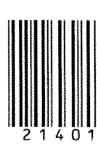


ISSN 2073-8315



ВЕСНИК

Магілёўскага дзяржаўнага
універсітэта
імя А.А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца с снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

**1 (43)
2014**

Галоўная рэдакцыйная камегія:

д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (галоўны рэдактар);
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара);
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (нам. галоўнага рэдактара);
д-р фіз.-мат. навук прафесар С.В. Жасткоў (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В);
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук дацэнт А.В. Марацкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)

ЗМЕСТ

<i>ГАЛЬМАК А.М.</i> . Об операции $[]_{i,t,j}$	4
<i>БОРОДИЧ Р.В.</i> . О пересечении аномальных подгрупп в группах с операторами	14
<i>КЕМЕШ О.Н., САКОВИЧ Н.В.</i> . Регулярность множества рациональных чисел в коротких интервалах	25
<i>ОСТРИКОВ О.М., ИНОЗЕМЦЕВА Е.В.</i> . Расчет напряженно-деформированного состояния твердого тела, подвергнутого поперечному сдвигу при наличии находящегося вдали от поверхности упругого линзовидного двойника	29
<i>СОБОЛЕВСКИЙ А.Н.</i> . Складывается ли скорость света со скоростью приемника?	38
<i>БОБДОВА И.А.</i> . Спектральные исследования влияния низкоинтенсивного лазерного излучения на биомолекулы крови	46
<i>КОЦАН И.Я., КОЗАЧУК Н.А., ПОРУЧИНСКИЙ А.И., КАЧИНСКАЯ Т.В., МОТУЗЮК А.П.</i> . Локальная и пространственная синхронизация альфа-активности испытуемых с аналитическим и синтетическим когнитивным стилем в процессе решения заданий конвергентного и дивергентного типа	54
<i>БОЖУК Т.И.</i> . Оценка рекреационно-туристических дестинаций для потребностей активного отдыха и стационарной рекреации (на примере регионального ландшафтного парка "Знесиння", Львов, Украина)	62
<i>КОЛЬМАКОВА Е.Г., ГРИБ С.В.</i> . ГИС-моделирование водного стока рек Беларуси в условиях изменения климата	68
ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ	75
SUMMARIES	76

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

ОБ ОПЕРАЦИИ $[]_{l, T, J}$

Для любого целого $l \geq 2$, любого непустого множества J и любой полугруппы A на декартовом произведении $T \times A^J$, где T – подмножество симметрической группы S_J всех биекций множества J на себя, A^J – множество всех функций с областью определения J и со значениями в полугруппе A , определяется и изучается l -арная операция $[]_{l, T, J}$. Частными случаями этой l -арной операции являются изучавшиеся ранее автором l -арные операции $[]_{l, \sigma, k'} []_{l, \sigma, J}$ и $[]_{l, T, k'}$ а также две полиадические операции \mathcal{E} . Поста, которые он определил на упорядоченных наборах подстановок и упорядоченных наборах матриц соответственно.

1. Введение

Полиадические операции на декартовых степенях множеств впервые появились у Э. Поста [1]. Конструкция, которую он использовал при построении своих m -арных операций, допускает различные обобщения. Некоторые из них реализованы в серии работ автора, результаты из которых с соответствующими ссылками включены в книгу [2]. Здесь же отметим только статью [3], в которой для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ на k -й декартовой степени A^k полугруппы A определена l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ частными случаями которой являются упомянутые выше операции Э. Поста. Подробному изучению свойств операции $[]_{l, \sigma, k}$ и некоторых ее обобщений посвящена книга [2].

Так как любой элемент (a_1, \dots, a_k) конечной декартовой степени A^k произвольного множества A можно отождествить с некоторой функцией $f: j \rightarrow a_j$ с областью определения $J = \{1, \dots, k\}$ и со значениями во множестве A , то можно считать, что l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ определена на множестве функций A^J . В связи со сказанным возникает задача обобщения операции $[]_{l, \sigma, k}$ на случай произвольной области определения J . Для решения этой задачи в [4] для любого целого $l \geq 2$, произвольного множества J и любой биекции σ этого множества на себя на декартовой степени A^J произвольного группоида A была определена l -арная операция $[]_{l, \sigma, p}$, которая, как несложно заметить, совпадает с операцией $[]_{l, \sigma, k}$ если $J = \{1, \dots, k\}$, A – полугруппа. Свойства операции $[]_{l, \sigma, J}$ изучались в [5 – 7], а так же в книге [8].

Еще одним обобщением операции $[]_{l, \sigma, k}$ является l -арная операция $[]_{l, T, k}$ из [9], которая определяется для любых целых $l \geq 2$, $k \geq 2$ на подмножестве $T \times A^k$ декартова произведения

$$\mathbf{S}_k \times A^k = \{(\sigma, \mathbf{a}) = (\sigma, (a_1, \dots, a_k)) \mid \sigma \in \mathbf{S}_k, a_1, \dots, a_k \in A\},$$

где \mathbf{S}_k – симметрическая группа всех подстановок множества $\{1, \dots, k\}$, A – произвольная полугруппа. Если $T = \{\sigma\}$, $\sigma^l = \sigma$, то операцию $[]_{l, \{\sigma\}, k}$ можно отождествить с l -арной операцией $[]_{l, \sigma, k}$. Указанное отождествление позволяет рассматривать операцию $[]_{l, T, k}$ как обобщение операции $[]_{l, \sigma, k}$.

Отмеченные выше переходы от операции $[]_{l, \sigma, k}$ к операциям $[]_{l, \sigma, J}$ и $[]_{l, T, k}$ наводят на мысль о возможности определения еще одной l -арной операции $[]_{l, T, P}$, которая при $J = \{1, \dots, k\}$ должна совпадать с операцией $[]_{l, T, k}$ а при $T = \{\sigma\}$ должна отождествляться с операцией $[]_{l, \sigma, J}$. Основная цель данной статьи – определение операции $[]_{l, T, J}$ и изучение ее свойств.

Мы предполагаем известными определения l -арной полугруппы, l -арной группы, косого элемента l -арной группы, абелевой и полуабелевой l -арных операций. В случае необходимости можно обратиться к [10 – 12] или к главе 1 книги [2].

Будем использовать стандартные обозначения: \mathbf{S}_J – множество всех биекций (подстановок) произвольного множества J на себя; \mathbf{SF}_J – финитарная симметрическая группа всех подстановок из \mathbf{S}_J , имеющих конечный носитель; \mathbf{A}_J – множество всех четных подстановок из \mathbf{SF}_J ; \mathbf{B}_J – множество всех нечетных подстановок из \mathbf{SF}_J ; A^J – множество всех отображений множества J во множество A . Сведения о подстановках произвольных множеств можно почерпнуть из [13, 14].

2. Операция $[]_{l, \mathbf{S}_J, J}$

Пусть A – группоид, J – произвольное непустое множество, σ – подстановка из \mathbf{S}_J . Определим на A^J бинарную операцию $x \overset{\sigma}{\circ} y$, полагая

$$(x \overset{\sigma}{\circ} y)(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)), j \in J.$$

Определение 2.1. Для любого $l \geq 2$, любого непустого множества J и любого группоида A определим на множестве

$$\mathbf{S}_J \times A^J = \{(\sigma, \mathbf{a}) \mid \sigma \in \mathbf{S}_J, \mathbf{a} \in A^J\}$$

l -арную операцию $[]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ следующим образом:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J} = (\sigma, \mathbf{y}), \quad (2.1)$$

где

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma_1}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma_2}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma_{l-2}}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l)) \dots)). \quad (2.3)$$

Отметим, что умножение подстановок в правой части (2.2) осуществляется по правилу $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l(j) = \sigma_l(\dots \sigma_2(\sigma_1(j)) \dots)$.

При $l = 2$ определение 2.1 определяет на $\mathbf{S}_J \times A^J$ бинарную операцию

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2)]_{2, \mathbf{S}_J, J} = (\sigma_1 \sigma_2, \mathbf{x}_1 \stackrel{\sigma_1}{\circ} \mathbf{x}_2).$$

Заметим, что в определении операции $[\cdot]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ подстановки $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ не обязательно все различные. Кроме того, в определении операции $[\cdot]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ можно считать $l = 1$. В этом случае имеем один набор (σ_1, \mathbf{x}_1) , а также

$$\sigma = \sigma_1, \mathbf{y}(j) = \mathbf{x}_1(j), (\sigma, \mathbf{y}) = (\sigma_1, \mathbf{x}_1).$$

Таким образом, $[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)]_{1, \mathbf{S}_J, J} = (\sigma_1, \mathbf{x}_1)$.

Теорема 2.1. *Значение функции \mathbf{y} , определяемой равенством (2.3), принимает в каждой точке $j \in J$ значение*

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))(\dots(\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j))) \dots)).$$

Доказательство. Для $(\sigma_i, \mathbf{x}_i) \in \mathbf{S}_J \times A^J$, $i = 1, \dots, l$ положим

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{l-1} \stackrel{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l &= \mathbf{y}_{l-1}, \mathbf{x}_{l-2} \stackrel{\sigma_{l-2}}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \stackrel{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l) = \mathbf{y}_{l-2}, \dots \\ \dots, \mathbf{x}_2 \stackrel{\sigma_2}{\circ} (\dots(\mathbf{x}_{l-2} \stackrel{\sigma_{l-2}}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \stackrel{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l)) \dots) &= \mathbf{y}_2. \end{aligned}$$

Используя определение операции \circ и (2.3), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{l-1}(j) &= (\mathbf{x}_{l-1} \stackrel{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l)(j) = \mathbf{x}_{l-1}(j)\mathbf{x}_l(\sigma_{l-1}(j)), \\ \mathbf{y}_{l-2}(j) &= (\mathbf{x}_{l-2} \stackrel{\sigma_{l-2}}{\circ} \mathbf{y}_{l-1})(j) = \mathbf{x}_{l-2}(j)\mathbf{y}_{l-1}(\sigma_{l-2}(j)) = \\ &= \mathbf{x}_{l-2}(j)(\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_{l-1}(\sigma_{l-2}(j)))) = \mathbf{x}_{l-2}(j)(\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_{l-2}\sigma_{l-1}(j))), \\ &\dots \\ \mathbf{y}_2(j) &= (\mathbf{x}_2 \stackrel{\sigma_2}{\circ} \mathbf{y}_3)(j) = \mathbf{x}_2(j)\mathbf{y}_3(\sigma_2(j)) = \\ &= \mathbf{x}_2(j)(\mathbf{x}_3(\sigma_2(j)) \dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_3 \dots \sigma_{l-2}(\sigma_2(j))))\mathbf{x}_l(\sigma_3 \dots \sigma_{l-1}(\sigma_2(j)))) \dots) = \\ &= \mathbf{x}_2(j)(\mathbf{x}_3(\sigma_2(j)) \dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_2 \dots \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)))) \dots), \\ \mathbf{y}(j) &= (\mathbf{x}_1 \stackrel{\sigma_1}{\circ} \mathbf{y}_2)(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{y}_2(\sigma_1(j)) = \\ &= \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))(\mathbf{x}_3(\sigma_2(\sigma_1(j)))) \dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_2 \dots \sigma_{l-2}(\sigma_1(j))))\mathbf{x}_l(\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(\sigma_1(j)))) \dots) = \\ &= \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))(\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j)) \dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)))) \dots)). \end{aligned}$$

Следовательно, верно доказываемое равенство. Теорема доказана.

Теорема 2.1 позволяет доказать следующее

Предложение 2.1. Если A – полугруппа, то для любого $m \geq 2$, всех i и l таких, что $1 \leq i + 1 \leq i + l \leq m$ и любых

$$\mathbf{u}_1 = (\sigma_1, \mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{u}_m = (\sigma_m, \mathbf{x}_m) \in \mathbf{S}_J \times A^J$$

верно равенство

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m]_{m, \mathbf{S}_J, J} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_i [\mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_J, J} \mathbf{u}_{i+l+1} \dots \mathbf{u}_m]_{m-l+1, \mathbf{S}_J, J}.$$

Полагая в предложении 2.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим предложение 1.1 [9].

Теорема 2.2. Если A – полугруппа, то для любого $l \geq 2$ операция $[\]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ ассоциативна, то есть универсальная алгебра $\langle \mathbf{S}_J \times A^J, [\]_{l, \mathbf{S}_J, J} \rangle$ является l -арной полугруппой с l -арной операцией (2.1), где $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l$,

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma_1(j)) \dots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)), j \in J.$$

Доказательство. Полагая в предложении 2.1 $m = 2l - 1$, $i = 0, 1, \dots, l - 1$, получим

$$[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{2l-1, \mathbf{S}_J, J} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_i [\mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_{i+l}]_{l, \mathbf{S}_J, J} \mathbf{u}_{i+l+1} \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, \mathbf{S}_J, J}$$

для любых $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2l-1} \in \mathbf{S}_J \times A^J$, то есть

$$[[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_l]_{l, \mathbf{S}_J, J} \mathbf{u}_{l+1} \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, \mathbf{S}_J, J} =$$

$$= [\mathbf{u}_1 [\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_{l+1}]_{l, \mathbf{S}_J, J} \mathbf{u}_{l+2} \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, \mathbf{S}_J, J} = \dots = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{l-1} [\mathbf{u}_l \dots \mathbf{u}_{2l-1}]_{l, \mathbf{S}_J, J}]_{l, \mathbf{S}_J, J}.$$

Следовательно, $\langle \mathbf{S}_J \times A^J, [\]_{l, \mathbf{S}_J, J} \rangle$ – l -арная полугруппа. Для получения равенства из формулировки теоремы используется теорема 2.1, а также тот факт, что A – полугруппа. Теорема доказана.

Полагая в теореме 2.2 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим теорему 2.1 [9].

Соответствующие следствия из теоремы 2.2 можно сформулировать для множеств $J = \mathbb{N}$ и $J = \mathbb{Z}$.

3. ОПЕРАЦИЯ $[\]_{l, T, J}$

Определим на множестве \mathbf{S}_J l -арную операцию $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l)_l = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l$, которая, как несложно заметить, является ассоциативной. Другими словами, $\langle \mathbf{S}_J, (\)_l \rangle$ – l -арная полугруппа. Так как \mathbf{S}_J – группа, то $\langle \mathbf{S}_J, (\)_l \rangle$ – l -арная группа.

Ясно, что если $T \subseteq \mathbf{S}_J$, то $T \times A^J \subseteq \mathbf{S}_J \times A^J$, где

$$T \times A^J = \{(\sigma, \mathbf{a}) \mid \sigma \in T, \mathbf{a} \in A^J\}.$$

Имеет место

Предложение 3.1. Если подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_J$ замкнуто относительно l -арной операции $(\)_l$, A – группоид, то множество $T \times A^J$ замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l, \mathbf{S}_J, J}$, то есть $\langle T \times A^J, [\]_{l, \mathbf{S}_J, J} \rangle$ – l -арный

подгруппоид l -арного группоида $\langle \mathbf{S}_J \times A^J, [\]_{l, \mathbf{S}_J, J} \rangle$. Если же A – полугруппа, то $\langle T \times A^J, [\]_{l, \mathbf{S}_J, J} \rangle$ – l -арная подполугруппа l -арной полугруппы $\langle \mathbf{S}_J \times A^J, [\]_{l, \mathbf{S}_J, J} \rangle$.

Замечание 3.1. Если T – подполугруппа группы \mathbf{S}_J , то множество T замкнуто относительно l -арной операции $()_p$, то есть $\langle T, ()_l \rangle$ – l -арная подполугруппа l -арной группы $\langle \mathbf{S}_J, ()_l \rangle$.

Из предложения 3.1, ввиду замечания 3.1, вытекает

Следствие 3.1. Если T – подполугруппа группы \mathbf{S}_J , то множество $T \times A^J$ замкнуто относительно операции $[\]_{l, \mathbf{S}_J, J}$, то есть $\langle T \times A^J, [\]_{l, \mathbf{S}_J, J} \rangle$ – l -арный подгруппоид l -арного группоида $\langle \mathbf{S}_J \times A^J, [\]_{l, \mathbf{S}_J, J} \rangle$. Если же A – полугруппа, то $\langle T \times A^J, [\]_{l, \mathbf{S}_J, J} \rangle$ – l -арная подполугруппа l -арной полугруппы $\langle \mathbf{S}_J \times A^J, [\]_{l, \mathbf{S}_J, J} \rangle$.

Для группоида A , целого $l \geq 2$ и подмножества $T \subseteq \mathbf{S}_J$ определим на $\mathbf{S}_J \times A^J$ частичную l -арную операцию $[\]_{l, T, J}$ следующим образом: для любых l элементов

$$(\sigma_i, \mathbf{x}_i) \in \mathbf{S}_J \times A^J, i = 1, \dots, l$$

положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, T, J} = [(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J},$$

если $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l \in T$; если же по крайней мере одна из подстановок $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$ не принадлежит T , то элемент $[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, T, J}$ считается неопределенным.

Ясно, что при $T = \mathbf{S}_J$ операция $[\]_{l, T, J}$ определена на всем множестве $\mathbf{S}_J \times A^J$ и совпадает с операцией $[\]_{l, \mathbf{S}_J, J}$.

Замечание 3.2. Если $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l \in T$, то согласно определению операции $[\]_{l, T, J}$

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, T, J} = (\sigma, \mathbf{y}),$$

где σ и \mathbf{y} определяются с помощью (2.2) и (2.3) соответственно.

Замечание 3.3. Если подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_J$ замкнуто относительно l -арной операции $()_p$, то, согласно определению операции $[\]_{l, T, p}$ она определена для любых l элементов множества $T \times A^J$, а ее результат принадлежит этому же множеству. Поэтому в этом случае операции $[\]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ и $[\]_{l, T, J}$ определены на всем указанном множестве и совпадают на нем.

Замечание 3.3 позволяет объединить предложение 3.1 и следствие 3.1 в виде одной теоремы.

Теорема 3.1. Если A – группоид (полугруппа), подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_J$ замкнуто относительно l -арной операции $()_p$, в частности, T – подполуг-

руппа группы \mathbf{S}_J , то $\langle T \times A^J, [\]_{l, T, J} \rangle$ – l -арный группоид (l -арная полугруппа).

Замечание 3.4. l -Арный группоид (l -арную полугруппу) $\langle T \times A^J, [\]_{l, T, J} \rangle$ из теоремы 3.1 можно рассматривать как l -арный подгруппоид l -арного группоида (l -арную подполугруппу l -арной полугруппы) $\langle \mathbf{S}_J \times A^J, [\]_{l, \mathbf{S}_J, J} \rangle$ так как, согласно замечанию 3.3, операции $[\]_{l, \mathbf{S}_J, J}$ и $[\]_{l, T, J}$ на множестве $T \times A^J$ совпадают.

Полагая в теореме 3.1 $T = \mathbf{A}_J$, получим

Следствие 3.2. Если A – группоид (полугруппа), то для любого $l \geq 2$ универсальная алгебра $\langle \mathbf{A}_J \times A^J, [\]_{l, \mathbf{A}_J, J} \rangle$ является l -арным группоидом (l -арной полугруппой).

Так как для любого нечетного $l \geq 3$ множество \mathbf{B}_J замкнуто относительно l -арной операции $()_p$, то, полагая в теореме 3.1 $T = \mathbf{B}_J$, получим

Следствие 3.3. Если A – группоид (полугруппа), то для любого нечетного $l \geq 3$ универсальная алгебра $\langle \mathbf{B}_J \times A^J, [\]_{l, \mathbf{B}_J, J} \rangle$ является l -арным группоидом (l -арной полугруппой). В частности, $\langle \mathbf{B}_J \times A^J, [\]_{3, \mathbf{A}_J, J} \rangle$ – тернарный группоид (тернарная полугруппа).

Полагая в следствиях 3.2 и 3.3 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, A – полугруппа, получим соответственно следствия 2.2 и 2.3 из [9].

4. ОПЕРАЦИЯ $[\]_{l, \{\sigma\}, J}$

Если для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_J$ выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \{\sigma\}, (\)_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle \mathbf{S}_J, (\)_l \rangle$. Поэтому, полагая в теореме 3.1 $T = \{\sigma\}$, получим следующий результат.

Теорема 4.1. Если A – группоид (полугруппа), подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \{\sigma\} \times A^J, [\]_{l, \{\sigma\}, J} \rangle$ – l -арный группоид (l -арная полугруппа).

Следующая лемма позволяет отождествить l -арную операцию $[\]_{l, \{\sigma\}, J}$ и l -арную операцию $[\]_{l, \sigma, J}$, которая была определена и изучалась в [4, 8].

Лемма 4.1. Если A – группоид, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\varphi: (\sigma, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{a}$ является изоморфизмом l -арного группоида $\langle \{\sigma\} \times A^J, [\]_{l, \{\sigma\}, J} \rangle$ на l -арный группоид $\langle A^J, [\]_{l, \sigma, J} \rangle$.

Теперь ассоциативность l -арной операции $[\]_{l, \{\sigma\}, J}$ в теореме 4.1 является следствием теоремы 2.5.1 [8] и леммы 4.1.

Не только теорема 4.1, но и многие другие результаты об операции $[\]_{l, \{\sigma\}, J}$ могут быть получены и как следствие соответствующих результатов об операции $[\]_{l, T, J}$ и как следствие соответствующих результатов об операции $[\]_{l, \sigma, J}$ с использованием леммы 4.1. Верно и обратное: с помощью леммы 4.1 многие результаты из книги [8] об операции $[\]_{l, \sigma, J}$ могут быть получены как следствие соответствующих результатов об операции $[\]_{l, T, J}$ при $T = \{\sigma\}$.

Большинство результатов из [8] об операции $[]_{l,\sigma,J}$ и из [9] об операции $[]_{l,T,k}$ могут быть обобщены на случай операции $[]_{l,T,r}$. Из-за ограниченности объема данной публикации приведем в следующих разделах примеры только некоторых таких обобщений.

5. НЕАБЕЛЕВОСТЬ $\langle \mathbf{S}_J \times A^J, []_{l,\mathbf{S}_J,J} \rangle$

Теорема 5.1. Пусть l -арная подполугруппа $\langle T, ()_l \rangle$ l -арной группы $\langle \mathbf{S}_J, ()_l \rangle$ содержит нетождественную подстановку, группоид A содержит единицу и элемент, отличный от этой единицы. Тогда l -арный группоид $\langle T \times A^J, []_{l,T,J} \rangle$ не является абелевым.

Так как для множества J , мощность $|J|$ которого больше 1, группа \mathbf{S}_J содержит нетождественную подстановку, то из теоремы 5.1 вытекает

Следствие 5.1. Если группоид A содержит единицу и отличный от нее элемент, то для любого множества J , мощность которого больше 1, l -арный группоид $\langle \mathbf{S}_J \times A^J, []_{l,\mathbf{S}_J,J} \rangle$ не является абелевым.

Следствие 5.2. Если группоид A содержит единицу и отличный от нее элемент, то для любого множества J , мощность которого больше 1, l -арный группоид $\langle \mathbf{FS}_J \times A^J, []_{l,\mathbf{FS}_J,J} \rangle$ не является абелевым.

Так как для любого множества J , содержащего более двух элементов, группа \mathbf{A}_J содержит нетождественную подстановку, то из теоремы 5.1 вытекает

Следствие 5.3. Если группоид A содержит единицу и отличный от нее элемент, то для любого множества J , мощность которого больше 2, l -арный группоид $\langle \mathbf{A}_J \times A^J, []_{l,\mathbf{A}_J,J} \rangle$ не является абелевым.

Считая в теореме 5.1 A полугруппой, получим следующий результат.

Теорема 5.2. Пусть l -арная подполугруппа $\langle T, ()_l \rangle$ l -арной группы $\langle \mathbf{S}_J, ()_l \rangle$ содержит нетождественную подстановку, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от этой единицы. Тогда l -арная полугруппа $\langle T \times A^J, []_{l,T,J} \rangle$ не является абелевой.

Теоремам 5.1 и 5.2, ввиду замечания 3.1, соответствуют следующие две теоремы.

Теорема 5.3. Пусть подполугруппа T группы \mathbf{S}_J содержит нетождественную подстановку, группоид A содержит единицу и элемент, отличный от этой единицы. Тогда l -арный группоид $\langle T \times A^J, []_{l,T,J} \rangle$ не является абелевым.

Теорема 5.4. Пусть подполугруппа T группы \mathbf{S}_J содержит нетождественную подстановку, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от этой единицы. Тогда l -арная полугруппа $\langle T \times A^J, []_{l,T,J} \rangle$ не является абелевой.

Для теорем 5.2, 5.3 и 5.4 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 5.1 – 5.3.

Замечание 5.1. Если в теореме 5.1 в качестве l -арной подполугруппы $\langle T, (\)_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_j, (\)_l \rangle$ взять одноэлементную l -арную полугруппу $\langle \{\sigma\}, (\)_l \rangle$, где подстановка $\sigma \in S_j$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, и применить лемму 4.1, то получится теорема 2.3.1 [8].

Если в теореме 5.2 в качестве l -арной подполугруппы $\langle T, (\)_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_j, (\)_l \rangle$ взять одноэлементную l -арную полугруппу $\langle \{\sigma\}, (\)_l \rangle$, где подстановка $\sigma \in S_j$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то получится

Теорема 5.5. *Если нетождественная подстановка $\sigma \in S_j$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от этой единицы, то l -арная полугруппа $\langle \{\sigma\} \times A^J, [\]_{l, \{\sigma\}, J} \rangle$ не является абелевой.*

Применив к теореме 5.5 лемму 4.1, получим

Следствие 5.4. *Если нетождественная подстановка $\sigma \in S_j$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, полугруппа A содержит единицу и элемент, отличный от этой единицы, то l -арная полугруппа $\langle A^J, [\]_{l, \sigma, J} \rangle$ не является абелевой.*

6. l -АРНАЯ ГРУППА $\langle T \times A^J, [\]_{l, T, J} \rangle$

Следующая теорема доказывается аналогично теоремам 3.6.2 [2] и 3.1 [9].

Теорема 6.1. *Пусть $\langle T, (\)_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_j, (\)_l \rangle$, A – группа. Тогда $\langle T \times A^J, [\]_{l, T, J} \rangle$ – l -арная группа.*

В частности, $\langle S_j \times A^J, [\]_{l, S_j, J} \rangle$ – l -арная группа.

Замечание 6.1. Если в теореме 6.1 в качестве l -арной подгруппы $\langle T, (\)_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_j, (\)_l \rangle$ взять одноэлементную l -арную группу $\langle \{\sigma\}, (\)_l \rangle$, где подстановка $\sigma \in S_j$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, и применить лемму 4.1, то получится теорема 2.7.1 [8]. В свою очередь, из этой теоремы при $J = \{1, 2, \dots, k\}$ вытекает теорема 3.6.2 [2].

Из теоремы 6.1 вытекает также следующее

Следствие 6.1. *Если T – подгруппа группы S_j , A – группа, то $\langle T \times A^J, [\]_{l, T, J} \rangle$ – l -арная группа.*

Полагая в следствии 6.1 $T = \mathbf{SF}_j$, получим

Следствие 6.2. *Если A – группа, то для любого $l \geq 2$ универсальная алгебра $\langle \mathbf{SF}_j \times A^J, [\]_{l, \mathbf{SF}_j, J} \rangle$ является l -арной группой.*

Полагая в следствии 6.1 $T = \mathbf{A}_j$, получим

Следствие 6.3. *Если A – группа, то для любого $l \geq 2$ универсальная алгебра $\langle \mathbf{A}_j \times A^J, [\]_{l, \mathbf{A}_j, J} \rangle$ является l -арной группой.*

Полагая в теореме 6.1 $T = \mathbf{B}_j$, и, считая l нечетным, получим

Следствие 6.4. *Для любой группы A и любого нечетного $l \geq 3$ универсальная алгебра $\langle \mathbf{B}_j \times A^J, [\]_{l, \mathbf{B}_j, J} \rangle$ является l -арной группой.*

В частности, $\langle \mathbf{B}_j \times A^J, [\]_{3, \mathbf{B}_j, J} \rangle$ – тернарная группа.

Теоремы 5.2 и 6.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 6.2. Пусть l -арная подгруппа $\langle T, (\)_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_p, (\)_l \rangle$ содержит нетождественную подстановку, A – неединичная группа. Тогда l -арная группа $\langle T \times A^J, []_{l, T, J} \rangle$ не является абелевой.

Следствие 6.5. Если A – неединичная группа, то для любого множества J , мощность которого больше 1, l -арная группа $\langle S_J \times A^J, []_{l, S_J, J} \rangle$ не является абелевой.

Следствие 6.6. Если A – неединичная группа, то для любого множества J , мощность которого больше 1, l -арная группа $\langle FS_J \times A^J, []_{l, FS_J, J} \rangle$ не является абелевой.

Следствие 6.7. Если l – неединичная группа, то для любого множества J , мощность которого больше 2, l -арная группа $\langle A_J \times A^J, []_{l, A_J, J} \rangle$ не является абелевой.

Теореме 6.2, ввиду замечания 3.1, соответствует следующая теорема.

Теорема 6.3. Пусть T – неединичная подгруппа группы S_p , A – неединичная группа. Тогда l -арная группа $\langle T \times A^J, []_{l, T, J} \rangle$ не является абелевой.

Для теоремы 6.3 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 6.5 – 6.7.

В следующей теореме указывается явный вид косых элементов в l -арной группе $\langle T \times A^J, []_{l, T, J} \rangle$.

Теорема 6.4. Пусть $\langle \tilde{T}, (\)_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_p, (\)_l \rangle$, A – группа. Тогда для любого элемента (σ, \mathbf{a}) l -арной группы $\langle T \times A^J, []_{l, T, J} \rangle$ элемент

$$(\sigma^{2-l}, \mathbf{u}), \quad (6.1)$$

где функция $\mathbf{u} \in A^J$ определяется равенством

$$\mathbf{u}(\sigma^{l-1}(j)) = (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}, j \in J, \quad (6.2)$$

является косым, то есть $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma^{2-l}, \mathbf{u})$.

Следствие 6.8. Пусть T – подгруппа группы S_p , A – группа. Тогда для любого элемента (σ, \mathbf{a}) l -арной группы $\langle T \times A^J, []_{l, T, J} \rangle$ элемент (6.1) со второй компонентой $\mathbf{u} \in A^J$, определяемой равенством (6.2), является косым.

Замечание 6.2. Так как $\bar{\sigma} = \sigma^{2-l}$, то равенство $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma^{2-l}, \mathbf{u})$ из формулировки теоремы 6.4 принимает вид $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\bar{\sigma}, \mathbf{u})$. Кроме того, с помощью замены $s = \sigma^{l-1}(j)$ равенство (6.2) в теореме 6.4 можно переписать в виде

$$\mathbf{u}(s) = (\mathbf{a}(\sigma^{-1}(s)))^{-1} \dots (\mathbf{a}(\sigma^{2-l}(s)))^{-1}, s \in J.$$

Для подстановки $\sigma \in S_J$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, имеем $\sigma^{2-l} = \sigma$. Поэтому, полагая в теореме 6.4 $T = \{\sigma\}$, где $\sigma^l = \sigma \in S_J$ и, используя тождественность подстановки σ^{l-1} , получим следующий результат.

Теорема 6.5. *Пусть подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, A – группа. Тогда для любого элемента (σ, \mathbf{a}) l -арной группы $\langle \{\sigma\} \times A^J, [\]_{l, \{\sigma\}, J} \rangle$ элемент (σ, \mathbf{u}) , где функция $\mathbf{u} \in A^J$ определяется равенством*

$$\mathbf{u}(j) = (\mathbf{a}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{a}(\sigma(j)))^{-1}, j \in J,$$

является косым, то есть $\overline{(\sigma, \mathbf{a})} = (\sigma, \mathbf{u})$.

Замечание 6.3. Если к теореме 6.5 применить лемму 4.1, то получится предложение 2.7.2 [8]. В свою очередь, из этого предложения при $J = \{1, 2, \dots, k\}$ вытекает предложение 3.6.3 [2].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
2. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
4. Гальмак, А.М. Об операции $[\]_{l, \sigma, J}$ / А.М. Гальмак // Междунар. научно-практ. конф., посвящ. 100-летию МГУ имени А.А. Кулешова: сборник научных статей, Могилев, 20–22 февраля 2013 г. – С. 79–83.
5. Гальмак, А.М. Тернарные алгебры функций. / А.М. Гальмак, В.К. Лапковский // Междунар. научно-практ. конф., посвящ. 100-летию МГУ имени А.А. Кулешова : сборник материалов, Могилев, 20–22 февраля 2013 г. – С. 149–150.
6. Кулаженко Ю.И. О центрах l -арных группоидов / Ю.И. Кулаженко // Веснік ВДУ імя П.М. Машэрава. – Вітебск. – 2013. – № 3. – С. 5–11.
7. Кулаженко Ю.И. О полуцентрах l -арных группоидов / Ю.И. Кулаженко // Проблемы физики, математики и техники. – № 2(15). – 2013. – С. 76–80.
8. Гальмак, А.М. Полиадические операции на множествах функций / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 192 с.
9. Гальмак, А.М. Обобщенные полиадические операции / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – Гомель. – 2013. – № 2. – С. 50–57.
10. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
11. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
12. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
13. Супруненка, Д.А. Группы подстановок / Д.А. Супруненко. – Минск : Навука і тэхніка, 1996. – 366 с.
14. Wielandt, H. Unendliche Permutationsgruppen / H. Wielandt. – Vorlesungen an der Universität Tübingen WS 1959 – 1960. – Tübingen, 1960. – S. 1–45.

Поступила в редакцию 28.08.2013 г.

УДК 512.542

Р.В. БОРОДИЧ

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ АБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

В работе изучаются свойства пересечений не p -нильпотентных абнормальных максимальных подгрупп в группах с операторами. В связи с этим доказывается, что при $p > 2$ в не p -разрешимой группе существует не p -нильпотентная абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа, а также приводится критерий p -разрешимости группы.

Все группы, рассматриваемые в статье, предполагаются конечными. В теории конечных групп важное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относят максимальные подгруппы. Знание их строения, взаимодействия между собой и способа вложения в группу позволяют судить о многих свойствах самих групп. Основополагающим результатом этого направления явилась работа Г. Фраттини [1], получившая развитие во многих направлениях (см. монографии [2] и [3]). Одно из направлений теории пересечений связано с исследованием пересечений максимальных подгрупп, не принадлежащих заданному классу групп. Эта задача рассматривалась в работах М.В. Селькина [3], А.Н. Скибы [4], В.В. Шлыка [5], А. Гилотти и У. Тиберио [6] и многих других авторов. К данному направлению относится и настоящая работа.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G , сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G , множество A и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G . Подгруппа M называется A -допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A , то есть, $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A -допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A -допустимых подгрупп, а через $\Delta(G, A)$ пересечение ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп.

Для пересечения всех абнормальных максимальных подгрупп группы G будем использовать ставшее традиционным обозначение $\Delta(G)$ (подгруппа Гашюца).

Через $\Phi_\Delta^p(G, A)$ обозначим подгруппу, равную пересечению не p -нильпотентных абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , некоторые свойства которой в случае единичной группы операторов A рассматривались в работе [5].

В случае отсутствия в группе G указанных подгрупп будем полагать, что соответствующие пересечения совпадают с самой группой G .

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A -допустимой относительно некоторой группы операторов A , а также не всякая максимальная A -допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе (см. работу [7]).

Лемма 1. *Пусть группа G имеет группу операторов A и $N \triangleleft G$. Тогда $\Phi_{\Delta}^p(G, A)N/N \subseteq \Phi_{\Delta}^p(G/N, A)$.*

Доказательство. Если M/N – абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа из G/N , не принадлежащая формации p -нильпотентных групп, тогда M – абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа группы G , не принадлежащая формации p -нильпотентных групп.

Следовательно, $\Phi_{\Delta}^p(G, A)N/N \subseteq \Phi_{\Delta}^p(G/N, A)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если $\Delta(G, A) \subset \Phi_{\Delta}^p(G, A)$, то выполняются следующие утверждения:*

1) $G = \Phi_{\Delta}^p(G, A)M$, где M – p -нильпотентная абнормальная максимальная подгруппа группы G ;

2) если G разрешима, то $G = QM$, где Q – нормальная q -подгруппа группы G , q – простое число и M – p -нильпотентная абнормальная максимальная подгруппа группы G .

Доказательство. Так как $\Delta(G, A) \subset \Phi_{\Delta}^p(G, A)$, то найдется p -нильпотентная абнормальная максимальная подгруппа M , такая, что $\Phi_{\Delta}^p(G, A)M$. Следовательно, $G = M\Phi_{\Delta}^p(G, A)$.

Докажем второе утверждение. Пусть G – разрешимая группа. Рассмотрим $G/\Delta(G, A)$. Так как $\Phi_{\Delta}^p(G, A)/\Delta(G, A)$ разрешима, то в $\Phi_{\Delta}^p(G, A)/\Delta(G, A)$ найдется неединичная характеристическая q -подгруппа $Q/\Delta(G, A)$ для некоторого простого $q \in \pi(\Phi_{\Delta}^p(G, A)/\Delta(G, A))$. Если предположить, что $Q/\Delta(G, A)$ содержится во всех p -нильпотентных абнормальных максимальных подгруппах, то $Q/\Delta(G, A) \subseteq \Phi_{\Delta}^p(G, A)/\Delta(G, A)$. Получили противоречие. Значит, найдется p -нильпотентная абнормальная максимальная подгруппа $M/\Delta(G, A)$, такая, что $M/\Delta(G, A) \cdot Q/\Delta(G, A) = G/\Delta(G, A)$. Отсюда получаем, что $G = MQ$. Если предположить, что M не принадлежит формации p -нильпотентных групп, то $M \supseteq Q$ и $G = M$, значит M – p -нильпотентна. Далее $Q = Q_1\Delta(G, A)$, где Q_1 – силовская q -подгруппа в Q .

По обобщенной лемме Фраттини

$$G = QN_G(Q_1) = Q_1\Delta(G, A)N_G(Q_1) = \Delta(G, A)N_G(Q_1).$$

Предположим, что $N_G(Q_1) \neq G$. Тогда $N_G(Q_1)$ содержится в некоторой аномальной максимальной подгруппе K группы G и $G = \Delta(G, A)K = K$. Получили противоречие. Следовательно, Q_1 – нормальная q -подгруппа группы G . Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и $G = O_p(\Phi_\Delta^p(G, A))M$, где M – p -нильпотентная максимальная подгруппа. Тогда

1) $T = O_p(\Phi_\Delta^p(G, A)) \cap M$ – нормальная подгруппа группы G ;

2) $\Phi_\Delta^p(G/T, A) = \Phi_\Delta^p(G, A)/T$;

3) если $B/O_{p'}(G) = \Phi_\Delta^p(G/O_{p'}(G), A)$, то $B \supseteq \Phi_\Delta^p(G, A)$.

Доказательство. 1) Очевидно, что $T \triangleleft M$ и $N_G(T) \supseteq M$. Так как M – максимальная подгруппа группы G , то $N_G(T) = M$ или $N_G(T) = G$. Учитывая, что $N_{O_p(\Phi_\Delta^p(G, A))}(T) \supset T$, получаем $N_G(T) = G$.

2) Согласно лемме 1 $\Phi_\Delta^p(G, A)/T \subseteq \Phi_\Delta^p(G/T, A)$. Докажем обратное включение. Покажем, что если L – аномальная не p -нильпотентная максимальная подгруппа группы G , то L/T – также аномальная не p -нильпотентная максимальная подгруппа.

Аномальность очевидна. Предположим, что L/T является p -нильпотентной подгруппой. Тогда существует p' -холлова подгруппа R в L , такая, что $RT/T \triangleleft L/T$. Если H – p' -холлова подгруппа из M , то можно считать, что $R \subseteq H$. Так как $H \triangleleft M$, то H централизует T и R централизует T . Учитывая, что R – характеристическая подгруппа в RT , $RT \triangleleft L$, следовательно, $R \triangleleft L$ и L p -нильпотентна. Противоречие.

3) Пусть $x \in \Phi_\Delta^p(G, A)$, то x содержится в каждой аномальной не p -нильпотентной максимальной подгруппе. Допустим x содержится в каждой аномальной максимальной подгруппе K , такой, что $K \supseteq O_{p'}(G)$ и $K/O_{p'}(G)$ не p -нильпотентна. Отсюда следует, что

$$xO_{p'}(G) \in \Phi_\Delta^p(G/O_{p'}(G), A) = B/O_{p'}(G) \text{ и } x \in B.$$

Лемма 4. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $O_{p'}(G) = 1$, $O_p(M) = 1$, $G = O_p(\Phi_\Delta^p(G, A))M$, где

$O_p(\Phi_\Delta^p(G, A)) \cap M = 1$ и M – p -нильпотентная аномальная максимальная подгруппа. Тогда $\Phi_\Delta^p(G, A)$ имеет нормальную силовскую p -подгруппу или G является бипримарной группой.

Доказательство. Пусть P – силовская p -подгруппа подгруппы $\Phi_\Delta^p(G, A)$. По лемме X.I.5, из [8] $O_{p'}(N_G(P)) \subseteq O_{p'}(G) = 1$. По лемме Фраттини, $G = \Phi_\Delta^p(G, A)N_G(P)$. Учитывая, что $O_p(\Phi_\Delta^p(G, A)) \subseteq \Phi_\Delta^p(G, A)$ и $G/O_p(\Phi_\Delta^p(G, A))$ p -нильпотентна, имеем, что $N_G(P) = G$ или $N_G(P)$ – p -нильпотентная подгруппа. Пусть $N_G(P)$ – p -нильпотентная подгруппа. Так как $O_{p'}(N_G(P)) = 1$, то $N_G(P)$ – p -подгруппа группы G . Пусть S – силовская p -подгруппа группы G , такая, что $P = \Phi_\Delta^p(G, A) \cap S \triangleleft S$. Тогда $N_G(P) = S$ и $G = \Phi_\Delta^p(G, A)S$. Отсюда следует, что p' -холлова подгруппа H из M является p' -холловской подгруппой группы G , и подгруппы $\Phi_\Delta^p(G, A)$, а значит, $\Phi_\Delta^p(G, A) = HP$. Докажем, что S – максимальная подгруппа группы G . Допустим, что $R \supset S$, где R – максимальная подгруппа группы G . Если предположить, что R не p -нильпотентна, то из $R \supseteq \Phi_\Delta^p(G, A)S = G$ получаем противоречие. Итак, R является p -нильпотентной подгруппой, $R = R_{p'}S$, где $R_{p'}$ – нормальная холловская p' -подгруппа из R . Получаем, что $R_{p'} \subseteq \Phi_\Delta^p(G, A)$ и $O_p(\Phi_\Delta^p(G, A))$ централизует $R_{p'}$. Так как G является p -скованной группой, то $C_G(O_p(\Phi_\Delta^p(G, A))) \subseteq O_p(\Phi_\Delta^p(G, A))$ и $R_{p'} = 1$. Отсюда $R = S$. По лемме 9.9 из [9] получаем, что G является бипримарной группой.

Напомним, что группа G называется π -замкнутой, если она содержит инвариантную π -холловскую подгруппу.

Лемма 5. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $K \subseteq N \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, N и K – допустимые подгруппы группы G и $K \subseteq \Delta(G, A)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если N/K π -замкнута, то и N π -замкнута;
- 2) $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную S_π -подгруппу H/K . Так как $K \subseteq \Delta(G, A)$, то K нильпотентна. Нетрудно заметить, что

S_π -подгруппа R из K является $S_{\pi'}$ -подгруппой в H . По теореме Шура-Цассенхауза H содержит S_π -подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H . По лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учетом того, что $H = SR$, получаем $G = N_G(S)R$. Так как S есть S_π -подгруппа в N , а подгруппа N A -допустима, то S A -допустима. Тогда подгруппа $N_G(S)$ A -допустима и является абнормальной подгруппой группы G . Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A -допустимой подгруппе M из G . Поэтому $G = MR$. Так как $R \subseteq \Delta(G, A) \subseteq M$, то $G = M$. Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G .

Второе утверждение леммы является следствием первого при $\pi = p'$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть \mathfrak{I} – локальная формация и группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{I}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{I}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{I}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Delta(G, A)$, $\omega = \pi(\mathfrak{I})$. Так как N/D является ω -группой, то по лемме 5 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – S_ω -подгруппа из N . Так как $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$, то $N/D \cong N_1/D_1 \in \mathfrak{I}$, где $D_1 = N_1 \cap \Delta(G, A)$. Пусть $p \in \omega$. Так как $N_1/D_1 \in \mathfrak{I}$, то, используя лемму 5 и лемму 4.5 из [2], получаем, что

$$(N_1/D_1)/F_p(N_1/D_1) = N_1/D_1/F_p(N_1)/D_1N_1/F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 4.5 из [2] подгруппа N_1 входит в \mathfrak{I} . Теорема доказана.

Следствие 2.1. Пусть \mathfrak{I} – локальная формация, содержащая N , и группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N –

нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{I}$, то $N \in \mathfrak{I}$.

В случае, когда \mathfrak{I} – формация нильпотентных групп, получаем следующее

Следствие 2.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G, A)$ нильпотентна, то и подгруппа N нильпотентна.*

Теорема 2. *Пусть группа G не p -разрешима, $p > 2$ и имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) G имеет, по крайней мере, одну аномальную не p -нильпотентную максимальную A -допустимую подгруппу;

2) $\Phi_{\Delta}^p(G, A) = \Delta(G, A)$.

Доказательство. Пусть \mathfrak{I} – формация всех p -нильпотентных групп.

Так как G не p -разрешима, то $K = G^{\mathfrak{I}} \notin \mathfrak{I}$. Можно считать, что $O_p(G) = 1$. Пусть P – силовская p -подгруппа из K . По теореме Томпсона в P найдется такая характеристическая, а, следовательно, A -допустимая подгруппа $R \neq 1$, что $N_K(R) \notin \mathfrak{I}$. Так как R – A -допустимая подгруппа, то по лемме 1 $N_G(R)$ – A -допустимая подгруппа. Далее $N_K(R) \subseteq N_G(R)$, значит, $N_G(R) \notin \mathfrak{I}$. В силу того, что $O_p(G) = 1$, получаем $N_G(P) \neq G$. По лемме 17.1 из [2] $N_G(P)$ – аномальная подгруппа. Из того, что $N_G(P) \subseteq N_G(R)$, имеем, что $N_G(R)$ – аномальная подгруппа. Так как любая подгруппа, содержащая $N_G(R)$, является аномальной и не p -нильпотентной, то в качестве аномальной не p -нильпотентной максимальной A -допустимой подгруппы выберем наибольшую A -допустимую подгруппу, содержащую $N_G(R)$.

Докажем второе утверждение. Пусть G не p -разрешима. Если в G нет p -нильпотентных максимальных A -допустимых подгрупп, то $\Phi_{\Delta}^p(G, A) = \Delta(G, A)$. Так как G не p -разрешима, то G имеет по крайней мере одну аномальную не p -нильпотентную максимальную A -допустимую подгруппу, следовательно, $\Phi_{\Delta}^p(G, A) \neq G$.

В G существует p -нильпотентная аномальная максимальная A -допустимая подгруппа M , такая, что $\Phi_{\Delta}^p(G, A) \subsetneq M$. В противном случае,

если любая p -нильпотентная абелевская максимальная A -допустимая подгруппа из G , содержит $\Phi_{\Delta}^p(G, A)$, то $\Delta(G, A) = \Phi_{\Delta}^p(G, A)$. Отсюда следует, что $G = M\Phi_{\Delta}^p(G, A)$. Имеем, что

$$G/\Phi_{\Delta}^p(G, A) \cong M/M \cap \Phi_{\Delta}^p(G, A) \quad (1)$$

является p -нильпотентной, в частности, p -разрешимой.

Пусть P – A -допустимая силовская p -подгруппа из $\Phi_{\Delta}^p(G, A)$. По лемме Фраттини, $G = \Phi_{\Delta}^p(G, A)N_G(P)$. Тогда $N_G(P) = G$ или $N_G(P)$ p -нильпотентна.

Если $N_G(P) = G$, то $P \triangleleft G$, следовательно, $P \triangleleft \Delta(G, A)$, а, значит, $\Delta(G, A)$ p -разрешима. Тогда из (1) G p -разрешима. Противоречие. Получаем, что $N_G(P)$ является A -допустимой p -нильпотентной подгруппой. Если $\Phi_{\Delta}^p(G, A)$ p -нильпотентна, то G по (1) является p -разрешимой. Получаем противоречие, которое показывает, что $\Phi_{\Delta}^p(G, A)$ не p -нильпотентна.

На основании работы [10] в $\Phi_{\Delta}^p(G, A)$ существует характеристическая подгруппа P^* из P такая, что $N_{\Phi_{\Delta}^p(G, A)}(P^*) / C_{\Phi_{\Delta}^p(G, A)}(P^*)$ – не p -группа. Так как $N_G(P^*) \supseteq N_G(P)$, то $G = \Phi_{\Delta}^p(G, A)N_G(P^*)$.

Возможны ситуации: $N_G(P^*) = G$ или $N_G(P^*)$ p -нильпотентна. Но во втором случае $N_{\Phi_{\Delta}^p(G, A)}(P^*)$ p -нильпотентна и $N_{\Phi_{\Delta}^p(G, A)}(P^*) / C_{\Phi_{\Delta}^p(G, A)}(P^*)$ – p -группа, противоречие. Остается предположить, что $N_{\Phi_{\Delta}^p(G, A)}(P^*) / C_{\Phi_{\Delta}^p(G, A)}(P^*)$ – не p -группа и P^* нормальна в G .

Пусть P^* максимальная среди всех таких подгрупп. Положим $\overline{G} = G / P^*$. Пусть \overline{P}_0 – характеристическая подгруппа в \overline{P} . Тогда P_0 характеристична в P и содержит P^* . Следовательно, $N_{\overline{\Phi}_{\Delta}^p(G, A)}(\overline{P}_0) / C_{\overline{\Phi}_{\Delta}^p(G, A)}(\overline{P}_0)$ – p -группа.

Но $N_{\overline{\Phi}_{\Delta}^p(G, A)}(\overline{P}_0) = N_{\Phi_{\Delta}^p(G, A)}(P_0) / P^*$ и $C_{\Phi_{\Delta}^p(G, A)}(P_0)P^* / P^* \subseteq C_{\overline{\Phi}_{\Delta}^p(G, A)}(\overline{P}_0)$, где $\overline{P}_0 = P_0 / P^*$. Из этого получаем, что $N_{\overline{\Phi}_{\Delta}^p(G, A)}(\overline{P}_0) / C_{\overline{\Phi}_{\Delta}^p(G, A)}(\overline{P}_0)$ – p -группа. Следовательно, на основании работы [10] $\overline{\Phi}_{\Delta}^p(G, A)$ p -нильпотентна.

Так как $\overline{\Phi}_{\Delta}^p(G, A) = \Phi_{\Delta}^p(G, A) / P^*$ и P^* – p -группа, то $\Phi_{\Delta}^p(G, A)$ p -разрешима и, следовательно, G p -разрешима. Последнее противоречие показывает, что $\Phi_{\Delta}^p(G, A) = \Delta(G, A)$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и $p > 2$. Тогда либо $\Phi_{\Delta}^p(G, A) = \Delta(G, A)$, либо G является p -разрешимой группой.*

Если положить $A = 1$, то из теоремы 2 вытекает результат В.В. Шлыка из [5].

Теорема 3. *Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и $\Phi_{\Delta}^p(G, A)$ не является p -нильпотентной группой для некоторого нечетного $p \in \pi(G)$. Тогда $G = O_p(\Phi_{\Delta}^p(G, A))M$, где M – аномальная p -нильпотентная максимальная A -допустимая подгруппа.*

Доказательство. Ввиду теоремы 2 заключаем, что G является p -разрешимой группой. Пусть $D = \Phi_{\Delta}^p(G, A)$. Так как D не p -нильпотентна, то на основании работы [10] существует характеристическая подгруппа P^* в силовской p -подгруппе P группы D , такая, что $N_D(P) / C_D(P)$ не является p -группой. Можно считать, что P^* – максимальная подгруппа с указанными выше свойствами.

Учитывая, что $N_G(P^*)$ – аномальная подгруппа в G , то $N_G(P^*) = G$. Отсюда следует, что $P^* \subseteq O_p(D)$. Предположим, что $P^* \subset O_p(D)$. Тогда $N_D(O_p(D)) / C_D(O_p(D))$ – p -группа, а, значит, $D / C_D(O_p(D))$ – p -группа. Из $C_D(O_p(D)) \subseteq O_p(D)$ получаем, что $D / O_p(G)$ – p -группа, значит, D – p -группа. Получили противоречие. Следовательно, $P^* = O_p(D)$.

Если $D / O_p(D)$ p -нильпотентна, то в $D / O_p(D)$ имеется нормальная холловская p' -подгруппа $K / O_p(D)$. Тогда K нормальна в G и $O_p(D)$ нормальна в K . По теореме Шура-Цассенхауза, существует холловская p' -подгруппа L из K , такая, что $K = O_p(D)L$. По лемме Фраттини, $G = KN_G(L)$.

Если $O_p(D) \subseteq \Phi_{\Delta}^p(G, A)$, то $G = KN_G(L) = O_p(D)LN_G(L) = N_G(L)$. Следовательно, L нормальна в G . Но L – холловская p' -подгруппа из D , значит, D p -нильпотентна, противоречие. Следовательно,

$O_p(D) \not\subset \Phi_\Delta^p(G, A)$ и получаем, что $G = O_p(D)M$, где M абнормальная p -нильпотентная максимальная подгруппа группы G . Теорема доказана.

В случае единичности группы операторов из теоремы 2 получаем

Следствие 3.1. *Пусть подгруппа $\Phi_\Delta^p(G)$ не является p -нильпотентной группой для некоторого нечетного $p \in \pi(G)$. Тогда $G = O_p(\Phi_\Delta^p(G))M$, где M – абнормальная p -нильпотентная максимальная подгруппа.*

Напомним [11], что если G – p -разрешимая группа, то арифметическим p -рангом $\bar{r}_p(G)$ называют наибольший из всех порядков p -главных факторов группы G . Класс p -разрешимых групп со свойством $(|G|, \bar{r}_p(G)) = 1$ является насыщенной формацией.

Теорема 4. *Пусть G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если G – p -разрешимая группа, такая, что $(|G|, \bar{r}_p(G)) = 1$, тогда подгруппа $\Phi_\Delta^p(G)$ либо является p -нильпотентной, либо имеет нормальную силовскую p -подгруппу.*

Доказательство. Предположим, что G – группа минимального порядка, для которой подгруппа $\Phi_\Delta^p(G)$ не является p -нильпотентной. По теореме 3 $G = O_p(\Phi_\Delta^p(G))M$, где M – абнормальная p -нильпотентная максимальная подгруппа.

По лемме 3 если $T = O_p(\Phi_\Delta^p(G)) \cap M$, то $\Phi_\Delta^p(G/T) = \Phi_\Delta^p(G)/T$. Если $\Phi_\Delta^p(G)/T$ является p -нильпотентной подгруппой группы G/T , то, используя доказательство леммы 3, получаем, что $\Phi_\Delta^p(G)$ – p -нильпотентная подгруппа группы G . Противоречие. Следовательно, $\Phi_\Delta^p(G)/T$ не p -нильпотентна. Учитывая, что $\Phi_\Delta^p(G/T) = \Phi_\Delta^p(G)/T$ и $(|G|, \bar{r}_p(G))$, предположим, что $|G/T| < |G|$. Следовательно, $\Phi_\Delta^p(G/T)$ имеет силовскую p -подгруппу P/T , нормальную в G/T . Отсюда $P \triangleleft G$. Не ограничивая общности, можно считать, что $T = 1$. Так как $T = O_p(\Phi_\Delta^p(G)) \cap M = 1$ и M – максимальная подгруппа группы G , то $O_p(\Phi_\Delta^p(G))$ – минимальная нормальная подгруппа группы G , являющаяся элементарной абелевой подгруппой.

Докажем, что $O_{p'}(G) = 1$. Предположим, что $O_{p'}(G) \neq 1$. Если $\Phi_\Delta^p(G/O_{p'}(G)) = B/O_{p'}(G)$ p -нильпотентна, то B p -нильпотентна и по

лемме 3 $\Phi_\Delta^p(G)$ также p -нильпотентна, что противоречит предположению. Значит, $B/O_{p'}(G)$ не является p -нильпотентной и из минимальности группы G силловская p -подгруппа из $B/O_{p'}(G)$ является нормальной. В частности, $\Phi_\Delta^p(G)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ имеет силловскую p -подгруппу $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$, нормальную в $G/O_{p'}(G)$. Отсюда $PO_{p'}(G) \triangleleft G$. По лемме Фраттини, $G = O_{p'}(G)N_G(P)$. Если $N_G(P) = G$, то получаем противоречие с выбором группы G . Значит, $N_G(P) \neq G$. Но так как $G = \Phi_\Delta^p(G)N_G(P)$, то получаем, что $N_G(P)$ p -нильпотентна, а, значит, $G/O_{p'}(G)$ также p -нильпотентна. Значит, что G является p -нильпотентной. Противоречие. Остается заключить, что $O_{p'}(G) = 1$.

Так как $G = O_p(\Phi_\Delta^p(G))M$, то $O_p(\Phi_\Delta^p(G)) \subseteq O_p(G)$ и $O_p(G) = O_p(\Phi_\Delta^p(G))(O_p(G) \cap M)$.

Пусть $D = O_p(G) \cap M$. Если $N_G(D) = M$, то M нормализует p -группу и по лемме X.I.6. из [8] получаем, что $O_{p'}(M) \subseteq O_{p'}(G)$. Получили противоречие, так как M является p -нильпотентной подгруппой и $O_{p'}(G) = 1$. Следовательно, $N_G(D) = G$, а значит $D \triangleleft G$.

Рассмотрим группу G/D . По аналогии с рассмотренным выше приемом несложно показать, что $\Phi_\Delta^p(G/D)$ не может быть p -нильпотентной и в силу минимальности группы G , если $D \neq 1$, получаем, что $\Phi_\Delta^p(G/D)$ имеет нормальную силловскую p -подгруппу. Если $C/G = \Phi_\Delta^p(G/D)$, то $\Phi_\Delta^p(G)D/D \subseteq C/D$ и C/D имеет нормальную силловскую p -подгруппу. Отсюда следует, что $D = 1$. Так как $O_p(\Phi_\Delta^p(G)) = O_p(G)$ и по условию $(|G|, r_p(G)) = 1$, то учитывая, что если $O_p(G) = p^s$, получаем, что $(|G|, s) = 1$. Также $(|M|, s) = 1$. На основании леммы I.IV 8.1 из [12] заключаем, что M является циклической подгруппой группы G . Противоречие.

Следствие 4.1. *Пусть G – p -сверхразрешимая группа, имеющая группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда подгруппа $\Phi_\Delta^p(G, A)$*

либо является p -нильпотентной, либо имеет нормальную силловскую p -подгруппу.

В случае единичности группы операторов из теоремы 4 получаем результат работы [11].

Условие теоремы ($|G|, \bar{r}_p(G) = 1$) является существенным. Существуют примеры, показывающие, что в p -разрешимой группе подгруппа $\Phi_\Delta^p(G)$ может быть не p -нильпотентной и не иметь нормальной силловской p -подгруппы см. [11].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Frattini, G.* Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni // G. Frattini / Atti Acad. Dei Lincei 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.
3. *Селькин, М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск : Беларуская наука, 1997. – 144 с.
4. *Скиба, А.Н.* О пересечении всех максимальных F -подгрупп конечной группы / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3(4). – С. 55–62.
5. *Шлык, В.В.* О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В.В. Шлык // Матем. заметки. – 1973, 14. – № 3. – С. 429–439.
6. *Gilotti, A.* On the intersection of maximal non-supersoluble subgroups in a finite group / A. Gilotti, U. Tiberio // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. – 2000. – Serie 8. – Vol. 3-B. – P. 691–698.
7. *Бородич, Р.В.* О максимальных подгруппах близких к F -абнормальным / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Известия ГГУ. – 2012. – № 5. – С. 140–147.
8. *Huppert, B.* Finite Groups II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin and New York : Springer-Verlag, 1982. – 531 p.
9. *Huppert, B.* Finite Groups III // B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin and New York : Springer-Verlag, 1982. – 454 p.
10. *Thompson, J.G.* Normal p -complements for finite groups / J.G. Thompson, // J. Algebra. – 1964. – P. 43–46.
11. *Gilotti, A.* On the intersection of a certain class of maximal subgroups of a finite group / A. Gilotti, U. Tiberio // Arch. Math. – 1998. – V. 71. – P. 89–94.
12. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin and New York : Springer-Verlag, 1967. 793 p.

Поступила в редакцию 20.11.2013 г.

УДК 511.42

О.Н. КЕМЕШ, Н.В. САКОВИЧ

РЕГУЛЯРНОСТЬ МНОЖЕСТВА РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ В КОРОТКИХ ІНТЕРВАЛАХ

Рациональные числа при своем естественном упорядочивании равномерно распределены на любом интервале. Для алгебраических чисел степени большей единицы к настоящему времени это неизвестно. А. Бейкер и В. Шмидт в работе [1] ввели понятие регулярности распределения последовательностей и доказали регулярность распределения действительных алгебраических чисел любой степени. Доказана регулярность множества рациональных чисел с функцией

$$N\left(\frac{p}{q}\right) = q^2 \text{ на любом интервале } I: |I| > q^{-1}.$$

Пусть S – счетное множество действительных чисел и $N: S \rightarrow \mathbb{R}$ некоторая положительная функция. Пара (S, N) называется регулярной системой, если существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что для любого интервала $I = [a, b]$ существует достаточно большое число $T_0 = T_0(S, I) > 0$ такое, что для любого $T > T_0$ существует набор $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ чисел из S , удовлетворяющий условиям:

$$N(\gamma_i) \leq T, \quad 1 \leq i \leq t, \quad (1)$$

$$|\gamma_i - \gamma_j| > c_1 T^{-1}, \quad 1 \leq i < j \leq t, \quad (2)$$

$$t > c_2 |I| T. \quad (3)$$

Пусть A_n – множество действительных алгебраических чисел степени n . А. Бейкер и В. Шмидт доказали, что действительные алгебраические числа α_i с функцией

$$N(\alpha_i) = H^{n+1}(\alpha_i) (\ln H(\alpha_i))^{-\gamma}$$

образуют регулярную систему при $\gamma = 3n(n+1)$. Величина $H(\alpha_i)$ для алгебраического числа α_i степени n – есть максимум модулей коэффициентов минимального многочлена для α_i . В.И. Берник [2] усилил последний результат до $\gamma = 1 + \delta$, $\delta > 0$. В.В. Бересневич [4] установил окончательное значение $\gamma = 0$.

При доказательстве регулярности величины c_1 и c_2 можно выписать явно. Не эффективной является зависимость величины T_0 от длины интервала I . Бересневичем в [4] установлено, что:

$$\text{при } n=1: T_0(A_n, I) = 100|I|^{-1} \ln(100|I|^{-1});$$

$$\text{при } n=2: T_0(A_n, I) = 48|I|^{-1} \ln(24|I|^{-1}).$$

Если $n \geq 3$, то зависимость T_0 от $|I|$ можно найти, но она будет иметь вид $T_0 = |I|^{-\gamma_1}$ при γ_1 значительно больше единицы. Докажем регулярность множества рациональных чисел с функцией $N\left(\frac{p}{q}\right) = q^2$ на любом интервале I при $|I| > q^{-1}$ и покажем, что зависимость T_0 от I из [4] не является наилучшей.

Теорема. Рациональные числа $\frac{p}{q}$ образуют регулярную систему с функцией $N\left(\frac{p}{q}\right) = q^2$ на любом интервале I при $T_0 = |I|^{-1}$.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма. Для достаточно большого $Q > 0$ обозначим через B_1 множество $x \in I$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |qx - p| < Q^{-1} \\ 1 \leq q < \delta Q \end{cases} \quad (4)$$

имеет решение в целых числах $(p, q) \in Z \times N$. Тогда при $\delta < \frac{1}{27}$ имеем

$$\mu B_1 < \frac{1}{4}|I|.$$

Доказательство. Запишем первое неравенство (4) в виде

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-1} Q^{-1}. \quad (5)$$

Множество решений неравенства (5) обозначим $L(q, Q)$. Мера Лебега для этого множества $\mu L(q, Q) = 2q^{-1}Q^{-1}$. При фиксированном q просуммируем эту оценку по всем p , для которых существуют $x \in I$ с условием (5).

Множество таких чисел p обозначим через $A_q(I)$. В этом случае точка должна попадать в интервал $I_1 = [a - q^{-1}Q^{-1}, b + q^{-1}Q]$, длина которого равна $|I_1| = |I| + 2q^{-1}Q^{-1}$. При достаточно большом Q справедливо неравенство $|I_1| < 1,1|I|$. Обозначим через $\#A_q(I)$ число элементов данного множества. Нетрудно получить

$$\#A_q(I) \leq \begin{cases} |I_1|q + 1, & \text{если } q > |I_1|^{-1} \\ \gamma, & \text{если } q < |I_1|^{-1} \end{cases}, \quad (6)$$

где $\gamma = 0$ или 1. Просуммируем оценку $L(q, Q)$ по всем $p \in A_q(I)$.

Если $q > |I_1|^{-1}$, то:

$$\sum_{p \in A_q(I)} L(q, Q) \leq 2q^{-1}Q^{-1} \cdot 2,2|I| = 4,4Q^{-1}|I|;$$

$$\sum_{1 \leq q \leq \delta Q} \sum_{p \in A_q(I)} L(q, Q) \leq 4,4\delta|I|. \quad (7)$$

Пусть теперь выполняется второе неравенство (6). Покажем, что интервалы:

$$J_i = \left| x - \frac{p_i}{q_i} \right| < \frac{c_2}{q_i Q}, \quad J_k = \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{c_2}{q_k Q}$$

не пересекаются при $c_2 = 0,5\delta^{-1}$. В самом деле, если $x \in J_{i,k} = J_i \cap J_k \neq 0$, то из системы неравенств

$$\frac{1}{q_i q_k} \leq \left| \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \left| x - \frac{p_i}{q_i} \right| + \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{c_2}{Q} \left(\frac{1}{q_i} + \frac{1}{q_k} \right)$$

получаем противоречивое неравенство

$$1 \leq \frac{c_2}{Q} (q_i + q_k) < \frac{2c_2 \delta Q}{Q} = 2c_2 \delta \leq 1.$$

Поэтому

$$\sum_{q_i} |J_i| = 2c_2 Q^{-1} \sum_{q_i} q_i^{-1} < |I_1| < 1,1|I| \quad (8)$$

и

$$\sum_i q_i^{-1} < 1,1 \delta |I| Q. \quad (9)$$

Из второй оценки (4) и (9) имеем

$$\sum_{q < \delta Q} L(q, Q) < 2Q^{-1} \cdot 1,1\delta |I| Q = 2,2\delta |I|. \quad (10)$$

Выберем $\delta = \frac{1}{27}$. Тогда сумма мер в неравенствах (7) и (10) не превзойдет $\frac{1}{4}|I|$. Лемма доказана.

Для величины $\sum_q L(q, Q)$ оценка (10) не является наилучшей при всех $Q > c_0 |I|^{-1}$. Если при достаточно большой величине c_2 верно неравенство $Q > c_2 |I|^{-1} \ln |I|^{-1}$, то получаем оценку

$$\sum_{q < \delta Q} L(q, Q) < 2Q^{-1} \sum_{q < \delta Q} q^{-1} < 2Q^{-1} \ln Q. \quad (11)$$

Оценка (11) при величине $Q = c_2 |I|^{-1} \ln |I|^{-1}$ оказывается лучше оценки (10).

Доказательство теоремы. Для каждой точки $x \in B_1 \setminus I_1$, $\mu B_1 > \frac{3}{4}|I|$,

по теореме Дирихле, можно найти рациональное число $\frac{p}{q}$ с выполнением системы неравенств

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < q^{-1} Q^{-1}, \quad \frac{1}{27} Q \leq q \leq Q,$$

откуда $\left| x - \frac{p}{q} \right| < 27Q^{-2}$.

Рассмотрим на интервале I максимальную систему Γ рациональных точек с условием

$$\left| \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_k}{q_k} \right| \geq \frac{1}{q_i q_k} \geq Q^{-2} = T^{-1}.$$

Если некоторое рациональное число $\frac{p_\ell}{q_\ell}$ не входит в Γ , то найдется

рациональное число $\frac{p_i}{q_i}$ такое, что $\left| \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_k}{q_k} \right| < T^{-1}$. Интервал

$$\left| x - \frac{p_i}{q_i} \right| < 54T^{-1} \text{ содержит все числа интервала } I, \text{ для которых}$$

$$\left| x - \frac{p_\ell}{q_\ell} \right| < 27T^{-1}.$$

Обозначим через t количество рациональных чисел в Γ . По лемме имеем

$$t \cdot 108T^{-1} > \frac{3}{4}|I|,$$

откуда получаем $t > \frac{1}{144}|I|T$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Baker, A.* Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker and W. Schmidt // Proc. Lond. Math. – 1970 – Soc.21 – P.1–11.
2. *Bernik, V.I.* The exact order of approximation zero by values of integer polynomials / V.I. Bernik // Acta Arith. – 1989 – 53/1– P. 17–28.
3. *Beresnevich, V.V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers/ V.V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999 – 90/1 – P. 97–112.
4. *Bugeaud, Y.* Approximation by algebraic numbers/ Y. Bugeaud // Cambridge Tracts in Mathematics, 160. Cambridge University Press. Cambridge – 2004. – XVI – P. 274.

Поступила в редакцию 09.12.2013 г.

УДК 539.21

О.М. ОСТРИКОВ, Е.В. ИНОЗЕМЦЕВА

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕРГНУТОГО ПОПЕРЕЧНОМУ СДВИГУ ПРИ НАЛИЧИИ НАХОДЯЩЕГОСЯ ВДАЛИ ОТ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ЛИНЗОВИДНОГО ДВОЙНИКА

На основании методов нелинейной механики разрушения разработана модель твердого тела с упругим линзовидным двойником в случае, когда тело подвергнутое попречному сдвигу. Рассчитаны поля напряжений у линзовидного двойника, находящегося вдали от поверхности. Изучена эволюция данных напряжений у двойника в зависимости от места положения стопора. Установлено, что искривление границ двойника приводит к увеличению концентрации у них напряжений.

Введение

В настоящее время проведено множество экспериментов, устанавливающих опасность механических двойников, как инициаторов зарождения микротрешин [1-4]. Установлено, что чаще трещина зарождается при пересечении растущего двойника с границей ранее существующего, или при встрече вершин двух двойников, распространяющихся в пересекающихся плоскостях [1]. Это возможно в силу высокой концентрации напряжений, создаваемой вершиной заторможенного двойника. Вероятность зарождения трещин у двойников зависит от реализуемой скольжением пластической деформации, уменьшающей концентрацию напряжений [1].

Опасность двойников как инициаторов разрушения зависит от способности блокировать движение дислокаций. Накопление же дислокаций в области сопряжения двойниковой прослойки с матрицей способно в ряде случаев приводить к разрыву [1]. Высокая концентрация напряжений в участках контакта двух двойников, отсутствие возможности их релаксации путем пластической деформации приводит к зарождению микротрешин.

Для определения областей зарождения обусловленных двойникованиею трещин важно решение задач по расчету напряженно-деформированного состояния, созданного двойниковыми границами. Так как двойникование является процессом, родственным разрушению, то и для описания этих явлений используется схожий математический аппарат [5, 6].

Целью данной работы стал расчет полей напряжений и деформаций, обусловленных упругим двойникованиею в условиях поперечного сдвига.

Постановка задачи. В рамках приближения сплошности среды рассмотрим двойник, у концентратора внутренних напряжений и находящийся вдали от поверхности в случае, когда твердое тело, в котором он находится, подвергнуто поперечному сдвигу (рис. 1). Как правило, такие двойники имеют линзовидную форму [7]. Двойник будем считать краевым [1]. Пусть вектор Бюргерса двойникующих дислокаций такого двойника направлен вдоль оси OX (рис. 1). Тогда, используя методы нелинейной механики разрушения [5], для компонент тензора напряжений, созданных двойником, получим:

$$\sigma_{xx}^{tw}(x, y) = -\frac{\sigma_{xy}^{\infty}}{\pi} \int_{-L}^L \frac{(\xi - f(\xi)) [3(x - \xi)^2 - (y - f(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f(\xi))^2]^2} \frac{\xi}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} d\xi, \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}^{tw}(x, y) = \frac{\sigma_{xy}^{\infty}}{\pi} \int_{-L}^L \frac{(y - f(\xi)) [(x - \xi)^2 - (y - f(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f(\xi))^2]^2} \frac{\xi}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} d\xi, \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^{tw}(x, y) = \sigma_{xy}^{\infty} + \frac{\sigma_{xy}^{\infty}}{\pi} \int_{-L}^L \frac{(x - \xi) [(x - \xi)^2 - (y - f(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f(\xi))^2]^2} \frac{\xi}{\sqrt{L^2 - \xi^2}} d\xi. \quad (3)$$

Здесь σ_{xy}^∞ – внешние сдвиговые напряжения; L – половина длины двойника; ξ – параметр интегрирования; $f(\xi)$ – функция, определяющая форму тонкого упругого двойника.

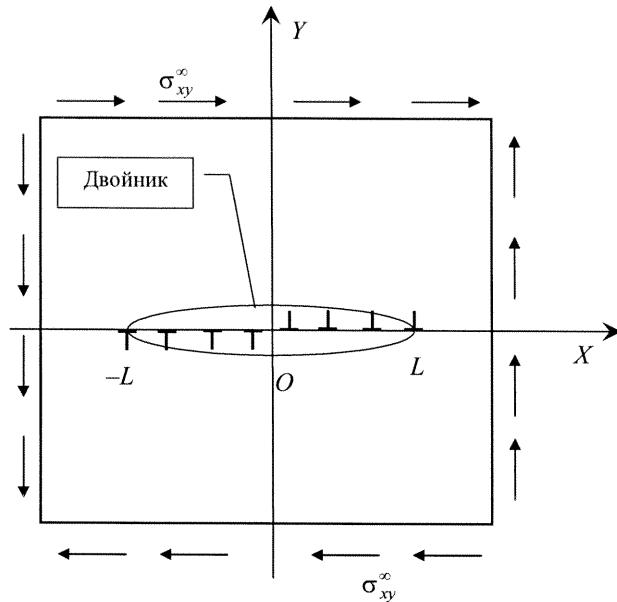


Рис. 1. Схематичное изображение упругого линзовидного двойника, в деформируемом сдвиговыми напряжениями твердом теле

Для рассматриваемой плоской задачи компоненты тензора деформаций могут быть определены из соотношений [8]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{tw} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx}^{tw} - v(\sigma_{yy}^{tw} + \sigma_{zz}^{tw}) \right] \\ \varepsilon_{yy}^{tw} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy}^{tw} - v(\sigma_{xx}^{tw} + \sigma_{zz}^{tw}) \right] \\ \varepsilon_{zz}^{tw} &= \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz}^{tw} - v(\sigma_{xx}^{tw} + \sigma_{yy}^{tw}) \right] \\ \varepsilon_{xy}^{tw} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy}^{tw} \\ \varepsilon_{xz}^{tw} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{xz}^{tw} \\ \varepsilon_{yz}^{tw} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{yz}^{tw} \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где E – модуль Юнга; μ – модуль сдвига.

Плотность двойникующих дислокаций у упругого линзовидного двойника рассчитывается по формуле типа, приведенного в [5]:

$$\rho(\xi) = \frac{2(1-\nu)\sigma_{xy}^{\infty}}{\mu b} \frac{\xi}{\sqrt{L^2 - \xi^2}}. \quad (5)$$

Соответственно, ширина двойника определяется по формуле [5]:

$$h(\xi) = \frac{2(1-\nu)\sigma_{xy}^{\infty}}{\mu} \sqrt{L^2 - \xi^2}. \quad (6)$$

Результаты и их обсуждение. Расчетные данные приведены на рис. 2 - 4. Использовались следующие численные данные: $L = 50$ мкм; $a = 10$ мкм; $\sigma_{yy}^{\infty} = 10$ МПа. Рассматривалось три варианта: 1) двойник в бездефектной области деформируемого твердого тела (рис. 2); 2) упругий линзовидный двойник у стопора, находящегося у середины двойника (рис. 3 и 5, а); 3) двойник у стопора у одной из вершин двойника (рис. 4 и 5, б).

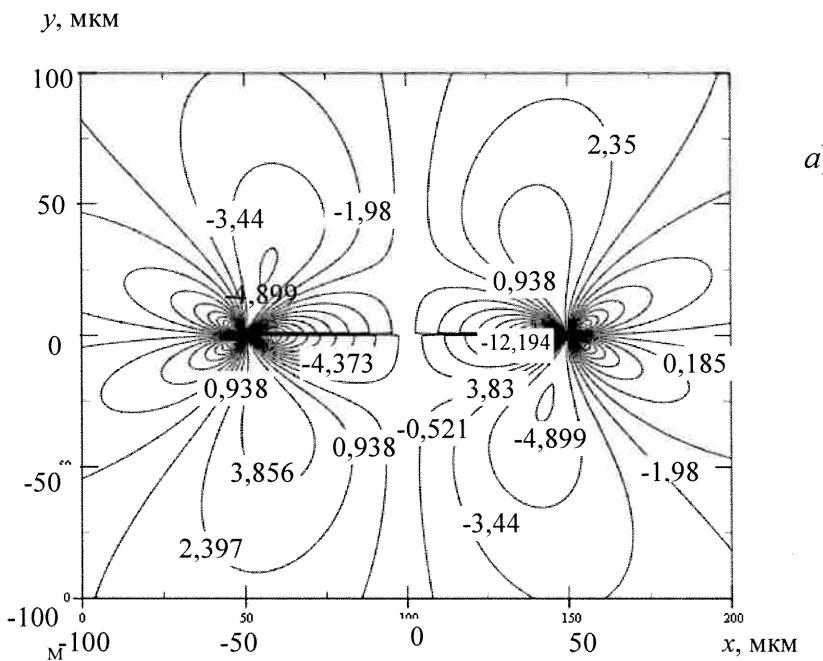


Рис. 2. Поля напряжений у линзовидного упругого двойника

в бездефектной области кристалла: а) $\sigma_{xx}^{bw}(x, y)$

На рис. 2 представлено распределение компонента тензора напряжений у упругого двойника в бездефектной области кристалла. Видно, что как нормальные $\sigma_{xx}^{bw}(x, y)$ и $\sigma_{yy}^{bw}(x, y)$ (рис. 2, а и б), так и сдвиговые

$\sigma_{xy}^{tw}(x, y)$ (рис. 2, в) напряжения распределены симметрично относительно оси x . Роль концентратора напряжений выполняют вершины тонкого линзовидного двойника.

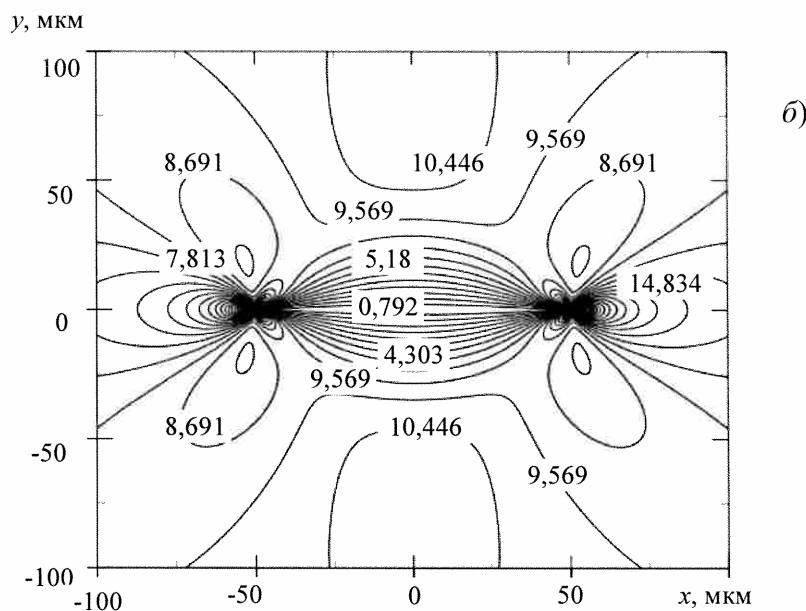


Рис. 2. Поля напряжений у линзовидного упругого двойника в бездефектной области кристалла: 6) $\sigma_{yy}^{tw}(x, y)$

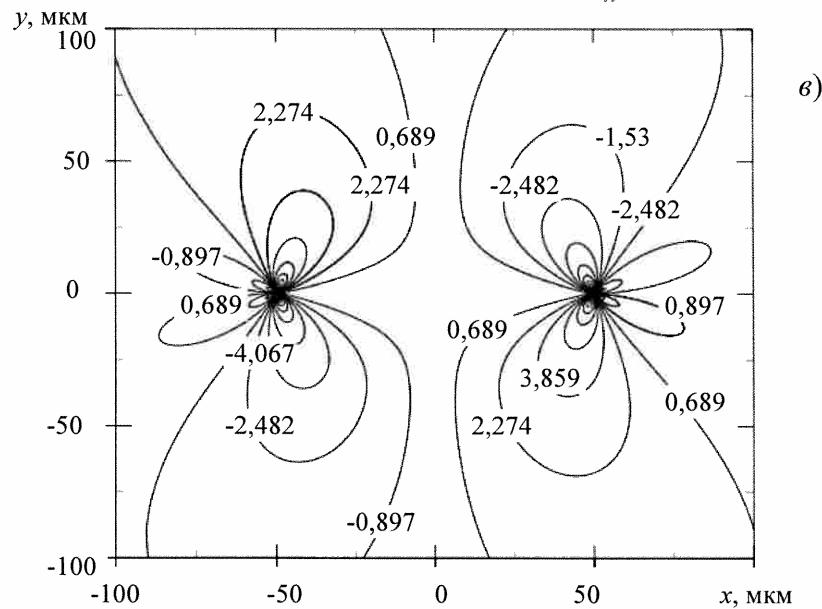


Рис. 2. Поля напряжений у линзовидного упругого двойника в бездефектной области кристалла: в) $\sigma_{xy}^{tw}(x, y)$

При наличии стопора на оси y , как это показано на рис. 5 а, двойникогибает его, образуя форму параболы. В этом случае происходит смещение вершин двойника вдоль оси y . При этом напряжения локализуются не только у вершин двойника, но и у его границ (рис. 3). Это указывает на повышение степени некогерентности двойниковых границ и, следовательно, увеличение на них плотности двойникующих дислокаций, приводящих к росту локализации напряжений у двойниковых границ.

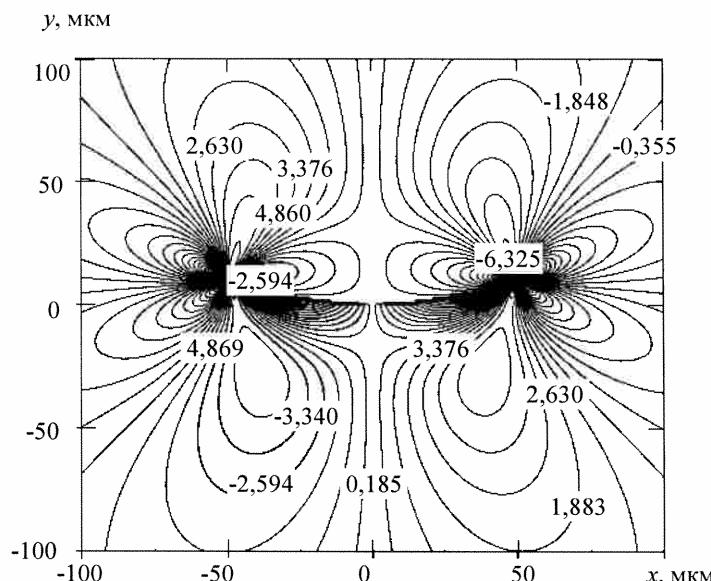


Рис. 3. Поля напряжений у линзовидного упругого двойника

при наличии стопора на оси y : а) $\sigma_{xx}^{tw}(x, y)$

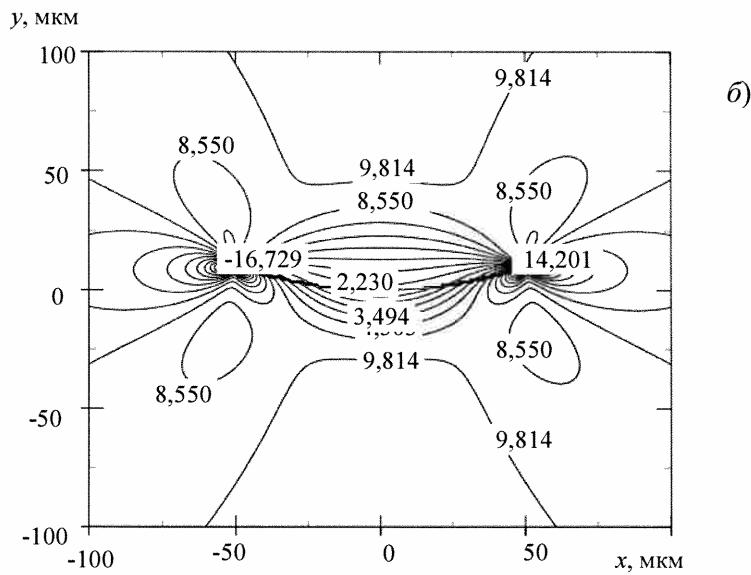


Рис. 3. Поля напряжений у линзовидного упругого двойника

при наличии стопора на оси y : б) $\sigma_{yy}^{tw}(x, y)$

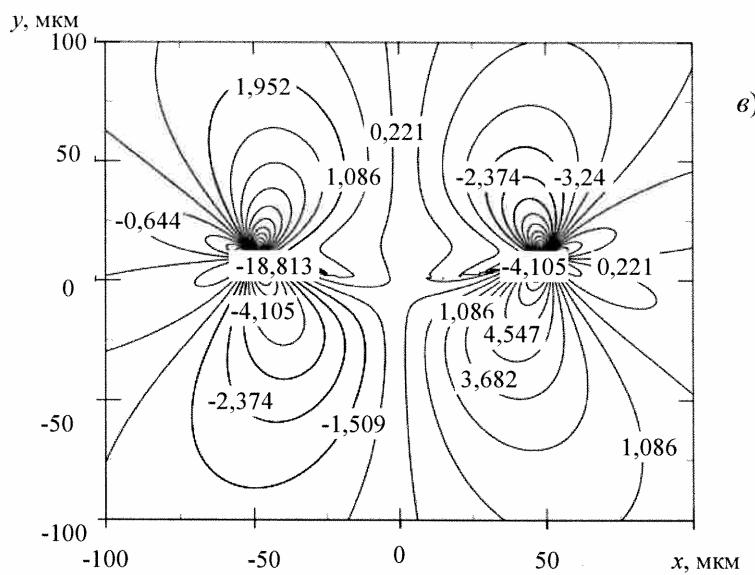


Рис. 3. Поля напряжений у линзовидного упругого двойника
при наличии стопора на оси y : в) $\sigma_{xy}^{lw}(x, y)$

При наличии стопора у одной из вершин двойника (рис. 5, б) напряжения концентрируются по обе стороны от оси x . При этом максимальные напряжения локализуются у той вершины, где расположен стопор.

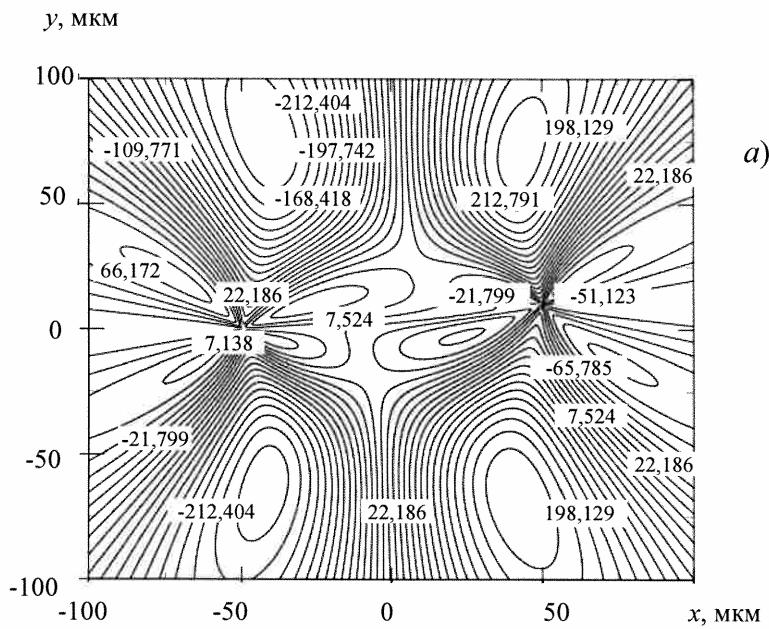


Рис. 4. Поля напряжений у линзовидного упругого двойника
при наличии стопора на оси x : а) $\sigma_{xx}^{lw}(x, y)$

Рост напряжений у искривленных границ упругого двойника активизирует процесс генерации у них полных дислокаций, что в свою очередь при достаточной плотности данных дислокаций приводит к блокировке двойникующих дислокаций и образованию остаточного двойника после снятия нагрузки.

y , мкм

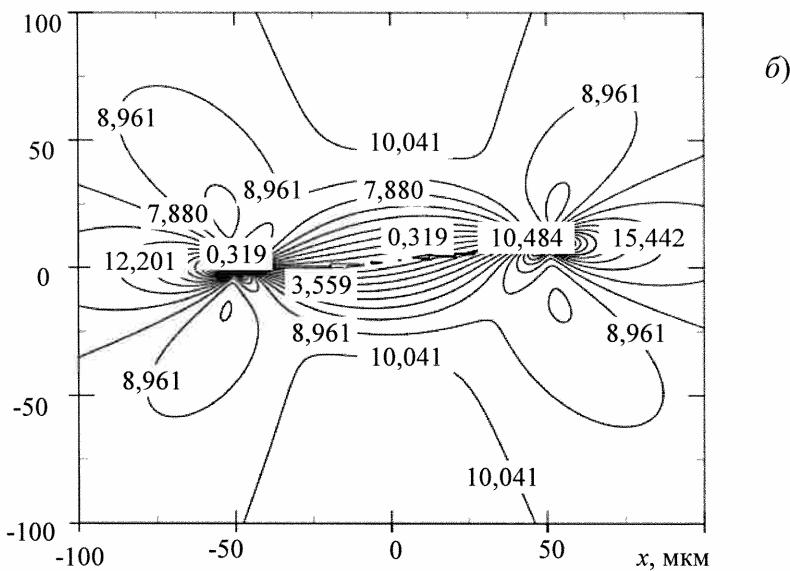


Рис. 4. Поля напряжений у линзовидного упругого двойника

при наличии стопора на оси x : б) $\sigma_{yy}^{tw}(x, y)$

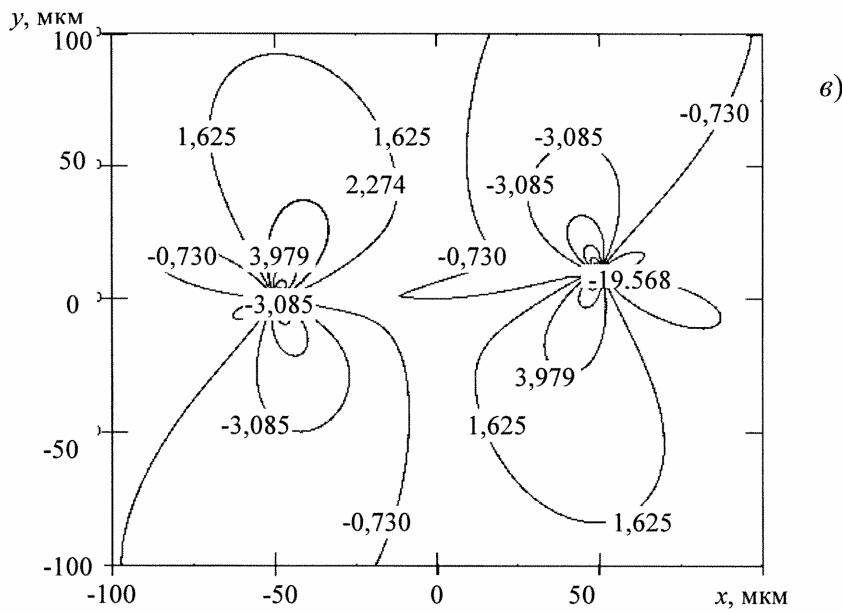


Рис. 4. Поля напряжений у линзовидного упругого двойника

при наличии стопора на оси x : в) $\sigma_{xy}^{tw}(x, y)$

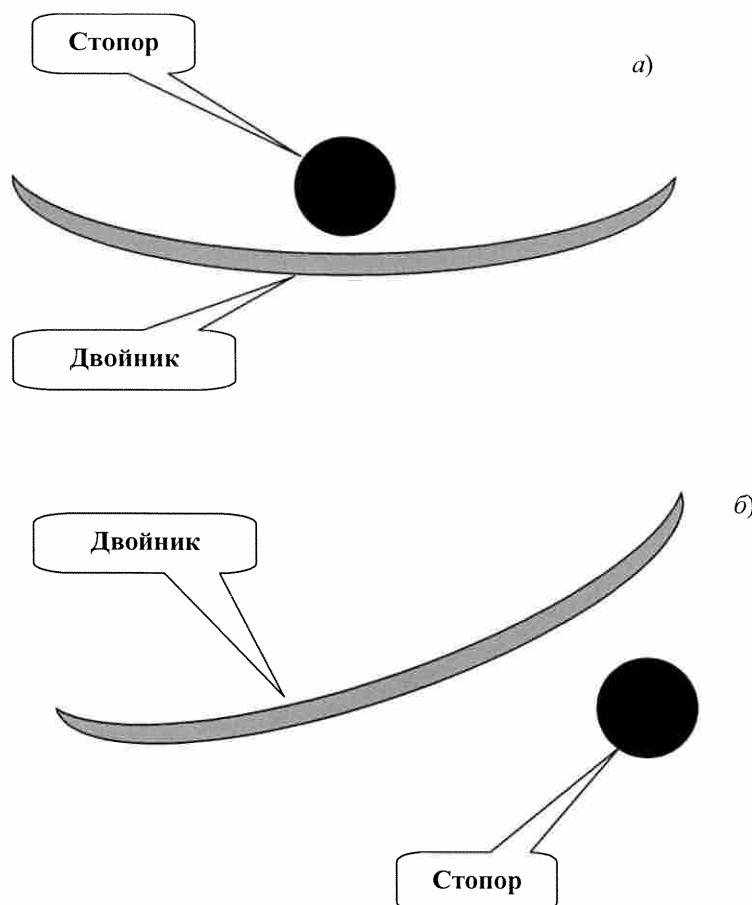


Рис. 5. Схематическое изображение тонкого упругого линзовидного двойника при наличии у него стопора: а – стопор у средней части двойника (на оси y); б – стопор у одной из вершин двойника (на оси x)

Заключение

Таким образом, на основании дислокационного подхода, с использованием методов нелинейной механики разрушения, разработан метод расчета напряжений у упругого линзовидного двойника в случае призматического образца, подвергнутого поперечным сдвиговым напряжениям. Показано, что максимальная плотность напряжений сконцентрирована у вершин клиновидного двойника. При этом зарождение трещины в вершинах двойника у стопора имеет большую вероятность, чем при у двойника в бездефектной области кристалла.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Фінкель, В.М.** Разрушение кристаллов при механическом двойникovanии / В.М. Фінкель, В.А. Федоров, А.П. Королев. – Ростов н/Д, 1990. – 172 с.

2. **Федоров, В.А.** Образование трещин на границах зерен и двойников в цинке при охлаждении до низких температур / В.А. Федоров, В.М. Финкель, В.П. Плотников // Физика металлов и металловедение. – 1980. – Т. 49. – № 2. – С. 413–416.
3. **Финкель, В.М.** Кинетика двойникования и образования КР2 в цинке / В.М. Финкель, В.А. Федоров, В.П. Плотников // Физика металлов и металловедение. – 1979. – Т. 47. – № 4. – С. 867–870.
4. Влияние распределения дислокаций в границах двойника на зарождение микротрещин в его вершине / В.А. Федоров [и др.] // Физика твердого тела. – 2002. – Т. 44. – № 6. – С. 1057–1059.
5. **Астафьев, В.И.** Нелинейная механика разрушения / В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова. – Самара : Изд-во “Самарский университет”, 2001. – 562 с.
6. **Остриков, О.М.** Механика двойникования твердых тел : монография / О.М. Остриков. – Гомель : Учреждение образования “Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого”, 2008. – 301 с.
7. **Косевич, А.М.** Дислокации в теории упругости / А.М. Косевич. – Киев : Наук. Думка, 1978. – 220 с.
8. **Хирт, Дж.** Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М. : Атомиздат, 1972. – 600 с.

Поступила в редакцию 26.09.2013 г.

УДК 530.12

А.Н. СОБОЛЕВСКИЙ

СКЛАДЫВАЕТСЯ ЛИ СКОРОСТЬ СВЕТА СО СКОРОСТЬЮ ПРИЕМНИКА?

Проанализировано содержание выражения “сложение скорости света со скоростью приемника” в рамках одной неподвижной системы отсчета, где движутся луч и приемник, и в двух системах отсчета, в одной из которых приемник покоятся. Отмечено качественное различие этих случаев. Выполнен оценочный расчет времени движения луча солнечного света, отраженного от спутника Юпитера, до Земли в двух системах отсчета: в системе, где неподвижно Солнце и в системе, связанной с Землей. Рассмотрены галилеевский и лоренцевый варианты связи между указанными системами. С опорой на выполненный расчет высказано мнение, что данные наблюдений по затмению спутника Юпитера не могут рассматриваться в качестве доказательства классического (не релятивистского) правила сложения скоростей света и приемника, как утверждается некоторыми исследователями.

Дискуссии по поводу СТО имеют диапазон от утверждений о необходимости пересмотра ее основ с опорой на новый подход к фундаментальным опытам [1] до мнения, что основы эйнштейновской СТО следует сохранить, расширяя при этом сами понятия расстояний, размеров, промежутков времени применительно к практическим нуждам (см., например, [2]: “Приложение”). Экспериментальные данные последнего времени, впрямую демонстрирующие независимость скорости света от скорости релятивистского источника, представляю дополнительный вклад в копилку обоснований СТО [3]. Тем не менее, некоторыми исследователями приводятся аргументы, указывающие, по их мнению, на ошибочность исходных положений СТО Эйнштейна, в частности, на существование абсолютного пространства и возможность введения выделенной ИСО (инерциальной системы отсчета). В данном случае автор не вступает в общую дискуссию. Цель настоящей статьи лишь в том, чтобы проанализировать один из доводов, который указывает, по мнению его сторонников, на ошибочность положений эйнштейновской СТО: сложение скоростей света и его приемника происходит по классическому (не релятивистскому) правилу. Ниже подробно рассматривается этот вопрос.

Если в ИСО K , принятой за лабораторную, движутся две частицы со скоростями \vec{v}_1 и \vec{v}_2 , то как известно, в качестве одной из характеристик их совокупного движения в кинематике вводится понятие относительной скорости частиц $\vec{u} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Вектор \vec{u} , таким образом, вводится определением как векторная сумма \vec{v}_2 и $-\vec{v}_1$. Поставив вместо частицы 2 волновой фронт узкого пучка света (в дальнейшем – фронт луча), имеющий скорость \vec{c} , а скорость частицы 1 обозначив $\vec{v}_1 = \vec{v}$, получим для таких объектов выражение для относительной скорости $\vec{u} = \vec{c} - \vec{v}$. Считая частицу 1 приемником и луч света движущимся, например, вдогонку за ним вдоль одной прямой, найдем величину относительной скорости $u = c - v$ с очевидным геометрическим смыслом: это сокращение расстояния между лучом и приемником за секунду при измерении в ИСО K . При встречном движении тех же объектов $u = c + v$, что СТО не противоречит, поскольку величина u содержит скорости двух объектов в рамках одной ИСО. В рассматриваемом варианте вопрос о том, складывается ли скорость света со скоростью приемника, риторический: безусловно складывается, не может не складываться, такого рода сложение обусловлено самим фактом существования объектов и их движения, не требует каких-либо иных допущений.

В таком ключе имеет смысл рассматривать также относительную скорость луча и источника.

Вернемся к случаю “луч – приемник”. Приведенный выше пример движения луча и приемника вдоль одной прямой, когда $u = c + v > c$ не

исключительный случай. В источнике [4] рассматривается “скорость света внутри трубы” (телескопа) при наличии aberrации света от звезды. Уточним смысл этой величины, т. е. скорости света.

В качестве неподвижной эфирной ИСО K принимается система, где удаленные звезды могут считаться неподвижными, а Земля (\mathcal{Z}) движется со скоростью $v = 3 \cdot 10^4 \text{ м/с}$ по орбите вокруг Солнца. В рассматриваемой системе имеются два подвижных объекта: луч от звезды и наблюдатель на \mathcal{Z} . Для ясности в качестве последнего рассматриваем окуляр телескопа. Если в некоторый момент времени открывается объектив, то упомянутые объекты движутся, хотя и не вдоль одной прямой, но также на сближение как луч и приемник. Рассматриваем звезду, направление на которую перпендикулярно плоскости земной орбиты, следовательно нормально относительно скорости \mathcal{Z} . Направим ось у неподвижной ИСО K на звезду. Скорость \mathcal{Z} . \vec{v} направлена по касательной к орбите. Ось x направим вдоль \vec{v} , считая, что \mathcal{Z} . на небольшом временном промежутке движется по прямой вдоль этой оси. Тогда исследуемые объекты *окуляр* и *фронт луча* в системе K движутся по двум взаимно перпендикулярным осям x, y . Введем также подвижную ИСО K' , связанную с \mathcal{Z} . в орбитальном движении. Это будет система, движущаяся со скоростью v вдоль оси x системы K . Чтобы свет попал в окуляр наблюдателя в K' , труба телескопа должна быть наклонена на некоторый угол по направлению движения (явление aberrации).

Далее о скоростях. В K луч движется в отрицательном направлении оси y , следовательно, можно записать

$$\vec{c} = -c\vec{j}. \quad (1)$$

Для окуляра

$$\vec{v} = v\vec{i}, \quad (2)$$

где \vec{i}, \vec{j} – единичные векторы осей. Относительная скорость объектов в K

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{c} - \vec{v} = -c\vec{j} - v\vec{i}, \text{ ее величина} \\ u &= \sqrt{v^2 + c^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Направлен вектор \vec{u} вдоль трубы. Таким образом, “скорость света внутри трубы” де-факто есть по определению взаимная относительная скорость окуляра и луча в K . Непосредственно она в K не фиксируется, т. к. нет наблюдателя неподвижного в этой ИСО, хотя в принципе наличие такого наблюдателя вероятно возможно. Фиксированное в (3) значение $u > c$ для системы K не противоречит СТО по причине уже упомянутой выше.

Реальный наблюдатель имеется в системе K' , где приемник (окуляр) неподвижен. Закономерен вопрос: в такой K' будет ли величина скорости света $c' = u$? Такой же вопрос правомерен и во всех других случаях, когда вводится ИСО, где приемник покоится. Для ответа на поставленный вопрос необходимо учесть, что введение системы K' означает введение нового координатно-временного пространства, пусть и с такими же часами. Это ведет к изменению относительной скорости луча и приемника от $\vec{u} = \vec{c} - \vec{v}$ в K до $\vec{u}' = \vec{c}' - \vec{v}'$ в K' . В случае, когда приемник в K' покоится, $\vec{v}' = 0$ и получаем

$$u' = c'. \quad (4)$$

Нас интересует связь \vec{c} и \vec{c}' . Связь между ними определяется правилом сложения скоростей уже нового качества, т. к. теперь речь идет о взаимозависимости двух скоростей одного объекта (луча) в разных системах отсчета в отличие от сложения скоростей двух объектов в одной системе.

В том случае, когда относительная скорость двух объектов инвариант, $\vec{u} = \vec{u}'$, с учетом (4) будет $\vec{c}' = \vec{u}$ и для aberrационного примера

$$c' = u = \sqrt{v^2 + c^2}. \quad (5)$$

Но инвариантность \vec{u} имеет место, как известно, в случае, если K' и K связаны преобразованием Галилея, где время не преобразуется. Такова цена вопроса, чтобы принять скорость света c' в системе K' телескопа в aberrационном опыте согласно (5). Однако принятие как общепринимаемых галилеевских преобразований, конечно, немыслимо. Принятие же лоренцевых преобразований для “скорости света в трубе” в системе K' означает $c' = c$.

От вида преобразований между K и K' в aberrационном опыте зависит угол aberrации. Однако выражения для этого угла классическое и релятивистское при $\beta = \frac{v}{c} = 10^{-4}$ настолько малы, что опытным путем практически невозможно проверить, какое из них предпочтительнее.

В источнике [4] в качестве доказательства нерелятивистского правила сложения скоростей с участием света и приемника имеются также ссылки на результаты астрономических наблюдений времен затмений спутника Юпитера (*Ю.*) в различных положениях \mathcal{Z} на околосолнечной орбите. Подробные числовые соображения при этом не приводятся, а лишь утверждается со ссылкой на результаты наблюдений, что “классическая формула сложения скоростей работает безупречно”.

Ниже приводится оценочный расчет, ставящий под сомнение категоричность последнего утверждения. Общие соображения следующие.

В конечном счете результаты наблюдений за спутником Ю . земным наблюдателем зависят от закона, по которому отраженные от спутника солнечные лучи движутся по отношению к \mathcal{Z} . В приводимом ниже расчете оцениваются и сравниваются времена прохождения света от спутника к земному наблюдателю, предполагая классический и релятивистский варианты.

Выбираем в качестве неподвижной ИСО K , где Солнце покоится, а планеты и их спутники движутся по известным орбитам. Считаем, что Солнце, Земля, Юпитер и его ближайший спутник находятся примерно в одной плоскости. Эту плоскость принимаем за координатную x, y системы K .

Рассмотрим прохождение отраженного от спутника светового луча, появляющегося в тот момент, когда спутник выходит из тени, создаваемой его планетой. С этого момента луч направляется к \mathcal{Z} , чтобы быть принятым приемником в положении, например, ее апогея относительно Ю . На рисунке с сохранением обозначений источника [4] показаны положения небесных тел в плоскости x, y в некоторый выбранный за начальный момент $t_0 = 0$:

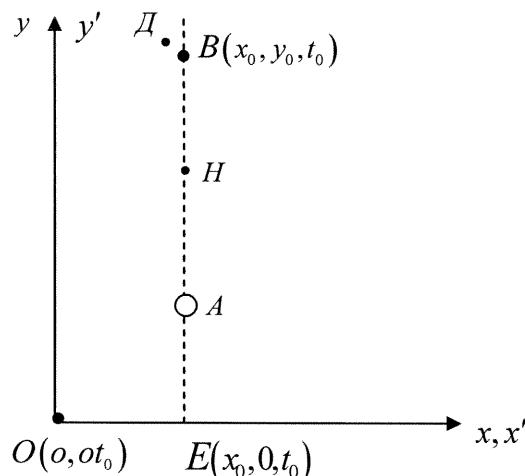


Схема расположения небесных тел \mathcal{Z} , Ю , Солнца в исходный момент

A – Солнце, B – Юпитер, D – ближайший спутник Ю . в момент $t_0 = 0$ выхода из тени, O – Земля, E – точка апогея \mathcal{Z} . относительно Ю , H – наиболее близкое к Ю . возможное положение \mathcal{Z} .

Земля, находясь в момент $t_0 = 0$ в точке 0, принятой за начало координат, на расстоянии x_0 от точки апогея E , движется со скоростью

$v = 10^4 \text{ м/с}$ к этой точке, так чтобы в некоторый момент t встретиться с лучом от спутника D , вышедшего в момент $t_0 = 0$ из тени IO , и также движущегося по направлению к точке апогея E . Ввиду относительной малости расстояния от IO до его ближайшего спутника принимаем, что появляющийся луч движется от самого IO (точки B) примерно в направлении, перпендикулярном оси x (пунктирная линия). Известными параметрами считаем: y_0 – расстояние от Z до IO в апогее – сумма радиусов орбит Z и IO , $y_0 = AE + AD$; скорость Z . $v = 3 \cdot 10^4 \text{ м/с}$ (орбитальная); скорость света в K $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Время движения луча от B до E по часам K очевидно будет

$$\Delta t = t - t_0 = t = \frac{y_0}{c}, \quad (6)$$

где t – момент встречи с приемником. Условие встречи луча с приемником в точке E для системы K :

$$\frac{x_0}{v} = \frac{y_0}{c}, \quad \frac{x_0}{y_0} = \frac{v}{c}. \quad (7)$$

В дальнейшем считаем условие (7) выполненным. Из (7) можно найти “прицельное” расстояние для Z .

$$x_0 = y_0 \frac{v}{c}. \quad (8)$$

Наблюдателя неподвижного в K со своей координатно-временной системой реально нет.

Введем теперь подвижную систему K' , связав ее с Z , считая ее ИСО на сравнительно малом участке траектории (совпадению нештрихованных и штрихованных осей систем K и K' соответствуют $t = t' = t_0 = 0$).

Рассмотрим движение изучаемого луча в K' .

Координаты земного приемника в K'

$$x'_1 = 0, \quad y'_1 = 0. \quad (9)$$

Помечая координаты фронта луча в K' x'_2 и y'_2 , запишем соответствующие уравнения движения по осям x' , y' :

$$x'_2 = x'_0 + c'_x(t' - t'_0), \quad y'_2 = y'_0 + c'_y(t' - t'_0), \quad (10)$$

где c'_x и c'_y проекции скорости фронта луча на штрихованные оси. Соответствие штрихованных и нештрихованных координат в K' и K :

$$(x'_0, y'_0, t'_0) - (x_0, y_0, t_0).$$

Факту встречи луча и приемника в K' соответствуют условия $x'_1 = x'_2$, $y'_1 = y'_2$, откуда с учетом (9) и (10) следует:

$$\frac{x'_0}{c_x} + (t' - t'_0) = 0, \quad \frac{y'_0}{c'_y} + (t' - t'_0) = 0. \quad (11)$$

Из (11) ясно, что оба уравнения совместимы при:

$$\frac{x'_0}{c'_x} = \frac{y'_0}{c'_y}, \quad \frac{x'_0}{y'_0} = \frac{c'_x}{c'_y}. \quad (12)$$

Пока не было сделано никаких предположений о связи между штрихованными и нештрихованными величинами. Примем теперь, что между K и K' действуют галилеевские преобразования. В этом случае $c'_y = c_y = -c$, $c'_x = -v$ (соответственно $c'^2 = v^2 + c^2$). Опуская подробности, отметим практически очевидный результат: условие (12) будет выполнено, поскольку выполнено (7); $t'_0 = t_0 = 0$, $x'_0 = x_0$, $y'_0 = y_0$, момент достижения луча приемником $t' = t$; время движения луча в K'

$$\Delta t' = t' - t'_0 = t - t_0 = t = \Delta t. \quad (13)$$

Далее примем, что между K и K' действуют лоренцевы преобразования. В таком случае, $c'_x = -v$, $c'_y = -c\gamma^{-1}$, где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = 10^{-4}$;

$$x'_0 = \gamma(x_0 - vt_0) = \gamma x_0 = \gamma x_0; \quad y'_0 = y_0. \quad (14)$$

Из приведенных выше соотношений вытекает и в этом случае выполнение условия (12).

Время движения луча в K' из второго уравнения (11):

$$\Delta t' = t' - t'_0 = -\frac{y'_0}{c'_y}, \quad (15)$$

где t' – момент достижения лучом приемника (причем, $t'_0 \neq 0$).

Ввиду приведенных данных и учитывая (6), находим

$$\Delta t' = -\frac{y_0}{-c\gamma^{-1}} = \gamma \frac{y_0}{c} = \gamma \Delta t, \quad (16)$$

откуда

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \gamma > 1.$$

Формула (16) определяет пересчет времени движения луча в K' к времени того же движения по часам K . Дадим численную оценку. Величина Δt может быть найдена из (6), поскольку $y_0 = EA + AB$ – сумма радиусов орбит Земли и Юпитера. Известная величина: $EA \approx 5,2$ а.е., $AB=1$ а.е., $y_0 = 6,2$ а.е. = $6,2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}$ м. Тогда

$$\Delta t = \frac{y_0}{c} = \frac{6,2 \cdot 1 / 5 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 3,1 \cdot 10^3 \text{ с};$$

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{1}{2} \beta^2 = 1 + 5 \cdot 10^{-9}.$$

Подставив найденные значения в (16), получим

$$\Delta t' = 3,1 \cdot 10^3 (1 + 5 \cdot 10^{-9}) = (3,1 \cdot 10^3 + 15,5 \cdot 10^{-6}) \text{ с}.$$

Таким образом, ко времени Δt в несколько тысяч секунд прибавляется 15 микросекунд.

Хотя приведенный расчет носит абстрактный, оценочный характер, полученный результат, по мнению автора, указывают на то, что результаты экспериментов по наблюдению затмений спутника Юпитера, проводимые в наблюдениях с Землей, не дают возможности определиться, действуют ли между K и K' преобразования Галилея или Лоренца. Другими словами, результаты наблюдений в земной системе K' практически такие же, какие получил бы наблюдатель системы K (если бы он существовал) независимо от того, связаны K и K' галилеевскими или лоренцевыми преобразованиями. Главная причина – “нерелятивистскость” орбитальной скорости Земли при $\beta = 10^{-4}$.

По указанным основаниям данные наблюдений по спутнику Юпитера, по мнению автора, не могут рассматриваться как доказательство справедливости “главного аргумента против СТО”, касающегося сложения скоростей.

В заключение, не приводя подробностей, отметим, что применение так называемых обобщенных преобразований Лоренца, согласно работ [5, 6], где вводится выделенная ИСО стационарного эфира и скорость света анизотронна при переходе к ИСО, движущимся относительно выделенной системы, дает для соотношения времен Δt и $\Delta t'$ применительно к задаче о затмении спутника, рассмотренной выше, тот же порядок величин с той лишь разницей, что в этом случае получается $\Delta t' < \Delta t$ в отличие от лоренцева варианта, где $\Delta t' > \Delta t$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Bryant, Steven.* Revisting the Michelson-Morley experiment reveals Earth orbit velocity of 30 km/c / Steven Bryant // Galilean Elektrodynamics. – 2008. – Vol. 19. – № 3. – P. 51–56.
2. *Хрюнов, А.В.* Основы релятивистской физики / А.В. Хрюнов. – М. : Физмат-книга, 2003. – С. 448.
3. Эксперименты по прямой демонстрации независимости скорости света от скорости движения источника / Е.Б. Александров [и др.] // Успехи физических наук. – 2011. – Т. 181. – № 12. – С. 1345–1351.
4. *Акимов, О.Е.* Главный аргумент против теории относительности / О.Е. Акимов // Internet. Sceptic Ratio.
5. *Купряев, Н.В.* Расширенное представление преобразований Лоренца / Н.В. Купряев // Известия высших учебных заведений. Физика. – 1999. – № 7. – С. 8–14.
6. *Купряев, Н.В.* Электродинамика с позиций стационарного эфира / Н.В. Купряев // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2006. – № 10. – С. 8–13.

Поступила в редакцию 27.06.2013 г.

УДК 612.111.15

И.А. БОБЦОВА

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ НИЗКОИНТЕНСИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА БИОМОЛЕКУЛЫ КРОВИ

На основании литературных данных, собственных спектральных исследований образцов цельной крови обсуждаются гипотезы механизма фотовоздействия низкоинтенсивного лазерного излучения на кровь. Анализируются спектральные проявления фотохимических реакций, инициируемых в крови терапевтическими дозами светового облучения; сопоставляются методики пробоподготовки цельной крови и ее компонентов, а также спектральные характеристики облученной цельной крови больных и здоровых доноров.

Низкоинтенсивное лазерное излучение (НИЛИ) – один из методов эфферентной терапии, который достаточно эффективно применяется в различных областях современной медицины [1, 2]. В руководствах и учебниках [1, 2, 3] обобщен опыт использования лазера в терапии, разработана теория, удовлетворительно объясняющая эффекты облучения. Тем не менее, несмотря на существующие нормативные документы [3, 4], клиницисты используют различные (в некоторых случаях произвольно выб-

ранные) режимы, условия облучения, по-разному контролируют реакцию организма и оценивают эффективность лечения. Это, во многом, связано с тем, что до настоящего времени нет единого мнения о механизмах действия НИЛИ на цельную кровь, о первичных фотоакцепторах и фотоэффектах, происходящих на молекулярном уровне, которые первичны при взаимодействии с электромагнитным излучением [1-3, 5-8].

Разрозненность научных и практических данных приводит к эмпирическому подходу применения НИЛИ в клинической практике и, как следствие, недостаточной эффективности лазерной терапии.

В клинической практике используются следующие способы доставки излучения к тканям организма при проведении сеансов лазеротерапии:

- Экстракорпоральное или внутривенное лазерное воздействие на кровь.
- Подведение излучения к патологическому очагу с помощью эндоскопа.
- Чрезкожное воздействие на болевую точку или проекцию органа.
- Воздействие на рефлекторные точки акупунктуры [7, 9, 10].

При любом способе лазерного облучения в формирование биологического отклика на фотовоздействие непременно вовлекаются форменные элементы крови. Существует несколько гипотез, отражающих предполагаемый первичный эффект воздействия НИЛИ.

• Первой и наиболее очевидной гипотезой механизма действия НИЛИ, безусловно, является конверсия поглощенной энергии излучения в тепло. Этот “тепловой” механизм многократно обсуждался в литературе, однако он часто на практике неоправданно игнорируется, ибо существует мнение, и имеются многочисленные экспериментальные данные, что при уровнях энергий, использующихся в НИЛТ, нагрев тканей не превышает $0,1^{\circ}\text{C}$ [11], что, по мнению большинства специалистов, пренебрежимо мало. Это действительно так, если говорить о средней температуре ткани в области облучения, хотя вся разница между нормой и общим болезненным состоянием у человека составляет по шкале температур не более $0,3\text{-}0,4^{\circ}\text{C}$. Как отмечает М.А. Каплан в [12], а также другие авторы [13], лазерное излучение способно приводить не только к общему среднему нагреву тканей, но и к существенной локальной неоднородности температурного градиента в тканях, особенно на уровне одной клетки или ее органелл. А это уже более заметно может влиять на константы скорости биохимических реакций, может приводить к деформации клеточных мембран, изменению их электропотенциалов. Механизм действия НИЛИ – быстрый локальный нагрев и перегрев внутриклеточных структур и молекул клетки и ускорение на этой основе каскада специфических клеточных биохимических реакций. Протекание эндотермических химических реакций зависит, как показывают многие физические исследования, в общем случае не только от средней подводимой тепловой энергии к реагентам, но и от скорости и частоты нагрева, которые могут влиять на

константы термохимических реакций [13]. Это может дать толчок к пониманию особенностей импульсной низкоинтенсивной лазерной терапии (НИЛТ) в сравнении с непрерывным излучением.

• Сторонники второй – полагают, что лазерное излучение активизирует некоторые ферменты-акцепторы, спектр поглощения которых совпадает с его энергетическим спектром. Считают, что такими акцепторами для Не-Не лазеров являются железо- и медьсодержащие ферменты (катализ, церулоплазмин, супероксиддисмутаза, НАДФН-дисмутаза), а также молекулы эндогенного порфирина. Поглощая энергию лазерного излучения, ферменты-акцепторы запускают регулируемые ими биохимические процессы. Данный механизм был предложен В.А. Овсянниковым (1987 г.), в его основе лежит поглощение лазерной энергии молекулами, участвующими в энергетическом цикле клетки, и, таким образом, за счет энергии лазерного излучения происходит нормализация клеточного энергетического цикла [6].

Классическими и фундаментальными работами по механизмам НИЛТ стали исследования, проводившиеся на протяжении многих лет (и проводящиеся сейчас) под руководством Т.Й. Кару [14]. В публикациях автор на основе анализа различных спектров действия (зависимости биологических откликов клеток от длины волны) и спектров поглощения делает вывод, что эффекты лазерной биостимуляции являются следствием электронного возбуждения хромофоров Cu_A и Cu_B в молекуле терминального фермента дыхательной цепи цитохром-с-оксидазы.

• Третья гипотеза предполагает неспецифическое действие излучения на биополимеры (белки, липиды, мембранны, ферменты), в результате которого меняется их конформационное строение и функциональное состояние. Энергия, необходимая для конформационных переходов, невелика, поэтому НИЛИ может влиять на электронно-конформационные взаимодействия [15, 16].

• По четвертой гипотезе, в результате действия НИЛИ образуются активные формы кислорода, которые индуцируют окислительные процессы. На первый взгляд, такое предположение кажется невероятным, однако оно не лишено смысла. Молекула кислорода имеет в оптическом диапазоне несколько полос поглощения, правда очень слабых, и одна из них включает длину волны Не-Не лазера. Еще важнее то, что, если акт поглощения фотона совершился, то, согласно данным молекулярной спектроскопии, должен образоваться синглетный молекулярный кислород (СМК). Эта частица хорошо известна своей высокой биологической активностью [17].

В работах С.Д. Захарова и А.В. Иванова [13], а также С.П. Гладких [18] неоднократно сообщалось о возможности прямой фотогенерации синглетного кислорода в диапазоне длин волн 600–1300 нм, что приводит к окислительному повреждению клеточных и субклеточных мембран, к перекисному окислению циклических соединений (холестерина, порфиринов и т. д.) и соединений алифатического ряда (фосфолипиды, жир-

ные кислоты и др.). При любом лазерном воздействии этот механизм может иметь место, и обычная лазерная терапия может, видимо, оказывать не только стимулирующее, но и прямое деструктивное воздействие на ткани и органы пациента по механизму фотодинамической терапии.

Г.А. Залесская и соавторы [18, 19] на основании приведенных спектральных данных крови и ее компонентов сделали вывод, что в основе терапевтических эффектов, инициированных как ультрафиолетовым облучением крови (УФОК), так и внутривенным лазерным облучением крови (ВЛОК), лежит один механизм – изменение баланса между наработкой активных форм кислорода и их ингибирированием антиоксидантами.

Исходя из вышеизложенных гипотез действия НИЛИ, можно сделать вывод, что фотохимических и фотофизических вариантов использования энергии лазерного излучения при НИЛТ для влияния на физиологию и функциональное состояние живых систем может быть достаточно много.

Поскольку область исследования является мультидисциплинарной, то закономерным является значимый вклад специалистов-оптиков в разработку практических и теоретических основ низкоинтенсивной лазерной терапии. Первые аргументы в пользу применения лазера были получены специалистами в области прикладной оптики на основании анализов видимых спектров крови [7], так как они отражают первичные фото-биологические эффекты, происходящие под действием НИЛИ на молекулярном уровне.

В основе метода спектроскопии лежит измерение интенсивности пропускания или поглощения электромагнитного излучения веществом в зависимости от длины волны света. Большинство спектральных исследований влияния НИЛИ проведены в видимом и ближнем инфракрасном диапазонах. Это обусловлено тем, что в области волновых чисел 2000–700 см⁻¹ ИК спектры многих органических молекул настолько сложны, что отнесение всех полос поглощения/пропускания к отдельным функциональным группам и связям вызывает значительные трудности даже при наличии обширного экспериментального материала. Существуют трудности в пробоподготовке для последующей записи спектров цельной крови и ее компонентов. Поэтому известно лишь сравнительно небольшое количество научных работ, посвященных изучению и интерпретации спектров крови и ее компонентов в средней инфракрасной области [19–22]. Однако именно в средней ИК-области, особенно в интервале 2000–700 см⁻¹, сосредоточены характеристические колебания функциональных групп и связей органических веществ. В связи с уникальностью химического состава каждой отдельной пробы ИК-спектр цельной крови в средней инфракрасной области [21], по сути, является его аутентичной характеристикой.

В литературе описаны различные методики пробоподготовки и критерии оценки влияния НИЛИ на спектральные характеристики крови и

ее компонентов. Так в публикациях Р.А. Зорикова [22] использовался следующий способ проведения преаналитического этапа: несколько капель исследуемой плазмы крови равномерно наносили на поверхность оптической подложки и высушивали при температуре $35\pm1^{\circ}\text{C}$. Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что после проведенного полного курса ВЛОК в комплексной терапии ближайшего послеоперационного периода в ИК спектрах больных полоса $1510\pm10 \text{ см}^{-1}$ разделяется на дуплет “амид-1” и “амид-2” и приближается к ИК спектрам доноров. Данный эффект указывает на процессы восстановления биохимического состава крови больных и на правильность проводимого лечения. Однако изменение ИК спектров оценивалось без программ математической статистики, на основании визуальных изменений спектров.

В патенте № 2098820 РФ определение воздействия НИЛИ на кровь [23] осуществлялось следующим образом. Кровь больного до и после сеанса ВЛОК высушивали на открытых чашках Петри при комнатной температуре и регистрировали ИК спектры методом таблеток в KBr или тонком слое вещества в виде суспензии в тонком слое вазелинового масла между крышками из KBr. В тех случаях, когда кровь больного реагирует на лазерное излучение, соотношение высот пиков “H1175/H1140” уменьшается не менее чем на 15% от начального соотношения.

Основные недостатки данных методик: исключение форменных элементов и водной составляющей крови и длительное высушивание крови или нагревание плазмы крови. Спектральные свойства биологических жидкостей в указанных случаях способны резко изменяться.

В публикациях Г.А. Залесской [8, 19] влияние фотопреакций, инициированных терапевтическими дозами облучения крови оптическим излучением *in vivo* в средней ИК-области, оценивалось чаще всего на основании анализа ИК спектров эритроцитарной массы. Основными результатами данных исследований являются изменения ИК-спектров при терапевтических дозах оптического излучения, которые свидетельствуют о конформационных переходах в макромолекулах форменных элементов крови. Данные изменения могут быть связаны с процессами оксигенации-деоксигенации гемоглобина. Указанный способ требует многоэтапной пробоподготовки крови, сопряжен с большим числом легко изменяющихся и трудно контролируемых параметров (неоднократность и продолжительность центрифугирования, количество оборотов центрифуги, температура, объем образца и др.).

Г.А. Залесской впервые [8, 19] проведено изучение воздействия НИЛИ *in vivo* на ИК-спектры цельной крови без предварительного высушивания пробы. Для измерений в средней ИК-области образцы приготавливали в виде пленок толщиной несколько микрон на подложках из кристаллов KRS, на которые наносились дозированные количества крови. Данная методика позволяет установить структурные перестройки и межмолекулярные взаимодействия, протекающие в цельной крови, под влиянием НИЛИ. Предложенная методика дает лишь качественную карти-

ну результатов взаимодействия НИЛИ с кровью, но не позволяет делать какие-либо расчеты параметров воздействующих излучений, и, таким образом, отсутствует количественная оценка спектров. Кроме того, чтобы установить, что установленные изменения ИК спектров крови и ее компонентов происходят исключительно под действием НИЛИ требуется стандартизация условий пробоподготовки.

Во всех перечисленных публикациях не указывались сведения об интервале времени от момента забора образцов до снятия ИК-спектров, не учитывались pH, температура, диагноз пациента. Учет данных факторов в преаналитическом этапе позволит минимизировать артефакты и может дать новый подход к пониманию целого ряда биологических закономерностей воздействия НИЛИ как на цельную кровь, так и организм в целом.

В лаборатории экологической физиологии Ресурсного центра УО “МГУ имени А.А. Кулешова” были проведены 19 серий экспериментов облучения крови не только больных, но и здоровых доноров *in vitro* лазером с длиной волны $\lambda=670$ нм (5 мВт, время облучения – 10 мин.). Последующий анализ проб крови методом ИК-спектроскопии выявили особенности, характеризующие влияние низкоинтенсивного оптического излучения на биомолекулы цельной крови. Предварительный анализ показал, что используемое для терапевтических целей НИЛИ в условиях *in vitro* практически не вызывает изменение конформационных состояний биомолекул крови здоровых доноров, положение основных полос пропускания остается стабильным, изменения ИК спектров не обнаружены. В ИК-спектрах крови больных ишемической болезнью сердца после облучения лазером наблюдалось уменьшение интенсивности дуплетной полосы амид I (1654 см^{-1}) и амид II (1540 см^{-1}). Зафиксированы изменения в ИК-спектрах в диапазоне волн $1470\text{--}1180\text{ см}^{-1}$, которые можно объяснить качественными и количественными изменениями определенных макромолекул, входящих в состав цельной крови, в основном фосфолипидов, протеинов, глюкозы, холестерина. Характер этих изменений не имеет каких-либо закономерностей и требует более детального изучения данного вопроса.

Приведенный анализ информации в области исследования и экспериментальных данных свидетельствует о необходимости системного фундаментального подхода к изучению биопроцессов, инициируемых световым излучением в живом организме, указывает на актуальность развития методов ИК-спектральной диагностики крови и ее компонентов. ИК-спектроскопия позволяет проводить анализ микропроб, она высокоинформативна и важна как при исследовании процессов, протекающих на молекулярном уровне, инициируемых в крови, так и для биомедицинского применения НИЛИ.

Надежность спектроскопических данных может быть обеспечена тщательным сравнением с результатами клинических исследований, проводимых различными группами ученых, практикующих врачей, а также

стандартизацией условий проведения исследований методом ИК-спектроскопии.

Автор выражает свою признательность старшему преподавателю Л.П. Максе за ценные консультации и помочь в регистрации ИК спектров цельной крови, кандидату биологических наук Н.В. Акуличу за помочь в анализе литературных данных и результатов собственных исследований.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Улащик, В.С.** Физиотерапия : универсальная медицинская энциклопедия / В.С. Улащик. – Минск : Книжный Дом, 2008. – 640 с.
2. **Пономаренко, Г.Н.** Частная физиотерапия : учеб. пособие / Г.Н. Пономаренко. – М. : ОАО “Издательство «Медицина», 2005. – 744 с.
3. **Ушаков, А.А.** Практическая физиотерапия / А.А. Ушаков. – 2-е изд. – М. : ООО “Медицинское информационное агентство”, 2009. – 608 с.
4. **Илларионов, В.Е.** Современные методы физиотерапии: руководство для врачей общей практики (семейных врачей) / В.Е. Илларионов, В.Б. Симоненко. – М. : ОАО “Издательство «Медицина», 2007. – 176 с.
5. **Захаров, С.Д.** Светокислородный эффект – физический механизм активации биосистем квазимохроматическим излучением / С.Д. Захаров. – М., 2006. – 50 с. – (Препринт / Физический институт им. П.Н. Лебедева, ФИАН (РАН)).
6. **Овсянников, В.А.** О возможном механизме селективного воздействия лазерных излучений на раковые опухоли / В.А. Овсянников // V-я Всесоюзная конференция “Оптика лазеров” : сб. науч. ст. – СПб., 1987. – С. 314–316.
7. **Марочкин, А.В.** Внутрисосудистое лазерное облучение крови, механизмы взаимодействия и клиническое применение / А.В. Марочкин. – Минск : Полибиг, 1996. – 85 с.
8. **Залесская, Г.А.** Молекулярные механизмы действия фотогемотерапии / Г.А. Залесская, В.С. Улащик // Журнал прикладной спектроскопии. – 2009. – Т. 79. – № 1. – С. 51–75.
9. Экстракорпоральное облучение полного объема циркулирующей крови низкоэнергетическим гелий-неоновым лазером / В.И. Карапашев [и др.] // Вестн. Росс. Акад. мед.наук. – 1994. – № 4. – С. 51–54.
10. **Илларионов, В.Е.** Основы лазерной терапии / В.Е. Илларионов. – М. : Респект, 1992. – 128 с.
11. **Доровских, В.А.** Влияние низкоэнергетических лазеров на свободнорадикальное окисление липидов в микросомах печени и активность глюкозо-6-фосфатдегидрогеназы и каталазы эритроцитов / В.А. Доровских, Е.А. Бородин // Лазерная медицина. – 1998. – Т. 2. – № 3. – С. 16–20.
12. **Каплан, М.А.** Лазерная терапия – механизмы действия и возможности / М.А. Каплан // тезисы Межд. конф. “Laser Health’97”. – Москва, 1997. – С. 88–92.

13. *Захаров, С.Д.* Структурная модель неспецифического биостимулирующего действия лазерного излучения: роль слабопоглощающих фоторецепторов и альтерации структурного состояния растворов биомолекул / С.Д. Захаров // Действие электромагнитного излучения на биологические объекты и лазерная медицина / С.Д. Захаров. – Владивосток, 1989. – 235 с.
14. Изменение спектра поглощения монослоя живых клеток после низкоинтенсивного лазерного облучения / Т.Й. Кару [и др.] // ДАН. – 1998. – Т. 360. – № 2. – С. 267–270.
15. *Березин, Ю.Д.* Структурные особенности действия низкоинтенсивного лазерного излучения, переживающие ткани человека / Ю.Д. Березин, Р.А. Прочуханов, Т.И. Ростовцева // Тр. ДАН СССР. – 1983. – Т. 273. – № 3. – С. 734–736.
16. *Kaufmann, R.* Interaction of laser light with living systems: some base guide lines / R. Kaufmann // Proc. of the NATO Symp. on lasers in biol. and medicine. – New York, 1980. – Р. 69–75.
17. *Шинкаренко, Н.В.* Химические свойства синглетного молекулярного кислорода и значение его в биологических системах / Н.В. Шинкаренко, В.Б. Алексовский // Успехи химии. – 1982. – Т. 51. – С. 713–735.
18. *Гладких, С.П.* Триггерные молекулярные механизмы формирования биологических эффектов при низкоэнергетической лазерной терапии / С.П. Гладких, Ю.В. Алексеев, С.П. Истомин // Использование лазеров для диагностики и лечения заболеваний : сб. науч. ст. – М. : Изд-во ЛАС, 1996. – С.7–11.
19. *Залесская, Г.А.* Спектральные проявления фотопроцессов, инициированных световым воздействием различных длин волн на кровь *in vivo* / Г.А. Залесская, В.С. Улащик // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53. – № 3. – С. 60–63.
20. *Мельников, М.Я.* Экспериментальные методы химической кинетики. Фотохимия : учеб. пособие / М.Я. Мельников [и др.] – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2004. – 125 с.
21. *Быков, А.В.* Физические методы исследования : учеб. пособие / А.В. Быков, Г.Н. Демиденко, В.Ю. Долуда, Э.М. Сульман. – Тверь : ТГТУ, 2010. – 160 с.
22. *Зориков, Р.А.* Спектроскопический контроль эффективности лазеротерапии в комплексе интенсивной терапии послеоперационного периода у больных с токсическими зобом / Р.А. Зокиров, М.М. Самадов, А.А. Нурматов // Современная медицина и новые технологии. – Душанбе, 2010. – С. 35–38.
23. *Смирнова, М.С.* Способ определения индивидуальной чувствительности к низкоинтенсивному лазерному излучению (Патент RU 2098820) / М.С. Смирнова, А.С. Гордецов // Патенты и изобретений, зарегистрированных в РФ и СССР [Электронный ресурс]. – 2012. – Режим доступа : <http://www.findpatent.ru/patent/172/1725119.html>. – Дата доступа : 11.11.2013.

Поступила в редакцию 23.12.2013 г.

УДК 612.822:616-073.7

И.Я. КОЦАН, Н.А. КОЗАЧУК,
А.І. ПОРУЧИНСКИЙ, Т.В. КАЧИНСКАЯ, А.П. МОТУЗЮК

ЛОКАЛЬНАЯ И ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ АЛЬФА-АКТИВНОСТИ ИСПЫТУЕМЫХ С АНАЛИТИЧЕСКИМ И СИНТЕТИЧЕСКИМ КОГНИТИВНЫМ СТИЛЕМ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ КОНВЕРГЕНТНОГО И ДИВЕРГЕНТНОГО ТИПА

В статье представлены результаты изучения динамики показателей мощности и когерентности в состоянии покоя и умственной деятельности в трех поддиапазонах альфа-ритма ЭЭГ испытуемых мужского и женского пола с аналитическим и синтетическим когнитивным стилем. Отличия показателей мощности и когерентности, связанные с когнитивным стилем, проявляются только у женщин преимущественно в состоянии покоя с открытыми глазами и характеризуют общий уровень активации коры головного мозга: женщины с аналитическим когнитивным стилем характеризовались наибольшими значениями мощности альфа-1 и альфа-2-ритма в состоянии покоя с закрытыми глазами и наибольшей глубиной их депрессии во время спокойного бодрствования с открытыми глазами. Показано, что во всех частотных поддиапазонах альфа-ритма группа женщин с синтетическим когнитивным стилем характеризовалась отсутствием изменений показателей мощности на протяжении эксперимента. Для альфа-2 и альфа-3-диапазона в состоянии покоя с закрытыми глазами у испытуемых женского пола с аналитическим когнитивным стилем характерными были более тесные взаимосвязи лобных областей.

Введение

Нейрофизиологические механизмы интеллектуальной деятельности становились предметом исследования многих научных исследований. Но эти механизмы и сегодня остаются много в чем не понятными. Нужно отметить, что только незначительная часть работ посвящена исследованию влияния психологических особенностей человека на нейрофизиологические механизмы, лежащие в основе реализации сложных форм мыслительной деятельности. А исследования, связанные с выделением групп людей по когнитивному стилю, проведены на разных возрастных группах, часто без учета пола испытуемых, с разными методическими подходами. Поэтому полученные экспериментальные данные сегодня нельзя систематизировать и обобщить. В то же время даже имеющиеся разрозненные данные свидетельствуют о том, что стиль восприятия и обработки информа-

ции (когнитивный стиль) проявляется в паттернах ЭЭГ [1; 2]. Актуальность работ, направленных на изучение роли когнитивного стиля в физиологическом обеспечении интеллектуальной деятельности, заключается в том, что они смогут стать частью научной базы для более объективной диагностики психологических особенностей человека по показателям ЭЭГ и создадут возможность разработки научно обоснованной программы оптимального развития интеллектуального потенциала личности.

Цель настоящей работы заключалась в обнаружении особенностей локальной и пространственной синхронизации ЭЭГ у мужчин и женщин с аналитическим и синтетическим когнитивным стилем во время интеллектуальной деятельности конвергентного и дивергентного типа.

Материалы и методы

Все испытуемые предварительно были ознакомлены с условиями эксперимента и выразили добровольное согласие на участие в нем. Исследование проходило в два этапа. На первом по методике “Свободная сортировка объектов” у 200 студентов мужского и женского пола в возрасте 18–21 года был определен когнитивный стиль “Узкий-широкий диапазон эквивалентности”. В результате тестирования было выделено четыре группы испытуемых (26 мужчин – с аналитическим когнитивным стилем, 16 мужчин – с синтетическим когнитивным стилем, 24 женщины с аналитическим когнитивным стилем, 5 женщин с синтетическим когнитивным стилем), которые взяли участие во втором этапе исследования.

На втором этапе исследования регистрировалась электрическая активность коры головного мозга. Все испытуемые были здоровыми по данным соматического и психоневрологического обследования; правшами по самооценке и тестам.

Регистрацию электрической активности коры головного мозга осуществляли на аппаратно-программном комплексе “НейроКом”, разработанном научно-техническим центром радиоэлектронных медицинских приборов и технологий “ХАИ-Медика” Национального аэрокосмического университета “ХАИ”. ЭЭГ регистрировали монополярно от 19 отведений с использованием референтного объединенного ушного электрода.

Процедура исследования была такой: состояние покоя с закрытыми глазами (60 с), состояние покоя с открытыми глазами (60 с), состояние покоя с открытыми глазами с мысленной настройкой на умственную деятельность (60 с), выполнение задания конвергентного типа (120 с), пауза (15 с), выполнение задания дивергентного типа (120 с).

Задание конвергентного типа было разработано на основе теста интеллектуальной лабильности В.Г. Козловой [3]. Задание дивергентного типа было выбрано из книги Г.С. Альтшуллера [4]: “В Бангладеш растет 13 млн финиковых пальм. За сезон каждая пальма может дать 240 л сока,

из которого потом изготавлиают пальмовый сахар. Но для сбора этого сока необходимо сделать надрез на стволе под самой кроной на высоте 20 м. Предложите как можно больше способов, как можно сделать такой надрез”.

Результативность умственной деятельности при анализе ЭЭГ-данных не учитывалась.

Для каждого отведения методом быстрого преобразования Фурье были получены значения мощности (мкВ^2) и когерентности (r) в частотных поддиапазонах альфа-ритма, границы которых определялись на основе индивидуальной частоты альфа-ритма каждого испытуемого [5].

Для показателей мощности и когерентности был проведен многофакторный дисперсионный анализ в каждом частотном диапазоне с учетом таких факторов: пол, отведение (19 отведений), экспериментальная ситуация (состояния покоя с закрытыми глазами, состояние покоя с открытыми глазами, выполнение задания конвергентного типа, выполнение задания дивергентного типа), полушарие (левое, правое), тип когерентных связей (левополушарные, правополушарные, межполушарные), когнитивный стиль (аналитический, синтетический).

Достоверность внутригрупповых отличий определяли с помощью t -критерия Стьюдента и критерия Вилкоксона; межгрупповых отличий – с помощью парного критерия t -Стьюдента и критерия Манна-Уитни.

Результаты исследования и их обсуждение

Анализ взаимодействия факторов “пол” и “когнитивный стиль – узкий-широкий диапазон эквивалентности” и “экспериментальная ситуация” в альфа-1-диапазоне показал, что группа женщин с аналитическим когнитивным стилем в состоянии покоя с закрытыми глазами имела самые высокие значения мощности ЭЭГ не только в сравнении с женщинами с синтетическим когнитивным стилем, но и с мужчинами обеих групп. Кроме того, эти же испытуемые характеризовались большими значениями мощности сравнительно с женщинами с синтетическим когнитивным стилем во время настройки на умственную деятельность и во время выполнения задания конвергентного типа.

Относительно динамики показателей мощности нужно отметить группу женщин с синтетическим когнитивным стилем. В этой группе не была выражена депрессия альфа-1, 2, 3-ритма в состоянии покоя с открытыми глазами, что и приводило к отсутствию каких-либо выраженных изменений мощности на протяжении исследования (рис. 1).

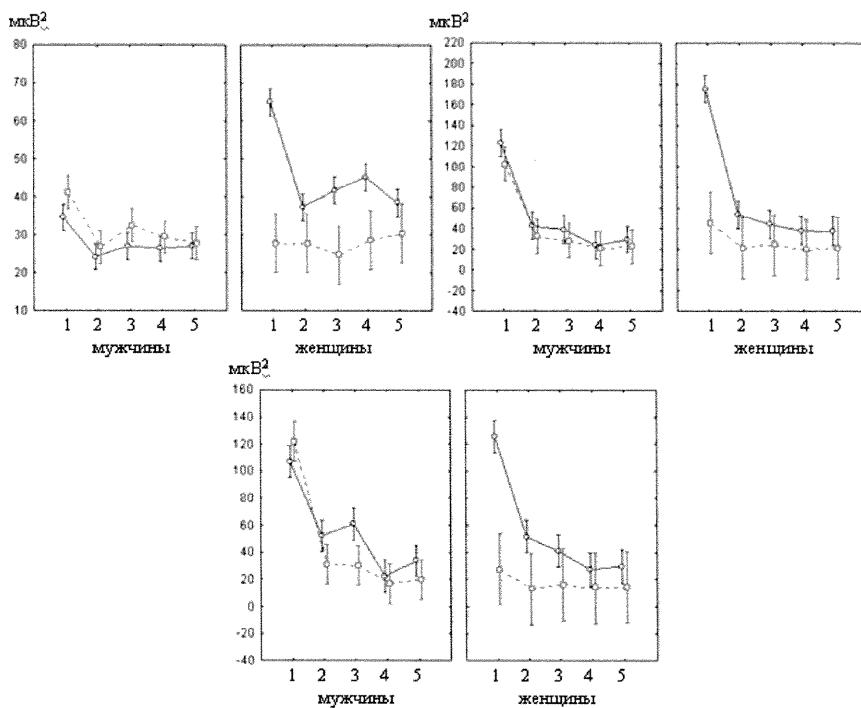


Рис. 1. Пример взаимодействия факторов “экспериментальная ситуация”, “пол” и “когнитивный стиль – узкий-широкий диапазон эквивалентности” для показателей мощности в диапазоне альфа-ритма.

Сплошная линия – “аналитики”, пунктирная – “синтетики”.

Экспериментальная ситуация: 1 – состояние покоя с закрытыми глазами, 2 – состояние покоя с открытыми глазами, 3 – состояние покоя с открытыми глазами с настраиванием на умственную деятельность, 4 – выполнение задания конвергентного типа, 5 – выполнение задания дивергентного типа.

Верхний рисунок слева – альфа-1-ритм, верхний рисунок справа – альфа-2-ритм, нижний рисунок – альфа-3-ритм

Интересно отметить, что уменьшение мощности альфа-1 и альфа-2-ритма во время перехода от состояния покоя с закрытыми глазами к спокойному бодрствованию с открытыми глазами происходило в трех группах практических во всех отведениях. И только в группе женщин с синтетическим когнитивным стилем депрессия альфа-1-ритма была выражена слабо; депрессия альфа-2-ритма доходила до уровня статистически достоверной значимости в половине отведений. В альфа-3-диапазоне в группах женщин и мужчин с аналитическим когнитивным стилем наблюдалось генерализированное уменьшение показателей мощности, а в группах “синтетиков” уменьшение мощности достигало уровня статистически достоверной значимости только в отдельных областях коры (рис. 2).

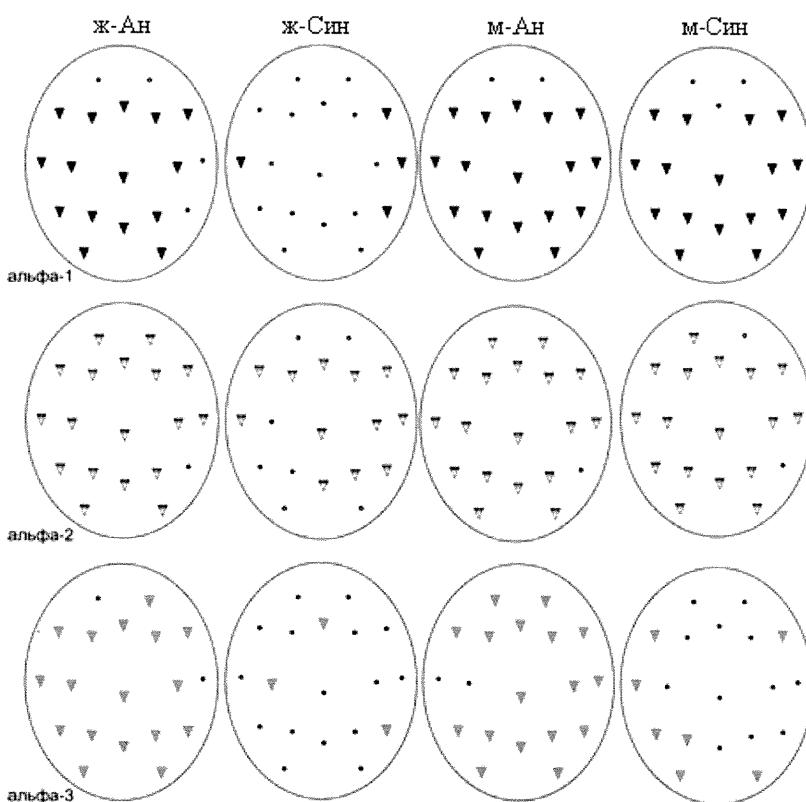


Рис. 2. Изменения мощности альфа-1, альфа-2 и альфа-3-ритма ЭЭГ во время перехода от состояния покоя с закрытыми глазами к состоянию спокойного бодрствования с открытыми глазами у испытуемых с аналитическим когнитивным стилем женского (ж-Ан) и мужского (м-Ан) пола и синтетическим когнитивным стилем женского (ж-Син) и мужского (м-Син) пола.

Многофакторный анализ показал, что среди испытуемых женского пола во всех частотных поддиапазонах альфа-ритма у лиц с аналитическим когнитивным стилем когерентность была больше, чем у лиц с синтетическим когнитивным стилем. Среди мужчин в альфа-1 и альфа-2 уровень когерентности был выше у испытуемых с синтетическим когнитивным стилем, в альфа-3 – с аналитическим. Причем, среди лиц с аналитическим когнитивным стилем во всех частотных поддиапазонах альфа-ритма коэффициенты когерентности у женщин были выше, чем у мужчин. Среди лиц с синтетическим когнитивным стилем в альфа-1, альфа-2 и альфа-3-диапазоне половых отличий в показателях когерентности не обнаружено.

Для уточнения характера и топографии этих отличий нами был учтен фактор “отведение”. Статистически достоверные различия коэффициентов когерентности были выявлены только в состоянии покоя. Причем, у женщин отличия, связанные с аналитическим и синтетическим когнитивным стилем, были выражены больше, чем у мужчин. Для альфа-2 и альфа-3-диапазона в состоянии покоя с закрытыми глазами у испытуемых женского

пола с аналитическим когнитивным стилем характерными были более тесные взаимосвязи в основном лобных областей. Такая картина пространственного взаимодействия была дополнена в альфа-2-диапазоне связями с центральными областями и связями теменных и затылочных отведений в каждом полушарии, а в альфа-3-диапазоне – только с затылочными (рис. 3).

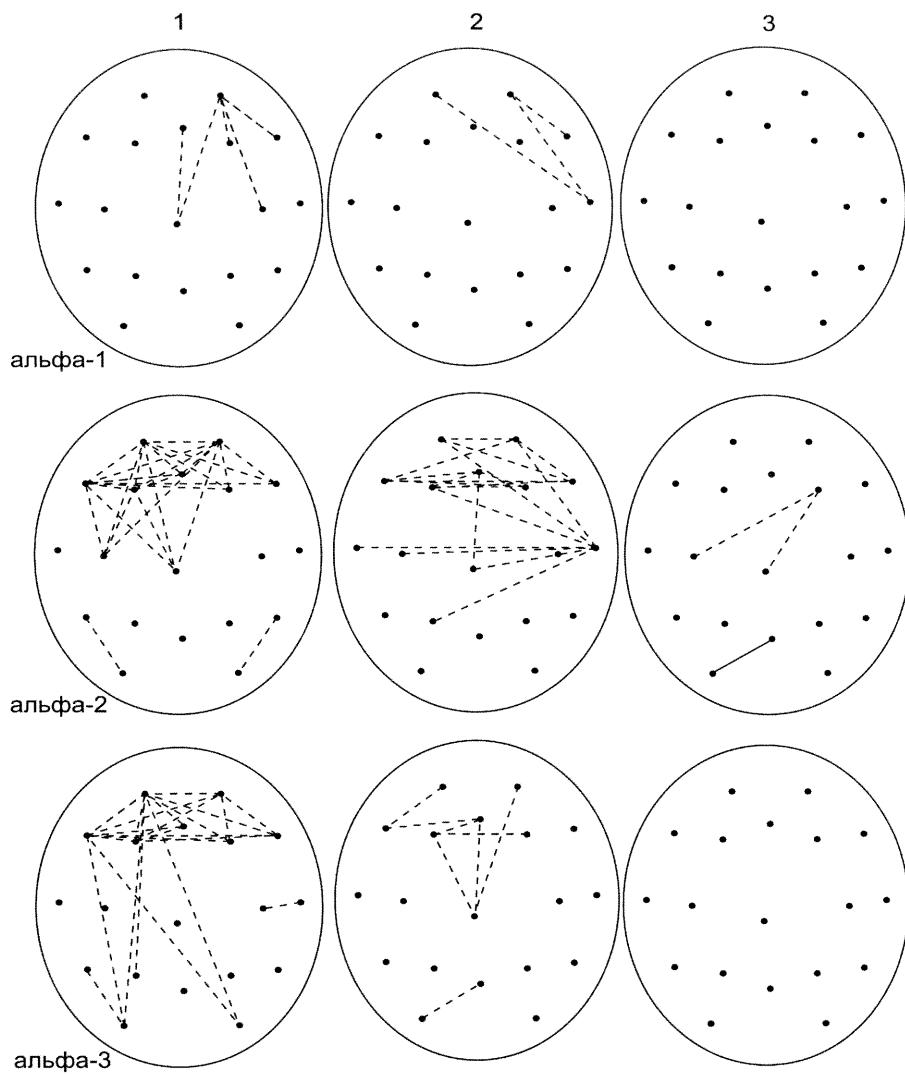


Рис. 3. Межгрупповые отличия когерентности в альфа-диапазоне у женщин.
Сплошной линией обозначены связи между отведениями, коэффициенты когерентности между которыми больше у испытуемых с синтетическим когнитивным стилем; пунктирной – с аналитическим. 1 – состояние покоя с закрытыми глазами, 2 – состояние покоя с открытыми глазами, 3 – состояние покоя с открытыми глазами с настраиванием на умственную деятельность

У испытуемых мужского пола только в альфа-2-диапазоне было выявлено несколько отведений, коэффициенты когерентности между кото-

рыми статистически достоверно отличались у лиц с разными когнитивными стилями. Так, в состоянии покоя с открытыми глазами у мужчин-«аналитиков» более тесной была связь между задне-височкой и затылочной областями правого полушария, а у мужчин-«синтетиков» – между латеральной лобной и задней лобной левого полушария. Во время настраивания на умственную деятельность у мужчин с синтетическим когнитивным стилем большими были связи между отведениями F7-T5, T3-Pz i T3-P3.

Подводя итоги результатов, полученных в нашем исследовании, стоит отметить факт зависимости между показателями альфа-активности и когнитивным стилем испытуемых. В частности, было установлено, что женщины с аналитическим когнитивным стилем характеризовались наибольшими значениями мощности альфа-1 и альфа-2-ритма в состоянии покоя с закрытыми глазами и наибольшей глубиной депрессии во время спокойного бодрствования с открытыми глазами. Еще в работе A. Glass i R.J. Riding [6] было показано, что по паттернам ЭЭГ, в частности, по показателям альфа-активности, можно прогнозировать стилистические различия. Авторы считают, что более низкая альфа-активность связана с аналитическим стилем. В этом плане наши исследования подтверждают ранее полученные результаты.

В литературе [7] имеются данные о лучшем развитии креативных способностей у испытуемых с синтетическим когнитивным стилем. Мы полагали, что такого рода связи могут быть обнаружены для показателей продуктивности конвергентного и дивергентного мышления. В связи с этим нами был проведен корреляционный анализ показателей продуктивности выполнения заданий двух типов и количественных показателей, по которым определялся когнитивный стиль. Было установлено, что такая взаимосвязь ($r=0,39$) была достоверной только для испытуемых мужского пола и только относительно продуктивности выполнения дивергентного задания. Полученный коэффициент корреляции свидетельствовал о том, что продуктивность дивергентного мышления выше у мужчин с аналитическим когнитивным стилем. На наш взгляд, этот факт является подтверждением того, что представители каждого стиля имеют преимущества в тех ситуациях, в которых их индивидуальные познавательные качества способствуют эффективному поведению [8], и, очевидно, выбору эффективной мыслительной стратегии. А судя по полученным нами данным, различия ЭЭГ-показателей между «аналитиками» «синтетиками» в большей мере проявляются не в процессе самой умственной деятельности, а в состоянии покоя, которое можно трактовать как преднастройку к деятельности.

Выводы.

1. Выявленные у испытуемых с аналитическим и синтетическим когнитивным стилем различия показателей мощности проявляются преимущественно в состоянии покоя с открытыми глазами и

характеризуют общий уровень активации коры головного мозга. Женщины с аналитическим когнитивным стилем характеризовались наибольшими значениями мощности альфа-1 и альфа-2-ритма в состоянии покоя с закрытыми глазами и наибольшей глубиной их депрессии во время спокойного бодрствования с открытыми глазами.

2. Во всех частотных поддиапазонах альфа-ритма у женщин с синтетическим когнитивным стилем на протяжении эксперимента динамика показателей мощности была наименее выражена в сравнении с другими группами испытуемых.
3. Для альфа-2 и альфа-3-диапазона в состоянии покоя с закрытыми глазами у испытуемых женского пола с аналитическим когнитивным стилем характерными были более тесные взаимосвязи преимущественно лобных областей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *McKay, M.T.* Cognitive style and recall of text: an EEG analysis / M.T. McKay, I. Fischler, B.R. Dunn // Learning and Individual Differences. – 2002. – V. 14. – № 1. – P. 1–21.
2. *Разумникова, О.М.* Особенности структуры интеллекта в пространственно-временных особенностях фоновой ЭЭГ [текст] / О.М. Разумникова // Физиология человека. – 2003. – Т. 29. – № 5. – С. 115–122. – Библиограф.: с. 122.
3. *Козлова, В.Т.* Разработка методик выявления лабильных нервных процессов в мыслительно-речевой деятельности : автореф. дис. ... канд. бiol. н. / В.Т. Козлова – М., 1973. – 26 с.
4. *Альтшуллер, Г.С.* Найти идею: введение в теорию решения изобретательских задач [текст] / Г.С. Альтшуллер ; отв. ред. А.К. Дюнин. – Новосибирск : Наука. Сиб. отд., 1986. – 209 с. – Список лит.: с. 208–209 (17 назв.).
5. *Klimesch, W.* EEG alpha and theta oscillations reflect cognitive and memory performance: a review and analysis / W. Klimesch // Brain Res. Rev. – 1999. – V. 29(2–3). – P. 16–195.
6. *Glass, A.* EEG differences and cognitive style / A. Glass, R.J. Riding // Biological Psychology. – 1999. – V. 51. – № 1. – P. 23–41.
7. *Холодная М.А.* Когнитивные стили: О природе индивидуального ума / М.А. Холодная. – [2-е изд.]. – СПб. : Питер, 2004. – 384 с. : ил. – (Серия “Мастера психологии”) ISBN 5-469-00128-8
8. Научно-теоретические подходы к исследованию когнитивных стилей в зарубежной и отечественной науке : (образовательный портал) [Электронный ресурс] / Н.А. Шупта. – Режим доступа : <http://www.spf.kemsu.ru/portal/psy> 2004/1.4.htm

Поступила в редакцию 02.01.2014 г.

УДК 913:379.85

Т.И. БОЖУК

ОЦЕНКА РЕКРЕАЦИОННО-ТУРИСТИЧЕСКИХ ДЕСТИНАЦІЙ ДЛЯ ПОТРЕБНОСТЕЙ АКТИВНОГО ОТДЫХА І СТАЦІОНАРНОЇ РЕКРЕАЦІЇ (НА ПРИМЕРЕ РЕГІОНАЛЬНОГО ЛАНДШАФТНОГО ПАРКА “Знесиння”, ЛЬВОВ, УКРАИНА)

В статье рассмотрены вопросы организации и функционирования рекреационно-туристических дестинаций для потребностей активного отдыха и стационарной рекреации. Проведен анализ составляющих элементов дестинации: ресурсного и инфраструктурного обеспечения, дополнительных услуг, управлческой деятельности, привлекательности (как интегрированного показателя перечисленных элементов) и потребителя. На примере Регионального ландшафтного парка “Знесиння” выполнена экспертная оценка территории и предложены рекомендации его дальнейшего развития для целей туризма и рекреации.

Введение

Изучение территорий, предназначенных для целей рекреации и туризма, продолжают оставаться актуальными. Однако на сегодняшний день недостаточно владеть информацией о ресурсных возможностях рекреационно-туристических территорий, необходимо использовать комплексный подход к их исследованию, применяя концепцию дестинации.

Организация рекреационно-туристических дестинаций является новым межотраслевым научным направлением, которое развивается в конструктивной географии.

Понятие “дестинация” (как место, местность, географическая территория, где происходит потребление туристического продукта) в мире не новое: в зарубежной литературе употребляется со 2-й пол. XIX в., на постсоветском пространстве – занимает ключевое место в работах А. Зорина и И. Зорина (Москва, Россия), А.И. Таракенка (Минск, Беларусь), О.А. Любичевой и Т.И. Ткаченко (Киев, Украина) и др. Кроме того, это понятие принадлежит к 20 базовым понятиям в сфере туризма, соответственно правовым документам в туризме UNWTO и стран-соседей Украины, а также используется в отраслевом стандарте по подготовке специалистов по туризму.

По нашему мнению, рекреационно-туристическая дестинация (РТДе) – это географическая территория, которая удовлетворяет (за счет своей привлекательности) потребности туристов/рекреантов путем оказания разнообразных услуг, условиями ресурсного и инфраструктурного обеспечения, а также управлением. Различаем три типа (РТДе): для потреб-

ностей активного отдыха и стационарной рекреации, для потребностей лечения и оздоровления, для потребностей историко-культурного и духовного познания.

Поэтому, цель публикации состоит в изучении рекреационно-туристической дестинации для потребностей активного отдыха и стационарной рекреации на примере одного из региональных ландшафтных парков Украины, используя экспертный метод оценки. При достижении поставленной цели были выполнены следующие задачи: 1) проанализированы составляющие рекреационно-туристических дестинаций для потребностей активного отдыха и стационарной рекреации; 2) проведена экспертная оценка на примере регионального ландшафтного парка “Знесиння” (Львов, Украина).

Основная часть

Учитывая опыт в области исследования дестинаций зарубежными (А. Зорин и И. Зорин [1], А.И. Тарасенок [2]) и отечественными учеными (О.А. Любичева [3] и Т.И. Ткаченко [4]), нами разработана теоретическая модель рекреационно-туристической дестинации, структурными элементами которой являются ресурсное и инфраструктурное обеспечение, перечень услуг, управлеченческая деятельность, привлекательность (как интегрированный показатель перечисленных элементов), что имеет определяющее влияние на потребителя.

Потребитель занимает определяющее место в системе, продуцирует ее дальнейшее развитие соответственно необходимости удовлетворения рекреационно-туристических потребностей.

Ресурсное обеспечение является тем субстратом, который определяет развитие территорий в целях туризма и рекреации.

Инфраструктурное обеспечение состоит из трех уровней: общего, общетуристического и конкретно-дестинационного.

Перечень услуг определяется стадией развития РТДе, ее ресурсно-инфраструктурными возможностями и влияет на интенсивность туристических потоков.

Управлеченческая деятельность является важной составляющей РТДе, так как она формирует политику дальнейшего развития и определяет возможности инвестиционной деятельности.

Привлекательность, как показатель синтеза всех выше изложенных элементов, формирует современный имидж РТДе.

Разновидности рекреационно-туристических дестинаций, на наш взгляд, определяются потребностями и мотивами потребителя, целями деятельности, а также приурочены к категориям земель по функциональному предназначению (соответственно главы 10 Земельного кодекса Украины). Таким образом, различаем рекреационно-туристические дестинации для потребностей:

- активного отдыха и стационарной рекреации (приурочены к землям природоохранного и рекреационного назначения);

- лечения и оздоровления (приурочены к землям оздоровительного назначения);
- историко-культурного и духовного познания (приурочены к землям историко-культурного назначения).

Предложенная классификация рекреационно-туристических дестинаций является логичной, но поскольку разные дестинации (виды или типы) по-разному реагируют на те или иные вызовы глобализации, то, соответственно, требуют различных подходов к обоснованию их развития.

Рекреационно-туристические дестинации для потребностей активного отдыха и стационарной рекреации подразделяем соответственно их использования зимой (катание на лыжах, сноубордах на территории горнолыжных туристических центров и курортов), летом (туристические походы, активные виды туризма на привлекательных территориях или на объектах природно-заповедного фонда в пределах зон регулируемой и стационарной рекреации), а также круглогодичной стационарной рекреации на территории зеленых зон города или объектов природно-заповедного фонда.

Объектом исследования является региональный ландшафтный парк (РЛП) "Знесиння", который находится в северо-восточной части города Львова (Украина) и функционирует с 1993 г. Несмотря на стремительные процессы урбанизации, в центре города удалось сохранить уникальные памятники природы, истории и культуры. Эта зеленая жемчужина Львова занимает площадь 312 га, имеет протяженность с запада на восток – 3,3 км, с севера на юг – 1,4 км. Его компактная форма, большой размер и значительный периметр определяют решающее экологическое и эстетическое влияние на центральную часть города.

Это единственный в Украине РЛП, который находится в пределах города, что оказывает как положительное (прекрасные рекреационные возможности для жителей города), так и отрицательное (подчинение и финансирование из местного городского бюджета) влияние на функционирование парка.

РЛП "Знесиння" выполняет природоохранную, оздоровительную, научную, рекреационную, историко-культурную и познавательную функции. На территории РЛП "Знесиння" выделяют такие функциональные зоны: заповедную, регулируемой рекреации, стационарной рекреации и хозяйственную зону [5]. Проведенные исследования касались зон регулируемой и стационарной рекреации РЛП "Знесиння". Зона регулируемой рекреации занимает площадь 47,4 га (15,2 %) и охватывает лесную часть территории северных склонов Знесинской гряды, локальные участки северных склонов долины потока Хомец и склоны горы Льва. В зону стационарной рекреации (76,6 га – 24,6 %) входит Музей архитектуры и быта "Шевченковский гай", спортивная база "Динамо" с горнолыжной трассой, гора Стефана, гора Старая стрельница, пруд в малом карьере, большой карьер и историческое ядро Старого Знесиння и Старых Крив-

чиц. Кроме указанных выше объектов, в состав РЛП входят жилые кварталы, промышленные объекты, участки бывших карьеров, старое кладбище, открытые зеленые пространства, пруды, родники, ручьи, лесные массивы, комплексы и отдельные памятники природы, истории и культуры. Такое разнообразие природных составляющих ландшафта обусловлено формированием и развитием здесь уникальной микроклиматической зоны, возникшей на границе низин русла Полтвы и уступов Подольской возвышенности [5].

На территории РЛП существуют ценные природоохранные объекты: ботанические памятники (горы Хомец и Льва), геолого-геоморфологические памятники (горы Баба и Льва). В рекреационном аспекте он соединяет два излюбленных места отдыха горожан: парк “Высокий Замок” и Музей народной архитектуры и быта (Шевченковский гай).

Таким образом, РЛП “Знесиння” владеет природными и культурно-историческими ресурсами. Именно здесь находятся наивысшие точки города, с которых открывается панорама Львова и лежащие вблизи живописные ландшафты.

Вопросы зеленых зон урбанизированных территорий систематически привлекают внимание ученых, поскольку эти рекреационные территории должны функционировать как специфические территориально-хозяйственные образования с соответствующим организационно-экономическим механизмом их регулирования и природоохранным менеджментом. Вопросу рекреационной оценки территорий посвящены работы литовских ученых К. Эрингиса и А. Будрюнаса [6], ученых Киевского национального университета им. Т. Шевченко М. Гродзинского и А. Савицкой [7], коллектива авторов Донецкого института туристического бизнеса [8] и Института Региональных исследований НАНУ [9] и др. М. Элбакидзе, А. Завадович, Т. Ямелинець разработали методику и выполнили инвентаризацию природно-территориальных комплексов РЛП “Знесиння” [9]; И. Койнова и А. Завадович рассматривали особенности функционирования и возможности сбалансированного развития парка [10]; есть попытки формирования экотуристических троп и познавательно-оздоровительно-туристических маршрутов на территории РЛП “Знесиння”; этому РЛП посвящен отдельный номер “Галицкой брамы” [11]; издано информационно-образовательный календарь и картосхему, его проблематика неоднократно поднималась на научных форумах различного ранга, в частности, изданы материалы международной конференции “Зеленые городские зоны – от проблем к решениям” [5].

Исследование оценки территории РЛП “Знесиння” для рекреационно-туристических целей базируется на методике, предложенной учеными Донецкого института туристического бизнеса [8]. Оценка рекреационных территорий производится с использованием оценочных таблиц (в баллах) и метода экспертной оценки, что предусматривает определение экспертом определенного количества баллов (1, 2 или 3 балла) для того или иного показателя. Все показатели объединены в тематические блоки

(“Рельеф”, “Водные объекты”, “Растительный покров”, “Эстетический потенциал”, “Культурно-просветительские объекты”, “Учреждения отдыха”, “Культовые сооружения”, “Техногенные показатели”). Например, в блоке “Рельеф”, оценивались такие параметры рекреационной территории, как глубина расчленения овражно-балочной сетью, густота расчленения, крутизна склонов, эстетическая ценность и панорамность.

В исследовании приняло участие 5 экспертов: сотрудники РЛП “Знесиння” (2 человека), молодые ученые (2 человека) и автор этой статьи.

Для того чтобы определить общую оценку рекреационной территории, эксперты прежде всего произвели оценку каждого блока показателей и рассчитали по формуле

$$A_i = \frac{\sum x_i}{n}, \quad (1)$$

где A_i – оценка рекреационного блока в баллах,

x_i – оценка показателя в баллах (степень благоприятности),

n – количество показателей, участвующих в оценке.

Общая оценка территории состоит из средних оценок по блокам и рассчитывается по формуле:

$$O = \frac{\sum A_i}{N}, \quad (2)$$

где O – интегральная оценка территории в баллах,

A_i – оценка рекреационного блока в баллах,

N – количество блоков, участвующих в оценке.

Результаты экспертной оценки рекреационной территории (РЛП “Знесиння”) приведены в таблице.

**Результаты оценки территории РЛП “Знесиння” разными экспертами
(в баллах)**

Эксперты	Блоки								Общая оценка
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	15	26	33	14	27	16	25	6	20,25
2	13	18	35	19	21	17	31	13	20,88
3	12	18	24	18	23	13	22	15	18,13
4	15	26	33	19	27	16	25	16	22,13
5	11	24	30	17	24	18	28	14	19
Максимально-возможное количество баллов по блокам	15	27	45	21	30	24	33	27	

Как показывают полученные результаты оценки территории РЛП “Знесиння” (таблица), наименьшее общее количество составляет 19 баллов, максимальное – 22,13 баллов. Эти показатели проанализированы, и определены те, за счет которых возможны изменения с целью повышения качества территории для целей туризма и рекреации. Таким образом, следовало бы улучшить результаты блока 6 “Учреждения отдыха”

путем обеспечения рекреантов заведениями питания и стационарными объектами для проведения досуга.

Заключение

В данной статье рассмотрены вопросы организации и функционирования рекреационно-туристических дестинаций для потребностей активного отдыха и стационарной рекреации. Проведен анализ составляющих элементов дестинации: ресурсного и инфраструктурного обеспечения, дополнительных услуг, управлеченческой деятельности, привлекательности (как интегрированного показателя перечисленных элементов) и потребителя. Рассмотрены особенности структуры и функционирования РЛП "Знесиння". Выполнена экспертная оценка этой рекреационной территории и разработаны некоторые предложения по усовершенствованию туристической инфраструктуры с целью улучшения условий рекреационной деятельности.

Таким образом, РЛП "Знесиння", благодаря своим уникальным природным и культурно-историческим ресурсам, а также удобному размещению в пределах пешеходной доступности от центральной части города Львова, будет и впредь оставаться излюбленным местом отдыха горожан и гостей.

Дальнейшие исследования следует продолжать в направлении усовершенствования методики оценки рекреационных территорий, что обусловлено различными особенностями формирования, развития и функционирования рекреационно-туристических дестинаций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Зорин, А.** Дестинация : монография / А. Зорин, И. Зорин. – М. : РМАТ, 2009. – 90 с.
2. **Тарасенок, А.И.** Формирование дестинаций культурного туризма путем внедрения карт-системы продвижения регионального турпродукта / А.И. Тарасенок // Вісник ДІТБ. – 2011. – № 15. – С. 245–251.
3. **Любіцєва, О.О.** До питання термінології в туризмі / О.О. Любіцєва // Географія та туризм. – 2010. – № 3. – С. 7–10.
4. **Ткаченко, Т.І.** Сталий розвиток туризму : теорія, методологія, реалії бізнесу : монографія / Т.І. Ткаченко. – К. : КНТЕУ, 2006. – 537 с.
5. Зелені міські зони – від проблем до розв'язків : матеріали Міжнародної конференції. – Львів, 2005. – 238 с.
6. **Эрингис, К.И.** Сущность и методика детального эколого-эстетического исследования пейзажей / К.И. Эрингис, А.-Р.А. Будрюнас // Экология и эстетика ландшафта. – Вильнюс : Минтис, 1975. – С. 107–160.
7. **Гродзинський, М.Д.** Естетика ландшафту : навч. посібн. / М.Д. Гродзинський, О.В. Савицька. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2005. – 183 с.
8. Методология оценки рекреационных территорий / В.Ф. Данильчук [и др.]. – Донецк : ДІТБ, 2003. – 197 с.
9. **Кравців, В.** Науково-методичні засади реформування рекреаційної сфери / В. Кравців [та ін.]. – Львів : НАН України. ІРД НАН України, 1999. – 78 с.

10. Елбакідзе, М. Методичні аспекти інвентаризації зелених зон урбанізованих територій (на прикладі регіонального ландшафтного парку "Знесіння") / М. Елбакідзе, О. Завадович, Т. Ямелинець // Вісник Львівського університету, Серія географічна, 2005. – Вип. 32. – С. 96–109.
11. Койнова, І. Особливості функціонування та можливості збалансованого розвитку регіонального ландшафтного парку "Знесіння" / І. Койнова, О. Завадович // Вісник Львівського університету: Серія географічна, 2005. – Вип. 32. – С. 121–129.
12. Галицька брама. – № 6(30) червень. – 1997. – Видавництво центр Європи. – 40 с.

Поступила в редакцію 10.12.2013 г.

УДК 556.16 + 91:004 (043.3)

Е.Г. КОЛЬМАКОВА, С.В. ГРИБ

ГИС-МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДНОГО СТОКА РЕК БЕЛАРУСИ В УСЛОВИЯХ ИЗМЕНЕНИЯ КЛИМАТА

Статья посвящена проблеме влияния климатических изменений на поверхностные водные ресурсы Беларуси. Приведены результаты исследования изменения водного стока малых и больших рек страны в условиях потепления климата в последнюю четверть века. Выполнен сравнительный анализ параметров годового объема стока рек за два периода (до потепления и в период потепления) в экстремальные по водности годы. Для этого предварительно посредством аналитических методов установлены годы с минимальной и максимальной водностью за весь период инструментальных наблюдений. Впервые выполнено ГИС-моделирование динамики водного стока рек в условиях изменения климата для территории Беларуси и выявлены ее региональные различия в разрезе маловодных и многоводных лет.

Глобальные процессы изменения климата обуславливают необходимость оценки их влияния на формирование водных ресурсов Беларуси. Изучение региональных особенностей колебания климата и условий формирования речного стока позволили выявить общие тенденции изменения годового и внутригодового распределения водности рек страны в средние по водности годы [1-3]. Однако с практической точки зрения наибольший интерес представляет изучение изменения водного стока в годы с экстремальной водностью, необходимые при прогнозировании наводнений, расчетах минимального стока и пр. Задача оценки состояния природных объектов в изменяемых условиях среды в полной мере может быть решена путем использования геоинформационных технологий. Главенствующую роль здесь играет геопространственный анализ

территории, с помощью которого реализуется комплексный подход к решению вопросов мониторинга речных систем. Как показывает практика, созданные в результате гидрологического ГИС-моделирования геоданные успешно применяются для решения задач научного и прикладного характера [4]. Этим продиктована актуальность выполненного исследования, цель которого заключалась в выявлении пространственно-временных закономерностей изменения водного стока рек Беларуси в многоводные и маловодные годы в условиях изменения климата посредством ГИС-технологий.

Методика исследования

В основе исследования лежат обработанные авторами данные инструментальных наблюдений Департамента по гидрометеорологии Министерства природных ресурсов и охраны окружающей среды за многолетний период с момента начала ведения регулярных наблюдений по настоящее время (1882–2010 гг.). Объектом исследования выступает годовой объем водного стока в 25 створах в бассейнах рек Западной Двины, Немана, Западного Буга, Днепра Западной Двины и Припяти, с продолжительными рядами гидрологических наблюдений и обеспеченных синхронной метеорологической информацией. В целях репрезентативности выбраны следующие посты: р. Западная Двина – Витебск, р. Западная Двина – Полоцк, р. Неман – Столбцы, р. Неман – Белица, р. Неман – Гродно, р. Днепр – Орша, р. Днепр – Могилев, р. Днепр – Жлобин, р. Березина – Борисов, р. Березина – Бобруйск, р. Сож – Гомель, р. Припять – Мозырь, р. Дисна – Шарковщина, р. Полота – Янково, р. Щара – Слоним, р. Свислочь – Сухая Долина, р. Нарочь – Нарочь, р. Лесная – Каменец, р. Пульва – Высокое, р. Беседь – Светловичи, р. Бобр – Куты, р. Ясельда – Сенин, р. Птич – Дараганово, р. Птич – Лучицы, р. Оресса – Андреевка. Перечисленные выше створы относятся к шести гидрологическим районам – Западно-Двинскому, Неманскому, Верхнеднепровскому, Вилейскому, Центральноберезинскому и Припятскому. Пропущенные наблюдения в рядах восстановлены по методу аналогов. По данным среднегодовых расходов воды рассчитаны показатели годового объема стока. В целях исследования привлекались данные по среднегодовым значениям температур и атмосферных осадков на 20 метеорологических станциях (МС) за период 1882–2010 гг.

Основой приемов расчета стока при наличии репрезентативных рядов наблюдений являются кривые обеспеченности, параметры которой были рассчитаны с использованием программного комплекса “Аналитическая кривая обеспеченности”. Кривые обеспеченности построены с использованием метода моментов. На основе анализа кривых с рассчитанной процентной обеспеченностью определены годы с максимальной и минимальной водностью.

Анализ гидрологических и метеорологических параметров выполнен в разрезе экстремальных по водности лет (многоводных и маловодных)

для двух периодов: до потепления климата (с начала ведения регулярных гидрометеорологических наблюдений в 1882 г. по 1988 г.) и в период потепления (с 1989 по 2010 гг.) [5].

С целью оценки пространственной неоднородности изменения водного стока по всей территории Беларуси и интерпретации полученных результатов исследования было выполнено ГИС-моделирование на основе многолетних данных метеорологических и гидрологических створов. Для достижения поставленной цели использовалось программное обеспечение ArcMap (ArcGIS © ESRI). Триальная версия программы позволяет использовать все функции программного обеспечения в течение 60 дней.

Для формирования «подложки» картосхем использовались данные открытого доступа из сети Интернет. По имеющимся координатам гидрологических постов (система координат World Geodetic System 1984 (WGS-84)), были получены точки створов в формате shape. Информация по показателям максимального и минимального годового стока была связана с shape-файлами гидрологических постов.

Для интерполяции данных по стоку использовался метод обратно-взвешенных расстояний – IDW (ОВР). Выходное значение для ячейки, вычисляемое с использованием метода ОВР, ограничено диапазоном применяемых для интерполяции значений. Инструмент ОВР использует метод интерполяции, оценивающий значения ячеек посредством усреднения значений образцов точек данных рядом с каждой обрабатываемой ячейкой. Чем ближе оценивается точка к центру ячейки, тем больше влияния, т. е. веса, она имеет в процессе усреднения [6]. Выходное значение для ячейки ограничено диапазоном применяемых для интерполяции значений. В качестве входных точечных объектов использовались данные по максимальному и минимальному объему стока, представленные в виде атрибутивной таблицы shape-файла. Количество повторов интерполяции соответствует коэффициенту 3. Входные линейные объекты барьеров (линейные объекты, которые могут использоваться в качестве разрыва или границы) для построения картосхем не использовались. Выходной растр представляет интерполированное изображение изменения максимального и минимального объема стока в период потепления для исследуемых створов. Для оформления картосхем использовались цветовые палитры ArcGIS ArcMap.

В результате выполненного ГИС-моделирования впервые для территории Беларуси получены картосхемы изменения водного стока рек в маловодные и многоводные годы, что позволило оценить его трансформацию в масштабах страны.

Результаты и их обсуждение

В период потепления на большинстве МС зафиксирован рост минимальных значений среднегодового количества атмосферных осадков в среднем на 10%. Наибольшее изменение минимального количества осадков зафиксировано в бассейне р. Припять на МС Мозырь и Пинск, где

рост составил 40 и 51%, и в бассейне р. Западная Двина – на МС Витебск и Полоцк (35 и 40% соответственно).

Общеизвестно, атмосферные осадки являются главным фактором формирования речного стока. Выполненный авторами анализ установил значимые коэффициенты корреляции годового стока и годовых сумм осадков (от $r=0,61$ для рек бассейна Днепр до $r=0,68$ для бассейна р. Западная Двина). При этом в большинстве случаев значимые коэффициенты зафиксированы для створов крупных рек. В бассейне р. Припять, где естественное формирование водного стока сильно нарушено осушительной мелиорацией, корреляционная зависимость водного стока и сумм осадков прослеживается слабее.

На территории республики фиксируемое с 1989 г. изменение климата, так называемый период потепления, отразился на гидрологическом режиме рек. Повышение температуры воздуха, особенно в зимний период, обусловленное частыми оттепелями, повлекло изменение условий увлажненности территории и формирования запасов воды в снеге к началу весеннего половодья [1-3].

Как показали результаты нашего исследования, в маловодные годы период потепления характеризуется повсеместным увеличением годового объема стока рек, особенно интенсивно в северных и южных районах республики. При этом изменения в Припятском гидрологическом районе значительно, чем в Западно-Двинском, что соответствует масштабам изменения атмосферных осадков в соответствующих створах (рис. 1).

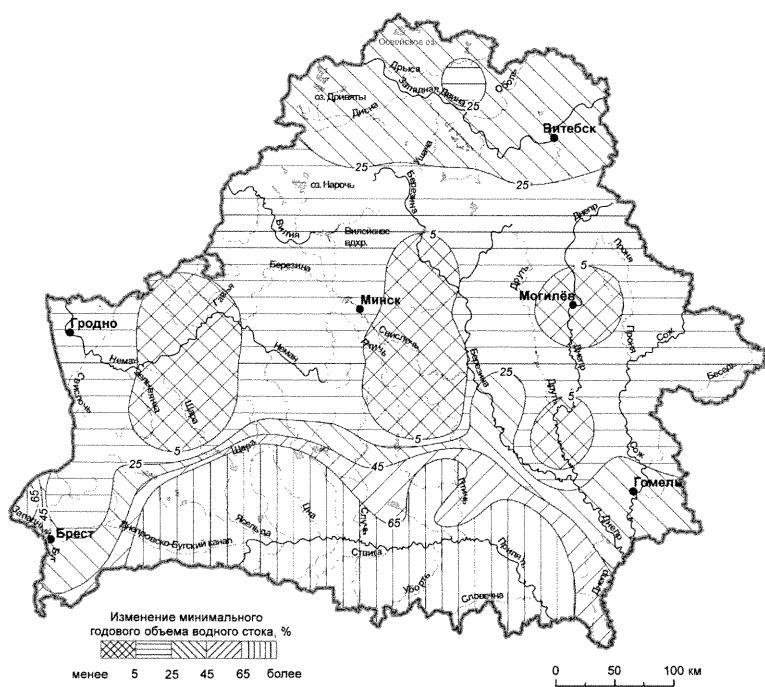


Рис. 1. Динамика водного стока рек Беларуси в маловодные годы в условиях изменения климата

Следует отметить, что увеличение минимального объема водного стока в створах р. Припять – Мозырь и р. Ясельда – Сенин составило более 100%, в то время как в створах р. Птич – Луцицы и р. Оресса – Андреевка – только 54% и 78% соответственно. Только в бассейне р. Птич наблюдалось снижение минимального объема стока на 39%.

В бассейне р. Западная Двина показатели годового объема водного стока в маловодные годы выросли в среднем на 40% по сравнению с предшествующим периодом. Менее существенный рост зафиксирован на малых реках: в створах р. Полота – Янково он составил 28%, р. Дисна – Шарковщина – 16%.

В центральной возвышенной части Беларуси возрастание водного стока рек в условиях потепления оказалось не столь выраженным. В большинстве створов бассейна р. Днепр его увеличение менее значительно – в среднем до 15%. Лишь в нижнем течении рек Сож и Березина зафиксировано возрастание минимального стока на 41% и 36% соответственно.

В бассейнах рек Немана и Западного Буга динамика годового объема стока также была в целом положительной, изменяясь от 11% в створах на р. Неман до 73% – на р. Пульва. Только в бассейне р. Щары зафиксировано снижение показателей на 15%.

В отличие от маловодных лет, тенденция изменения водности рек Беларуси в многоводные годы в условиях потепления климата носила противоположный характер, проявляясь в сокращении показателей годового объема водного стока (рис. 2).

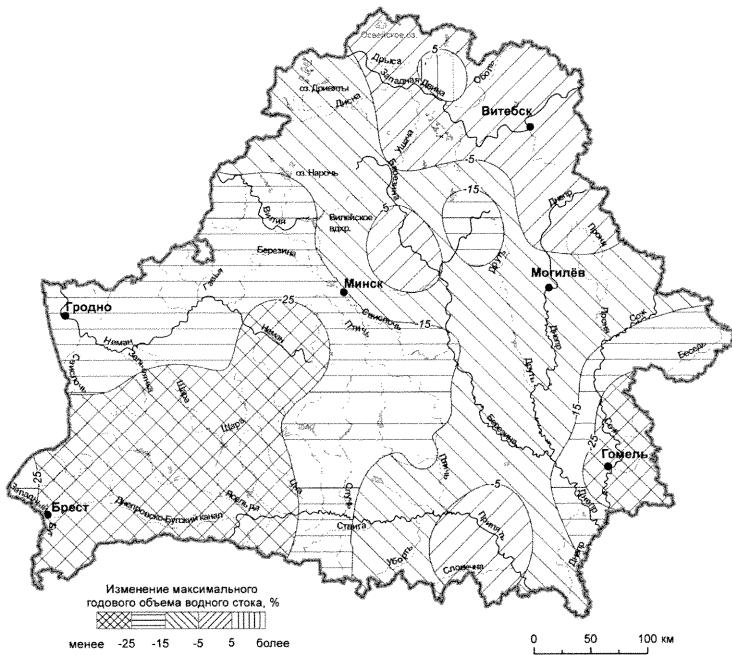


Рис. 2. Динамика водного стока рек Беларуси в многоводные годы в условиях изменения климата

Наиболее интенсивным снижением объемов речного стока в годы повышенной водности отличились крупные и средние водотоки Неманского, Припятского и Центральноберезинского гидрологических районов. Необходимо подчеркнуть, что сокращение максимально стока по сравнению с многолетними данными в ряде створов превысило 25% (верховья Немана, Припяти, среднее течение Сожа). Лишь на нескольких постах на крупных реках (р. Припять – Мозырь, р. Днепр – Орша) эта величина не превышает 5%, находясь в пределах допустимой погрешности расчетов.

Показатели максимального стока на малых реках также демонстрируют “отрицательную” динамику. Так, в бассейнах Немана и Западного Буга годовой объем водного стока в многоводные годы на большинстве створов снизился на 16–30%. Снижение показателей максимального стока зафиксировано и на притоках Днепра и Припяти: на реках Бобр, Беседь, Ясельда – на 20–30%, реках Птич и Оресса – на 11–24%.

Заключение

Таким образом, апробированная методика проведения гидрологического ГИС-моделирования в среде ArcGIS, позволила интерполировать результаты исследования изменения водного стока рек, основанные на данных створов с продолжительными рядами наблюдений, и оценить пространственную неоднородность его распределения по всей территории Беларуси.

Период потепления, фиксируемый с 1989 г. и сопровождающийся увеличением минимальной нормы осадков примерно на 10%, оказал существенное влияние на гидрологический режим рек. В маловодные годы наблюдалось повсеместное значительное увеличение годового объема водного стока рек по сравнению с периодом, предшествующим потеплению, наиболее интенсивно – в бассейне рек Припяти и Западной Двины. В многоводные годы период потепления на большей части территории сопровождался сокращением годового объема речного стока, интенсивнее – на крупных и средних водотоках Неманского, Припятского и Центральноберезинского гидрологических районов и несущественно – Западно-Двинского. Таким образом, изменение климата в последнюю четверть века привело к нивелированию объемов водного стока рек на территории Беларуси в экстремальные по водности годы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гидрологический мониторинг Республики Беларусь (Гидрологические особенности рек Беларуси) / М.А. Асадчая [и др.] ; под общ. ред. А.И. Полищук, Г.С. Чекана. – Минск, 2009. – 286 с.
2. Изменение климата Беларуси и их последствия / В.Ф. Логинов [и др.] ; под общ. ред. В.Ф. Логинова. – Минск, 2003. – 330 с.
3. *Полищук, А.И.* Изменение гидрологического режима рек Беларуси в период потепления 1988–2006 гг. / А.И. Полищук, Л.Б. Трофимова,

- Г.С. Чекан // Материалы Межд. водного форума, 2–3 октября 2008 г. – Минск, 2008. – С. 233.
4. Использование ГИС-моделирования для оценки гидрологических процессов / Д.М. Курлович [и др.] // Вестник Белорус. ун-та, Сер. 2, Химия, биология, география. – 2013. – № 2. – С. 75–80.
5. *Асадчая, М.А.* Водный сток рек Беларуси в условиях потепления климата: минимальный и максимальный сток, внутригодовое распределение / М.А. Асадчая, Е.Г. Кольмакова. – LAP Lambert Academic Publishing, 2013. – 108 с.
6. Hydrology toolset ArcGIS 10.1 [Электронный ресурс] – Режим доступа : <http://resources.arcgis.com>. – Дата доступа : 25.04.2013.

Поступила в редакцию 22.01.2014 г.

ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ

ГАЛЬМАК Аляксандр Міхайлавіч	– доктар фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры вышэйшай матэматыкі Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітета харчавання
БАРОДЗІЧ Руслан Віктаравіч	– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык навукова-даследчага сектара ГДУ імя Ф. Скарэны
КЕМЕШ Аксана Мікалаеўна	– старши выкладчык кафедры вышэйшай матэматыкі Беларускага дзяржаўнага аграрнага тэхнічнага ўніверсітета
САКОВІЧ Наталля Уладзіміраўна	– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт МДУ імя А. А. Куляшова
ОСТРЫКАЎ Алег Міхайлавіч	– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры інжынернай графікі ГДТУ імя П. В. Сухога
ІНАЗЕМЦАВА Алена Уладзіміраўна	– асістэнт кафедры інжынернай графікі ГДТУ імя П. В. Сухога
САБАЛЕЎСКІ Аляксей Мікітавіч	– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры фізікі і тэхнічных дысцыплін МДУ імя А. А. Куляшова
БАБЦОВА Ірына Анатольеўна	– аспірант МДУ імя А. А. Куляшова
БАЖУК Таццяна Іванаўна	– кандыдат тэхнічных навук, дацэнт кафедры турызму Інстытута экалогіі, прыродаахоўнай дзейнасці і турызму імя Вячаслава Чарнавола (Украіна)
КАЛЬМАКОВА Алена Генадзьеўна	– дацэнт кафедры фізічнай геаграфіі свету і адукацыйных тэхналогій БДУ, начальнік аддзела геаінфармацыйных тэхналогій Дзяржаўнага цэнтра картаграфа-геадэзічных матэрыялаў і дадзеных Рэспублікі Беларусь
ГРЫІБ Сяргей Валяр'янаўіч	– аспірант геаграфічнага факультэта БДУ
КАЦАН Ігар Яраслававіч	– доктар біялагічных навук, прафесар, загадчык кафедры фізіялогіі чалавека і жывёл Усходнеўрапейскага нацыянальнага ўніверсітета імя Лесі Украінкі
КАЗАЧУК Наталія Аляксандраўна	– кандыдат біялагічных навук, дацэнт кафедры фізіялогіі чалавека і жывёл Усходнеўрапейскага нацыянальнага ўніверсітета імя Лесі Украінкі
ПАРУЧЫНСКІ Андрэй Іванавіч	– кандыдат біялагічных навук, дацэнт кафедры фізіялогіи чалавека і жывёл Усходнеўрапейскага нацыянальнага ўніверсітета імя Лесі Украінкі
КАЧЫНСКАЯ Таццяна Валер'еўна	– кандыдат біялагічных навук, дацэнт кафедры фізіялогіи чалавека і жывёл Усходнеўрапейскага нацыянальнага ўніверсітета імя Лесі Украінкі
МАТУЗЮК Аляксандар Пятровіч	– кандыдат біялагічных навук, дацэнт кафедры фізіялогіи чалавека і жывёл Усходнеўрапейскага нацыянальнага ўніверсітета імя Лесі Украінкі

SUMMARIES

Bobtsova I.A. SPECTRAL STUDIES OF THE EFFECTS OF LOW-INTENSITY LASER RADIATION ON BLOOD BIOMOLECULES.

On the basis of the official data and own spectral studies of the whole blood samples hypotheses of mechanisms of low-intensity laser photoexcitation of blood are presented. Spectral manifestations of photochemical reactions induced in blood by therapeutical doses of light irradiation are analysed. Techniques for sample preparation of whole blood and its components for the following IR spectra recording alongside with spectral characteristics of irradiated whole blood of patients and healthy donors are compared.

Borodich R.V. ON INTERSECTION OF ABNORMAL SUBGROUPS IN GROUPS WITH OPERATORS.

In the paper the properties of intersection of non p-nilpotent abnormal maximal subgroups in groups with operators are studied. In this connection the article proves that with $p>2$ in a non p-solvable group there is a non p-nilpotent abnormal maximal A-admissible subgroup. The criterion of group p-solvability is provided.

Bozhuk T.I. EVALUATION OF RECREATION-TOURISTIC DESTINATIONS FOR ACTIVE AND STATIONARY RECREATION (the case of regional landscape park "Znesinnia", Lvov, Ukraine).

The paper considers the issues of organization and functioning of recreation-touristic destinations for active and stationary recreation. The constituent elements of such destinations: resource and infrastructure provisions, additional services, management, attractiveness (as an integral index of the mentioned elements), and consumer are analysed. The case of the Regional Landscape Park «Znesinnia» is researched for the expert evaluation of the area, and the recommendations are proposed for its future tourism and recreation development.

Gal'mak A.M. ON OPERATION $[]_{l,T,J}$

For any integer $l \geq 2$, any nonempty set J and any subset A of Cartesian product $T \times A^J$, where T is a subset of S_J symmetric group J bijections, A^J is a set of functions with domain J and codomain in subset A , l -ary operation $[]_{l,T,J}$ and studied. Particular cases of this l -ary operation are the operations $[]_{l,\sigma,k}$ $[]_{l,\sigma,J}$ и $[]_{l,T,k}$ considered by the author earlier as well as two polyadic E. Post operations which he revealed through well-ordered sets of substitution and well-ordered sets of matrixes accordingly.

Kemesh O.N., Sakovich N.V. REGULARITY OF RATIONAL NUMBERS SET IN SHORT INTERVALS.

It is proved that the set of rational numbers $\frac{p}{q}$ forms a regular system in intervals I of length $|I| > q^{-1}$.

Kolmakova E.G., Grib S.V. GIS-MODELLING OF RIVER WATER RUNOFF UNDER CONDITIONS OF CLIMATE CHANGE IN BELARUS.

The article raises the problem of climate change impact on surface water resources in Belarus. The results of the study of water flow changes in big and small rivers in the country under conditions of climate warming are demonstrated. The comparative analysis of the parameters of annual river water flow during extreme water availability years is carried out for two periods – before climate warming and during this period. For the purpose of the research the years of minimum and maximum water availability for the entire period of instrumental observations are established by analytical methods. For the first time GIS-modelling of water runoff dynamics under conditions of climate change was carried out on the territory of Belarus, the regional differences in the change of water flow distribution in the context of extreme water availability years were identified.

Kotsan I.Ya., Kozachuk N.A., Poruchinsky A.I., Kachynska T.V., Motuziuk O.P. LOCAL AND SPATIAL SYNCHRONIZATION OF ALPHA ACTIVITY SUBJECTS WITH ANALYTICAL AND SYNTHETIC COGNITIVE STYLE DURING SOLVING TASKS OF CONVERGENT AND DIVERGENT TYPE.

In the article presents the results of studies dynamics of indicators power and coherence at rest and mental activity in the three sub-bands of the alpha rhythm EEG in males and females with analytical and synthetic cognitive style. Differences of indicators power and coherence related with cognitive style, appear only in women mostly at rest with open eyes and characterize the overall level of activation of the cerebral cortex. Women with analytical cognitive style characterized by the highest values of power alpha-1 and alpha-2-rhythm at rest with eyes closed and the greatest depth of their depression during at rest with eyes open. It was shown, that throughout the experiment in all frequency sub-bands of alpha-rhythm by the women with synthetic cognitive style characterized by the absence of changes in indicators of power. Alpha-2 and alpha-3-bands by females with analytic cognitive style at rest with eyes closed are characterized by closer interactions in frontal areas.

Ostrikov O.M., Inozemtseva E.V. CALCULATION OF STRESSEDLY-DEFORMED CONDITION OF SOLID BODY SUBJECTED TO CROSS-SECTION SHIFT AND SEPARATED FROM THE SURFACE OF ELASTIC LENTICULAR TWIN.

On the basis of the methods of nonlinear mechanics of destruction the model of a solid bode with an elastic lenticular twin (when the body is

subjected to cross-section shift) is designed. The fields of pressure of lenticular twin separated from the surface are calculated. The evolution of twin pressure dependant on a stopper position is studied. The curvature of twin borders is proved to lead to the increase of their pressure.

Sobolevsky A.N. CAN LIGHT VELOCITY AND RECEIVER VELOCITY BE ADDED?

The concept “addition of light velocity and receiver velocity” is analysed in the frame of one motionless base where the ray and receiver move as well as in two bases in one of which the receiver rests. The qualitative difference of the two cases is outlined. The motion time of the light ray reflected from Jupiter satellite and reaching the Earth is calculated for two bases: for the system where the Sun is motionless and for the system related to the Earth. The Galilean and Lorentz relations between the mentioned systems are considered. The calculation enables the author to presume that the data on Jupiter’s satellite eclipse cannot be regarded as a proof of the classical (nonrelativist) rule of light velocity and receiver velocity addition as some scholars believe.