Математика", а в 2006 г. – звание профессора.

С.В. Жестков участвовал в выполнении Государственной программы фундаментальных исследований на 2006–2010 гг. "Исследования математических моделей и их применение и анализ систем, структур и процессов в природе и обществе"; 2011–2015 гг. "Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития" (ГПНИ "Корвенгенция") в рамках задания "Разработка математических методов и для исследования задач математической физики и дифференциальных уравнений в частных производных"; в 2003–2005 гг. руководил выполнением заданий Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (проекты № Ф03-109 от 15.04.2003 и № Ф05-325 от 01.04.2005), в 2006–2007 гг. работал по гранту Министерства образования Республики Беларусь (№ 124-06) "Построение и анализ солитонных решений одного класса нелинейных урав-

нений Клейна–Гордона", в 2009–2010 гг. выполнял проект "Исследование волновых решений обобщенных уравнений Фишера и Лотки–Вольтера".

С.В. Жестков опубликовал более 300 статей и тезисов. Издал монографию "Конструктивные методы теории дифференциальных уравнений в частных производных. Метод характеристик". С 2010 г. Сергей Васильевич являлся редактором серии В "Прыродазнаўчыя навукі" научно-методического журнала "Веснік МДУ імя А.А. Куляшова".

За время работы в Могилевском государственном университете неоднократно был экспертом по кандидатским диссертациям по специальности "Дифференциальные уравнения".

Сергей Васильевич – постоянный участник традиционных конференций "Герценовские чтения" (г. Санкт-Петербург).

На протяжении многих лет – руководитель студенческого научного кружка "Дифференциальные уравнения в частных производных", занимался подготовкой научных работ студентов на республиканский конкурс, а также подготовкой докладов на студенческие научно-методические конференции.

Сергей Васильевич был добросовестным работником, занятия проводил на высоком научно-методическом уровне, постоянно совершенствовал свое мастерство. Особое внимание уделял индивидуальной работе со студентами.

Сергей Васильевич пользовался уважением среди преподавателей и студентов. За добросовестный труд и вклад в развитие науки был неоднократно отмечен благодарностями и награжден Грамотами, Почетной грамотой Министерства Образования Республики Беларусь, Управления образования Могилевского облисполкома.

Редколлегия журнала