

ISSN 2073-8315



9 772073 831003

21402

ВЕСНИК

Магілёўскага дзяржаўнага
універсітэта
імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца с снежня 1998 года

Серый В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

**2 (44)
2014**

Галоўная рэдакцыйная камелія:

д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (галоўны рэдактар);
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара);
д-р гіст. навук дацэнт Д.С. Лаўрыновіч (нам. галоўнага рэдактара);
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (нам. галоўнага рэдактара);
д-р фіз.-мат. навук прафесар С.В. Жасткоў (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В);
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А.В. Марацкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)

ЗМЕСТ

БЕРНИК В.И., ЛУНЕВИЧ А.В. Распределение точек с действительными и целыми алгебраическими координатами на плоскости	4
ДРОБОТУН Б.Н. Структурные свойства алгебраических систем и принцип абстрактности формальных языков исчисления предикатов	18
КАЛУГИНА М.А. Совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов в разных метриках	37
КИРЬЯЦКИЙ Э.Г., МАТЮХИН В.И. Изображение фигур в геометрии	44
ТИМОЩЕНКО Е.В., ЮРЕВИЧ В.А., ЮРЕВИЧ Ю.В. Расщепление короткого оптического импульса при нелинейном отражении от тонкой пленки плотной резонансной среды	60
ЮРЕВИЧ Ю.В. Нелинейная восприимчивость тонкого слоя плотной резонансной среды	68
ДРОБЫШЕВСКАЯ Т.В., ОСТРИКОВ О.М. Плоская задача о расчете напряженно-деформированного состояния, обусловленного единичным двойником в зерне поликристалла	75
ТРИФОНОВ В.В. Особенности гемодинамики у лиц с сосудистым и сердечным типом саморегуляции кровообращения	90
АКУЛИЧ Н.В., ОСИПЕНКО А.Н., МАРОЧКОВ А.Л., БОБЦОВА И.А., МАРОЧКОВ А.В. Механизмы терапии ишемии миокарда методом ВЛОК	95
ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ	105
SUMMARIES	106

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 511.42

В.І. БЕРНИК, А.В. ЛУНЕВИЧ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ И ЦЕЛЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ НА ПЛОСКОСТИ

В данной работе доказана регулярность множества точек (α_1, α_2) с действительными алгебраическими координатами и регулярность множества точек (β_1, β_2) с целыми действительными алгебраическими координатами произвольной степени.

Введение

Пусть задано натуральное число $Q > 1$ и некоторый прямоугольник на плоскости $I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$, где I_1, I_2 – некоторые интервалы в \mathbb{R} . Многие задачи теории совместных диофантовых приближений зависят от следующей задачи. При каком соотношении Q и $|I_1|, |I_2|$ можно утверждать, что внутри прямоугольника $I_1 \times I_2$ находятся точки (α_1, α_2) , где α_1, α_2 – действительные корни одного и того же минимального многочлена $P(x)$ и $H(P) \leq Q, \deg(P) = n \geq 1$.

В дальнейшем будем считать, что Q достаточно большое натуральное число, а числа $c_1, c_2 \dots$ зависят только от степени многочлена и не зависят от Q .

Зависимость между корнями полиномов и их коэффициентами очень сложная. Хорошо известен факт, что существуют полиномы больше четвертой степени, корни которых нельзя выразить в радикалах. В работе [1] Бейкер и Шмидт ввели понятие регулярной системы и доказали, что действительные алгебраические числа образуют регулярную систему.

В данной статье мы обобщаем результаты работ Бейкера, Шмидта, Берника, Бересневича на распределение пар действительных алгебраических чисел (α, β) на плоскости.

Определение 1. Счетное множество Γ , состоящее из точек $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ на плоскости вместе с положительной функцией N , определенной на Γ , называется (v_1, v_2) -регулярной системой (N, Γ) , если для

любого прямоугольника $\Pi = I_1 \times I_2$ найдется такое число $T_0(\Pi)$, что при $T > T_0$ выполнены следующие условия.

1. Прямоугольники

$$\begin{cases} |x - \gamma_1| < T^{-v_1}, & v_1 > 0, \\ |y - \gamma_2| < T^{-v_2}, & v_2 > 0, \end{cases}$$

не пересекаются.

2. $\#\{\bar{\gamma} \in \Gamma \cap \Pi : N(\bar{\gamma}) \leq T^{v_1+v_2}\} \geq c_1 T^{v_1+v_2} \mu \Pi$.

В данной работе доказаны две теоремы.

Теорема 1. Пусть Γ – множество, состоящее из точек $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ с алгебраическими координатами, где α_1 и α_2 – корни одного и того же многочлена, $H(\bar{\alpha}) = H(\alpha_1) = H(\alpha_2)$, $\deg \bar{\alpha} = \deg \alpha_1 = \deg \alpha_2 \leq n$. Тогда множество Γ вместе с функцией $N(\bar{\alpha}) = (H(\bar{\alpha}))^{n+1}$ образует (v_1, v_2) -регулярную систему, где

$$v_1 + v_2 = n + 1, \quad v_1 > 0, v_2 > 0.$$

Теорема 2. Пусть Γ – множество, состоящее из точек $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ с целыми алгебраическими координатами, где β_1 и β_2 – корни одного и того же многочлена, $H(\bar{\beta}) = H(\beta_1) = H(\beta_2)$, $\deg \bar{\beta} = \deg \beta_1 = \deg \beta_2 \leq n$.

Тогда множество Γ вместе с функцией $N(\bar{\beta}) = (H(\bar{\beta}))^n$ образует (v_1, v_2) -регулярную систему, где

$$v_1 + v_2 = n, \quad v_1 > 0, v_2 > 0.$$

Основой доказательства теорем 1 и 2 является следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(Q, \delta_0, I_1, I_2)$ обозначает множество пар $(x, y) \in I_1 \times I_2$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v}, \\ |P(y)| < Q^{-v}, \\ \min\{|P'(x)|, |P'(y)|\} < \delta_0 Q \end{cases} \quad (1)$$

имеет решение в полиномах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, где $2v = n - 1$. Тогда при достаточно малой величине $\delta_0 = \delta_0(n)$ имеем

$$\mu \mathcal{L}_n < \frac{1}{4} |I_1| |I_2|.$$

В процессе доказательства теоремы 3 будут возникать множества $\mathcal{L}_{n,i}$ и $\mathcal{L}_{n,i,j}$ (их количество не превосходит $s = s(n)$), аналогичные \mathcal{L}_n , но с другими условиями на $\min\{|P'(x)|, |P'(y)|\}$. Для каждого из них мы получим оценки

$$\begin{aligned}\mu\mathcal{L}_{n,i} &\leq \frac{1}{4s}|I_1||I_2|, \\ \mu\mathcal{L}_{n,i,j} &\leq \frac{1}{4s}|I_1||I_2|,\end{aligned}$$

из которых будет следовать оценка для $\mu\mathcal{L}_n$.

2. Вспомогательные леммы

Для многочлена $P(x)$ с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ пусть $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ эти же корни, но с другой нумерацией и

$$\begin{aligned}S(\alpha_i) &= \left\{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha_i| = \min_{1 \leq j \leq n} |x - \alpha_j|\right\}, \\ S(\beta_s) &= \left\{y \in \mathbb{R} : |y - \beta_s| = \min_{1 \leq t \leq n} |y - \beta_t|\right\}.\end{aligned}$$

Везде далее полагаем, что $i = s = 1$ и для каждой из двух нумераций корней многочлена $P(x)$ выполняется соответствующее условие:

$$\begin{aligned}|\alpha_1 - \alpha_2| &\leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|, \\ |\beta_1 - \beta_2| &\leq |\beta_1 - \beta_3| \leq \dots \leq |\beta_1 - \beta_n|.\end{aligned}$$

А также везде далее будем считать, что $I_1, I_2 \subset \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Лемма 1. Пусть $x \in S(\alpha_1)$. Тогда

$$|x - \alpha_1| \leq n \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|},$$

$$|x - \alpha_1| \leq 2^{n-1} \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}.$$

Первое неравенство следует из тождества

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - \alpha_i},$$

а второе доказано в [2].

Лемма 2. Пусть $\delta, K_0, \eta_1, \eta_2$ – действительные положительные числа, P_1, P_2 – два многочлена с целыми коэффициентами степени $n \geq 1$ без общих корней, $\max\{H(P_1), H(P_2)\} < K$, где $K > K_0$. Пусть $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$, $|I_1| = K^{-\eta_1}$, $|I_2| = K^{-\eta_2}$. Если при некоторых $\tau_1, \tau_2 > 0$, для всех пар $(x, y) \in I_1 \times I_2$ выполнены неравенства:

$$\begin{aligned} \max\{P_1(x), P_2(x)\} &< K^{-\eta_1}, \\ \max\{P_1(y), P_2(y)\} &< K^{-\eta_2}, \end{aligned}$$

то

$$\tau_1 + 1 + 2 \max\{\tau_1 + 1 - \eta_1, 0\} + \tau_2 + 1 + 2 \max\{\tau_2 + 1 - \eta_2, 0\} < 2n + \delta.$$

Лемма 2 доказывается аналогично лемме 3 из [3].

3. Доказательство теоремы 3. Сведение к многочленам второй степени.

В неравенствах (1) рассмотрим отдельно случаи, когда

$$2n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}} \leq \min\{|P'(x)|, |P'(y)|\} < \delta_0 Q \quad (2)$$

и

$$\min\{|P'(x)|, |P'(y)|\} < 2n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}}, \quad (3)$$

так как способы доказательств для обоих случаев различаются.

Вначале предположим, что верна оценка (2).

Покажем, как из (2) получить двусторонние оценки для $|P'(\alpha_1)|$ и $|P'(\beta_1)|$. По формуле Лагранжа

$$P'(x) = P'(\alpha_1) + P''(\xi_1)(x - \alpha_1), \quad \xi_1 \in (x, \alpha_1). \quad (4)$$

Из оценки (2) и леммы 1 имеем:

$$|x - \alpha_1| < nQ^{-v+\frac{v-1}{2}} \cdot 2^{-1}n^{-3/2} = 2^{-1}n^{-1/2}Q^{-\frac{v+1}{2}},$$

$$|P''(\xi_1)(x - \alpha_1)| < 2n^2 \cdot 2^{-1}n^{-1/2}Q^{-\frac{v+1}{2}} = n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}}.$$

При $|P'(\alpha_1)| < n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}}$ равенство (4) противоречиво. Аналогично противоречиво равенство

$$P'(y) = P'(\beta_1) + P''(\xi_1)(y - \beta_1), \quad \xi_1 \in (y, \beta_1)$$

при $|P'(\beta_1)| < n^{3/2}Q^{-\frac{v-1}{2}}$. Поэтому при условии (2) систему неравенств (1) заменяем системой неравенств:

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-\nu}, \\ |P(y)| < Q^{-\nu}, \\ n^{3/2}Q^{-\frac{\nu-1}{2}} < |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0 Q, \\ n^{3/2}Q^{-\frac{\nu-1}{2}} < |P'(\beta_1)|, \end{cases} \quad (5)$$

в которой без потери общности считаем, что сверху числом $\delta_0 Q$ ограничена производная в α_1 .

Обозначим множество решений системы неравенств (5) через $\sigma_0(P)$.

После получения оценки $\mu\sigma_0(P)$ рассмотрим систему неравенств:

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-\nu}, \\ |P(y)| < Q^{-\nu}, \\ \min\{|P'(x)|, |P'(y)|\} < 2n^{3/2}Q^{-\frac{\nu-1}{2}}. \end{cases} \quad (6)$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{n,1}$ множество пар $(x, y) \in I_1 \times I_2$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-\nu}, \\ |P(y)| < Q^{-\nu}, \\ Q^{1/4} \leq \min\{|P'(\alpha_1)|, |P'(\beta_1)|\} \leq 2\delta_0 Q \end{cases} \quad (7)$$

имеет хотя бы одно решение в полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Из леммы 1 следует, что множество решений (7) содержится в прямоугольнике:

$$\begin{aligned} |x - \alpha_1| &< 2^{n-1}Q^{-\nu}|P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ |y - \beta_1| &< 2^{n-1}Q^{-\nu}|P'(\beta_1)|^{-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

который обозначим $\sigma(P)$.

Предложение 1. Для достаточно малой величины δ_0 и достаточно большого Q справедлива оценка $\mu\mathcal{L}_{n,1} < \frac{1}{16}|I_1||I_2|$.

Доказательство. Определим множество $\sigma_1(P)$ следующим образом:

$$\sigma_1(P) := \left\{ (x, y) \in I_1 \times I_2 : \begin{array}{l} |x - \alpha_1| < c_3 Q^{-1/2} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ |y - \beta_1| < c_3 Q^{-1/2} |P'(\beta_1)|^{-1}, \end{array} \quad c_3 > 1 \right\}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) получаем

$$\mu\sigma(P) \leq 2^{2n-2}c_3^{-2}Q^{-n+2}\mu\sigma_1(P). \quad (10)$$

Разложим P в ряд Тейлора на промежутках из $\sigma_1(P)$:

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2}P''(\xi_3)(x - \alpha_1)^2, \quad \xi_3 \in (x, \alpha_1),$$

$$P(y) = P'(\beta_1)(y - \beta_1) + \frac{1}{2}P''(\xi_4)(y - \beta_1)^2, \quad \xi_4 \in (y, \beta_1).$$

Используя (7) и (9), оценим каждое слагаемое в разложениях. При достаточно больших Q и c_3 будем иметь:

$$\begin{cases} P(x) < 2c_3Q^{-1/2}, \\ P(y) < 2c_3Q^{-1/2}, \end{cases} \quad (11)$$

где $(x, y) \in \sigma_1(P)$.

Зафиксируем вектор $\mathbf{b}_1 = (a_n, \dots, a_3)$, состоящий из коэффициентов многочлена $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, и обозначим через $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$ подкласс многочленов с одним и тем же вектором \mathbf{b}_1 . Далее воспользуемся методом существенных и несущественных прямоугольников.

Прямоугольник $\sigma_1(P_1) \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$ будем называть **существенным**, если для любого другого прямоугольника $\sigma_1(P_2)$, $P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$ выполняется неравенство

$$\mu(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)) < \frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1).$$

Если же в подклассе $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$ найдется прямоугольник $\sigma_1(P_2)$, $P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$ такой, что

$$\mu(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)) > \frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1),$$

то прямоугольник $\sigma_1(P_1)$ будем называть **несущественным**.

Вначале рассмотрим существенные прямоугольники $\sigma_1(P_1)$. Более половины существенного прямоугольника свободно от точек других прямоугольников (в смысле меры Лебега), поэтому

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)} \mu\sigma_1(P) \leq 4|I_1||I_2|.$$

Используя последнее неравенство, (10) и $\#\mathbf{b}_1 < (2Q + 1)^{n-2} < (4Q)^{n-2}$, получаем при достаточно большом Q неравенство

$$\sum_{\mathbf{b}_1} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)} \mu\sigma(P) < 2^{2n-2} c_3^{-2} Q^{-n+2} \cdot (4Q)^{n-2} \cdot 4|I_1||I_2| = 2^{4n-2} c_3^{-2} |I_1||I_2|$$

и, взяв $c_3 = 2^{2n+1.5}$, получаем оценку

$$\sum_{\mathbf{b}_1} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)} \mu\sigma(P) \leq \frac{1}{32} |I_1||I_2|. \quad (12)$$

Рассмотрим несущественные прямоугольники $\sigma_1(P)$. Для многочленов $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$ на пересечении $\sigma_1(P_1, P_2) = \sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)$, мера которого не менее $\frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1)$, выполняются неравенства (11). Поскольку $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$, то многочлен $R(x) = P_1(x) - P_2(x)$ является квадратным и удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} |R(x)| < 4c_3 Q^{-1/2}, \\ |R(y)| < 4c_3 Q^{-1/2}, \\ \min\{|R'(x)|, |R'(y)|\} < 4\delta_0 Q, \\ H(R) \leq 2Q. \end{cases} \quad (13)$$

Многочлен $R(x)$ имеет вид

$$R(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ и } R'(x) = 2a_2 x + a_1.$$

Без потери общности можно считать, что $|R'(x)| < |R'(y)|$.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \theta_1(x) 4c_3 Q^{-1/2}, \\ a_2 y^2 + a_1 y + a_0 = \theta_2(y) 4c_3 Q^{-1/2}, \\ 2a_2 x + a_1 = \theta_3(x) 4\delta_0 Q, \end{cases}$$

где θ_i – некоторые непрерывные функции, такие, что $|\theta_i(x)| < 1$.

Найдем из этой системы a_2 по методу Крамера:

$$a_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ 2x & 1 & 0 \end{vmatrix} = x^2 \cdot \begin{vmatrix} y & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - x \cdot \begin{vmatrix} y^2 & 1 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} y^2 & y \\ 2x & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x^2 - 2x^2 + y^2 - 2xy = y^2 - 2xy - x^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \theta_1(x)4c_3Q^{-1/2} & x & 1 \\ \theta_2(y)4c_3Q^{-1/2} & y & 1 \\ \theta_3(x)4\delta_0Q & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \theta_1(x)4c_3Q^{-1/2} - \theta_2(y)4c_3Q^{-1/2} + \theta_3(x)4\delta_0Q(x - y),$$

$$a_2 = \frac{\theta_1(x)4c_3Q^{-1/2} - \theta_2(y)4c_3Q^{-1/2} + \theta_3(x)4\delta_0Q(x - y)}{y^2 - 2xy - x^2}.$$

Вырежем из $I_1 \times I_2$ множество пар (x, y) , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} |x - y| \leq \delta_1, \\ |y^2 - 2xy - x^2| \leq \delta_1, \end{cases}$$

которое обозначим \mathcal{B}_{δ_1} . Множество $(I_1 \times I_2) \setminus \mathcal{B}_{\delta_1}$ обозначим \mathcal{A}_{δ_1} .

Тогда $|a_2| < \frac{8\delta_0Q}{\delta_1}$ при $(x, y) \in \mathcal{A}_{\delta_1}$ и достаточно большом Q .

Покажем, что из $(x, y) \in \mathcal{A}_{\delta_1}$ следует $|\alpha_1 - \alpha_2| > \frac{\delta_1}{2}$.

Пользуясь методом от противного, предположим, что $(x, y) \in \mathcal{A}_{\delta_1}$ и

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < \frac{\delta_1}{2}.$$

Так как $|\alpha_1 - \alpha_2| < \frac{\delta_1}{2}$ и $(x, y) \in \mathcal{A}_{\delta_1}$, то $|x - \alpha_1| > \frac{\delta_1}{4}$ или

$|y - \alpha_2| > \frac{\delta_1}{4}$, из чего с учетом (9) и леммы 1 следует, что

$$|R'(\alpha_1)| \leq 32c_3Q^{-1/2}\delta_1^{-1}$$

или

$$|R'(\alpha_2)| \leq 32c_3Q^{-1/2}\delta_1^{-1}.$$

Но $|R'(\alpha_1)| = |R'(\alpha_2)| = \sqrt{D(R)}$ ($D(R)$ – дискриминант многочлена R)

и, следовательно, $\sqrt{D(R)} \leq 32c_3Q^{-1/2}\delta_1^{-1}$. При достаточно большом Q имеем $D(R) = 0$.

Если $D(R) = 0$, то система (13) примет вид

$$\begin{cases} |a'_2x + a'_1| \leq 2\sqrt{c_3}Q^{-1/4}, \\ |a'_2y + a'_1| \leq 2\sqrt{c_3}Q^{-1/4}, \\ \max\{a'_1, a'_2\} \leq \sqrt{\frac{8\delta_0 Q}{\delta_1}}, \end{cases} \quad (14)$$

где $(a'_2x + a'_1)^2 = R(x)$.

При достаточно большом Q все точки (x, y) , удовлетворяющие (14), принадлежат \mathcal{B}_{δ_1} , что противоречит предположению $(x, y) \in \mathcal{A}_{\delta_1}$. Поэтому далее считаем, что

$$|\alpha_1 - \alpha_2| > \frac{\delta_1}{2}.$$

Оценим снизу $|R'(\alpha_1)|$ и $|R'(\beta_1)|$:

$$\begin{aligned} |R'(\alpha_1)| &= a_2|\alpha_1 - \alpha_2| > \frac{\delta}{2}a_2, \\ |R'(\beta_1)| &= a_2|\beta_1 - \beta_2| > \frac{\delta}{2}a_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда

$$\begin{cases} |x - \alpha_1| \leq 2 \cdot 4c_3Q^{-1/2}|R'(\alpha_1)|^{-1} \leq 16c_3\delta_1^{-1}a_2^{-1}Q^{-1/2}, \\ |y - \beta_1| \leq 2 \cdot 4c_3Q^{-1/2}|R'(\beta_1)|^{-1} \leq 16c_3\delta_1^{-1}a_2^{-1}Q^{-1/2}, \end{cases} \quad (16)$$

где $(x, y) \in \sigma_1(P_1, P_2)$ и

$$\mu\sigma_1(P_1, P_2) \leq 2^{10}c_3^2\delta^{-2}a_2^{-2}Q^{-1}. \quad (17)$$

Теперь оценим коэффициенты a_1 и a_0 . Из (16) и $(x, y) \in \mathcal{A}_{\delta_1}$ следует, что корни α_1, α_2 ограничены:

$$|\alpha_1| \leq c_5,$$

$$|\alpha_2| \leq c_6.$$

Тогда, используя формулы Виета, при достаточно большом Q получаем:

$$\begin{aligned} |\alpha_1 + \alpha_2| &= \left| \frac{a_1}{a_2} \right| \leq c_5 + c_6 = c_7 \Rightarrow |a_1| \leq c_7|a_2| \leq c_9|a_2|, \\ |\alpha_1 \cdot \alpha_2| &= \left| \frac{a_0}{a_2} \right| \leq c_5 \cdot c_6 = c_8 \Rightarrow |a_0| \leq c_8|a_2| \leq c_9|a_2|, \end{aligned} \quad (18)$$

где $c_9 = \max\{c_7, c_8\}$.

Из (17), (18) следует цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{a_2 a_1 a_0} \mu \sigma_1(P) &\leq 2 \cdot \sum_{a_2 a_1 a_0} \mu \sigma_1(P_1, P_2) \leq \sum_{a_2 a_1 a_0} 2^{11} c_3^2 \delta_1^{-2} a_2^{-2} Q^{-1} + \mu \mathcal{B}_{\delta_1} \leq \\ &\leq \sum_{a_2} 2^{11} c_3^2 \delta_1^{-2} c_9^2 Q^{-1} + \mu \mathcal{B}_{\delta_1} \leq 2^{14} c_3^2 \delta_1^{-3} c_9^2 \delta_0 + \mu \mathcal{B}_{\delta_1}. \end{aligned}$$

Взяв $\delta_1 = \delta_0^{1/4}$ и подходящее δ_0 , получим

$$2^{13} c_3^2 c_9^2 \delta_0^{1/4} + \mu \mathcal{B}_{\delta_1} < \frac{1}{32} |I_1| |I_2|. \quad (19)$$

Складывая оценки (12) и (19), имеем

$$\mu \mathcal{L}_{n,1} < \frac{1}{16} |I_1| |I_2|. \quad (20)$$

4. Индукция и доказательство теоремы для неприводимых многочленов степени n .

В данном разделе все полиномы предполагаются неприводимыми.

Пусть производные удовлетворяют следующим условиям:

при $2 \leq k_1 \leq n - 2$

$$Q^{-\frac{k_1-2}{4}} \leq |R'(\alpha_1)| \leq Q^{-\frac{k_1-3}{4}},$$

$$Q^{-\frac{k_2-2}{4}} \leq |R'(\beta_1)| \leq Q^{-\frac{k_2-3}{4}},$$

где $k_1 \geq k_2$,

а при $k_1 = n - 1, k_2 = n - 1$

$$n^{3/2} Q^{-\frac{n-3}{4}} \leq |R'(\alpha_1)| \leq Q^{-\frac{n-2}{4}},$$

$$n^{3/2} Q^{-\frac{n-3}{4}} \leq |R'(\beta_1)| \leq Q^{-\frac{n-2}{4}}.$$

Определим прямоугольники

$$\sigma_{k_1 k_2}(P) := \left\{ (x, y) \in I_1 \times I_2 : \begin{array}{l} |x - \alpha_1| < c_5 Q^{-k_1/2} |P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ |y - \beta_1| < c_5 Q^{-k_2/2} |P'(\beta_1)|^{-1}, \end{array} \quad c_5 > 1 \right\}.$$

Как и прежде без потери общности будем считать, что $|R'(\alpha_1)| < |R'(\beta_1)|$.

Зафиксируем вектор $\mathbf{b}_k = (a_n, \dots, a_{k+2})$. Множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же вектором \mathbf{b}_k обозначим $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_k)$. При достаточно большом Q будем пользоваться оценкой $\#\mathbf{b}_k < 2^{2n}Q^{n-k_1-1}$. Оценим $|P(x)|, |P'(x)|, |P(y)|, |P'(y)|$ при $(x, y) \in \sigma_{k_1 k_2}(P), \xi_5 \in (x, \alpha_1), \xi_6 \in (x, \alpha_1), \xi_7 \in (x, \beta_1)$:

$$|P(x)| < |P'(\alpha_1)| + \frac{1}{2}|P''(\xi_5)||x - \alpha_1|^2 < 2c_{10}Q^{-k_1/2},$$

$$|P'(x)| < |P'(\alpha_1)| + |P''(\xi_6)||x - \alpha_1| < 2Q^{-\frac{k_1-3}{4}},$$

$$|P(y)| < |P'(\beta_1)| + \frac{1}{2}|P''(\xi_7)||y - \beta_1|^2 < 2c_{10}Q^{-k_2/2},$$

$$|P'(y)| < |P'(\beta_1)| + |P''(\xi_6)||x - \beta_1| < 2Q^{-\frac{k_2-3}{4}}.$$

Прямоугольники $\sigma_{k_1 k_2}(P), P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_k)$ поделим на существенные и несущественные. В случае существенных прямоугольников из оценок $\#\mathbf{b}_k$,

$$\mu\sigma(P) < 2^{2n-2}c_{10}^{-2}Q^{-n+\frac{k_1+k_2+1}{2}}\mu\sigma_{k_1 k_2}(P),$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_k)} \mu\sigma_{k_1 k_2}(P) \leq 4|I_1||I_2|$$

имеем

$$\sum_{\mathbf{b}_k} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_k)} \mu\sigma(P) \leq 2^{4n}c_{10}^{-2}Q^{\frac{k_2-k_1}{2}}|I_1||I_2| \leq \frac{1}{32}|I_1||I_2| \quad (21)$$

при достаточно большой величине c_{10} .

В случае несущественных прямоугольников на пересечении $\sigma_{k_1 k_2}(P_1) \cap \sigma_{k_1 k_2}(P_2), P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_k)$ получаем для многочлена $R(x) = P_1(x) - P_2(x)$ оценки

$$\begin{cases} |R(x)| \leq 4c_{10}Q^{-k_1}, \\ |R(y)| \leq 4c_{10}Q^{-k_2}, \\ |R'(x)| \leq 4Q^{-\frac{k_1-3}{4}}, \\ |R'(y)| \leq 4Q^{-\frac{k_2-3}{4}}, \end{cases} \quad (22)$$

где $\deg R \leq k_1 + 1$, $H(R) \leq 2Q$.

Обозначим через \mathcal{L}_{n,k_1,k_2} ($2 \leq k_1 \leq n - 2$, $k_1 \geq k_2$) множество пар (x, y) , для которых выполняются неравенства (22).

По предположению индукции

$$\mu \bigcup_{\substack{2 \leq k_1 \leq n-1, \\ k_2 \leq \max\{k_1, n-2\}}} \mathcal{L}_{n,k_1,k_2} \leq \frac{1}{32} |I_1| |I_2|. \quad (23)$$

Предложение 2. При достаточно большом Q верно неравенство

$$\mu \mathcal{L}_{n,n-1,n-1} \leq \frac{1}{32} |I_1| |I_2|.$$

Доказательство. Система (22) при $k_1 = k_2 = n - 1 = 2v$ имеет вид

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v}, \\ |P(y)| < Q^{-v}, \\ n^{3/2}Q^{-\frac{2v-2}{4}} \leq |P'(\alpha_1)| < Q^{-\frac{2v-3}{4}}, \\ n^{3/2}Q^{-\frac{2v-2}{4}} \leq |P'(\beta_1)| < Q^{-\frac{2v-3}{4}}, \end{cases} \quad (24)$$

где $\deg P = n$.

Будем говорить, что многочлен P принадлежит прямоугольнику U , если внутри него существуют пары (x, y) , для которых выполняются неравенства (24). Разделим прямоугольник $I_1 \times I_2$ на квадраты $U_{i,j} = U_i \times U_j$, $U_i \in I_1$, $U_j \in I_2$ со стороной $|U_i| = |U_j| = Q^{-u_1}$,

$1 \leq u \leq \frac{v+1}{2}$. Рассмотрим такие квадраты $U_{i,j}$, каждому из которых

принадлежит не более одного неприводимого многочлена с условиями (24). Обозначим через $u_1(P)$ множество пар $(x, y) \in S(\alpha_1) \times S(\beta_1)$, для которых выполняется (24). По лемме 1 имеем

$$\mu u_1(P) < 2^{2n-2} n^{-3} Q^{-(v+1)}.$$

Так как количество квадратов не превосходит $|I_1||I_2|Q^{2u}$, то

$$\sum_{U_{i,j}} \sum_{P \in U_{i,j}} \mu u_1(P) \leq 2^{2n-2} n^{-3} Q^{2u_1-(v+1)} |I_1||I_2| \leq \frac{1}{32} |I_1||I_2| \quad (25)$$

при достаточно большом Q .

Покажем, что два и более неприводимых многочлена не могут принадлежать одному квадрату $U_{i,j}$. Оценим значения $|P(x)|, |P(y)|$ при $(x, y) \in U_{i,j}$. По определению $P \in U_{i,j}$, существует пара (x_0, y_0) , такая, что

$$|P(x_0)| < Q^{-v}, |P(y_0)| < Q^{-v}.$$

Тогда по лемме 1 $|x_0 - \alpha_1| < 2^{n-1} n^{-3/2} Q^{\frac{v+1}{2}}$. Для любой точки $x_0 \in U_i$ выполняется неравенство

$$|x - \alpha_1| \leq |x - x_0| + |x_0 - \alpha_1| < Q^{-u} + 2^{n-1} Q^{\frac{v+1}{2}} < 2Q^{-u}$$

для достаточно большого Q . Из разложения

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P''(\xi_8)(x - \alpha_1)^2, \quad \xi_8 \in (x, \alpha_1)$$

получаем

$$|P(x)| < 2Q^{\frac{2v-3}{4}-u} + 4n^2 Q^{1-2u}.$$

Положим $u_1 = \frac{v+1}{2} - \gamma_1, \gamma_1 > 0$. Тогда при $Q > Q_0(\gamma_1)$ и достаточно малом γ_1

$$|P(y)| < 2Q^{-v+\frac{1}{4}+\gamma_1} + 4n^2 Q^{-v+2\gamma_1} < 4Q^{-v+\frac{1}{4}+\gamma_1}, \quad (26)$$

аналогично при $y \in U_j$

$$|P(x)| < 4Q^{-v+\frac{1}{4}+\gamma_1}. \quad (27)$$

Применим к двум многочленам, удовлетворяющим (26) и (27), лемму 3 с $\tau_1 = \tau_2 = v - \frac{1}{4} - \gamma_1, \eta_1 = \eta_2 = \frac{v+1}{2} - \gamma_1$. Получим неравенство

$$\begin{aligned} 2(\tau_1 + 1 + 2(\tau_1 + 1 - \eta_1)) &= 2\left(v + \frac{3}{4} - \gamma_1 + 2\left(v + \frac{3}{4} - \gamma_1 - \frac{v+1}{2} + \gamma_1\right)\right) = \\ &= 4v + \frac{5}{2} - 2\gamma_1 = 2n + \frac{1}{2} - 2\gamma_1 < 2n + \delta_1, \end{aligned}$$

которое противоречиво при $\gamma_1 = \delta = 0.1$.

Складывая оценки (23) и (25), получаем

$$\mu \bigcup_{\substack{2 \leq k_1 \leq n-1, \\ k_2 \leq k_1}} \mathcal{L}_{n,k_1,k_2} \leq \frac{1}{16} |I_1| |I_2| \quad (28)$$

при достаточно большом Q .

Предложение 3. *Мера всех пар (x, y) , для которых существует многочлен $P(x)$, такой, что верна следующая система неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v}, \\ |P(y)| < Q^{-v}, \\ \min\{|P'(x)|, |P'(y)|\} < n^{3/2} Q^{-\frac{2v-2}{4}}, \end{cases}$$

не превосходит

$$\frac{1}{16} |I_1| |I_2|. \quad (29)$$

Доказательство данного предложения аналогично рассуждениям из [4, раздел 6].

Предложение 4. *Мера всех пар (x, y) , для которых существует приводимый многочлен $P(x)$, такой, что верна следующая система неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v}, \\ |P(y)| < Q^{-v}, \\ \min\{|P'(x)|, |P'(y)|\} < 4\delta_0 Q, \end{cases}$$

не превосходит

$$\frac{1}{16} |I_1| |I_2|. \quad (30)$$

Доказательство предложения 4 для многочленов степени $n \geq 3$ аналогично доказательству [4, раздел 7].

Складывая оценки (20), (28), (29), (30), мы окончательно получаем

$$\mu \mathcal{L}_n < \frac{1}{4} |I_1| |I_2|,$$

что доказывает теорему 3.

Из теоремы 3, как в [5], получаем доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 мы получаем по индукции методом Бюжо [6].

Заключение

Таким образом, мы показали, что множество точек на плоскости с алгебраическими координатами и множество точек плоскости с целыми алгебраическими координатами произвольной степени образуют регулярные системы. Это позволяет находить оценки сверху и снизу размернос-

ти Хаусдорфа множества пар точек $(x, y) \in I_1 \times I_2$, для которых существует бесконечно много полиномов с целыми коэффициентами, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-v_1}, \\ |P(x)| < Q^{-v_2}, \\ H(P) = Q, \end{cases}$$

где $Q \in N$, $\deg P \leq n$, $v_1 + v_2 > n - 1$, I_1 и I_2 – некоторые интервалы в \mathbb{R} .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Baker, A.* Diophantine approximation and Hausdor dimension / A. Baker, W. Schmidt. Proc. London Math. Soc., 21:3 (1970), 1–11.
2. *Спринджук, В.Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967.
3. *Берник, В.И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений, Acta Arithm. 42:3 (1983), 219–253.
4. *Берник, В.И.* Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В.И. Берник, Ф. Гётце, Д.В. Коледа. – Минск, 2013.
5. *Budarina, N.* Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields / N. Budarina, D. Dickinson, V. Bernik. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (2010), 149, 193.
6. *Bugeaud, Y.* Approximation by Algebraic Numbers / Y. Bugeaud. Tracts in Mathematics, 160, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, xvi+274 pp.

Поступила в редакцию 23.06.2014 г.

УДК 372.851:510

Б.Н. ДРОБОТУН

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРИНЦИП АБСТРАКТНОСТИ ФОРМАЛЬНЫХ ЯЗЫКОВ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

В работе определены алгебраические системы бинарных отношений на n -элементном множестве и характеристических матриц n -го порядка; доказана их изоморфность, приведена характеризация первичных свойств бинарных отношений в понятийно-терминологической базе теории матриц и рассматриваются возможности использования этой характеризации в прикладном аспекте.

Введение

В работе предлагаются методологические подходы к изучению специфики проявления свойств алгебраических систем, выражимых средствами формального языка исчисления предикатов и функций, выявляются и демонстрируются на конкретных примерах возможности использования инвариантности этих свойств относительно изоморфных отображений при решении прикладных задач и в логико-математической практике.

Приведем предварительно ряд понятий и результатов, которые наиболее часто встречаются и используются в дальнейшем [1–3].

В содержательном плане алгебраическую систему M можно рассматривать как некоторую универсальную форму, объединяющую в себе (в качестве основных компонент) непустое множество M и совокупности алгебраических операций \mathfrak{F} и предикатов \mathfrak{P} , определенных на этом множестве, в одно целое. Если среди операций системы имеются 0-местные операции, то из них образуют отдельную компоненту \mathfrak{C} . Так как каждую 0-местную операцию можно рассматривать, как некоторый (выделенный) элемент множества M , то эта четвертая составляющая алгебраической системы представляет собой множество выделенных из M элементов. Формальным отражением этих представлений является запись

$$M = \langle M; \mathfrak{F}; \mathfrak{P}; \mathfrak{C} \rangle$$

Так как в математике традиционно рассматриваются алгебраические системы с конечными множествами алгебраических операций, предикатов и выделенных элементов, то в дальнейшем будем полагать, что

$$\mathfrak{F} = \{f_1^{m_1}; f_2^{m_2}; \dots; f_k^{m_k}\}; \mathfrak{P} = \{p_1^{n_1}; p_2^{n_2}; \dots; p_l^{n_l}\}; \mathfrak{C} = \{a_1; a_2; \dots; a_r\},$$

и систему M будем записывать в виде:

$$M = \langle M; f_1^{m_1}; f_2^{m_2}; \dots; f_k^{m_k}; p_1^{n_1}; p_2^{n_2}; \dots; p_l^{n_l}; a_1; a_2; \dots; a_r \rangle.$$

В этой записи для алгебраической системы предполагается, что нижний индекс i и верхний индекс m_i указывают, соответственно, номер и местность (арность) операции $f_i^{m_i}$, $i = 1; 2; \dots; k$. Аналогично трактуются и обозначения $p_j^{n_j}$ ($j = 1; 2; \dots; l$) для предикатов этой системы. Множество M называется основным множеством или носителем алгебраической системы M , а операции $f_i^{m_i}$ и предикаты $p_j^{n_j}$ ($i = 1; 2; \dots; k$; $j = 1; 2; \dots; l$) ее основными операциями и основными предикатами.

С целью обеспечения возможностей сравнения алгебраических систем между собой и изучения семейств алгебраических систем, обладающих теми или иными признаками “внешней похожести”, вводятся понятия сигнатуры и алгебраической системы данной сигнатуры.

Под сигнатурой понимается упорядоченный набор $\sigma = \langle \mathcal{F}; \mathcal{P}; \mathcal{C} \rangle$, где:

$\mathcal{F} = \{F_1^{m_1}; F_2^{m_2}; \dots; F_k^{m_k}\}$ – множество символов (имен) для алгебраических операций или множество функциональных символов;

$\mathbf{P} = \{P_1^{n_1}; P_2^{n_2}; \dots; P_k^{n_l}\}$ – множество символов (имен) для предикатов или множество предикатных символов;

$\mathbf{C} = \{c_1; c_2; \dots; c_r\}$ – множество имен для выделенных элементов или множество константных символов.

Пусть M – произвольное непустое множество.

Через $\mathbf{F}^{(m)}(M)$ будем обозначать далее множество всех m -местных алгебраических операций, которые могут быть определены на множестве M . Положим $\mathbf{F}(M) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbf{F}^{(m)}(M)$.

Аналогично, через $\mathbf{P}^{(n)}(M)$ обозначим множество всех n -местных предикатов, которые могут быть заданы на этом множестве, и будем полагать, что $\mathbf{P}(M) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}^{(n)}(M)$. Заметим, что $\mathbf{P}^{(0)}(M) = \{0; 1\}$.

Определение 1. Интерпретацией сигнатуры σ на множестве M называется отображение

$\varphi: \{F_i^{m_i} / i = 1; 2; \dots; k\} \cup \{P_j^{n_j} / j = 1; 2; \dots; l\} \cup \{c_s / s = 1; 2; \dots; r\} \rightarrow \mathbf{F}(M) \cup \mathbf{P}(M) \cup M$ такое, что

$$\begin{aligned} \varphi(F_i^{m_i}) &= {}^\varphi F_i^{m_i} \in \mathbf{F}^{(m_i)}(M); \quad \varphi(P_j^{n_j}) = {}^\varphi P_j^{n_j} \in \mathbf{P}^{(n_j)}(M); \quad \varphi(c_s) = {}^\varphi c_s \in M \\ i &= 1; 2; \dots; k, \quad j = 1; 2; \dots; l, \quad s = 1; 2; \dots; r. \end{aligned}$$

Положим:

$${}^\varphi \sigma = \langle {}^\varphi F_1^{m_1}; {}^\varphi F_2^{m_2}; \dots; {}^\varphi F_k^{m_k}; {}^\varphi P_1^{n_1}; {}^\varphi P_2^{n_2}; \dots; {}^\varphi P_l^{n_l}; {}^\varphi c_1; {}^\varphi c_2; \dots; {}^\varphi c_r \rangle.$$

Определение 2. Алгебраической системой сигнатуры σ называется упорядоченная пара $\langle M; {}^\varphi \sigma \rangle$, где M – непустое множество и φ – интерпретация сигнатуры σ на этом множестве.

Заметим, что

${}^\varphi \mathbf{F} = \{{}^\varphi F_i^{m_i} / i = 1; 2; \dots; k\}; \quad {}^\varphi \mathbf{P} = \{{}^\varphi P_j^{n_j} / j = 1; 2; \dots; l\}; \quad {}^\varphi \mathbf{C} = \{{}^\varphi c_s / s = 1; 2; \dots; r\}$ – совокупности алгебраических операций и предикатов, определенных на множестве M , и выделенных элементов этого множества, соответственно, т. е. определение 2 вполне согласуется с вышеуказанными содержательными представлениями об алгебраических системах.

Отметим также, что любая алгебраическая система

$$\mathbf{M} = \langle M; f_1^{m_1}; f_2^{m_2}; \dots; f_k^{m_k}; p_1^{n_1}; p_2^{n_2}; \dots; p_l^{n_l}; a_1; a_2; \dots; a_r \rangle$$

может рассматриваться как алгебраическая система сигнатуры σ , если интерпретацию φ определить по правилам:

$${}^\varphi F_i^{m_i} = f_i^{m_i}; \quad {}^\varphi P_j^{n_j} = p_j^{n_j}; \quad {}^\varphi c_s = a_s, \quad (i = 1; 2; \dots; k, \quad j = 1; 2; \dots; l, \quad s = 1; 2; \dots; r).$$

Если $t = t(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $A = A(x_1; x_2; \dots; x_n)$ – терм и формула сигнатуры σ , то через ${}^\varphi t = {}^\varphi t(x_1; x_2; \dots; x_n)$ и ${}^\varphi A = {}^\varphi A(x_1; x_2; \dots; x_n)$ будем

обозначать, соответственно, термальную операцию и формульный предикат, полученные из t и A при интерпретации φ .

Формула A сигнатуры σ , не содержащая свободных предметных переменных, называется замкнутой формулой или предложением этой сигнатуры. Таким образом, формульный предикат ${}^{\varphi}A$ является в этом случае истинным или ложным высказыванием о свойствах алгебраической системы $M = \langle M; {}^{\varphi}\sigma \rangle$.

Под сложностью $S(t)$ терма t будем понимать номер наименьшего шага, на котором этот терм впервые появляется в процессе индуктивного определения множества термов сигнатуры σ .

Пусть $a_1; a_2; \dots; a_n \in M$. Запись $M \vDash {}^{\varphi}A(a_1; a_2; \dots; a_n)$ будет означать, что формульный предикат ${}^{\varphi}A(x_1; x_2; \dots; x_n)$ при значениях переменных $x_1; x_2; \dots; x_n$, равных, соответственно, $a_1; a_2; \dots; a_n$, принимает на алгебраической системе $M = \langle M; {}^{\varphi}\sigma \rangle$ истинное значение.

Определение 3. Пусть $M_1 = \langle M_1; {}^{\varphi}\sigma \rangle$ и $M_2 = \langle M_2; {}^{\psi}\sigma \rangle$ – алгебраические системы сигнатуры σ и $\Phi: M_1 \rightarrow M_2$ – биективное отображение основного множества M_1 системы M_1 на основное множество M_2 системы M_2 . Отображение Φ называется изоморфным отображением алгебраической системы M_1 на алгебраическую систему M_2 , если выполняются следующие условия:

- 1) $\Phi({}^{\varphi}F_i^{m_i}(a_1; a_2; \dots; a_{m_i})) = {}^{\psi}F_i^{m_i}(\Phi(a_1); \Phi(a_2); \dots; \Phi(a_{m_i}))$;
- 2) $((b_1; b_2; \dots; b_{n_j}) \in {}^{\varphi}P_j^{n_j}) \Leftrightarrow ((\Phi(b_1); \Phi(b_2); \dots; \Phi(b_{n_j})) \in {}^{\psi}P_j^{n_j})$;
- 3) $\Phi({}^{\varphi}c_s) = {}^{\psi}c_s$

для любых $F_i^{m_i}; P_j^{n_j}; c_s \in \sigma$, любых $(a_1; a_2; \dots; a_{m_i}) \in M_1$ и любых $(b_1; b_2; \dots; b_{n_j}) \in M_1$, ($i = 1; 2; \dots; k$, $j = 1; 2; \dots; l$, $s = 1; 2; \dots; r$).

Если существует изоморфное отображение системы M_1 на систему M_2 , то эти системы называются изоморфными (символически $M_1 \cong M_2$).

Как отмечается в [1]: “Теория алгебраических систем изучает преимущественно лишь те свойства алгебраических систем, которые сохраняются при изоморфизме и которые, таким образом, одинаковы у всех изоморфных систем. Эти свойства часто называют абстрактными свойствами систем. Считается, что абстрактные свойства системы – это свойства главных операций и предикатов системы, не зависящие от природы элементов, слагающих систему” [1, с. 51].

Формальным отражением этого положения является следующее утверждение, играющее в математике концептуальную роль [1–3].

Теорема 1. Пусть Φ – изоморфизм алгебраической системы $M_1 = \langle M_1; {}^\varphi\sigma \rangle$ на алгебраическую систему $M_2 = \langle M_2; {}^\psi\sigma \rangle$ и $A = A(x_1; x_2; \dots; x_n)$ – произвольная формула сигнатуры σ .

Тогда

$$(M_1 \vDash {}^\varphi A(a_1; a_2; \dots; a_n)) \Leftrightarrow (M_2 \vDash {}^\psi A(\Phi(a_1); \Phi(a_2); \dots; \Phi(a_n)))$$

для любых значений $a_1; a_2; \dots; a_n \in M_1$ переменных $x_1; x_2; \dots; x_n$, соответственно. В частности, если A – предложение сигнатуры σ , то

$$(M_1 \vDash {}^\varphi A) \Leftrightarrow (M_2 \vDash {}^\psi A).$$

Согласно теореме 1, изоморфным алгебраическим системам данной сигнатуры присущи одни и те же структурные свойства, выражимые синтаксическими средствами формального языка исчисления предикатов и функций этой сигнатуры. Такие свойства, в связи с их инвариантностью относительно изоморфных отображений, были названы (как отмечалось выше) абстрактными, а наличие этой инвариантности, как характеризация особенностей проявления семантических возможностей этого формального языка, может быть названо принципом абстрактности.

Отметим, что теорема 1 сыграла определяющую роль в принятии одной из наиболее фундаментальных концепций современной математики – концепции изучения алгебраических систем с точностью до изоморфизма.

В данной работе: определяются алгебраические системы бинарных отношений, заданных на конечном n -элементном множестве, и характеристических матриц n -го порядка; доказывается, что эти системы являются изоморфными и на основе этого изоморфизма выявляется содержательная сущность принципа абстрактности формального языка исчисления предикатов и функций данной сигнатуры; приводится, в частности, характеризация первичных свойств бинарных отношений в понятийно-терминологической базе теории матриц и рассматриваются возможности использования этой характеризации в прикладном аспекте.

2. Характеристические матрицы. Логические операции и отношения на множестве характеристических матриц.

Пусть $E = \{0; 1\}$. Под характеристической матрицей n -го порядка будем понимать матрицу $A = \|\alpha_{ij}\|_n$, для которой $\alpha_{ij} \in E$, $i = 1; 2; \dots; n$,

$j = 1; 2; \dots; n$. К примеру, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ является характеристи-

ческой матрицей 3-го порядка.

Множество всех характеристических матриц n -го порядка будем обозначать через $M_n(E)$.

С целью использования характеристических матриц для описания операций над соответствиями (над бинарными отношениями, в частности) определяются различные логические аналоги традиционных операций над числовыми матрицами, в частности, аналоги бинарных операций сложения и умножения квадратных числовых матриц одного и того же порядка.

Рассмотрим сначала операции $\&$ и \vee – конъюнкция и дизъюнкция характеристических матриц, как логические аналоги операции сложения числовых матриц. Пусть $T; S \in M_n(E)$ и $T = \|\tau_{ij}\|_n$; $S = \|s_{ij}\|_n$. Положим:

$$1) T \& S = \|\tau_{ij} \& s_{ij}\|_n;$$

$$2) T \vee S = \|\tau_{ij} \vee s_{ij}\|_n.$$

Определения 1) и 2) показывают, что операции \vee и $\&$ над характеристическими матрицами одинаковой размерности выполняются поэлементно, посредством применения к элементам этих матриц, стоящих на одинаковых местах, логических операций \vee и $\&$.

Пусть, к примеру,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, в соответствии с определением логических операций $\&$ и \vee , будем иметь:

$$T \& S = \begin{pmatrix} 1\&1 & 1\&0 & 0\&0 & 0\&1 \\ 0\&1 & 1\&1 & 1\&0 & 0\&1 \\ 1\&0 & 0\&1 & 0\&0 & 1\&1 \\ 0\&1 & 0\&0 & 1\&1 & 1\&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T \vee S = \begin{pmatrix} 1 \vee 1 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 & 0 \vee 1 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 & 1 \vee 0 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 0 & 1 \vee 1 \\ 0 \vee 1 & 0 \vee 0 & 1 \vee 1 & 1 \vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Логическим аналогом бинарной операции умножения квадратных числовых матриц одного и того же порядка является бинарная операция “•” – логического умножения характеристических матриц, определяемая на множестве $M_n(E)$ по следующим правилам.

Пусть $T; S \in M_n(E)$ и $T = \|\tau_{ij}\|_n; S = \|s_{ij}\|_n$. Тогда

3) $T \bullet S = \|\gamma_{ij}\|_n$, где $\gamma_{ij} = \vee_{k=1}^n (\tau_{ik} \& s_{kj})$, $i = 1; 2; \dots; m$, $j = 1; 2; \dots; n$.

Таким образом, для нахождения произведения $T \bullet S$ характеристических матриц T и S одного и того же порядка эти матрицы умножаются, следуя обычному правилу умножения числовых матриц, но при этом при нахождении сумм произведений элементов строк матрицы T на соответствующие элементы столбцов матрицы S , арифметические операции сложения и умножения заменяются на их логические аналоги – дизъюнкцию и конъюнкцию, соответственно.

В частности, если

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то, в соответствии с определением 3), получим:

$$\begin{aligned} T \bullet S &= \begin{pmatrix} (0 \& 1) \vee (1 \& 0) \vee (1 \& 1) & (0 \& 1) \vee (1 \& 1) \vee (1 \& 0) & (0 \& 1) \vee (1 \& 1) \vee (1 \& 0) \\ (0 \& 1) \vee (0 \& 0) \vee (1 \& 1) & (0 \& 1) \vee (0 \& 1) \vee (1 \& 0) & (0 \& 1) \vee (0 \& 1) \vee (1 \& 0) \\ (0 \& 1) \vee (1 \& 0) \vee (0 \& 1) & (0 \& 1) \vee (1 \& 1) \vee (0 \& 0) & (0 \& 1) \vee (1 \& 1) \vee (0 \& 0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \vee 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \vee 0 & 0 \vee 1 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \vee 1 & 0 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 1 \vee 0 & 0 \vee 1 \vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим, что все известные свойства операций сложения и умножения квадратных числовых матриц n -го порядка переносятся на их логические аналоги. В частности: нулевая матрица

$0_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(E)$ является нейтральным элементом отно-

сительно операции \vee ; единичная матрица $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(E)$

– нейтральным элементом относительно операции \bullet , определенных на множестве $M_n(E)$ по правилам 2) и 3), соответственно.

Нетрудно также проверить, что матрица $1_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(E)$

является нейтральным элементом относительно операции $\&$, определенной на множестве $M_n(E)$ по правилу 1).

Кроме указанных операций, на множестве $M_n(E)$ определяются унарная алгебраическая операция \neg , как аналог логической операции отрицания, и бинарное отношение \leqslant .

Пусть $T \in M_n(E)$ и $T = \|\tau_{ij}\|_n$. Тогда

$$4) \neg T = \|\neg\tau'_{ij}\|_n, i = 1; 2; \dots; n, j = 1; 2; \dots; n.$$

Если к примеру, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, то

$$\neg T = \begin{pmatrix} \neg 1 & \neg 0 & \neg 0 & \neg 1 \\ \neg 0 & \neg 1 & \neg 1 & \neg 0 \\ \neg 0 & \neg 1 & \neg 1 & \neg 0 \\ \neg 1 & \neg 1 & \neg 0 & \neg 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэлементный характер выполнения операций \vee ; $\&$; и \neg над характеристическими матрицами позволяет заключить, что эти операции удовлетворяют свойствам:

$$4.1) \neg(\neg A) = A;$$

$$4.2) \neg(A \& B) = \neg A \vee \neg B;$$

$$4.3) \neg(A \vee B) = \neg A \& \neg B,$$

являющихся для характеристических матриц аналогами закона двойного отрицания и законов де Моргана алгебры высказываний.

Пусть $T; S \in M_n(E)$, $T = \|\tau_{ij}\|_n$; $S = \|s_{ij}\|_n$. Тогда

$$5) (T \leqslant S) \Leftrightarrow \&_{j=1}^n (\&_{i=1}^m ((\tau_{ij} \rightarrow s_{ij}) = 1)).$$

Рассмотрим соответствующий пример. Пусть $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, т. е. $T; S \in M_4(E)$. Нетрудно видеть, что для этих мат-

риц условие правой части эквивалентности в определении 5) выполняется, т. е. $T \leqslant S$.

Нетрудно видеть, что в определении 5) – отношения \leqslant , условие $\&_{j=1}^n (\&_{i=1}^m ((\tau_{ij} \rightarrow s_{ij}) = 1))$ равносильно условию $\&_{j=1}^n (\&_{i=1}^m (\tau_{ij} \leq s_{ij}))$.

Легко проверяется, что бинарное отношение “ \leqslant ” на множестве $M_n(E)$ является отношением частичного порядка, т. е. является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным:

- 5.1) $A \leqslant A$;
- 5.2) если $A \leqslant B$ и $B \leqslant A$, то $A = B$;
- 5.3) если $A \leqslant B$ и $B \leqslant C$, то $A \leqslant C$

для любых характеристических матриц $A; B; C \in M_n(E)$.

Отметим также, что в частично упорядоченном множестве $\langle M_n(E); \leqslant \rangle$ характеристические матрицы 0_n и 1_n являются наименьшим и наибольшим элементами, соответственно.

Как и на множестве числовых матриц, на множестве $M_n(E)$ – характеристических матриц n -го порядка вводится унарная операция “ T ” – транспонирования.

Пусть, к примеру, $S \in M_4(E)$ и $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда

$$S^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Алгебраическая система характеристических матриц.

Нетрудно видеть, что для любого конкретного $n \in N$ множество $M_n(E)$ замкнуто относительно операций $\vee; \&; \bullet; \neg; {}^T$.

Замкнутость множества $M_n(E)$ относительно этих операций обуславливает возможность определения алгебраической системы

$$M_n(E) = \langle M_n(E); \vee; \&; \bullet; \neg; {}^T; \leqslant; 0_n; E_n; 1_n \rangle$$

сигнатуры

$$\sigma = \langle F_1^2; F_2^2; F_3^2; F_4^1; F_5^1; P_1^2; c_1; c_2; c_3 \rangle,$$

при этом предполагается, что интерпретация сигнатурных символов из σ на множестве $M_n(E)$ осуществляется следующим образом:

– двухместным функциональным символам $F_1^2; F_2^2; F_3^2$ ставятся в соответствие операции $\vee; \&; \bullet$;

- одноместным функциональным символам $F_4^1; F_5^1$ – операции $\neg; {}^T$;
- одноместному предикатному символу P_1^2 – бинарное отношение \leqslant ;
- символам $c_1; c_2; c_3$ выделенных элементов – матрицы $0_n; E_n; 1_n$, соответственно.

Для дальнейшего обозначим эту интерпретацию через μ_1 .

4. Алгебраическая система бинарных отношений на конечном множестве.

Переходя к построению алгебраической системы бинарных отношений, заданных на непустом множестве M , напомним ряд базовых понятий и конструкций, связанных с понятием бинарного отношения.

Пусть $M = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ – конечное n -элементное множество и $M^2 = M \times M$ декартов квадрат этого множества. Подмножества множества M^2 называются бинарными отношениями на множестве M . Таким образом, булеан $B(M^2)$ множества M^2 является множеством всех бинарных отношений, определенных на множестве M . Простейшим примером бинарного отношения на множестве M является отношение

$$\Phi_M = \{(x; x) / x \in M\},$$

которое называется “диагональю” множества M .

На булеане $B(M^2)$ обычным образом определяются бинарные теоретико-множественные операции: “ \cup ” – объединения; “ \cap ” – пересечения; “ \setminus ” – разности бинарных отношений и унарная алгебраическая операция “ $\bar{}$ ” – дополнения бинарного отношения во множестве M^2 , а также двуместный предикат “ \subseteq ” – теоретико-множественного включения.

Специфика определения бинарных отношений на множестве M , как множеств упорядоченных пар, позволяет ввести на $B(M^2)$: бинарную алгебраическую операцию “ $*$ ” – композиции (или произведения) бинарных отношений и унарную алгебраическую операцию “ ${}^{-1}$ ” – взятия обратного отношения (или операцию обращения отношения).

А именно, пусть $P, Q \in B(M^2)$. Тогда:

а) композицией (произведением) бинарных отношений P и Q называется бинарное отношение $P * Q$, определяемое на множестве M по правилу:

$$(\forall x, y \in M)((\langle x; y \rangle \in P * Q) \Leftrightarrow (\exists z \in M)(\langle \langle x; z \rangle \in P \& (\langle z; y \rangle \in Q))),$$

б) бинарное отношение P^{-1} , заданное на множестве M по правилу:

$$(\forall x, y \in M)((\langle x; y \rangle \in P^{-1}) \Leftrightarrow (\langle y; x \rangle \in P)),$$

называется обратным к бинарному отношению P .

Нетрудно видеть, что для любого $P \in B(M^2)$ имеют место равенства: $P \cup \emptyset = P$, $P \cap M^2 = P$ и $P * \Phi_M = \Phi_M * P = P$, т. е. бинарные отношения \emptyset, M^2 и Φ_M являются нейтральными элементами относительно операций \cup ; \cap и $*$, соответственно. Очевидно также, что

$$(\forall P, Q \in B(M^2))(P \setminus Q = P \cap \bar{Q}),$$

т. е. операция “\” – разности отношений, как элементов из $B(M^2)$, может быть определена через операции \cap и $\bar{}$.

Отмеченная выше универсальная роль бинарных отношений \emptyset, M^2 и Φ_M как нейтральных элементов относительно соответствующих операций позволяет считать их выделенными элементами множества $B(M^2)$.

Исходя из вышеизложенного, получаем, что множество $B(M^2)$ вместе с определенными на нем алгебраическими операциями $\cup; \cap$ и $*; \bar{}; {}^{-1}$, отношением \subseteq и выделенными элементами \emptyset, M^2 и Φ_M , является алгебраической системой.

$$\mathbf{B}(M^2) = \langle B(M^2); \cup; \cap; *; \bar{}; {}^{-1}; \subseteq; \emptyset; M^2; \Phi_M \rangle$$

сигнатуры

$$\sigma = \langle F_1^2; F_2^2; F_3^2; F_4^1; F_5^1; P_1^2; c_1; c_2; c_3 \rangle,$$

если полагать, что интерпретация μ_2 символов этой сигнатуры задается на множестве $B(M^2)$ по следующим правилам:

- двухместным функциональным символам $F_1^2; F_2^2; F_3^2$ ставятся в соответствие операции $\cup; \cap$ и $*$, т. е. $\mu_2 F_1^2 = \cup; \mu_2 F_2^2 = \cap; \mu_2 F_3^2 = *$;
- одноместным функциональным символам $F_4^1; F_5^1$ – операции $\bar{}; {}^{-1}$, соответственно, т. е. $\mu_2 F_4^1 = \bar{}; \mu_2 F_5^1 = {}^{-1}$;
- одноместному предикатному символу P_1^2 – бинарное отношение \subseteq ; т. е. $\mu_2 P_1^2 = \subseteq$;
- константным символам $c_1; c_2; c_3$ – бинарные отношения $\emptyset; M^2; \Phi_M$, соответственно, т. е. $\mu_2 c_1 = \emptyset; \mu_2 c_2 = M^2; \mu_2 c_3 = \Phi_M$.

5. Изоморфизм алгебраических систем $\mathbf{B}(M^2)$ и $\mathbf{M}_n(E)$.

Теорема 2. Пусть $M = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ – произвольное конечное n -элементное множество. Алгебраические системы $\mathbf{B}(M^2) = \langle B(M^2); \mu_2 \sigma \rangle$ и $\mathbf{M}_n(E) = \langle M_n(E); \mu_1 \sigma \rangle$ являются изоморфными.

Доказательство. В соответствии с определением 3 изоморфизма алгебраических систем, для доказательства того, что $B(M^2) \cong M_n(E)$ нужно определить такое биективное отображение $\varphi: B(M^2) \rightarrow M_n(E)$ основного множества $B(M^2)$ первой из этих систем на основное множество $M_n(E)$ второй, что:

1. $(\forall P; Q \in B(M^2))(\varphi(P \cup Q) = \varphi(P) \vee \varphi(Q));$
2. $(\forall P; Q \in B(M^2))(\varphi(P \cap Q) = \varphi(P) \& \varphi(Q));$
3. $(\forall P; Q \in B(M^2))(\varphi(P * Q) = \varphi(P) * \varphi(Q));$
4. $(\forall P \in B(M^2))(\varphi(\bar{P}) = \neg \varphi(P));$
5. $(\forall P \in B(M^2))(\varphi(P^{-1}) = (\varphi(P))^T);$
6. $(\forall P \in B(M^2))((P \subseteq Q) \Leftrightarrow (\varphi(P) \leq \varphi(Q)));$
7. $\varphi(\emptyset) = 0_n;$
8. $\varphi(M^2) = 1_n;$
9. $\varphi(\Phi_M) = E_n.$

Соответствие φ из $B(M^2)$ в $M_n(E)$ определим следующим образом:

$$(\forall P \in B(M^2))(\varphi(P) = \|\tau_{ij}\|_n), \quad (1)$$

где $\tau_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i P a_j; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad i, j \in \{1; 2; \dots; n\}.$

К примеру, если $n = 4$;

$$P = \{(a_1; a_3); (a_1; a_4); (a_2; a_1)(a_2; a_4)(a_3; a_2)(a_4; a_1)(a_4; a_3)(a_4; a_4)\},$$

то $\varphi(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Нетрудно убедиться в том, что соответствие φ является биективным отображением $B(M^2)$ на $M_n(E)$. Осуществляя эту проверку по схеме, предполагающей доказательство того, что соответствие φ является:

- 1) отображением;
- 2) сюръективным отображением;
- 3) инъективным отображением,

покажем, к примеру, что отображение φ – инъективно. Действительно, пусть $P; Q \in B(M^2)$ и $P \neq Q$. Тогда существуют такие $a_r; a_s \in M$, что имеет место одна из возможностей:

- 3.1) $a_r P a_s$ и $\neg(a_r Q a_s);$

3.2) $\neg(a_r Pa_s)$ и $a_r Q a_s$,

$r; s \in \{1; 2; \dots; n\}$.

В силу симметрии этих возможностей, будем считать, что реализуется первая из них. Тогда, полагая, что $\varphi(P) = \|\alpha_{ij}\|_n$ и $\varphi(Q) = \|\beta_{ij}\|_n$, получим, согласно определению (1), что $\alpha_{rs} = 1$ и $\beta_{rs} = 0$, т. е. $\|\alpha_{ij}\|_n \neq \|\beta_{ij}\|_n$ и, следовательно, $\varphi(P) \neq \varphi(Q)$.

Покажем теперь, что отображение φ “сохраняет” операции. Проведим, к примеру, равенство

$$\varphi(P \cap Q) = \varphi(P) \& \varphi(Q). \quad (2)$$

Предположим, что $\varphi(P \cap Q) = \|\gamma_{ij}\|_n$; $\varphi(P) = \|p_{ij}\|_n$; $\varphi(Q) = \|q_{ij}\|_n$.

Для доказательства равенства (2) достаточно показать, что

$$\gamma_{ij} = p_{ij} \& q_{ij} \quad (3)$$

для любых $i; j \in \{1; 2; \dots; n\}$.

Для γ_{ij} из равенства (3) могут иметь место два случая:

a) $\gamma_{ij} = 1$;

б) $\gamma_{ij} = 0$.

Рассмотрим отдельно каждый из них.

а) Если $\gamma_{ij} = 1$, то $a_i(P \cap Q)a_j$, т. е. $(a_i; a_j) \in P \cap Q$. Следовательно $(a_i; a_j) \in P$ и $(a_i; a_j) \in Q$. Отсюда получаем, согласно определению (1) соответствия φ , что $p_{ij} = 1$ и $q_{ij} = 1$, т. е. $p_{ij} \& q_{ij} = 1$. Таким образом, если имеет место случай а), то равенство (3) действительно выполняется.

б) Пусть теперь $\gamma_{ij} = 0$, тогда $\neg(a_i(P \cap Q)a_j)$, т. е. $(a_i; a_j) \notin P \cap Q$. В соответствии с определением теоретико-множественной операции \cap , в этом случае могут иметь место три подслучаи:

6.1) $a_i Pa_j$ и $\neg(a_i Q a_j)$;

6.2) $\neg(a_i Pa_j)$ и $a_i Q a_j$;

6.3) $\neg(a_i Pa_j)$ и $\neg(a_i Q a_j)$.

Нетрудно видеть, что в каждом из этих подслучаев будем иметь $p_{ij} \& q_{ij} = 0$, т. е. и в случае б) равенство (3) будет выполняться.

Проверка “сохранности” остальных операций, отношений и выделенных элементов осуществляется аналогично.

Наличие изоморфизма φ между алгебраическими системами $B(M^2)$ и $M_n(E)$ позволяет вместо оперирования с бинарными отношениями

$P \in B(M^2)$ оперировать с соответствующими характеристическими матрицами $\varphi(P) \in M_n(E)$.

В частности, теорема 1 применительно к алгебраическим системам $B(M^2)$, $M_n(E)$ и изоморфному отображению φ , означает, что если некоторое конкретное свойство S (которым могут обладать бинарные отношения, определенные на множестве M) допускает, как одноместный предикат, запись в виде формулы $S = S(x)$ сигнатуры σ с одной свободной переменной, то эта формула, при интерпретациях μ_2 и μ_1 сигнатуры σ на множествах $B(M^2)$ и $M_n(E)$, соответственно, будет истинной на системе $B(M^2)$ при $x = P$ тогда и только тогда, когда она будет истинной на системе $M_n(E)$ при $x = \varphi(P)$.

Другими словами, бинарное отношение $P \in B(M^2)$ будет обладать содержательным аналогом свойства S , представленном “на языке” основных операций, отношений и выделенных элементов системы $B(M^2)$ тогда и только тогда, когда характеристическая матрица $\varphi(P) \in M_n(E)$ будет обладать содержательным аналогом этого свойства, представленном в терминах соответствующих операций, отношений и выделенных элементов системы $M_n(E)$.

Следует подчеркнуть, что содержательные истолкования вышеописанных свойств S значительно проще получить в терминах теоретико-множественных операций и отношений. Но подобные истолкования носят характер более теоретический, чем прикладной, так как практическая проверка теоретико-множественных аналогов этих свойств, даже при сравнительно небольших значениях n , сопряжена с определенными затруднениями.

В то же время, алгебраическая система $M_n(E)$ представляет собой “наиболее чистую” (т. е. не зависящую от природы элементов множества M) и наиболее удобную в прикладном аспекте реализацию системы бинарных отношений, заданных на множестве M , и алгоритмов оперирования с ними.

В первую очередь это связано с тем, что строение характеристической матрицы, соответствующей данному бинарному отношению (т. е. особенности расстановки нулей и единиц в ее столбцах и строках), наглядно отражает специфику тех или иных свойств, присущих этому отношению и аккумулирует в себе возможности их эффективного распознавания.

Кроме того, характеристические матрицы и технологии оперирования с ними, полученные в результате матричной реализации бинарных отношений и алгоритмов выполнения операций над этими отношениями

ми, являются наиболее удобным средством для введения их в память компьютера и компьютерной обработки.

Таким образом, алгебраическая система $B(M^2)$ более приемлема в теоретических рассмотрениях, а система $M_n(E)$ – в прикладных.

6. Характеризация первичных свойств бинарных отношений.

Проиллюстрируем вышеупомянутые положения пункта 5 на примерах характеризации первичных свойств бинарных отношений. Говоря о первичных свойствах, мы имеем ввиду свойства рефлексивности, симметричности, связности, транзитивности и т. д. бинарных отношений. Эти свойства подобны атомам, различные комбинации которых определяют алгебраические, порядковые и многие другие структурные свойства алгебраических систем.

В частности, присутствие среди основных предикатов алгебраической системы бинарного предиката P , обладающего свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности обуславливает разбиение носителя этой системы на непересекающиеся классы и т. п. Напомним определения этих свойств, записав их на языке прикладного исчисление предикатов (смотри, к примеру, [4]).

Бинарное отношение P , заданное на непустом множестве M называется:

- 1) рефлексивным, если $(\forall x \in M)(xPx)$;
- 2) иррефлексивным, если $(\forall x \in M)(\neg(xPx))$;
- 3) симметричным, если $(\forall x \in M)(\forall y \in M)(xPy \Rightarrow yPx)$;
- 4) антисимметричным, если $(\forall x \in M)(\forall y \in M)((xPy) \& (yPx) \Rightarrow (x = y))$;
- 5) транзитивным, если $(\forall x \in M)(\forall y \in M)(\forall z \in M)((xPy) \& (yPz) \Rightarrow (xPz))$;
- 6) связным, если $(\forall x \in M)(\forall y \in M)((x \neq y) \Rightarrow (xPy) \vee (yPx))$.

Покажем, что свойства 1) – 6), как, соответственно, формульные одноместные предикаты $S_1(x)$ - $S_6(x)$ сигнатуры $\sigma = \langle F_1^2; F_2^2; F_3^2; F_4^1; F_5^1; P_1^2; c_1; c_2; c_3 \rangle$, могут быть выражены следующими формулами этой сигнатуры:

$$\begin{aligned} S_1(x) &= P_1^2(c_3; x); \\ S_2(x) &= (F_2^2(c_3; x) = c_1); \\ S_3(x) &= (F_5^1(x) = x); \\ S_4(x) &= P_1^2(F_2^2(x; F_5^1(x)); c_3); \\ S_5(x) &= P_1^2(F_3^2(x; x); x); \\ S_6(x) &= P_1^2(F_2^2(c_2; F_4^1(c_3)); F_1^2(x; F_5^1(x))). \end{aligned}$$

При интерпретации μ_2 формулы $S_1(x) - S_6(x)$ сигнатуры σ становятся производными (формульными) одноместными предикатами $\mu_2 S_1(x) - \mu_2 S_6(x)$ сигнатуры σ , определенными на носителе $B(M^2)$ системы $B(M^2)$. Определим, для примера, формульные предикаты $\mu_2 S_4(x)$ и

$\mu_2 S_6(x)$. Для этого найдем предварительно термальные операции $\mu_2 t_1(x); \mu_2 t_2(x)$ и $\mu_2 t_3(x); \mu_2 t_4(x)$, которые соответствуют термам $t_1(x) = F_2^2(x; F_5^1(x)); t_2(x) = c_3$ и $t_3(x) = F_2^2(c_2; F_4^1(c_3)); t_4(x) = F_1^2(x; F_5^1(x))$, входящим в формулы $S_4(x)$ и $S_6(x)$, соответственно.

Находя сложность $S(t_1)$ терма $t_1(x)$, будем иметь:

$$t_1(x) = \underbrace{F_2^2\left(\underbrace{x}_{0}; \underbrace{F_5^1\left(\underbrace{x}_{0}\right)}_{1}\right)}_{2}$$

т. е. $S(t_1) = 2$. Таким образом, подтермами терма $t_1(x)$ являются:

- подтерм $t'_1(x) = x$, сложности 0;
- подтерм $t'_2(x) = F_5^1(x)$, сложности 1;
- подтерм $t'_3(x) = F_2^2(x; F_5^1(x))$, сложности 2, совпадающий с термом $t_1(x)$.

Отсюда, согласно определению термальных операций [5, 6], последовательно получаем:

$$\mu_2 t'_1(x) = x; \quad \mu_2 t'_2(x) = \mu_2 F_5^1(x) = x^{-1};$$

$$\mu_2 t'_3(x) = \mu_2 F_2\left(\mu_2 t'_1(x); \mu_2 t'_2(x)\right) = \mu_2 F_2(x; x^{-1}) = x \cap x^{-1}.$$

Так как $t'_3(x) = t_1(x)$, то $\mu_2 t_1(x) = x \cap x^{-1}$.

Так как $S(t_2(x)) = S(c_3) = 0$, то $\mu_2 t_2(x) = \mu_2 c_3 = \Phi_M$.

Отсюда, в соответствии с индуктивным определением формульных предикатов сигнатуры σ [5; 6], следует, что

$$\mu_2 S_4 = \mu_2 P_1^2(\mu_2 t_1(x); \mu_2 t_2(x)) = ((x_1 \cap x_1^{-1}) \subseteq \Phi_M). \quad (4)$$

Аналогичным образом находим, что $S(t_3(x)) = S(t_4(x)) = 2$ и

$$\mu_2 t_3(x) = (M^2 \cap \bar{\Phi}_M); \quad \mu_2 t_4(x) = (x \cup x^{-1}). \quad (5)$$

Из представления (5) термальных операций $\mu_2 t_3(x)$ и $\mu_2 t_4(x)$ получаем:

$$\mu_2 S_6(x) = \mu_2 P_1^2(\mu_2 t_3(x); \mu_2 t_4(x)) = ((M^2 \cap \bar{\Phi}_M) \subseteq (x \cup x^{-1})). \quad (6)$$

Цепочки равенств (4) и (6) показывают, что

$$\mu_2 S_4(x) = ((x_1 \cap x_1^{-1}) \subseteq \Phi_M);$$

$$\mu_2 S_6(x) = ((M^2 \cap \bar{\Phi}_M) \subseteq (x \cup x^{-1})).$$

Подобным же образом можно получить, что

$$\begin{aligned}\mu_2 S_1(x) &= (\Phi_M \subseteq x); \\ \mu_2 S_2(x) &= ((\Phi_M \cap x) = \emptyset); \\ \mu_2 S_3(x) &= (x^{-1} = x); \\ \mu_2 S_5(x) &= ((x * x) \subseteq x).\end{aligned}$$

Докажем теперь, что формульные предикаты $S_1(x) - S_6(x)$ выражают при $x = P$, ($P \in B(M^2)$) свойства рефлексивности, иррефлексивности, симметричности, транзитивности и связности отношения P , соответственно.

Предложение 1. Пусть P – произвольное бинарное отношение, определенное на непустом множестве M . Тогда

- 1) (P – рефлексивно);
- 2) ($B(M^2) \models \mu_2 S_2(P)$) \Leftrightarrow (P – иррефлексивно);
- 3) ($B(M^2) \models \mu_2 S_3(P)$) \Leftrightarrow (P – симметрично);
- 4) ($B(M^2) \models \mu_2 S_4(P)$) \Leftrightarrow (P – антисимметрично);
- 5) ($B(M^2) \models \mu_2 S_5(P)$) \Leftrightarrow (P – транзитивно);
- 6) ($B(M^2) \models \mu_2 S_6(P)$) \Leftrightarrow (P – связано).

Доказательство. Проведем доказательства равносильностей 4) и 6).

4) \Rightarrow Пусть $B(M^2) \models \mu_2 S_4(P)$, т. е. $B(M^2) \models ((P \cap P^{-1}) \subseteq \Phi_M)$. Докажем, что P – антисимметричное отношение, т. е. полагая, что $a; b \in M$; $(a; b) \in P$ и $(b; a) \in P$, покажем, что $a = b$. Действительно $((a; b) \in P) \& ((b; a) \in P) \Rightarrow ((a; b) \in P) \& ((a; b) \in P^{-1}) \Rightarrow ((a; b) \in (P \cap P^{-1}))$. (7)

Из (7), с учетом включения $(P \cap P^{-1}) \subseteq \Phi_M$, получаем, что $(a; b) \in \Phi_M$, т. е. $a = b$, так как $\Phi_M = \{(c; c) / c \in M\}$, в соответствии с определением этого отношения.

\Leftarrow Пусть бинарное отношение P – антисимметрично, т. е. для любых $a; b \in M$ из того, что $(a; b) \in P$; $(b; a) \in P$, следует, что $a = b$. Покажем, что включение $(P \cap P^{-1}) \subseteq \Phi_M$ имеет место. Действительно, пусть $a; b \in M$ и $(a; b) \in (P \cap P^{-1})$. Тогда:

$$\begin{aligned}(a; b) \in (P \cap P^{-1}) &\Rightarrow (((a; b) \in P) \& ((a; b) \in P^{-1})) \Rightarrow (((a; b) \in P) \& ((b; a) \in P)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a = b) \Rightarrow (a; b) \in \Phi_M.\end{aligned}$$

Таким образом, предполагая, что $(a; b) \in (P \cap P^{-1})$, мы показали, что $(a; b) \in \Phi_M$, что и доказывает требуемое включение.

6) \Rightarrow Пусть $B(M^2) \models \mu_2 S_6(P)$, т. е. $B(M^2) \models ((M^2 \cap \bar{\Phi}_M) \subseteq (P \cup P^{-1}))$.

Докажем, что P – связное бинарное отношение, т. е. для любых $a; b \in M$, таких, что $a \neq b$, имеет место утверждение $(a; b) \in P \vee ((b; a) \in P)$. Действительно, пусть $(a; b) \in M$ и $a \neq b$. Тогда $(a; b) \notin \Phi_M$, т. е. $(a; b) \in \bar{\Phi}_M$. Так как $(a; b) \in M^2$ и $(a; b) \in \bar{\Phi}_M$, то $(a; b) \in M^2 \cap \bar{\Phi}_M$. Отсюда, с учетом имеющегося (по условию) включения $(M^2 \cap \bar{\Phi}_M) \subseteq (P \cup P^{-1})$, получаем, что $(a; b) \in (P \cup P^{-1})$, т. е. $(a; b) \in P$ или $(a; b) \in P^{-1}$. Так как $((a; b) \in P^{-1}) \Leftrightarrow ((b; a) \in P)$, то требуемое утверждение $((((a; b) \in P) \vee \vee ((b; a) \in P))$ следует из утверждения $((((a; b) \in P) \vee ((a; b) \in P^{-1}))$.

\Leftarrow Аналогично.

Содержательные аналоги формульных предикатов $S_1(x) - S_6(x)$, при $x = P$, представленные на языке основных операций, основных предикатов и выделенных элементов алгебраических систем $M_n(E)$ и $B(M^2)$, соответственно, приведены в нижеследующей таблице.

Свойства отношений

$S_i(P)$	$B(M^2)$	$M_n(E)$	Свойство отношения P
$S_1(P)$	$\Phi_M \subseteq P$	$E_n \leqslant \varphi(P)$	Рефлексивность
$S_2(P)$	$\Phi_M \cap P = \emptyset$	$E_n \& \varphi(P) = 0_n$	Иррефлексивность
$S_3(P)$	$P^{-1} = P$	$(\varphi(P))^T = \varphi(P)$	Симметричность
$S_4(P)$	$P \cap P^{-1} \subseteq \Phi_M$	$\varphi(P) \& (\varphi(P))^T \leqslant E_n$	Антисимметричность
$S_5(P)$	$P * P \subseteq P$	$\varphi(P) * \varphi(P) \leqslant \varphi(P)$	Транзитивность
$S_6(P)$	$M^2 \cap \bar{\Phi}_M \subseteq P \cup P^{-1}$	$1_n \& E_n \leqslant \varphi(P) \vee (\varphi(P))^T$	Связность

В соответствии с инвариантностью свойств (формульных предикатов) $S_1(x) - S_6(x)$ относительно изоморфных отображений (смотри теорему 1) получаем следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть P – произвольное бинарное отношение, определенное на множестве M , и φ – изоморфное отображение системы $B(M^2)$ на систему $M_n(E)$. Тогда:

1. $(B(M^2) \models (\Phi_M \subseteq P)) \Leftrightarrow (M_n(E) \models (E_n \leqslant \varphi(P)))$;
2. $(B(M^2) \models (\Phi_M \cap P = \emptyset)) \Leftrightarrow (M_n(E) \models (E_n \& \varphi(P) = 0_n))$;
3. $(B(M^2) \models (P^{-1} = P)) \Leftrightarrow (M_n(E) \models ((\varphi(P))^T = \varphi(P)))$;
4. $(B(M^2) \models (\Phi_M \cap P = \emptyset)) \Leftrightarrow (M_n(E) \models (E_n \& \varphi(P) = 0_n))$;
5. $(B(M^2) \models (P * P \subseteq P)) \Leftrightarrow (M_n(E) \models (\varphi(P) * \varphi(P) \leqslant \varphi(P)))$;

6. $(B(M^2) \models (M^2 \cap \bar{\Phi}_M \subseteq P \cup P^{-1})) \Leftrightarrow (M_n(E) \models (1_n \& E_n \leq \varphi(P) \vee \vee (\varphi(P))^T))$.

Если для отношения $P \in B(M^2)$ имеет место левая часть любой из равносильностей 1–6 предложения 2, то это отношение, согласно предложению 1, обладает соответствующим первичным свойством (смотри таблицу).

Отметим, что левые части этих равносильностей дают характеристизацию первичных свойств бинарных отношений “в терминах” основных операций, основных отношений и выделенных элементов системы $B(M^2)$, т. е. на языке теории множеств. Правые же их части дают описание этих свойств “на языке” основных операций, основных предикатов и выделенных элементов системы $M_n(E)$, т. е. в понятийно-терминологической базе теории матриц.

Ранее отмечалось, что первая характеристизация более предпочтительна при решении теоретических задач, а вторая – при решении задач прикладного характера.

В частности, согласно предложению 2, получаем следующую характеристизацию первичных свойств бинарных отношений “на языке” системы $M_n(E)$. Отношение $P \in B(M^2)$:

- рефлексивно \Leftrightarrow все элементы главной диагонали матрицы $\varphi(P)$ равны 1;
- иррефлексивно \Leftrightarrow все элементы главной диагонали матрицы $\varphi(P)$ равны 0;
- симметрично \Leftrightarrow матрица $\varphi(P)$ является симметричной;
- антисимметрично \Leftrightarrow все элементы матрицы $\varphi(P) \& (\varphi(P))^T$, стоящие вне главной диагонали, равны 0;
- транзитивно $\Leftrightarrow (\varphi(P) \& (\varphi(P) \cdot \varphi(P))) = \varphi(P) \cdot \varphi(P) \Leftrightarrow$ если для всех $i; j; k \in \{1; 2; \dots; n\}$ элементы матрицы $\varphi(P)$, стоящие на местах с номерами $(i; j)$ и $(j; k)$ равны 1, то и элемент этой матрицы, стоящий на месте с номером $(i; k)$ также равен 1;
- связано \Leftrightarrow все элементы матрицы $\varphi(P) \vee (\varphi(P))^T$, стоящие вне главной диагонали, равны 1.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Мальцев, А.И.* Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М. : Наука, 1970.
2. *Ершов, Ю.Л.* Математическая логика / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. – М. : Наука, 1979.

3. Гончаров, С.С. Введение в логику и методологию науки / С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, К.Ф. Самохвалов. – М. : Интерпракс, 1994.
4. Гончаров, С.С. Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении : монография / С.С. Гончаров, Б.Н. Дроботун, А.А. Никитин. – Новосибирск : Изд-во НГУ, 2007.
5. Гончаров, С.С. Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений : монография : в 2 ч. / С.С. Гончаров, Б.Н. Дроботун, А.А. Никитин. – Новосибирск : Изд-во НГУ, 2008. – Ч. I.
6. Гончаров, С.С. Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений : монография : в 2 ч. / С.С. Гончаров, Б.Н. Дроботун, А.А. Никитин. – Новосибирск : Изд-во НГУ. Научное издание, 2008. – Ч. II.

Поступила в редакцию 19.02.2014 г.

УДК 511.36

М.А. КАЛУГИНА

СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НУЛЯ ЗНАЧЕНИЯМИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ

С использованием методов теории диофантовых приближений в математике было получено много фундаментальных результатов: в середине XIX в. доказано существование трансцендентных чисел, найдены методы решения диофантовых уравнений. Метрические теоремы о диофантовых приближениях точек многообразий находят применение в математической физике и имеют непосредственное отношение к проблемам, возникающим при исследовании некорректных граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

В статье представлены результаты исследования проблемы совместных диофантовых приближений многочленами с целыми коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{Q}_p^2$.

Упомянутые задачи берут начало со знаменитой теоремы Хинчина (1924 г.) о приближении действительных чисел рациональными. В ней утверждается, что для почти всех (в смысле меры Лебега на \mathbb{R}) действительных чисел x на отрезке $[a, b]$ и монотонно убывающей неотрицательной функции $\psi(x)$, определенной на \mathbb{R}^+ , неравенство

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{\psi(q)}{q} \quad (1)$$

имеет бесконечно много решений в целых числах p и натуральных q , если ряд $\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q)$ расходится. В случае же сходимости этого ряда таких

чисел x почти нет [1].

Перейдя от неравенства (1) к неравенству $|qx - p| < \psi(q)$, естественно обобщить последнее на случай многочлена с целыми коэффициентами произвольной степени n :

$$|P(x)| < H^{-n+1} \psi(H). \quad (2)$$

Здесь $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $H = H(P) = \max_i |a_i|$, $i = \overline{0, n}$.

Обозначим через $L_n(\psi)$ множество тех $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство (2) имеет бесконечно много решений P степени не выше n . К. Малер предположил (1932 г.), что при $\psi(H) = H^{-\lambda}$, $\lambda > 1$, множество $L_n(\psi)$ имеет нулевую меру [2]. В.Г. Спринджук доказал (1965 г.) эту гипотезу [3]. Затем А. Бейкер улучшил (1966 г.) теорему Спринджука и предположил, что для множества $L_n(\psi)$ справедливо утверждение, аналогичное теореме Хинчина в случае сходимости [4]. Это предположение было доказано [5] В.И. Берником (1989 г.), а через некоторое время В.В. Бересневич (1999 г.) показал, что оно справедливо и для случая расходимости [6]. Вскоре полученные результаты были обобщены на поле комплексных [7] и p -адических [8] чисел.

В данной статье доказана аналогичная теорема для случая сходимости в пространстве $S = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{Q}_p^2$. Далее μ – мера пространства S , μ_1 – мера Лебега пространства \mathbb{R}^2 , μ_2 – мера Лебега пространства \mathbb{C}^2 , μ_p – мера Хаара пространства \mathbb{Q}_p^2 .

Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} \max_{i=1,2} |P(x_i)| \leq H^{-v_1} \psi^{\lambda_1}(H), \\ \max_{i=1,2} |P(z_i)| \leq H^{-v_2} \psi^{\lambda_2}(H), \\ \max_{i=1,2} |P(\omega_i)|_p \leq H^{-v_3} \psi^{\lambda_3}(H), \end{cases} \quad (3)$$

в которой $(x_1, x_2, z_1, z_2, \omega_1, \omega_2) \in S$, $2(v_1 + 2v_2 + v_3) = n - 6$, $2(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = 1$. Обозначим $L_n(v, \lambda)$ с $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ множество точек из параллелепипеда $A = I_1 \times I_2 \times K_1 \times K_2 \times D_1 \times D_2$, где I_i – интервалы в \mathbb{R} , K_i – кольца в \mathbb{C} , D_i – цилиндры в \mathbb{Q}_p , для которых система (3) имеет бесконечно много решений в $P \in \mathbb{Z}[x]$.

Теорема. Если $n \geq 6$ и $\sum_{q=1}^{\infty} \psi(q) < \infty$, то $\mu(L_n(\bar{v}, \bar{\lambda})) = 0$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать ее справедливость для неприводимых многочленов, удовлетворяющих системе (3) и условиям $H(P) = |a_n|, |a_n|_p > p^{-n}$. Обозначим такое множество многочленов $P_n(H)$.

Пусть $P \in P_n(H)$ имеет корни $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$ в \mathbb{C} и $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ в \mathbb{Q}_p^* , где \mathbb{Q}_p^* – наименьшее поле, содержащее \mathbb{Q}_p и все алгебраические числа. Из-за ограничения на высоту многочленов можно считать, что $|z_j^*| \leq 2$, $|\gamma_j|_p < p^n$, $j = \overline{1, n}$. Для упорядочения корней будем использовать расстояние от них до выбранного. Для этого среди всех n комплексных корней отделим n_1 действительных и обозначим их $\alpha_j, j = \overline{1, n_1}$, а $n_2 = n - n_1$ корней из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ обозначим $\beta_j, j = \overline{1, n_2}$. Тогда относительно $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \beta_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \gamma_1 \in \mathbb{Q}_p^*$ сможем упорядочить остальные корни по ближайшему расстоянию от них до выбранных корней следующим образом:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_{n_1}|, \quad |\beta_1 - \beta_2| \leq \dots \leq |\beta_1 - \beta_{n_2}|, \quad |\gamma_1 - \gamma_2|_p \leq \dots \leq |\gamma_1 - \gamma_n|_p.$$

Определим множества $S_1(\alpha_1), S_2(\beta_1), S_p(\gamma_1)$ ближайших точек к выбранным корням, а именно:

$$\begin{aligned} S_1(\alpha_1) &= \{x \in I \subset \mathbb{R} : |x - \alpha_1| = \min_{1 \leq j \leq n_1} |x - \alpha_j|\}, \\ S_2(\beta_1) &= \{z \in K \subset \mathbb{C} : |z - \beta_1| = \min_{1 \leq j \leq n_2} |z - \beta_j|\}, \\ S_p(\gamma_1) &= \{\omega \in D_p \subset \mathbb{Q}_p : |\omega - \gamma_1|_p = \min_{1 \leq j \leq n} |\omega - \gamma_j|_p\}. \end{aligned}$$

Для $x \in S_1(\alpha_1), z \in S_2(\beta_1), \omega \in S_p(\gamma_1)$ известны следующие оценки [8, 9]:

$$\begin{aligned} |u - \alpha| &\leq \frac{2^n |P(u)|}{|P'(\alpha)|}, \quad |\omega - \gamma_1|_p \leq \frac{|P(\omega)|_p}{|P'(\gamma_1)|_p}, \\ |u - \alpha| &\leq \min_{2 \leq j \leq n} (2^{n-j} \frac{|P(u)|}{|P'(\alpha)|}) \prod_{k=2}^j |\alpha - \alpha_k|^{1/j}, \quad (4) \\ |\omega - \gamma_1|_p &\leq \min_{2 \leq j \leq n} (\frac{|P(\omega)|}{|P'(\gamma_1)|}) \prod_{k=2}^j |\gamma_1 - \gamma_k|_p^{1/j}. \end{aligned}$$

Здесь вместо u можно подставить x или z , а вместо $\alpha - \alpha_1$ или β_1 по смыслу.

Таким образом, на основании этих оценок и с учетом ограничений $|z_j^*| \leq 2$, $|\gamma_j|_p < p^n$, $j = \overline{1, n}$, $|\omega|_p << 1$ ($<<$ – символ Виноградова) множество точек $(x_1, x_2, z_1, z_2, \omega_1, \omega_2) \in S$, для которых справедлива система (3), находится внутри множества (параллелепипеда)

$$A = I_1 \times I_2 \times K_1 \times K_2 \times D_1 \times D_2 \subset S,$$

где

$$I_i = \{x_i \in \mathbb{R} : -3 \leq x_i \leq 3\}, K_i = \{z_i \in \mathbb{C} : |z_i| \leq 3\}, D_i = \{\omega_i \in \mathbb{Q}_p : |\omega_i|_p \leq c\}, i = 1, 2.$$

Зафиксируем сколь угодно малое $\delta > 0$ и исключим из множества A любое комплексное число z с мнимой частью, удовлетворяющей условию $|\operatorname{Im} z| < \delta$. Тогда, не ограничивая общности, будем полагать, что точки $(x_1, x_2, z_1, z_2, \omega_1, \omega_2) \in A$ удовлетворяют условию $|x_i| \geq \delta, |\operatorname{Im} z_i| \geq \delta$.

Докажем справедливость теоремы при $n=6$. В этом случае система неравенств (3) примет вид:

$$\max_{i=1,2} |P(x_i)| < \psi^{\lambda_1}(H), \max_{i=1,2} |P(z_i)| < \psi^{\lambda_2}(H), \max_{i=1,2} |P(\omega_i)|_p < \psi^{\lambda_3}(H). \quad (5)$$

Так как $\sum_{q=1}^{\infty} \psi(H) < \infty$, то правые части неравенств (5) при $H \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Тогда на основании оценок (4) найдется значение H_0 такое, что при $H > H_0$ существуют вещественные корни α_i и комплексно-сопряженные корни $\beta_i, \bar{\beta}_i$, близкие соответственно к $x_i, z_i, i = 1, 2$. Так как точки из параллелепипеда A удовлетворяют условию $|x_i| \geq \delta, |\operatorname{Im} z_i| \geq \delta$, то для β_i справедливо $|\operatorname{Im} \beta_i| > \frac{1}{2}\delta, |\beta_i - \bar{\beta}_i| > \delta$. Аналогичные оценки могут быть получены и для расстояний до действительных корней α_i , т. е. $|\beta_i - \alpha_i| = |\bar{\beta}_i - \alpha_i| > \frac{1}{2}\delta, i = 1, 2$. Таким образом,

$$\min(|P'(\alpha_i)|, |P'(\beta_i)|) > c(n, \delta)H(P).$$

Если добавить справедливость $|P'(\gamma_i)|_p > c(n, \delta)$, то из системы (5), приведенных выше неравенств и оценок (4) для $S_1(\alpha_i) \subset I_i, S_2(\beta_i) \subset K_i, S_p(\omega_i) \subset D_p$, следует верхняя оценка меры множества

$$\sigma(P) = S_1(\alpha_1) \times S_1(\alpha_2) \times S_2(\beta_1) \times S_2(\beta_2) \times S_p(\omega_1) \times S_p(\omega_2) \subset A:$$

$$\mu(\sigma(P) < c(n)H^{-6}\psi(H)).$$

Зафиксируем H и суммируем по всем остальным шести коэффициентам многочленов с высотой, не превосходящей H . В результате получим:

$$\sum_{P \in P_6(H)} \mu(\sigma(P)) < c\psi(H).$$

Так как $\sum_{q=1}^{\infty} \psi(H) < \infty$, то на основании леммы Бореля-Кантелли делаем вывод, что $\mu(L_6(\bar{v}, \bar{\lambda})) = 0$.

Рассмотрим $n \geq 7$. Разобьем параллелепипед A на два подмножества: $A_1 = I_1 \times K_1 \times D_1$, $A_2 = I_2 \times K_2 \times D_2$. Пусть параллелепипеды A_1, A_2 состоят, соответственно, из точек $(x_1, z_1, \omega_1) \in I_1 \times K_1 \times D_1$, $(x_2, z_2, \omega_2) \in I_2 \times K_2 \times D_2$, для которых системы

$$\begin{cases} |P(x_1)| \leq H^{-v_1} \psi^{\lambda_1}(H), \\ |P(z_1)| \leq H^{-v_2} \psi^{\lambda_2}(H), \\ |P(\omega_1)|_p \leq H^{-v_3} \psi^{\lambda_3}(H), \end{cases} \quad \begin{cases} |P(x_2)| \leq H^{-v_1} \psi^{\lambda_1}(H), \\ |P(z_2)| \leq H^{-v_2} \psi^{\lambda_2}(H), \\ |P(\omega_2)|_p \leq H^{-v_3} \psi^{\lambda_3}(H) \end{cases} \quad (6)$$

имеют бесконечно много решений в $P \in \mathbb{Z}[x]$.

Рассмотрим $\psi(H) = H^{-n/8\lambda} \psi_1^2(H)$, где $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\psi_1(H) \leq \psi(H)$ – монотонно убывающая положительная функция. Подставим определенную таким образом функцию $\psi(H)$ в (6). В результате получим:

$$\begin{cases} |P(x_1)| \leq H^{-v_1} (H^{-n/8\lambda} \psi_1^2(H))^{\lambda_1}, \\ |P(z_1)| \leq H^{-v_2} (H^{-n/8\lambda} \psi_1^2(H))^{\lambda_2}, \\ |P(\omega_1)|_p \leq H^{-v_3} (H^{-n/8\lambda} \psi_1^2(H))^{\lambda_3}, \end{cases} \quad \begin{cases} |P(x_2)| \leq H^{-v_1} (H^{-n/8\lambda} \psi_1^2(H))^{\lambda_1}, \\ |P(z_2)| \leq H^{-v_2} (H^{-n/8\lambda} \psi_1^2(H))^{\lambda_2}, \\ |P(\omega_2)|_p \leq H^{-v_3} (H^{-n/8\lambda} \psi_1^2(H))^{\lambda_3}. \end{cases} \quad (7)$$

После преобразования правых частей имеем:

$$\begin{cases} |P(x_1)| \leq H^{-v_1 - n/8} \psi_1^{2\lambda_1}(H), \\ |P(z_1)| \leq H^{-v_2 - n/8} \psi_1^{2\lambda_2}(H), \\ |P(\omega_1)|_p \leq H^{-v_3 - n/8} \psi_1^{2\lambda_3}(H), \end{cases} \quad \begin{cases} |P(x_2)| \leq H^{-v_1 - n/8} \psi_1^{2\lambda_1}(H), \\ |P(z_2)| \leq H^{-v_2 - n/8} \psi_1^{2\lambda_2}(H), \\ |P(\omega_2)|_p \leq H^{-v_3 - n/8} \psi_1^{2\lambda_3}(H). \end{cases} \quad (8)$$

Для показателей правых частей полученных систем по условию $v_1 + \frac{n}{8} + 2(v_2 + \frac{n}{8}) + v_3 + \frac{n}{8} = \frac{n-6}{2} + \frac{4n}{8} = n-3$, $2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1$. В [10] доказано, что при таких условиях мера множества точек из пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, для которых последняя система имеет бесконечно много решений в $P \in \mathbb{Z}[x]$, равна нулю в случае $n \geq 3$. Тогда

$$\mu(L_n(\bar{v}, \bar{\lambda})) = \mu(L_k(\bar{v}, \bar{\lambda}))\mu(L_{n-k}(\bar{v}, \bar{\lambda})) = 0, \quad k \geq 3.$$

Замечание 1. Системы (8) сужают в некотором смысле множество решений систем (7), но несложно показать, что мера множества точек, являющихся решением (8) и не входящих в решение (7), равна нулю.

Замечание 2. Теорему для случая $n \geq 7$ можно доказать также, используя метод из [10]. Он представляет собой обобщение метода Спрингджаука существенных и несущественных областей [3] и предполагают использование верхних оценок количества многочленов с малыми значениями в коротких интервалах. Используется достаточно сложная техника, требующая скрупулезного рассмотрения различных вариантов значений компонент векторов \bar{v} и $\bar{\lambda}$. Это связано с процедурой линеаризации многочленов и дальнейшим исследованием ситуаций, зависящих от значений производных многочленов в определенных точках исследуемого пространства. Точнее, рассматриваются области, где эти производные велики и малы. Для этого все корни в разных метриках разбиваются на конечное число классов, для каждого из которых и проводится доказательство теоремы.

Для того чтобы получить аналогичные варианты для нашего случая,

зафиксируем достаточно малое положительное ϵ и положим $T = \left[\frac{N}{\epsilon} \right]$,

где $N = N(n > 0)$ – достаточно велико. Определим действительные числа $\rho_{kj}^{(i)}$ и целые $k_j^{(i)}, l_j^{(i)}, m_j^{(i)}$ в зависимости от выбранных корней $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2$) (в отношении которых ведется упорядочение) на основании следующих соотношений:

$$|\alpha_i - \alpha_{ij}| = H^{-\rho_{1j}^{(i)}}, \quad j = \overline{1, n_1},$$

$$|\beta_i - \beta_{ij}| = H^{-\rho_{2j}^{(i)}}, \quad j = \overline{1, n_2},$$

$$|\gamma_i - \gamma_{ij}|_p = H^{-\rho_{3j}^{(i)}}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\frac{k_j^{(i)} - 1}{T} \leq \rho_{1j}^{(i)} < \frac{k_j^{(i)}}{T}, \quad \frac{l_j^{(i)} - 1}{T} \leq \rho_{2j}^{(i)} < \frac{l_j^{(i)}}{T}, \quad \frac{m_j^{(i)} - 1}{T} \leq \rho_{3j}^{(i)} < \frac{m_j^{(i)}}{T}.$$

Затем определим числа:

$$q_j^{(i)} = \frac{k_{j+1}^{(i)} + \dots + k_{n_1}^{(i)}}{T}, \quad j = \overline{1, n_1 - 1},$$

$$r_j^{(i)} = \frac{r_{j+1}^{(i)} + \dots + r_{n_2}^{(i)}}{T}, \quad j = \overline{1, n_2 - 1},$$

$$s_j^{(i)} = \frac{s_{j+1}^{(i)} + \dots + s_n^{(i)}}{T}, \quad j = \overline{1, n - 1}.$$

Тогда с каждым многочленом $P \in P_n(H)$ можно связать шесть целочисленных векторов $\overline{q^{(i)}} = (k_2^{(i)}, \dots, k_{n_1}^{(i)}), \overline{r^{(i)}} = (l_2^{(i)}, \dots, l_{n_2}^{(i)}), \overline{s^{(i)}} = (m_2^{(i)}, \dots, m_{n_3}^{(i)})$. Известно, что число таких векторов конечно. Дальнейшие рассуждения будут зависеть от значений $q_1^{(i)} + \frac{k_2^{(i)}}{T}, r_1^{(i)} + \frac{l_2^{(i)}}{T}, s_1^{(i)} + \frac{m_2^{(i)}}{T}$, которые характеризуют поведение $|P'(y)|$ в окрестности выбранных корней и расстояния до остальных корней. Таким образом, многочлены разбиваются на классы в зависимости от системы неравенств:

$$\begin{aligned} q_1^{(i)} + \frac{k_2^{(i)}}{T} &< v_1 + \lambda_1 + 1, \\ r_1^{(i)} + \frac{l_2^{(i)}}{T} &< v_2 + \lambda_2 + 1, \\ s_1^{(i)} + \frac{m_2^{(i)}}{T} &< v_3 + \lambda_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Многочлены, которые удовлетворяют системе (9), по аналогии с [10], назовем $(0,0,0,0,0,0)$ -линейными. В случае, когда все неравенства системы (9) имеют противоположный знак – $(1,1,1,1,1,1)$ -линейными. Тогда $(1,0,0,0,0,0)$ -линейность означает, что в первом неравенстве системы (9) знак \geq , а в остальных пяти – $<$.

Введенная классификация позволяет выделить следующие случаи для $(0,0,0,0,0,0)$ -линейности (d – сумма левых частей системы (9)):

- 1) $d < \varepsilon$,
- 2) $\varepsilon \leq d < 8 - \varepsilon$,
- 3) $8 - \varepsilon \leq d < n + \varepsilon$,
- 4) $n + \varepsilon \leq d$.

Случаи для $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ -линейности, когда хотя бы одно из значений из i_j равно 1, рассматриваются похожим образом. И отдельно – $(1,1,1,1,1,1)$ -линейность.

Таким образом, доказан аналог теоремы Хинчина в случае сходимости для совместных приближений нуля значениями многочленов с целыми коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{Q}_p^2$. При доказательстве используется метод существенных и несущественных областей В.Г. Спрингдука и новый метод смешанных линейностей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Khintchine, A.* Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A.J. Khintchine // Math. Ann. – 1924. – Vol. 92. – P. 115–125.

2. *Mahler, K.* Über das Mass der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106. – P. 131–139.
3. *Спринджук, В.Г.* Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В.Г. Спринджук // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1965. – Т. 29. – № 2. – С. 379–436.
4. *Baker, A.* On a theorem of Sprindžuk / A. Baker // Proc. Royal Soc. – 1966. – V. 292. – P. 92–104.
5. *Берник, В.И.* О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53. – С. 17–28.
6. *Beresnevich, V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V.V. Beresnevich // Acta Arithmetica. – 1999. – Vol. 90. – № 2. – P. 97–112.
7. *Берник, В.И.* Теорема типа Хинчина для целочисленных многочленов комплексной переменной / В.И. Берник, Д.В. Васильев // Труды института математики НАН Беларуси. – 1999. – Т. 3. – С. 10–20.
8. *Ковалевская, Э.И.* О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов в \mathbb{Q}_p / Э.И. Ковалевская. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 2000. (Препринт, № 2 (556)).
9. *Берник, В.И.* Совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. – 1980. – Т. 44. – № 1. – С. 24–45.
10. *Budarina, N.* Simultaneous Diophantine approximation in the real, complex and p-adic fields / N. Budarina, V.I. Bernik, D. Dickinson // Math. Proc. CambridgePhilos. Soc. – 2010. – Vol. 149. – № 2. – P. 193–216.

Поступила в редакцию 23.06.2014 г.

УДК 514

Э.Г. КИРЬЯЦКИЙ, В.И. МАТЮХИН

ИЗОБРАЖЕНИЕ ФИГУР В ГЕОМЕТРИИ

Рассматриваются основные правила выполнения чертежей геометрических фигур, расположенных на плоскости и в пространстве. Приведено большое количество упражнений на построение изображений.

В связи с тем, что графические навыки учащихся и преподавателей ухудшились, неточности в чертежах встречаются даже в учебной литературе, возникает необходимость напомнить основные правила, которые при выполнении чертежей необходимо соблюдать.

Совокупность правил, позволяющих построить изображение фигуры, называется методом изображения. К методам изображения предъявляются два основных требования: 1) наглядность, 2) удобоизмеримость.

Первое требование означает, что всякий человек, рассматривающий изображение, должен понимать, что оно отображает. Изображение должно вызывать зрительное впечатление, сходное с тем, какое вызывает оригинал (при этом мы имеем в виду только геометрическую форму). Второе требование означает, что по изображению можно восстановить оригинал.

Изображение не всегда определяет оригинал метрически точно: существуют методы изображения, определяющие оригинал только с точностью до подобия. В таких случаях требуются дополнительные соглашения, чтобы изображение метрически определяло оригинал.

Указанные требования противоречат друг другу, поэтому при выборе метода изображения приходится идти на компромисс между наглядностью и возможностью получить метрически определенное изображение. Таким компромиссом в геометрии является метод параллельного проектирования. При этом процесс построения изображения близок к процессу нашего зрения, что делает изображение наиболее наглядным.

При параллельном проектировании некоторые свойства фигур теряются (не переносятся на изображение), а другие – сохраняются. Эти последние называются инвариантными относительно параллельного проектирования. Например, инвариантными будут: свойство трех точек лежать на одной прямой; свойство двух прямых быть параллельными; отношение длин двух отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

Метод параллельного проектирования на плоскость заключается в том, что точки пространства сначала проектируются параллельно указанному направлению, а затем полученное на плоскости изображение подвергается преобразованию подобия. Поэтому точку M_1 на изображении не следует считать непосредственной проекцией точки M .

Изображения бывают жесткими и свободными. При жестком изображении должны быть известны все параметры, характеризующие метод изображения и положение фигуры. Такие изображения строятся в начертательной геометрии. При использовании изображений с иллюстративной целью пользуются свободным изображением, когда параметры, характеризующие метод изображения и положение оригинала, неизвестны. Когда учитель для иллюстрации теоремы чертит на доске изображение параллелепипеда, то ему безразлично то, как расположен в пространстве оригинал. Ему важно, чтобы изображение было “похоже” на параллелепипед. Владение теорией свободных изображений необходимо каждому учителю математики.

1. В основе правил построения чертежей лежит метод проекций. Чтобы построить изображение предмета (фигуры) по этому методу, необходимо через точки на предмете (фигуре) провести воображаемые лучи до встречи их с плоскостью проекций.

Если проецирующие лучи исходят из одной точки, то проецирование называется центральным, эта точка называется центром проецирования, а полученное изображение – центральной проекцией или перспективой.

Если проецирующие лучи параллельны друг другу, то проецирование называется параллельным, а полученное изображение – параллельной проекцией. Если направление проецирования с плоскостью проекций образует острый угол, то проецирование называется косоугольным. Если же этот угол равен – 90° , то проецирование называется прямоугольным (ортогональным), а полученное при этом изображение называется прямоугольной (ортогональной) проекцией предмета.

Параллельность прямых, отношение длин отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной прямой – инварианты ортогонального проектирования. Длины отрезков и величины углов при таком проецировании не сохраняются.

Метод прямоугольного проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости был разработан в конце XVIII в. французским математиком Гаспаром Монжем (1746–1818) и носит его имя.

2. Напомним, что в черчении используется проецирование на три попарно перпендикулярные плоскости xOy , xOz , и yOz – вид сверху (горизонтальная проекция), вид спереди (фронтальная проекция) и вид сбоку (профильная проекция). Разворотка этих изображений в одной плоскости – эпюра.

Если $\angle xOz = 90^{\circ}$, $\angle xOy = 135^{\circ}$, то проекция называется фронтальной диметрической (или кабинетной). При этом размеры по осям Ox и Oz берутся без искажений, а размеры по оси Oy сокращаются вдвое.

Если $\angle xOz = \angle xOy = 120^{\circ}$, то проекция называется изометрической. При этом размеры по всем осям берутся без искажений.

Фронтальная диметрическая и изометрическая проекции называются аксонометрическими проекциями (аксонометрия (греч.) – измерение по осям).

Проекцией квадрата в изометрии является ромб. Окружность, вписанная в квадрат, изображается эллипсом. Эллипс строить трудно, поэтому на практике его заменяют овалом – кривой, состоящей из дуг окружности.

Для упрощения работы по выполнению наглядных изображений часто пользуются техническими рисунками – изображениями, выполненными на глаз и от руки по правилам аксонометрии.

При изображении прямоугольного параллелепипеда в изометрии его измерения располагают параллельно осям Ox , Oy и Oz . При этом грани изображаются параллелограммами.

При построении изометрии призмы чертеж начинают с изображения основания, расположив его параллельно горизонтальной плоскости.

Построение изометрии правильной пирамиды начинают с основания, а затем из центра основания восставляют перпендикуляр.

Способы построения изометрии цилиндра и конуса схожи: проводят оси Ox и Oy , на которых строят ромб со стороной, равной диаметру основания, вписывают в него овал и вдоль оси Oz откладывают высоту; для цилиндра и усеченного конуса строят второй овал и проводят касательные к овалам.

На чертежах наносятся габаритные размеры – размеры, определяющие предельные величины внешних или внутренних очертаний фигуры.

Сечение – это изображение фигуры, получающейся при мысленном рассечении предмета плоскостью. На сечении показывают только то, что находится непосредственно в секущей плоскости. Фигуру сечения на чертеже выделяют штриховкой, которую наносят тонкими линиями под углом 45° . По расположению на чертеже сечения разделяются на вынесенные и наложенные. Вынесенные располагают вне контура изображения фигуры на любом месте листа чертежа, наложенные – непосредственно на чертеже. Контур вынесенного сечения обводят сплошной толстой основной линией, а контур наложенного сечения – сплошной тонкой линией. Сечения выполняют в том же масштабе, что и изображение, к которому оно относится, или указывают масштаб, если он изменен.

3. К чертежам геометрических тел в пространстве не предъявляются требования соблюдения метрических характеристик фигуры. Учитель не связан необходимостью выбирать направления осей, находить коэффициенты искажения. Проекции при этом используются для решения позиционных задач, то есть таких, в которых требуется построить форму сечения тела, линию пересечения поверхностей, определить принадлежность точки к данной плоскости и т. д. Решая такие задачи, не требуется при построении изображения находить длины отрезков, величины углов и т. п. Но не следует думать, что такие чертежи характерны полным произволом в построении изображений. Являясь параллельными проекциями, они строятся с учетом основных свойств параллельного проецирования.

Какие геометрические свойства конкретных фигур не сохраняются при проецировании, а какие сохраняются?

Квадрат, ромб, прямоугольник, параллелограмм после параллельного проецирования сохраняют параллельность противолежащих сторон, свойство диагоналей делиться пополам в точке их пересечения. Но все они утрачивают истинную величину углов, а квадрат и ромб теряют, кроме того, равенство прилежащих сторон. Не сохраняются прямые углы между диагоналями квадрата и ромба, не сохраняется равенство диагоналей квадрата и прямоугольника. Указанные фигуры теряют свои индивидуальные черты, по которым мы их раньше узнавали.

В мире проекций теряют смысл такие термины, как прямоугольный, остроугольный, тупоугольный, равнобедренный, равносторонний треугольники; правильный многоугольник и т. д.

4. Рассмотрим несколько задач, связанных с построением изображений геометрических фигур.

Задача 1. Данна параллельная проекция треугольника. Постройте проекции медиан этого треугольника.

Решение. При параллельном проектировании сохраняется отношение длин отрезков прямой. Поэтому середины сторон треугольника проецируются в середины проекций этих сторон. Следовательно, проекции медиан треугольника будут медианами его проекции.

Задача 2. Данна паралельная проекция треугольника. Чем изобразится проекция средней линии треугольника, если плоскость треугольника не перпендикулярна плоскости проекций?

Ответ. Средней линией проекции треугольника.

Задача 3. Может ли при параллельном проецировании параллелограмма получиться трапеция?

Ответ. Нет.

Задача 4. Может ли проекция параллелограмма при параллельном проецировании быть квадратом.

Ответ. Может.

Задача 5. Докажите, что паралельная проекция центрально симметричной фигуры также является центрально-симметричной фигурой.

Указание. Образы любых двух центрально-симметричных точек этой фигуры будут центрально-симметричными точками изображения.

Задача 6. Данна паралельная проекция окружности и ее диаметра. Как построить проекцию перпендикулярного диаметра?

Указание. Параллельная проекция окружности – эллипс (если плоскость, в которой лежит окружность, не перпендикулярна плоскости проекций). Провести в эллипсе отрезок, параллельный проекции диаметра окружности, и разделить эти два отрезка пополам. Через полученные две точки провести прямую. Отрезок этой прямой, лежащий внутри эллипса, и будет изображением диаметра окружности, перпендикулярного данному диаметру.

Задача 7. Даны три точки. Сколько точек может получиться на плоскости проекций при проецировании данных точек?

Ответ. 3, 2 или 1.

Задача 8. Какой фигурой может быть параллельная проекция: а) плоскости; б) полуплоскости; в) угла, отличного от развернутого?

Ответ. а) Плоскостью или прямой; б) полуплоскостью, прямой или лучом; в) углом, прямой или лучом.

Задача 9. Известно, что отрезок и его проекция имеют равные длины. Как может быть расположен данный отрезок по отношению к плоскости проекций?

Ответ. Параллелен плоскости проекций; лежит в этой плоскости; лежит на прямой, пересекающей плоскость.

Задача 10. Если проекции двух прямых параллельны, то верно ли утверждение, что параллельны и проецируемые прямые.

Ответ. Нет. Они могут скрещиваться.

Задача 11. Даны точки A , B , C , не лежащие на одной прямой, и их проекции A_1 , B_1 , C_1 на плоскость α . Плоскости ABC и α не параллельны. Постройте линию пересечения (след) плоскостей ABC и α .

Указание. Так как плоскость ABC не параллельна α , то по крайней мере две стороны треугольника ABC не параллельны плоскости α . Постройте точки пересечения (следы) прямых, на которых лежат эти стороны. Прямая, проходящая через эти следы, и будет искомым следом.

Задача 12. На изображении равностороннего треугольника построить изображение его центра.

Указание. Учесть, что центр правильного треугольника – точка пересечения его медиан.

Задача 13. На изображении равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) построить изображение ее высоты DE .

Указание. Если M и N – середины оснований трапеции (MN – ее ось симметрии), то $DE \parallel MN$. Так как при параллельном проецировании параллельность прямых сохраняется, то $M_1N_1 \parallel D_1E_1$. Отсюда построение: делим отрезки A_1B_1 и C_1D_1 пополам и через полученные точки M_1 и N_1 проводим прямую. Строим $D_1E_1 \parallel M_1N_1$. D_1E_1 – искомый отрезок.

Задача 14. Дано изображение произвольного треугольника и двух его высот. Постройте изображение центра окружности, описанной около этого треугольника.

Указание. Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. Два из этих серединных перпендикуляров параллельны высотам треугольника, проведенным из противолежащих сторонам вершин. Отсюда построение: делим изображения сторон, к которым проведены высоты пополам и через полученные точки проводим прямые, параллельные изображениям данных высот. Точка пересечения этих прямых – изображение центра окружности, описанной около данного треугольника.

Задача 15. У треугольника ABC длины сторон AB и BC относятся как $2 : 3$. Постройте изображение этого треугольника и изображение биссектрисы BD .

Указание. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону треугольника на отрезки, пропорциональные сторонам, прилежащим этим отрезкам. Поэтому $A_1D_1:D_1C_1 = 2 : 3$. Остается разделить проекцию A_1C_1 на 5 равных частей.

Задача 16. Постройте изображение прямоугольного треугольника ABC , длины катетов которого (AC и BC) относятся как $3 : 4$. Постройте изображение центра окружности, вписанной в этот треугольник.

Указание. Если $AC = 3x$, $BC = 4x$, то по теореме Пифагора $AB = 5x$. Центр O вписанной в треугольник окружности – точка пересечения биссектрис этого треугольника. Биссектриса AE делит катет BC в отношении $CE : BE = 3:5$, а биссектриса BF делит катет AC в отношении $CF : AF = 4 : 5$. На изображении точка O_1 – точка пересечения A_1E_1 , где $C_1E_1 : B_1E_1 = 3 : 5$, и B_1F_1 , где $C_1F_1 : A_1F_1 = 4 : 5$.

Задача 17. Может ли изображением данного четырехугольника служить произвольный четырехугольник?

Ответ. Нет.

Замечание. Для случая треугольника утверждение задачи будет справедливо.

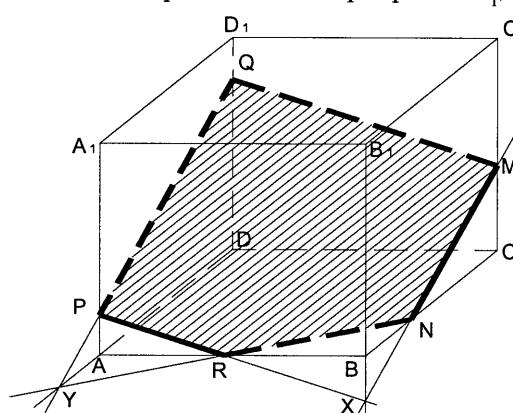
Задача 18. Постройте изображение квадрата, лежащего в плоскости равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90^{\circ}$), если сторона квадрата равна: а) катету данного треугольника; б) его гипotenузе.

Указание. а) На изображении $A_1B_1C_1$ данного треугольника провести $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ и $B_1D_1 \parallel A_1C_1$. Четырехугольник $A_1C_1B_1D_1$ – искомое изображение. б) На луче A_1C_1 отложить $C_1E_1 = A_1C_1$, на луче B_1C_1 отложить $C_1F_1 = B_1C_1$. Четырехугольник $A_1F_1E_1B_1$ – искомое изображение.

Задача 19. Изобразите квадрат $ABCD$ в виде параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$. Постройте изображение равнобедренной трапеции с углом 45° так, чтобы отрезок C_1D_1 был изображением одного основания трапеции, а отрезок B_1C_1 – изображением ее высоты.

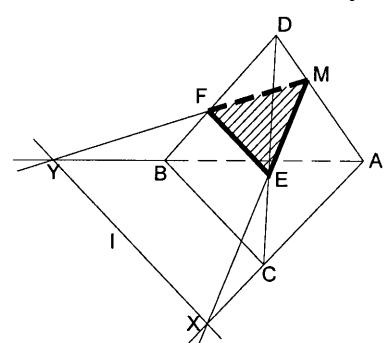
Указание. Боковые стороны трапеции параллельны диагоналям квадрата. Поэтому через точку D_1 провести прямую, параллельную A_1C_1 , а через точку C_1 – прямую, параллельную B_1D_1 . Точки пересечения этих прямых с прямой A_1B_1 вместе с точками C_1 и D_1 будут изображениями четырех вершин данной трапеции.

Задача 20. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки на ребрах AA_1 , CC_1 и BC .



Прямая RY – след секущей плоскости, т. е. линия пересечения секущей плоскости с плоскостью основания куба. Прямая PY пересекает DD_1 в точке Q . $MNRPQ$ – искомое сечение.

Замечание. Вид сечения определяется расположением данных точек. Сечением куба плоскостью может быть треугольник, четырехугольник, пятиугольник или шестиугольник.



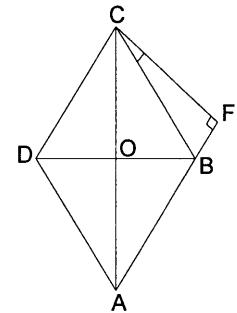
Задача 21. Плоскость α пересекает ребро AD пирамиды $ABCD$ в точке M , плоскость грани ABC по прямой ℓ . Постройте сечение пирамиды плоскостью α .

Решение. Прямые AB и AC с прямой ℓ лежат в одной плоскости и пересекают ее в точках X и Y (XY – след секущей плоскости). Прямая YM пересекает BD в точке F . Точки E и F лежат в секущей плоскости α . Треугольник MEF – искомое сечение.

Задача 22. На изображении ромба с углом 60° постройте изображение его высоты, проведенной из вершины: а) тупого угла, б) острого угла.

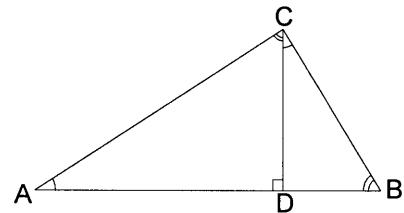
Указание. Докажите что основание высоты делит сторону ромба пополам. Если CF – высота ромба, проведенная из вершины острого угла ромба, то $\angle BCF = 30^\circ$ (т. к. $CD \parallel AF$ и $\angle BCD = 60^\circ$) и потому

$BF = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AB$. Чтобы построить изображение CF , нужно на прямой A_1B_1 отложить отрезок $B_1F_1 = \frac{1}{2} A_1B_1$ и соединить точки C_1 и F_1 .



Задача 23. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. На изображении этого треугольника постройте изображение его высоты CD , если: а) $AC : BC = 2$; б) $\angle A = 60^\circ$.

Указание. а) Пусть $BC = x$. Тогда $AC = 2x$ и по теореме Пифагора $AB = \sqrt{5}x$.



Треугольники ABC и ACD подобны, поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$. Отсюда $AD = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot x$, $BD = AB - AD = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x$. Следовательно, $\frac{AD}{BD} = 4 : 1$ и для построения изображения высоты C_1D_1 нужно разделить отрезок A_1B_1 на пять равных частей, и взять $A_1D_1 = \frac{4}{5} A_1B_1$; $A_1D_1 : B_1D_1 = 4 : 1$.

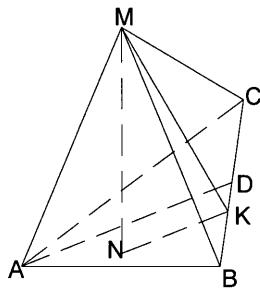
б) $\angle ABC = \angle ACD = 30^\circ$. Обозначим $BC = x$. Тогда $CD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} x$. Так как $AD = \frac{1}{2} AC$ и $CD = \frac{1}{2} x$, то из треугольника ACD находим: $AD = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot x$. Из треугольника BCD : $BD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$. Поэтому $AD : BD = 1 : 3$. Следовательно, для построения изображения высоты C_1D_1 нужно взять $A_1D_1 = \frac{1}{4} \cdot A_1B_1$.

Замечание. Можно было воспользоваться тем фактом, что отрезки гипотенузы, на которые она делится высотой, относятся как квадраты катетов.

Задача 24. На изображении треугольника, длины сторон которого пропорциональны числам 2, 3, и 4, постройте изображение центра окружности, вписанной в этот треугольник.

Указание. Центр вписанной в треугольник окружности – точка пересечения биссектрис углов этого треугольника. Воспользуйтесь тем свойством, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Задача 25. Основание пирамиды $MABC$ – правильный треугольник ABC ; MN – высота пирамиды. Постройте высоты боковых граней пирамиды, проведенные из ее вершины M .



Решение. Так как треугольник ABC правильный, то его высота AD является и медианой, $CD = BD$. Если MK – высота боковой грани MBC , то $MK \perp BC$. $MN \perp ABC$, $MN \perp NK$, NK – проекция MK на плоскость ABC . Поэтому $NK \perp BC$. Отсюда следует такой порядок построения высоты боковой грани: делим ребро BC пополам, проводим отрезок AD , проводим $NK \parallel AD$, соединяем точки M и K .

Аналогично строятся высоты двух других граней пирамиды.

Задача 26. Через середины двух смежных сторон основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол φ и пересекающая три боковых ребра призмы. Найдите сторону основания, если площадь сечения равна Q .

$$\text{Ответ. } \frac{2}{7} \cdot \sqrt{14Q \cdot \cos \varphi}$$

Задача 27. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскости BDA_1 и B_1D_1C разбивают диагональ AC_1 на три равные части.

Замечание. Приняв ребро куба за a , найдите расстояние между скрещивающимися прямыми AC_1 и B_1C .

Задача 28. Начертите сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки M, N, P , являющиеся внутренними точками граней $ABCD, ABB_1A_1, ADD_1A_1$ соответственно.

Указание. Спроектировав точки N и P параллельно AA_1 на плоскость $ABCD$, получим точки N_1 и P_1 . Точка $NP \cap N_1P_1 = X$ принадлежит плоскости сечения. Проведя прямую XM , получим точки $XM \cap AD = K$, $XM \cap CD = L$ и т. д.

Задача 29. Докажите, что параллельной проекцией данного угла, который меньше развернутого, может быть любой угол (от 0 до 180°).

Указание. Пусть данный угол AOB равен φ , $0^\circ < \varphi < 180^\circ$. Через OB проведем плоскость α , не совпадающую с плоскостью AOB , и в плоскости α возьмем угол $\angle BOC = \beta$, $0^\circ < \beta < 180^\circ$. При параллельном проектировании, где направление проектирования – прямая AC , угол BOC будет параллельной проекцией угла AOB на плоскость α .

Задача 30. Трапеция $A_1B_1C_1D_1$ ($A_1B_1 \parallel C_1D_1$) является изображением равнобедренной трапеции $ABCD$ с углом 45° при основании. Постройте параллельную проекцию центра O окружности, описанной около трапеции $ABCD$.

Указание. Точка O – точка пересечения оси симметрии трапеции KL и серединного перпендикуляра к стороне BC . Проведя $CN \perp AB$, получим равнобедренный прямоугольный треугольник CNB . Его высота NM делит отрезок BC пополам. $CN \parallel KL$, $CM = MB$, $MN \cap KL = O$. Значит, $D_1K_1 = K_1C_1$, $A_1L_1 = L_1B_1$, $C_1N_1 \parallel K_1L_1$, $C_1M_1 = M_1B_1$, $M_1N_1 \cap K_1L_1 = O_1$.

Задача 31. Могут ли параллельные проекции вершин тетраэдра на данную плоскость α быть вершинами некоторого параллелограмма? Сколько направлений проектирования удовлетворяют этому условию?

Указание. Условию задачи удовлетворяет проектирование, когда направление задается прямой, проходящей через середины двух противолежащих ребер тетраэдра. Имеется три таких направления проектирования.

Задача 32. Даны параллельные проекции окружности и вписанного в нее треугольника. Постройте изображения высот треугольника.

Указание. Пусть $A_1B_1C_1$ – проекция треугольника ABC , O_1 – проекция центра окружности, описанной около треугольника ABC . Если M – середина отрезка AB , а N – середина отрезка BC , то $OM \perp AB$, $ON \perp BC$; $A_1M_1 = M_1B_1$, $B_1N_1 = N_1C_1$. Если AP и CK – высоты треугольника ABC , то $C_1K_1 \parallel O_1M_1$ и $A_1P_1 \parallel O_1N_1$.

5. Остановимся на основных требованиях, предъявляемых к чертежу.

Проблема изображения фигур имеет для геометрии двоякое значение. С одной стороны, чертеж делает изложение материала наглядным, а усвоение – более конкретным (иллюстрирующий чертеж).

С другой стороны – изображения фигур могут применяться как средство решения какой-либо геометрической задачи (решающий чертеж).

Учитель, сопровождающий изложение материала чертежами, не может пользоваться возможностями начертательной геометрии, так как у него для этого нет времени, а у ученика – соответствующих знаний. На практике учитель, выполняя изображение, заботится главным образом о создании наглядности при изучении геометрических закономерностей. Это приводит иногда к ошибкам. Учитель, порой, сам не подозревает, что его чертежи неверны. При пользовании такими чертежами еще слабая интуиция учащихся не только не укрепляется, но и направляется в неправильную сторону.

Наглядные изображения не только облегчают понимание рассуждений и выводов учителя, но и вызывают у учащихся пространственные представления изучаемых соотношений. В такой форме материал запоминается прочнее.

Сформулируем требования, которым должны удовлетворять выполняемые учителем чертежи.

1) Изображение должно быть правильным, т. е. должно представлять собой одну из проекций изображаемой фигуры.

2) Изображение должно быть наглядным, т. е. вызывать пространственное представление оригинала.

3) Изображение должно быть простым для выполнения, т. е. оно не должно содержать каких-либо построений, не имеющих отношения к теме занятия.

Удовлетворяющее этим требованиям изображение должно быть выполнено по правилам проекции, приближающейся к аппарату зрения. Такой проекцией является центральная проекция.

Однако это требование нельзя реализовать в условиях классного обучения, когда изображение на доске рассматривается учащимися из разных точек. Поэтому следует выбрать точку зрения, не зависящую от расположения учащихся в классе. Для этого подходит параллельная ортогональная проекция. Что касается техники выполнения чертежа, то допускается как чертеж с использованием чертежных инструментов, так и наглядный чертеж – рисунок “от руки”. Построения на доске должны следовать именно в том порядке, в котором протекает изложение темы.

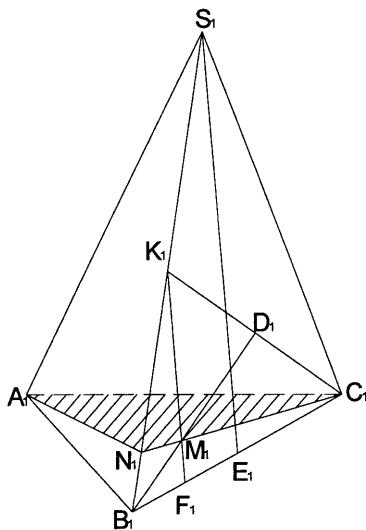
В качестве упражнения решим задачу.

Задача. Построить изображение правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой вдвое больше стороны основания, и изобразить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и перпендикулярной противолежащему боковому ребру.

Решение. Пусть $SABC$ – данная правильная пирамида. Не используя методы начертательной геометрии, а руководствуясь лишь условиями учебного процесса, как основание пирамиды ABC , так и вся пирамида $SABC$ могут быть изображены совершенно произвольно. Правильность такого изображения следует из теоремы Польке-Шварца, которая утверждает, что произвольно выбранная фигура $S_1A_1B_1C_1$ на изображении всегда является проекцией пирамиды $SABC$ заданной формы.

Пусть $S_1A_1B_1C_1$ – изображение данной пирамиды. Это изображение определяет проектирующий аппарат, поэтому все последующие построения на этом изображении уже не могут быть произвольными.

Построим изображение сечения, проходящего через AC и перпендикулярного SB . Построим S_1E_1 – изображение апофемы SE ($B_1E_1=E_1C_1$). Обозначив через K_1 середину отрезка B_1S_1 и соединив ее с C_1 , получим треугольник $B_1C_1K_1$, который будет изображением равнобедренного треугольника BCK ($BC=BK$). Если $C_1D_1=D_1K_1$, то B_1D_1 – изображение высоты, проведенной из вершины B . Проведем $K_1F_1 \parallel S_1E_1$. Так как $SE \perp BC$, то и $KF \perp BC$, т. е. K_1F_1 – изображение высоты треугольника BCK , прове-



денной из вершин K . Точка M_1 – изображение ортоцентра M треугольника BCK .

Следовательно, $CN \perp SB$. Аналогично доказывается, что $AN \perp SB$. Поэтому плоскость сечения CAN перпендикулярна ребру SB и $A_1C_1N_1$ – изображение этого сечения.

Замечание. Изображение многогранника представляет собой изображение его сетки, т. е. совокупности вершин и ребер. Можно доказать, что сетка, на которой в каждом узле сходятся три отрезка, является изображением многогранника. Имеет место следующее утверждение: сетки, топологически эквивалентные сеткам тетраэдра, куба или додекаэдра, являются изображениями многогранников. А вот для сеток, топологически эквивалентных сеткам октаэдра или икосаэдра, это утверждение не имеет места.

6. Изображение плоской фигуры будет определено, если наложенные на него условия позволяют определить истинную форму какого-либо треугольника этого изображения. Форма треугольника определяется двумя параметрами, например, двумя отношениями его сторон. Отсюда следует, что изображение плоских фигур в параллельной проекции содержит два параметра, которые могут быть определены условиями, наложенными на оригинал.

Таким образом, учитель, приступая к изображению плоской фигуры, располагает двумя параметрами, которые он может израсходовать, налагая в ходе рассуждений те или иные метрические условия на оригинал. Установление отношения двух отрезков эквивалентно заданию одного параметра, а отношение трех отрезков – заданию двух параметров. Условие ортогональности в оригинале двух отрезков равносильно заданию одного параметра. Условие, что некоторый луч на изображении является изображением биссектрисы угла, равносильно заданию одного параметра. Задание истинной величины какого-либо угла на изображении эквивалентно одному параметру. Изображение будет определено, если на нем задано отношение истинных длин двух каких-либо отрезков (один параметр) и известна истинная величина какого-либо угла (второй параметр). Изображение треугольника будет определено, если на нем дано изображение точки, служащей в оригинале точкой пересечения высот (ортогоцентром).

Выбор на изображении треугольника точки, служащей в оригинале центром описанной около треугольника окружности, делает изображение метрически определенным. Аналогичное утверждение получим, взяв в качестве изображения центр вписанной в оригинал окружности. Любой эллипс на изображении можно считать проекцией окружности.

Любой треугольник на плоскости проекций может быть принят за изображение правильного треугольника, но при этом все дальнейшие построения не могут быть произвольными.

Изображение правильного пятиугольника не может быть задано произвольно: можно выбрать произвольный треугольник, как изображение

треугольника, образуемого тремя соседними вершинами пятиугольника, и вполне определенным образом достроить пятиугольник (каждая из диагоналей пятиугольника параллельна одной из его сторон, а точка пересечения двух диагоналей делит каждую из них в отношении золотого сечения).

Изображение правильного шестиугольника $ABCDEF$ можно построить в такой последовательности: строим изображение правильного треугольника ACE , проводим медианы, которые пересекаются в точке O_1 , откладываем $O_1D_1=O_1A_1$, $O_1F_1=O_1C_1$, $O_1B_1=O_1E_1$.

Изображение правильного восьмиугольника получается из изображения квадрата. (Напомним, что изображение называется метрически определенным, если оно позволяет с точностью до подобия восстановить оригинал.)

В ортогональной проекции (и только в ней) очертание шара есть окружность. Если на чертеже шар изображен в виде круга, то это означает, что все изображение должно выполняться в ортогональной проекции, так как недопустимо одну часть оригинала изображать в одной проекции, а другую часть – в другой.

Изображением четырехугольника может служить любой четырехугольник, у которого диагонали точкой пересечения делятся в тех же отношениях, что и в оригинале.

7. Рассмотрим в окружности два взаимно перпендикулярных диаметра. То свойство, что угол между ними равен 90° , не сохраняется при проектировании (говорят, что оно не инвариантно). Но у них есть свойство, которое инвариантно (сохраняется при проектировании): каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому диаметру. Это свойство называется сопряженностью.

Взаимно перпендикулярные диаметры окружности изображаются сопряженными диаметрами эллипса. Центр окружности изображается центром эллипса. Прямая, касающаяся окружности в точке A , изображается касательной к эллипсу в точке A_1 . Эта касательная (на изображении) параллельна тому диаметру эллипса, который сопряжен с диаметром, проходящим через точку касания.

Квадрат, описанный около окружности, изображается параллелограммом, описанным около эллипса, причем стороны этого параллелограмма имеют сопряженные направления; отрезки, соединяющие противолежащие точки касания, – сопряженные диаметры эллипса.

Задача. Изобразите окружность со вписанным в нее правильным треугольником.

Решение. На оригинале: $CE \perp AB$, $OE=ED$. На проекции окружность изобразим произвольным эллипсом; O_1 – центр этого эллипса. Пусть C_1 – произвольная точка эллипса. Тогда C_1D_1 – его диаметр. Разделим D_1O_1 пополам, $D_1E_1=E_1O_1$ и через точку E_1 проведем прямую, направление которой сопряжено C_1D_1 . Для этого проведем какую-нибудь хорду, параллельную C_1D_1 , разделим ее пополам и через полученную точку и точ-

ку O_1 проведем прямую. Эта прямая имеет направление, сопряженное с C_1D_1 . Проведенная через точку E_1 прямая, параллельная построенной прямой, пересекает эллипс в точках A_1 и B_1 . Треугольник $A_1B_1C_1$ – изображение треугольника ABC .

8. Изображение называется полным, если всякий элемент (точка, прямая, их комбинации), связанный с оригиналом, однозначно определен и на изображении.

Изображение одной, двух, трех, четырех точек общего положения всегда полное. Если фигура содержит и другие элементы, то их изображение можно построить на проекции, если их положение на оригинале задано. Если уже известно некоторое количество заданных точек, прямых, плоскостей, то новые элементы считаются заданными в следующих случаях.

а) Точка считается заданной, если дано ее изображение и указана проходящая через нее заданная прямая или плоскость. Точка также считается заданной, если она указана как точка пересечения двух заданных прямых или прямой и плоскости, или трех заданных плоскостей.

б) Прямая считается заданной, если дано ее изображение и указана проходящая через нее заданная плоскость. Прямая также считается заданной, если заданы: две ее точки или одна ее точка и параллельная ей прямая, или две проходящие через нее плоскости и т. д.

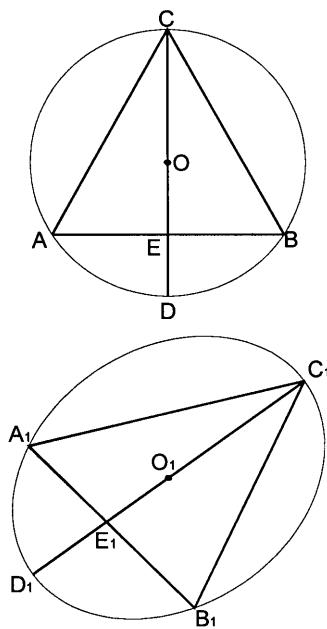
в) Плоскость считается заданной, если указаны три лежащие в ней заданные точки или лежащие в ней заданные точка и прямая, или лежащая в ней заданная точка и параллельная ей заданная плоскость и т. д.

9. Особенно много ошибок встречается в задачах, связанных с проектированием тел вращения.

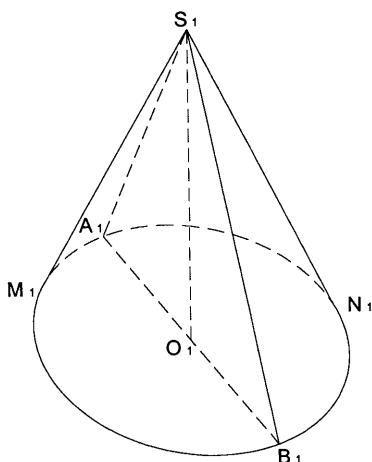
Любой эллипс можно рассматривать как ортогональную или косоугольную проекции окружности, поэтому и конструктивные свойства эллипса в той и другой проекциях остаются неизменными.

Чтобы получить изображение высоты конуса или цилиндра, нужно провести высоту из центра основания перпендикулярно большой или малой оси эллипса, служащего изображением основания этих тел. Вертикальное изображение высоты на чертеже задает вертикальное положение малой оси эллипса, а потому и горизонтальное положение его большой оси. При таком их расположении достигается большая наглядность чертежа.

Параллельные к эллипсу проходят через две диаметрально противоположные его точки. Поэтому в изображении цилиндра одно



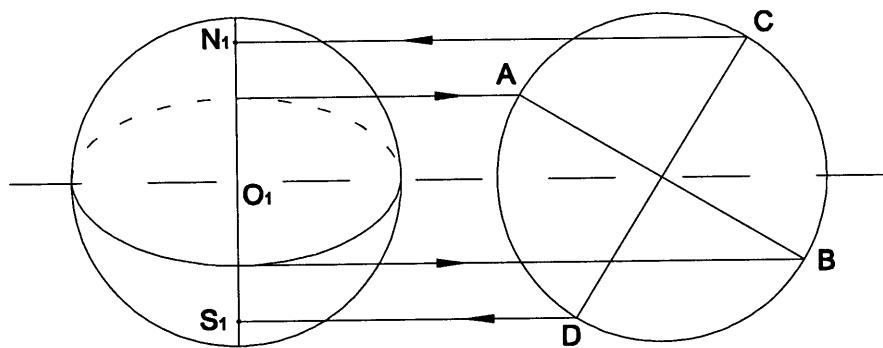
из его осевых сечений содержит обе контурные образующие. Контурные образующие конуса (и усеченного конуса), также являются касательными к эллипсу, служащему изображением основания. Но эти касательные не параллельны и точки касания не принадлежат одному диаметру.



При выполнении ортогональной проекции прямого кругового конуса основание конуса изображается произвольным эллипсом. Вершина конуса S изображается произвольной точкой (но при этом мы руководствуемся соображениями наглядности изображения). Контурные образующие конуса изображаются касательными к эллипсу, проведенными из точки S_1 . (Контур изображения называется абрисом.)

Часто осевое сечение конуса изображается в виде треугольника $M_1S_1N_1$, где M_1 и N_1 – проекции точек касания контурных образующих. А это совершенно неправильно: отрезок M_1N_1 не проходит через точку O_1 , а потому не является изображением диаметра окружности. Чтобы нарисовать осевое сечение конуса на проекции конуса, нужно провести диаметр эллипса и соединить его концы с точкой S_1 .

Самое неблагополучное положение с чертежами, где требуется изобразить шар. При параллельном проектировании шара получается либо окружность, либо эллипс. На ортогональной проекции абрис шара – окружность, а в косоугольной проекции – эллипс. Из соображений большей наглядности шар рекомендуется изображать в ортогональной проекции. Сначала чертим окружность, представляющую абрис. Затем чертим эллипс, изображающий окружность большего круга – сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр. Это сечение называют экваториальным. Перпендикуляр к плоскости большого круга, проходящий через центр сферы, пересекает ее в двух точках, называемых полюсами, соответственно северным (N_1) и южным (S_1).



Распространенная ошибка – помещать изображение полюсов N_1 и S_1 на абрисе. Если экваториальное сечение изображено эллипсом, ближняя к нам часть которого ниже дальней его части, то глаз наблюдателя находится выше плоскости экватора. Поэтому наблюдатель видит точку N_1 ниже абриса, а точку S_1 – выше абриса, она находится на задней, невидимой части шара.

Только в том случае, если бы проектирующие прямые были параллельны плоскости экватора, полюсы находились бы на абрисе. Но в этом случае экватор изображался бы не эллипсом, а отрезком. Чем шире эллипс, изображающий экватор, тем дальше от абриса находятся изображения полюсов. На приведенном здесь рисунке показано, как построить изображения полюсов, если дано изображение экватора: переносим на правую окружность малую ось эллипса; проводим диаметр AB (это – проекция экваториального круга); проводим диаметр $CD \perp AB$ (это – проекция диаметра NS); переносим точки C и D , как показано на рисунке.

10. Коснемся изображения плоскости на чертеже.

Если указаны некоторые метрические условия, касающиеся оригинала, недостаточные для того, чтобы чертеж стал метрически определенным, то требуется осторожность в обращении с ним, потому что на нем кое-что можно изображать произвольно, а кое-что нельзя.

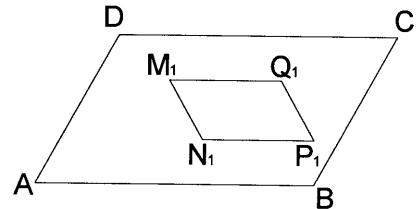
Приведем пример. С давних времен принято изображать плоскость в виде параллелограмма. При этом негласно предполагается, что этот параллелограмм изображает прямоугольный кусок плоскости. Тем самым на рисунке указываются два перпендикулярных направления, на что, как правило, не обращается внимание.

Например, квадрат на плоскости можно изобразить произвольным параллелограммом. Но приведенное здесь изображение квадрата $MNPQ$ неправильное: $N_1P_1 \parallel AB$, а M_1N_1 и AD не параллельны.

Если мы рисуем на плоскости, изображенной в виде параллелограмма, эллипс, то чертеж тоже может оказаться неправильным: один из сопряженных диаметров может оказаться параллельным стороне параллелограмма, а другой – нет.

Поэтому предпочтительнее изображать плоскость в виде куска с оборванными краями. Но и здесь нас могут подстерегать неприятности. Если мы поместим на одну и ту же плоскость, хотя и с оборванными краями, правильную четырехугольную пирамиду и, например, конус, то каждая из этих фигур определяет свою метрику в плоскости основания, и эти метрики могут не совпадать (сопряженные диаметры эллипса, например, не параллельны сторонам параллелограмма, служащего изображением основания пирамиды).

Овладение приемами построения изображения дается лишь в результате систематических упражнений. Наглядность, правильность и проста-



та изображения – эти три основных требования к чертежам на уроках геометрии должны быть постоянно в поле зрения учителя.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сборник задач по геометрии для 9-10 классов / И.С. Герасимова [и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 190 с.
2. Геометрия : учебное пособие для 9-10 классов / В.М. Клопский [и др.]. – М. : Просвещение, 1983. – 255 с.
3. *Лоповок, Л.М.* Изображение фигур в стереометрии. “Преподавание геометрии в 9-10 классах” / Л.М. Лоповок. – М. : Просвещение, 1980. – С. 158–184.
4. *Четверухин, Н.Ф.* Изображение фигур в курсе геометрии / Н.Ф. Четверухин. – М. : Учпедгиз, 1958. – 216 с.
5. Энциклопедия элементарной математики. – Кн. 4 : Геометрия. – М. : Физматгиз, 1963. – 567 с.

Поступила в редакцию 18.02.2014 г.

УДК 535.33:621.378

Е.В. ТИМОЩЕНКО, В.А. ЮРЕВИЧ, Ю.В. ЮРЕВИЧ

РАСЩЕПЛЕНИЕ КОРОТКОГО ОПТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ОТРАЖЕНИИ ОТ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ ПЛОТНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЫ

Предсказан новый нелинейный оптический эффект – расщепление короткого светового импульса, отражаемого тонким слоем плотной резонансной среды. Эффект возможен в режиме когерентного взаимодействия света с веществом и возникает как следствие нутационных колебаний разности населенностей, развивающихся в условиях динамичной фазовой перестройки поля лазерного импульса и поляризованности среды тонкого слоя. Решающим фактором развития процесса расщепления является эффект фазового смещения, обусловленный влиянием близких дипольных взаимодействий на контур линии поглощения.

Введение

Изменение характеристик оптических пучков или импульсов при отражении от приповерхностных слоев различных сред привлекает внимание исследователей в связи с задачами временного или пространственного (поперечного) профилирования световых потоков [1-3], а также диагностики физических свойств тонких пленок [4]. Управляемое преобразование когерентного излучения в оптическом диапазоне с использованием активных тонких пленок необходимо, например, для формирования в лазерных резонаторах особо интенсивных фемтосекундных им-

пульсов [5, 6]. В связи с необходимостью эффективного управления лазерным излучением, а также созданием элементной базы оптоэлектроники, возникает чисто практический интерес к изучению отклика пленочных структур на световые импульсы [6, 7].

Миниатюрность тонкопленочных систем на основе используемых в оптике и лазерной физике нелинейных материалов, а также их большие возможности по управлению светом обусловили широкое распространение в устройствах передачи и обработки информации. Поляризованность таких систем при воздействии светового электрического поля на образующие их пленочные слои в значительной степени может характеризоваться резонансной нелинейностью. Реакцию пленки нелинейной среды на световое поле рассматривают в модели особо тонкого слоя резонансных атомов (толщина слоя значительно меньше длины волны приложенного поля). Изучение закономерностей отражения активной пленки в этой модели представляет особый интерес – переходные процессы, происходящие при взаимодействии света со средой, в которых проявляется нелинейная связь свойств среды и характеристик поля, можно анализировать в рамках более простой динамической схемы. Эта модель, тем не менее, позволяет детально, без усреднения, учитывать особенности реакции поверхностного слоя на излучение, связанные с нелинейным осцилляторным откликом среды и описываемые более точной схемой, использующей материальные уравнения квантовомеханической матрицы плотности для поляризованности и разности населенностей.

В настоящей работе в рамках такой схемы взаимодействия анализируется влияние спектрального сдвига линии поглощения, который обусловлен диполь-дипольным взаимодействием, на отражение поверхностным слоем плотной резонансной среды в режиме импульсного воздействия светового поля. Влияние локального поля дипольных атомов на контур линии резонансного поглощения надежно подтверждено данными спектроскопических измерений [8]. Фазовый эффект, вызванный ближними полями элементарных диполей, достаточно типичен для плотных резонансных сред (то есть, сред с особо высокой концентрацией активных центров) [9]. Благодаря формированию в них экситонных энергетических зон интенсивно изучаемые в настоящее время полупроводниковые структуры на основе квантоворазмерных элементов рассматриваются именно в таком качестве [10]. По оценке, приведенной, например, в [11], величины дипольного момента экситонных частиц могут достигать $(1...3) \cdot 10^{-28} \text{ Кл}\cdot\text{м}$. Постановка и решение задачи учета фазового эффекта ближних полей при отражении фемтосекундных лазерных импульсов подобными активными пленками, а также использование полуклассической осцилляторной модели материального отклика составляют оригинальность работы. Теоретический анализ существенно нестационарного процесса резонансного отражения из-за нелинейности отклика и дисперсии в среде отражающего поверхностного слоя представляет значительную сложность. Поэтому для оценки характера и

степени деформации отраженного импульса в работе применено компьютерное моделирование.

Основные уравнения

Рассматривается планарная резонансная пленка с толщиной l , значительно меньшей длины волны света $\lambda = 2\pi c/\omega$, находящаяся на границе раздела двух линейных оптических сред. При том, что типичная для плотных резонансных сред концентрация активных центров предполагается высокой, расстояние между резонансными частицами в тонком слое считается достаточным, чтобы избежать перекрытия их электронных орбиталей. Это дает возможность придерживаться традиционного описания взаимодействия элементарных диполей в квантоворазмерной структуре [10]. Для определенности обычно ограничиваются подробным рассмотрением лишь ТЕ-волн, поэтому в задаче взаимодействия поля зондирующего светового импульса несущей частоты ω с ансамблем частиц, образующим активный слой, применимо плосковолновое приближение. В случае нормального падения на пленку с нерезонансным показателем преломления η соотношения для полей с учетом резонансной поляризации в поверхностном слое запишутся в виде [12]:

$$E = \frac{2}{\eta+1} E_i + \frac{\mu N l}{\epsilon_0(\eta+1) c} \frac{d\rho}{dt}, \quad E_r = -\frac{\eta-1}{\eta+1} E_i + \frac{\mu N l}{\epsilon_0(\eta+1) c} \frac{d\rho}{dt}. \quad (1)$$

Здесь $E(t)$ – напряженность прошедшего в среду поля, $E_i(t)$ и $E_r(t)$ – напряженности внешнего импульсного поля и отраженного пленкой поля, средний дипольный момент активных центров, N – их концентрация. Соотношения (1) указывают на то, что при воздействии света на активную пленку в прошедших (отраженных) пучках оказывается существенной дополнительная к френелевскому преломлению (отражению) сверхизлучательная составляющая. Ее величина определена скоростью резонансной поверхностной поляризации (учитывается, что макроскопическая объемная резонансная поляризованность связана с вероятностной величиной ρ так: $P(t)=\mu N \rho(t)$). Условия связи полей (1) должны быть дополнены уравнениями квантовомеханической матрицы плотности для вероятностных переменных поляризованности ρ и разности населенностей n уровней резонансного перехода. При учете конечности времен T_1 и T_2 продольной и поперечной релаксации отклика среды материальные уравнения представлены аналогично [13]:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{2}{T_2} \frac{d\rho}{dt} + \omega_0^2 \rho = -\frac{2\mu}{\hbar} \omega_0 n E, \quad \frac{dn}{dt} + \frac{1}{T_1} (n - n_0) = -\frac{2\mu}{\hbar \omega_0} \frac{d\rho}{dt} E,$$

где ω_0 – среднее значение собственной частоты элементарного осциллятора, n_0 – начальное значение разности населенностей. Вероятность резонансной поляризованности ρ описывается высокочастотным осциллятором, сила которого зависит от разности населенностей n . Населенность n насыщается действующим полем, поэтому динамика поляриза-

ционного осциллятора существенно нелинейна. Характерностью плотной резонансной среды является диполь-дипольное взаимодействие структурных элементов. Переменная светового поля в материальных уравнениях должна включать компоненты, которые означают учет в его действующей величине близких полей диполей. Как отмечено в [12], эффективная динамика лорентцовой составляющей действующего поля E' определяется, в основном, резонансной поляризацией, то есть напряженность действующего на элементы среды поля в обычно используемом приближении среднего поля следует представить так:

$$E'(t) = E + \frac{\mu N}{3\epsilon_0} \rho,$$

где E – напряженность светового поля, прошедшего в среду. Для рассматриваемой в дальнейшем ситуации учитывается конечность времени фазовой релаксации T_2 , при этом время релаксации населенности T_1 значительно больше T_2 . Система уравнений, используемых при моделировании отражения импульсного поля, тогда запишется так:

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} + \frac{2}{\tau_2} \frac{d\rho}{d\tau} + \rho = -2n(e + \gamma\rho), \quad \frac{dn}{d\tau} = -2 \frac{d\rho}{d\tau} (e + \gamma\rho), \quad e(\tau) = e_i + \frac{\kappa}{\tau_2} \frac{d\rho}{d\tau}. \quad (2)$$

При формулировке (2) оказалось удобным перейти к нормированным переменным: $e = \frac{\mu}{\hbar\omega} E(\tau)$, $e_i = \frac{2\mu}{\hbar\omega(\eta+1)} E_i$. В системе (2) нормированы время и параметр фазовой релаксации – $\tau = \omega_0 t$, $\tau_2 = \omega_0 T_2$, а также определена величина показателя резонансного поглощения пленки $\kappa = \mu^2 \omega N l T_2 / \epsilon_0 (\eta + 1) \hbar c$ и нормированный коэффициент в лорентцовой поправке для локального поля $\gamma = \mu^2 N / 3 \epsilon_0 \hbar \omega_0$. В случае резонансного взаимодействия учитывается, что несущая частота импульса близка к ω_0 (в пределах частотной ширины резонанса, оцениваемой величиной $2/T_2$). При учете поправки к локальному полю осцилляторное уравнение для поляризованности в системе (2) содержит составляющую, которая описывает смещение резонансной частоты, пропорциональное разности населенности. Снижение n по мере квазинепрерывного нарастания мощности входного сигнала (насыщение резонансного поглощения) должно сопровождаться дрейфом резонансной частоты в “красную” сторону.

Результаты численного эксперимента

В рамках численного решения разностного аналога системы (2) моделировалась реакция тонкого слоя на внешний сигнал с несущей нормированной частотой $\Omega = 1 + \Delta$ ($\Delta = (\omega_0 - \omega)/\omega_0$), представленный зависимостью $e_i(\tau) = e'_i(\tau) \exp(i\Omega\tau)$. Его амплитуда задавалась в виде ги-

перболического секанса: $e'_i(\tau) = (2e_0/\Delta\tau)/(\exp(\tau/\Delta\tau)+\exp(-\tau/\Delta\tau))$, то есть, сигнал представлял собой оптический импульс фемтосекундной длительности, определяемой значением $\Delta\tau$. Изменением величины Δ можно было варьировать отстройку несущей частоты от резонанса. Естественно было считать, что при отсутствии зондирующего извне поля ансамбль активных центров слоя (в начальный момент времени) находится в основном состоянии, т. е. $n(\tau=0)=1.0$, а резонансная поляризованность отсутствует – $\rho(\tau=0)=0$, также первоначально нулевое значение имеет и скорость поляризованности. Для этих условий решалась известная задача Коши, т. е. при расчете аналога системы (2) непосредственно определялась зависимость $\rho(\tau)$, а также $e(\tau)$. Напряженность отраженного поля $e_r(\tau)$ выражалась на основе полученной зависимости, следуя соотношениям (1); результаты расчета иллюстрированы для нормированной плотности энергии $e_r^2(t)$ на временной шкале в долях пикосекунд. В выборе параметров моделирования, которые использовались при определении коэффициентов системы (2) в расчетах, исходили из оценок, сделанных, например, в работе [5] для квантоворазмерных полупроводниковых структур на основе *InGaAs/GaAs* или *GaInNAsSb*.

Многократными расчетами динамики резонансного отражения, подобными приведенным на рисунках 1 и 2, в сущности, реализован численный эксперимент по изучению трансформации когерентного сигнала, взаимодействующего с веществом пленки. Деформация импульсов отслеживается для нарастающего ряда значений пиковой напряженности приложенного поля $e_0/\Delta\tau$ и показателя ненасыщенного поглощения κ (на рисунке 1, *а* представлена форма зондирующего импульса).

Для относительно небольших значений пиковой напряженности при условии точного резонанса и в предположении отсутствия фазового эффекта близких полей диполей деформация отраженных импульсов присутствует, но не особо значительна (рис. 1, *б - д*). Ее причина только в возможности нутационных колебаний разности населенности основного перехода. Соответственно, развиваются сверхизлучательные колебания поляризованности – в излучении проявляется модуляция с частотой Раби. В условиях сильного затухания (по очевидной причине – толщина слоя крайне невелика) контраст модуляции, огибающей импульс невысок. Импульс инвертирует разность населеностей, на определенном этапе взаимодействия оказывается возможным усиление амплитуды поля [14]. Этим фактором и обусловлено изменение сигнала, представляющее собой раздвоение пиковой части импульса (симметричное (рис. 1, *б*) или асимметричное как на рис. 1, *в - д*). По мере увеличения мощности входного импульса асимметрия возрастает, контраст модуляции снижается.

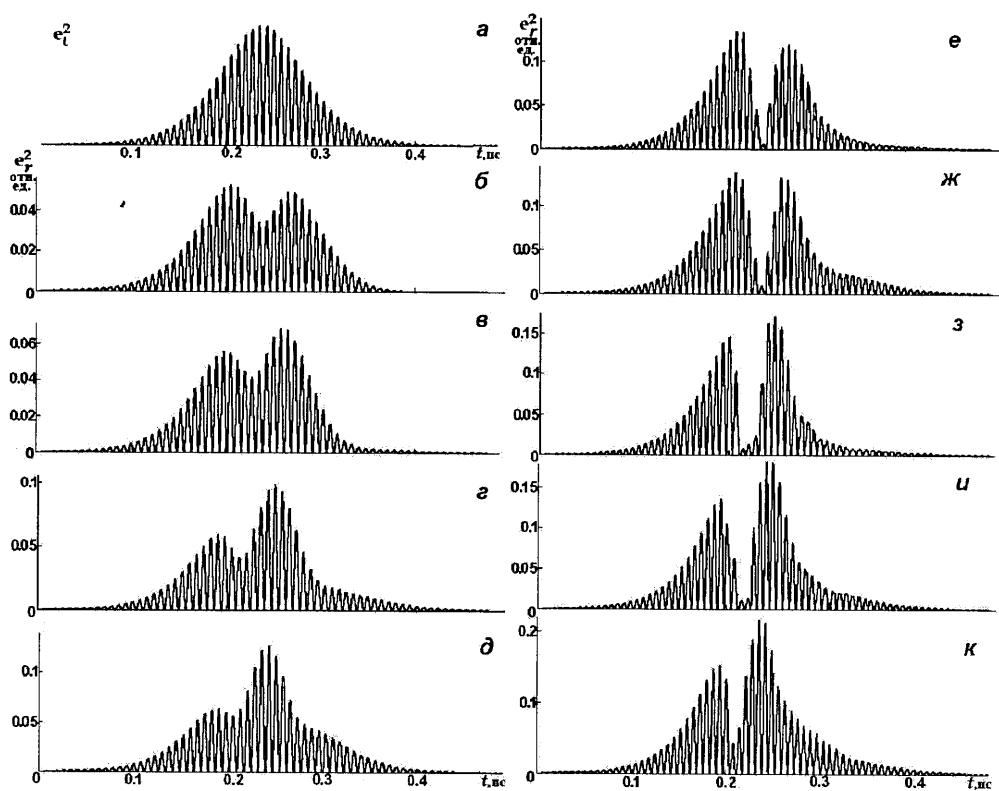


Рисунок 1. Форма отраженных импульсов:

входной импульс (a), $e_0/\Delta\tau=0.5$ (a, б) 0.54 (б), 0.6 (г), 0.66 (д, е), 0.7 (ж), 0.72 (з), 0.75 (и), 0.8 (к), $\gamma=0$ (б-д), 1.76 (е-к), $\kappa=1.7$, $\Delta=0$ (б-д), 0.1 (е-к); $T_2=2.0 \cdot 10^{-13} c$, $\lambda=1.25 \cdot 10^{-6} m$, $\eta=3.6$

Результаты моделирования отражения при учете диполь-дипольного взаимодействия указывают на возможность иного сценария процесса трансформации сигнала. Следствием нелинейного фазового эффекта, вызванного смещением резонансной частоты отклика среды пленки, является фактическое расщепление импульса (рис. 1, е - к). Условием проявления подобного рода качественного изменения формы импульса выступает отстройка несущей частоты импульса от резонансной ($\omega_0 > \omega$). В определенной области значений e_0 контраст картины раздвоения импульса с увеличением входной пиковой мощности нарастает, увеличивается асимметрия разделенных частей импульса (рис. 1, ж - и).

Причиной расщепления отраженных тонким слоем плотной резонансной среды световых сигналов в указанных условиях выступает нелинейная динамика фазового соотношения светового поля и процесса резонансной поляризации. Эффект затягивания первоначально отстроенного по частоте поля к центру линии давно известен в литературе. В ходе взаимодействия световое поле импульса по частоте настраивается на резонанс, поглощение в центре линии максимально, но при высокой мощно-

сти входного поля для него характерно насыщение. Перестройка фазы поляризованности следует за резонансной частотой, динамично смещающейся из-за эффекта близких полей диполей. Оба процесса характеризуются различными временами релаксации. Из-за динамических отклонений от условий резонансного поглощения во временной области, соответствующей пикиной части импульса, вместо насыщения и снижения поглощения возможно его резкое нарастание, в итоге импульс распадается на две части.

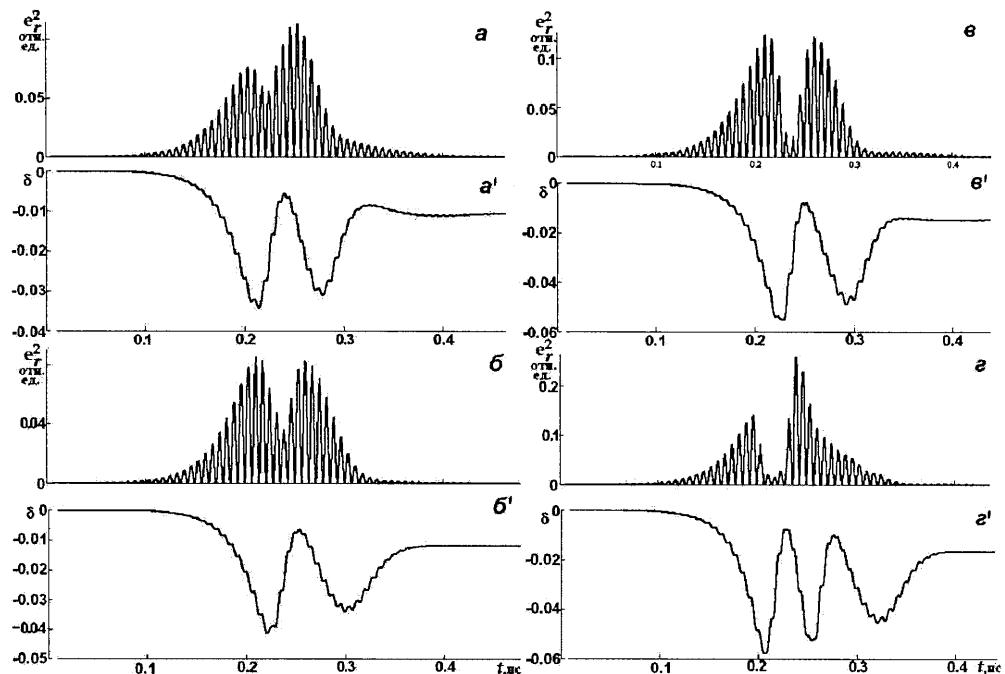


Рисунок 2. Форма отраженных импульсов и динамика фазового сдвига:

$$\begin{aligned} \kappa &= 0.8 (a), 0.9 (b), 1.2 (c), 1.3 (z), e_0/\Delta\tau = 0.6, \gamma = 1.76, \Delta = 0.05; T_2 = 2.0 \cdot 10^{-13} \text{ с}, \\ \lambda &= 1.25 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \eta = 3.6 \end{aligned}$$

Относительное смещение резонансной частоты импульса δ (рисунок 2, а' – г') рассчитывалось по изменению нормированной локальной добавки к фазе отклика в уравнении для резонансной поляризованности в системе (2): $\delta = \gamma(n - n_0)$. Очевидно, что временная структура δ повторяет динамику нутационных колебаний разности населенностей. Судя по результатам моделирования, иллюстрированным на рисунке 2, оптимальным условием достижения наиболее высокого контраста и скважности образовавшихся в результате расщепления импульсов, является превышение достижимых в ходе взаимодействия света с веществом пленки “пиковыми” значений фазового сдвига δ по отношению к величине начальной частотной отстройки Δ . Наиболее выразителен эффект расщепления именно в вариантах рисунка 2, в, г, для которых выполнено это условие.

Заключение

Основным результатом работы является предсказание нового физического эффекта – расщепления короткого оптического импульса, отражаемого тонким слоем плотной резонансной среды. Эффект возможен в режиме когерентного взаимодействия света с веществом и возникает как следствие нутационных колебаний разности населенностей, развивающихся в условиях динамичной фазовой перестройки поля и поляризованности среды тонкого слоя. Решающим фактором развития процесса расщепления импульса при резонансном отражении является эффект фазового смещения, обусловленный влиянием ближних дипольных взаимодействий на контур линии поглощения. Результаты исследования могут быть полезны при разработке методов формирования и сокращения длительности особо коротких лазерных импульсов, а также для совершенствования приемов диагностики нелинейных свойств субмикронных и наноразмерных планарных слоев вещества.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Надькин, Л.Ю.** Явление самоотражения плоскопараллельной пластинки полупроводника при двухфотонном возбуждении биэкситонов / Л.Ю. Надькин, П.И. Хаджи // Письма в ЖТФ. – 2004. – 2005. – Т. 31. – Вып. 1. – С. 67–72.
2. **Наседкина, Ю.Ф.** Продольный сдвиг и трансформация гауссова пучка при отражении от тонкой пленки / Ю.Ф. Наседкина, Д.И. Семенцов // Опт. и спектр. – 2007. – Т. 102. – № 7. – С. 846–853.
3. **Злодеев, И.В.** Трансформация гауссова импульса при отражении от резонансной тонкопленочной структуры / И.В. Злодеев, Ю.Ф. Наседкина, Д.И. Семенцов // Опт. и спектр. – 2012. – Т. 113. – № 2. – С. 234–241.
4. Волноводный метод измерения параметров тонких пленок / А.В. Хомченко [и др.]. / ЖТФ. – 2005. – Т. 75. – Вып. 6. – С. 98–106.
5. **Зельдович, Б.Я.** Влияние возбуждения поверхностной электромагнитной волны на временную форму отраженного лазерного импульса / Б.Я. Зельдович, А.Н. Чудинов, А.А. Шульгинов // Письма в ЖТФ. – 1992. – Т. 18. – Вып. 22. – С. 61–65.
6. **Keller, U.** Recent developments in compact ultrafast lasers / U. Keller // Nature. – 2003. – Vol. 424. – P. 831–838.
7. **Кийко, В.В.** Зеркало с изменяемым амплитудно-фазовым коэффициентом отражения. 2. Моделирование лазерного резонатора с активным выходным зеркалом // В.В. Кийко, В.И. Кислов, Е.Н. Офицеров / Квант. электрон. – 2011. – Т. 41. – № 3. – С. 239–242.
8. Linear and Nonlinear Optical Measurements of Lorentz Local Fields // J.J. Maki [et al.] / Phys. Rev. Lett. – 1991. – Vol. A47. – N 8. – P. 1247–1252.
9. **Scalora, M.** Propagation effects and ultrafast optical switching in dense media / M. Scalora, C. M. Bowden // Phys. Rev. – 1995. – Vol. A51. – N 5. – P. 4048–4056.
10. **Kaplan, A.E.** Nanoscale Stratification of Local Optical Fields in Low – Dimensional Atomic Lattices // A.E. Kaplan, S.E. Volkov / Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 101. – N 13. – P. 133902-1-4

11. *Gehrig, E.* Mesoscopic spatiotemporal theory for quantum - dot lasers / E. Gehrig, O. Hess // Phys. Rev. – 2002. – Vol. A65. – N 3. – P. 033804-1-033804-16.
12. *Захаров, С.М.* Нелинейное взаимодействие света с тонким слоем поверхностных резонансных атомов / С.М. Захаров, Э.А. Маныкин // ЖЭТФ. – 1994. – Т. 106. – С. 1053–1065.
13. *Пантел, Р.* Основы квантовой электроники / Р. Пантел, Г. Путхоф. – М. : Мир, 1972. – 384 с.
14. *Тимошенко, Е.В.* Сверхизлучательная трансформация световых импульсов при отражении граничным нелинейным слоем / Е.В. Тимошенко, В.А. Юрьевич // Доклады Национальной АН Беларуси. – 2010. – Т. 54. – № 6. – С. 56–61

Поступила в редакцию 09.04.2014 г.

УДК 535.378.327

Ю.В. ЮРЕВИЧ

НЕЛИНЕЙНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ТОНКОГО СЛОЯ ПЛОТНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЫ

В рамках полуклассического подхода к изучению взаимодействия света с веществом проведен расчет нелинейного отклика оптической структуры, включающей тонкий граничный слой плотной резонансной среды, на когерентное световое поле. На основе полученных аналитических соотношений возможна характеристика спектральной развертки поглощения и дисперсии в диапазоне частот, соответствующем оптическому резонансу, для разной степени насыщения резонансного перехода. Для модельных параметров полупроводниковых квантоворазмерных структур предсказывается возможность гистерезисного хода дисперсионной зависимости диэлектрической восприимчивости граничного слоя.

Введение

Оптимизация действия и миниатюризация оптических элементов являются важными направлениями современного развития лазерно-оптических технологий. Для этих целей эффективно используются материалы с высокой концентрацией активных центров (атомов, молекул, ионов или экситонов) – так называемые плотные резонансные среды. Известно, что эти среды в определенных спектральных диапазонах и интервалах интенсивности действующего светового поля способны демонстрировать бистабильный оптический отклик даже в отсутствие внешней обратной связи. Нелинейность отклика и свойство подобной бистабильности, получившей название внутренней, характерна даже для тонких пленок плотных резонансных сред [1, 2]. Типичным для этих материалов

является спектральный сдвиг линии поглощения, обусловленный ближним диполь-дипольным взаимодействием атомов. Влияние локального поля дипольных атомов на контур линии резонансного поглощения надежно подтверждено данными спектроскопических измерений [3]. К этим плотным резонансным средам относят интенсивно изучаемые в последнее время квантоворазмерные структуры на используемых в оптике и лазерной физике полупроводниках [4].

Резонансная нелинейность и обусловленная ею внутренняя оптическая бистабильность при воздействии на поверхностные слои или тонкие активные пленки когерентных потоков излучения изучены, в принципе, достаточно. В литературе, однако, отсутствуют расчеты дисперсионной развертки восприимчивости оптически плотного тонкого слоя, образованного активными центрами, в зависимости от насыщения поглощения. В настоящей работе формулируется соотношение для диэлектрической восприимчивости тонкого слоя плотной резонансной среды с учетом насыщения.

Постановка задачи и основные уравнения

При формулировке основных уравнений, описывающих нелинейное взаимодействие плосковолнового светового поля с пленкой, далее будем придерживаться довольно распространенного в литературе приближения граничного сверхтонкого слоя резонансных атомов. Из граничных электродинамических условий для полей следуют соотношения между напряженностями внешнего, прошедшего и отраженного электрического поля (E_p , E и E_r) и плотности вероятности резонансной поляризованности ρ :

$$E = \frac{2}{\eta + 1} E_i + \frac{\mu N l}{\epsilon_0 (\eta + 1) c} \frac{d\rho}{dt}, \quad E_r = -\frac{\eta - 1}{\eta + 1} E_i + \frac{\mu N l}{\epsilon_0 (\eta + 1) c} \frac{d\rho}{dt}. \quad (1)$$

Здесь μ – средний дипольный момент частицы, N – концентрация активных центров, η – относительный показатель преломления линейных сред. Расстояние между активными центрами в граничном слое допускается достаточно большим во избежание перекрытия их электронных орбиталей, при этом можно сохранить традиционное описание взаимодействия атомарных диполей в квантоворазмерной структуре [4]. Условия связи полей (1) должны быть дополнены уравнениями квантовомеханической матрицы плотности для вероятностных переменных поляризованности ρ и разности населенностей n уровней резонансного перехода. В наиболее общем случае рассматриваемой в дальнейшем ситуации с воздействием поля на активные центры в структуре тонкого слоя учитывается конечность времен T_1 и T_2 продольной и поперечной релаксации отклика среды слоя, и материальные уравнения записываются в таком виде [5]:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{2}{T_2} \frac{d\rho}{dt} + \omega_0^2 \rho = -\frac{2\mu}{\hbar} \omega_0 n E , \quad \frac{dn}{dt} + \frac{1}{T_1} (n - n_0) = -\frac{2\mu}{\hbar \omega_0} \frac{d\rho}{dt} E,$$

где ω_0 – среднее значение собственной частоты атомного осциллятора. Учет диполь-дипольного взаимодействия в приближении среднего поля [3] приводит к таким уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{2}{T_2} \frac{d\rho}{dt} + \left(\omega_0^2 + \frac{2\mu^2 N}{3\hbar \epsilon_0} \omega_0 n \right) \rho &= -\frac{2\mu}{\hbar} \omega_0 n E, \\ \frac{dn}{dt} + \frac{1}{T_1} (n - n_0) &= -\frac{2\mu}{\hbar \omega_0} \frac{d\rho}{dt} \left(E + \frac{\mu^2 N}{3\hbar \epsilon_0} \rho \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Связь квазистационарных амплитуд макроскопической поляризованности P с напряженностью светового поля для несущей частоты можно выразить через восприимчивость $\chi(\omega)$, записывая соотношение: $P = \epsilon_0 \chi(\omega) E$, которое в формальном плане выражает линейную зависимость поляризованности от напряженности поля. В известном выражении для восприимчивости $\chi(\omega) = \pi \mu^2 N n_s g(\omega, \omega_0) / \epsilon_0 \hbar$ аналогично [5] выделяется характеристика формы линии поглощения, называемая комплексной функцией Лорентца $g(\omega, \omega_0)$:

$$g(\omega, \omega_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\omega_0 - \omega + \gamma n_s}{(\omega_0 - \omega + \gamma n_s)^2 + 1/T_2^2} - \frac{i}{\pi} \frac{1/T_2}{(\omega_0 - \omega + \gamma n_s)^2 + 1/T_2^2}. \quad (3)$$

Здесь n_s – равновесное значение разности населенностей (установившееся в результате действия квазинепрерывного насыщающего светового поля). Действительная и мнимая части функции $g(\omega, \omega_0)$ характеризуют, соответственно, дисперсию показателя преломления и контур поглощения в среде. Наличием лорентцовой поправки описано длинноволновое смещение контура, регистрируемое в экспериментальных измерениях [3]. Это смещение зависит от разности населенностей; в условиях воздействия лазерного излучения разность населенностей n_s определяется интенсивностью, поэтому модифицированная функция Лорентца (3) нелинейна. Еще более выраженной нелинейностью должна обладать восприимчивость $\chi(\omega)$, включающая равновесную разность населенностей n_s в качестве сомножителя. Стационарная задача определения реакции граничного слоя на возбуждение внешним излучением, одинаковым по амплитуде поля в спектральной полосе $|\omega_0 - \omega| \sim 1/T_2$, соответствует предположению $E_i(\omega, t) = E_0$ в условиях (1). С учетом этого в пренебрежении высокочастотными компонентами $n(t)$ уравнение для $n(t)$ в сингулярном пределе приводит к выражению:

$$1 - n_s = i \frac{\mu}{\hbar} \sqrt{T_1 T_2} [\rho' (e_0 - i \sigma \omega \rho'^*) - \rho'^* (e_0 + i \sigma \omega \rho')]. \quad (4)$$

Напряженность приложенного поля в (4) нормирована по уровню мощности насыщения: $e_0 = \frac{2\mu E_0}{(\eta+1)\hbar} \sqrt{T_1 T_2}$, также в (4) предполагается, что $n_0 = 1$, и введен параметр $\sigma = \frac{\mu^2 N l}{\varepsilon_0 (\eta+1) \hbar c}$. Из соотношения (4) с учетом выражений (3) следует, что установившиеся значения населенности n_s в условиях приложенного поля на частоте ω могут быть рассчитаны из уравнения:

$$\frac{1 - n_s}{n_s} = \frac{e_0^2}{(\Delta - \gamma n_s)^2 + (1 + \kappa n_s)^2}. \quad (5)$$

Здесь $\Delta = (\omega - \omega_0)T_2$ – нормированная по ширине линии отстройка частоты от резонанса, параметром $\kappa = \sigma \omega T_2$ определяется ненасыщенное значение показателя поглощения резонансного граничного слоя, $\gamma = \mu^2 N T_2 / 3 \varepsilon_0 \hbar$. Очевидно, что ход кривых восприимчивости в зависимости от частоты действующего поля можно описать на основе расчета соотношения (3) и уравнения (5). Сразу отметим, решение уравнения (5) относительно n_s для заданных значений отстройки Δ и нормированной насыщающей мощности e_0^2 может оказаться неоднозначным.

Дисперсионные зависимости восприимчивости

Далее нелинейную трансформацию кривых восприимчивости граничного слоя характеризуем, вычисляя спектральную форму мнимой и действительной части функции $G(\Delta) = \pi g(\Delta) n_s(\Delta)$ для разной степени насыщения поглощения. Расчет величин g и n_s , исходя из (3), (5), удобнее проводить параметрически, т. е. полагая в (5) n_s нарастающим в пределах $(0,1)$ параметром, затем определять $\text{Re} G$ и $\text{Im} G$ по известным Δ и n_s из выражения (3).

Рисунок 1 демонстрирует характерную закономерность в изменении формы линии поглощения и резонансной динамики показателя преломления на шкале частоты. Параметры расчета соответствуют величинам, использованным в работах [6, 7], где рассчитывались когерентные эффекты в плотных резонансных средах в виде ансамбля квантовых точек в полупроводниковых структурах на основе *InGaAs*. Для определенных значений резонансного поглощения κ эффект насыщения проявляется в уширении и сглаживании формы линий $G(\Delta)$ (рис. 1,*a*, 1,*b*). Смещение линии, вызванное диполь-дипольным взаимодействием и определяемое насыщенным n_s , относительно уменьшается. Максимальные значения поглощения (кривых $\text{Im} G(\Delta)$ на рис. 1, *a*, 1, *b*) и резонансных экстремумов

мов показателя преломления (кривых $\text{Re } G(\Delta)$ на рис.1, a' , 1 , δ') снижаются. Такие изменения зависимости объяснить несложно: они соответствуют резонансному просветлению слоя среды [5] и особо характерны, если слой достаточно протяженный. Однако с ростом насыщения начинает сказываться влияние поверхностной поляризованности граничного слоя. Это влияние способно привести к асимметрии и аномальному ходу кривых обеих зависимостей (рис. 1, b,b' , $1, \delta,\delta'$). На частотах, непосредственно близких к центру линии, разность населенностей насыщается сильнее. Поглощение в этом диапазоне частот резко падает в результате эффекта затягивания частоты к центру линии [8]. Резонансная кривая как бы размыкается – могут проявиться две резонансные кривые со встречным наклоном, обозначающим области с неоднозначными решениями (5). Оба возникших нелинейных резонанса из-за лоренцева смещения асимметричны. Особым образом может измениться также ход дисперсионных зависимостей показателя преломления. На обеих кривых также возникают области, соответствующие бистабильному ходу зависимостей.

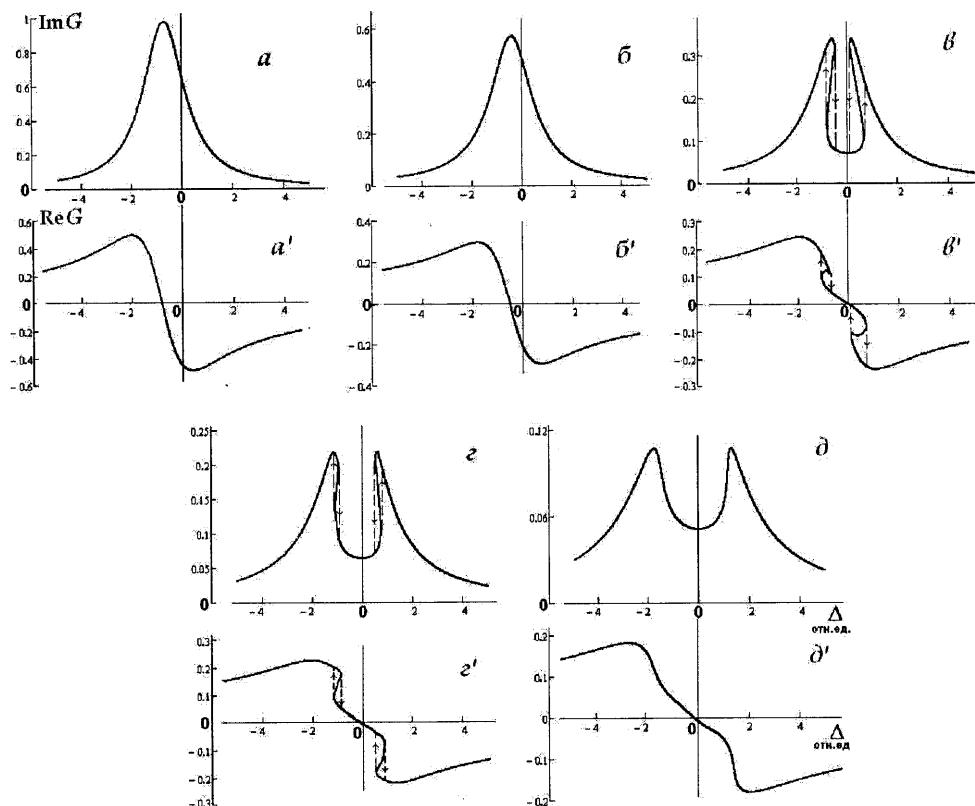


Рисунок 1. Спектральная зависимость мнимой и действительной части восприимчивости тонкого слоя для разных значений нормированной мощности внешнего возбуждения (для вариантов β , β' и γ , γ' пунктирными линиями указано направление гистерезисных переключений): $\epsilon_0^2 = 2$ (α, α'), 35 (β, β'), 39 (β, β'), 40 (γ, γ'), 43 (δ, δ'); $\kappa = 1.5$, $\gamma = 0.7$,

$$T_1 = 1 \cdot 10^{-9} \text{ с}, T_2 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ с}, \eta = 3.6$$

Качественная трансформация зависимостей по мере насыщения разности населенностей для критической области нарастания значений нормированной мощности в едином масштабе демонстрирует рисунок 2. Сразу отметим, что возникновение бистабильности на шкале частот носит пороговый характер, то есть начинает проявляться, если значения показателя резонансного поглощения превышают некоторую величину. По рисунку 2, a, a' , например, заметно, что при относительно небольшом κ насыщение может привести к сглаживанию и деформации линий $G(\Delta)$ без возникновения бистабильной особенности.

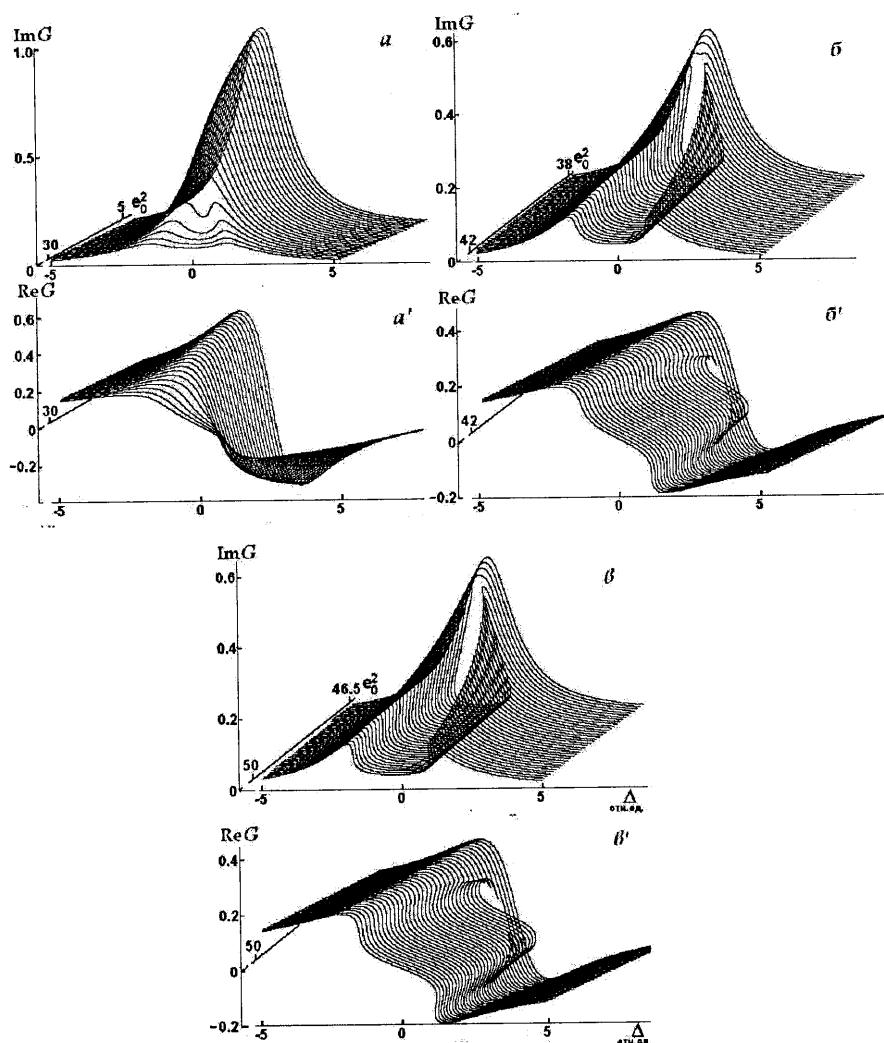


Рисунок 2. Изменение формы кривых мнимой и действительной части восприимчивости по мере насыщения разности населенностей: $\kappa = 1.3 (a, a'), 1.5 (\bar{b}, \bar{b}'), 2.0 (\bar{c}, \bar{c}')$; $\gamma = 0.7, T_1 = 1 \cdot 10^{-9} \text{ с}, T_2 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ с}, \eta = 3.6$

Проведенные расчеты, примеры которых иллюстрированы на рисунке 1, указывают на пороговое значение k порядка 1.4, причем это пороговое значение зависит от коэффициента при лорентцовой поправке. Определение условий бистабильности и точную оценку пороговых величин k , несложно провести на основе анализа уравнения (5), но это представляет собой отдельную задачу. Судя по вариантам b , в рисунка 2, бистабильность возможна в определенном диапазоне мощности возбуждающего излучения. На этой шкале ее появление должно соответствовать той области, где вклады в резонансную восприимчивость ее линейной и нелинейной составляющих могут оказаться сравнимыми. Различной остается, однако, скорость релаксации обеих составляющих, для нелинейного компонента восприимчивости она определяется временами T_1 и T_2 , тогда как линейный компонент безынерционно “следит” за изменением поля. Поэтому при циклическом изменении интенсивности излучения или его частоты стационарный отклик нелинейной среды способен демонстрировать гистерезис.

Заключение

Результаты проведенного исследования, таким образом, вскрывают возможность гистерезисного поведения нелинейной диэлектрической восприимчивости оптической структуры с планарной граничной пленкой плотной резонансной среды. Модельными параметрами являются характеристики квантоворазмерных полупроводниковых структур, широко применяемых в последнее время для создания управляющих или генерирующих оптических элементов быстродействующих устройств обработки информации. Свойство сверхбыстрого, практически безынерционного, гистерезисного переключения режимов пропускания или отражения света предельно компактным тонкопленочным элементом способно качественно оптимизировать действие таких устройств.

Автор признателен Белорусскому Фонду фундаментальных исследований за частичную поддержку работы (Проект Ф14М-146).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Optical nonlinear response of a single nonlinear dielectric layer sandwiched between two linear dielectric structures / E. Lidorikis [et al.] // Phys. Rev. – 1997. – Vol. B56. – P. 150–90-99.
2. **Malyshev, V.A.** Intrinsic optical bistability of an ultrathin film consisting of oriented linear aggregates / V.A. Malyshev, H. Glaeske, K.-H. Feller // J. Chem. Phys. – 2000. – Vol. 113. – No 3. – P. 1170–1176.
3. **Maki, J.J.** Linear and Nonlinear Optical Measurements of the Lorentz Local Field / J.J. Maki, M.S. Malcuit, J.E. Sipe, R.W. Boyd // Phys. Rev. Lett. – 1991. – Vol .67. – No 8. – P. 972–975.
4. **Kaplan, A.E.** Nanoscale stratification of optical excitation in self-interacting one-dimensional arrays / A.E. Kaplan, S.N. Volkov // Phys. Rev. – 2009. – Vol. A79. – P. 053834-1–053834-16.

5. *Пантел, Р.* Основы квантовой электроники / Р. Пантел, Г. Путхоф. – М. : Мир, 1972. – 384 с.
6. *Panzarini, G.* Self-induced transparency in semiconductor quantum dots / G. Panzarini, U. Hohenester, E. Molinari // Phys. Rev. – 2002. – Vol. B65. – No16. – P. 165322-1–165322-6.
7. Rabi oscillations in a semiconductor quantum dot: Influence of local fields / G.Ya. Slepyan [et al.] // Phys. Rev. B. – 2004. – Vol. B70. – No 4. – P. 045320-1–045320-5.
8. *Timoshchenko, E.V.* Resonance reflection of light by thin layer of a dense nonlinear medium / E.V. Timoshchenko, V.A. Yurevich, Yu.V. Yurevich // Technical Physics. – 2013. – Vol. 58. – No 2. – P. 251–254.

Поступила в редакцию 07.05.2014 г.

УДК 539.21

Т.В. ДРОБЫШЕВСКАЯ, О.М. ОСТРИКОВ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННОГО ЕДИНИЧНЫМ ДВОЙНИКОМ В ЗЕРНЕ ПОЛИКРИСТАЛЛА

Разработана методика расчета напряженно-деформированного состояния, обусловленного единичным двойником в зерне поликристалла. Установлено, что максимальные нормальные и скальывающие напряжения локализованы в узловых точках зерна и на двойниковых границах, а также на границах зерна.

Введение

В настоящее время решение задачи о расчете напряженно-деформированного состояния, обусловленного единичным двойником в зерне поликристалла, является весьма важным, так как позволит разработать методики по прогнозированию и предотвращению связанного с двойникованием разрушения деталей машин. Для наиболее полного решения данной задачи помимо напряжений, обусловленных наличием двойника в зерне поликристалла, необходимо учитывать напряжения, созданные зерненными границами, которые с точки зрения распределения деформаций играют роль внутренних концентраторов напряжения [1].

Целью данной работы стало изучение напряженно-деформированного состояния, обусловленного единичным микродвойником в зерне поликристалла.

Постановка задачи. Рассмотрим зерно поликристалла, находящееся вдали от поверхности двойникующегося материала. Границы зерна поликристалла представляем как стенки полных дислокаций (рис. 1).

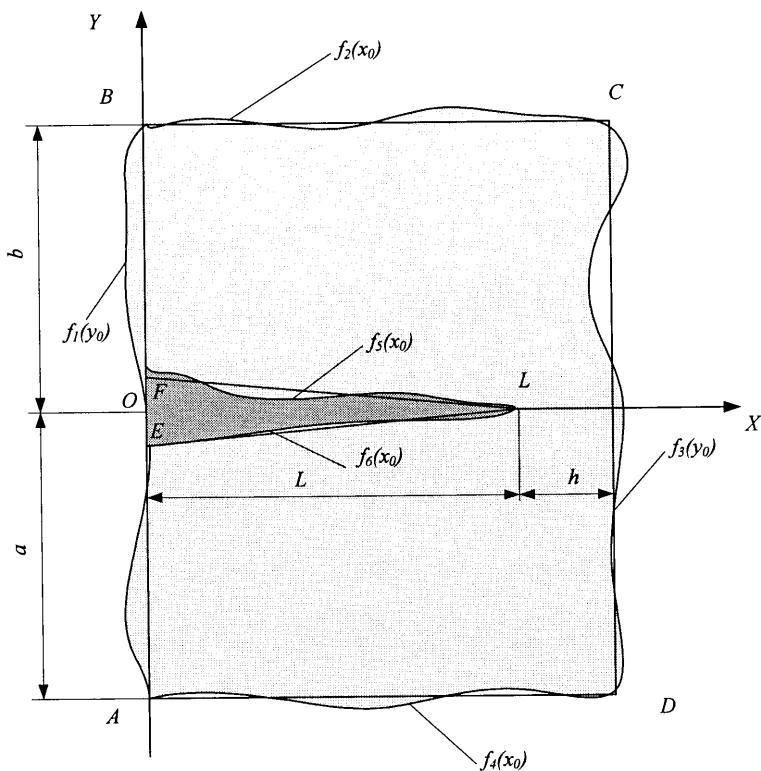


Рисунок 1. Схематическое изображение зерна поликристалла и клиновидного двойника в нем

В теле зерна размещен единичный клиновидный двойник. Такие двойники обычно зарождаются у концентратора напряжений, который в нашем случае находится в точке O (рис. 1). В решении поставленной задачи напряжения, которые создает данный концентратор напряжений, учитывать не будем. Рассмотрим лишь те напряжения, которые создает сам двойник, а также напряжения на границах зерна. Также не будем учитывать напряжения, обусловленные другими зернами поликристалла, так как все это приведет к громоздкости решения.

В общем случае в плоскости XOY форма границ зерна описывается функциями $f_1(y_0)$, $f_2(x_0)$, $f_3(y_0)$, $f_4(x_0)$; а форма границ клиновидного двойника – функциями $f_5(x_0)$ и $f_6(x_0)$ (рис. 1) [2, 3]. Принимаем, что дислокации на каждой из рассматриваемых границ параллельны друг другу и оси OZ , перпендикулярной плоскости рис. 1. Плотность полных дислокаций на границах зерна равна ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 и ρ_4 соответственно. Плотность двойникующих дислокаций на границах клиновидного двойника равна ρ_5 , ρ_6 . Тогда смещения, создаваемые рассматриваемым клиновидным двойником с учетом смещений на границах зерна, в соответствии с принципом суперпозиции компонент тензора смещений, могут быть определены по формуле:

$$u_i = \sum_{m=1}^6 u_i^{(m)}(x, y), \quad (1)$$

где i принимает значения x, y или z ; $u_i^{(1)}(x, y), u_i^{(2)}(x, y), u_i^{(3)}(x, y), u_i^{(4)}(x, y), u_i^{(5)}(x, y), u_i^{(6)}(x, y)$ – смещения, создаваемые соответствующими границами (двойниковыми или зеренными). Данные смещения определяются с помощью криволинейного интеграла вдоль профилей соответствующих границ $L_{AB}, L_{BC}, L_{CD}, L_{DA}, L_{FH}, L_{EH}$:

$$u_i^{(m)}(x, y) = \int \rho_m u_i^{(m,0)} ds. \quad (2)$$

Здесь $u_i^{(m,0)}$ – смещения, создаваемые отдельными дислокациями на зеренных или двойниковых границах.

Следует отметить, что использованный в данной задаче принцип суперпозиции правомерен, так как в нашем случае источники внутренних напряжений неподвижны [2].

Криволинейные интегралы (2) в соответствии с [3] сводятся к следующим определенным интегралам:

$$u_i^{(1)}(x, y) = \int_{-a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \sqrt{\left(1 + f_1'(y_0)\right)^2} \rho_1(y_0) u_i^{(1,0)}(x, y, y_0) dy_0; \quad (3)$$

$$u_i^{(2)}(x, y) = \int_0^{L+h} \sqrt{\left(1 + f_2'(x_0)\right)^2} \rho_2(x_0) u_i^{(2,0)}(x, y, x_0) dx_0; \quad (4)$$

$$u_i^{(3)}(x, y) = \int_{-a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \sqrt{\left(1 + f_3'(y_0)\right)^2} \rho_3(y_0) u_i^{(3,0)}(x, y, y_0) dy_0; \quad (5)$$

$$u_i^{(4)}(x, y) = \int_0^{L+h} \sqrt{\left(1 + f_4'(x_0)\right)^2} \rho_4(x_0) u_i^{(4,0)}(x, y, x_0) dx_0; \quad (6)$$

$$u_i^{(5)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{\left(1 + f_5'(x_0)\right)^2} \rho_5(x_0) u_i^{(5,0)}(x, y, x_0) dx_0; \quad (7)$$

$$u_i^{(6)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{\left(1 + f_6'(x_0)\right)^2} \rho_6(x_0) u_i^{(6,0)}(x, y, x_0) dx_0, \quad (8)$$

где L – длина двойника, равна длине отрезка OL (рис. 1); a, b, h – параметры, определяющие размер зерна; ε – малый параметр порядка межатомного расстояния.

При расчетах будем учитывать представленную на рис. 2 ориентировку винтовой и краевой составляющих векторов Бюргерса. При условии нахождения рассматриваемого зерна вдали от поверхности смещения, создаваемые единичными полными и двойникоющими дислокациями, расположенными на соответствующей границе, в соответствии с [3] и [4], могут быть определены из соотношений:

$$\begin{aligned}
u_x^{(1,0)} &= \frac{b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - f_1(y_0)} + \frac{(x - f_1(y_0))(y - y_0)}{2(1-\nu) \left((x - f_1(y_0))^2 + (y - y_0)^2 \right)} \right], \\
u_y^{(1,0)} &= -\frac{b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{2\pi} \ln \left((x - f_1(y_0))^2 + (y - y_0)^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(x - f_1(y_0))^2 + (y - y_0)^2}{4(1-\nu) \left((x - f_1(y_0))^2 + (y - y_0)^2 \right)} \right], \\
u_z^{(1,0)} &= \frac{b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - f_1(y_0)}; \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_x^{(2,0)} &= -\frac{b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{2\pi} \ln \left((y - f_2(x_0))^2 + (x - x_0)^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(y - f_2(x_0))^2 + (x - x_0)^2}{4(1-\nu) \left((y - f_2(x_0))^2 + (x - x_0)^2 \right)} \right],
\end{aligned}$$

$$u_y^{(2,0)} = -\frac{b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(-\frac{x - x_0}{y - f_2(x_0)} \right) - \frac{(y - f_2(x_0))(x - x_0)}{2(1-\nu) \left((y - f_2(x_0))^2 + (x - x_0)^2 \right)} \right], \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
u_x^{(3,0)} &= -\frac{b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - f_3(y_0)} + \frac{(x - f_3(y_0))(y - y_0)}{2(1-\nu) \left((x - f_3(y_0))^2 + (y - y_0)^2 \right)} \right], \\
u_y^{(3,0)} &= \frac{b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{2\pi} \ln \left((x - f_3(y_0))^2 + (y - y_0)^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(x - f_3(y_0))^2 + (y - y_0)^2}{4(1-\nu) \left((x - f_3(y_0))^2 + (y - y_0)^2 \right)} \right], \\
u_z^{(3,0)} &= \frac{b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - f_3(y_0)}; \tag{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_x^{(4,0)} &= \frac{b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{2\pi} \ln \left((y - f_4(x_0))^2 + (x - x_0)^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(y - f_4(x_0))^2 + (x - x_0)^2}{4(1-\nu) \left((y - f_4(x_0))^2 + (x - x_0)^2 \right)} \right], \\
u_y^{(4,0)} &= \frac{b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(-\frac{x - x_0}{y - f_4(x_0)} \right) - \frac{(y - f_4(x_0))(x - x_0)}{2(1-\nu) \left((y - f_4(x_0))^2 + (x - x_0)^2 \right)} \right], \\
u_z^{(4,0)} &= \frac{b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(-\frac{x - x_0}{y - f_4(x_0)} \right); \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_x^{(5,0)} &= \frac{b_{kp}^{(2)}}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y - f_5(x_0)}{x - x_0} + \frac{(y - f_5(x_0))(x - x_0)}{2(1-\nu) \left((y - f_5(x_0))^2 + (x - x_0)^2 \right)} \right], \\
u_y^{(5,0)} &= -\frac{b_{kp}^{(2)}}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{2\pi} \ln \left((y - f_5(x_0))^2 + (x - x_0)^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(x - x_0)^2 - (y - f_5(x_0))^2}{4(1-\nu) \left((y - f_5(x_0))^2 + (x - x_0)^2 \right)} \right], \\
u_z^{(5,0)} &= \frac{b_{kp}^{(2)}}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - f_5(x_0)}{x - x_0}; \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_x^{(6,0)} &= \frac{b_{kp}^{(2)}}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y - f_6(x_0)}{x - x_0} + \frac{(y - f_6(x_0))(x - x_0)}{2(1-\nu) \left((y - f_6(x_0))^2 + (x - x_0)^2 \right)} \right], \\
u_y^{(6,0)} &= -\frac{b_{kp}^{(2)}}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{2\pi} \ln \left((y - f_6(x_0))^2 + (x - x_0)^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(x - x_0)^2 - (y - f_6(x_0))^2}{4(1-\nu) \left((y - f_6(x_0))^2 + (x - x_0)^2 \right)} \right],
\end{aligned}$$

$$u_z^{(6,0)} = \frac{b_{kp}^{(2)}}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - f_6(x_0)}{x - x_0}; \tag{14}$$

где ν – коэффициент Пуассона, $b_{kp}^{(1)}$ – вектор Бюргерса полной краевой дислокации; $b_b^{(1)}$ – вектора Бюргерса полной винтовой дислокации; $b_{kp}^{(2)}$ – краевая составляющая вектора Бюргерса двойникующей дислокации; $b_b^{(2)}$ – винтовая составляющая вектора Бюргерса двойникующей дислокации.

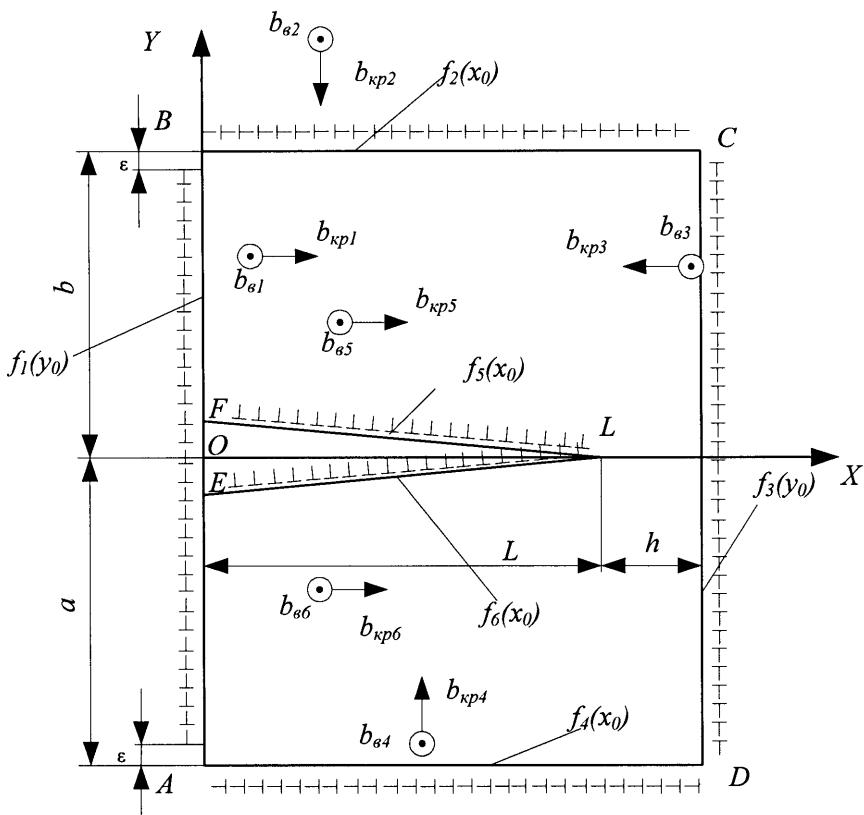


Рисунок 2. Схема взаимного расположения дислокаций, их компонент вектора Бюргерса и декартовой системы координат для расчета полей напряжений и смещений у клиновидного двойника в теле зерна

Поля напряжений, аналогично (1), могут быть определены из соотношения:

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^6 \sigma_{ij}^{(m)}(x, y), \quad (15)$$

$$\text{где } \sigma_{ij}^{(m)}(x, y) = \int \rho_m \sigma_{ij}^{(m,0)} ds.$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(1)}(x, y)$, $\sigma_{ij}^{(2)}(x, y)$, $\sigma_{ij}^{(3)}(x, y)$, $\sigma_{ij}^{(4)}(x, y)$ – напряжения, создаваемые каждой из границ зерна; $\sigma_y^{(5)}(x, y)$ и $\sigma_y^{(6)}(x, y)$ – напряжения, обусловленные двойниковыми границами. Данные напряжения определяются с помощью криволинейного интеграла вдоль профилей соответствую-

щих границ L_{AB} , L_{BC} , L_{CD} , L_{DA} , L_{FH} , L_{EH} ; $\sigma_{ij}^{(m,0)}$ – напряжения, создаваемые отдельными дислокациями на зеренных или двойниковых границах соответственно.

Криволинейные интегралы (16) сводятся к следующим определенным интегралам:

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x, y) = \int_{-a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \sqrt{(1+f_1'(y_0))^2} \rho_1(y_0) \sigma_{ij}^{(1,0)}(x, y, y_0) dy_0; \quad (17)$$

$$\sigma_{ij}^{(2)}(x, y) = \int_0^{L+h} \sqrt{(1+f_2'(x_0))^2} \rho_2(x_0) \sigma_{ij}^{(2,0)}(x, y, x_0) dx_0; \quad (18)$$

$$\sigma_{ij}^{(3)}(x, y) = \int_{-a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \sqrt{(1+f_3'(y_0))^2} \rho_3(y_0) \sigma_{ij}^{(3,0)}(x, y, y_0) dy_0; \quad (19)$$

$$\sigma_{ij}^{(4)}(x, y) = \int_0^{L+h} \sqrt{(1+f_4'(x_0))^2} \rho_4(x_0) \sigma_{ij}^{(4,0)}(x, y, x_0) dx_0; \quad (20)$$

$$\sigma_{ij}^{(5)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{(1+f_5'(x_0))^2} \rho_5(x_0) \sigma_{ij}^{(5,0)}(x, y, x_0) dx_0; \quad (21)$$

$$\sigma_{ij}^{(6)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{(1+f_6'(x_0))^2} \rho_6(x_0) \sigma_{ij}^{(6,0)}(x, y, x_0) dx_0. \quad (22)$$

Напряжения $\sigma_{ij}^{(m,0)}$, создаваемые единичными полными и двойникующими дислокациями, расположеными на соответствующей границе, с учетом принятого направления составляющих вектора Бюргерса и при условии нахождения рассматриваемого зерна вдали от поверхности, определяются следующим образом:

$$\sigma_{xx}^{(1,0)} = -\frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-y_0) \left[3(x-f_1(y_0))^2 + (y-y_0)^2 \right]}{\left[(x-f_1(y_0))^2 + (y-y_0)^2 \right]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{(1,0)} = \frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-y_0) \left[(x-f_1(y_0))^2 - (y-y_0)^2 \right]}{\left[(x-f_1(y_0))^2 + (y-y_0)^2 \right]^2},$$

$$\sigma_{xy}^{(1,0)} = \frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-f_1(y_0)) \left[(x-f_1(y_0))^2 - (y-y_0)^2 \right]}{\left[(x-f_1(y_0))^2 + (y-y_0)^2 \right]^2},$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(1,0)} &= -\frac{\mu b_{kp}^{(1)} \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y-y_0}{(x-f_1(y_0))^2 + (y-y_0)^2}, \\ \sigma_{xz}^{(1,0)} &= -\frac{\mu b_b^{(1)}}{2\pi} \frac{y-y_0}{(x-f_1(y_0))^2 + (y-y_0)^2}, \\ \sigma_{yz}^{(1,0)} &= \frac{\mu b_b^{(1)}}{2\pi} \frac{x-f_1(y_0)}{(x-f_1(y_0))^2 + (y-y_0)^2};\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(2,0)} &= \frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0) \left[(y-f_2(x_0))^2 - (x-x_0)^2 \right]}{\left[(y-f_2(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]^2}, \\ \sigma_{yy}^{(2,0)} &= -\frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0) \left[3(y-f_2(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]}{\left[(y-f_2(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]^2}, \\ \sigma_{xy}^{(2,0)} &= \frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-f_2(x_0)) \left[(y-f_2(x_0))^2 - (x-x_0)^2 \right]}{\left[(y-f_2(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]^2}, \\ \sigma_{zz}^{(2,0)} &= -\frac{\mu b_{kp}^{(1)} \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{x-x_0}{(y-f_2(x_0))^2 + (x-x_0)^2}, \\ \sigma_{xz}^{(2,0)} &= -\frac{\mu b_b^{(1)}}{2\pi} \frac{y-f_2(x_0)}{(y-f_2(x_0))^2 + (x-x_0)^2},\end{aligned}\quad (24)$$

$$\sigma_{xx}^{(3,0)} = \frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-y_0) \left[3(x-f_3(y_0))^2 + (y-y_0)^2 \right]}{\left[(x-f_3(y_0))^2 + (y-y_0)^2 \right]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{(3,0)} = -\frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-y_0) \left[(x-f_3(y_0))^2 - (y-y_0)^2 \right]}{\left[(x-f_3(y_0))^2 + (y-y_0)^2 \right]^2},$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(3,0)} &= -\frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-f_3(y_0)) \left[(x-f_3(y_0))^2 - (y-y_0)^2 \right]}{\left[(x-f_3(y_0))^2 + (y-y_0)^2 \right]^2}, \\
\sigma_{zz}^{(3,0)} &= \frac{\mu b_{kp}^{(1)} \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y-y_0}{(x-f_3(y_0))^2 + (y-y_0)^2}, \\
\sigma_{xz}^{(3,0)} &= -\frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \frac{y-y_0}{(x-f_3(y_0))^2 + (y-y_0)^2}, \\
\sigma_{yz}^{(3,0)} &= \frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \frac{x-f_3(y_0)}{(x-f_3(y_0))^2 + (y-y_0)^2}; \tag{25} \\
\sigma_{xx}^{(4,0)} &= -\frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0) \left[(y-f_4(x_0))^2 - (x-x_0)^2 \right]}{\left[(y-f_4(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]^2}, \\
\sigma_{yy}^{(4,0)} &= \frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0) \left[3(y-f_4(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]}{\left[(y-f_4(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]^2}, \\
\sigma_{xy}^{(4,0)} &= -\frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-f_4(x_0)) \left[(y-f_4(x_0))^2 - (x-x_0)^2 \right]}{\left[(y-f_4(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]^2}, \\
\sigma_{zz}^{(4,0)} &= \frac{\mu b_{kp}^{(1)} \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{x-x_0}{(y-f_4(x_0))^2 + (x-x_0)^2}, \\
\sigma_{xz}^{(4,0)} &= -\frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \frac{y-f_4(x_0)}{(y-f_4(x_0))^2 + (x-x_0)^2}, \\
\sigma_{yz}^{(4,0)} &= \frac{\mu b_{kp}^{(1)}}{2\pi} \frac{x-x_0}{(y-f_4(x_0))^2 + (x-x_0)^2}; \tag{26} \\
\sigma_{xx}^{(5,0)} &= -\frac{\mu b_{kp}^{(2)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0) \left[3(y-f_5(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]}{\left[(y-f_5(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]^2}, \\
\sigma_{yy}^{(5,0)} &= \frac{\mu b_{kp}^{(2)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0) \left[(y-f_5(x_0))^2 - (x-x_0)^2 \right]}{\left[(y-f_5(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy}^{(5,0)} &= \frac{\mu b_{kp}^{(2)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-f_5(x_0)) \left[(y-f_5(x_0))^2 - (x-x_0)^2 \right]}{\left[(y-f_5(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]^2}, \\
\sigma_{zz}^{(5,0)} &= -\frac{\mu b_{kp}^{(2)} \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{x-x_0}{(y-f_5(x_0))^2 + (x-x_0)^2}, \\
\sigma_{xz}^{(5,0)} &= -\frac{\mu b_b^{(2)}}{2\pi} \frac{x-x_0}{(y-f_5(x_0))^2 + (x-x_0)^2}, \\
\sigma_{yz}^{(5,0)} &= \frac{\mu b_b^{(2)}}{2\pi} \frac{y-f_5(x_0)}{(y-f_5(x_0))^2 + (x-x_0)^2}; \tag{27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(6,0)} &= -\frac{\mu b_{kp}^{(2)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0) \left[3(y-f_6(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]}{\left[(y-f_6(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]^2}, \\
\sigma_{yy}^{(6,0)} &= \frac{\mu b_{kp}^{(2)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0) \left[(y-f_6(x_0))^2 - (x-x_0)^2 \right]}{\left[(y-f_6(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]^2}, \\
\sigma_{xy}^{(6,0)} &= \frac{\mu b_{kp}^{(2)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-f_6(x_0)) \left[(y-f_6(x_0))^2 - (x-x_0)^2 \right]}{\left[(y-f_6(x_0))^2 + (x-x_0)^2 \right]^2}, \\
\sigma_{zz}^{(6,0)} &= -\frac{\mu b_{kp}^{(2)} \nu}{\pi(1-\nu)} \frac{x-x_0}{(y-f_6(x_0))^2 + (x-x_0)^2}, \\
\sigma_{xz}^{(6,0)} &= -\frac{\mu b_b^{(2)}}{2\pi} \frac{x-x_0}{(y-f_6(x_0))^2 + (x-x_0)^2}, \\
\sigma_{yz}^{(6,0)} &= \frac{\mu b_b^{(2)}}{2\pi} \frac{y-f_6(x_0)}{(y-f_6(x_0))^2 + (x-x_0)^2}. \tag{28}
\end{aligned}$$

Здесь μ – модуль сдвига.

Рассмотрим случай, когда $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = C_1$; $\rho_5 = \rho_6 = C_2$. Также примем допущение, что границы зерна прямолинейны и параллельны соответствующим осям (OX или OY). При этом в плоскости XOY зерно имеет форму прямоугольника длиной ($a+b$) и шириной ($L+h$). Тогда в соответствии с рис. 2 в рассматриваемом случае будем иметь:

$$f_1(y_0) = 0, \quad (29)$$

$$f_2(y_0) = b, \quad (30)$$

$$f_3(y_0) = L + h, \quad (31)$$

$$f_4(y_0) = -a. \quad (32)$$

Пусть границы двойника – прямолинейны. При этом двойник имеет форму равнобедренного треугольника EFL (рис. 2) с шириной у устья H . Тогда функции, описывающие форму границ двойника в плоскости XOY , примут вид [3]:

$$f_5(x_0) = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{x_0}{L} \right), \quad (33)$$

$$f_6(x_0) = -\frac{H}{2} \left(1 - \frac{x_0}{L} \right). \quad (34)$$

Результаты расчетов и их обсуждение. Расчеты проводились для железа. При этом принималось: $b_{kp}^{(1)} = b_b^{(1)} = 0,248$ нм; $b_{kp}^{(2)} = b_b^{(2)} = 0,124$ нм [5]; $\mu = 81$ ГПа [6]; $\nu = 0,29$ [5].

Результаты расчетов полей напряжений представлены на рис. 3, где четко просматриваются двойниковые границы и границы зерна, являющиеся концентраторами напряжений. Данный факт указывает на правомерность использования предложенной выше модели (23) – (28).

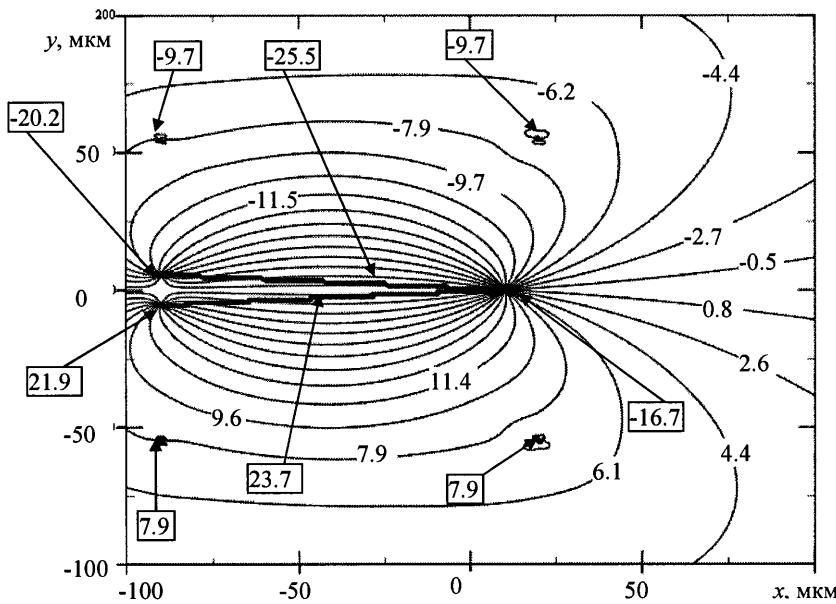


Рисунок 3, а. Распределение напряжений в зерне поликристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного двойника: $\sigma_{xx}(x,y)$

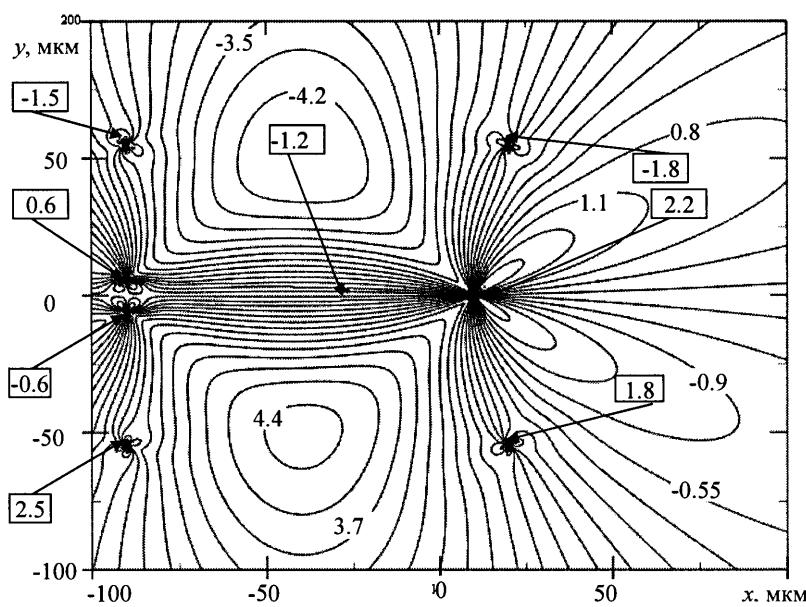


Рисунок 3, 6. Распределение напряжений в зерне поликристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного двойника: $\sigma_{yy}(x,y)$

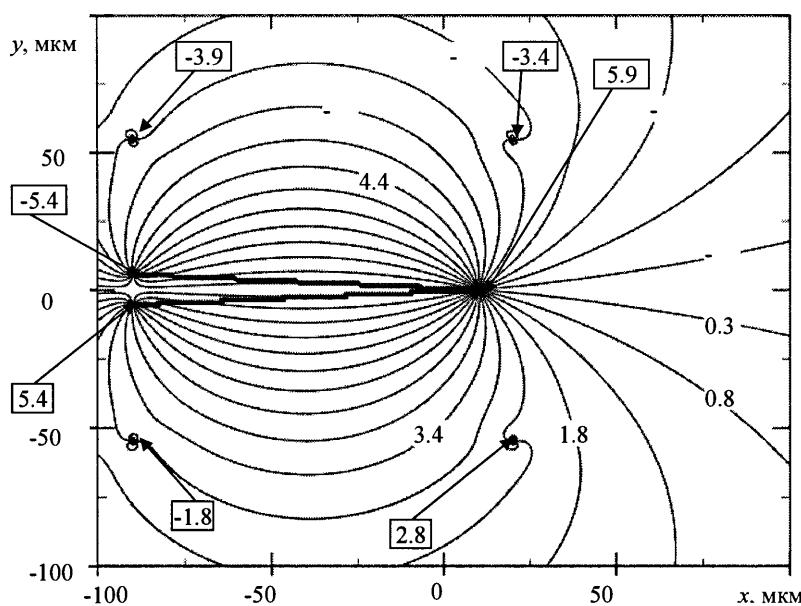


Рисунок 3, б. Распределение напряжений в зерне поликристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного двойника: $\sigma_{zz}(x,y)$

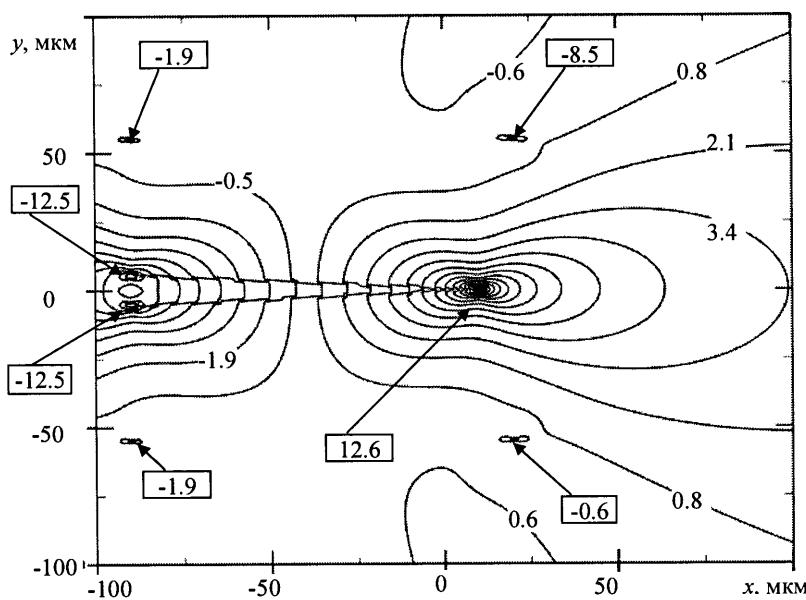


Рисунок 3, г. Распределение напряжений в зерне поликристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного двойника: $\sigma_{xy}(x,y)$

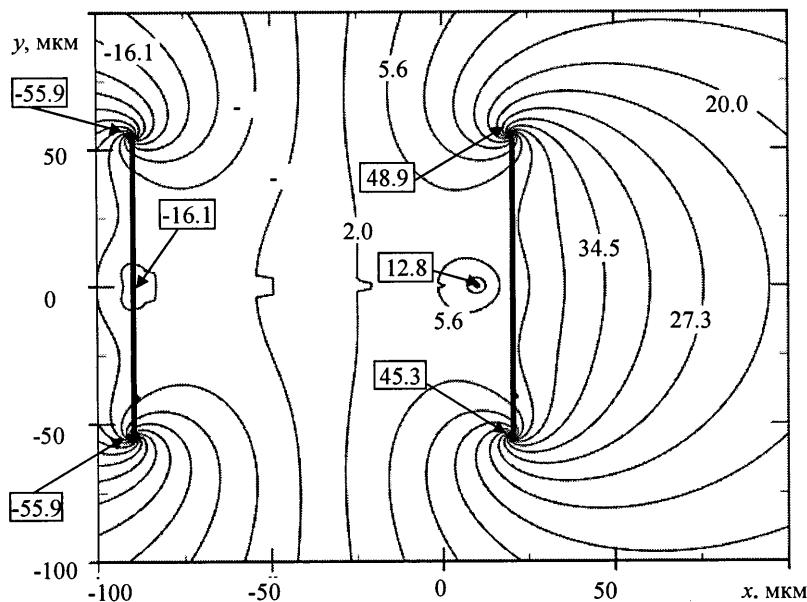


Рисунок 3, д. Распределение напряжений в зерне поликристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного двойника: $\sigma_{yz}(x,y)$

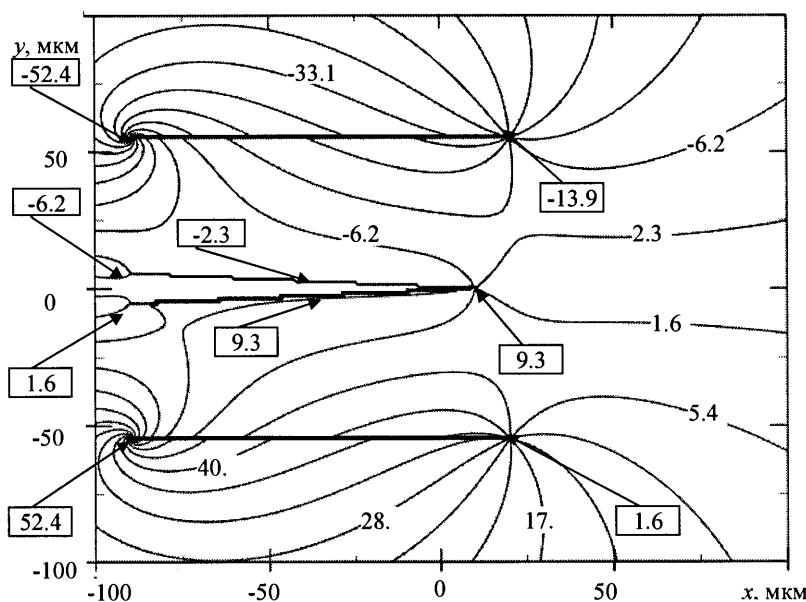


Рисунок 3, е. Распределение напряжений в зерне поликристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного двойника: $\sigma_{xz}(x,y)$

Из рис. 3 видно, что максимальные нормальные и скальывающие σ_{xy} напряжения локализованы в узловых точках зерна и на двойниковых границах, скальывающие напряжения σ_{yz} локализованы на вертикальных границах зерна, а σ_{xz} – на горизонтальных границах зерна.

Высокая концентрация напряжений в основном наблюдается в узловых точках зерна (рис. 3, а – 3, г) и у вершины двойника (рис. 3, а; рис. 3, в – 3, е). Численные значения этих напряжений могут быть найдены из (23) – (28) и (15) при соответствующих значениях x и y . Следует отметить, что наиболее высокая концентрация скальывающих напряжений σ_{yz} наблюдается на вертикальных границах зерна (рис. 3, д), а σ_{xz} – на горизонтальных (рис. 3, е). Это обусловлено тем, что мощность вектора Бюргерса полной дислокации зерна выше мощности вектора Бюргерса частичной двойникующей дислокации.

Нормальные напряжения σ_{xx} (рис. 3, а) и σ_{zz} (рис. 3, в) знакопеременны относительно оси OX и относительно вершины двойника. Они положительны в первой и третьей четвертях, а отрицательны во второй и четвертой. Таким образом, у одной из границ клиновидного двойника напряжения σ_{xx} сжимающие, а у другой – растягивающие.

Нормальные напряжения σ_{yy} локализованы только в узловых точках зерна, при этом двойниковые напряжения перекрываются напряжениями на границах зерна (рис. 3, б).

Скальывающие напряжения σ_{xy} знакопеременны по отношению к оси, параллельной оси OY и проходящей через середину двойника. У вершины двойника данные напряжения отрицательны, а у устья – положитель-

ны. При этом в вершинах зерна данные напряжения отрицательны. Максимальные значения скальвающих напряжений σ_{xy} можно отметить у вершины двойника, а минимальные – в средней части двойника (рис. 3, г).

Напряжения σ_{zy} (рис. 3, д) локализованы на вертикальных границах зерна. При этом на границе, примыкающей к устью двойника они имеют положительный знак, а на параллельной ей границе – отрицательный и вновь на положительный. Максимальные значения напряжений при этом можно отметить в узловых точках зерна.

Напряжения σ_{zx} (рис. 3, е) локализованы на горизонтальных границах зерна. При этом на верхней границе они максимальны и имеют отрицательный знак, а на параллельной ей границе напряжения – минимальны и имеют отрицательный знак. Максимальные значения напряжений при этом можно отметить в узловых точках границы зерна, прилегающей к устью двойника.

Таким образом, разработан метод расчета полей смещений и напряжений, обусловленных наличием единичного микродвойника в зерне поликристалла. Выявлены узловые точки в зернах поликристалла, имеющие максимальные напряжения и смещения. Метод позволяет изучать влияние зеренных границ на напряженно-деформированное состояние, обусловленное двойникование.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Немец, Я.* Жесткость и прочность стальных деталей : сокр. пер. с чеш. / Я. Немец ; под ред. С.В. Серенсена. – М. : Машиностроение, 1970. – 528 с.
2. *Остриков, О.М.* Дислокационная макроскопическая модель клиновидного двойника / О.М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2006. – № 2. – С. 10–18.
3. *Остриков, О.М.* Механика двойникования твердых тел : монография / О.М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П.О. Сухого, 2008. – 301 с.
4. *Хирт, Дж.* Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М. : Атомиздат, 1972. – 600 с.
5. *Полухин, П.И.* Физические основы пластической деформации / П.И. Полухин, С.С. Горелик, В.К. Воронцов. – М. : Металлургия, 1982. – 584 с.
6. *Киттель, Ч.* Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель. – М. : Наука, 1978. – 792 с.

Поступила в редакцию 06.02.2014 г.

УДК 612.14

В.В. ТРИФОНОВ

ОСОБЕННОСТИ ГЕМОДИНАМИКИ У ЛИЦ С СОСУДИСТЫМ И СЕРДЕЧНЫМ ТИПОМ САМОРЕГУЛЯЦИИ КРОВООБРАЩЕНИЯ

В исследовании участвовало 44 человека. Изучались особенности кровообращения у испытуемых с сердечным и сосудистым типом саморегуляции кровообращения. Отмечена связь между изменением емкости венозного русла, снижением общего периферического сопротивления кровотоку и АД, что указывает на потенциальную роль венозных сосудов в изменении АД.

Пребывание в положении стоя у лиц с сосудистым типом саморегуляции кровообращения сопровождается повышением активности симпатического отдела вегетативной нервной системы.

Согласно исследованиям член-корр. НАН РБ Н.И. Аринчина, сердце и экстракардиальные насосы имеют раздельные функции: сердце ответственно за артериальное, а экстракардиальные насосы – за венозное кровообращение [1].

У лиц с сердечным и сосудистым типом саморегуляции кровообращения (ТСК) артериальное давление крови (АД) поддерживается различными соотношениями между минутным объемом крови (МОК) и общим периферическим сопротивлением кровотоку (ОПСС). Так у представителей сосудистого ТСК АД поддерживается в большей степени за счет ОПСС, а у лиц с сердечным ТСК – за счет МОК, величина которого, в свою очередь, зависит от венозного возврата крови к сердцу. Следует отметить, что основная роль в обеспечении венозного возврата крови к сердцу принадлежит гемодинамической функции скелетных мышц [2].

Сведения, касающиеся особенностей кровообращения у людей с различными ТСК, в литературе практически не представлены, что и определило цель настоящего исследования.

Цель исследования – изучить особенности кровообращения у лиц с сердечным и сосудистым ТСК.

Методы исследования. В качестве теста использована ортостатическая проба. Показатели кровообращения: МОК, систолический объем крови (СО), ЧСС и ОПСС регистрировались методом тетраполярной реовазографии с помощью оборудования фирмы “Нейрософт”, на первой, пятой и 10-й минутах в положениях лежа и стоя. Одновременно с этими показателями фиксировалось АД.

Все испытуемые по ТСК были разделены на две группы: первая группа, 25 человек – лица с сосудистым ТСК, вторая группа – 19 человек, испытуемые с сердечным ТСК. ТСК рассчитывались по методике, предложенной член-корр. НАН РБ Н.И. Аринчиным [3].

Полученные данные обрабатывались с использованием непараметрической статистики при помощи программы STATISTICA 6.0.

Результаты исследований и их обсуждение. Показатели кровообращения, отмеченные в положении лежа, представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения показателей кровообращения, зарегистрированные в положении лежа у лиц с сердечным и сосудистым ТСК ($\bar{X} \pm SD$)

Показатель	Сосудистый ТСК			Сердечный ТСК		
	1 минута	5 минута	10 минута	1 минута	5 минута	10 минута
АДср мм. рт. ст.	99,4±5,5	98,1±9,1*	97,5±6,1*	97,8±4,5	94,7±4,6*	94,5±4,2*
СО, мл.	52±21,8	53±23	54,5±22,9	97,4±15	92±16*	90,8±15,3*
ЧСС уд/мин	67,1±14	70±14,5	69,2±13,4	64±8,6	62,8±8,9	64,1±8,8
МОК л/мин	3,3±1,2	3,5±1,3*	3,6±1,4*	6,2±1,2	5,7±1,2*	5,8±1,3*

Примечание – звездочкой отмечены значения показателей, отличающиеся ($p<0,05$) от соответствующих величин, зарегистрированных на первой минуте.

Как видно из таблицы 1, на пятой и 10-й минутах произошло снижение АД у представителей обоих ТСК. У лиц с сердечным ТСК на пятой минуте отмечено снижение АДср на 3,2%, а на 10-й минуте – на 3,4% ($p<0,0005$), у представителей сосудистого ТСК на 1,3% и 1,9% соответственно.

Таким образом, пребывание испытуемых в положении лежа вызывало снижение АД, при этом у лиц с сердечным ТСК депрессорная реакция кровообращения была более выражена, чем у представителей сосудистого ТСК.

Необходимо обратить внимание на разнонаправленные изменения ОПСС, зарегистрированные в положении лежа у представителей сердечного и сосудистого ТСК при снижении у них АД.

Так у лиц с сердечным ТСК на пятой минуте отмечено повышение ОПСС на 5,1% и в дальнейшем его значение сохранялось на стабильно повышенном уровне. У лиц с сосудистым ТСК на пятой минуте ОПСС снизилось на 5,2%, а на 10-й минуте – на 8,9%. Значения ОПСС на первой, пятой и 10-й минутах были следующими. У лиц с сосудистым ТСК: $2657,4\pm1159$ дин×сек $^{-1}\times$ см $^{-5}$, $2518,5\pm1200$ дин×сек $^{-1}\times$ см $^{-5}$ и $2420,8\pm1114,2$ дин×сек $^{-1}\times$ см $^{-5}$. У испытуемых с сердечным ТСК: $1232,1\pm222,8$ дин×сек $^{-1}\times$ см $^{-5}$, $1294,4\pm241,5$ дин×сек $^{-1}\times$ см $^{-5}$ и $1284,5\pm253,8$ дин×сек $^{-1}\times$ см $^{-5}$.

Известно, что состояние тонуса артериол регулируется нервным, гуморальным и миогенным механизмами. Маловероятно, чтобы пребывание испытуемых в положении лежа могло вызвать у них изменение “гормонального фона”, также известно, что активация миогенного механизма регуляции тонуса резистивных сосудов происходит при повышении АД, в нашем случае у всех испытуемых оно снизилось.

Таким образом, в нашем случае из основных факторов, вызывающих изменение ОПСС, миогенный и гуморальный механизмы регуляции тонуса артериол можно исключить.

В основе центральной нервной регуляции тонического напряжения стенок артериол лежат барорефлексы, на которые оказывают влияние несколько факторов, в том числе и АДср [4].

Важно отметить, что барорефлексы оказывают влияние не только на ОПСС, но и на хронотропную реакцию сердца [5].

Отсутствие трансформаций ЧСС и разнонаправленные изменения ОПСС у представителей сердечного и сосудистого ТСК при снижении у них АД, дают основание считать, что у испытуемых, на пятой и 10-й минутах горизонтального положения, снижение АДср и изменения ОПСС обусловлены не центральными, а периферическими механизмами регуляции тонуса артериол, направленными на стабилизацию давления крови в капиллярах. Одним из таких механизмов является венуло-артериолярный рефлекс, при котором в ответ на растяжение стенок венозных сосудов происходит сопряженное адекватное рефлекторное нарастание тонуса артериол и наоборот.

В пользу данного заключения также говорят результаты исследований [6], в которых показано, что колебания системного АД являются следствием рефлекторных взаимоотношений, складывающихся между венозным и артериальным руслом.

В нашем случае, у представителей сердечного ТСК СО снизился на пятой минуте на 5,5%, а на 10-й минуте – на 6,8% ($p<0,004$).

Уменьшение СО у лиц с сердечным ТСК на пятой и 10-й минутах горизонтального положения обусловлено депонированием крови в венозном русле и сопряжено со снижением АД. Это в свою очередь указывает на роль емкостных сосудов в динамике АД. В пользу данного заключения также говорят результаты исследований [6, 7], в которых доказано, что падение тонуса венозных сосудов предшествует снижению АД.

У представителей сосудистого ТСК в положении лежа СО поддерживался на стабильном уровне, что указывает на более высокий тонус их венозных сосудов, чем у представителей сердечного ТСК.

Величина СО на первой, пятой и 10-й минутах у лиц с сердечным ТСК была больше чем у испытуемых с сосудистым ТСК, соответственно, на 46,9%, 42,4% и 40%.

Учитывая этот факт, а также то, что основная роль в обеспечении венозного возврата принадлежит микронасосной функции скелетных мышц [1], можно считать, что у лиц с сердечным ТСК гемодинамическая функция скелетных мышц более развита, чем у представителей сосудистого ТСК.

В дальнейшем при рассмотрении реакции кровообращения на ортостатическое влияние, за исходный уровень мы принимали величины, зарегистрированные на 10-й минуте горизонтального положения.

Переход испытуемых в положение стоя вызывал изменение почти всех изучаемых показателей, кроме МОК, значения которого у предста-

вителей обоих ТСК на всем протяжении ортостаза поддерживались на стабильном уровне, и не отличалась от своих исходных величин.

Показатели кровообращения, отмеченные в положении стоя, представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Значения показателей кровообращения, зарегистрированные в положении стоя у лиц с сердечным и сосудистым ТСК ($\bar{X} \pm SD$)

Показатель	Сосудистый ТСК			Сердечный ТСК		
	1 минута	5 минута	10 минута	1 минута	5 минута	10 минута
АДср мм рт ст	107,9±10,2*	106,4±9,1*	104,7±11,9*	102,1±6,8*	101,2±5,4*	100,3±4,2*
СО, мл	40,4±22,5*	37,5±17,4*	33,3±15,2*	64,9±17,3*	58,5±17,5*	63,3±21,3*
ЧСС уд/мин	80,1±21,2*	83,3±17,9*	85,3±19,9*	64±8,6*	62,8±8,9*	64,1±8,8*
МОК л/мин	3,1±1,9	3,1±1,4	2,7±1,1	5,1±1,6	4,7±1,5	5,0±1,6

Примечание – звездочкой отмечены значения показателей отличающиеся ($p<0,05$) от исходного уровня.

Как видно из таблицы 2, поддержание МОК на стабильном уровне было возможным благодаря разнонаправленным изменениям ЧСС и СО. Так, по сравнению с исходным уровнем, на первой минуте ортостаза, у лиц с сосудистым ТСК, отмечено снижение СО на 25,9% и компенсаторное повышение ЧСС на 15,8%, у представителей сердечного ТСК СО снизился на 28,5%, а ЧСС возросло на 22,8%.

Обращает на себя внимание различная степень уменьшения СО в ответ на постуральное влияние у представителей сосудистого и сердечного ТСК. У лиц с сердечным ТСК на первой минуте ортостаза, уменьшение СО выражено в большей степени, чем у представителей сосудистого ТСК.

Такое отличие в изменении СО связано с различной степенью депонирования крови в венозных сосудах, которое определяется состоянием тонического напряжения их стенок.

Таким образом, у представителей сосудистого ТСК на первой минуте ортостаза, также как и в положении лежа, тонус венозных сосудов поддерживался на более высоком уровне, чем у лиц с сердечным ТСК.

Важно отметить, следующий факт. По сравнению с исходным уровнем, у лиц с сосудистым ТСК на первой, пятой и 10-й минутах ортостаза отмечается достоверное увеличение ЧСС на 15,8%, 20,4% и 23,3%. У представителей сердечного ТСК прирост ЧСС на 22,8% ($p=0,0002$) отмечен только на первой минуте ортостаза, и в дальнейшем ее величина поддерживалась на стабильном уровне. Известно, что ЧСС отражает соотношение активности симпатического и парасимпатического отделов вегетативной нервной системы и при стрессе, активность симпатического отдела вегетативной нервной системы возрастает.

Таким образом, повышение ЧСС от первой к 10-й минуте ортостаза у представителей сосудистого ТСК, указывает на рост активности симпатического отдела вегетативной нервной системы.

Ортостатическое влияние вызывало увеличение АДср на первой минуте у представителей, как сердечного, так и сосудистого ТСК.

В дальнейшем, на пятой и 10-й минутах ортостаза, АДср у представителей сердечного ТСК поддерживалось на стабильном уровне, в то время как у лиц с сосудистым ТСК на 10-й минуте этого положения зарегистрировано снижение АДср на 3% ($p=0,032$) по сравнению с величиной отмеченной на первой минуте ортостаза.

Уменьшение АДср у лиц с сосудистым ТСК обусловлено депонированием крови в венозных сосудах, на это указывает понижение у них на 10-й минуте СО на 17,6% ($p=0,014$), по сравнению со значением, зарегистрированным на первой минуте вертикального положения.

У всех испытуемых ОПСС на всем протяжении ортостаза поддерживалось на стабильном уровне и достоверно превышало исходную величину, в то время как МОК у лиц сосудистым ТСК на первой и пятой минутах не отличался, а на 10-й минуте был на 25% меньше исходной величины. У представителей сердечного ТСК МОК не отличался от исходного значения на протяжении всего времени пребывания испытуемых в положении стоя.

Важно также отметить, что у лиц с сосудистым ТСК уменьшение АДср на 10-й минуте ортостаза, обусловлено сердечным компонентом. Величина МОК у представителей этого ТСК на 10-й минуте ортостаза снизилась по сравнению с исходным уровнем на 25%, в то время как у лиц с сердечным ТСК МОК на протяжении всего ортостаза не отличался от исходного уровня.

Выводы

В положении лежа у представителей сердечного ТСК депрессорная реакция кровообращения была выражена в большей степени и протекала на фоне более низкого тонуса венозных сосудов, чем у лиц с сосудистым ТСК. Сопряженность изменений АД и СО у лиц с сердечным ТСК указывает на важную роль венозных сосудов в динамике АД.

У лиц с сердечным ТСК гемодинамическая функция скелетных мышц более развита, чем у представителей сосудистого ТСК.

У лиц с сосудистым ТСК обеспечение ортостатической устойчивости происходит на фоне возрастания активности симпатического отдела вегетативной нервной системы и поддержании тонуса венозных сосудов на более высоком уровне, чем у представителей сердечного ТСК.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Аринчин, Н.И.* Комплексное изучение сердечно-сосудистой системы / Н.И. Аринчин. – Минск : Наука и техника, 1961. – 220 с.
2. *Катков, В.Е.* Роль тонуса скелетных мышц в регуляции кровообращения в ортостазе / В.Е. Катков, Л.И. Какурин // Космическая биология и авиакосмическая медицина. – 1978. – Т. 12. – № 1. – С. 75–78.

3. *Аринчин, Н.И.* Гипертоническая болезнь как нарушение саморегуляции кровообращения / Н.И. Аринчин, Г.В Кулаго. – Минск : Наука и техника, 1969. – 104 с.
4. *Доцоев, Л.Я.* Барорецепторный рефлекс и артериальная жесткость у подростков / Л.Я. Доцоев, А.А. Астахов, А.М. Усыпин // Физиология человека. – 2011. – Т. 37. – № 3. – С. 27–35.
5. Evidence for a central origin of the low-frequency oscillation in RR-interval variability / R.L. Cooley [et al.] // Circulation. – 1998. – V. 98. – № 6. – P. 556.
6. Гемодинамические и нейрогуморальные аспекты гипертонии : материалы симпозиума / И. Пшеровки [и др.]. – М., 1983. – С. 101–106.
7. *Самойленко, А.В.* Венозный возврат в системной гемодинамике / А.В. Самойленко // Российский физиологический журнал им. И.М. Сеченова. – 2011. – Т. 97. – № 1. – С. 3–23.

Поступила в редакцию 18.04.2014 г.

УДК 612+57.042+57.043+574.24

*Н.В. АКУЛИЧ, А.Н. ОСІПЕНКО,
А.А. МАРОЧКОВ, І.А. БОБЦОВА, А.В. МАРОЧКОВ*

МЕХАНИЗМЫ ТЕРАПИИ ИШЕМИИ МИОКАРДА МЕТОДОМ ВЛОК

Проведена комплексная оценка влияния курсового применения внутрисосудистого лазерного облучения крови на эритроциты больных с ишемической болезнью сердца. Обнаружены изменения структурных параметров эритроцитов в сочетании с модификацией липидов мембран и обновлением клеточной популяции эритроцитов периферической крови.

Изучение механизмов восстановления перфузии тканей и, в первую очередь, миокарда при применении эфферентных методов лечения продолжает оставаться актуальным. Для достижения этой цели необходим более детальный анализ биохимической природы ишемии и технологий, позволяющих ее корректировать. Так, показано, что при лонгитудинальной ишемии практически полностью утилизируются запасы макроэнергических фосфатов, отмечается накопление протонов, двуокиси углерода, неорганических фосфатов и аденоцина [1]. С другой стороны, одним из наиболее перспективных методов улучшения перфузии тканей является внутрисосудистое лазерное облучение крови (ВЛОК) [2]. Механизмы действия ВЛОК рассматриваются в пособиях и руководствах [1].

Несмотря на обширную литературу по этой проблеме, невыясненными остаются особенности эритроцитов в динамике курсового применения ВЛОК. В частности: необходимо проанализировать как количество

эритроцитов, так и их структурно-функциональное состояние, а также необходимо уточнить состав липидов их мембран.

Объект и методы исследования. Основную группу составили 26 больных ишемической болезнью сердца (46.1 ± 0.9 года), находившиеся на лечении в Могилевской областной больнице. Контрольную группу составили здоровые добровольцы мужского пола (19 человек, возраст 40.2 ± 1.1 года).

Сеансы НИЛИ проводили в отделении детоксикации УЗ “Могилевская областная больница” методом внутрисосудистого лазерного облучения крови при помощи прибора лазерной терапии ОК-1. Время проведения процедуры – 40-45 минут, курс лечения состоял из 5 ежедневных сеансов. Первый сеанс начинался в понедельник в 9⁰⁰, а заканчивалось лечение в пятницу в 9⁴⁵.

Анализ эритроцитов осуществляли на проточном цитофлуориметре Cell Lab Quanta SC, Beckman Coulter (США) и микроскопе проходящего света (Axio Imager A1, Германия), объектив Plan-Neofluar 100×1.3 Oil с видеокамерой “AxioCam MrC5” (Германия) при помощи программы “Диаморф-ЦИТО” (Россия). Морфологический анализ эритроцитов осуществляли с использованием DIC-призм в препаратах, подготовленных по методу “влажной капли”. При микрокопировании анализировались следующие показатели размеров эритроцитов – структурные (площадь, объем), а также характеристики тора – периферическая зона эритроцита, пэллора – центральная зона эритроцита, объем и площадь поверхности эритроцита. Оптические и морфологические параметры рассчитывались при помощи построения “оптического профиля” на гистограмме распределения изображения оптической плотности красных кровяных телец.

Анализ состава жирных кислот эритроцитарной массы проводили методом высокоэффективной капиллярной газо-жидкостной хроматографии. Для этого проводилось газохроматографическое разделение жирных кислот, выделенных из фракции эфиров со спиртами холестерина и глицерина. Количественная оценка содержания отдельных жирных кислот производилась в процентном отношении к их общей сумме. Измерения проводились на газовых хроматографах ГХ-1000, ЦВЕТ-800, ГАЛС (Россия) с пламенно-ионизационными детекторами. Приборы проходили поверку в РУП “Центр стандартизации и метрологии”.

Для регистрации ИК-спектров образцы полученной крови в равных объемах помещались в оптически прозрачные кюветы, изготовленные из кристаллов KRS. Спектры пропускания регистрировали на Фурье-спектрометре ИнфраЛЮМ ФТ-02 при ширине спектральной щели 4 см⁻¹. Анализ pH, газов крови, концентрации метаболитов и оксиметрии, фракций гемоглобина, проводили на газоанализаторе ABL 800.

Статистический анализ состоял из методов описательной статистики, непараметрических методов анализа. Изменения считались значимыми при $p < 0.05$. Все статистические методики реализованы с помощью программы Statistica (StatSoft, США).

Результаты и обсуждение.

До лечения у всех пациентов с ИБС выявлена тенденция к ацидоzu, уровень pH составлял 7.34 ± 0.13 , 7.33 ± 0.16 и 7.36 ± 0.11 , перед 1, 3 и 5 сеансами соответственно (рис. 1). После каждого из сеансов отмечалась нормализация кислотно-щелочного состояния, причем рост pH сопровождался снижением pCO_2 и увеличением концентрации бикарбонатов. В работе [2] при транскутанном облучении белых крыс без признаков патологии гелий-неоновым лазером 633 нм отмечено снижение pH и снижение сродства гемоглобина к кислороду, что может свидетельствовать о различных механизмах воздействия ВЛОК при ИБС и при ее отсутствии.

Насыщение гемоглобина кислородом (sO_2) в результате проведения сеансов ВЛОК достоверно увеличивалось ($p < 0.04$, здесь и далее тест Wald-Wolfowitz) после каждого сеанса, причем уже до пятого сеанса этот параметр был равен 74%, в то время как до лечения и до 3 сеанса уровень sO_2 составлял 55% и 44% соответственно (см. рис. 1).

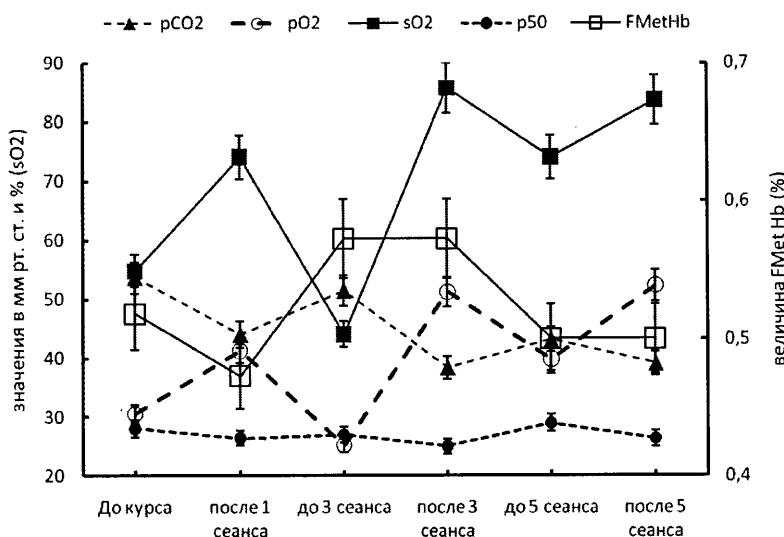


Рисунок 1. Оксиметрия и pH венозной крови при проведении сеансов ВЛОК

Поскольку показатель sO_2 адекватен для оценки при отсутствии в крови дисгемоглобинов (у нас отмечалось наличие метгемоглобина на протяжении всего курса), то для оценки состояния системы крови мы оценивали фракцию оксигемоглобина (FO^2Hb). Ее прирост составил 50%, 73% и 20% ($p < 0.05$), соответственно, причем уже до 5 сеанса FO^2Hb на 20% превышал исходный уровень фракции оксигемоглобина. Снижение концентрации метгемоглобина свидетельствует о восстановлении ферментативной системы, участвующей в конверсии $FMet$ в FO^2Hb . Фракция карбоксигемоглобина в общем гемоглобине, наряду со снижением фракции дезоксигемоглобина в общем гемоглобине ($p < 0.03$), увеличива-

лась после каждого сеанса в сочетании со снижением концентрации лактата ($p<0.04$) до величин нормы.

Показатель p_{50} , характеризующий аффинитет гемоглобин-кислород и отражающий положение кривой сатурации гемоглобина, после сеансов ВЛОК снижался на 10%, причем после 3 сеанса изменения были достоверны ($p<0.03$). Сдвиг кривой сатурации влево (снижение величины p_{50}) указывает на увеличение сродства гемоглобина к кислороду, и свидетельствует о прекращении ишемии тканей.

При использовании в терапии НИЛИ средний объем эритроцитов у больных ИБС сохранялся повышенным на протяжении всего периода наблюдения. Значение моды объема эритроцитов имело сходную тенденцию, статистически достоверных изменений выявлено не было (рис. 2).

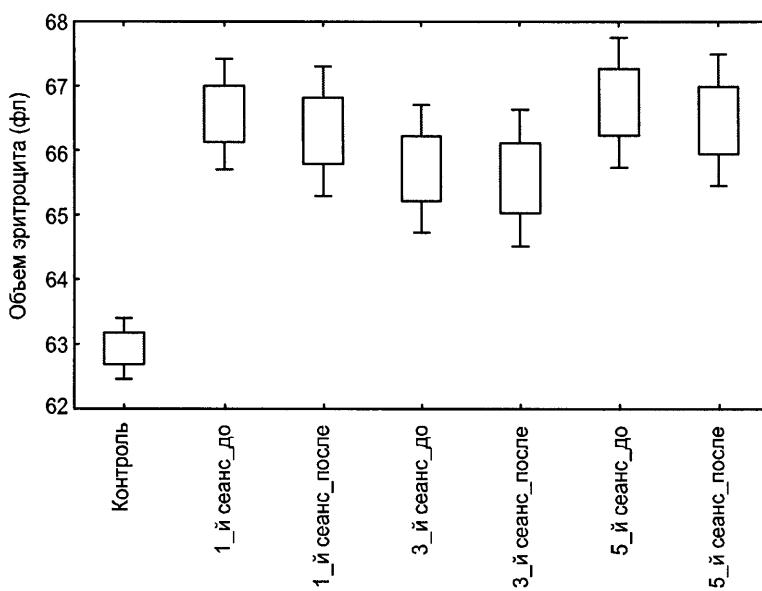


Рисунок 2. Объем эритроцитов при проведении сеансов ВЛОК

Также сохранялся анизоцитоз ($p<0.05$). Последний параметр определялся исходя из величины ширины полувысоты гистограммы распределения объема эритроцитов. Таким образом, терапия ВЛОК не привела к нормализации объема эритроцитов, и их объем был выше ($p>0.05$) по сравнению с группой контроля.

Анализ мазков крови представленных образцов (более 300 эритроцитов с одного препарата) не выявил появления патологических форм эритроцитов у больных ишемической болезнью сердца при применении ВЛОК.

На следующем этапе был проведен морфоденситометрический анализ красных кровяных телец. В каждой пробе анализировали не менее 100 клеток (рис. 3).

Среднее значение бокового светорассеяния увеличивалось после каждого сеанса ($p<0.05$).

До проведенного сеанса диаметр пэллора составлял 2.44 ± 0.39 μm , а после проведения сеанса – 3.83 ± 0.43 μm . После проведенного лечения диаметр пэллора вырос до 4.11 ± 0.22 μm . Диаметр пэллора тесно (-0.89 , $p < 0.04$) коррелировал с толщиной пэллора эритроцитов.

Проведенный биохимический анализ венозной крови больных с ИБС показал, что ВЛОК вызывает снижение уровня триглицеридов и других липидов, что подтверждает наше предположение об уменьшении скорости липолиза и высвобождения СЖК.

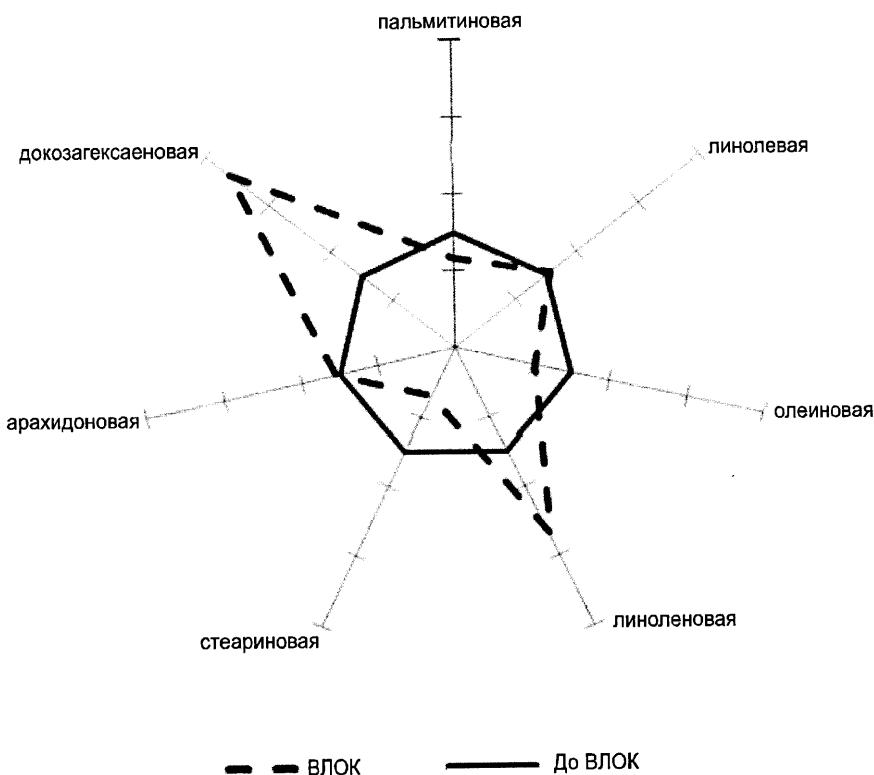


Рисунок 5. Состав жирных кислот эритроцитарной массы после сеанса внутрисосудистого лазерного облучения крови

Анализ состава жирных кислот эритроцитарной массы показал, что под действием ВЛОК в составе липидных компонентов эритроцитов происходит рост относительного содержания докозагексаеновой (ДГК) полиненасыщенной жирной кислоты (рис. 5). Так, после 1-го сеанса ВЛОК концентрация этой кислоты жирного ряда увеличивалась с $4,69 \pm 0,83\%$ до $4,93 \pm 0,89\%$. Кроме того, после повторных сеансов лазерной терапии отмечалось некоторое накопление ДГК. Данный факт заслуживает особого внимания, поскольку ДГК является ω -3 жирной кислотой, а значит, даже при относительно невысоком ее содержании в клеточных мембранах, она выполняет ряд важных функций, таких, как регуляция процессов, вызванных запуском арахидонового каскада.

Площадь поверхности эритроцитов (S_{RBC}) увеличивалась ($p<0.05$) после каждого сеанса (рис. 4), а после четырех проведенных сеансов площадь поверхности эритроцитов была, как и в случае параметра бокового светорассеивания выше исходного уровня как до, так и после сеанса.

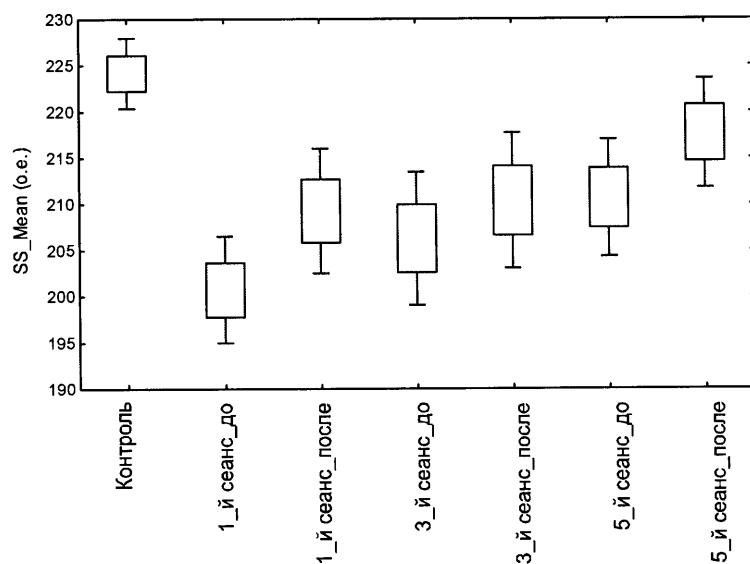


Рисунок 3. Боковое светорассеивание при проведении сеансов ВЛОК

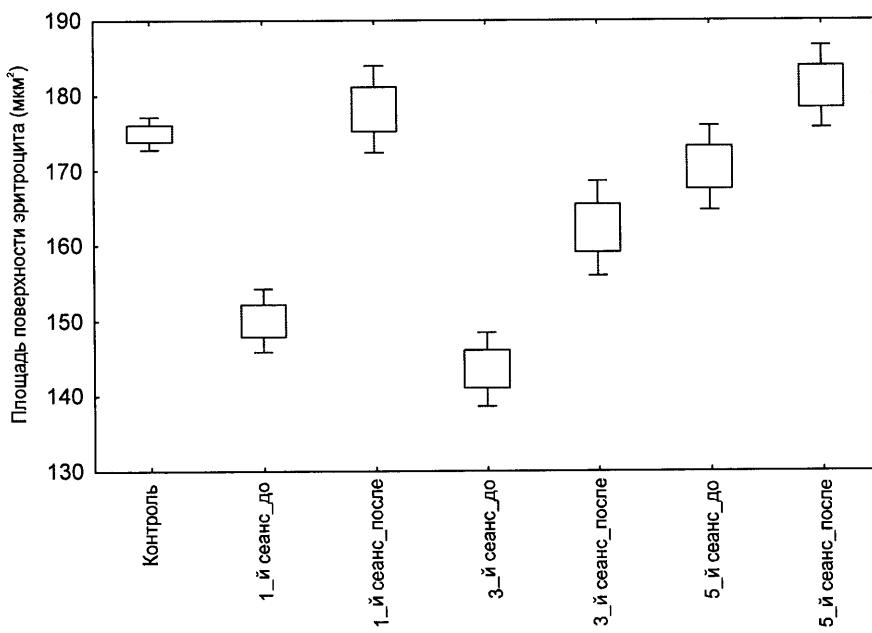


Рисунок 4. Площадь поверхности эритроцитов при проведении сеансов ВЛОК

Еще одним важным моментом в аспекте пространственной организации эритроцита является то, что ДГК, содержащая в своей структуре 6 двойных связей, вызывает значительное возмущение липидного бислоя. При этом длина такой молекулы уменьшается, а занимаемый ею объем возрастает, тем самым «преодолевается» избыточная плотность упаковки углеводородных цепей, составляющих основу плазматической мембраны эритроцита [3].

В ИК-спектрах биомолекул крови до облучения НИЛИ доминируют полосы пропускания, характерные для полипептидов с большим количеством аминокислотных остатков. В инфракрасных спектрах крови наиболее интенсивные полосы пропускания характерны для колебаний CH_2 , $\text{O}-\text{P}$ (1170 см^{-1}) – фосфолипидов, CN , NH (1311 см^{-1}) – полипептидов, COO ($1430–1380 \text{ см}^{-1}$) – аминокислот, CH , CH_2 , CH_3 ($1480–1430 \text{ см}^{-1}$) – жирных кислот, фосфолипидов и триглицеридов, NH ($1600–1480 \text{ см}^{-1}$), $\text{C}=\text{O}$ ($1720–1600 \text{ см}^{-1}$) – спиралей белковых молекул.

При анализе положения максимумов поглощения необлученной крови были выявлены изменения в ИК-спектрах крови пациентов с ИБС относительно – здоровых доноров, указывающие на изменение пространственной структуры белков цельной крови.

Наиболее интенсивно выраженные изменения в ИК-спектрах наблюдаются в области от 1200 до 1050 см^{-1} , где основной вклад имеют симметричные и асимметричные колебания $-\text{O}-\text{P}=\text{O}$ фосфолипидов, фосфорилированных белков, колебания $-\text{C}-\text{OH}$ – группы жирных кислот, а также колебания $-\text{C}-\text{O}-$ групп углеводов. Сделано предположение, что данные полосы пропускания могут быть специфическими биомаркерами в диагностике ИБС.

После облучения лазером спектры крови здоровых доноров характеризовались стабильным положением основных полос пропускания.

В ИК-спектрах крови пациентов с ИБС после облучения лазером наблюдается уменьшение интенсивности дуплетной полосы амид I (1654 см^{-1}) и амид II (1540 см^{-1}). Зафиксированы изменения в ИК-спектрах в диапазоне волн $1470–1180 \text{ см}^{-1}$ (рис. 6, 7), которые можно объяснить качественными и количественными изменениями определенных макромолекул, входящих в состав цельной крови, в основном фосфолипидов, протеинов, глюкозы, холестерина.

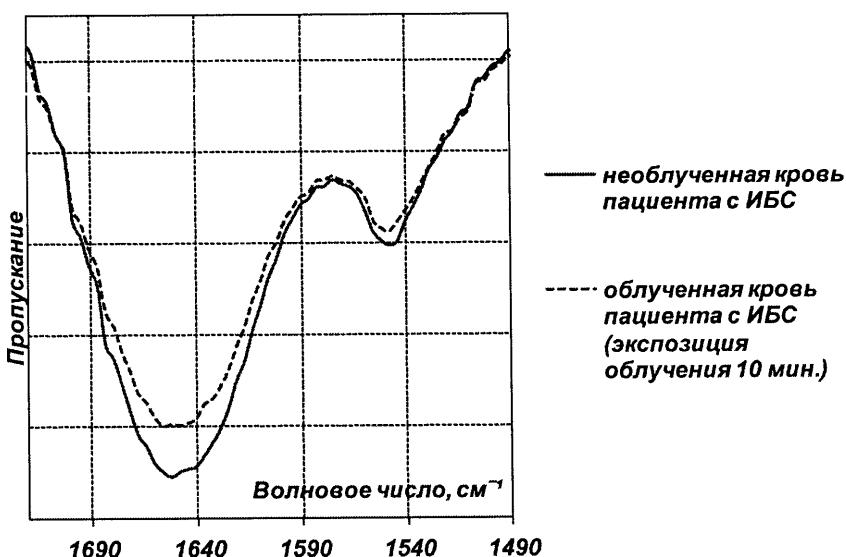


Рисунок 6. ИК-спектры крови пациентов с ИБС (диапазон 1700–1470 см⁻¹)

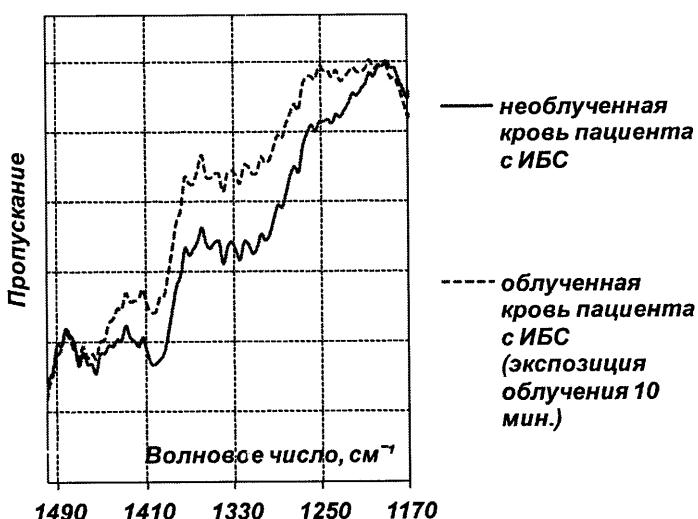


Рисунок 7. ИК-спектры крови пациентов с ИБС (диапазон 1470–1180 см⁻¹)

Заключение

Принято считать, что поглощение света при сеансах ВЛОК приводит к активации порфирина-содержащих соединений, транспорта электронов в митохондриях, вызывает фотовозбуждение молекулярного кислорода, оказывает неспецифическое влияние на структуру воды, вызывает изменение пространственной структуры и функциональной активности биомолекул [1, 2, 4–6].

В ходе проведенного нами исследования установлено, что для ишемической болезни сердца характерен макро- и анизоцитоз эритроцитов. Крас-

ные кровяные тельца (во всяком случае часть из них) – функционально неполноценные эритроциты, имеют морфо-функциональные, биохимические отличия, различаются по характеристикам ИК-спектров. Сеансы НИЛИ, по нашему мнению, вызывают секвестрацию и разрушение патологически измененных и деформированных НИЛИ клеток в селезенке.

При адекватном снабжении сердца кислородом свободные жирные кислоты (СЖК) представляют собой один из основных источников энергии для здорового сердца, причем вклад окисления глюкозы и лактата менее значителен. Это позволяет сердечной мышце производить молекул АТФ на один атом углерода окисляемого субстрата больше, чем при окислении глюкозы. Однако при окислении глюкозы необходимость в кислороде при производстве такого же количества молекул АТФ существенно ниже, чем при обмене СЖК. Кроме того, окисление жирных кислот метаболически связано с неэффективными в плане расходования АТФ процессами, такими, как синтез триглицеридов. Следует учесть и процессы подавления транспорта АТФ из митохондрий в цитозоль, инициируемые повышением концентрации ацил-КоА в митохондриях вследствие снижения поступления кислорода и перегруженности внутримитохондриального пространства неокисленными СЖК. Но при ишемии миокарда большая часть энергии продолжает вырабатываться за счет СЖК, несмотря на высокий уровень лактата. Следовательно, средства ингибирующие липолиз и высвобождение СЖК, их транспорт и окисление, а также активирующие окисление глюкозы, можно использовать для оптимизации продукции АТФ в условиях снижения концентрации доступного кислорода [3].

Поскольку уровень pO_2 на протяжении всего периода лечения был ниже нормы, а в крови зафиксирован рост концентрации лактата в пределах 20–40% ($p < 0,05$) перед проведением сеанса ВЛОК, то такое состояние соответствует гемической гипоксии. Она сопровождает весь курс лечения и является возмущающим сигналом, приводящим к восстановлению гомеостазиса у пациентов с ИБС за счет стимуляции эритропоэза. Таким образом, основной биохимический механизм терапии заключается в ингибировании окисления СЖК и переключении метаболизма на аэробное окисление глюкозы. Средством, позволяющим повысить общую кислородную емкость крови, вероятно, является обновление клеточной популяции.

Для обновленной популяции эритроцитов характерно повышенное содержание докозагексаеновой полиненасыщенной жирной кислоты, кумулятивный рост которой увеличивался от сеанса к сеансу.

Таким образом, вызванный курсовым применением ВЛОК рост площади поверхности эритроцитов без изменения их объема является результатом обновления клеточной популяции.

Методом ИК-спектроскопии установлено, что при ишемии миокарда происходит изменение пространственной структуры белков цельной крови, что может служить причиной их способности реагировать на низкоинтенсивное облучение лазерным излучением. Клетки крови здоровых

доноров, имеющие другую структуру белковых молекул, не поглощают энергию НИЛИ, и она рассеивается.

На основании полученных экспериментальных данных нет оснований утверждать, что энергия квантов красного излучения приводит к разрушению (ионизации) биомолекул. С равной степенью вероятности НИЛИ приводит к их переходу в возбужденное состояние, и поглощенная энергия используется молекулами клеток, которым она необходима для осуществления нормального внутриклеточного метаболизма.

Выводы.

1. Курсовое применение ВЛОК у больных ишемической болезнью приводит к обновлению клеточной популяции эритроцитов периферической крови.

2. Внутрисосудистое лазерное облучение крови приводит к включению компенсаторных механизмов, ключевым звеном которых является эритрон; у большинства клеток эритроцитарного пула после сеансов ВЛОК увеличивается площадь поверхности, а рост концентрации полиненасыщенной докозагексаеновой кислоты приводит к возрастанию деформационной способности красных кровяных телец.

Исследование проведено при финансовой поддержке Могилевского областного исполнительного комитета. Выражаем благодарность персоналу отделения детоксикации Могилевской областной больницы за помощь в проведении исследования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Пономаренко, Г.Н. Биофизические основы физиотерапии : учебное пособие / Г.Н. Пономаренко, И.И. Турковский. – М. : ОАО “Издательство «Медицина», 2006. – 176 с.
2. Васильев, А.П. Эффективность лазеротерапии больных ишемической болезнью сердца / А.П. Васильев, Н.Н. Стрельцова, Ю.Н. Сенаторов // Вопросы курортологии, физиотерапии и лечебной физической культуры. – 2003. – № 4. – С. 10–12.
3. Болдырев, А.А. Биомембронология : учебное пособие / А.А. Болдырев, Е.И. Кийвяряйнен, В.А. Илюха. – Петрозаводск : Изд-во Кар НЦ РАН, 2006. – 226 с.
4. Марочкин, А.В. Внутрисосудистое лазерное облучение крови, механизмы взаимодействия и клиническое применение / А.В. Марочкин. – Минск, 1996. – 88 с.
5. Москвин, С.В. Основы лазерной терапии / С.В. Москвин, В.А. Буйлин. – Тверь : ООО “Издательство «Триада», 2006. – 256 с.
6. Внутрисосудистое лазерное облучение крови вызывает изменение структурных параметров эритроцитов больных с ишемической болезнью сердца / Н.В. Акулич [и др.] // Журнал ГГМУ. – 2009. – № 1. – С. 98–102.

Поступила в редакцию 06.02.2014 г.

ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ

БЕРНІК

Васіль Іванаевіч

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар БДУ

ЛУНЕВІЧ

Арцём Вадзімавіч

– аспірант інстытута матэматыкі НАНБ

ДРАБАТУН

Барыс Мікалаеевіч

– прафесар Паўладарскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя С. Тарайгырава

КАЛУГІНА

Марына Аляксееўна

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта інфарматыкі і радыёэлектронікі

КІР'ЯЦКІ

Эдуард Рыгоравіч

– габілітаваны доктар навук, прафесар Вільнюскага тэхнічнага ўніверсітэта імя Гедымінаса

МАЦЮХІН

Валерый Іванаевіч

– настаўнік экспер特 Вільнюскай сярэдняй школы "Сантарас"

ЦІМОШЧАНКА

Алена Валер'еўна

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры інфарматыкі МДУ імя А.А. Куляшова

ЮРЭВІЧ

Уладзімір Антонавіч

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры інфарматыкі МДУ імя А.А. Куляшова

ЮРЭВІЧ

Юрый Уладзіміравіч

– аспірант кафедры эксперыментальнай і тэарэтычнай фізікі МДУ імя А.А. Куляшова

ДРАБЫШЭЎСКАЯ

Таццяна Віктораўна

– аспірант кафедры інжынернай графікі ГДТУ імя П.В. Сухога

ОСТРЫКАЎ

Алег Міхайлаевіч

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры інжынернай графікі ГДТУ імя П.В. Сухога

ТРЫФАНАЎ

Уладзімір Васільевіч

– кандыдат біялагічных навук, дацэнт кафедры тактыка-спецыяльнай падрыхтоўкі Магілёўскага вышэйшага каледжа МУС РБ

АКУЛІЧ

Мікалай Васільевіч

– кандыдат біялагічных навук, дацэнт, загадчык лабаратарыі экалагічнай фізіялогіі РЦКВ МДУ імя А.А. Куляшова

АСІПЕНКА

Аляксандр Мікалаеевіч

– аспірант кафедры біялогіі МДУ імя А.А. Куляшова

МАРАЧКАЎ

Аляксей Аляксееўч

– урач-кардыёлаг Магілёўскай абласной бальніцы

БАБЦОВА

Ірина Анатольеўна

– аспірант МДУ імя А.А. Куляшова

МАРАЧКАЎ

Аляксей Віктораўніч

– доктар медыцынскіх навук, прафесар, загадчык аддзялення анестэзіялогіі і рэанімацыі Магілёўскай абласной бальніцы

SUMMARIES

Akulich N.V., Osipenko A.N., Marochkov A.A., Bobtsova I.A., Marochkov A.V. MECHANISMS OF THERAPY OF MYOCARDIAL ISCHEMIA BY ILI METHOD.

A comprehensive estimation of the influence of course application of intravascular laser irradiation of blood on red blood cells of patients with coronary heart disease is provided. Changes in structural parameters of erythrocytes accompanied by membrane lipids' modification and renewal of red blood cell population of peripheral blood are detected.

Bernik V.I., Lunevich A.V. DISTRIBUTION OF POINTS IN THE PLANE WITH REAL AND INTEGER ALGEBRAIC COORDINATES.

In the paper the regularity of the set of points (α_1, α_2) with real algebraic coordinates and the regularity of the set of points (β_1, β_2) with integer real algebraic coordinates of arbitrary degree are proved.

Drobotun B.N. STRUCTURAL PROPERTIES OF ALGEBRAIC SYSTEMS AND PRINCIPLE OF ABSTRACTNESS OF FORMAL LANGUAGES OF PREDICATE CALCULATION.

In the article methodological approaches to the study of algebraic systems' properties manifested by means of the formal language of calculation of predicates and functions are offered. Using invariance of these properties with respect to isomorphic maps in the solution of applied problems and logical-mathematical practice is demonstrated by concrete examples.

Drobyshevskaya T.V., Ostrikov O.M. PLANE PROBLEM OF DETERMINING STRESS AND STRAIN STATES CAUSED BY SINGLE TWIN IN POLYCRYSTAL GRAINS.

The method of calculation of the stress-strain state conditioned by a single twin in polycrystal grain is depicted. It has been established that the maximum normal and shear stresses are localized at the grain nodal points and the twin boundaries as well as at the grain boundaries.

Kiriatski E.G., Matiuhin V.I. DRAWING GEOMETRIC FIGURES.

The basic rules of making drawings of geometric figures on a plane and in space are presented in the article. It provides a lot of exercises on depicting images.

Timoschenko Y.V., Yurevich V.A., Yurevich Yu.V. A SHORT OPTICAL PULSE SPLITTING UNDER NONLINEAR REFLECTION FROM A THIN FILM OF THE DENSE RESONANT MEDIUM.

The new nonlinear dynamic optical effect – splitting of the short light pulse reflected by a thin subsurface layer of the dense resonant medium is

predicted. The effect is possible in a regime of coherent interaction of light with substance and arises as consequence of nutation oscillations of population difference occurring in the conditions of dynamical phase reconfiguration of laser field and material polarisation in a thin resonant layer. The main factor of development of splitting is the effect of nonlinear phase shift caused by the influence of the near dipole interactions on the resonant absorption line.

Trifonov V.V. PECULIARITIES OF HEMODYNAMICS IN PERSONS WITH VASCULAR AND CARDIAC TYPE OF SELF-REGULATION OF BLOOD CIRCULATION.

The study involved 44 people. Peculiarities of blood circulation in subjects with cardiac and vascular types of self-regulation of blood circulation have been studied. The results of the research prove the connection between the changes in venous capacity and decrease in total peripheral blood flow resistance and arterial blood pressure which marks a potential role of venous vessels in arterial blood pressure change. Staying in a standing position for subjects with vascular type of self-regulation of blood circulation is accompanied by an increased activity of sympathetic division in vegetative nervous system.

Yurevich Yu.V. NONLINEAR SUSCEPTIBILITY OF THIN LAYER OF DENSE RESONANT MEDIUM.

Within the frame of the semiclassical approach to the study of light - medium interaction the estimation of the nonlinear response of the optical structure including a thin boundary layer of the dense resonant material is made. On the basis of the received analytical expressions the calculation of the spectral dependencies of absorption and refraction index in the frequency range of optical resonance for different degree of saturation of resonant transition is carried out. The possibility of hysteresis in dispersive dependence of dielectric susceptibility of boundary layer medium is predicted for model parameters of semi-conductor quantum-size structures.