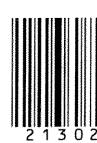


ISSN 2073-8315



9 772073 831003

21302

# ВЕЧНИК

Магілёўскага дзяржаўнага  
універсітэта  
імя А.А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

*Выдаецца с снежня 1998 года*

Серый В. ПРЫРОДА ЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ  
(матэматыка, фізіка, біялогія)

*Выходзіць два разы ў год*

**2 (42)  
2013**

### **Галоўная рэдакцыйная камегія:**

д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (галоўны рэдактар);  
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыгер (нам. галоўнага рэдактара);  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (нам. галоўнага рэдактара);  
д-р фіз.-мат. навук прафесар С.В. Жасткоў (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В);  
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

### **Матэматыка, фізіка:**

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)  
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапіцінскі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)  
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

### **Біялогія:**

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)  
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)  
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)  
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)  
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)  
д-р мед. навук дацэнт А.В. Марачкаў (Магілёў)  
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)  
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)  
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)

## ЗМЕСТ

<i>АМЕЛЬКИН В.В., ВАСИЛЕВИЧ М.Н.</i> Построение на комплексной проективной прямой системы фукса с четырьмя особыми точками и нильпотентными неприводимыми матрицами-вычетами .....	5
<i>БОРУХОВ В.Т.</i> Идентификация интенсивности источников тепла в нелинейном уравнении теплопроводности гиперболического типа .....	17
<i>ГАЛЬМАК А.М.</i> Векторные отображения .....	24
<i>ЖЕСТКОВ С.В., НОВАШИНСКАЯ В.С.</i> К теории распространения светлых и темных солитонов (2+1)-мерных уравнений Шредингера со степенными законами нелинейности и затухания .....	32
<i>МОРОЗОВ Н.П.</i> Интегралы квадратичной системы в случае центра .....	45
<i>ШАМУКОВА Н.В., ДАВЫДОВА В.А.</i> Оценки множества действительных чисел с заданным порядком приближения нуля значениями полиномов и их производных .....	56
<i>КОВАЛЕНКО Н.С., ВЕНГЕРОВ В.Н.</i> Приемы ускорения вычислений при распределенной и векторно-конвейерной обработках данных .....	63
<i>ЗАРНИЦКИЙ Ю.Ф., ВОЛОСЕВИЧ А.В.</i> Экспериментальная диагностика неоднородностей в авроральной ионосфере .....	70
<i>МАЛЫШЕВ В.Л., СВЕТЛОВА Т.В.</i> Влияние сообщаемости пор на интенсивность массообменных процессов в бинарных капиллярных системах произвольной формы .....	84
<i>КРУЧИНСКИЙ Н.Г., АКУЛИЧ Н.В.</i> Патогенез ишемической болезни сердца: роль тромбоцитарного и трансформирующего факторов роста .....	95
<i>БОРИСОВ О.Л., КОНДРАТЕНКОВА Е.А., МАРТУСЕВИЧ Н.О.</i> Особенности сенсомоторного реагирования в условиях долговременной адаптации к мышечной деятельности циклического характера .....	106
<i>ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ</i> .....	112
SUMMARIES .....	113

Уважаемые читатели!

Редакционная коллегия журнала “Веснік МДУ імя А.А. Куляшова” сердечно поздравляет со 100-летием университета и желает всем творческих успехов и новых достижений на благо нашей страны, нашего народа.

Первый номер журнала был издан в ноябре 1998 г. За прошедшие годы увидели свет сотни статей по различным направлениям современного научного поиска. В номерах журнала публиковались также рецензии, аналитические обзоры, полемические и другие материалы. Развивался, рос Могилевский университет, в нем открывались новые специальности, развертывались перспективные научные исследования, создавались новые кафедры. Изменялся, преобразовывался и наш журнал. Расширялся состав редакционной коллегии, в который включались ведущие ученые не только нашего университета, но и других исследовательских центров региона, страны в целом. В настоящее время в составе редколлегии 57 ученых, в том числе 36 докторов наук. Начиная с 2010 г. журнал издается в четырех сериях (серия А – гуманитарные науки, серия В – естественные науки, серия С – психолого-педагогические науки, серия D – экономика, социология, право). “Веснік МДУ імя А.А. Куляшова” включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по 10 направлениям науки, журналу присвоен международный номер регистрации периодических изданий.

Активными авторами публикаций в нашем журнале являются ученые и общественные деятели Минска, Могилева, Витебска, Гомеля, Бреста, Гродно, других городов страны, а также ученые из России, Украины, Казахстана, Польши, США, Италии, Китая и других стран.

Являясь авторитетным научным и методическим изданием, наш журнал, вместе с тем, постоянно откликается на важнейшие события в жизни страны и мира в целом. Многие публикации посвящены актуальным проблемам идеологии, современной истории, экономики, социологии, правоведения.

В центре внимания редакционной коллегии стоят вопросы образовательной деятельности, которым посвящена специальная серия. Наши авторы освещали ключевые проблемы и задачи реформирования общеобразовательной средней школы, оптимизации и дальнейшего совершенствования высшего образования в Республике Беларусь с учетом передового опыта других стран, особенностей национальной модели социально-экономического развития, идеологии белорусского государства.

Жизнь ставит перед университетом, как и перед всем образовательным комплексом страны, новые задачи. Решая их, откликаясь на вызовы времени, мы стремимся постоянно быть на “гребне волн”, выступать трибуной для творческих научных дискуссий, местом апробации новых конструктивных идей. Уверены, что сотрудничество ученых нашего университета с коллегами из белорусских и зарубежных научных центров будет успешно развиваться, а результаты этого сотрудничества найдут отражение на страницах нашего журнала.

Главный редактор, первый проректор,  
доктор философских наук, профессор,  
заслуженный работник образования  
Республики Беларусь

М. И. Вишневский

# МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 517.925.42

*В.В. АМЕЛЬКИН\*, М.Н. ВАСИЛЕВИЧ*

## ПОСТРОЕНИЕ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ СИСТЕМЫ ФУКСА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ И НИЛЬПОТЕНТНЫМИ НЕПРИВОДИМЫМИ МАТРИЦАМИ-ВЫЧЕТАМИ

Рассматривается одна из обратных задач аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. А именно, строится система Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и нильпотентными неприводимыми матрицами-вычетами.

### Введение

Пусть  $X = \mathbf{CP}^1$  – комплексная проективная прямая;  $a_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , – произвольные точки из  $X$ ;  $\overline{M} = \bigcup_{j=1}^4 a_j$ . На открытом множестве  $M = \{\mathbf{CP}^1 \setminus \overline{M}\}$

рассмотрим систему Фукса

$$dY = \omega Y, \quad (1)$$

где  $Y$  – квадратная матрица порядка 2;  $\omega$  – дифференциальная 1-форма вида

$$\omega = \sum_{j=1}^4 U_j d \ln \left( \frac{x - a_j}{x_0 - a_j} \right). \quad (2)$$

Предполагается, что  $(2 \times 2)$  – постоянные (не зависящие от  $x$ ) матрицы  $U_j$ , называемые матрицами-вычетами, удовлетворяют условию [1]

$$\sum_{j=1}^4 U_j = 0. \quad (3)$$

Обозначим через  $\pi_1(M, x_0)$  фундаментальную группу комплексного аналитического многообразия  $M$ , где (отмеченная) точка  $x_0 \in M$ .

Пусть  $\Phi(x)$  – росток фундаментального решения системы (1) ( $\Phi(x_0) = \Phi_0$ ), который при аналитическом продолжении вдоль петли  $\gamma_j \in \pi_1(M, x_0)$  трансформируется в другой росток  $\Phi_{\gamma_j}(x)$ . При этом матричные функции  $\Phi(x)$  и  $\Phi_{\gamma_j}(x)$  связаны соотношением  $\Phi_{\gamma_j}(x) = \Phi(x)V_j$ , где постоянная матрица  $V_j$  является элементом группы  $GL(2; \mathbf{C})$  невырожденных комплекснозначных матриц второго порядка. Очевидно, что  $V_j = \Phi_0^{-1}\Phi_{\gamma_j}(x_0)$ .

\* Выпускник физико-математического факультета 1965 г.

Далее матрицы  $V_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , которые называют матрицами монодромии, будем задавать так, чтобы выполнялось соотношение

$$\prod_{j=1}^4 V_j = E, \quad (4)$$

где  $E$  – единичная матрица.

При выполнении условия (4) матрицы монодромии порождают мультиликативную группу, которую называют группой монодромии [1].

С матрицами  $V_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , ассоциируют и так называемые показательные матрицы монодромии  $W_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , которые связывают с матрицами монодромии формулами

$$V_j = e^{2\pi i W_j}, \quad j = \overline{1, 4}, \quad (5)$$

где  $i$  – мнимая единица,  $j = \overline{1, 4}$ .

Как показано, например в [2, с. 159], собственные значения показательных матриц монодромии и матриц-вычетов системы (1) совпадают. Этот важный факт мы будем иметь в виду в дальнейшем.

**Формулировка проблемы.** Пусть задан гомоморфизм

$$\chi : \pi_1(M, x_0) \rightarrow GL(2; \mathbf{C}), \quad (6)$$

который называют монодромией или представлением монодромии системы (1).

**Задача** (проблема Римана – Гильберта [3]). Данна монодромия (6). Всегда ли существует система (1), (3) с заданными особыми точками  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , фундаментальная матрица решений которой реализует заданный гомоморфизм (6)?

Из работы [4] следует, что сформулированная задача всегда имеет решение, хотя в общем случае для любого набора точек  $a_1, a_2, \dots, a_n$  при  $n > 3$  и любой системы (1) порядка  $m \geq 3$  найдется такая монодромия (6), для которой не существует реализующей ее системы Фукса [1].

Из формулировки задачи вытекает, что доказательство существования системы с указанными свойствами, вообще говоря, не связывается с построением самой системы.

В настоящей статье дается конструктивное решение проблемы в случае нильпотентных неприводимых матриц-вычетов, каждая из которых не является диагонализируемой.

**Предварительные результаты.** При построении систем вида (1) важное значение имеет условие полной интегрируемости, означающее, что дифференциальная 1-форма (2) удовлетворяет условию [5, с. 41]

$$d\omega = \omega \Lambda \omega, \quad (7)$$

где  $\Lambda$  – оператор внешнего дифференцирования матриц.

В случае некоммутативных матриц монодромии  $V_j$  матрицы-вычеты  $U_j$  также будут некоммутативными и аналогично доказательству леммы 1 [6] можно показать, что из равенства (7) следуют равенства

$$dU_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^4 [U_k, U_j] d \ln \left( \frac{a_j - a_k}{x_0 - a_k} \right), \quad (8)$$

где  $[\cdot, \cdot]$  – произведение Ли (коммутатор). По поводу вывода равенств (8) см., в частности, и [7, с. 182], [2, с. 419].

Переходя к содержательной части работы, будем выбирать три из четырех показательных матриц монодромии системы (1) нильпотентными и задавать их (не умалляя общности) в виде [2, с. 382]

$$W_j = \begin{pmatrix} -\mu_j v_j & \mu_j^2 \\ -v_j^2 & \mu_j v_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (9)$$

где  $\mu_j, v_j$  – вещественные или комплексные числа, так, чтобы и четвертая показательная матрица также оказалась нильпотентной при условии (4).

Из вида матриц (9) следует, что их собственные значения  $\xi_j^{(1)} = \xi_j^{(2)} = 0$ . Последнее означает, как мы знаем из предыдущего, что и собственные значения матриц  $U_j, j = \overline{1, 3}$ , также равны нулю. Отсюда вытекает, что матрицы-вычеты системы (1) должны иметь вид:

$$U_j = \begin{pmatrix} -\eta_j \theta_j & \eta_j^2 \\ -\theta_j^2 & \eta_j \theta_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (10)$$

где  $\eta_j, \theta_j$  – некоторые параметры.

Что же касается матрицы  $U_4$ , то поскольку  $U_4 = -U_1 - U_2 - U_3$ , не-коммутируемость матриц (9) означает, что собственные значения матрицы  $U_4$  могут быть отличны от нуля.

Но так как мы требуем нильпотентность матрицы  $U_4$ , то, согласно (3) и (10), условие нильпотентности принимает вид

$$\Delta_{12}^2 + \Delta_{13}^2 + \Delta_{23}^2 = 0, \quad (11)$$

где

$$\Delta_{12} = \eta_1 \theta_2 - \eta_2 \theta_1, \quad \Delta_{13} = \eta_1 \theta_3 - \eta_3 \theta_1, \quad \Delta_{23} = \eta_2 \theta_3 - \eta_3 \theta_2.$$

Соотношение (11) приводит к выводу, что матрицы (9) следует задавать так, чтобы при фиксированной ветви логарифма матрица

$$W_4 = \frac{1}{2\pi i} \ln V_4,$$

где  $V_4 = V_3^{-1} V_2^{-1} V_1^{-1}$ , а  $V_k^{-1}, k = \overline{1, 3}$ , – матрица, обратная матрице  $V_k$ , имела нулевые собственные значения.

Примером существования матриц  $W_j$  с указанными свойствами являются матрицы

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\delta & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Дальнейшие исследования будем проводить, не умаляя общности рассуждений [8], считая, что  $a_4 = \infty$ . В этом предположении систему (1) можно переписать в виде

$$dY = \left( \sum_{j=1}^3 \frac{U_j}{x-a_j} \right) Y dx. \quad (13)$$

Для матриц  $U_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , системы (1), определяемых формулами (10), справедливы соотношения:

$$U_j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_j U_k = \rho_{jk} E - U_k U_j, \quad U_j U_k U_j = U_j \rho_{jk}, \quad \sigma_4 = \rho_{123} - \rho_{132} = 2\rho_{123}, \quad (14)$$

где  $\rho_{jk} = \sigma(U_j U_k)$ ,  $\rho_{123} = \sigma(U_1 U_2 U_3)$ ,  $\rho_{132} = \sigma(U_1 U_3 U_2)$ , а  $\sigma(T)$  – сумма диагональных элементов матрицы Т. Непосредственно проверяется, что, в частности,

$$\rho_{123} = -\eta_1^2 \theta_2 \theta_3 \Delta_{23} + \eta_2^2 \theta_1 \theta_3 \Delta_{13} - \eta_3^2 \theta_1 \theta_2 \Delta_{12}.$$

В последней цитируемой работе автор предложил алгоритм конструктивного решения сформулированной выше задачи, основу которого составляет построенная им система пяти обыкновенных дифференциальных уравнений, выражающих зависимость следов произведения матриц-вычетов рассматриваемой системы Фукса от особых точек. Для успешного применения предложенного алгоритма необходимо, прежде всего, решить построенную систему дифференциальных уравнений, которую мы будем называть системой Н.П. Еругина.

В рассматриваемом нами случае система Н.П. Еругина вырождается в систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{12}}{dz} &= \frac{\sigma_4}{z}, & \frac{d\rho_{13}}{dz} &= \frac{\sigma_4}{1-z}, & \frac{d\rho_{23}}{dz} &= \frac{\sigma_4}{z(z-1)}, \\ \frac{d\sigma_4}{dz} &= \frac{2\rho_{13}(\rho_{12} - \rho_{23})}{z} + \frac{2\rho_{12}(\rho_{23} - \rho_{13})}{z-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $z = \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}$ .

Заметим, что система Н.П. Еругина (15) может быть получена и на основании равенств (8), если провести рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1 статьи [9].

Отметим также, что в различных ситуациях система Н.П. Еругина может иметь стационарные решения. Оказывается, что решение этого вопроса является принципиальным для решения проблемы Римана – Гильберта. Существование стационарных решений существенно упрощает задачу.

Обращаясь к системе (15), отметим, что непосредственные вычисления показывают справедливость равенств

$$\rho_{12} = -\Delta_{12}^2, \quad \rho_{13} = -\Delta_{13}^2, \quad \rho_{23} = -\Delta_{23}^2, \quad \sigma_4 = 2\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}, \quad (16)$$

а также, в случае коммутирующих матриц (10), равенств

$$\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{23} = 0, \quad (17)$$

означающих, что система Н.П. Еругина (15) имеет единственное стационарное решение

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = \sigma_4 = 0.$$

**Теорема 1.** Если матрицы-вычеты (10) системы (13) некоммутативны и удовлетворяют условию (11). То система дифференциальных уравнений (15) не имеет стационарных решений.

**Доказательство.** Если предположить, что система (15) имеет стационарное решение, то по необходимости  $\sigma_4 = 0$ . Но в таком случае хотя бы один из сомножителей  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{13}$ ,  $\Delta_{23}$  в представлении  $\sigma_4$  в (16) равен нулю. Предположим, для определенности, что  $\Delta_{23} = 0$ . Тогда  $\rho_{23} = 0$  и из последнего уравнения системы (15) и равенства (11) следует, что  $\rho_{12} = \rho_{13} = 0$ . Таким образом, приходим к равенствам (17), означающим, что матрицы (10) коммутируют, а это противоречит одному из условий теоремы. Полученное противоречие и доказывает теорему.

**Основные результаты.** С учетом теоремы 1 для решения поставленной выше задачи фундаментальную матрицу решений системы (13) будем искать в виде [2, с. 142] ряда

$$\Phi_{x_0}(x) = E + \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_v}^{(1, 2, 3)} L_{x_0}(a_{j_1}, \dots, a_{j_v} | x) U_{j_1} \dots U_{j_v}, \quad (18)$$

где сумма  $\sum_{j_1, \dots, j_v}^{(1, 2, 3)}$  содержит  $3^v$  членов, которые мы получим, когда ин-

дексы  $j_1, \dots, j_v$  пробегают независимо друг от друга значения 1, 2, 3, с коэффициентами

$$L_{x_0}(a_{j_1} | x) = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x - a_{j_1}} = \ln \left( \frac{x - a_{j_1}}{x_0 - a_{j_1}} \right), \quad \dots,$$

$$L_{x_0}(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_v} | x) = \int_{x_0}^x \frac{L_{x_0}(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{v-1}} | z)}{z - a_{j_v}} dz.$$

Матрицы-вычеты  $U_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , в системе (13) будем строить такими, чтобы имели место равенства [2, с. 147]

$$V_j = E + \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_v}^{(1, 2, 3)} P_j(a_{j_1}, \dots, a_{j_v} | x_0) U_{j_1} \dots U_{j_v}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (19)$$

где

$$P_j(a_{j_1} | x_0) = \begin{cases} 2\pi i, & \text{если } j = j_1, \\ 0, & \text{если } j \neq j_1, \end{cases}$$

$$P_j(a_{j_1}, \dots, a_{j_v} | x_0) = \frac{(2\pi i)^v}{v!}, \quad \text{если } j_1 = \dots = j_v = j,$$

$$P_j(a_{j_1}, \dots, a_{j_v} | x_0) = \int_{a_j}^{x_0} \left( \frac{P_j(a_{j_1}, \dots, a_{j_{v-1}} | x_0)}{x_0 - a_{j_v}} - \frac{P_j(a_{j_1}, \dots, a_{j_{v-1}} | z)}{x_0 - a_{j_1}} \right) dx_0,$$

причем ряд (19) целый относительно матричных коэффициентов системы (13).

Как показано в [2, с. 142], матрица (18) является нормированной в точке  $x_0$  фундаментальной матрицей решений системы (13).

Тогда замечая, что в силу нильпотентности показательных матриц  $W_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , и  $W_\infty$  формулы (5) принимают (по определению) вид

$$\begin{aligned} V_j &= e^{2\pi i W_j} = E + 2\pi i W_j, \quad j = \overline{1, 3}, \\ V_\infty &= V_3^{-1} V_2^{-1} V_1^{-1} = e^{2\pi i W_\infty} = E + 2\pi i W_\infty, \end{aligned} \quad (20)$$

приходим к выводу, что при построенных матрицах  $U_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , фундаментальная матрица решений системы (13) будет иметь заданную монодромию (20), поскольку

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} d\Phi_{x_0}(x) &= \Phi_{x_0}(x) \Big|_{x_0}^{x_0 e^{2\pi i}} = \Phi_{x_0}(x_0 e^{2\pi i}) - \Phi_{x_0}(x_0) = \\ &= \Phi_{x_0}(x_0) V_j - E = V_j - E = e^{2\pi i W_j} - E = 2\pi i W_j. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается указать способ построения матриц-вычетов системы (13).

Предварительно отметим, что из (19) и (21) вытекают равенства

$$W_j = U_j + \sum_{v=2}^{\infty} \sum_{j_1, \dots, j_v}^{(1, 2, 3)} P_j^*(a_{j_1}, \dots, a_{j_v} | x_0) U_{j_1} \dots U_{j_v}, \quad (22)$$

где

$$P_j^*(a_{j_1}, \dots, a_{j_v} | x_0) = \frac{1}{2\pi i} P_j(a_{j_1}, \dots, a_{j_v} | x_0), \quad j = \overline{1, 3}.$$

А так как собственные значения матриц  $W_j$ ,  $U_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , и соответственно  $W_\infty$ ,  $U_\infty$  в рассматриваемом нами случае равны нулю, то, следуя работе [8], матрицы  $U_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , системы (13) можно искать в виде

$$U_j = \alpha_j \overline{W_1} + \beta_j \overline{W_2} + \gamma_j [\overline{W_1}, \overline{W_2}], \quad (23)$$

где

$$\overline{W_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{W_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\overline{W_1}, \overline{W_2}] = \overline{W_1 W_2} - \overline{W_2 W_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из равенств (22) и формул (14) вытекает, что след  $\sigma(U_j W_k)$  от произведения матриц  $U_j$  и  $W_k$ ,  $j, k = \overline{1, 3}$ , можно представить в виде ряда

$$\sigma(U_j W_k) = \sigma_{jk}(\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}, \rho_{123}) \quad (24)$$

по целым степеням  $\rho_{12}$ ,  $\rho_{13}$ ,  $\rho_{23}$ ,  $\rho_{123}$ , который сходится при всех конечных значениях аргументов [8].

В силу условий на матрицы (9) можно считать, что

$$[W_1, W_2] \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

(выбирая, например,  $\mu_1$ ,  $v_1$  и  $\mu_2$ ,  $v_2$  такими, чтобы  $(\mu_1 v_2)^2 \neq (\mu_2 v_1)^2$ ).

Умножая тогда последовательно равенство (23) слева на матрицы  $W_1$  и  $W_2$ , определяемые формулами (9), получим систему

$$\begin{cases} \sigma(U_j W_1) = \alpha_j \mu_1^2 - \beta_j v_1^2 + 2\gamma_j \mu_1 v_1, \\ \sigma(U_j W_2) = \alpha_j \mu_2^2 - \beta_j v_2^2 + 2\gamma_j \mu_2 v_2, \end{cases} \quad j = \overline{1, 3}, \quad (26)$$

где левые части уравнений – это ряды (24).

Замечая далее, что собственные значения матриц (23), которые можно переписать в виде

$$U_j = \begin{pmatrix} -\gamma_j & \alpha_j \\ \beta_j & \gamma_j \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (27)$$

должны иметь нулевые собственные значения, приходим к выводу, что для матриц (27) обязаны выполняться равенства

$$\gamma_j^2 + \alpha_j \beta_j = 0, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (28)$$

А в таком случае, обозначая  $\sigma(U_j W_1) = \sigma_{j1}$ ,  $\sigma(U_j W_2) = \sigma_{j2}$ , для построения матриц (27), т.е. для нахождения  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$ , на основании (26) и (28) имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \mu_1^2 \alpha_j - v_1^2 \beta_j + 2\mu_1 v_1 \gamma_j = \sigma_{j1}, \\ \mu_2^2 \alpha_j - v_2^2 \beta_j + 2\mu_2 v_2 \gamma_j = \sigma_{j2}, \\ \alpha_j \beta_j + \gamma_j^2 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\gamma_j = \frac{1}{k_1^2} \left( \mu_2 v_2 \sigma_{j1} + \mu_1 v_1 \sigma_{j2} \pm k_2 \sqrt{\sigma_{j1} \sigma_{j2}} \right), \quad \alpha_j = \Delta_1 / \Delta, \quad \beta_j = \Delta_2 / \Delta, \quad (29)$$

где  $k_1 = \mu_1 v_2 - v_1 \mu_2$  и  $k_2 = \mu_1 v_2 + v_1 \mu_2$  отличны от нуля в силу условия (25), а  $\Delta = -k_1 k_2$ ,  $\Delta_1 = 2v_1 v_2 k_1 \gamma_j + \sigma_{j2} v_1^2 - \sigma_{j1} v_2^2$ ,  $\Delta_2 = -2\mu_1 \mu_2 k_1 \gamma_j + \sigma_{j2} \mu_1^2 - \sigma_{j1} \mu_2^2$ .

Итак, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.** Система Фукса (13), (3) с нильпотентными недиагонализируемыми неприводимыми матрицами-вычетами (27), (29) имеет фундаментальную матрицу решений вида (18), реализующую заданный гомоморфизм (6).

**Замечание.** Теорема 2 касается общего случая построения систем Фукса с заданными нильпотентными показательными матрицами монодромии (9). Ниже рассмотрим подкласс таких систем при условии, что две из трех заданных неприводимых нильпотентных показательных матриц монодромии  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  перестановочны, а матрица

$$W_\infty = \frac{1}{2\pi i} \ln V_\infty,$$

которая определяется посредством матриц (20), недиагонализируема.

В качестве указанных показательных матриц  $W_j$ ,  $j = 1, 3$ , будем рассматривать, не умаляя общности, матрицы (12).

При таком выборе матриц  $W_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , покажем, как явно строятся матрицы-вычеты  $U_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , системы (13) через элементы заданных матриц  $W_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , и заданные особые точки дифференциальной системы.

Итак, перепишем, с учетом вида матриц (12), матрицы монодромии в виде

$$V_1 = E + 2\pi i \delta \overline{W_1}, \quad V_2 = E + 2\pi \lambda \overline{W_2}, \quad V_3 = V_2^{-1}, \quad V_\infty = V_1^{-1}. \quad (30)$$

Очевидно, что  $V_1 V_2 V_3 V_\infty = E$  и что

$$\tau_{12} = \sigma(W_1 W_2) = \delta\lambda, \quad \tau_{13} = \sigma(W_1 W_3) = -\delta\lambda, \quad \tau_{23} = \sigma(W_2 W_3) = 0. \quad (31)$$

Теперь поскольку матрицы  $W_j$ , определяемые равенствами

$$W_1 = -W_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \quad W_2 = -W_3 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

попарно не коммутативны, но каждая из них нильпотентна, то, как указано выше, общий вид матриц-вычетов  $U_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$  системы (13) определяется матрицами (10), где  $\eta_j$ ,  $\theta_j$  – произвольные параметры.

Указанные матрицы будем искать такими, чтобы фундаментальная матрица (18) системы (13), которую по аналогии с [2, с. 267] можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{x_0}(x) = E + U_1 \varphi_1(x) + U_2 \varphi_2(x) + U_3 \varphi_3(x) + U_1 U_2 \varphi_{12}(x) + \\ + U_1 U_3 \varphi_{13}(x) + U_2 U_3 \varphi_{23}(x) + U_1 U_2 U_3 \varphi_{123}(x) + U_1 U_3 U_2 \varphi_{132}(x), \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{13}$ ,  $\varphi_{23}$ ,  $\varphi_{123}$ ,  $\varphi_{132}$  – скалярные непрерывно дифференцируемые функции, имела заданную монодромию.

Для этого при заданных матрицах (32) будем строить матрицы-вычеты (10) так, чтобы

$$\rho_{12} = \tau_{12}, \quad \rho_{13} = \tau_{13}, \quad \rho_{23} = \tau_{23} = 0. \quad (34)$$

Тогда из (16) и (34) приходим к равенствам

$$(\eta_1 \theta_2 - \eta_2 \theta_1)^2 = -\delta\lambda, \quad (\eta_1 \theta_3 - \eta_3 \theta_1)^2 = \delta\lambda, \quad \eta_2 \theta_3 - \eta_3 \theta_2 = 0. \quad (35)$$

Из последнего уравнения (35) следует, что

$$\frac{\eta_3}{\eta_2} = \frac{\theta_3}{\theta_2} = k \quad \text{или} \quad \eta_3 = k\eta_2, \quad \theta_3 = k\theta_2.$$

Но поскольку  $\rho_{12} = -\rho_{13}$  (см. (34) и (31)), то

$$\rho_{13} = -(\eta_1 \theta_3 - \eta_3 \theta_1)^2 = -k^2 (\eta_1 \theta_2 - \eta_2 \theta_1)^2 = k^2 \rho_{12}$$

и, значит,  $k^2 = -1$ .

Отсюда приходим к выводу, что

$$U_1 = \begin{pmatrix} -\eta_1 \theta_1 & \eta_1^2 \\ -\theta_1^2 & \eta_1 \theta_1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = -U_2 = \begin{pmatrix} \eta_2 \theta_2 & -\eta_2^2 \\ \theta_2^2 & -\eta_2 \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

С учетом (36) система (13) принимает вид

$$dY = \omega Y, \quad (37)$$

где

$$\omega = \left( \frac{U_1}{x - a_1} + \frac{U_2}{x - a_2} - \frac{U_3}{x - a_3} \right) dx = U_1 d \ln \left( \frac{x - a_1}{x_0 - a_1} \right) + U_2 d \ln \left( \frac{x - a_2}{x - a_3} \frac{x_0 - a_3}{x_0 - a_2} \right).$$

Фундаментальная матрица (33) системы (37) представляется тогда в виде

$$\Phi_{x_0}(x) = E + U_1 \psi_1(x) + U_2 \psi_2(x) + U_1 U_2 \psi_3(x) + U_2 U_1 \psi_4(x), \quad (38)$$

где  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  – скалярные непрерывно дифференцируемые функции.

Равенства (19) и (38) означают, что

$$V_j = E + U_1 \psi_{1j} + U_2 \psi_{2j} + U_1 U_2 \psi_{3j} + U_2 U_1 \psi_{4j}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (39)$$

где  $\psi_{ij} = \psi_{ij}(a_1, a_2, a_3, x_0)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

Из (20) и (39) следуют равенства

$$W_j = U_1 \psi_{1j}^* + U_2 \psi_{2j}^* + U_1 U_2 \psi_{3j}^* + U_2 U_1 \psi_{4j}^*, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (40)$$

где

$$\psi_{ij}^* = \frac{1}{2\pi i} \psi_{ij}, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (41)$$

Таким образом, для матриц (36) и (41) имеем:

$$\sigma(U_1 W_j) = \sigma(U_1 U_2) \psi_{2j}^*, \quad \sigma(U_2 W_j) = \sigma(U_2 U_1) \psi_{1j}^*. \quad (42)$$

Согласно формулам (34)

$$\sigma(U_2 U_1) = \sigma(U_1 U_2) = \rho_{12} = \delta\lambda$$

и вычисления показывают, что для матриц  $W_1, W_2$  из (32) и  $U_1, U_2$  из (34) справедливы равенства

$$\sigma(U_1 W_1) = \delta\eta_1^2, \quad \sigma(U_2 W_1) = \delta\eta_2^2, \quad \sigma(U_1 W_2) = -\lambda\theta_1^2, \quad \sigma(U_2 W_2) = -\lambda\theta_2^2. \quad (43)$$

Из соотношений (41) и (43) находим, что

$$\eta_1^2 = \lambda\psi_{21}^*, \quad \eta_2^2 = \lambda\psi_{11}^*, \quad \theta_1^2 = -\delta\psi_{22}^*, \quad \theta_2^2 = -\delta\psi_{12}^*. \quad (44)$$

Итак, для построения искомой фундаментальной матрицы решений остается только найти  $\psi_{ij}^*$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Для этого запишем фундаментальную матрицу системы (37) через итерированный интеграл от дифференциальной 1-формы  $\omega$ :

$$\Phi_{x_0}(x) = E + J_{j_1}(\omega) + J_{j_1 j_2}(\omega) + J_{j_1 j_2 j_3}(\omega) + J_{j_1 j_2 j_3 j_4}(\omega) + \dots, \quad (45)$$

где

$$J_{j_1}(\omega) = \int_{x_0}^x \omega = U_1 \int_{x_0}^x d \ln \left( \frac{x - a_1}{x_0 - a_1} \right) + U_2 \int_{x_0}^x d \ln \left( \frac{x - a_2}{x - a_3} \right) \left( \frac{x_0 - a_3}{x_0 - a_2} \right) =$$

$$= U_1 \int_{x_0}^x dL_1 + U_2 \int_{x_0}^x dL_2, \quad L_1 = \ln \left( \frac{x - a_1}{x_0 - a_1} \right), \quad L_2 = \ln \left( \frac{x - a_2}{x - a_3} \right) \left( \frac{x_0 - a_3}{x_0 - a_2} \right);$$

$$J_{j_1 j_2}(\omega) = \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x \omega \right) \omega = U_1 U_2 \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x dL_2 \right) dL_1 + U_2 U_1 \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x dL_1 \right) dL_2 =$$

$$= U_1 U_2 L_{12} + U_2 U_1 L_{21}, \quad L_{12} = \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x dL_2 \right) dL_1, \quad L_{21} = \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x dL_1 \right) dL_2;$$

$$J_{j_1 j_2 j_3}(\omega) = U_1 U_2 U_1 L_{121} + U_2 U_1 U_2 L_{212}, \quad L_{121} = \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x (dL_1) dL_2 \right) dL_1,$$

$$L_{212} = \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x \left( \int_{x_0}^x dL_2 \right) dL_1 \right) dL_2; \quad J_{j_1 j_2 j_3 j_4}(\omega) = U_1 U_2 U_1 U_2 L_{1212} + U_2 U_1 U_2 U_1 L_{2121}, \dots .$$

Учитывая теперь, что, согласно формулам (14), имеют место равенства

$$U_1 U_2 U_1 = \rho_{12} U_1, \quad U_2 U_1 U_2 = \rho_{12} U_2, \quad U_1 U_2 U_1 U_2 = \rho_{12} U_1 U_2,$$

$$U_2 U_1 U_2 U_1 = \rho_{12} U_2 U_1, \quad U_1 U_2 U_1 U_2 U_1 = \rho_{12}^2 U_1, \quad U_2 U_1 U_2 U_1 U_2 = \rho_{12}^2 U_2, \dots ,$$

$$U_1 U_2 U_1 U_2 \dots U_1 U_2 U_1 = \rho_{12}^k U_1, \quad U_1 U_2 U_1 U_2 \dots U_1 U_2 = \rho_{12}^k U_1 U_2,$$

фундаментальную матрицу решений (45) можно окончательно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{x_0}(x) &= E + \sum_{j_1, j_2}^{(1, 2)} U_{j_1} U_{j_2} L_{j_1 j_2}(x) + \dots + \sum_{j_1, \dots, j_v}^{(1, 2)} U_{j_1} U_{j_2} \dots U_{j_v} L_{j_1 j_2 \dots j_v}(x) + \\ &+ \dots = E + U_1 \psi_1(x) + U_2 \psi_2(x) + U_1 U_2 \psi_3(x) + U_2 U_1 \psi_4(x), \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\psi_1(x) = L_1 + \rho_{12} L_{121} + \rho_{12}^2 L_{1(21)^2} + \dots + \rho_{12}^v L_{1(21)^v} + \dots ,$$

$$\psi_2(x) = L_2 + \rho_{21}L_{212} + \rho_{21}^2L_{2(12)^2} + \dots + \rho_{21}^vL_{2(12)^v} + \dots,$$

$$\psi_3(x) = L_{12} + \rho_{12}L_{(12)^2} + \rho_{12}^2L_{(12)^3} + \dots + \rho_{12}^vL_{(12)^{v+1}} + \dots,$$

$$\psi_4(x) = L_{21} + \rho_{21}L_{(21)^2} + \rho_{21}^2L_{(21)^3} + \dots + \rho_{21}^vL_{(21)^{v+1}} + \dots.$$

А тогда матрица (38) ((46)) будет реализовывать заданный гомоморфизм, поскольку на основании (21)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} d\Phi_{x_0}(x) &= U_1 \int_{\gamma_j} d\psi_1(x) + U_2 \int_{\gamma_j} d\psi_2(x) + U_1 U_2 \int_{\gamma_j} d\psi_3(x) + U_2 U_1 \int_{\gamma_j} d\psi_4(x) = \\ &= U_1 \psi_{1j} + U_2 \psi_{2j} + U_1 U_2 \psi_{3j} + U_2 U_1 \psi_{4j} = V_j - E = 2\pi i W_j, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{1j} &= \int_{\gamma_j} dL_1(x) + \rho_{12} \int_{\gamma_j} dL_{121}(x) + \rho_{12}^2 \int_{\gamma_j} dL_{1(21)^2}(x) + \dots + \rho_{12}^v \int_{\gamma_j} dL_{1(21)^v}(x) + \dots, \\ \psi_{2j} &= \int_{\gamma_j} dL_2(x) + \rho_{21} \int_{\gamma_j} dL_{212}(x) + \rho_{21}^2 \int_{\gamma_j} dL_{2(12)^2}(x) + \dots + \rho_{21}^v \int_{\gamma_j} dL_{2(12)^v}(x) + \dots, \\ \psi_{3j} &= \int_{\gamma_j} dL_{12}(x) + \rho_{12} \int_{\gamma_j} dL_{(12)^2}(x) + \rho_{12}^2 \int_{\gamma_j} dL_{(12)^3}(x) + \dots + \rho_{12}^v \int_{\gamma_j} dL_{(12)^v}(x) + \dots, \\ \psi_{4j} &= \int_{\gamma_j} dL_{21}(x) + \rho_{21} \int_{\gamma_j} dL_{(21)^2}(x) + \rho_{21}^2 \int_{\gamma_j} dL_{(21)^3}(x) + \dots + \rho_{21}^v \int_{\gamma_j} dL_{(21)^v}(x) + \dots. \end{aligned} \tag{47}$$

**Теорема 3.** Если матрицы монодромии  $V_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , задаются в виде (30), то система (37) с матрицами-вычетами (36), (44), (41), (47) имеет фундаментальную матрицу решений вида (46), реализующую заданный гомоморфизм (6).

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Болибрух, А.А.** Проблема Римана – Гильберта / А.А. Болибрух // Успехи матем. наук. – 1990. – Т. 45. – Вып. 2. – С. 3–47.
2. **Лаппо-Данилевский, И.А.** Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / И.А. Лаппо-Данилевский. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957. – 456 с.
3. **Голубева, В.А.** О фуксовых системах дифференциальных уравнений на комплексном проективном пространстве / В.А. Голубева // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 9. – С. 1570–1580.
4. **Dekkers, W.** The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on  $P^1(\mathbb{C})$  / W. Dekkers // Lecture Notes in Math. – 1979. – V. 712. – P. 33–43.

5. **Амелькин, В.В.** Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения / В.В. Амелькин. – М. : Едиториал УРСС, 2010. – 144 с.
6. **Амелькин, В.В.** Решение системы Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и специальной группой монодромии / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. науку. – 2008. – № 2. – С. 16–22.
7. **Итс, А.Р.** Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана / А.Р. Итс [и др.]. – М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2005. – 728 с.
8. **Еругин, Н.П.** Проблема Римана II / Н.П. Еругин // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 5. – С. 779–799.
9. **Амелькин, В.В.** Построение линейной системы Пфаффа типа Фукса с алгебраическим многообразием особенностей / В.В. Амелькин, М.Н. Василевич // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 6. – С. 768–776.

Поступила в редакцию 07.05.2013 г.

УДК 519.6

**В.Т. БОРУХОВ\***

## ІДЕНТИФІКАЦІЯ ІНТЕНСИВНОСТИ ІСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В НЕЛІНЕЙНОМ УРАВНЕННІЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТІ ГІПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

*В статье рассматривается задача восстановления временных компонент функции источника для квазилинейного уравнения теплопроводности гиперболического типа. Эта задача интерпретируется как задача обращения гиперболических динамических систем вход-состояние-выход. Описаны два типа обратных динамических систем.*

### Введение

В настоящей работе рассматривается задача идентификации входного сигнала (временных компонент источника) квазилинейной динамической системы (ДС) гиперболического типа по данным выходного сигнала. Для решения данной задачи применяется метод обратных динамических систем [1-5]. Построение ДС обратных исходным ДС основано на применении аддитивного сдвига (калибровки) состояния ДС относительно источника. Подход обратных ДС к задачам идентификации позволяет ответить на ряд вопросов качественного характера: указать минимальную информацию о начальном состоянии ДС, достаточную в случае обратимости ДС для восстановления входных сигналов [1-3], разделить обратную систему на корректную и некорректную в смысле Адамара части [2], описать степень некорректности задачи [2]. Численная реализация подхода обратных ДС приводит, как правило, к классу экономичных численных алгоритмов решения [4]. Вместе с тем имеется ряд

\* Выпускник физико-математического факультета 1970 г.

открытых вопросов, связанных с применением метода обратных динамических систем для восстановления источников переноса, описываемых квазилинейными уравнениями гиперболического и параболического типов [5]. В частности, открыты вопросы единственности и непрерывной зависимости от параметров решения нестандартной начально-краевой задачи, определяемой обратной ДС.

Работа содержит четыре параграфа. В первом приводится постановка задачи и ее физическая интерпретация. Во втором указана замена переменных (аддитивная калибровка) в пространстве состояний ДС. В третьем и четвертом параграфах построены обратные ДС. Отметим, что задачи, отвечающие обратным ДС, относятся к классу обобщенных нагруженных квазилинейных начально-краевых задач гиперболического типа.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу восстановления входных данных для квазилинейной динамической системы вход–состояние–выход (обозначим ее символом  $\Sigma_{\tau}$ ) гиперболического типа

$$\tau(c(T)T_t)_t + c(T)T_t = (\lambda(T)T_x)_x + \mu_b u(t) + \tau \mu_b \dot{u}(t), \quad (1)$$

$$T(0,t) = g_1(t), \quad T(l,t) = g_2(t), \quad T(x,0) = T_0(x), \quad T_t(x,0) = T_1(x), \quad (2)$$

$$y(t) = \int_0^t T(\xi,t)d\mu_p, \quad t \in [0, t_f], \quad (3)$$

где пара  $(T(\cdot,t), T_t(\cdot,t))$  – состояние ДС в момент времени  $t$ ,  $u(t) = \text{colon}(u_1(t), \dots, u_m(t))$  – входной сигнал системы,  $y(t) = \text{colon}(y_1(t), \dots, y_m(t))$  – выходной сигнал,  $c(T)$ ,  $\lambda(T)$  – абсолютно непрерывные строго положительные функции,  $\tau$  – положительный параметр. Компоненты вектор-строки

$$\mu_b = [\mu_{b1}, \dots, \mu_{bm}] \quad (4)$$

и вектор-столбца

$$\mu_p = \text{colon}[\mu_{p1}, \dots, \mu_{pm}] \quad (5)$$

являются мерами Стильтьеса на отрезке  $[0, l]$  [6]. Таким образом, для произвольной непрерывной функции  $g(x)$  определены интегралы

$$\int_0^l g(\xi) d\mu_b := \int_0^l g(\xi) db(\xi), \quad \int_0^l g(\xi) d\mu_p := \int_0^l g(\xi) dp(\xi),$$

где  $db(\xi) = [db_1(\xi), \dots, db_m(\xi)]$ ,  $dp(\xi) = \text{colon}[dp_1(\xi), \dots, dp_m(\xi)]$ ,  $b_i(\cdot)$ ,  $p_i(\cdot) \in BV[0, l]$ ,  $i = 1, m$ , ( $BV[0, l]$  – пространство вещественных на  $[0, l]$  функций с ограниченной вариацией). Отметим, что в работах [7; 8] изучаются абстрактные линейные и квазилинейные задачи параболического типа с неоднородностями в форме мер Радона, частным случаем которых являются меры Стильтьеса.

Рассматриваем следующую задачу идентификации входных сигналов ДС  $\Sigma_\tau$ : по данным  $y(t), \forall t \in [0, t_f]$ , выходного сигнала определить данные  $u(t), \forall t \in [0, t_f]$ , входного сигнала.

Сформулированная задача относится к классу некорректных обратных задач математической физики [9]. Полагая  $\tau = 0$  и исключая из (2) равенство  $T_t(x, 0) = T_1(x)$ , получим задачу идентификации входных сигналов ДС  $\Sigma_0$  параболического типа, рассмотренную ранее в работе [5].

Коснемся физического содержания рассматриваемого класса задач. Система уравнений (1), (2) описывает процессы теплопереноса с учетом конечной скорости распространения тепла. Поэтому уравнение (1) называют также нелинейным уравнением теплопроводности гиперболического типа. В литературе достаточно широко представлена начально-краевая задача с постоянными параметрами ( $\lambda(T) = const$ ,  $c(T) = const$ ). В этом случае параметр  $\tau$  можно непосредственно интерпретировать как время релаксации теплового потока [10; 11]. Учет параметра  $\tau$  важен, например, при описании быстропротекающих тепловых процессов, индуцированных импульсным лазерным излучением [12]. Компоненты вектор-строки (4) можно интерпретировать как пространственные моды, характеризующие плотность источника тепла, а компоненты вектора  $u(\cdot)$  – как изменяющиеся во времени амплитуды таких мод.

Типичный пример описания источника – обобщенный закон Бугера

$$\sum_{i=1}^m (1 - R_i) e^{-k_i x} u_i(t),$$

характеризующий поглощение энергии излучения полупрозрачной средой на заданном спектре пространственных мод. Здесь  $R_i$  – коэффициент поверхностного отражения,  $u_i(t)$  – интенсивность падающего излучения,  $k_i$  – коэффициент поглощения.

Противоположный случай – точечный источник

$$\sum_{i=1}^m \delta(x - x_i) u_i(t),$$

где  $\delta(x - x_i)$  – сосредоточенная в точке  $x = x_i$  функция Дирака. Задачи идентификации мощности точечных источников возникают, например, при мониторинге состояния окружающей среды [13].

Соотношения (3), (5) описывают способ измерения первой компоненты вектора состояний ДС  $\Sigma_\tau$ . На практике наиболее распространены так называемые точечные измерения

$$y_i(t) = T(x_i^*, t) \equiv \int_0^l \delta(\xi - x_i^*) T(\xi, t) d\xi, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

где  $x_i^*$  ( $i = \overline{1, m}$ ) – заданные точки интервала  $(0, l)$ .

Известны также методики измерения интегральных характеристик процессов переноса. Набор измерений (6) можно использовать также

для аппроксимации данных (3), применяя, например, кубатурные формулы вычисления определенных интегралов (3).

## 2. Калибровочное преобразование

Построение ДС обратных ДС  $\Sigma_\tau$  основано на применении аддитивного сдвига (калибровки) состояния относительно источника. Аддитивная калибровка сохраняет важный параметр – физическую размерность поля  $T(x, t)$ . Полученную в результате применения этой операции ДС будем называть калибровочной. Дифференциалы  $db$ ,  $dp$  перепишем в “поточечной” форме  $db = b'(x)dx$ ,  $dp = p'(x)dx$ , где  $b'(x) := \frac{db}{dx}$ ,  $p'(x) := \frac{dp}{dx}$  – обобщенные производные функций  $b(x)$ ,  $p(x)$ .

Построим калибровочную ДС  $\Sigma_{\tau g}$  для квазилинейной системы  $\Sigma_\tau$ . С помощью стандартной замены переменных  $T = \varphi(S)$ , где  $\varphi(S)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{c(\varphi)},$$

можно избавиться в уравнении (1) от множителя  $c(T)$ . Поэтому без ограничения общности положим  $c(T) \equiv 1$ . Тогда калибровочное преобразование для ДС  $\Sigma_\tau$  имеет вид

$$T(x, t) = w(x, t) + b'(x)v(t), \quad v(t) = \int_0^t (t-s)u(s)ds. \quad (7)$$

Преобразование (7) обобщает калибровочное преобразование для ДС параболического типа [4; 5; 14].

Подстановка (7) в (1)-(3) дает систему уравнений, определяющую ДС  $\Sigma_{\tau g}$ ,

$$\tau w_{tt} + w_t = (\lambda(w + b'v(t))(w + b'v(t))_x)_x, \quad (8)$$

$$w(0, t) + b'(x)v(t)|_{x=0} = g_1(t), \quad (9)$$

$$w(l, t) + b'(x)v(t)|_{x=l} = g_2(t), \quad (10)$$

$$w(x, 0) = T_0(x), \quad w_t(x, 0) = T_1(x), \quad (11)$$

$$y(t) = \int_0^t dp(\xi)(w(\xi, t) + b'(\xi)v(t)). \quad (12)$$

Далее система уравнений (8)-(12) применяется для построения ДС  $\Sigma_{\tau g}^{-1}$ , поскольку, очевидно, что задача восстановления сигнала  $u(\cdot)$  для ДС  $\Sigma_\tau$  эквивалентна задаче восстановления сигнала  $u(\cdot)$  для ДС  $\Sigma_{\tau g}^{-1}$ .

### 3. Обратная ДС $\Sigma_{\tau g}^{-1}$

Предположим, что матрица

$$\mathcal{D} := \int p'(x)b'(x)dx$$

существует и обратима. Тогда уравнение (12) однозначно разрешимо относительно вектора

$$v(t) = -\mathcal{D}^{-1} \left( \int p'(x)w(x,t)dx + y(t) \right). \quad (13)$$

Подставим в (8)-(11) выражение для  $v(t)$  (13). В результате получим следующее описание обратной ДС  $\Sigma_{\tau g}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \tau w_{tt} + w_t = & \left( \lambda \left( w - b' \mathcal{D}^{-1} \int_0^t p'(x)w(x,t)dx + b' \mathcal{D}^{-1} y(t) \right) \times \right. \\ & \left. \times \left( w - b' \mathcal{D}^{-1} \int_0^t p'(x)w(x,t)dx + b' \mathcal{D}^{-1} y(t) \right)_x \right)_x, \end{aligned} \quad (14)$$

$$w(0,t) - b'(x)\mathcal{D}^{-1} \left( \int_0^t p'(x)w(x,t)dx - y(t) \right)|_{x=0} = g_1(t), \quad (15)$$

$$w(l,t) - b'(x)\mathcal{D}^{-1} \left( \int_0^t p'(x)w(x,t)dx - y(t) \right)|_{x=l} = g_2(t), \quad (16)$$

$$w(x,0) = T_0(x), \quad w_t(x,0) = T_1(x), \quad (17)$$

$$u(t) = -\mathcal{D}^{-1} \frac{d^2}{dt^2} \left( \int p'(x)w(x,t)dx + y(t) \right). \quad (18)$$

Для ДС  $\Sigma_{\tau g}^{-1}$ , заданной системой уравнений (14)-(18) выходной сигнал  $y(t)$  исходной системы  $\Sigma_{\tau g}$  является входным, а входной  $u(t)$  – выходным. Система уравнений (14)-(17) представляет собой нестандартную начально-краевую задачу Коши. Действительно, уравнение (14) содержит “сдвинутую” композицию  $\lambda(w - f)$ , где

$$f(x,t) := b' \mathcal{D}^{-1} \left( \int p'(x)w(x,t)dx + y(t) \right).$$

Краевые условия (15), (16) также не являются классическими. Несмотря на свой устрашающий вид, начально-краевая задача (14)-(17) вполне поддается численной обработке. Примеры численного моделирования решения задачи идентификации источников для параболической ДС  $\Sigma_0$  приведены в работе [5].

#### 4. Обратная ДС $\Sigma_{\tau}^{-1}$

Представляет интерес еще один вариант обратной ДС  $\Sigma_{\tau}^{-1}$ . Предположим существование первой и второй производной для правой части уравнения (3), справедливость равенств

$$\frac{d}{dt} \int_0^t T(\xi, t) dp(\xi) = \int_0^t T_t(\xi, t) dp(\xi), \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t T(\xi, t) dp(\xi) = \int_0^t T_{tt}(\xi, t) dp(\xi)$$

и существование матрицы  $\mathcal{D}$ . Тогда, учитывая (1), получим

$$\tau \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = \int_0^t (\lambda(T) T_x)_x dp(x) + \mathcal{D} f(t), \quad f(t) = \tau \dot{u}(t) + u(t).$$

Отсюда, в случае обратимости матрицы  $\mathcal{D}$ , следует, что ДС  $\Sigma_{\tau}^{-1}$  задается системой уравнений

$$\tau T_{tt} + T_t = (\lambda(T) T_x)_x + b'(x) \mathcal{D}^{-1} \left( \tau \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - \int_0^t (\lambda(T) T_x)_x dp(x) \right), \quad (19)$$

$$f(t) = \mathcal{D}^{-1} \left( \tau \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - \int_0^t (\lambda(T) T_x)_x dp(x) \right), \quad (20)$$

$$u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} u(0) + \int_0^t e^{-\left(\frac{t+s}{\tau}\right)} f(s) ds. \quad (21)$$

с начально-краевыми условиями (2).

Второй подход дает решение задачи восстановления интенсивности источника  $u(t)$  с точностью до экспоненциально убывающего слагаемого  $e^{-\frac{t}{\tau}} u(0)$ .

Напомним [15], что уравнения с частными производными, содержащие в коэффициентах функционалы от решения, называются нагруженными. Таким образом, начально-краевые задачи (14)-(17) и (19), (2) можно отнести к классу начально-краевых задач для обобщенных нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа.

#### Заключение

Для решения задач идентификации временных компонент функции источника в нелинейном уравнении теплопроводности гиперболического типа предложен подход, основанный на построении обратных ДС. Установлено, что при некоторых ограничениях на параметры обратная задача идентификации интенсивности источников тепла сводится к прямой начально-краевой задаче для нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Borukhov, V.T. Method of inverse dynamic systems and its application for recovering internal heat sources / V.T. Borukhov, P.M. Kolesnikov // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1988. – V. 31. – № 8. – P. 1549–1556.

2. **Борухов, В.Т.** Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики / В.Т. Борухов, И.В. Гайшун, В.И. Тимошпольский. – Минск, 2009. – 176 с.
3. **Борухов, В.Т.** Восстановление потоков тепла при дифференциальном измерении температуры методом обратных динамических систем / В.Т. Борухов // Инженерно-физический журнал. – 1984. – Т. 47. – № 3. – С. 469–474.
4. **Borukhov, V.T.** Numerical solution of the inverse problem of reconstructing distributed right-hand side of parabolic equation / V.T. Borukhov, P.N. Vabishchevich // Computer Physics Communication. – 2000. – V. 126. – № 1-2. – Р. 1033–1041.
5. **Борухов, В.Т.** Обратимость квазилинейных параболического типа динамических систем вход-состояние-выход / В.Т. Борухов, Г.М. Заяц // Труды 6-й Международной конференции “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений” : в 2 т. – Т. 2 : Дифференциальные уравнения. – Минск : Институт математики НАН Беларуси. – 2012. – С. 19–24.
6. **Колмогоров, А.Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1973. – 375 с.
7. **Amann, H.** Linear parabolic problems involving measures / H. Amann // Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. – 2001. – V. 95. – № 1. – Р. 85–119.
8. **Аманн, Г.** Нелокальные квазилинейные параболические уравнения / Г. Аманн // Успехи матем. наук. – 2005. – Т. 60. – Вып. 6. – С. 21–32.
9. **Леонов, А.С.** Решение некорректно поставленных обратных задач: Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ / А.С. Леонов. – М. : Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2010. – 320 с.
10. **Cattaneo, C.** A form of heat conduction equation which eliminate the paradox of instantaneous propagation / C. Cattaneo // Compte Rendus. – 1958. – V. 247. – Р. 431–433.
11. **Лыков, А.В.** Некоторые проблемные вопросы теории тепломассопереноса. В сб. “Проблема тепло- и массопереноса” / А.В. Лыков. – Минск : Наука и техника, 1976. – С. 9–82.
12. **Al-Khairy, R.T.** Analytical solution of the hyperbolic heat conduction equation for moving semi-infinite medium under the effect of time-dependent laser heat source / R.T. Al-Khairy, Z.M. Al-Ofey // Journal of Appl. Mathematics. – 2009, Article ID 604695, 18 pages.
13. **Марчук, Г.И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г.И. Марчук. – М. : Наука, 1982. – 347 с.
14. Восстановление временной компоненты источника тепла в нелинейном уравнении теплопроводности / В.Т. Борухов [и др.] // Труды 5-й Международной конференции “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений” : в 2 т. – Т. 2 : Дифференциальные уравнения и современные проблемы механики. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С. 17–22.
15. **Нахушев, А.М.** Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М. : Высшая школа, 1995. – 352 с.

УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

## ВЕКТОРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Упорядоченные наборы биекций конечных множеств рассматривал Э. Пост, называя такие наборы полиадическими подстановками. Это название объясняется тем, что на множестве всех рассматриваемых упорядоченных наборов Э. Пост определил полиадическую операцию, являющуюся многоместным аналогом операции умножения обычных подстановок. Относительно этой многоместной операции множество всех полиадических подстановок является полиадической группой. Представляет интерес изучение упорядоченных наборов произвольных отображений, а не только биекций, как у Э. Поста.

### Введение

Согласно Э. Посту [1],  $(k + 1)$ -арная подстановка – это упорядоченный набор  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  взаимно однозначных отображений

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} A_k \xrightarrow{f_k} A_1,$$

где  $A_1, \dots, A_k$  – конечные множества одинаковой мощности. Можно заметить, что в определении  $(k + 1)$ -арной подстановки участвует циклическая подстановка  $(12 \dots k) \in S_k$ , где  $S_k$  – множество всех подстановок на множестве  $\{1, 2, \dots, k\}$ . Эта же циклическая подстановка участвует в определении полиадической операции, которую Э. Пост определил на множестве всех  $k$ -компонентных полиадических подстановок. В данной статье определяется множество  $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$ , элементы которого называются  $k$ -компонентными векторными отображениями, а затем для любой подстановки  $\sigma \in S_k$  на этом множестве определяется полиадическая операция  $[ ]_{m, k}$ . Для подстановки  $\sigma = (12 \dots k)$  и конечных множеств  $A_1, \dots, A_k$  одинаковой мощности множество  $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$  включает в себя множество всех  $(k + 1)$ -арных подстановок Э. Поста. При этом для подстановки  $\sigma = (12 \dots k)$  полиадическая операция  $[ ]_{m, k}$  совпадает с полиадической операцией Э. Поста. Цель данной работы – изучение полиадических операций, в том числе операции  $[ ]_{m, k}$  на подмножествах множества  $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$ .

### 1 Операция $[ ]_{m, k}$

Пусть  $A_1, \dots, A_k$  ( $k \geq 1$ ) – произвольные множества. Для всякой подстановки  $\sigma \in S_k$  определим множество  $\mathbf{F}(\sigma, A_1, \dots, A_k)$  всех пар  $(\sigma, \mathbf{f}) = (\sigma, (f_1, \dots, f_k))$ , где  $f_j$  – отображение  $A_j$  в  $A_{\sigma(j)}$ ,  $j = 1, \dots, k$ .

Ясно, что если  $\sigma \neq \tau$ , то  $\mathbf{F}(\sigma, A_1, \dots, A_k) \cap \mathbf{F}(\tau, A_1, \dots, A_k) = \emptyset$ .

Если  $T \subseteq S_k$ , то положим  $\mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k) = \bigcup_{\sigma \in T} \mathbf{F}(\sigma, A_1, \dots, A_k)$ .

**Определение 1.1.** Элементы множества  $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$  называются  $k$ -компонентными векторными отображениями или вектор-отображениями набора  $(A_1, \dots, A_k)$ . Любой элемент

$$(\sigma, \mathbf{f}) = (\sigma, (f_1, \dots, f_k)) \in \mathbf{F}(\sigma, A_1, \dots, A_k) \subseteq \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$$

называется *k*-компонентным вектор-отображением, соответствующим подстановке  $\sigma$ .

При  $k = 1$  множество  $S_1$  состоит из одной тождественной подстановки  $\varepsilon$ , а множество  $\mathbf{F}(\varepsilon, A_1)$  совпадает с множеством  $\mathbf{F}(A_1)$  всех отображений  $A_1$  в себя. Это означает, что определение 1.1 обобщает определение отображения множества в себя. Однако, как несложно заметить, это определение не может рассматриваться как обобщение отображения одного произвольного множества в другое произвольное множество. Таким обобщением является введенное С.А. Русаковым [2] понятие “последовательности отображений множеств”.

Если для обозначения множества всех отображений  $A$  в  $B$  использовать символ  $\mathbf{F}(A, B)$ , то

$$\mathbf{F}(\sigma, A_1, \dots, A_k) = \{\sigma\} \times (\mathbf{F}(A_1, A_{\sigma(1)}) \times \dots \times \mathbf{F}(A_k, A_{\sigma(k)})),$$

$$\mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k) = T \times (\mathbf{F}(A_1, A_{\sigma(1)}) \times \dots \times \mathbf{F}(A_k, A_{\sigma(k)})),$$

$$\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k) = S_k \times (\mathbf{F}(A_1, A_{\sigma(1)}) \times \dots \times \mathbf{F}(A_k, A_{\sigma(k)})).$$

Зафиксируем  $m \geq 2$  и определим на множестве  $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$   $m$ -арную операцию  $[ ]_{m, k}$  следующим образом: для любых

$$(\sigma_p, \mathbf{f}_p) = (\sigma_p, (f_{11}, \dots, f_{1k})) \in \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$

положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m, k} = (\sigma, (g_1, \dots, g_k)) = (\sigma, \mathbf{g}), \quad (2)$$

где

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_m, \quad (3)$$

$$g_j = f_{1j} f_{2\sigma_1(j)} f_{3\sigma_1\sigma_2(j)} \dots f_{m\sigma_1 \dots \sigma_{m-1}(j)} : A_j \rightarrow A_{\sigma(j)}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (4)$$

Как обычно, полагаем  $\sigma_s(\dots \sigma_2(\sigma_1(j)) \dots) = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_s(j)$ .

Заметим, что в определении операции  $[ ]_{m, k}$  подстановки  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  не обязательно все различные.

В определении операции  $[ ]_{m, k}$  можно считать  $m = 1$ . В этом случае имеем один набор  $(\sigma_1, \mathbf{f}_1) = (\sigma_1, (f_{11}, \dots, f_{1k}))$ , а также  $\sigma = \sigma_1$ ,  $g_j = f_{1j}$ ,  $(\sigma, \mathbf{g}) = (\sigma_1, \mathbf{f}_1)$ . Таким образом  $[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)]_{1, k} = (\sigma_1, \mathbf{f}_1)$ .

Определим на множестве  $S_k$   $m$ -арную операцию  $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m)_m = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$ , которая, как не сложно заметить, является ассоциативной. Другими словами  $\langle S_k, ( )_m \rangle$  –  $m$ -арная полугруппа. Более того,  $\langle S_k, ( )_m \rangle$  –  $m$ -арная группопоид  $m$ -арного группоида  $\langle \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{m, k} \rangle$ .

**Предложение 1.1.** Если подмножество  $T \subseteq S_k$  замкнуто относительно  $m$ -арной операции  $( )_m$ , то множество  $\mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k)$  замкнуто относительно  $m$ -арной операции  $[ ]_{m, k}$ , то есть  $\langle \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k), [ ]_{m, k} \rangle$  –  $m$ -арный подгруппоид  $m$ -арного группоида  $\langle \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{m, k} \rangle$ .

**Доказательство.** Если  $(\sigma_p, \mathbf{f}_p) \in \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , то из (2) – (4) и замкнутости  $T$  относительно  $m$ -арной операции  $( )_m$ , вытекает

$$[(\sigma_1, \mathbf{f}_1) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m, k} \in \mathbf{F}(\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_m, A_1, \dots, A_k) \subseteq \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k).$$

Предложение доказано.

**Замечание 1.1.** Если  $T$  – подполугруппа группы  $S_k$ , то множество  $T$  замкнуто относительно  $m$ -арной операции  $( )_m$ , то есть  $\langle T, ( )_m \rangle$  –  $m$ -арная полугруппа.

Из предложения 1.1, ввиду замечания 1.1, вытекает

**Следствие 1.1.** Если  $T$  – подполугруппа группы  $S_k$ , то множество  $\mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k)$  замкнуто относительно  $m$ -арной операции  $[ ]_{m, k}$ , то есть  $\langle \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k), [ ]_{m, k} \rangle$  –  $m$ -арный подгруппоид  $m$ -арного группоида  $\langle \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{m, k} \rangle$ .

## 2 Операция $[ ]_{m, T, k}$

Для фиксированного  $m \geq 2$  и фиксированного подмножества  $T \subseteq S_k$  определим на  $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$  частичную  $m$ -арную операцию  $[ ]_{m, T, k}$  следующим образом: для любых  $m k$ -компонентных вектор-отображений (1) положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m, T, k} = [(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m, k}$$

если  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \in T$ ; если же по крайней мере одна из подстановок  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  не принадлежит  $T$ , то элемент  $[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m, T, k}$  считается неопределенным.

Ясно, что операции  $[ ]_{m, k}$  и  $[ ]_{m, S_k, k}$ , определенные на всем множестве  $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$ , совпадают:  $[ ]_{m, k} = [ ]_{m, S_k, k}$ .

Если  $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in T$ , то согласно определению операции  $[ ]_{m, T, k}$

$$[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m, T, k} = (\sigma, (g_1, \dots, g_k)) = (\sigma, \mathbf{g}),$$

где  $\sigma$  и  $\mathbf{g}$  определяются с помощью (3) и (4) соответственно.

**Замечание 2.1.** Если подмножество  $T \subseteq S_k$  замкнуто относительно  $m$ -арной операции  $( )_m$ , то согласно определению операции  $[ ]_{m, T, k}$  она определена для любых  $m$  элементов множества  $\mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k)$ , а ее результат принадлежит этому же множеству. Поэтому в этом случае операции  $[ ]_{m, k}$  и  $[ ]_{m, T, k}$  определены на всем указанном множестве и совпадают.

В связи с этим предложение 1.1 и следствие 1.1 позволяют сформулировать следующее

**Предложение 2.1.** Если подмножество  $T \subseteq S_k$  замкнуто относительно  $m$ -арной операции  $( )_m$ , в частности, если  $T$  – подполугруппа группы  $S_k$ , то  $\langle \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k), [ ]_{m, T, k} \rangle$  –  $m$ -арный группоид.

## 3 Операция $[ ]_{m, \tau_1, \dots, \tau_m, k}$

Для фиксированного  $m \geq 2$  и фиксированных подстановок  $\tau_1, \dots, \tau_m \in S_k$  определим на  $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$  частичную  $m$ -арную операцию  $[ ]_{m, \tau_1, \dots, \tau_m, k}$  следующим образом: для любых  $m k$ -компонентных вектор-отображений (1) положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m, \tau_1, \dots, \tau_m, k} = [(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m, k},$$

если  $\sigma_1 = \tau_1, \dots, \sigma_m = \tau_m$ ; если же хотя бы одно из этих равенств не выполняется, то элемент  $[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m, \tau_1, \dots, \tau_m, k}$  считается неопределенным.

**Замечание 3.1.** Если  $\tau_1, \dots, \tau_m \in T \subseteq S_k$  то, ввиду определений операций  $[ ]_{m, \tau_1, \dots, \tau_m, k}$  и  $[ ]_{m, T, k}$ , имеем

$$[(\tau_1, \mathbf{f}_1)(\tau_2, \mathbf{f}_2) \dots (\tau_m, \mathbf{f}_m)]_{m, \tau_1, \dots, \tau_m, k} =$$

$$[(\tau_1, \mathbf{f}_1)(\tau_2, \mathbf{f}_2) \dots (\tau_m, \mathbf{f}_m)]_{m, k} = [(\tau_1, \mathbf{f}_1)(\tau_2, \mathbf{f}_2) \dots (\tau_m, \mathbf{f}_m)]_{m, T, k}.$$

для любых

$$(\tau_1, \mathbf{f}_1), (\tau_2, \mathbf{f}_2), \dots, (\tau_m, \mathbf{f}_m) \in \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k).$$

**Замечание 3.2.** Если  $\tau_1, \dots, \tau_m, \tau = \tau_1 \dots \tau_m \in T \subseteq S_k$ , то, ввиду (2) и (3),

$$[(\tau_1, \mathbf{f}_1)(\tau_2, \mathbf{f}_2) \dots (\tau_m, \mathbf{f}_m)]_{m, k} \in \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k),$$

откуда, учитывая замечание 3.1, получаем

$$[(\tau_1, \mathbf{f}_1)(\tau_2, \mathbf{f}_2) \dots (\tau_m, \mathbf{f}_m)]_{m, \tau_1, \dots, \tau_m, k} \in \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k).$$

Таким образом, если  $\tau_1, \dots, \tau_m, \tau = \tau_1 \dots \tau_m \in T \subseteq S_k$ , то операцию  $[\ ]_{m, \tau_1, \dots, \tau_m, k}$  можно рассматривать как частичную  $m$ -арную операцию на  $\mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k)$ , так как она определена не на всем этом множестве. Например, если  $\tau_1 \neq \tau_2$ , то для элементов

$$(\tau_1, \mathbf{f}_1), (\tau_2, \mathbf{f}_2), \dots, (\tau_m, \mathbf{f}_m) \in \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k)$$

элемент  $[(\tau_2, \mathbf{f}_2)(\tau_1, \mathbf{f}_1)(\tau_3, \mathbf{f}_3) \dots (\tau_m, \mathbf{f}_m)]$  считается неопределенным.

#### 4 Асоціативність операції $[\ ]_{l, k}$

В некоторых случаях, как в следующей теореме, для сокращения записей вместо символа  $(\sigma_r, \mathbf{f}_r)$  будем пользоваться символом  $\mathbf{f}_r$ , то есть будем полагать  $\mathbf{f}_r = (\sigma_r, \mathbf{f}_r)$ .

**Теорема 4.1.** Для всех  $i$  и  $l$  таких, что  $1 \leq i+1 \leq i+l \leq m$  и любых

$$\mathbf{f}_1 = (\sigma_1, \mathbf{f}_1), \dots, \mathbf{f}_m = (\sigma_m, \mathbf{f}_m) \in \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$$

имеет место равенство

$$\begin{aligned} & [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_m]_{m, \sigma_1, \dots, \sigma_m, k} = \\ & = [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_i [\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+l}]_{l, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{i+l}, k} \mathbf{f}_{i+l+1} \dots \mathbf{f}_m]_{m-l+1, \sigma_1, \dots, \sigma_i, \mu, \sigma_{i+l+1}, \dots, \sigma_m, k}, \end{aligned}$$

где  $\mu = \sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l}$ .

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 4.1.3 из [3].

Из теоремы 4.1 вытекает

**Следствие 4.1.** Для всех  $i, j, l_1$  и  $l_2$  таких, что

$$1 \leq i+1 \leq i+l_1 \leq m, 1 \leq j+1 \leq j+l_2 \leq m$$

и любых

$$\mathbf{f}_1 = (\sigma_1, \mathbf{f}_1), \dots, \mathbf{f}_m = (\sigma_m, \mathbf{f}_m) \in \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$$

имеет место равенство

$$\begin{aligned} & [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_i [\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+l_1}]_{l_1, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{i+l_1}, k} \mathbf{f}_{i+l_1+1} \dots \mathbf{f}_m]_{m-l_1+1, \sigma_1, \dots, \sigma_i, \mu_1, \sigma_{i+l_1+1}, \dots, \sigma_m, k} = \\ & = [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_j [\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l_2}]_{l_2, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_{j+l_2}, k} \mathbf{f}_{j+l_2+1} \dots \mathbf{f}_m]_{m-l_2+1, \sigma_1, \dots, \sigma_j, \mu_2, \sigma_{i+l_2+1}, \dots, \sigma_m, k} \end{aligned}$$

где  $\mu_1 = \sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l_1}$ ,  $\mu_2 = \sigma_{j+1} \dots \sigma_{j+l_2}$ .

Полагая в следствии 4.1  $l_1 = l_2 = l$ ,  $m = 2l - 1$ , получим

**Следствие 4.2.** Для всех  $i, j$  и  $l$  таких, что  $0 \leq i \leq l-1$ ,  $0 \leq j \leq l-1$  и любых

$$\mathbf{f}_1 = (\sigma_1, \mathbf{f}_1), \dots, \mathbf{f}_{2l-1} = (\sigma_{2l-1}, \mathbf{f}_{2l-1}) \in \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$$

имеет место равенство

$$[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_i [\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+l}]_{l, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{i+l}, k} \mathbf{f}_{i+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l, \sigma_1, \dots, \sigma_i, \mu_1, \sigma_{i+l+1}, \dots, \sigma_{2l-1}, k} = \\ = [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_j [\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l}]_{l, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_{j+l}, k} \mathbf{f}_{j+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l, \sigma_k, \dots, \sigma_j, \mu_2, \sigma_{j+l+1}, \dots, \sigma_{2l-1}, k},$$

где  $\mu_1 = \sigma_{i+1} \dots \sigma_{i+l}$ ,  $\mu_2 = \sigma_{j+1} \dots \sigma_{j+l}$ .

**Теорема 4.2.** Для любого  $l \geq 2$   $l$ -арная операция  $[ ]_{l, k}$  определенная на множестве  $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$ , ассоциативна, то есть универсальная алгебра  $\langle \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, k} \rangle$  является  $l$ -арной полугруппой.

**Доказательство.** Если  $\mathbf{f}_1 = (\sigma_1, \mathbf{f}_1), \dots, \mathbf{f}_{2l-1} = (\sigma_{2l-1}, \mathbf{f}_{2l-1})$  – произвольные элементы из  $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$ , то по следствию 4.2 для них верно равенство из формулировки этого следствия. Так как, согласно определению операции  $[ ]_{m, \tau_1, \dots, \tau_m, k}$ ,

$$[\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+l}]_{l, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{i+l}, k} = [\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+k}]_{l, k},$$

$$[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_i [\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+l}]_{l, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{i+l}, k} \mathbf{f}_{i+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l, \sigma_1, \dots, \sigma_i, \mu_1, \sigma_{i+l+1}, \dots, \sigma_{2l-1}, k} = \\ = [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_i [\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+l}]_{l, k} \mathbf{f}_{i+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l, k}, \\ [\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l}]_{l, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_{j+l}, k} = [\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l}]_{l, k},$$

$$[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_j [\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l}]_{l, \sigma_{j+1}, \dots, \sigma_{j+l}, k} \mathbf{f}_{j+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l, \sigma_1, \dots, \sigma_j, \mu_2, \sigma_{j+l+1}, \dots, \sigma_{2l-1}, k} = \\ = [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_j [\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l}]_{l, k} \mathbf{f}_{j+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l, k},$$

то равенство из формулировки следствия 4.2 может быть переписано следующим образом

$$[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_i [\mathbf{f}_{i+1} \dots \mathbf{f}_{i+l}]_{l, k} \mathbf{f}_{i+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l, k} = [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_j [\mathbf{f}_{j+1} \dots \mathbf{f}_{j+l}]_{l, k} \mathbf{f}_{j+l+1} \dots \mathbf{f}_{2l-1}]_{l, k},$$

где  $0 \leq i \leq l - 1$ ,  $0 \leq j \leq l - 1$ . Теорема доказана.

Из предложения 1.1 и теоремы 4.2 вытекает

**Следствие 4.3.** Если множество  $T \subseteq S_k$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $( )_l$ , то  $\langle \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, k} \rangle$  –  $l$ -арная подполугруппа  $l$ -арной полугруппы  $\langle \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, k} \rangle$ .

Из следствия 4.3 вытекает

**Следствие 4.4.** Если  $T$  – подполугруппа группы  $S_k$ , то  $\langle \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, k} \rangle$  –  $l$ -арная подполугруппа  $l$ -арной полугруппы  $\langle \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, k} \rangle$ .

Из следствия 4.3, ввиду замечания 2.1, вытекает

**Следствие 4.5.** Если подмножество  $T \subseteq S_k$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $( )_l$ , в частности, если  $T$  – подполугруппа группы  $S_k$ , то  $\langle \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, T, k} \rangle$  –  $l$ -арная полугруппа.

**Замечание 4.1.** Ясно, что если  $\sigma \in S_k$ ,  $T = \{\sigma\}$ , то частичные  $l$ -арные операции  $[ ]_{l, T, k}$  и  $[ ]_{l, \underbrace{\sigma, \dots, \sigma}_l, k}$ , определенные на множестве  $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$ , совпадают. Для сокращения записей положим  $[ ]_{l, \sigma, k} = [ ]_{l, \{\sigma\}, k} = [ ]_{l, \underbrace{\sigma, \dots, \sigma}_l, k}$ . Таким образом,

$$[(\sigma, \mathbf{f}_1) \dots (\sigma, \mathbf{f}_l)]_{l, \sigma, k} = [(\sigma, (f_{11}, \dots, f_{1k})) \dots (\sigma, (f_{l1}, \dots, f_{lk}))]_{l, \sigma, k} = \mathbf{g} = (\sigma^l, (g_1, \dots, g_k)),$$

где

$$g_j = f_{1j} f_{2\sigma(j)} f_{3\sigma^2(j)} \dots f_{l\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, \dots, k.$$

В частности, если  $\sigma^l = \sigma$ , то

$$g_j = f_{1j} f_{2\sigma(j)} f_{3\sigma^2(j)} \dots f_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} f_{lj}, j = 1, \dots, k.$$

Из следствия 4.5 вытекает

**Следствие 4.6.** *Если  $\sigma^l = \sigma$ , то  $\langle \mathbf{F}(\sigma, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  –  $l$ -арная полугруппа.*

**Следствие 4.7.** *Если  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ , то  $\langle \mathbf{F}(\sigma, A_1, \dots, A_k), [ ]_{k+1, \sigma, k} \rangle$  –  $(k+1)$ -арная полугруппа.*

Полагая в следствии 4.7  $\sigma = (12 \dots k)$ , получим

**Следствие 4.8.** *Универсальная алгебра  $\langle \mathbf{F}((12 \dots k), A_1, \dots, A_k), [ ]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$  является  $(k+1)$ -арной полугруппой.*

Так как для любого нечетного  $l$  множество  $T_k$  всех нечетных подстановок из  $S_k$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $( )_p$ , то из следствия 4.3 вытекает

**Следствие 4.9.** *Для любого нечетного  $l$  универсальная алгебра  $\langle \mathbf{F}(T_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, k} \rangle$  является  $l$ -арной полугруппой. В частности,  $\langle \mathbf{F}(T_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{3, k} \rangle$  – тернарная полугруппа.*

### 5 $l$ -Арная группа $\langle \mathbf{S}(S_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, k} \rangle$

Пусть  $A_1, \dots, A_k$  – множества одинаковой мощности. Выделим во множестве  $\mathbf{F}(\sigma, A_1, \dots, A_k)$  подмножество  $\mathbf{S}(\sigma, A_1, \dots, A_k)$  всех элементов  $(\sigma, \mathbf{f}) = (\sigma, (f_1, \dots, f_k))$ , у которых каждая компонента  $f_j$  является биекцией  $A_j$  на  $A_{\sigma(j)}$ . Если  $T \subseteq S_k$ , то положим

$$\mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k) = \bigcup_{\sigma \in T} \mathbf{S}(\sigma, A_1, \dots, A_k).$$

Понятно, что множество  $\mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k)$  совпадает с подмножеством всех элементов множества  $\mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k)$ , у которых все компоненты являются биекциями. В частности,  $\mathbf{S}(S_k, A_1, \dots, A_k)$  – подмножество всех элементов из  $\mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k)$ , у которых все компоненты – биекции.

**Замечание 5.1.** Если подмножество  $T \subseteq S_k$  замкнуто относительно  $m$ -арной операции  $( )_m$ ,

$$(\sigma_i, \mathbf{f}_i) = (\sigma, (f_{i1}, \dots, f_{ik})) \in \mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k), i = 1, \dots, m,$$

то, согласно (4), все  $g_j$  в (2) являются биекциями, откуда, а также из (3) и замечания 2.1, следует

$$[(\sigma_1, \mathbf{f}_1)(\sigma_2, \mathbf{f}_2) \dots (\sigma_m, \mathbf{f}_m)]_{m, T, k} \in \mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k),$$

что означает замкнутость в этом случае множества  $\mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k)$ , относительно  $m$ -арной операции  $[ ]_{m, T, k}$ .

Из следствия 4.5, ввиду замечания 5.1, вытекает

**Следствие 5.1.** *Если подмножество  $T \subseteq S_k$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $( )_p$ , то универсальная алгебра  $\langle \mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, T, k} \rangle$  является  $l$ -арной подполугруппой  $l$ -арной полугруппы  $\langle \mathbf{F}(T, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, T, k} \rangle$ . В частности,  $\langle \mathbf{S}(S_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, k} \rangle$  –  $l$ -арная подполугруппа  $l$ -арной полугруппы  $\langle \mathbf{F}(S_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, k} \rangle$ .*

Имеет место более сильное утверждение.

**Теорема 5.1.** Если  $\langle T, ()_l \rangle$  –  $l$ -арная подгруппа  $l$ -арной группы  $\langle S_k, ()_l \rangle$ , то  $\langle S(T, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, T, k} \rangle$  –  $l$ -арная подгруппа  $l$ -арной полугруппы  $\langle F(T, (A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, T, k}) \rangle$ . В частности,  $\langle S(S_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, k} \rangle$  –  $l$ -арная подгруппа  $l$ -арной полугруппы  $\langle F(S_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, k} \rangle$ .

**Доказательство.** Согласно следствию 5.1  $\langle S(T, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, T, k} \rangle$  –  $l$ -арная полугруппа. Осталось доказать разрешимость в  $\langle S(T, A_1, \dots, A_k) \rangle$  уравнений

$$[\mathbf{x}\mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_l]_{l, T, k} = \mathbf{f}, [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_{l-1} \mathbf{y}]_{l, T, k} = \mathbf{f}, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{f}_i = (\sigma_i, f_i) = (\sigma_i, (f_{i1}, \dots, f_{ik})) \in S(T, A_1, \dots, A_k), i = 1, \dots, l,$$

$$\mathbf{f} = (\sigma, g) = (\sigma, (g_1, \dots, g_k)) \in S(T, A_1, \dots, A_k).$$

В  $l$ -арной группе  $\langle T, ()_l \rangle$  существуют такие  $\delta, \rho \in T$ , что

$$(\delta\sigma_2 \dots \sigma_l)_l = \sigma, (\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}\rho)_l = \sigma.$$

Так как для любого  $j = 1, \dots, k$  имеем

$$f_{l\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)} : A_{\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)} \rightarrow A_{\sigma_l(\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j))} = A_{\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}\sigma_l(j)} = A_{\sigma(j)},$$

то

$$f_{l\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)}^{-1} : A_{\sigma(j)} \rightarrow A_{\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)}.$$

Аналогично

$$f_{(l-1)\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-2}(j)}^{-1} : A_{\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)} \rightarrow A_{\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-2}(j)}, \dots$$

$$\dots, f_{3\delta\sigma_2(j)}^{-1} : A_{\delta\sigma_2\sigma_3(j)} \rightarrow A_{\delta\sigma_2(j)}, f_{2\delta(j)}^{-1} : A_{\delta\sigma_2(j)} \rightarrow A_{\delta(j)}.$$

Кроме того,  $g_j$  – биекция  $A_j$  на  $A_{\sigma(j)}$ . Таким образом, для любого  $j = 1, \dots, k$  определено отображение

$$u_j = g_j f_{l\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)}^{-1} \dots f_{3\delta\sigma_2(j)}^{-1} f_{2\sigma(j)}^{-1},$$

которое является биекцией  $A_j$  на  $A_{\delta(j)}$ . А так как  $\delta \in T$ , то

$$\mathbf{u} = (\delta, (u_1, \dots, u_k)) \in S(T, A_1, \dots, A_k).$$

Покажем, что  $\mathbf{u}$  является решением первого уравнения (5). Для этого положим

$$[\mathbf{u}\mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_l]_{l, T, k} = (\mu, (b_1, \dots, b_k)). \quad (6)$$

Согласно замечаниям 2.1 и 5.1 операции  $[ ]_{l, k}$  и  $[ ]_{l, T, k}$  на множестве  $S(T, A_1, \dots, A_k)$  совпадают. Поэтому

$$[\mathbf{u}\mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_l]_{l, T, k} = [\mathbf{u}\mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_l]_{l, k},$$

то есть

$$[\mathbf{u}\mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_l]_{l, k} = (\mu, (b_1, \dots, b_k)).$$

Согласно определению операции  $[ ]_{l, k}$  имеем  $\mu = \delta\sigma_2 \dots \sigma_l = \sigma$ ,

$$\begin{aligned} b_j &= u_j f_{l\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)}^{-1} \dots f_{3\delta\sigma_2(j)}^{-1} \dots f_{2\sigma(j)}^{-1} = \\ &= g_j f_{l\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)}^{-1} \dots f_{3\delta\sigma_2(j)}^{-1} f_{2\delta(j)}^{-1} f_{3\delta\sigma_2(j)} \dots f_{l\delta\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)} = g_j, j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Следовательно,  $(\mu, (b_1, \dots, b_k)) = (\sigma, (g_1, \dots, b_k)) = \mathbf{f}$ , откуда и из (6) вытекает

$$[\mathbf{u}\mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_l]_{l,T,k} = \mathbf{f},$$

то есть первое уравнение из (5) разрешимо в  $\mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k)$ .

Так как для любого  $s = 1, \dots, k$  имеем

$$f_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(s)}^{-1} : A_{\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(s)} \rightarrow A_{\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(s)},$$

$$f_{(l-2)\sigma_1 \dots \sigma_{l-3}(s)}^{-1} : A_{\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(s)} \rightarrow A_{\sigma_1 \dots \sigma_{l-3}(s)}, \dots$$

$$\dots, f_{2\sigma_1(s)}^{-1} : A_{\sigma_1\sigma_2(s)} \rightarrow A_{\sigma_1(s)}, f_{1s}^{-1} : A_{\sigma_1(s)} \rightarrow A_s, g_s : A_s \rightarrow A_{\sigma(s)},$$

то определено отображение

$$v_{\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(s)} = f_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(s)}^{-1} f_{(l-2)\sigma_1 \dots \sigma_{l-3}(s)}^{-1} \dots f_{2\sigma_1(s)}^{-1} f_{1s}^{-1} g_s,$$

которое является биекцией  $A_{\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(s)}$  на  $A_{\sigma(s)}$ . А так как

$$\sigma(s) = \sigma_1 \dots \sigma_{l-1} \rho(s) = \rho(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(s)),$$

то

$$v_{\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(s)} : A_{\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(s)} \rightarrow A_{\rho(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(s))},$$

откуда, полагая  $\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(s) = j$ , получим  $v_j : A_j \rightarrow A_{\rho(j)}$ . Последнее соотношение верно для любого  $j = 1, \dots, k$ , так как множество

$$\{\sigma_1 \dots \sigma_{l-1(1)}, \dots, \sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(k)\}$$

совпадает с множеством  $\{1, \dots, k\}$ .

Так как  $\rho \in T$ , то  $\mathbf{v} = \{\rho, (v_1, \dots, v_k)\} \in \mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k)$ . Покажем, что  $\mathbf{v}$  является решением второго уравнения из (5). Для этого положим

$$[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_{l-1} \mathbf{v}]_{l,T,k} = (\eta, (c_1, \dots, c_k)). \quad (7)$$

Снова, используя совпадение операций  $[ ]_{l,k}$  и  $[ ]_{l,T,k}$  на множестве  $\mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k)$ , получим

$$[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_{l-1} \mathbf{v}]_{l,k} = (\eta, (c_1, \dots, c_k)).$$

Согласно определению операции  $[ ]_{l,k}$  имеем  $\eta = \sigma_1 \dots \sigma_m \rho = \sigma$ ,

$$\begin{aligned} c_s &= f_{1s} f_{2\sigma_1(s)} \dots f_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(s)} v_{\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(s)} = \\ &= f_{1s} f_{2\sigma_1(s)} \dots f_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(s)} f_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(s)}^{-1} \dots f_{2\sigma_1(s)}^{-1} f_{1s}^{-1} g_s = g_s \end{aligned}$$

для любого  $s = 1, \dots, k$ . Следовательно,

$$(\eta, (c_1, \dots, c_k)) = (\sigma, (g_1, \dots, g_k)) = \mathbf{f},$$

откуда и из (7) вытекает  $[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_{l-1} \mathbf{v}]_{l,T,k} = \mathbf{f}$ , то есть второе уравнение из (5) также разрешимо в  $\mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k)$ . Таким образом, доказано, что  $\langle \mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l,T,k} \rangle$  —  $-l$ -арная группа.

Полагая  $T = S_k$  и учитывая совпадение операций  $[ ]_{l,k}$  и  $[ ]_{l,S_k,k}$ , получим утверждение теоремы для множества  $\mathbf{S}(S_k, A_1, \dots, A_k)$ . Теорема доказана.

Из теоремы 5.1 вытекает

**Следствие 5.2.** [4]. *Если  $\langle T, () \rangle$  —  $-l$ -арная группа, в частности, группа, то  $\langle \mathbf{S}(T, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l,k} \rangle$  —  $l$ -арная подгруппа  $l$ -арной группы  $\langle \mathbf{S}(S_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l,k} \rangle$ .*

**Следствие 5.3.** [3, 4]. Если  $\sigma^l = \sigma$ , то  $\langle S(\sigma, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  –  $l$ -арная группа.

**Следствие 5.4.** Если  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ , то  $\langle S(\sigma, A_1, \dots, A_k), [ ]_{k+1, \sigma, k} \rangle$  –  $(k+1)$ -арная группа.

Полагая в следствии 5.4  $\sigma = (12 \dots k)$ , получим

**Следствие 5.5** [1, E. Post; 2, С.А. Русаков; 5, F. Sioson]. Универсальная алгебра  $\langle S((12 \dots k), A_1, \dots, A_k), [ ]_{k+1(12 \dots k), k} \rangle$  является  $(k+1)$ -арной группой.

**Следствие 5.6.** Для любого нечетного  $l$  универсальная алгебра  $\langle S(T_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{l, k} \rangle$  является  $l$ -арной группой. В частности,  $\langle S(T_k, A_1, \dots, A_k), [ ]_{3, k} \rangle$  – тернарная группа.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002).

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208–350.
2. *Русаков, С.А.* Алгебраические  $n$ -арные системы / С.А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
3. *Гальмак, А.М.*  $n$ -Арные группы. – Ч. 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 324 с.
4. *Гальмак, А.М.*  $n$ -Арные перестановки / А.М. Гальмак // Кн. Некоторые вопросы алгебры и прикладной математики. – Гомель, 2002. – С. 45–49.
5. *Sioson, F.M.* On Free Abelian  $n$ -Groups I / F.M. Sioson // Proc. Japan Acad. – 1967. – Vol. 43. – P. 876–879.

Поступила в редакцию 22.03.2012 г.

УДК 517+530.1

*С.В. ЖЕСТКОВ, В.С. НОВАШИНСКАЯ\**

## К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТЛЫХ И ТЕМНЫХ СОЛИТОНОВ (2+1)-МЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА СО СТЕПЕННЫМИ ЗАКОНАМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ЗАТУХАНИЯ

Известно [1-5], что нелинейные модели уравнений Шредингера с затуханием обладают рядом преимуществ перед классическими уравнениями Шредингера, используемыми в приложениях. Поэтому исследование вопросов, связанных с возможностью существования светлых и темных солитонов (2+1)-мерных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) со степенными законами нелинейности и затухания является актуальной задачей. В основу развивающей методики исследования положен анализ механизма баланса между дисперсионными и нелинейными членами рассматриваемых уравнений, который и обеспечивает существование солитонов.

\* Выпускница физико-математического факультета 2009 г.

### I. Построение и анализ системы определяющих уравнений для НУШ (I)

Рассмотрим  $(2+1)$ -мерное НУШ

$$(1): \quad iq_t + a(q_{xx} + q_{yy}) + b|q|^{2m}q = i[c_1q_x + c_2q_y]|q|^{2m}, \quad m > 0,$$

где  $a, b, c_1, c_2$  – произвольные действительные числа. Солитонные решения уравнения (1) будем строить в виде

$$q(t, x, y) = u(t, x, y)\exp(i\xi), \quad \xi = k_1x + k_2y + \omega t + \varphi, \quad (2)$$

где  $u(t, x, y)$  – неизвестная действительная волновая функция,  $k_1, k_2$  – частоты солитона по осям  $x, y$  соответственно,  $\omega$  – частота солитона по  $t$ ,  $\varphi$  – начальная фаза. Подставляя (2) в (1), получим

$$\begin{aligned} iu_t - \omega u + a[u_{xx} + u_{yy} + 2i(k_1u_x + k_2u_y) - k^2u] + bu^{2m+1} = \\ = i[c_1(u_x + ik_1u) + c_2(u_y + ik_2u)]u^{2m}, \quad k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (3) найдем

$$\begin{aligned} \text{Im: } u_t + 2a(k_1u_x + k_2u_y) = (c_1u_x + c_2u_y)u^{2m}, \\ \text{Re: } -\omega u + a[u_{xx} + u_{yy} - k^2u] + bu^{2m+1} = -(c_1k_1 + c_2k_2)u^{2m+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) является определяющей системой уравнений для солитонных решений вида (2), т.е. справедлива

**Теорема 1.** Для того чтобы уравнение (1) имело решение вида (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (4).

Решение системы (4) будем строить в форме бегущей волны, т.е.

$$u(t, x, y) = f(\eta), \quad \eta = \alpha_1x + \alpha_2y - vt + \psi, \quad (5)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – величины, обратные к ширине солитона по осям  $x, y$  соответственно,  $v$  – скорость солитона,  $\psi$  – начальная фаза. Подставляя (5) в (4), получим

$$-vf'(\eta) + 2a(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)f'(\eta) = (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2)f'(\eta)f^{2m}(\eta), \quad (6)$$

$$-\omega f(\eta) + a[\alpha^2 f''(\eta) - k^2 f(\eta)] + bf^{2m+1}(\eta) = -(c_1k_1 + c_2k_2)f^{2m+1}(\eta), \quad \alpha^2 \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2. \quad (7)$$

Предположим, что

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0. \quad (8)$$

Тогда из уравнения (6) найдем скорость солитона

$$v = 2a(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2). \quad (9)$$

Из уравнения (7) получим

$$a\alpha^2 f''(\eta) - (\omega + ak^2)f(\eta) + (b + c_1k_1 + c_2k_2)f^{2m+1}(\eta) = 0$$

или

$$a\alpha^2 f''(\eta) - Mf(\eta) + Nf^{2m+1}(\eta) = 0, \quad (10)$$

где

$$M \equiv \omega + ak^2, \quad N \equiv b + c_1 k_1 + c_2 k_2.$$

Таким образом, система определяющих уравнений (4) сводится к уравнению (10) при выполнении соотношений (8), (9).

Рассмотрим простейший случай, когда  $f(\eta) \equiv d = \text{const}$ . Тогда из уравнения (10) найдем

$$Nd^{2m} = M \quad \text{или} \quad d^{2m} = \frac{M}{N}, \quad \text{если } MN > 0. \quad (11)$$

**Теорема 2.** Пусть  $MN > 0$  и  $d_*$  – корень уравнения (11). Тогда при выполнении соотношений (8), (9) уравнение (1) имеет решение вида

$$q(t, x, y) = d_* \exp\{i(k_1 x + k_2 y + \omega t + \varphi)\},$$

которое описывает чисто колебательный процесс.

### Построение светлых (bright) солитонов НУШ (I)

Пусть выполнены соотношения (8), (9). Исследуем уравнение (10). В качестве неизвестной волновой функции  $f(\eta)$  возьмем анзац вида [4]

$$f(\eta) = Ach^{-\mu}\eta, \quad \mu > 0, \quad (12)$$

где  $A$  – искомая амплитуда солитона. Подставляя (12) в (10), получим

$$a\alpha^2\mu[(\mu+1)sh^2\eta - ch^2\eta] - Mch^2\eta + NA^{2m}ch^{2-2m\mu}\eta = 0. \quad (13)$$

Из анализа уравнения (13) следует, что

$$\mu = \frac{1}{m}, \quad \omega = d(\alpha^2\mu^2 - k^2), \quad A^{2m} = \alpha^2\mu(\mu+1)\frac{a}{N}, \quad \text{если } aN > 0. \quad (14)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 3.** Пусть  $aN > 0$  и выполнены соотношения (8), (9). Тогда уравнение (1) имеет решение в виде светлого солитона

$$q(t, x, y) = Ach^{-\frac{1}{m}}(\alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi) \exp\{i(k_1 x + k_2 y + \omega t + \varphi)\},$$

параметры  $A$ ,  $\omega$  которого определяются формулами (14), причем огибающая светлого солитона  $f(\eta)$  удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$f(-\infty) = f(+\infty) = 0.$$

### Построение темных (dark) солитонов НУШ (I)

Пусть выполнены соотношения (8), (9). Исследуем уравнение (10). В качестве неизвестной волновой функции  $f(\eta)$  возьмем анзац вида [5]

$$f(\eta) = Ath^\mu\eta, \quad \mu > 0, \quad (15)$$

где  $A$  – искомая амплитуда солитона. Подставляя (15) в (10), получим

$$a\alpha^2\mu[(\mu-1) - 2\mu h^2\eta + (\mu+1)th^4\eta] - Mth^2\eta + NA^{2m}th^{2+2m\mu}\eta = 0. \quad (16)$$

Из анализа уравнения (16) следует, что

$$\mu = \frac{1}{m} = 1, \quad \omega = -a(2\alpha^2 + k^2), \quad A^2 = -2\alpha^2 \frac{a}{N}, \quad \text{если } aN < 0. \quad (17)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 4.** Пусть  $m = 1$ ,  $aN < 0$  и выполнены соотношения (8), (9).

Тогда уравнение (1) имеет решение в виде темного солитона

$$q(t, x, y) = Ath(\alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi) \exp\{i(k_1 x + k_2 y + \omega t + \varphi)\},$$

параметры  $A$ ,  $\omega$  которого определяются формулами (17), причем функция  $f(\eta)$  удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$f(-\infty) = -A, \quad f(+\infty) = A.$$

## II. Построение и анализ системы определяющих уравнений для НУШ (II)

Рассмотрим  $(2+1)$ -мерное НУШ

$$(II): iq_t + a(q_{xx} + q_{yy}) + b|q|^{2m}q = i[c_1q_x + c_2q_y]q^{2m} + icq, \quad m > 0 \quad (18)$$

с произвольными действительными коэффициентами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ . Отметим, что наличие дополнительного линейного члена в правой части изменяет форму огибающей решения (5).

Солитонные решения уравнения (18) будем строить в виде (2). Подставляя (2) в (18), получим

$$\begin{aligned} iu_t - \omega u + a[u_{xx} + u_{yy} + 2i(k_1 u_x + k_2 u_y) - k^2 u] + bu^{2m+1} = \\ = i[c_1(u_x + ik_1 u) + c_2(u_y + ik_2 u)]u^{2m} + icu, \quad k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (19) найдем

$$\text{Im: } u_t + 2a(k_1 u_x + k_2 u_y) = (c_1 u_x + c_2 u_y)u^{2m} + cu, \quad (20)$$

$$\text{Re: } -\omega u + a[u_{xx} + u_{yy} - k^2 u] + bu^{2m+1} = -(c_1 k_1 + c_2 k_2)u^{2m+1}.$$

Система (20) является определяющей системой уравнений для солитонных решений вида (2), т.е. справедлива

**Теорема 5.** Для того чтобы уравнение (18) имело решение вида (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (20).

Решение системы (20) будем строить в виде

$$u(t, x, y) = A(t)f(\eta), \quad \eta = \alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi, \quad (21)$$

где  $A(t)$  – искомая амплитуда солитона. Подставляя (21) в (20), получим

$$\begin{aligned} \dot{A}(t)f(\eta) - vA(t)f'(\eta) + 2a(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2)A(t)f'(\eta) = \\ = (c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2)A(t)f'(\eta)[A(t)f(\eta)]^{2m} + cA(t)f(\eta), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & -\omega A(t)f(\eta) + aA(t)[\alpha^2 f''(\eta) - k^2 f(\eta)] + b[A(t)f(\eta)]^{2m+1} = \\ & = -(c_1 k_1 + c_2 k_2)[A(t)f(\eta)]^{2m+1}, \quad \alpha^2 \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Предположим, что

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 = 0. \quad (24)$$

Тогда из уравнения (22) найдем скорость солитона

$$v = 2a(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2) \quad (25)$$

и амплитуду солитона

$$\dot{A}(t) = cA(t) \quad \text{или} \quad A(t) = A_0 \exp(ct), \quad (26)$$

где  $A_0$  – начальная амплитуда солитона. Из уравнения (23) получим

$$a\alpha^2 f''(\eta) - (\omega + ak^2)f(\eta) + A^{2m}(t)(b + c_1 k_1 + c_2 k_2)f^{2m+1}(\eta) = 0$$

или

$$a\alpha^2 f''(\eta) - Mf(\eta) + NA^{2m}(t)f^{2m+1}(\eta) = 0, \quad (27)$$

где

$$M \equiv \omega + ak^2, \quad N \equiv b + c_1 k_1 + c_2 k_2.$$

Таким образом, система определяющих уравнений (20) сводится к уравнению (27) при выполнении соотношений (24)–(26).

Предположим, что

$$N = 0, \quad -\frac{M}{a\alpha^2} \equiv \lambda^2 > 0. \quad (28)$$

Тогда уравнение (27) сводится к уравнению математического маятника

$$f''(\eta) + \lambda^2 f(\eta) = 0$$

с общим решением

$$f(\eta) = d_1 \cos \lambda \eta + d_2 \sin \lambda \eta,$$

где  $d_1, d_2$  – произвольные постоянные.

Таким образом, справедлива

**Теорема 6.** Пусть выполнены условия (24)–(26), (28). Тогда уравнение (18) имеет решение вида

$$\begin{aligned} q(t, x, y) = & A_0 \exp(ct) [d_1 \cos \lambda(\alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi) + d_2 \sin \lambda(\alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi)] \times \\ & \times \exp\{i(k_1 x + k_2 y + \omega t + \varphi)\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Анализ решения (29) показывает, что при  $c < 0, t > 0$  решение экспоненциально затухает и описывает реальный физический процесс.

### III. Построение и анализ системы определяющих уравнений для кирального НУШ (III)

Рассмотрим (2+1)-мерное киральное НУШ

$$(III): iq_t + a(q_{xx} + q_{yy}) + b_1(iqq_x^* - iq^*q_x)^m q + b_2(iqq_y^* - iq^*q_y)^m q = \\ = i[c_1q_x + c_2q_y]q^{2m}, \quad m > 0 \quad (30)$$

с произвольными действительными коэффициентами  $a, b_1, b_2, c_1, c_2$ . Солитонные решения уравнения (30) будем строить в виде (2). Подставляя (2) в (30), получим

$$i[u_t + i\omega u] + a[u_{xx} + u_{yy} + 2i(k_1u_x + k_2u_y) - k^2u] + 2^m(k_1^m b_1 + k_2^m b_2)u^{2m+1} = \\ = i[c_1(u_x + ik_1u) + c_2(u_y + ik_2u)]u^{2m}, \quad k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \quad (31)$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (31) найдем

$$\text{Im: } u_t + 2a(k_1u_x + k_2u_y) = (c_1u_x + c_2u_y)u^{2m}, \\ \text{Re: } -\omega u + a[u_{xx} + u_{yy} - k^2u] + Hu^{2m+1} = -(c_1k_1 + c_2k_2)u^{2m+1}, \quad (32)$$

где

$$H \equiv 2^m(k_1^m b_1 + k_2^m b_2)$$

Система (32) является определяющей системой уравнений для солитонных решений вида (2), т.е. справедлива

**Теорема 7.** Для того чтобы уравнение (30) имело решение вида (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (32).

Решение системы (32) будем строить в виде (5). Подставляя (5) в (32), получим

$$-vf'(\eta) + 2a(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)f'(\eta) = (c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2)f'(\eta)f^{2m}(\eta), \quad (33)$$

$$a\alpha^2 f''(\eta) - (\omega + ak^2)f(\eta) + Hf^{2m+1}(\eta) = -(c_1k_1 + c_2k_2)f^{2m+1}(\eta), \quad \alpha^2 \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2. \quad (34)$$

Предположим, что

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0. \quad (35)$$

Тогда из уравнения (33) найдем скорость солитона

$$v = 2a(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2). \quad (36)$$

Из уравнения (34) получим

$$a\alpha^2 f''(\eta) - (\omega + ak^2)f(\eta) + (H + c_1k_1 + c_2k_2)f^{2m+1}(\eta) = 0$$

или

$$a\alpha^2 f''(\eta) - Mf(\eta) + Nf^{2m+1}(\eta) = 0, \quad (37)$$

где

$$M \equiv \omega + ak^2, \quad N \equiv H + c_1k_1 + c_2k_2.$$

Таким образом, система определяющих уравнений (32) сводится к уравнению (37) при выполнении соотношений (35), (36).

### Построение светлых и темных солитонов кирального НУШ (III)

Уравнение (37) совпадает с уравнением (10) по форме. Они различаются лишь коэффициентами при нелинейном члене. Поэтому на основании теоремы 3 получаем следующий результат.

**Теорема 8.** Пусть  $aN > 0$  и выполнены соотношения (35), (36). Тогда уравнение (30) имеет решение в виде светлого солитона

$$q(t, x, y) = A \operatorname{ch}^{\frac{1}{m}}(\alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi) \exp\{i(k_1 x + k_2 y + \omega t + \varphi)\},$$

параметры  $A$ ,  $\omega$  которого определяются формулами

$$\omega = a(\alpha^2 \mu^2 - a^2), \quad A^{2m} = \alpha^2 \mu(\mu+1) \frac{a}{N}, \quad \mu = \frac{1}{m}.$$

На основании теоремы 4 устанавливаем следующий результат.

**Теорема 9.** Пусть  $m = 1$ ,  $aN < 0$  и выполнены соотношения (35), (36). Тогда уравнение (30) имеет решение в виде темного солитона

$$q(t, x, y) = A \operatorname{th}(\alpha_1 x + \alpha_2 y - vt + \psi) \exp\{i(k_1 x + k_2 y + \omega t + \varphi)\},$$

параметры  $A$ ,  $\omega$  которого определяются формулами

$$\omega = -a(2\alpha^2 + k^2), \quad A^2 = -\frac{2a\alpha^2}{N}.$$

### IV. Построение и анализ системы определяющих уравнений для НУШ (IV) с переменными коэффициентами

Рассмотрим (2+1)-мерное НУШ с переменными коэффициентами

$$(IV): iq_t + a(t)(q_{xx} + q_{yy}) + b(t)|q|^{2m}q = i[c_1(t)q_x + c_2(t)q_y]q^{2m}, \quad m > 0, \quad (38)$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$  – произвольные непрерывные и интегрируемые на  $R$  функции. Известно [1], что в этом случае скорость и частота солитона также являются функциями времени. Поэтому, следуя работе [4], солитонные решения будем строить в виде

$$q(t, x, y) = u(t, x, y) \exp(i\xi), \quad \xi = k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \varphi, \quad (39)$$

где  $\omega(\tau)$  – искомая частота солитона. Подставляя (39) в (38), получим

$$\begin{aligned} iu_t - \omega(t)u + a(t)[u_{xx} + u_{yy} + 2i(k_1 u_x + k_2 u_y) - k^2 u] + b(t)u^{2m+1} = \\ = i[c_1(t)(u_x + ik_1 u) + c_2(t)(u_y + ik_2 u)]u^{2m}, \quad k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (40) найдем

$$\text{Im : } u_t + 2a(t)[k_1 u_x + k_2 u_y] = [c_1(t)u_x + c_2(t)u_y]u^{2m}, \quad (41)$$

$$\text{Re : } -\omega(t)u + a(t)[u_{xx} + u_{yy} - k^2 u] + b(t)u^{2m+1} = -[c_1(t)k_1 + c_2(t)k_2]u^{2m+1}.$$

Система (41) является определяющей системой уравнений для солитонных решений вида (39), т.е. справедлива

**Теорема 10.** Для того чтобы уравнение (38) имело решение вида (39) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (41).

Решение системы (41) будем строить в виде

$$u(t, x, y) = f(\eta), \quad \eta = \alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau) d\tau + \psi, \quad (42)$$

где  $v(\tau)$  – искомая скорость солитона. Подставляя (42) в (41), получим

$$-v(t)f'(\eta) + 2a(t)[k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2]f'(\eta) = [c_1(t)\alpha_1 + c_2(t)\alpha_2]f'(\eta)f^{2m}(\eta), \quad (43)$$

$$\begin{aligned} -\omega(t)f(\eta) + a(t)[\alpha^2 f''(\eta) - k^2 f(\eta)] + b(t)f^{2m+1}(\eta) = \\ = -[k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t)]f^{2m+1}(\eta), \quad \alpha^2 \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Предположим, что

$$\alpha_1 c_1(t) + \alpha_2 c_2(t) \equiv 0, \quad \forall t \in R. \quad (45)$$

Тогда из уравнения (43) найдем скорость солитона

$$v(t) = 2a(t)(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2). \quad (46)$$

Из уравнения (44) получим

$$\alpha^2 a(t)f''(\eta) - [\omega(t) + k^2 a(t)]f(\eta) + [b(t) + k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t)]f^{2m+1}(\eta) = 0$$

или

$$\alpha^2 a(t)f''(\eta) - M(t)f(\eta) + N(t)f^{2m+1}(\eta) = 0, \quad (47)$$

где

$$M(t) \equiv \omega(t) + k^2 a(t), \quad N(t) \equiv b(t) + k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t).$$

Таким образом, система определяющих уравнений (41) сводится к уравнению (47) при выполнении соотношений (45), (46). Отметим, что в уравнении (47) переменная  $t$  играет роль параметра.

#### Построение светлых и темных солитонов НУШ (IV)

Пусть выполнены соотношения (45), (46). Исследуем уравнение (47). В качестве неизвестной волновой функции  $f(\eta)$  возьмем анзац вида (12). Тогда из формул (14) получим

$$\mu = \frac{1}{m}, \quad \omega(t) = a(t)(\alpha^2 \mu^2 - k^2), \quad A^{2m} = \alpha^2 \mu(\mu + 1) \frac{a(t)}{N(t)}, \quad (48)$$

если

$$\frac{a(t)}{N(t)} \equiv const = \lambda > 0, \quad \forall t \in R. \quad (49)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 11.** Пусть выполнены условия (45), (46), (49). Тогда уравнение (38) имеет решение в виде светлого солитона

$$q(t, x, y) = A ch^{-\frac{1}{m}} \left( \alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau) d\tau + \psi \right) \exp \left\{ i \left( k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \varphi \right) \right\},$$

параметры  $A$ ,  $\omega(t)$  которого определяются формулами (48).

Для построения темных солитонов в качестве неизвестной волновой функции  $f(\eta)$  возьмем анзац вида (15). Тогда из формул (17) получим

$$\mu = \frac{1}{m} = 1, \quad \omega(t) = -a(t)(2\alpha^2 + k^2), \quad A^2 = -2\alpha^2 \frac{a(t)}{N(t)}, \quad (50)$$

если

$$\frac{a(t)}{N(t)} \equiv const = d < 0, \quad \forall t \in R. \quad (51)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 12.** Пусть  $m=1$  и выполнены условия (45), (46), (51). Тогда уравнение (38) имеет решение в виде темного солитона

$$q(t, x, y) = Ath \left( \alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau) d\tau + \psi \right) \exp \left\{ i \left( k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \varphi \right) \right\},$$

параметры  $A$ ,  $\omega(t)$  которого определяются формулами (50).

## V. Построение и анализ системы определяющих уравнений для НУШ (V) с переменными коэффициентами

Рассмотрим (2+1)-мерное НУШ с переменными коэффициентами

$$(V): iq_t + a(t)(q_{xx} + q_{yy}) + b(t)|q|^{2m}q = i[c_1(t)q_x + c_2(t)q_y]|q|^{2m} + ic(t)q, \quad m > 0, \quad (52)$$

где  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$ ,  $c_1(t)$ ,  $c_2(t)$  – произвольные непрерывные и интегрируемые на  $R$  функции. Солитонные решения будем строить в виде (39). Подставляя (39) в (52), получим

$$\begin{aligned} iu_t - \omega(t)u + a(t)[u_{xx} + u_{yy} + 2i(k_1 u_x + k_2 u_y) - k^2 u] + b(t)u^{2m+1} = \\ = i[c_1(t)(u_x + ik_1 u) + c_2(t)(u_y + ik_2 u)]u^{2m} + ic(t)u, \quad k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (53) найдем

$$\text{Im : } u_t + 2a(t)[k_1 u_x + k_2 u_y] = [c_1(t)u_x + c_2(t)u_y]u^{2m} + c(t)u,$$

$$\text{Re : } -\omega(t)u + a(t)[u_{xx} + u_{yy} - k^2 u] + b(t)u^{2m+1} = -[c_1(t)k_1 + c_2(t)k_2]u^{2m+1}. \quad (54)$$

Система (54) является определяющей системой уравнений для солитонных решений вида (39), т. е. справедлива

**Теорема 13.** Для того чтобы уравнение (52) имело решение вида (39) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (54).

Решение системы (54) будем строить в виде

$$u(t, x, y) = A(t)f(\eta), \quad \eta = \alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau) d\tau + \psi, \quad (55)$$

где  $A(t)$ ,  $v(\tau)$  – искомые амплитуда и скорость солитона соответственно.

Подставляя (55) в (54), получим

$$\dot{A}(t)f(\eta) - v(t)A(t)f'(\eta) + 2a(t)[k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2]A(t)f'(\eta) = \\ = [\alpha_1 c_1(t) + \alpha_2 c_2(t)]A(t)f'(\eta)[A(t)f(\eta)]^{2m} + c(t)A(t)f(\eta), \quad (56)$$

$$\alpha^2 a(t)A(t)f''(\eta) - [\omega(t) + k^2 a(t)]A(t)f(\eta) + b(t)[A(t)f(\eta)]^{2m+1} = \\ = -[k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t)][A(t)f(\eta)]^{2m+1}, \quad \alpha^2 \equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2. \quad (57)$$

Предположим, что

$$\alpha_1 c_1(t) + \alpha_2 c_2(t) \equiv 0, \quad \forall t \in R. \quad (58)$$

Тогда из уравнения (56) найдем скорость солитона

$$v(t) = 2a(t)(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) \quad (59)$$

и амплитуду солитона

$$\dot{A}(t) = c(t)A(t) \quad \text{или} \quad A(t) = A_0 \exp\left(\int_0^t c(\tau) d\tau\right). \quad (60)$$

Из уравнения (57) получим

$$\alpha^2 a(t)f''(\eta) - [\omega(t) + k^2 a(t)]f(\eta) + [b(t) + k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t)]A^{2m}(t)f^{2m+1}(\eta) = 0$$

или

$$\alpha^2 a(t)f''(\eta) - M(t)f(\eta) + N(t)A^{2m}(t)f^{2m+1}(\eta) = 0, \quad (61)$$

где

$$M(t) \equiv \omega(t) + k^2 a(t), \quad N(t) \equiv b(t) + k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t).$$

Таким образом, система определяющих уравнений (54) сводится к уравнению (61) при выполнении соотношений (58)–(60). Предположим, что

$$N(t) \equiv 0, \quad \forall t \in R, \quad -\frac{M(t)}{\alpha^2 a(t)} \equiv const = \lambda^2 > 0, \quad \forall t \in R. \quad (62)$$

Тогда уравнение (61) сводится к уравнению математического маятника

$$f''(\eta) + \lambda^2 f(\eta) = 0$$

с общим решением

$$f(\eta) = d_1 \cos \lambda \eta + d_2 \sin \lambda \eta,$$

где  $d_1, d_2$  – произвольные постоянные.

Таким образом, справедлива

**Теорема 14.** Пусть выполнены условия (58)-(60), (62). Тогда уравнение (52) имеет решение вида

$$\begin{aligned} q(t, x, y) = & A_0 \exp \left( \int_0^t c(\tau) d\tau \right) \left[ d_1 \cos \lambda \left( \alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau) d\tau + \psi \right) + \right. \\ & \left. + d_2 \sin \lambda \left( \alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau) d\tau + \psi \right) \right] \exp \left\{ i \left( k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \varphi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (63)$$

Если предположить, что  $c(t) \leq 0$  при  $\forall t \geq 0$  и  $c(t) \geq 0$  при  $\forall t \leq 0$ , то решение (63) экспоненциально затухает и описывает реальный физический процесс. Поэтому уравнение (52) является предпочтительнее модели (18) с постоянными коэффициентами.

## VI. Построение и анализ системы определяющих уравнений для кирального НУШ (VI) с переменными коэффициентами

Рассмотрим (2+1)-мерное киральное НУШ

$$\begin{aligned} (\text{VI}): \quad & iq_t + a(t)(q_{xx} + q_{yy}) + b_1(t)(iqq_x^* - iq^*q_x)^m q + b_2(t)(iqq_y^* - iq^*q_y)^m q = \\ & = i[c_1(t)q_x + c_2(t)q_y]q^{2m}, \quad m > 0, \end{aligned} \quad (64)$$

где  $a(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), c_2(t)$  – произвольные непрерывные и интегрируемые на  $R$  функции. Солитонные решения уравнения (64) будем строить в виде (39). Подставляя (39) в (64), получим

$$\begin{aligned} & iu_t - \omega(t)u + a(t)[u_{xx} + u_{yy} + 2i(k_1 u_x + k_2 u_y) - k^2 u] + 2^m [k_1^m b_1(t) + k_2^m b_2(t)]u^{2m+1} = \\ & = i[c_1(t)(u_x + ik_1 u) + c_2(t)(u_y + ik_2 u)]u^{2m}, \quad k^2 \equiv k_1^2 + k_2^2. \end{aligned} \quad (65)$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (65) найдем

$$\text{Im: } u_t + 2a(t)[k_1 u_x + k_2 u_y] = [c_1(t)u_x + c_2(t)u_y]u^{2m}, \quad (66)$$

$$\text{Re: } -\omega(t)u + a(t)[u_{xx} + u_{yy} - k^2 u] + H(t)u^{2m+1} = -[k_1 c_1(t) + k_2 c_2(t)]u^{2m+1},$$

где

$$H(t) \equiv 2^m [k_1^m b_1(t) + k_2^m b_2(t)]$$

Система (66) является определяющей системой уравнений для солитонных решений вида (39), т.е. справедлива

**Теорема 15.** Для того чтобы уравнение (64) имело решение вида (39) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (66).

Решение системы (66) будем строить в виде (42). Подставляя (42) в (66), получим

$$-v(t)f'(\eta) + 2a(t)(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)f'(\eta) = [\alpha_1c_1(t) + \alpha_2c_2(t)]f'(\eta)f^{2m}(\eta), \quad (67)$$

$$\begin{aligned} -\omega(t)f(\eta) + a(t)[\alpha^2 f''(\eta) - k^2 f(\eta)] + H(t)f^{2m+1}(\eta) &= -[k_1c_1(t) + k_2c_2(t)]f^{2m+1}(\eta), \\ \alpha^2 &\equiv \alpha_1^2 + \alpha_2^2. \end{aligned} \quad (68)$$

Предположим, что

$$\alpha_1c_1(t) + \alpha_2c_2(t) \equiv 0, \quad \forall t \in R. \quad (69)$$

Тогда из уравнения (67) найдем скорость солитона

$$v(t) = 2a(t)[k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2]. \quad (70)$$

Из уравнения (68) получим

$$\alpha^2 a(t)f''(\eta) - [\omega(t) + k^2 a(t)]f(\eta) + [H(t) + k_1c_1(t) + k_2c_2(t)]f^{2m+1}(\eta) = 0$$

или

$$\alpha^2 a(t)f''(\eta) - M(t)f(\eta) + N(t)f^{2m+1}(\eta) = 0, \quad (71)$$

где

$$M(t) \equiv \omega(t) + k^2 a(t), \quad N(t) \equiv H(t) + k_1c_1(t) + k_2c_2(t).$$

Таким образом, система определяющих уравнений (66) сводится к уравнению (71) при выполнении соотношений (69), (70).

#### Построение светлых и темных солитонов кирального НУШ (VI) с переменными коэффициентами

В уравнении (71) переменная  $t$  играет роль параметра. Поэтому на основании теоремы 8 получаем следующий результат.

**Теорема 16.** Пусть выполнены условия (69), (70) и неравенство

$$\frac{a(t)}{N(t)} \equiv \text{const} = \lambda > 0, \quad \forall t \in R.$$

Тогда уравнение (64) имеет решение в виде светлого солитона

$$q(t, x, y) = A \text{ch}^{-\frac{1}{m}} \left( \alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau) d\tau + \psi \right) \exp \left\{ i \left( k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \varphi \right) \right\},$$

параметры  $A$ ,  $\omega(t)$ , которого определяются формулами

$$\omega(t) = a(t)(\alpha^2 \mu^2 - k^2), \quad A^{2m} = \alpha^2 \mu(\mu + 1) \frac{a(t)}{N(t)}, \quad \mu = \frac{1}{m}.$$

На основании теоремы 9 устанавливаем следующий результат.

**Теорема 17.** Пусть  $m=1$ , выполнены условия (69), (70) и неравенство

$$\frac{a(t)}{N(t)} \equiv \text{const} = d < 0, \quad \forall t \in R.$$

Тогда уравнение (64) имеет решение в виде темного солитона

$$q(t, x, y) = A \operatorname{th} \left( \alpha_1 x + \alpha_2 y - \int_0^t v(\tau) d\tau + \psi \right) \exp \left\{ i \left( k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \varphi \right) \right\},$$

параметры  $A$ ,  $\omega(t)$  которого определяются формулами

$$\omega(t) = -a(t)(2\alpha^2 + k^2), \quad A^2 = -2\alpha^2 \frac{a(t)}{N(t)}.$$

Таким образом, в работе развита методика исследования солитонных решений (2+1)-мерных НУШ различных типов со степенными законами нелинейности и затухания.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Biswas, A.** Optical solitons with time-dependent dispersion, nonlinearity and attenuation in a Kerr-Law media / A. Biswas // Int. J. Theor. Phys. – 2009. – Vol. 48. – P. 256–260.
2. **Biswas, A.** Chiral solitons with time-dependent coefficients / A. Biswas // Int. J. Theor. Phys. – 2010. – Vol. 49. – P. 79–83.
3. **Biswas, A.** Chiral solitons with Bohm potential by He’s variational principle / A. Biswas, D. Milovic // Ядерная физика. – 2011. – Т. 74. – № 5. – С. 781–783.
4. **Жестков, С.В.** О существовании оптических солитонов (2+1)-мерного уравнения Шредингера с зависящими от времени коэффициентами и степенным законом нелинейности / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2012”, Санкт-Петербург, 16–21 апреля 2012 г. / БАН. – СПб., 2012. – С. 55–57.
5. **Жестков, С.В.** О существовании (1+2)-мерных солитонов кирального уравнения Шредингера со степенным законом нелинейности / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Доклады НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56. – № 4. – С. 32–36.

Поступила в редакцию 23.11.2012 г.

УДК 517.925.45

Н.П. МОРОЗОВ\*

## ИНТЕГРАЛЫ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ ЦЕНТРА

*В работе приведено краткое описание процедуры вычисления фокусных величин для кратного фокуса полиномиальных систем в обобщенных полярных координатах. Метод вычислений основан на специальном представлении полиномиальных систем. Приведены результаты вычисления по описанному алгоритму первых трех фокусных величин для квадратичной системы. За счет подходящего представления параметров квадратичной системы фокусным величинам придана удобная для исследования форма. Это позволило в случаях центра, определяемых по первым трем фокусным величинам, проинтегрировать квадратичную систему в замкнутом виде.*

### Краткое описание процедуры отыскания фокусных величин в обобщенных полярных координатах

*При исследовании бифуркаций сложного или кратного фокуса используется алгоритм вычисления фокусных величин, подробно описанный в [1; 2 § 24; 3; 4]. Предлагаемый алгоритм отличается тем, что система рассматривается не в полярных, а в обобщенных полярных координатах специального вида, что упрощает процедуру вычислений.*

Система

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

где  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  – многочлены наибольшей степени  $n$ , представима [5] в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} (x, y) + x\bar{\sigma}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} (x, y) + y\bar{\sigma}(x, y) \end{cases}, \quad (2)$$

здесь

$$P(x, y) = \sum_{m=1}^n P_k(x, y), \quad Q(x, y) = \sum_{m=1}^n Q_k(x, y),$$

$$P_k(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k C_k^m a_{k-m} \, {}_m x^{k-m} y^m,$$

$$a_{k-m} \, {}_m = \frac{\partial^k P(x_0, y_0)}{\partial x^{k-m} \partial y^m}, \quad b_{k-m} \, {}_m = \frac{\partial^k Q(x_0, y_0)}{\partial x^{k-m} \partial y^m},$$

---

\* Выпускник физико-математического факультета 1970 г.

$$\begin{aligned}
 2H(x, y) &= \sum_{k=1}^n h_{k+1}(x, y), \quad h_{k+1}(x, y) = 2 \frac{y^{P_k(x, y)} - x^{Q_k(x, y)}}{(k+1)} = \\
 &= \frac{2}{(k+1)!} \left( a_{0k} y^{k+1} - b_{k0} x^{k+1} + \sum_{m=1}^k C_k^{m-1} \frac{\mu_{k-m m-1}}{m} x^{k-m+1} y^m \right), \\
 \bar{\sigma}(x, y) &= \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_{k-1}(x, y), \quad \bar{\sigma}_{k-1}(x, y) = \frac{1}{k+1} \left( \frac{\partial P_k(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_k(x, y)}{\partial y} \right) = \\
 &= \frac{k}{(k+1)!} \sum_{m=1}^k C_{k-1}^{m-1} \sigma_{k-m m-1} x^{k-m} y^{m-1}, \\
 \mu_{k-m m-1} &= m a_{k-m+1 m-1} - (k-m+1) b_{k-m m} \\
 \sigma_{k-m m-1} &= a_{k-m+1 m-1} + b_{k-m m}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, k}.
 \end{aligned}$$

Гамильтониан  $H(x, y)$ , однозначно определяемый по правым частям системы (1), будем называть естественным гамильтонианом. В [2] также показано, что вид системы (2) инвариантен относительно невырожденных линейных преобразований  $x = \alpha u + \beta v, y = \gamma u + \delta v$ . Таким преобразованием систему (2) можно привести к виду

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \bar{H}}{\partial v} (u, v) + u \bar{\sigma}(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \bar{H}}{\partial u} (u, v) + u \bar{\sigma}(u, v) \end{cases}, \quad (3)$$

где  $\Delta = (\alpha\delta - \beta\gamma)$ ,  $\bar{H} = H(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$ ,  $\bar{\sigma} = \sigma(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$ . С учетом этого преобразуем систему (2) так, чтобы квадратичная часть гамильтониана оказалась равной  $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . Это возможно при условии  $D = \frac{1}{4} \mu_{00}^2 + a_{01} b_{10} < 0$  с помощью линейного невырожденного преобразования  $x = \alpha u + k \left( \frac{\mu_{00}}{2} \alpha + a_{01} \gamma \right) v, y = \gamma u + k \left( b_{10} \alpha - \frac{\mu_{00}}{2} \gamma \right) v$  с определителем преобразования

$$\Delta = -2k h_2(\alpha, \gamma) = k(b_{10} \alpha^2 - \mu_{00} \alpha \gamma - a_{01} \gamma^2) \neq 0, \quad k = -\frac{1}{\sqrt{|D|}} \text{ и произвольных } \alpha, \gamma.$$

В связи с этим будем считать, что система (1) изначально имеет нужный вид (2) и  $h_2(x, y) = x^2 + y^2$ . В рассматриваемом случае состояние равновесия  $O(0,0)$  для гамильтоновой системы является центром, а естественный гамильтониан в области центра является положительно

определенной функцией Ляпунова. Производная естественного гамильтониана в силу системы (2) имеет вид

$$\frac{dH}{dt} = \bar{\sigma}(x, y) \left( x \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \right). \quad (4)$$

Положим  $V(x, y) = x \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$  и обозначим

$$D = \{(x, y) | V(x, y) > 0\}, \Gamma_D = \{(x, y) | V(x, y) = 0, (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

Область центра гамильтоновой системы расположена в области  $D$  и состояния равновесия системы (2) и гамильтоновой системы, отличные от  $O(0,0)$  (если такие существуют), расположены на границе области  $D$ , т.е. на кривых  $V(x, y) = 0$ .

Пусть  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ . Учитывая, что

$$\rho^2 \dot{\varphi} = -(x \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)),$$

из (4) следует, что в области  $D$  система (2) равносильна одному уравнению

$$\frac{dH}{d\varphi} = -\rho^2 \bar{\sigma}(x, y). \quad (5)$$

В обобщенных полярных координатах  $(R, \varphi)$ , где  $R = \sqrt{2H}$ , уравнение (5) имеет вид

$$R \frac{dR}{d\varphi} = -\rho^2 \bar{\sigma}(x, y). \quad (6)$$

В области  $D$  (и в области центра гамильтоновой системы) уравнение  $R^2 = 2H(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ , т.е.  $R^2 = \sum_{k=1}^n \rho^{k+1} h_{k+1}(\cos \varphi, \sin \varphi)$ , при каждом  $\varphi$  однозначно разрешимо относительно  $\rho$ , так как

$$V(x, y) = \rho \frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) > 0.$$

Из этого уравнения находим  $\rho$  в виде ряда  $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(\cos \varphi, \sin \varphi) R^k$ , где  $r_k$  – многочлены от  $h_k$ . Подставив найденное  $\rho$  в уравнение (6) получим уравнение

$$-\frac{dR}{d\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\cos \varphi, \sin \varphi) R^k, \quad (7)$$

где  $a_k$  – многочлены от  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ . Будем искать решение уравнения (7) в виде ряда

$$R(\varphi, R_0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\varphi) R_0^k \quad (8)$$

при начальном условии  $R(0, R_0) = R_0$ . Отсюда следует  $b_1(0) = 1$ ,  $b_k(0) = 0$ , для  $k > 1$ . Подставим  $R(\varphi, R_0)$  в уравнение (7). Получим для отыскания  $b_k(\varphi)$  последовательность линейных дифференциальных

уравнений:  $-\frac{db_k}{d\varphi} = c_k(\varphi)$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ). Здесь через  $c_k(\varphi)$  обозначены правые части соответствующих уравнений. Отсюда при  $\sigma_{00} = 0$ , с учетом начальных условий, находим  $b_1(\varphi) = 1$ ,  $b_k(\varphi) = -\int_0^\varphi c_k(\varphi) d\varphi$ . Пусть  $R = R(\varphi, R_0)$  – решение уравнения (7) при начальном условии  $R(0, R_0) = R_0$  и  $R_1 = R(2\pi, R_0)$  – отображение Пуанкаре луча  $\varphi = 0$  в себя. Введем в рассмотрение отображение  $P(R_0) = R_0 - R(2\pi, R_0) = (1 - b_1(2\pi))R_0 - \sum_{k=2}^{\infty} b_k(2\pi) R_0^k$ . Поскольку первым отличным от нуля может быть коэффициент  $l_k = -b_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} c_k(\varphi) d\varphi$  с нечетным номером, обозначим его  $L_m = l_{2m+1}$ . В результате получим

$$P(R_0) = L_m R_0^{2m+1} + \sum_{k=2m+2}^{\infty} l_k R_0^k,$$

при этом  $\sigma_{00} = 0$ ,  $L_0 = 1 - b_1(2\pi) = 0$ ,  $L_k = 0$  при  $k < m$ .

Коэффициент  $L_m$  будем называть  $m$ -й фокусной величиной или  $m$ -й ляпуновской величиной.

Заметим, если  $L_m < 0$  ( $L_m > 0$ ), то состояние равновесия  $O(0,0)$  для системы (1) является устойчивым (неустойчивым) фокусом кратности  $m$ , если  $L_m = 0$ , то требуется найти  $L_{m+1}$ . Если все фокусные величины равны нулю, то состояние равновесия  $O(0,0)$  является центром для системы (1).

### Случай квадратичной системы

Для квадратичной системы первые три фокусные величины известны (см., например, [2], [3], или [4, с. 332]). Здесь мы не только приведем результаты вычислений по описанной выше процедуре, но и придадим фокусным величинам квадратичной системы вид, удобный для исследования.

В качестве примера применим описанную процедуру вычисления фокусных величин к исследованию квадратичной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{2}a_{02}y^2 + \frac{1}{6}(\mu_{10}x^2 + 2\mu_{01}xy) + x\left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)\right), \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{2}b_{20}x^2 - \frac{1}{6}(2\mu_{10}xy + \mu_{01}y^2) + y\left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)\right), \end{cases} \quad (9)$$

представленной в виде (2) с гамильтонианом

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}h_3(x, y), \quad \sigma(x, y) = \frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y),$$

$$h_3(x, y) = a_{02}y^3 + \mu_{10}x^2y + \mu_{01}xy^2 - b_{20}x^3,$$

$$\mu_{k-m m-1} = m a_{k-m+1 m-1} - (k-m+1) b_{k-m m},$$

$$\sigma_{k-m m-1} = a_{k-m+1 m-1} + b_{k-m, m}, \quad k = \overline{1, 2}, \quad m = \overline{1, k} \quad (m \leq k).$$

В обобщенных полярных координатах в рассматриваемом случае уравнение (6) имеет вид

$$R \frac{dR}{d\varphi} = -\left(\frac{\sigma_{00}}{2} \rho^2 + \frac{1}{3}(\sigma_{10} \cos \varphi + \sigma_{01} \sin \varphi)\rho^3\right). \quad (10)$$

Из равенства  $R^2 = \rho^2 + \frac{1}{3} h_3(\cos \varphi, \sin \varphi)\rho^3$  находим

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} r_k (\cos \varphi, \sin \varphi) R^k, \text{ где } r_1 = 1, r_2 = -\frac{1}{2}h_3, r_3 = \frac{5}{8}h_3^2,$$

$$r_4 = -h_3^3, r_5 = \frac{231}{128}h_3^4, r_6 = -\frac{7}{2}h_3^5, r_7 = \frac{7293}{1024}h_3^6, r_8 = -15h_3^7.$$

Подставив  $\rho$  в правую часть уравнения (10), после несложных вычислений для квадратичной системы найдем коэффициенты в уравнении (7):

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sigma_{00}}{2}, a_2 = -\frac{\sigma_{00}}{2}h_3 + \frac{1}{3}(\sigma_{10} \cos \varphi + \sigma_{01} \sin \varphi), a_3 = -\frac{3}{2}a_2 h_3, \\ a_4 &= -\frac{7}{4}a_3 h_3, a_5 = -\frac{40}{21}a_4 h_3, a_6 = -\frac{1287}{640}a_5 h_3, a_7 = -\frac{896}{429}a_6 h_3. \end{aligned}$$

Положим  $\sigma_{00} = 0$  и найдем коэффициенты  $b_k(\varphi)$  в решении (8) уравнения (7). Для их отыскания получим последовательность уравнений:  $b_1 = 1$

$$-\frac{db_2}{d\varphi} = a_2, \quad -\frac{db_3}{d\varphi} = a_3 + 2a_2 b_2, \quad -\frac{db_4}{d\varphi} = a_4 + 3a_3 b_2 + a_2(2b_3 + b_2^2),$$

$$-\frac{db_5}{d\varphi} = a_5 + 4a_4 b_2 + 3a_3(b_3 + b_2^2) + 2a_2(b_4 + b_3 b_2),$$

$$\begin{aligned} -\frac{db_6}{d\varphi} &= a_6 + 5a_5 b_2 + a_4(4b_3 + 6b_2^2) + a_3(3b_4 + 4b_2 b_3 + b_2^3) + \\ &\quad + a_2(2(b_5 + b_4 b_2) + b_3^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{db_7}{d\varphi} &= a_7 + 6a_6 b_2 + 5a_5(b_3 + 2b_2^2) + 4a_4((b_4 + 3b_3 b_2 + b_2^3) + \\ &\quad + a_3(3b_3 b_2^2 + 3b_3^2 + 6b_2 b_4 + 3b_5) + 2a_2(b_6 + b_5 b_2 + b_4 b_3)). \end{aligned}$$

Интегрируя поочередно эти уравнения, находим  $b_1(\varphi) = 1$  и  $l_k = -b_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} c_k(\varphi) d\varphi, L_n = l_{2n+1}$ . При этом полагаем  $\sigma_{00}$

и все предшествующие коэффициенты  $L_{m-1}$ , равными нулю, и находим  $L_m$ . Для придания фокусным величинам удобного для исследования вида положим

$$b_{20} = \gamma \cos \beta, a_{02} = \gamma \sin \beta, \mu_{01} = 3b_{20} + \lambda \sin \alpha,$$

$$\mu_{10} = -3a_{02} + \lambda \cos \alpha,$$

$$\sigma_{10} = r \cos \theta, \sigma_{01} = r \sin \theta, \gamma, \lambda, r \in R,$$

$$\beta, \alpha, \theta \in [0, 2\pi]. \quad (11)$$

В принятых обозначениях первые три фокусные величины равны:

$$1) \sigma_{00} = 0, L_1 = l_3 = -\frac{\pi}{24} r \lambda \sin(\theta + \alpha);$$

$$2) \sigma_{00} = 0, l_3 = 0 \text{ (при } \lambda = 0), L_2 = l_5 = -\frac{\pi}{216} \gamma r^3 \cos(\beta - 3\theta);$$

$$3) \sigma_{00} = 0, l_3 = 0 \text{ (при } \lambda = 0), L_2 = l_5 = 0 \text{ (при } \theta = \frac{\beta}{3} + \frac{2k-1}{6}\pi,$$

$$k \in \{0; \pm 1; \pm 2; 3; \} \text{ ); } l_n = 0 \text{ при } n \geq 6;$$

$$4) \sigma_{00} = 0, L_1 = 0 \text{ (при } \theta = -\alpha),$$

$$L_2 = l_5 = -\frac{\pi}{6912} r(8r^2 + 14r\lambda + 5\lambda^2)(4\gamma \cos(3\alpha + \beta) + \lambda \sin 4\alpha);$$

$$5) \sigma_{00} = 0, L_1 = 0 \text{ (при } \theta = -\alpha), L_2 = 0 \text{ (при } 4\gamma \cos(3\alpha + \beta) + \lambda \sin 4\alpha = 0 \text{ ) } l_n = 0 \text{ при } n \geq 6;$$

$$6) \sigma_{00} = 0, L_1 = 0 \text{ (при } \theta = -\alpha), L_2 = 0 \text{ (при } r = -\frac{1}{2}\lambda),$$

$$L_3 = l_7 = 0.$$

$$7) \sigma_{00} = 0, L_1 = 0 \text{ (при } \theta = -\alpha), L_2 = 0 \text{ (при } r = -\frac{5}{4}\lambda),$$

$$L_3 = l_7 = -\frac{25\gamma\lambda^3}{131072}(4\gamma \cos(3\alpha + \beta) + \lambda \sin 4\alpha)(2\gamma + \lambda \sin(\alpha - \beta)).$$

$$8) \sigma_{00} = 0, L_1 = 0 \text{ (при } \theta = -\alpha), L_2 = 0 \text{ (при } r = -\frac{5}{4}\lambda), L_3 = 0$$

$$\text{(при } 2\gamma + \lambda \sin(\alpha - \beta) = 0).$$

**Замечание.** Если равенство нулю первой фокусной величины  $L_1$  получено из условия  $\theta = -\alpha + \pi$ , то для получения последующих фокусных величин везде в соотношениях 4) – 8) следует заменить  $r$  на “ $-r$ ”.

### Интегралы квадратичной системы в случае центра

Известно, что при наличии хотя бы одного состояния равновесия типа центр, квадратичная система интегрируется. Здесь мы проинтегрируем квадратичную систему в замкнутой форме в случае, когда состояние равновесия  $(0,0)$  является центром.

Преобразуем гамильтониан к полярным координатам с учетом обозначений (11). Будем иметь

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}(\gamma \sin \beta (y^3 - 3x^2y) + \gamma \cos \beta (3xy^2 - x^3)) + \\ + \lambda yx(x \cos \alpha + y \sin \alpha)).$$

После несложных преобразований гамильтониан и  $h_3$  приводятся к виду

$$H(x, y) = \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{\rho^3}{6}(-\gamma \cos(3\varphi - \beta) + \lambda \frac{1}{2}\sin 2\varphi \cos(\varphi - \alpha)),$$

$$h_3(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \rho^3(-\gamma \cos(3\varphi - \beta) + \lambda \frac{1}{2}\sin 2\varphi \cos(\varphi - \alpha)),$$

а система (9) в этих обозначениях принимает вид

$$\dot{x} = y + \frac{\gamma}{2}\rho^2 \sin(2\varphi - \beta) + \frac{\rho^2}{6}\lambda(\sin \alpha \sin 2\varphi + \cos \alpha \cos^2 \varphi) + \\ + x\left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{\rho}{3}r(\cos(\varphi - \theta))\right),$$

$$\dot{y} = -x + \frac{\gamma}{2}\rho^2 \cos(2\varphi - \beta) - \frac{\rho^2}{6}\lambda(\cos \alpha \sin 2\varphi + \sin \alpha \sin^2 \varphi) + \\ + y\left(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{\rho}{3}r(\cos(\varphi - \theta))\right). \quad (12)$$

В дальнейшем нам придется неоднократно подвергать систему (12) преобразованию поворота на различные углы. Поэтому произведем преобразование поворота  $x = u \cos \tau + v \sin \tau$ ,  $y = -u \sin \tau + v \cos \tau$  или  $u = \rho \cos \omega$ ,  $v = \rho \sin \omega$ , где  $\rho^2 = u^2 + v^2 = x^2 + y^2$ ,  $\omega = \varphi + \tau$  на произвольный угол  $\tau$ . Для упрощения этой процедуры воспользуемся свойством инвариантности вида системы (2) при линейных преобразованиях. Преобразуем к новым переменным гамильтониан  $H(x, y)$  и  $\sigma(x, y)$ . После элементарных преобразований будем иметь

$$\bar{H}(u, v) =$$

$$\frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{6}\left(-(\gamma \cos(3\tau + \beta) + \lambda \frac{1}{2}\sin 2\tau \cos(\tau + \alpha))u^3 + (\gamma 3 \cos(3\tau + \beta) + \lambda \frac{1}{2}\sin(3\tau + \beta) + \frac{1}{2}\lambda \cos 2\tau \sin(\tau + \alpha))u v^2 + (\lambda \cos 2\tau \cos(\tau + \alpha) - 3\gamma \sin(3\tau + \beta) - \lambda \frac{1}{2}\sin 2\tau \sin(\tau + \alpha))v u^2 + (\gamma \sin(3\tau + \beta) +$$

$$\lambda \frac{1}{2} \sin 2\tau \sin (\tau + \alpha))v^3 \Big),$$

а система (12) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{u} = & v + \frac{1}{6} ((6\gamma \cos(3\tau + \beta) + \lambda \sin 2\tau \cos(\tau + \alpha) + \\ & + 2\lambda \cos 2\tau \sin(\tau + \alpha))u v \\ & + \lambda \cos(\tau - \alpha)u^2 + 3(\gamma \sin(3\tau + \beta) + \lambda \frac{1}{2} \sin 2\tau \sin(\tau + \alpha))(v^2 - u^2)) + \\ & + u(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{r}{3}(u \cos(\theta + \tau) + v \sin(\theta + \tau))) \\ \dot{v} = & -u - \frac{1}{6} \left( 3(\gamma \cos(3\tau + \beta) + \lambda \frac{1}{2} \sin 2\tau \cos(\tau + \alpha))(v^2 - u^2) + \lambda \sin(\alpha - \right. \\ & \left. \tau)v^2 + (\lambda \cos 2\tau \cos(\tau + \alpha) - 6\gamma \sin(3\tau + \beta) + \lambda \cos(3\tau + \alpha))vu \right) + \\ & + v(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{r}{3}(u \cos(\theta + \tau) + v \sin(\theta + \tau))). \end{aligned}$$

Будем обозначать ее в дальнейшем (13).

**Рассмотрим все случаи, когда состояние равновесия  $O(0,0)$  является центром и определяется по первым трем фокусным величинам.**

I.  $\sigma_{00} = 0, r = 0 (L_1 = 0)$ .

Этот случай соответствует гамильтоновой системе с естественным гамильтонианом  $H(x, y)$ .

II.  $\sigma_{00} = 0, \lambda = 0, \gamma = 0 (L_1 = 0, L_2 = 0)$ .

Одновременное обращение в нуль  $\lambda$  и  $\gamma$  приводит к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{3}x \left( \frac{\sigma_{00}}{2} + \sigma_{10}x + \sigma_{01}y \right) \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{3}y \left( \frac{\sigma_{00}}{2} + \sigma_{10}x + \sigma_{01}y \right) \end{cases} \quad (14)$$

Эта система интегрируется в замкнутой форме. Для этого достаточно перейти к полярным координатам  $\rho, \varphi$ . Получим

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & \frac{\sigma_{00}}{6}\rho + \frac{1}{3}(\sigma_{10} \cos \varphi + \sigma_{01} \sin \varphi)\rho^2, \quad \dot{\varphi} = -1, \\ \rho = & \frac{\rho_0 e^{-\frac{\sigma_{00}}{2}\varphi}(\sigma_{00}^2 + 36)}{1 + \rho_0(36\sigma_{01} + 6\sigma_{00}\sigma_{10}) - \rho_0((36\sigma_{01} + 6\sigma_{00}\sigma_{10}) \cos \varphi - (36\sigma_{01} - 6\sigma_{00}\sigma_{10}) \sin \varphi)e^{-\frac{\sigma_{00}}{2}\varphi}} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \rho(1 + \rho_0(36\sigma_{01} + 6\sigma_{00}\sigma_{10})) = & \rho_0((36\sigma_{01} + 6\sigma_{00}\sigma_{10})x - \\ & -(36\sigma_{01} - 6\sigma_{00}\sigma_{10})y + \sigma_{00}^2 + 36)e^{-\frac{\sigma_{00}}{2}\varphi}, \end{aligned}$$

в частности, при  $\sigma_{00} = 0$   $\rho(1 + \rho_0 36\sigma_{01}) = 36\rho_0(\sigma_{01}x - \sigma_{01}y + 1)$ .

III.  $\sigma_{00} = 0, \lambda = 0, \cos(\beta - 3\theta) = 0$  ( $L_1 = 0, L_2 = 0$ ).

Отметим предварительно один частный случай системы (1)

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -s + as^2 + bz^2, \\ \dot{s} &= z(1 + cs),\end{aligned}\tag{15}$$

и выпишем ее интеграл  $W(s, z)$ :

$$1) a = 0, b = 0, c = 0, W(s, z) = s^2 + z^2;$$

$$2) a \neq 0, b = 0, c = 0, W(s, z) = s^2 + z^2 - \frac{2a}{3}s^3;$$

$$3) a \neq 0, b = 0, c \neq 0, W(s, z) = z^2 - \frac{a}{c}s^2 + \frac{2(a+c)}{c^2}s - \frac{2(a+c)}{c^3}\ln|1 + cs|;$$

$$4) b \neq 0, c = 0, W(s, z) = e^{-2bs}(z^2 + \frac{a}{b}s^2 + \frac{a-b}{b^2}s + \frac{a-b}{b^3}) - \frac{a-b}{b^3};$$

$$5) b \neq 0, c \neq 0, c \neq b, c \neq 2b, W(s, z) = \frac{z^2}{(1+cs)^{\frac{2b}{c}}} + \frac{a+c}{b c^2(1+cs)^{\frac{2b}{c}}} +$$

$$+ \frac{2(2a+c)}{c^2(c-2b)}(1+cs)^{\frac{c-2b}{c}} + \frac{a}{c^2(b-c)}(1+cs)^{\frac{2(c-b)}{c}} - \frac{1}{c^2}(\frac{a+c}{b} + \frac{2(2a+c)}{c-2b} + \frac{a}{b-c});$$

$$6) b \neq 0, c = b, W(s, z) = \frac{z^2}{(1+bs)^2} + \frac{a+b}{b^3(1+bs)^2} - \frac{2(2a+b)}{b^3(1+bs)} + \frac{2a}{b^3}\ln|1 + bs| + \frac{3a+b}{b^3};$$

$$7) b \neq 0, c = 2b, W(s, z) = \frac{z^2}{1+bs} + \frac{a+2b}{4b^3(1+bs)} + \frac{a+b}{2b^3}\ln|1 + 2bs| - \frac{a}{4b^3}(1 + 2bs) - \frac{1}{2b^2}.$$

**Теорема 1.** Если выполнено условие

$$\sigma_{00} = 0, \lambda = 0, \theta = \theta_k = \frac{\beta}{3} + \frac{2k-1}{6}\pi, k \in \{0; \pm 1; \pm 2; 3\},$$

то состояние равновесия  $O(0,0)$  для квадратичной системы (9) является центром, и с помощью преобразования поворота на угол

$\tau = -\frac{\beta}{3} - \frac{k+1}{3}\pi$  система приводится виду (15):

$$\dot{u} = v - ((-1)^k\gamma + \frac{r}{3})uv, \quad \dot{v} = -u + \frac{\gamma}{2}(-1)^{k+1}u^2 + (\frac{\gamma}{2}(-1)^k - \frac{r}{3})v^2,$$

где  $a = (-1)^{k+1}\frac{\gamma}{2}$ ,  $b = \frac{\gamma}{2}(-1)^k - \frac{r}{3}$ ,  $c = \gamma(-1)^{k+1} - \frac{r}{3}$ ,

$$s = u = \cos\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)x - \sin\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)y,$$

$$z = v = \sin\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)x + \cos\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)y, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, 3\}.$$

В справедливости утверждения убеждаемся подстановкой указанных параметров в систему (13). Интеграл системы (9) получим из интегралов системы (15) с учетом условий на  $a, b, c$ .

$$\text{IV. } \sigma_{00} = 0, \theta = -\alpha, 4\gamma \cos(3\alpha + \beta) + \lambda \sin 4\alpha = 0 \quad (L_1 = 0, L_2 = 0).$$

**Теорема 2.** Если выполнено условие

$$\sigma_{00} = 0, \theta = -\alpha, 4\gamma \cos(3\alpha + \beta) + \lambda \sin 4\alpha = 0, \quad (16)$$

то состояние равновесия  $O(0,0)$  для квадратичной системы (9) является центром, и система с помощью преобразования поворота на угол  $\tau = \alpha$  приводится к виду (15):

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v + \frac{\lambda+2r}{6}u^2 + \frac{1}{2}\left(\gamma \sin(3\alpha + \beta) - \frac{\lambda}{4} \cos 4\alpha + \frac{\lambda}{4}\right)(v^2 - u^2), \\ \dot{v} &= -u - \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda-4r}{2} - 6\gamma \sin(3\alpha + \beta) + \frac{3}{2}\lambda \cos 4\alpha\right)v u. \end{aligned} \quad (17)$$

В этом убеждаемся подстановкой указанных параметров в систему (13).

Чтобы полностью учесть зависимость (16) между параметрами рассмотрим следующие два случая.

1)  $\cos(3\alpha + \beta)$  и  $\sin 4\alpha$  одновременно обращаются в ноль, т.е.

$$\alpha = \alpha_m = \frac{m}{4}\pi, \quad m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4\}, \quad \beta = -3\alpha_m + \frac{2k-1}{2}\pi,$$

$$k \in \{0, \pm 1, \pm 2, 3\}, \quad \lambda, \gamma \text{ произвольны.}$$

Система (17) принимает вид системы (15):

$$\dot{u} = v + \left(\frac{r}{3} + \frac{\gamma}{2}(-1)^k + \frac{\lambda(1+3(-1)^m)}{24}\right)u^2 + \frac{1}{2}\left(\gamma(-1)^{k-1} + \frac{\lambda(1-(-1)^m)}{4}\right)v^2,$$

$$\dot{v} = -u - \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda-4r}{2} + 6\gamma(-1)^k + \frac{3}{2}\lambda(-1)^m\right)v u,$$

$$\text{где } b = -\left(\frac{r}{3} + \frac{\gamma}{2}(-1)^k + \frac{\lambda(1+3(-1)^m)}{24}\right), \quad a = \frac{1}{2}\left(\gamma(-1)^k - \frac{\lambda(1-(-1)^m)}{4}\right),$$

$$c = \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda-4r}{2} - 6\gamma(-1)^k + \frac{3}{2}\lambda(-1)^m\right),$$

$$z = -u = -\cos\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)x + \sin\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)y,$$

$$s = v = \sin\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)x + \cos\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)y.$$

Интеграл системы (9) получим из интегралов системы (15) с учетом условий на  $a, b, c$ .

2)  $\cos^2(3\alpha + \beta) + \sin^2 4\alpha \neq 0$ . Положим  $\lambda = 4p \cos(3\alpha + \beta)$  и  $\gamma = -p \sin 4\alpha$ ,  $p$  – произвольный параметр. Система (17) принимает вид системы (15)

$$\dot{u} = v + \frac{1}{6}(2r + p(3 \cos(\alpha - \beta) + \cos(3\alpha + \beta)))u^2 - \frac{p}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(3\alpha + \beta))v^2,$$

$$\dot{v} = -u - \frac{1}{3}(p(\cos(3\alpha + \beta) + 3 \cos(\alpha - \beta) - r)vu),$$

$$\text{где } b = -\frac{1}{6}(2r + p(3 \cos(\alpha - \beta) + \cos(3\alpha + \beta))),$$

$$a = \frac{p}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(3\alpha + \beta)),$$

$$c = \frac{1}{3}(-r + p(\cos(3\alpha + \beta) + 3 \cos(\alpha - \beta))),$$

$$z = -u = -\cos\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)x + \sin\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)y,$$

$$s = v = \sin\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)x + \cos\left(\frac{\beta}{3} + \frac{k+1}{3}\pi\right)y.$$

$$\text{V. } \sigma_{00} = 0, \theta = -\alpha, r = -\frac{1}{2}\lambda (L_1 = 0, L_2 = 0, L_3 = 0).$$

**Теорема 3.** Если выполнено условие:

$$\sigma_{00} = 0, \theta = -\alpha, r = -\frac{1}{2}\lambda, \gamma = -\frac{\lambda}{2}\sin(\alpha - \beta),$$

то система (9) преобразованием поворота на угол  $\tau = \frac{\alpha - \beta}{2}$  приводится к

$$\text{виду } \dot{u} = v + \frac{\lambda}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}uv, \dot{v} = -u - \frac{\lambda}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}uv$$

и интегрируется в замкнутой форме.

В этом убеждаемся подстановкой указанных параметров в систему (13).

$$\text{VI. } \sigma_{00} = 0, \theta = -\alpha, r = -\frac{5}{4}\lambda, \gamma = -\frac{\lambda}{2}\sin(\alpha - \beta) (L_1 = 0,$$

$$L_2 = 0, L_3 = 0).$$

**Теорема 4.** Если выполнены условия

$$\sigma_{00} = 0, \theta = -\alpha, r = -\frac{5}{4}\lambda, \gamma = \frac{\lambda}{2}\sin(\beta - \alpha),$$

то система (9) преобразованием поворота на угол  $\tau = \frac{\alpha - \beta}{2}$  приводится к

виду  $\dot{u} = v + \frac{\lambda}{4} (3 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} v - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} u) u,$

$$\dot{v} = -u + \frac{\lambda}{4} \left( \sin \frac{\alpha+\beta}{2} v - 3 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} u \right) v.$$

В этом убеждаемся подстановкой указанных параметров в систему (13).

При дополнительном условии  $\alpha + \beta = \frac{k\pi}{2}$ , ( $k = 0, 1, \dots$ ) система принимает вид (15) и интегрируется.

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов [и др]. – М. : Наука, 1966. – 568 с.
2. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др]. – М. : Наука, 1967. – 587 с.
3. **Баутин, Н.Н.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонович. – М. : Наука, 1978. – 496 с.
4. **Ван, Д.** Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости / Д. Ван, Ч. Ли, Ш.-Н. Чоу. – М. : МЦНМО, 2005. – 415 с.
5. **Морозов, Н.П.** О приведении полиномиальных систем к специальному виду / Н.П. Морозов // Весник МДУ ім'я А.А. Куляшова. – 2011. – № 2(38). – С. 43–49.

Поступила в редакцию 28.01.2013 г.

УДК 511.36

**Н.В. ШАМУКОВА, В.А. ДАВЫДОВА**

## **ОЦЕНКИ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ ПОРЯДКОМ ПРИБЛИЖЕНИЯ НУЛЯ ЗНАЧЕНИЯМИ ПОЛИНОМОВ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ**

*В работе улучшаются оценки меры множества действительных чисел с заданным порядком приближения нуля значениями полиномов и их производных. Полученные результаты представляют интерес при оценках размерности Хаусдорфа в теории трансцендентных чисел.*

Рассмотрим несколько проблем теории диофантовых приближений. Для полинома

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

$$a_j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq j \leq n; \quad H = H(P) = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$$

пусть  $\psi(x)$  монотонная функция для  $x \in R_+$ .

В 1989 г. В. Берник [1] доказал гипотезу А. Бейкера показав, что для почти всех  $x \in R$  выполняется неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1} \psi(H), \quad (2)$$

имеющее лишь конечное число решений в  $P \in Z[x]$  с  $\deg P \leq n$ , если ряд

$$\sum_{H=1}^{\infty} \psi(H) \quad (3)$$

сходится.

В 1999 г. В. Бересневич [2] показал, что в случае расходимости ряда (3) неравенство (2) имеет бесконечно много решений для почти всех  $x \in R$ .

Дальнейшее развитие метрической теории диофантовых приближений можно найти в работах [3, 4, 5]. Всюду в этой статье  $n$  обозначает целое число,  $n \geq 2$ ,  $Q$  – достаточно большое число, является положительным действительным числом, и  $I = [a, b)$  интервал  $I \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Для заданных  $n$  и  $Q$  определим множество  $P_n(Q) = \{P(x), \deg P \leq n : H(P) \leq Q\}$ . Для данных  $I$ ,  $Q$ ,  $\varepsilon$  и  $P \in P_n(Q)$  обозначим через  $\sigma(P)$  множество для действительных  $x \in I$ , которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} P(x) \leq \varepsilon \\ |H(P)| \leq Q. \end{cases} \quad (4)$$

Для данных  $I$ ,  $Q$  и  $\varepsilon$  пусть  $B_{n,I}(\varepsilon, Q)$  является объединением множеств  $\sigma(P)$  по всем  $P \in P_n(Q)$ .

В. Бересневич рассматривал неравенство (4) с дополнительным условием  $|P'(x)| \geq 2|I|^{-1}$  и доказал следующую теорему [2, предложение 1].

Пусть  $n$  и  $I = [a, b)$  обозначим  $Q_1 = \max \left\{ 2^{n-1} |I|^{-\frac{1}{n}}, 4n^2 \right\}$ . Тогда

$$\mu B_{n,I}(\varepsilon, Q) \leq n 2^{n+2} \varepsilon Q^n |I| \quad (5)$$

для всех  $Q > Q_1$  и  $\varepsilon < n^{-1} 2^{-n-2} Q^{-n}$ .

Этот результат является точным для всех значений  $P'(x)$  близких к  $Q$ , но для меньших значений производной можно улучшить оценку. Улучшение может быть получено также и для  $|P'(x)| \geq 2|I|^{-1}$ , тем не менее, мы не будем подробно останавливаться на этом в данной работе.

Для целого числа  $m$  обозначим через  $B_{n,l,l}(\varepsilon, m, Q)$  множество решений, удовлетворяющих дополнительному неравенству

$$Q^{\frac{l}{m}} \leq |P'(x)| < Q^{\frac{l+1}{m}}. \quad (6)$$

**Теорема.** Для данного целого  $l$ ,  $-\frac{m}{4}-1 \leq l \leq m$  и  $\varepsilon < n 2^{-n-4} Q^{-n}$ .

Тогда

$$B_{n,l,l}(\varepsilon, m, Q) \leq \begin{cases} \left| \frac{l}{4} \right|, & l = m - 1 \text{ или } l = m, \\ n 2^{n+3} Q^{\frac{(l+1)}{m-1}|l|}, & \frac{1}{5}(m-1) \leq l \leq m-2, \\ n 2^{n+3} Q^{\frac{1+3l}{4}}, & -\frac{1}{4}(m-1) \leq l \leq \frac{1}{5}(m-1). \end{cases} \quad (7)$$

**Замечание.** Первое неравенство в (7) следует из теоремы В. Бересневича. Для корня  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  многочлена  $P(x)$  определим множество

$$S(\alpha_j) = \left\{ z \in C : |z - \alpha_j| = \min_{1 \leq i \leq n} |z - \alpha_i| \right\}. \quad (8)$$

**Лемма 1.** Если  $x \in S(\alpha_j)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , то

$$|x - \alpha_j| \leq n \varepsilon |P'(\alpha_j)|^{-1}. \quad (9)$$

**Доказательство.** Учитывая, что

$$\frac{|P'(x)|}{|P(x)|} = \sum_{i=1}^n |x - \alpha_i|^{-1}$$

и используя определение  $S(\alpha_j)$ , имеем

$$|P'(x)| |P(x)|^{-1} \leq n |x - \alpha_j|^{-1},$$

и, следовательно,

$$|x - \alpha_j| \leq n |P(x)| |P'(x)|^{-1}. \quad (10)$$

Используя формулу Лагранжа, оценку  $|x| \leq \frac{1}{2}$ , формулу

$$P'(x) = P'(\alpha_j) + P''(\xi)(x - \alpha_j), \quad \xi \in (x; \alpha_j),$$

предыдущие оценки (6), (10) и неравенство  $|P''(\xi)| \leq 4Q$ , получим

$$\frac{n-1}{n} |P'(x)| < P'(\alpha_j) < \frac{n+1}{n} |P'(x)|. \quad (11)$$

Отсюда следует  $P'(\alpha_j) \neq 0$  и  $|D(P)| \geq 1$ , где  $D(P)$  дискриминант многочлена  $P(x)$ . Поэтому все  $x$ , что удовлетворяют (4) и (6) могут принадлежать не более чем двум множествам  $S(\alpha_j)$ . Без ограничения общности, будем считать, что  $i = 1, j = 2$  и  $x \in S(\alpha_1)$ .

Пусть  $x \in I \cap S(\alpha_1)$  решение (4). Тогда  $x$  лежит в интервале  $\sigma(P)$ , который имеет вид

$$\sigma(P) = I \cap \left\{ z \in C : |z - \alpha_1| < (n+1)\varepsilon |P'(\alpha_1)|^{-1} \right\}. \quad (12)$$

Для действительного  $\lambda > 0$  обозначим  $\sigma_1(P)$  через интервал

$$\sigma_1(P) = I \cap \left\{ z \in C : |z - \alpha_1| < c_1 Q^{-\lambda} |P'(\alpha_1)|^{-1} \right\}. \quad (13)$$

Отсюда следует из (12) и (13), что

$$\mu \sigma(P) (\mu \sigma_1(P))^{-1} < c_1^{-1} \varepsilon Q^\lambda. \quad (14)$$

Из формулы Тейлора для  $P(x)$  при  $x \in \sigma_1(P)$  имеем

$$P(x) = P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P''(\xi_1)(x - \alpha_1)^2, \quad \xi_1 \in (\alpha_1, x).$$

Так как

$$|P'(\alpha_1)(x - \alpha_1)| < c_1 Q^{-\lambda}$$

и

$$|P''(\xi_1)(x - \alpha_1)^2| < 2c_1 \left( \frac{n}{n-1} \right)^2 Q^{1-2\lambda-\frac{2l}{m}},$$

получаем, что для

$$\lambda + 2 \frac{l}{m} > 1 \quad (15)$$

и для всех  $x \in \sigma_1(P)$  выполняется  $|P(x)| < 16c_1^2 Q^{-\lambda}$ . (16)

Теперь зафиксируем коэффициенты  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2$  полинома  $P(x)$ .

Пусть вектор  $\vec{b}$  имеет координаты  $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_2)$ . Заметим, что из неравенства  $|a_j| \leq Q$ ,  $2 \leq j \leq n$ , следует, что число различных значений

$\vec{b}$  равно  $(2Q+1)^{n-1}$ . Множество многочленов с тем же вектором  $\vec{b}$  будем обозначать через  $\Im(\vec{b})$ .

Далее будем использовать метод существенных и несущественных областей, введенный В. Спринджуком [6].

Интервал  $\sigma_1(P_1), P_1(x) \in \Im(\vec{b})$  называется несущественным, если существует такой полином  $P_2(x) \in \Im(\vec{b})$ , что

$$\mu(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)) \geq 2^{-1} \mu\sigma_1(P_1). \quad (17)$$

Если для всех  $P_2(x) \in \Im(\vec{b})$  выполняется

$$\mu(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)) \geq 2^{-1} \mu\sigma_1(P_1), \quad (18)$$

то интервал  $\sigma_1(P_1)$  будем называть существенным.

Обозначим через  $\Im_1(\vec{b})$  множество многочленов  $P(x) \in \Im(\vec{b})$  с несущественными интервалами и через  $\Im_2(\vec{b})$  множество многочленов  $P(x) \in \Im(\vec{b})$  с существенными интервалами.

a). Докажем теорему для множества  $\Im_1(\vec{b})$ . В этом случае неравенство (16) выполняется на множестве  $A(P_1, P_2) = \sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)$  с мерой  $\mu A(P_1, P_2) > 2^{-1} \mu\sigma_1(P_1)$ . Пусть  $R(x) = P_1(x) - P_2(x)$ , тогда  $\deg R = 1$ , и

$$|R(x)| = |kx + s| < 12^5 c_1^2 Q^{-\lambda} \quad (19)$$

на отрезке с мерой не меньшей  $2^{-1} \mu\sigma_1(P_1) \geq c_1 Q^{-\lambda} |P'_1(\alpha_1)|^{-1}$ . Однако неравенство (19) может выполняться на отрезке с мерой не более  $2^6 c_1^2 |k|^{-1} Q^{-\lambda}$ .

Поэтому

$$|k| < |P'_1(\alpha_1)| 2^5 c_1^2. \quad (20)$$

Так как  $k \neq 0$  и целое, из неравенства (6) следует неравенство (20) и должно выполняться

$$l > -1. \quad (21)$$

В неравенстве (19)  $s$  может принимать  $(|I| + 2)k$  различных значений, поэтому (19) может выполняться для всех пар  $(k, s)$  на множестве с

мерой не более  $2^6 c_1^2 Q^{-\lambda} |P'_1(\alpha_1)| |I| < 2^6 c_1^2 Q^{-\lambda + \frac{l+1}{m}} |I|$ .

Таким образом, окончательно получим

$$\sum_{\tilde{b}} \sum_{P \in \mathfrak{I}_1(\tilde{b})} \mu \sigma_1(P) < 2^7 c_1^2 Q^{-\lambda + \frac{l+1}{m}} |I|. \quad (22)$$

Перейдем к существенным интервалам. Заметим, что из (18) каждой точке  $x$  может принадлежать не более двух существенных интервалов  $\sigma_1(P)$ , поэтому

$$\sum_{P \in \mathfrak{I}_1(\tilde{b})} \mu \sigma_1(P) < 2|I|. \quad (23)$$

В силу неравенства (14) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{b}} \sum_{P \in \mathfrak{I}_2(\tilde{b})} \mu \sigma(P) &= \sum_{\tilde{b}} \sum_{P \in \mathfrak{I}_2(\tilde{b})} \mu \sigma_1(P) \frac{\mu \sigma(P)}{\mu \sigma_1(P)} < (n+1) c_1^{-1} (2Q+1)^{n-1+\lambda} \sum_{P \in \mathfrak{I}_2(\tilde{b})} \mu \sigma_1(P) < \\ &< (n+1) 2^n c_1^{-1} \varepsilon Q^{n-1+\lambda} |I|. \end{aligned} \quad (24)$$

Теперь возьмем

$$\varepsilon = Q^{-n}, \quad \lambda = \frac{1 + (l+1)/m}{2}, \quad c_1 = (n+1)^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{n-7}{3}}.$$

Тогда из (15) и (21) при  $\lambda > \frac{1}{5}(m-1)$  левые части (22) и (24) можно

оценить сверху

$$ns^{n+1} Q^{\frac{l+1}{m-1}}. \quad (25)$$

Предположим, что неравенство

$$\lambda + 2 \frac{l}{m} \leq 1 \quad (26)$$

выполнено, т.е. (15) не выполняется. Тогда оценка (16) заменяется на

$$|P(x)| < 16 c_1^2 Q^{1-2\lambda-\frac{2l}{m}}, \quad (27)$$

а неравенство (19) заменяется на

$$|kx + s| < 2^5 c_1^2 Q^{1-2\lambda-\frac{2l}{m}}. \quad (28)$$

Вместо (20) имеем

$$|k| < 2^5 c_1 Q^{1-\lambda-\frac{l+1}{m}}. \quad (29)$$

Оценка (21) заменяется на

$$\lambda + \frac{l-1}{m} \leq 1, \quad (30)$$

неравенство (22) преобразовывается в

$$\sum_{\tilde{b}} \sum_{P \in \mathfrak{I}_1(\tilde{b})} \mu \sigma_1(P) < 2^{10} c_1^3 Q^{2-3\lambda - \frac{3l-1}{m}}, \quad (31)$$

а оценка (24) не изменится.

Возьмем

$$\varepsilon = Q^{-n}, \quad \lambda = \frac{3}{4} - \frac{3l}{4m} + \frac{1}{4m}, \quad c_1 = -2^{\frac{n-10}{4}} (n+1)^{\frac{1}{4}}. \quad (32)$$

Тогда из (26) и (30) следует, что левые части (24) и (31) имеют оценку сверху

$$n 2^{n+3} Q^{\frac{1+3l/m+1}{4}} |I| \quad (33)$$

для  $l > -\frac{1}{4}(m-1)$ . Таким образом, из (25) и (33) получаем

$$\begin{aligned} \mu B_{n,I,l}(\varepsilon, m, Q) &< n 2^{n+3} Q^{\frac{l+1}{m-1}} |I|, \quad \frac{1}{5}(m-1) \leq l \leq m-2, \\ \mu B_{n,I,l}(\varepsilon, m, Q) &< n 2^{n+3} Q^{\frac{1+3l/m}{4}} |I|, \quad -\frac{1}{4}(m-1) < l < \frac{1}{5}(m-1). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Берник, В.И.** О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53. – № 1. – С. 17–28.
2. **Beresnevich, V.V.** On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V.V. Beresnevich // Acta Arithmetica. – 1999. – Vol. 90. – № 2. – P. 97–112.
3. **Beresnevich, V.V.** / V.V. Beresnevich // Acta Arithmetica Hungar. – 2002. – Vol. 94. – № 1. – P. 99–130.
4. **Bernik, V.I.** The convergence case for standard and multiplicative version/ V.I. Bernik, D. Kleinbock, G. Margulis // International Mathematical Research Notices. – 2001. – P. 453–486.
5. **Bernik, V.I.** Metric diophantine approximation : the Khinchine-Groshev theorem for non-degenerate manifolds/ V.I. Bernik, V.V. Beresnevich, D. Kleinbock, G. Margulis // Moscow Math. Journal. – 2002. – Vol. 2. – № 2. – P. 203–225.
6. **Sprindzuk, V.G.** Maled's problem in metric Number Theory // Nauka i Tehnika, Minsk, 1967 [Transl. Math. Monogr. 25, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969].

---

УДК 681.3.06:519

*Н.С. КОВАЛЕНКО, В.Н. ВЕНГЕРОВ*

## **ПРИЕМЫ УСКОРЕНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ И ВЕКТОРНО-КОНВЕЙЕРНОЙ ОБРАБОТКАХ ДАННЫХ**

*Рассматриваются приемы ускорения вычислений при распределенной и векторно-конвейерной обработках данных нескольких функциональных устройств за счет избыточности данных и операций при условии низкой интенсивности потоков межпроцессорных передач данных.*

### **1. Постановка задачи и основные понятия**

Эффективное применение суперкомпьютеров с целью решения прикладных задач возможно лишь при удовлетворительном решении проблемы отображения алгоритмов на их архитектуры. Эта проблема, в свою очередь, порождает множество задач как технологии организации параллельных вычислений, так и разработки эффективных приемов ускорения вычислений. В статье проведена классификация приемов ускорения вычислений по признакам относительной производительности и обоснована эффективность в зависимости от числа операций программных реализаций и объемов обрабатываемых данных. Определены приемы ускорения вычислений, в основе которых лежит структурная избыточность данных и показывается их эффективность в программных реализациях алгоритмов, базирующихся на графовых структурах данных. Устанавливается зависимость времени выполнения программных реализаций от используемых структур данных. Показывается, что время выполнения программных реализаций алгоритмов с квадратичной трудоемкостью может быть значительно улучшено за счет изменения используемых структур данных.

Распределенные вычисления – перспективная и динамично развивающаяся область организации параллелизма [1]. Этот термин обычно используется при параллельной обработке данных нескольких функциональных устройств, достаточно удаленных одно от другого, в которых передача данных по линиям связи приводит к существенным временным задержкам. Эффективная обработка данных при таком способе организации вычислений возможна только для алгоритмов с низкой интенсивностью потоков межпроцессорных передач данных. Перечисленные условия характерны, например, при организации вычислений в многомашинных вычислительных комплексах (ВК), высокопроизводительных вычислительных кластерах, локальных или глобальных информационных сетях [2]. В связи с этим производительность при распределенной обработке параллельных процессов может существенно колебаться в зависимос-

ти от целого ряда факторов в достаточно широком диапазоне, а ускорение вычислений может быть достигнуто более богатым набором приемов.

Аппарат теории графов, являясь мощным математическим средством, получил широкое распространение при разработке, тестировании, анализе и оценке сложности, а также распараллеливании последовательных программ. Он позволяет наглядно представить совокупность операций алгоритма, связь между отдельными операциями и порядок их выполнения.

Представим множество операций, выполняемых в исследуемом алгоритме решения задачи, и существующие между операциями информационные зависимости в виде ациклического ориентированного мультиграфа  $G = (V, R)$ , называемого *графом алгоритма* (ГА) [1], где  $V = \{1, 2, \dots, |V|\}$  есть множество вершин графа, представляющее выполняемые операции алгоритма, а  $R$  – множество дуг графа, причем дуга  $r = (i, j)$  принадлежит графу  $G$ , если операция  $j$  использует результат выполнения операции  $i$ . Предположим, что множество вершин  $V$  разбито на такие непересекающиеся подмножества  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , что если  $u \in V_i, v \in V_j$  и существует

дуга  $(u, v)$ , то  $i < j$ . В этом случае разбиение  $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$  называется *строгой параллельной формой алгоритма*, а подмножества  $V_1, V_2, \dots, V_k$  – ее *ярусами* или *уровнями*.

Существует строгая параллельная форма, при которой максимальная из длин путей, оканчивающихся в вершине с индексом  $i$ , равна  $i - 1$ . Для этой параллельной формы число используемых индексов на единицу больше критического пути графа. Строгая параллельная форма называется *канонической*, если все входные вершины находятся в группе с одним индексом, равным единице. Для заданного графа алгоритма его каноническая форма *единственна*. Число  $k$  называют *высотой параллельной формы*, число вершин в ярусе ( $|V_i|, i = \overline{i, k}$ ) – *шириной  $i$ -го яруса*, а максимальную ширину ярусов ( $\max|V_i|, i = \overline{i, k}$ ) – *шириной параллельной формы* [1].

Необходимо отметить, что множество  $V$  может быть разбито на два непересекающихся подмножества  $V_c$  и  $V_B$  скалярных и векторных операций соответственно. Тогда *трудоемкостью*, или *числом операций*, алгоритма будет называться число

$$N = |V_c| + \sum_{i \in V_B} L_i ,$$

где  $|V_c|$  – число элементов множества  $V_c$ , а  $L_i$  – длина вектора, используемого в  $i$ -й векторной операции [3]. Заметим, что в общем случае в оценку числа операций алгоритма необходимо включать также и число условных и безусловных переходов.

Пусть задан произвольный ГА и две его программные реализации  $P_1$  и  $P_2$  соответственно последовательного и распределенного на  $p$  процессорах алгоритмов решения задачи, для которых определены величины  $N_i$  и  $T_i$  – число операций и время выполнения соответствующих программных реализаций,  $i = 1, 2$ .

Известно [3], что производительность программной реализации  $P_i$  вычисляется по формуле

$$\nu_i = \frac{N_i}{T_i}, i = 1, 2.$$

*Ускорением* вычислений будем называть отношение времени выполнения программной реализации  $P_1$  ко времени выполнения программной реализации  $P_2$ :  $\alpha = T_1/T_2$ . Все преобразования графа алгоритма или соответствующей ему программной реализации, приводящие к ускорению вычислений без нарушения их функциональных возможностей при получении конечного результата, будем называть *приемами ускорения* вычислений. Приемы, для которых  $\alpha > 1$ , будем называть *эффективными*.

*Эффективность* использования  $p$  процессоров при решении задачи распределенным алгоритмом определяет среднюю долю времени выполнения алгоритма, в течение которой процессоры реально используются для решения задачи, и определяется соотношением  $\beta = \alpha/p$ .

Величину  $\psi = N_2/N_1$  будем называть *относительной трудоемкостью*, а величину  $\varphi = \nu_2/\nu_1 = \alpha\psi$  – *относительной производительностью* программной реализации  $P_2$  по отношению к  $P_1$ .

При  $\psi < 1$  величину  $V_\psi = 1/\psi$  будем называть *выигрышем от уменьшения трудоемкости*, а при  $\psi > 1$  величину  $P_\psi = 1/\psi$  – *проигрышем в трудоемкости*. Аналогично, при  $\varphi > 1$  величину  $V_\varphi = \varphi$  будем называть *выигрышем в производительности*, а при  $\varphi < 1$  величину  $P_\varphi = 1/\varphi$  – *проигрышем в производительности* программной реализации  $P_2$  по отношению к  $P_1$ .

С учетом введенных обозначений ускорение вычислений  $\alpha$  можно представить в следующем виде:  $\alpha = \varphi/\psi$ .

## 2. Приемы ускорения вычислений и их классификация

Для ЭВМ последовательного типа одним из наиболее эффективных приемов ускорения вычислений является снижение числа операций в программных реализациях и самих алгоритмах. При распределенной обработке параллельных процессов производительность многопроцессорной системы может существенно колебаться в зависимости от целого ряда факторов в достаточно широком диапазоне. Следовательно, ускорения вычислений можно достичь более богатым набором приемов по сравнению с ЭВМ последовательного типа.

**Утверждение 1.** Величина ускорения вычислений при распределенной обработке будет эффективной ( $\alpha > 1$ ), если выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1)  $\varphi < 1$ ,  $\psi < 1$  и  $\psi < \varphi$ , т.е. уменьшаются относительная производительность системы распределенной обработки и число операций в программной реализации, причем число операций должно сократиться в большее число раз, чем уменьшится производительность;

2)  $\varphi = 1$ ,  $\psi < 1$ , т.е. относительная производительность системы распределенной обработки не изменяется, а сокращается число операций в программной реализации;

3)  $\varphi > 1$ ,  $\psi < 1$ , т.е. относительная производительность распределенной обработки повышается и сокращается число операций в программной реализации;

4)  $\varphi > 1$ ,  $\psi = 1$ , т.е. повышается относительная производительность системы распределенной обработки, а число операций не изменяется;

5)  $\varphi > 1$ ,  $\psi > 1$  и  $\psi < \varphi$ , т.е. повышается относительная производительность системы распределенной обработки и увеличивается число операций в программной реализации, причем относительная производительность должна повыситься быстрее, чем увеличится число операций.

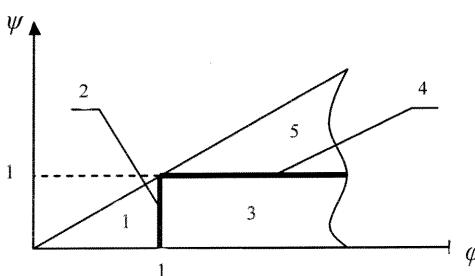


Рис. 1. Приемы ускорения вычислений при распределенной обработке

Данное утверждение позволяет классифицировать приемы ускорения вычислений по признаку относительной производительности распределенной обработки на пять групп, которые схематически изображены на рис. 1, где первой группе соответствует нижняя треугольная область, второй – вертикальная полоса, третьей – прямоугольная область, четвертой – горизонтальная полоса, а пятой – верхняя треугольная область.

Из утверждения 1 следует, что для систем распределенной обработки приемы ускорения вычислений применительно к числу операций программной реализации, или алгоритма, могут быть отнесены к одному из трех следующих классов.

1) Приемы ускорения вычислений, основанные на уменьшении числа операций программной реализации или самого алгоритма. Производительность систем распределенной обработки при этом может уменьшаться, оставаться постоянной или увеличиваться. К данному классу относятся приемы группы 1–3.

2) Приемы ускорения вычислений, для которых число операций программной реализации и алгоритма не изменяется. При этом повышается производительность системы распределенной обработки. К данному классу относятся приемы группы 4.

3) Приемы ускорения вычислений, основанные на избыточности операций или данных. При этом повышается производительность системы распределенной обработки наряду с увеличением числа операций или

объема обрабатываемой информации. К данному классу относятся приемы группы 5.

### 3. Эффективность приемов ускорения вычислений

Вполне естественным является вопрос об эффективности той или иной группы приемов ускорения вычислений. Но однозначного вывода сделать нельзя, поскольку следует учитывать особенности конкретного алгоритма и решаемой задачи. Несмотря на это, можно оценить потенциальные возможности рассмотренных групп приемов ускорения вычислений, характеризующих следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Группа приемов ускорения вычислений при распределенной обработке будет эффективной ( $\alpha > 1$ ), если  $\alpha$  удовлетворяет условиям:

- 1)  $\alpha = V_\psi / p_\phi$ , т.е. ускорение вычислений равно отношению выигрыша от уменьшения трудоемкости программной реализации к проигрышу производительности системы распределенной обработки;
- 2)  $\alpha = V_\psi$ , т.е. ускорение вычислений равно выигрышу от уменьшения трудоемкости программной реализации;
- 3)  $\alpha = V_\psi V_\phi$ , т.е. ускорение вычислений равно произведению выигрыша от уменьшения трудоемкости программной реализации и выигрыша производительности распределенной системы;
- 4)  $\alpha = V_\phi$ , т.е. ускорение вычислений равно выигрышу производительности распределенной системы;
- 5)  $\alpha = V_\phi / p_\psi$ , т.е. ускорение вычислений равно отношению выигрыша производительности распределенной системы к проигрышу в трудоемкости программной реализации.

Как следует из утверждения 2, наибольшими потенциальными возможностями ускорения вычислений обладают приемы третьей группы.

### 4. Приемы ускорения вычислений за счет избыточности операций и данных при векторно-конвейерной обработке

Предположим, что при модификации некоторой программной реализации увеличивается число ее операций или, другими словами, увеличивается число вершин ГА. Добавляемые в ГА вершины будем называть *избыточными*, а все остальные – *необходимыми*. Если избыточные вершины исключают использование некоторых других вершин (при этом подразумевается, что число добавляемых вершин больше числа исключаемых), то такие вершины назовем *заменяемыми избыточными*, в противном случае – *добавляемыми избыточными*. Эти термины в одинаковой мере могут относиться к данным, операциям и функциональным устройствам.

Множество вершин  $V$  в ГА разбивается на два непересекающихся подмножества: вершины критического пути (МВКП) и фоновые вершины (МФВ).

К приемам ускорения вычислений за счет добавляемой избыточности могут быть отнесены следующие:

- искусственная задержка выдачи команд, т.е. добавление новых операций в МФВ для организации режима зацепления по двум операндам при работе с векторными регистрами;
  - устранение входных зависимостей и антизависимостей по данным в циклических участках программ путем введения промежуточных переменных или массивов. В этом случае увеличивается число элементов в МВКП;
  - расщепление циклического участка на несколько циклов с целью достижения его частичной векторизации. При этом происходит увеличение эпилогов циклов и увеличение числа условных переходов, т.е. увеличивается число элементов МВКП.
- К приемам ускорения вычислений за счет заменяемой избыточности относятся следующие:

- замена последовательной работы одного функционального устройства параллельной работой или работой в режиме зацепления с другими функциональными устройствами;
- векторизация циклов с условными операторами. По условному выражению формируется двоичная векторная маска (управляющий вектор), которая позволяет затем выбрать элементы векторов для вычислений или записи в оперативную память;
- внесение операций в тело цикла.

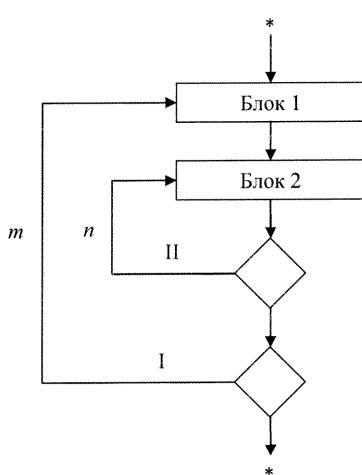


Рис. 2. Блок-схема циклического участка программы

Данный прием рассмотрим на следующем примере. Пусть задан циклический участок программы, блок-схема которого приведена на рис. 2, где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – числа операций, выполняемых соответственно в блоках 1 и 2, а  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – времена реализации этих блоков. Цикл I выполняется  $m$  раз, а цикл II –  $n$  раз. Без учета команд условных переходов число операций этого участка составляет величину  $N = (\alpha_2 n + \alpha_1) m$ , а время его реализации будет  $T = (\beta_2 n + \beta_1) m$ . Рассмотрим следующий обмен между МВКП и МФВ блоков 1 и 2. Операции из МВКП блока 1 переносятся в МФВ блока 2. В этом случае число операций увеличивается и

составляет величину  $N^* = ((\alpha_2 + \delta) n + \alpha_1 - \delta) m$ , где  $\delta$  – число переносимых операций, а время выполнения программной реализации уменьшается и составляет величину  $T^* = ((\beta_2 n + \beta_1) - \beta) m$ , где  $\beta$  – время реализации переносимых операций в МВКП блока I;

– структурная избыточность данных. Данный прием ускорения вычислений состоит в замене нерегулярной структуры данных на регулярную с целью исключения косвенной адресации и достижения максимальной производительности ВК ЭВМ. Влияние избыточности данных на

ускорение вычислений рассмотрим на примере комбинаторных задач анализа топологии графов, для решения которых необходима полная информация обо всех дугах и вершинах.

Одним из способов представления графа является представление с помощью списков инцидентности, которое требует  $m + n$  ячеек памяти, где  $m$  и  $n$  – число дуг и число вершин графа соответственно. Другим способом представления графа является матрица смежностей, которая требует  $n^2$  ячеек памяти. Разность между этими объемами ( $n^2 - m - n$ ) будем называть *структурной избыточностью данных*. Однако, несмотря на структурную избыточность данных, этот способ позволяет эффективно применять векторную обработку и за счет этого достигать максимальной производительности векторно-конвейерных ЭВМ, что невозможно при использовании списков инцидентности из-за косвенной адресации данных. Кроме того, с учетом булевости матрицы смежностей графа и архитектуры ВК ЭВМ объем избыточной информации сокращается до  $n[n/64] - m - n$  машинных слов ( $[x]$  – наименьшее целое большее или равное  $x$ ) за счет побитового представления информации.

Возможности ускорения вычислений на ВК ЭВМ за счет избыточности данных продемонстрируем на примере программной реализации алгоритма поиска в глубину [4]. Рассмотрим две программные реализации данного алгоритма на языке Ассемблер ВК ЭВМ, основные положения которого изложены в [3].

1) Реализация на структуре данных, заданной списками инцидентности в режиме скалярной обработки ВК ЭВМ.

В этом случае время работы программы составляет  $T_1 = 36m + 85n + 250$  тактов ВК ЭВМ, а число операций  $N_1 = 14m + 30n + 50$ , где  $m$  и  $n$  – число дуг и число вершин графа соответственно. При этом производительность ВК ЭВМ приближается к полувекторной ( $v_1 \approx 0,40$ ).

2) Реализация на структуре данных, заданной матрицей смежностей при ее побитовом представлении в режиме векторной обработки ВК ЭВМ.

При данном способе реализации

$$T_2 = \begin{cases} (96 + 2k)n + 250 & \text{тактов при } 5 \leq k \leq 12; \\ (73 + 4k)n + 250 & \text{тактов при } 13 \leq k \leq 63. \end{cases}$$

Здесь  $k = \max\{5, [n/64]\}$ , а число операций  $N_2 = (47 + 7k)n + 50$ . Производительность ВК ЭВМ приближается к векторной и супервекторной ( $v_2 \in [0,75; 1,5]$ ), т.е. в 2–4 раза выше.

Приведенные выше оценки получены из анализа соответствующих программных реализаций. На основе таких оценок можно установить зависимость времени реализации алгоритмов от объема избыточной информации для данных программных реализаций.

**Утверждение 3.** Если число вершин графа менее 768 ( $1 < n < 768$ ), то при любом объеме избыточной информации при реализации алгоритма поиска в глубину верно соотношение  $T_2 < T_1$ .

Из данного утверждения следует, что поиск в глубину в полном орграфе, т.е.  $m = n(n - 1)/2$ , при использовании побитовой матрицы смежностей будет выполнен за время меньшее, чем при его реализации на списках инцидентности для орграфа, у которого  $m = n$  с тем же числом вершин. Другими словами, в этом случае время выполнения программной реализации с трудоемкостью  $\Theta(n^2)$  меньше времени выполнения программной реализации с трудоемкостью  $\Theta(m + n)$  даже если  $m = n$ .

**Утверждение 4.** Если число вершин графа находится в диапазоне от 768 до 4032 ( $768 < n < 4032$ ), то при реализации алгоритма поиска в глубину выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} T_1 &< T_2, \text{ если } p < p^*; \\ T_1 &> T_2, \text{ если } p > p^*, \text{ где } p = m/n, p^* = ([n/64] - 3)/9. \end{aligned}$$

Таким образом, при  $p = p^*$  объем избыточной информации настолько велик, что векторная обработка необходимой и избыточной информации эквивалентна по времени реализации скалярной обработке только необходимой информации.

#### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. **Воеводин, В.В.** Параллельные вычисления / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. – СПб. : БХВ, 2002. – 608 с.
2. Принципы построения суперкомпьютеров семейства СКИФ и их реализация / С.В. Абламейко [и др.] // Информатика. – 2004. – № 1. – С. 89–106.
3. **Иванников, В.П.** Особенности систем программирования для векторно-конвейерной ЭВМ / В.П. Иванников, С.С. Гайсарян // Кибернетика и вычислительная техника. – Вып. 2. – М. : Наука, 1986. – С. 3–17.
4. **Евстегнеев, В.Н.** Графы в программировании: обработка, визуализация и применение / В.Н. Евстегнеев, В.А. Евстегнеев. – СПб. : БХВ, 2003. – 1104 с.

Поступила в редакцию 29.01.2013 г.

УДК 550.388.2

**Ю.Ф. ЗАРНИЦКИЙ, А.В. ВОЛОСЕВИЧ**

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ДИАГНОСТИКА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В АВРОРАЛЬНОЙ ИОНОСФЕРЕ**

Рассматривается кинетическая линейная модель модифицированной Фарлей-Бунемановской (ФБ) неустойчивости Е-слоя авроральной ионосферы. Динамика ионов изучается на основе введенной редуцированной функции Максвелла. Получены дисперсионные уравнения для длинноволновых и коротковолновых ФБ волн при учете реальных физических параметров ионосферной плазмы. В рассмотренной модели учтены кинетические эффекты: нагрев электронов, температурная зависимость частоты столкновений электронов с нейтралами. На основе развитых моделей методами аналитического и численного анализа рас-

считаны законы дисперсии и инкременты нарастания волн для реальных физических условий в диапазоне высот ионосферы 100-120 km. Отдельно рассмотрены модели для низкочастотных и высокочастотных ФБ волн и делаются выводы, важные для экспериментальной диагностики авроральных неоднородностей методом радиолокационного зондирования ионосферы.

## 1. Введение

Возникновение мелкомасштабных неоднородности электронной плотности в Е-слое авроральной, ионосферы во времена магнитных возмущений является уникальным явлением, которое изучается теоретически и экспериментально на протяжении многих лет [1-12]. С современной точки зрения предполагается, что причиной генерации этих неоднородностей является модифицированная двухпотоковая или Фарлей-Бунемановская (ФБ) неустойчивость, которая возникает при протекании холловского тока в слабоионизированной плазме. Линейная теория ФБ неустойчивости была развита в работах [2-3; 7; 10-11] на основе как кинетической, так и магнитогидродинамической теории. В многочисленных работах предпринимались попытки согласовать выводы этой теории с экспериментальными данными радарных и ракетных экспериментов. На основе линейной теории в ряде работ были рассчитаны пороговые значения электрического поля, границы линейной генерации и фазовые скорости возбуждаемых ФБ волн. Согласно линейной теории фазовая скорость волн должна совпадать со скоростью дрейфа электронов  $\vec{V}_0 = [\vec{E}, \vec{B}_0] / B^2$  в присутствии постоянных и ортогональных друг другу электрического и магнитного полей.

Однако этот факт, как и многие другие выводы теории, противоречили допплеровским радарным измерениям, из которых следовало, что значения квазистационарных фазовых скоростей для ФБ волн как низкочастотных, так и высокочастотных существенно ниже, чем скорости электронного дрейфа, и приблизительно равны ионно-звуковой скорости в плазме  $c_s = \sqrt{k_b(T_i + T_e)/m_i}$  (здесь обозначено  $k_b$  – постоянная Больцмана,  $T_i, T_e, m_i$  – температура ионов, электронов и масса иона соответственно). Это означает, что значения фазовых скоростей соответствуют значению линейного инкремента ФБ неустойчивости при условии ее срыва  $\gamma_k^L = 0$ , либо за счет нелинейных эффектов, либо за счет неучтенных линейных ограничительных механизмов, которые приводят к стабилизации этой неустойчивости.

Другая проблема сопоставления теории с экспериментом – определение частотного диапазона ФБ волн (частоты радиоотражений), т.е. определение границ линейной генерации в пространстве волновых чисел  $k$  или частоты радара  $f_{rad}$  ( $f_{rad} = 23.78 k$ ). С точки зрения линейной теории, этот диапазон для низкочастотных волн ограничивался условиям  $\omega \ll v_i$ : и  $|\omega - kv_0| \ll v_e$  для моды  $\omega = kV_0 / (1 + R)$ ,  $R = v_e v_t / \omega_g^2$  ( $v_i, v_e$  – частоты столкновений ионов и электронов с нейтралами,  $\omega_g = \omega_{be} \omega_{bi}$  – нижнегибридная частота) [7, 12]. Однако в экспериментах было обнаружено, что сильная линейная генерация ФБ волн возникает практически

во всем диапазоне волновых чисел вплоть до  $k \approx 100 m^{-1}$ , если дрейфовая скорость электронов в ионосфере незначительно превышает некоторое пороговое значение вблизи скорости звука в плазме [12; 13]. Также из экспериментальных результатов по некогерентному рассеянию радиоволн было установлено сильное возрастание электронных температур в возмущенном Е-слое авроральной зоны, и, следовательно, нагрев приводит к изменению частоты столкновений электронов с нейтралами и к изменению параметрического пространства ФБ волн.

Целью работы является исследование линейной теории Ф-Б неустойчивости на основе кинетической модели и ее согласование с экспериментальными данными. Для получения аналитического и численного решения в работе рассматриваются особенности неустойчивых ФБ волн раздельно в длинноволновом и коротковолновом диапазоне. Кроме того, учитывается влияние ряда факторов на условия возникновения авроральных неоднородностей и их проявление в экспериментальной диагностике. Так, например, в работе исследуется роль таких эффектов, как:

- а) увеличение электронной температуры на высотах возбуждения ФБ неустойчивости;
- б) неизотермичность электронов ионосферной плазмы Е-слоя;
- в) температурная зависимость частоты электрон-нейтральных столкновений;
- г) нарушение условия квазинейтральности плазмы.

Подробно исследуется параметрическое пространство генерации волн в диапазоне высот 100-120 км, что особенно важно для экспериментальной диагностики.

## **2. Кинетическая модель Фарлей-Бунемановской неустойчивости**

Линейная модель неустойчивости Фарлея-Бунемана служит фундаментом как для интерпретации экспериментальных данных, так и для построения адекватной нелинейной модели. Особенно важно для построения нелинейной теории исследовать дисперсионные свойства волн. Как следует из экспериментальных данных, существуют значительные расхождения при сопоставлении выводов теории с экспериментальными данными. Поэтому важно построить обобщенную теорию, которая бы адекватно соответствовала эксперименту. Очевидно, что наиболее точное решение можно найти при использовании кинетической модели. Такие решения при значительных упрощениях были определены численным методом в ряде работ [7; 11] и для ограниченного, в основном, низкочастотного диапазона волн. Поэтому ниже рассмотрим уточненную кинетическую модель, которая позволяет определить решение в аналитическом виде. Для упрощения исследования разделим область генерации волн на два диапазона: 1 – низкие частоты, для которых выполняется соотношение  $\omega \ll \nu_i$  и 2 – высокие частоты, для которых это соотношение не удовлетворяется  $\omega \gg \nu_i$ .

Для построения кинетической модели вместо классической функции распределения Максвелла используем нормализованную стандартным способом функцию, которая описывает изотропную плазму. Эта функция описывает распределение частиц по скоростям с достаточной точностью, и предполагает отсутствие частиц с тепловыми скоростями  $V_x > (7V_{t\alpha})^{1/2} \approx 2.65V_{t\alpha}$ . Это соответствует отсутствию бесконечно длинного хвоста быстрых частиц, что свойственно для максвелловской функции распределения. Запишем функцию распределения частиц по скоростям в виде

$$f_M = \frac{15n_{0\alpha}}{32\sqrt{7}\pi} (m_\alpha V_{T\alpha})^{-3} \exp\left(-\frac{V_y^2 + V_z^2}{2V_{T\alpha}^2}\right) \left(1 - \frac{V_x^2}{7V_{T\alpha}^2}\right)^2, \quad V_x^2 < 7V_{T\alpha}^2. \quad (1)$$

Здесь обозначено:  $V_{t\alpha} = (k_b T_{t\alpha} / m_\alpha)^{1/2}$  – тепловые скорости частиц, сорта  $\alpha = e; i$ , электроны, ионы,  $k_b$  – постоянная Больцмана,  $T_{t\alpha}, m_\alpha, n_{0\alpha}$  – температура, масса и равновесная плотность заряженных частиц сорта  $\alpha$ . Ось  $X$  направлена вдоль волнового вектора.

Основой для нахождения диэлектрической проницаемости для электронов и ионов является кинетическое уравнение с модельным интегралом столкновений в форме БГК [7, 11]. Учитывая соотношение (1) и определяя возмущение функции распределения в Фурье переменных  $\propto \exp(-i\omega t + ik\bar{r})$  стандартным способом, можно записать диэлектрическую проницаемость в виде

$$\varepsilon_k^l(\omega, k) = 1 - \left( \frac{\omega_p}{kV_{T\alpha}} \right)^2 \frac{15}{4\sqrt{7}} \frac{kV_{T\alpha}}{\omega} \frac{\Phi_1(z)}{1 - \frac{i15}{16} \frac{\nu_\alpha}{\omega} \Phi_2(z)}. \quad (2)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$z = \frac{\omega + i\nu_\alpha}{kV_{T\alpha}\sqrt{7}}; \quad \Phi_1(z) = \int_{-1}^1 \frac{\xi^2(1-\xi^2)}{z-\xi} d\xi; \quad \Phi_2(z) = \int_{-1}^1 \frac{\xi(1-\xi^2)^2}{z-\xi} d\xi; \quad (3)$$

Оба интеграла в (3) легко вычисляются:

$$\Phi_1(z) = -2z \left\{ \left(1 - z^2\right) \left[ 1 + \frac{z}{2} \ln\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \right] - \frac{1}{3} \right\}.$$

Формула (2) является основой для исследования ФБ неустойчивости.

### 3. Низкочастотная Фарлей-Бунемановская неустойчивость

Простейший случай низкочастотных ФБ волн не требует учета кинетических эффектов для электронной компоненты (электроны сильно замагничены), и, кроме того, удовлетворяется условие квазинейтральности в этом частотном диапазоне. Заметим, что рассматриваемая ниже кинетическая модель при пренебрежении кинетическими эффектами должна

совпадать с магнитогидродинамической моделью, которая широко используется. В отличие от прежних исследований линейных моделей, мы также учтем нагрев электронов. Экспериментальные значения электронной температуры, измеренные при помощи радаров некогерентного рассеяния в возмущенном Е-слое явно указывают на возникновение мощного нагрева электронов, при условии превышения внешнего электрического поля порогового значения для ФБ неустойчивости.

В качестве основы для решения используем линеаризованное кинетическое уравнение для электронов и ионов плазмы с помощью модельного интеграла столкновений БГК и соотношения (2).

Исследуем возможность возникновения низкочастотной неустойчивости, предполагая, что справедливы условия  $\omega \ll v_i$  и  $|\omega - kV_0| \ll v_e$ . В этом случае дисперсионное уравнение примет вид:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{1.667k^2V_{te}^2 - \frac{i\omega_{he}^2}{\tilde{v}_e}(\omega - \bar{k}\bar{V}_0)} = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + iv_i) - \frac{3\omega + iv_i}{\omega + iv_i}(kV_{ti})^2}. \quad (4)$$

Здесь приняты обозначения:  $V_{ta}^2 = (kT_\alpha / m_\alpha)^{-2}$  – тепловые скорости частиц сорта  $\alpha = e, i$ ,  $\omega_{pe}, \omega_{pi}$  – плазменные частоты электронов, ионов,  $v_i, v_e$  – частоты столкновений ионов и электронов с нейтральными частицами,  $\omega_{he}, \omega_{hi}$  – гироизменения,  $V_0$  – скорость дрейфа электронов,  $k$  – волновой вектор.

Из уравнения (4) можно определить закон дисперсии волн  $\omega(k)$  и инкремент нарастания волн  $\gamma(k)$  при условии  $\omega(k) \gg \gamma(k)$  для низкочастотных волн:

$$\omega(k) = \bar{k}\bar{V}_0 * \left[ 1 + \tilde{R} \left( 1 + \frac{2k^2V_{ti}^2}{\omega^2 + v_i^2} \right) \right]^{-1}; \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{\tilde{R}}{v_i \left[ 1 + \tilde{R} \frac{(\bar{k}\bar{V}_0)^2 + 3v_i^2}{(\bar{k}\bar{V}_0)^2 + v_i^2} \right]} \left[ \omega^2 \left( 1 - \frac{2k^2V_{ti}^2}{\omega^2 + v_i^2} \right) - k^2\tilde{C}_s^2 \right]. \quad (6)$$

Здесь введены обозначения:

$$\tilde{R} = \frac{\tilde{v}_e v_i}{\omega_{he} \omega_{hi}} = \frac{v_e v_i}{\omega_{he} \omega_{hi}} \left( 1 + \frac{\omega_{he}^2}{v_e^2} * \frac{k_z^2}{k^2} \right); \quad \tilde{C}_s^2 = \left( T_i + \frac{5}{3} T_e \right) / m_i. \quad (7)$$

Полученные соотношения позволяют провести численное моделирование и решить основные задачи – определить закон дисперсии, фазовую скорость и инкремент нарастания ФБ волн для сопоставления теоретической модели с экспериментальными данными по авроральному рассеянию радиоволн.

Значения линейного инкремента, рассчитанные из уравнений (5), (6) в качестве примера приведены на Рис. 1 – Рис. 5. Так на Рис. 1. определены высотные области генерации низкочастотных ФВ волн для различных значений дрейфовой скорости электронов. Из рисунков видно, что существует тенденция увеличения высотной области генерации волн при увеличении дрейфовой скорости электронов. Также из сравнения Рис. 1а. и Рис. 1в. и Рис. 2. можно определить высотную область генерации для двух масштабов волн:  $k=4 \text{ m}^{-1}$  (частота радара 95.5 МГц) и  $k=8.1 \text{ m}^{-1}$  (190 МГц),  $k=12 \text{ m}^{-1}$  (285 МГц).

Из соотношения (6) можно определить стационарную фазовую скорость ФВ волн, которая определяется в доплеровских измерениях по авроральному рассеянию радиоволн. Стационарные фазовые скорости соответствуют нулевому значению линейного инкремента, т.е.  $\gamma^l(k, V_0) = 0$ . квазистационарных скоростей. Из уравнения (6) получаем:

$$\left[ V_p^2 + \left( \frac{V_i}{k} \right)^2 \right] (V_p^2 - C_s^2) = 2V_{Ti}^2 V_p^2.$$

Из этого соотношения можно оценить квазистационарную фазовую скорость ФВ волн. Соответствующий расчет показал, что значения этих скоростей ограничены величиной  $W_0 = [(3T_i + 5T_e / 3) / m_i]^{1/2}$ , т.е. значение фазовой скорости  $V_p$  приближается к  $W_0$  по мере уменьшения масштаба. Также было показано, что эта скорость проявляет тенденцию возрастания при уменьшении длины волны.

a)

b)

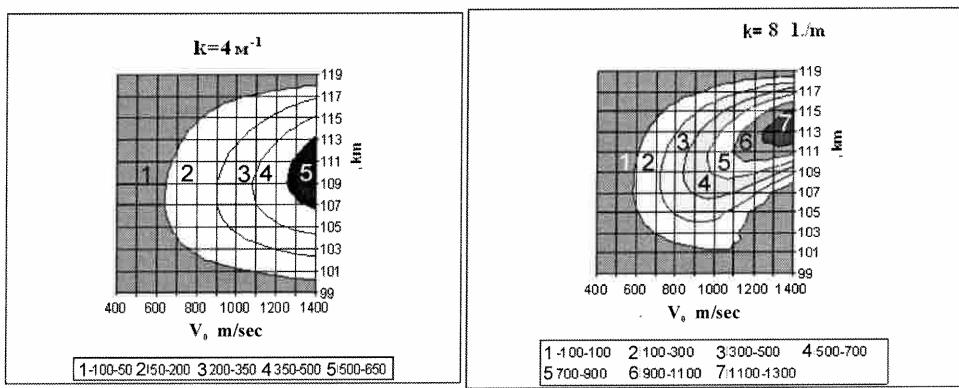


Рис. 1. Высотная область линейной генерации низкочастотных ФВ волн в зависимости от дрейфовой скорости электронов для волнового вектора.  
a)  $k = 4 \text{ m}^{-1}$ ; b)  $k = 8.1 \text{ m}^{-1}$

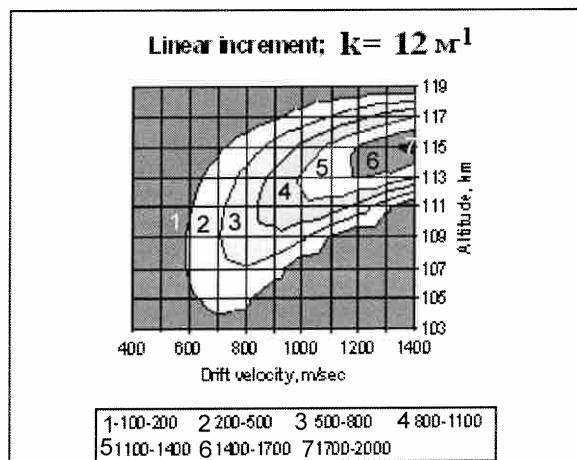


Рис. 2. Линейный инкремент нарастания низкочастотных ФБ волн для волнового вектора.  $k = 12 \text{ m}^{-1}$

a)

b)

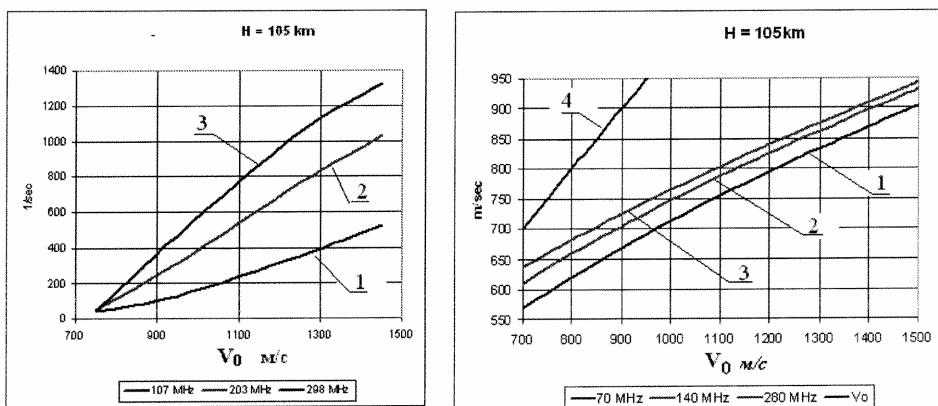
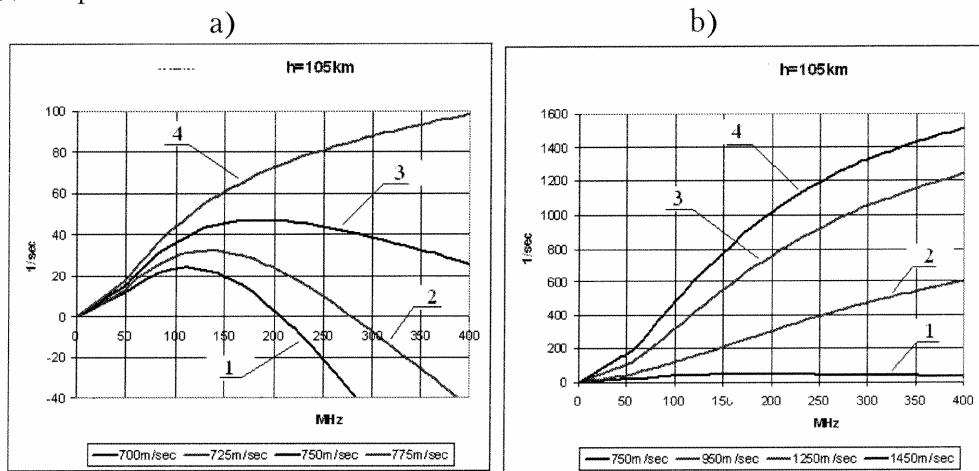


Рис. 3а. Линейный инкремент низкочастотных ФБ волн в зависимости от скорости электронного дрейфа. 1 – масштаб соответствующий частоте радара 107 МГц ( $k = 3.5 \text{ m}^{-1}$ ); 2 – 203 МГц ( $k = 6.8 \text{ m}^{-1}$ ), и 3 – 298 МГц ( $k = 10 \text{ m}^{-1}$ ).  $H = 105 \text{ km}$

Рис. 3б. Квазистационарные фазовые скорости низкочастотных ФБ волн в зависимости от скорости электронного дрейфа. 1 – частота радара 70 МГц; 2 – 140 МГц; 3 – 280 МГц. 4 – скорость электронного дрейфа.  $H = 105 \text{ km}$ .

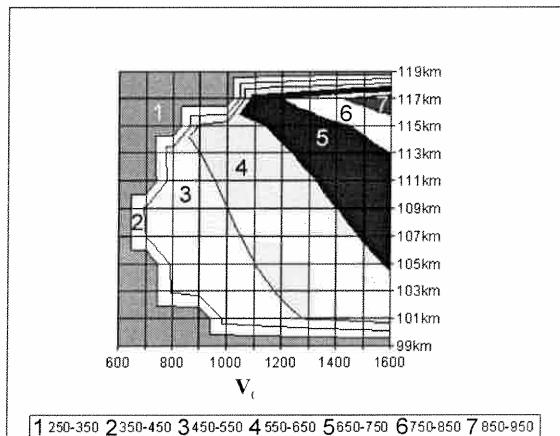
Из Рис. 1-2, Рис. 3а, 3б можно видеть, что в отличие от стандартной гидродинамической модели, линейная генерация волн возникает при скоростях дрейфа электронов порядка 600 м/сек. Положение этой границы резко смещается в сторону коротких волн в относительно узком диапазоне скоростей дрейфа. Как видно из Рис. 3а и 3б, квазистационарные фазовые скорости волн, т.е. скорости при стабилизации неустойчивости  $\gamma = 0$ , не совпадают со скоростью электронного дрейфа, хотя они мед-

ленно увеличиваются с ростом дрейфовой скорости электронов, и закон дисперсии волн незначительно отличается от линейного закона.



**Рис. 4.** Зависимость линейного инкремента нарастания низкочастотных ФБ волн от частоты радара (волнового вектора) для различных значений дрейфовой скорости электронов. а) для скоростей дрейфа. 1 –  $V_o = 700$  м/с; 2 – 725 м/с; 3 – 750 м/с; 4 – 775 м/с. Н = 105 км.; б) 1 –  $V_o = 750$  м/с; 2 – 950 м/с; 3 – 1250 м/с; 4 – 1450 м/с. Н = 105 км. Ракурсный угол равен нулю

**Рис. 5.** Высотная зависимость квазистационарных фазовых скоростей низкочастотных ФБ волн от скорости дрейфа электронов. Наиболее вероятные значения 450-650 м/с



#### 4. Лінійна модель високочастотних ФБ волн

Далее рассмотрим генерацию высокочастотных ФВ волн, предполагая, что для частоты выполняется условие  $\omega > v_i$ . В отличие от предыдущего случая примем во внимание кинетические эффекты для электронов, исключим условие квазинейтральности плазмы, а также учтем наличие больших линейных инкрементов при условии  $\gamma \geq v_i$ . Для учета влияния эффекта поперечной вязкости электронов, введем в выражении (3) для диэлектрической проницаемости электронной компоненты эффективный коэффициент электронных столкновений, полагая:

$$\nu_e \rightarrow \nu_e + 1.06 \left( \frac{kV_{Te}}{\omega_{He}} \right)^2 \nu_e \approx \nu_e \left[ 1 + \left( \frac{kV_{Te}}{\omega_{He}} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

В силу очевидного неравенства  $V_p << \omega_{Pi}^2 r_{D\alpha} (1 + \lambda_e^2) / \nu_i$ , ( $r_{D\alpha}$  – радиус Дебая для электронов,  $\alpha = e, i$ ), можно также приближенно учесть нарушение условия квазинейтральности плазмы для электронной части диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_k^{(e)} = 1 + \frac{\omega_{Pe}^2}{\frac{\omega_{He}^2}{i\nu_e} (\omega - k\bar{V}_0) + k^2 V_{Te}^2} \approx \frac{\omega_{Pe}^2 (1 + \lambda_e^2)}{\frac{\omega_{He}^2}{i\nu_e} \left\{ \omega [1 + R\lambda_e^2 (1 + \lambda_e^2)^{-1}] - k\bar{V}_0 \right\} + k^2 V_{Te}^2}. \quad (9)$$

Обозначив длину волны Дебая  $\lambda_e = kV_{Te} / \omega_{Pe}$  и гирорадиус электрона  $\lambda_H = kV_{Te} / \omega_{He}$  и, вводя обозначения, запишем:

$$\nu_{eM} = \nu_e (1 + 1.06\lambda_H^2) \left( 1 + \frac{\omega_{He}^2}{\nu_e^2} \psi^2 \right); \quad \omega_M = \omega \left( 1 + R \frac{\lambda_e^2}{1 + \lambda_e^2} \right). \quad (10)$$

Далее упростим выражение (1) и запишем дисперсионное уравнение для высокочастотных ФБ волн в виде:

$$\frac{\omega_{Pe}^2 (1 + \lambda_e^2)}{\frac{\omega_{He}^2}{i\nu_{eM}} (\omega_M - k\bar{V}_0) + k^2 V_{Te}^2} = \frac{\omega_{Pi}^2}{\omega(\omega + i\nu_i) - \frac{3\omega + i\nu_i}{\omega + i\nu_i} k^2 V_{Ti}^2}. \quad (11)$$

Так как  $\omega(k) \gg \gamma(k)$ , также как и в случае низкочастотных волн, можно записать решение для частоты и инкремента нарастания волн в виде

$$\omega(k) = \bar{k}\bar{V}_0 \left[ 1 + \tilde{R} \left( 1 + \frac{2k^2 V_{Ti}^2}{\omega^2 + \nu_i^2} \right) \right]^{-1} \quad (12)$$

$$\gamma = \frac{\tilde{R}}{\nu_i \left[ 1 + \tilde{R} \frac{\left( \bar{k}\bar{V}_0 \right)^2 + 3\nu_i^2}{\left( \bar{k}\bar{V}_0 \right)^2 + \nu_i^2} \right]} \left[ \omega^2 \left( 1 - \frac{2k^2 V_{Ti}^2}{\omega^2 + \nu_i^2} \right) - k^2 \tilde{C}_s^2 \right]. \quad (13)$$

В этом выражении приняты обозначения:

$$\tilde{R} = \frac{\tilde{\nu}_e \nu_i}{\omega_{He} \omega_{Hi}} = \frac{\nu_e \nu_i}{\omega_{He} \omega_{Hi}} \left( 1 + \frac{\omega_{He}^2}{\nu_e^2} \frac{k_z^2}{k^2} \right); \quad \tilde{C}_s^2 = (T_i + 5/3 T_e) / m_i. \quad (14)$$

Соотношения (12) представляют собой аналитическую модель, которая позволяет определить дисперсионные зависимости ФБ волн в диапазоне волновых чисел вплоть до волновых чисел порядка  $60 \text{ m}^{-1}$ . Таким образом, можно подтвердить пригодность полученной модели для оценки линейной дисперсии в нижней части ионосферного Е-слоя при любых практических скоростях электронного дрейфа. Для центральной части Е-слоя эта модель может быть использована при больших скоростях дрейфа (больше 1 км/сек). В качестве примера на Рис. 6 – Рис. 10 приведены значения линейного инкремента, рассчитанные с использованием соотношений (12). Из этих рисунков следует, что существует тенденция увеличения высоты области генерации по мере увеличения скорости дрейфа.

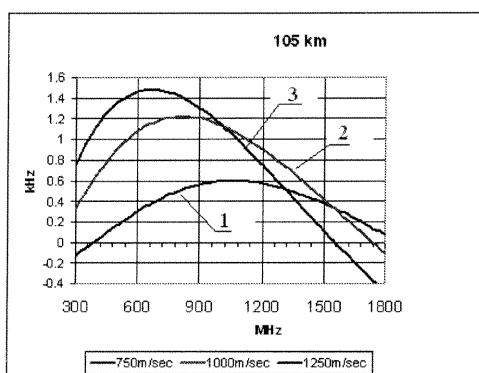


Рис. 6.

Рис. 6. Зависимость линейного инкремента нарастания высокочастотных ФБ волн от частоты радара для значений дрейфовой скорости электрона  
1 –  $V_o = 750 \text{ m/sec}$ ; 2 –  $1000 \text{ m/sec}$ ; 3 –  $1250 \text{ m/sec}$

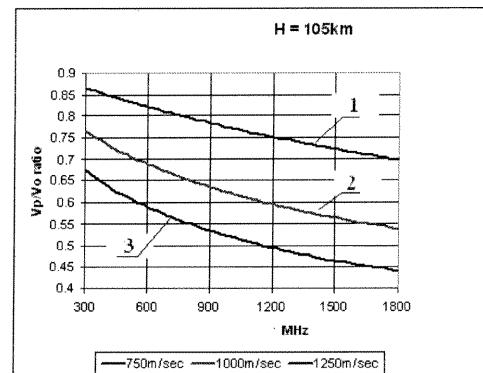


Рис. 7.

Рис. 7. Фазовая скорость высокочастотных ФБ волн как функция частоты радара для значений дрейфовой скорости электрона  $V_o$ . 1 –  $V_o = 750 \text{ m/sec}$ ; 2 –  $1000 \text{ m/sec}$ ; 3 –  $1250 \text{ m/sec}$ ;  $H=105 \text{ km}$

На Рис. 7. приведены расчетные зависимости квазистационарных фазовых скоростей высокочастотных волн, т.е. скорости при стабилизации неустойчивости  $\gamma = 0$  от волнового вектора. Отсюда можно заключить, что закон дисперсии является нелинейным, и фазовая скорость волн убывает с ростом волнового вектора, что в итоге приведет к срыву неустойчивости.

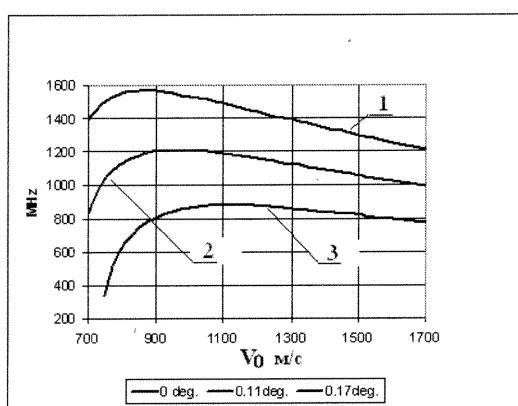


Рис. 8

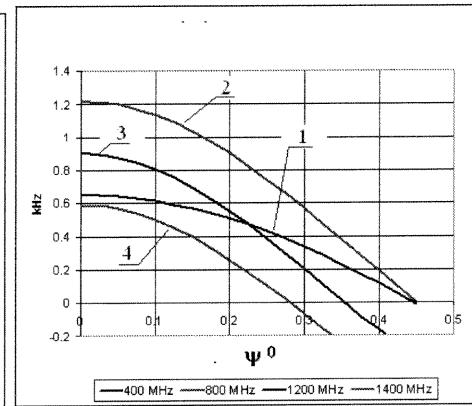
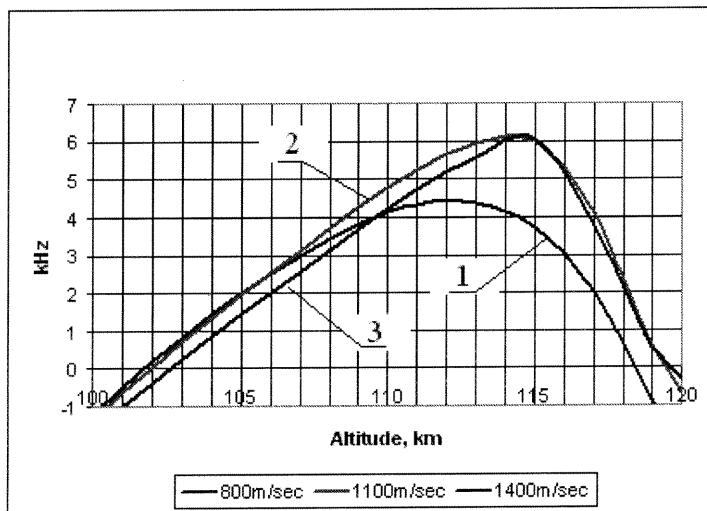


Рис. 9

**Рис. 8.** Границы линейной генерации высокочастотных волн как функции дрейфовой скорости электронов, и значений ракурсных углов: 1 – ракурсный угол  $\psi=0_k$ , 2 –  $\psi_k=0.11^\circ$ , 3 –  $\psi_k=0.17^\circ$

**Рис. 9.** Ракурсная зависимость линейного инкремента высокочастотных ФБ волн для различных масштабов. 1 – 400 МГц; 2 – 800 МГц; 3 – 1200 МГц; 4 – 1400 МГц



**Рис. 10.** Высотная зависимость линейного инкремента высокочастотных волн ФБ.  $f=1218$  МГц 1 –  $V_0 = 800$  м/с; 2 – 1100 м/с; 3 – 1400 м/с.  $\omega_{pe} = 2.2 \times 10^7$  с<sup>-1</sup>

Влияние фоновой плотности электронов на дисперсионные свойства высокочастотных ФБ волн изображено на Рис. 11. Видно, что при увеличении плотности заряженных частиц дисперсионная кривая становится линейной, это означает, что частота срыва неустойчивости увеличивается.

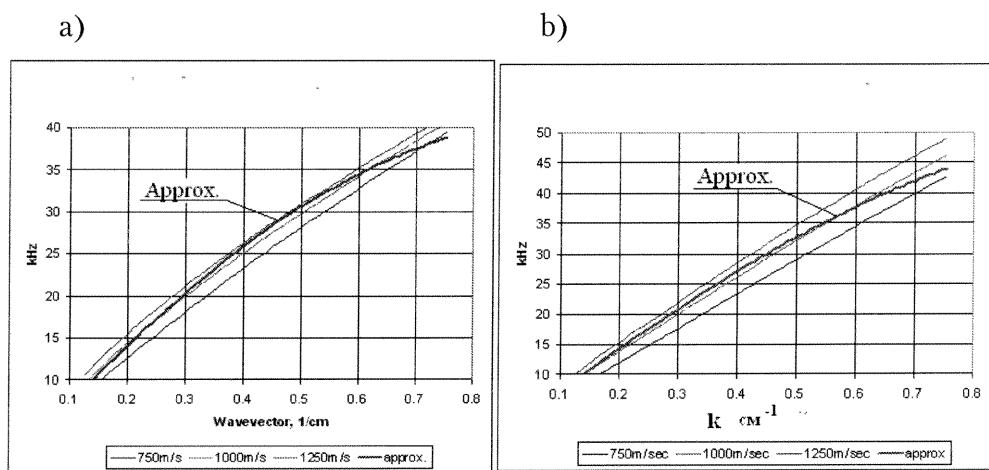


Рис. 11. Частота высокочастотных ФБ волн для трех значений скорости дрейфа 750 м/с, 1000 м/с и 1250 м/с. а)  $\Omega_{pe} = 1.6 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ ; б)  $\Omega_{pe} = 2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ ;

## 5. Обсуждение результатов численного моделирования

В работе развит новый подход для исследования дисперсионных соотношений продольных волн в слабоионизированной плазме, основанный на видоизменении равновесной функции распределения. Вместо максвелловского распределения предложено использовать приближенную функцию (1), не содержащую бесконечно длинного хвоста энергичных частиц. Отказ от использования функции распределения Максвелла, значительно упрощает исследование дисперсионных уравнений. Это показано на примере неустойчивости ФБ волн в диапазоне низких и высоких частот. В рассматриваемой модели, стало возможным отказаться от использования плазменной дисперсионной функции (ПДФ). Вместо нее в линейное дисперсионное уравнение вошла логарифмическая функция (2), (3). Преимущества такой замены становятся существенными, при учете влияния кинетических эффектов для компонент плазмы. Логарифмическая функция в дисперсионном уравнении имеет вид:  $F = \ln((z - 1) / (z + 1))$  и легко вычисляется. Более того, поведение этой функции изучено намного полнее по сравнению с ПДФ. Медленное изменение этой функции делает возможным применение быстро сходящихся итерационных методов с необходимой точностью для решения полученного линейного дисперсионного уравнения. Для обоих случаев асимптотики – малых и больших (по модулю) аргументов  $z$  данная функция допускает разложение в быстро сходящиеся ряды. Для сравнения заметим, что ПДФ при  $|z| >> 1$  может иметь лишь асимптотически сходящееся разложение. По этой причине, использование предложенного метода уменьшает ограничения, связанные с процедурой разложения в ряд, и обеспечивает надежную основу для вывода и использования аналитических формул вместо численного анализа. Полученные таким способом зависимости сохраняют прием-

лемую точность в более широком диапазоне изменения входящих параметров и переменных задачи.

Также отметим, что следствием сделанной замены является исчезновение затухания Ландау для больших фазовых скоростей  $V_p \geq V_{Ti} \sqrt{7}$ . Однако этим побочным эффектом можно пренебречь, поскольку вклад затухания становится очень малым для диапазона тепловых скоростей.

В работе рассмотрены две кинетические модели для низкочастотных и высокочастотных ФБ волн. Обе модели применимы для случаев умеренных и больших скоростей электронного дрейфа ( $V_o > 700$  м/с). Именно в этом случае точность обоих моделей достигает максимума. Однако следует отметить, что интервал небольших скоростей дрейфа  $400$  м/с  $< V_o < 700$  м/с, исследован в литературе достаточно детально. Кроме того, как показал предварительный анализ, высокочастотные ФБ волны вообще не возбуждаются при небольших скоростях дрейфа.

В отличие от предыдущих работ в данной модели учтено влияние аномальных электронных температур, измеренных радарами некогерентного рассеяния на высотах авроральной ионосферы, а также зависимость частоты столкновений электронов с нейтралами от температуры электронов  $\nu_e(T_e)$ . Эти эффекты оказывают влияние на скорость линейной раскачки ФБ волн как в длинноволновом, так и в коротковолновом пределе.

Исходя из результатов моделирования, можно заключить, что если скорость дрейфа не превышает 800 м/с, то линейная раскачка длинных ФБ волн в интервале волновых чисел  $10 - 15 \text{ m}^{-1}$  прекращается Рис. 1 – Рис. 4. Эта граница линейной генерации преодолевается, если дрейфовая скорость превышает уровень 800 м/с, и далее область линейной генерации переходит к коротковолновому диапазону Рис. 6 – Рис. 10. Этот вывод подтверждается результатами исследования высокочастотной модели.

Заметим, что линейные модели, рассмотренные в ранних работах, предсказывали квадратичную зависимость линейного инкремента от скорости дрейфа  $\sim V^2$ , однако, рассмотренные линейные модели предсказывают более медленный рост инкремента нарастания волн. В большинстве случаев зависимость инкремента нарастания волн от скорости дрейфа электронов приближается к линейной. Эта зависимость видна на Рис. 3 и Рис. 7 для различных скоростей дрейфа. Такая зависимость инкремента нарастания волн лучше согласуется с экспериментальными данными радаров STARE, чем квадратичная зависимость.

Также отметим, что использование отношения  $\nu_i / \omega$  в качестве малого параметра позволило более эффективно анализировать линейную дисперсию коротких волн. Наиболее интенсивная генерация коротких ФБ волн найдена для скоростей дрейфа электронов  $800 < V_o < 1200$  м/с. Если же скорость дрейфа превышает 1200 м/с, то граница линейной генерации постепенно возвращается в противоположную сторону больших масштабов (Рис. 1 – Рис. 2). Этот результат является следствием наличия повышенных температур электронов в Е-слое.

Из результатов рассмотренных моделей следует, что частота неустойчивых ФБ волн ограничена сверху значением нижней гибридной частоты, т.е.  $\omega \leq \omega_g = (\omega_{he}\omega_{hi})^{1/2} \approx 4 \times 10^4 c^{-1}$ . Этот вывод иллюстрирован Рис. 11 для двух значений электронной плотности.

Из анализа также следует вывод, о том, что ракурсная чувствительность усиливается для коротких волн, как видно на Рис. 9.

Особенный интерес для экспериментальной диагностики представляет расчет квазистационарных фазовых скоростей как для низкочастотных, так и для высокочастотных ФБ волн Рис. 3в и Рис. 7. Также проявляется слабый рост этих скоростей на длинноволновом участке спектра и противоположный эффект их уменьшения для малых масштабов. Заметим, что максимальные значения фазовых скоростей соответствуют скорости  $W_0 = [(3T_i + 5T_e / 3) / m_i]^{1/2}$ , по этой причине, данную скорость можно рассматривать как некоторую характеристическую постоянную для ФБ неустойчивости, которая может оказаться полезной в экспериментальной диагностике ионосферы. Кроме того, описанные выше свойства стационарных фазовых скоростей длинных волн ФБ, их зависимость от скорости дрейфа и волнового числа находят свое подтверждение при анализе допплеровских данных по радиолокационному зондированию авроральной ионосферы.

## 6. Основные выводы

В работе рассмотрен альтернативный метод вывода линейного дисперсионного уравнения для ФБ волн в слабоионизованной плазме, основанный на модификации невозмущенной функции распределения. Этот метод был применен для описания ионной компоненты, и далее использован для вывода уточненного линейного дисперсионного уравнения. Это уравнение было решено аналитически в двух участках пространственного спектра: низкочастотных (4) и высокочастотных ФБ волн (9). Полученные решения позволили исследовать линейную дисперсию этих волн для случая умеренных и больших скоростей электронного дрейфа, а также найти квазистационарные фазовые скорости для обоих случаев.

Можно полагать, что полученные зависимости являются более точными, благодаря учету аномального нагрева электронов в ионосферном Е-слое, учету адиабатичности электронов, их вязкости, а также учету нарушения условия квазинейтральности плазмы. Также было определено положение коротковолновой границы линейной генерации в зависимости от высоты ионосферы. Полученные результаты могут использоваться для интерпретации радарных допплеровских измерений в авроральной ионосфере.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Moorcroft, D.R. Outstanding issues in the theory of radar aurora: Evidence from the frequency dependence of spectral characteristics / D.R. Moorcroft // J. Geophys. Res., 2002, 107, A10, P. 1301-1310.

2. *Farley, D.T.* The equatorial E-region and its plasma instabilities: a tutorial / Farley D.T. //Ann.Geophys., 2009. 27, P.1509–1520.
3. *Zarnitsky, Yu.F.* Some features of Farley-Buneman waves excitation in the polar ionosphere./ Zarnitsky Yu.F., Kustov A.V., Leionen J -//In: Proceedings of the First Soviet-Finnish auroral workshop, Oct.1-6 1984, Leningrad. Sodankyla rept1986, N 44. – P. 213–219.
4. *Schlegel, K.* Anomalous heating of the polar E-region by unstable plasma waves.1/ Schlegel K., and J.-P.St. Maurice // J. Geophys. Res., 1981,86, P. 1447–1452,
5. *Nielsen, E.* VHF coherent radar signals from E-region of ionosphere and the relationship to electron drift velocity and ion acoustic velocity / Nielsen E., del Pozo C.F., and Williams P.J.S. // J. Geophys. Res., 2002,107, A1, 10.1029/2001JA90111.
6. *Milan, S.E.* Multi-frequency observations of E-region HF radar aurora / S.E. Milan, M. Lester, and N. Sato // Ann. Geophysicae, 212003. – P. 761–777.
7. *Lee, K.* Effects of propagation parallel to the magnetic field on the Type I electrojet irregularities / K. Lee, C.F. Kennel // Planet. Space Sci., 21, 1973. – P. 1339–1343.
8. *Nielsen, E.* VHF coherent radar signals from E-region of ionosphere and the relationship to electron drift velocity and ion acoustic velocity / Nielsen E., del Pozo C.F., and Williams P.J.S. // J. Geophys.Res., 2002. 107, A1, 10.1029/2001JA90111.
9. *Milan, S.E.* Multi-frequency observations of E-region HF radar aurora / S.E. Milan, M. Lester and N. Sato //Ann. Geophysicae, 21, 2003. – P. 761–777.
10. *Wang, T.N.C., Tsunoda R.T.* On a crossed field two-stream plasma instability in the auroral plasma., J.Geophys.Res., 80, 16, 2172-2182,1975.
- 11 *Dimant Ya.S. and Sudan R.N.* Kinetic theory of low-frequency cross-field instability in a weakly ionized plasma. I;II. Phys. Plasmas., 2, 4, 1157–1168; 1169–1181, 1995.
12. *Uspensky M.V., Koustov A.V. and P. Janhunen.* Backscatter volume cross-sections & amplitudes of electrostatic electrojet fluctuations inferred joint STARE&EISCAT measurements, Poster report EGU2009, Vienna, Austria, March 3-6, 2009. XY0971.

Поступила в редакцию 02.11.2012 г.

УДК 532.516:669.015.023

*В.Л. МАЛЫШЕВ, Т.В. СВЕТЛОВА\**

## ВЛИЯНИЕ СООБЩАЕМОСТИ ПОР НА ИНТЕНСИВНОСТЬ МАССООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В БИНАРНЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ СИСТЕМАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

*На бинарной капиллярной модели рассмотрено влияние подпитки жидкостью из смежных пор на ход испарения в различных комбинациях цилиндрических и конических (диффузорных и конфузорных) сообщающихся каналов.*

\* Выпускница физико-математического факультета 1993 г.

*Особенностью высокотемпературного испарения жидкостей из системы соединяющихся каналов в отличие от нормальных условий является то, что массообменные процессы в капиллярах отличающихся сечений происходят синхронно, снижая скорость движения мениска в широких и увеличивая в узких каналах за счет перераспределения жидкости.*

*Полученные выражения позволяют записать 27 алгебраических уравнений, описывающих испарение в системах конических и цилиндрических сообщающихся каналов в различных сочетаниях. Разработан вычислительный алгоритм, получены необходимые для расчетов уравнения, результаты применения которых представлены в табличном виде и являются основой для вычисления скорости испарения жидкостей в любой из рассмотренных систем.*

*Проведен численный эксперимент по согласованному испарению из сообщающихся каналов.*

Для пористой среды характерно свойство сообщаемости пор, а пространство, в котором осуществляется массоперенос, представляет собой комплекс каналов, непрерывно переходящих один в другой.

При этом радиусы капилляров могут оставаться как постоянными, так и изменяться вдоль осевой линии, образуя многочисленные сочетания диффузорных и конфузорных каналов различного типа.

Для их характеристики вводится безразмерный параметр  $a$ , который определяет отношения предельных радиусов  $R_0/r_0$ , где  $r_0$  – начальный радиус ( $x = 0$ ),  $R_0$  – конечный радиус ( $x = L$ ). Очевидно, что для цилиндрических каналов он равен единице. Пористые материалы, обладающие капиллярами, имеющими на поверхности отверстия большего радиуса, чем в глубине тела, называются диффузорными ( $a < 1$ ). Каналами конфузорного типа обладают капиллярно-пористые структуры с отверстиями на поверхности меньшего поперечного размера, нежели в объеме ( $a > 1$ ).

Для характеристики изменений радиуса капилляра вводится безразмерный параметр  $b = \frac{dr}{dx}$ , называемый конусностью [1]. Отличия между разновидностями капилляров определяются неодинаковой по оси  $x$  кривизной стенок  $k = \frac{db}{dx}$ .

Изменение площади поперечного сечения вдоль оси  $x$  может происходить как равномерно ( $k = 0$ ), так и неравномерно – сначала медленно, затем быстрее ( $k > 0$ ), или наоборот ( $k < 0$ ) (рис. 1, табл. 1).

Законы увеличения радиусов поверхности испарения конических капилляров могут быть заданы линейной, показательной или параболической функциями соответственно

$$r(z) = r_0 [1 + (a - 1)z], \quad (1)$$

$$r(z) = r_0 a^z, \quad (2)$$

$$r(z) = r_0 \sqrt{1 + (a^2 - 1)z}. \quad (3)$$

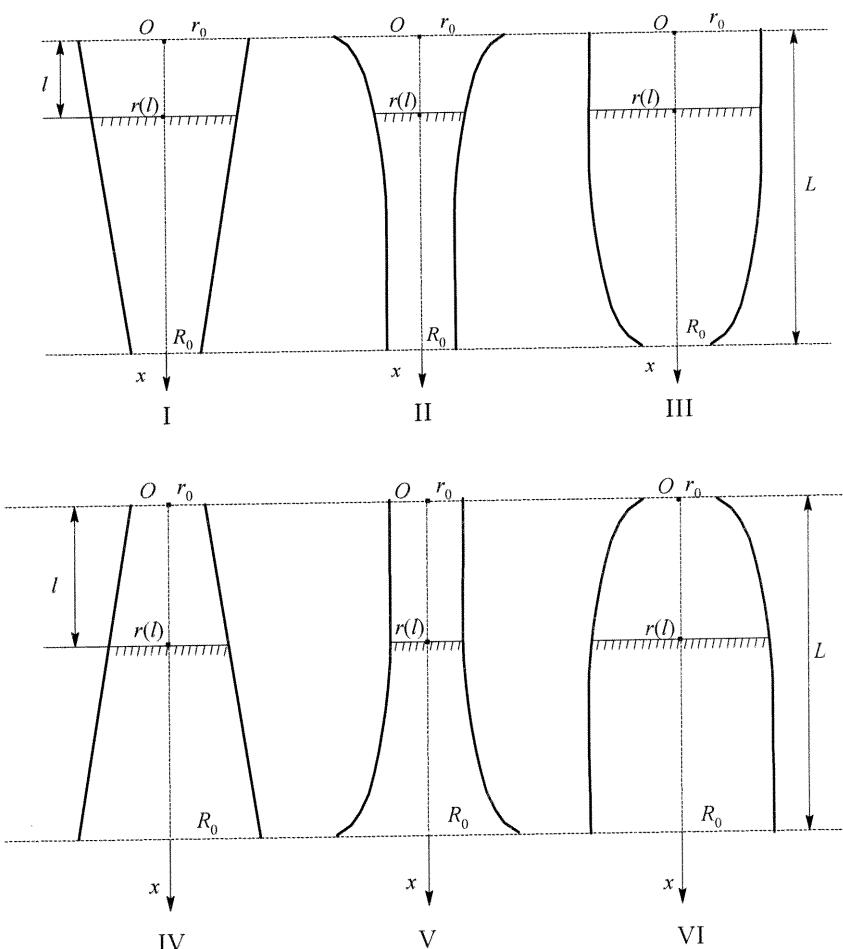


Рис.1. Основные типы каналов переменного сечения

Таблица 1

## Классификация конических каналов

Тип №	Диффузорный			Конфузорный		
	I	II	III	IV	V	VI
$\frac{R_0}{r_0}$	$a < 1$	$a < 1$	$a < 1$	$a > 1$	$a > 1$	$a > 1$
$\frac{dr}{dx}$	$b < 0$	$b < 0$	$b < 0$	$b > 0$	$b > 0$	$b > 0$
$\frac{db}{dx}$	$k = 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k = 0$	$k > 0$	$k < 0$

С целью обобщения выводов теории на капилляры произвольной длины  $L$  зависимости радиусов каналов от положения  $l$  межфазной поверхности выражаются через относительную координату мениска  $z = l/L$ .

Время смещения мениска в процессе испарения из капилляров каждого типа определяется как показано в [2, 3] выражениями:

$$\text{I: } \frac{\ln|1+(a-1)z| \cdot [1+(a-1)z] + 1}{(a-1)^2 [1+(a-1)z]} \Bigg|_{z_1}^{z_2} = \frac{r_0^2 BF}{L^2} \Delta t, \quad (4)$$

$$\text{II: } \frac{(-1)(2z \ln a + 1)}{4a^{2z} \ln^2 a} \Bigg|_{z_1}^{z_2} = \frac{r_0^2 BF}{L^2} \Delta t, \quad (5)$$

$$\text{III: } \frac{[(a^2 - 1)z - \ln|1+(a^2 - 1)z| + 1]}{(a^2 - 1)^2} \Bigg|_{z_1}^{z_2} = \frac{r_0^2 BF}{L^2} \Delta t. \quad (6)$$

$$\text{IV: } \left[ \frac{z^2}{2} + 2(a-1)\frac{z^3}{3} + (a-1)^2 \frac{z^4}{4} \right] \Bigg|_{z_1}^{z_2} = \frac{r_0^2 BF}{L^2} \Delta t, \quad (7)$$

$$\text{V: } \frac{a^{2z}}{4 \ln a} \left( 2z - \frac{1}{\ln a} \right) \Bigg|_{z_1}^{z_2} = \frac{r_0^2 BF}{L^2} \Delta t, \quad (8)$$

$$\text{VI: } \left[ \frac{z^2}{2} + (a^2 - 1)\frac{z^3}{3} \right] \Bigg|_{z_1}^{z_2} = \frac{r_0^2 BF}{L^2} \Delta t, \quad (9)$$

где  $B = \frac{(c_s^2 - 1)}{\eta T}$  – термический коэффициент испарения,

$F = \frac{P_0^2 \mu}{16R\rho}$  – молекулярный коэффициент испарения,

$\mu$  – молярная плотность потока пара,  $P_s$  – давление насыщенного пара при температуре  $T$ ,  $P_0$  – давление окружающей газовой среды,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\rho$  – плотность жидкости,  $c_s = P_s/P_0$  – относительная концентрация насыщенного пара,  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости парогазовой смеси, определяемый путем усреднения вязостей компонентов  $\eta_1$  и  $\eta_2$  по парциальным давлениям  $P_s$  и  $P_0$

$$\eta = \frac{\eta_1 P_s + \eta_2 P_0}{P_s + P_0}.$$

Обратимся далее к исследованию специфики интенсивного массопереноса при фазовых переходах в различных бинарных сочетаниях перечисленных типов капилляров (табл. 2). Цилиндрические каналы обозначены через 0. Закон движения мениска в них, как было показано ранее [4],

$$\frac{z^2}{2} \Big|_{z_1}^{z_2} = \frac{r_0^2 BF}{L^2} \Delta t. \quad (10)$$

Таблица 2

**Возможные сочетания капилляров  
в сообщающихся бинарных системах**

	0	I	II	III	IV	V	VI
0	-	1	2	3	4	5	6
I	1	7	8	9	10	11	12
II	2	8	13	14	15	16	17
III	3	9	14	18	19	20	21
IV	4	10	15	19	22	23	24
V	5	11	16	20	23	25	26
VI	6	12	17	21	24	26	27

В 27 вошедших в таблицу 2 комбинаций не включены подробно исследованные ранее [5] сообщающиеся двойные цилиндрические системы (0-0).

Как известно, при нормальных внешних условиях под действием капиллярных сил в сообщающихся сосудах уровень жидкости устанавливается тем выше, чем меньше их диаметр. В процессе преобразования сначала испаряется жидкость из более широкого, т.к. капиллярные силы в узком не дают уровням в них установиться на одной высоте [6, 7]. Нагревание эти силы уменьшает [8], поэтому из заполненных при нормальных условиях сообщающихся капилляров ( $d_1 \neq d_2$ ) по достижении температур порядка  $T > T_{kun}$  происходит перетекание из узкого канала в широкий, замедляя движение столба жидкости в нем, но ускоряя его в смежном. Таким образом, при высоких температурах испарение из сообщающихся каналов должно протекать синхронно, причем время его будет зависеть от соотношения между радиусами.

Испарение из капилляра большего радиуса  $r_1$  происходит интенсивнее, чем из узкого капилляра радиуса  $r_2$ , поэтому за одинаковое время поверхность фазового превращения сместится на различные расстояния  $l'$  и  $l''$ , соответственно (рис. 2). Как следует из закона Паскаля, уровни однородной жидкости в сообщающихся каналах устанавливаются на одной высоте  $l_x$ . При этом новое положение межфазной границы определяется из условия несжимаемости жидкости, из которого следует равенство объемов  $V_2$ , перешедшего из малого капилляра, и  $V_1$ , поступившего в широкий капилляр,

$$\pi r_1^2 (l' - l_x) = \pi r_2^2 (l_x - l''),$$

$$l_x = \frac{r_1^2 l' + r_2^2 l''}{r_1^2 + r_2^2}. \quad (11)$$

или в относительных единицах

$$z_x = \frac{r_1^2 z' + r_2^2 z''}{r_1^2 + r_2^2}. \quad (12)$$

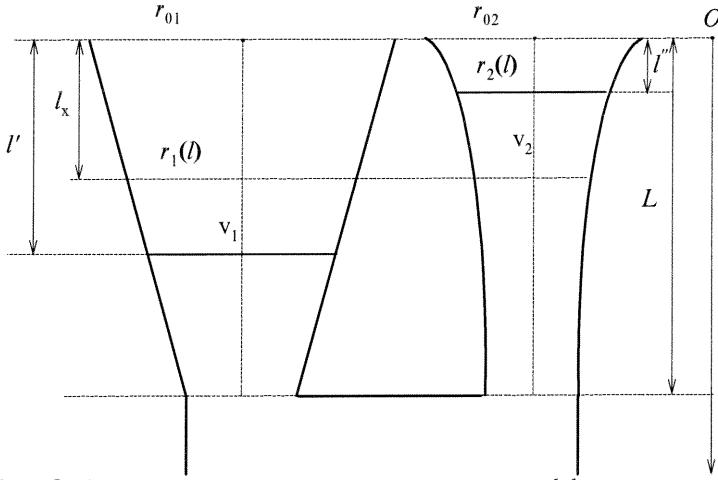


Рис. 2. Схема испарения из системы смежных диффузорных каналов смешанного типа (I-II) (табл. 2)

$(a_1 < 1, k_1 = 0$  и  $a_2 < 1, k_2 < 0)$  (модель № 8)

За одинаковый промежуток времени ( $\Delta t$ ) мениск в более широком из сообщающихся капилляров смещается дальше в процессе испарения жидкостей чем в относительно узком ( $z'_2$  и  $z''_2$ ). Тем не менее, вследствие сообщаемости каналов, в них установится единый уровень  $z_x$ , определяемый выражениями (11), (12). Полученные для цилиндрических каналов [5], они применимы также и в случае капилляров переменного сечения с оговоркой, что интервал времени ( $\Delta t$ ) должен быть достаточно мал, чтобы полагать изменения радиуса пренебрежимыми.

Установившийся при предыдущем шаге общий уровень в обоих каналах  $z_x$  принимается за  $z'_1 = z''_1$ . Выбор следующего шага для широкого капилляра  $z'_2$  определяется его конусностью. При выбираемом смещении мениска изменением радиуса пренебрегаем с любой заданной погрешностью  $\delta$ . Для сужающихся от поверхности каналов  $a < 1$ :

$$\frac{\Delta r}{r(z'_1)} = \frac{r(z'_1) - r(z'_2)}{r(z'_1)} = \delta \Rightarrow \quad (13)$$

$$\Delta r = \delta r(z'_1),$$

$$r(z'_2) = r(z'_1) - \delta r(z'_1) = (1 - \delta)r(z'_1). \quad (14)$$

Для расширяющихся вглубь материала капилляров ( $a > 1$ ) получим соответственно

$$r(z'_2) = (1 + \delta)r(z'_1). \quad (15)$$

Изменения радиусов возможных типов конических каналов (1) – (3) после подстановки в них (14), (15) приводятся к виду (16), (18), (20):

$$r_0 [1 + (a - 1) z'_2] = (1 \pm \delta) r_0 [1 + (a - 1) z'_1], \quad (16)$$

откуда

$$z'_2 = \frac{(1 \pm \delta) [1 + (a - 1) z'_1] - 1}{(a - 1)}; \quad (17)$$

$$r_0 a^{z'_2} = (1 \pm \delta) r_0 a^{z'_1}, \quad (18)$$

соответствующему

$$z'_2 = z'_1 + \log_a (1 \pm \delta); \quad (19)$$

$$r_0 \sqrt{1 + (a^2 - 1) z'_2} = (1 \pm \delta) r_0 \sqrt{1 + (a^2 - 1) z'_1}, \quad (20)$$

из которого следует

$$z'_2 = \frac{(1 \pm \delta)^2 [1 + (a^2 - 1) z'_1] - 1}{(a^2 - 1)}. \quad (21)$$

При этом знак “плюс” соответствует  $a > 1$ , знак “минус” –  $a < 1$ .

За одинаковый интервал времени  $\Delta t$ , определяемый для любого из капилляров I-VI, 0 по формулам (4) – (10) соответственно, межфазные поверхности в разных каналах при независимом испарении прошли бы неодинаковые отрезки  $z'_2$  и  $z''_2$ . Определить один из них ( $z'_2$ ) можно, задав исходное значение координаты  $z'_1 = z''_1$ , с требуемой точностью с помощью (17) для I, IV, (19) для II, V и (21) для III, VI. Далее следует приравнять  $\Delta t$  в виде (4) – (10) для любой пары каналов из 27 возможных сочетаний. Полученное уравнение позволит по известным параметрам  $z'_1, z''_1, z'_2$  найти неизвестное значение  $z''_2$ .

На таких значениях координат ( $z'_2$  и  $z''_2$ ) установились бы мениски в каналах за одинаковое время при независимом испарении. Таким образом могут быть получены уравнения, связывающие  $z'_2$  и  $z''_2$ , для всех 27 бинарных сочетаний капилляров различных типов (табл. 2).

Рассмотрим в качестве примера модель № 8, выделенную в таблице 2 и приведенную на рисунке 2. Зададим геометрические характеристики системы в виде таблицы 3.

Таблица 3  
Исходные данные для расчета модели № 8 (табл. 2)

$r_{01}$ (мкм)	$r_{02}$ (мкм)	$a_1$	$a_2$	$\delta$
2	1	0,167	0,500	0,050

Далее предлагается следующий вычислительный алгоритм:

- принять  $z'_1 = z''_1 = 0$ ;
- вычислить шаг для  $z'_2$  по формуле (17);
- выразить  $\Delta t$  из уравнения (4);

- приравнять его к  $\Delta t$  из уравнения (5);
- решить полученное алгебраическое уравнение (22) относительно  $z_2''$ :

$$\frac{r_{02}^2}{r_{01}^2} \cdot \left[ \frac{\ln |1 + (a_1 - 1)z'| \cdot [1 + (a_1 - 1)z'] + 1}{(a_1 - 1)^2 [1 + (a_1 - 1)z']} \right]_{z_1'}^{z_2'} = \frac{(-1)(2z'' \ln a_2 + 1)}{4a_2^{2z''} \ln^2 a_2} \Big|_{z_1''}; \quad (22)$$

- рассчитать  $r_1(z_2')$  согласно (1);
- повторить расчет для  $r_2(z_2'')$  в соответствии с (2);
- определить из (12) новое исходное положение менисков  $z_x$  в обоих смежных капиллярах как начало отсчета следующего шага;
- повторять процедуру до достижения величинами  $z_2'$ ,  $z_2''$ ,  $z_x$  единицы, означающей достижение поверхностью жидкости дна канала.

Результаты расчетов сведены в таблицу 4, в которой выделены клетки, соответствующие инверсии соотношения между радиусами двух капилляров с  $r_1 > r_2$  на  $r_1 < r_2$ . Как показывает анализ табличных данных, этот переход абсолютно не влияет на характер движения мениска с координатой  $z_x$  в сообщающихся капиллярах.

Таблица 4  
Изменения характеристик системы в процессе испарения

$z_1' = z_1''$	0,000	0,047	0,092	0,134	0,174	0,212	0,248
$z_2'$	0,060	0,105	0,147	0,187	0,226	0,262	0,296
$z_2''$	0,000	0,045	0,089	0,130	0,168	0,204	0,236
$r_1 \cdot 10^6, м$	2,000	1,900	1,830	1,755	1,690	1,620	1,564
$r_2 \cdot 10^6, м$	1,000	0,999	0,969	0,913	0,914	0,890	0,868
$z_x$	0,047	0,092	0,134	0,174	0,212	0,248	0,281
$z_1' = z_1''$	0,281	0,312	0,345	0,364	0,377	0,419	0,453
$z_2'$	0,327	0,356	0,388	0,406	0,418	0,458	0,491
$z_2''$	0,265	0,310	0,300	0,301	0,420	0,441	0,470
$r_1 \cdot 10^6, м$	1,510	1,455	1,410	1,354	1,323	1,300	1,237
$r_2 \cdot 10^7, м$	8,490	8,322	8,070	8,123	8,120	7,470	7,366
$z_x$	0,312	0,345	0,364	0,377	0,419	0,453	0,49
$z_1' = z_1''$	0,485	0,514	0,542	0,568	0,592	0,615	0,637
$z_2'$	0,521	0,549	0,575	0,599	0,622	0,644	0,665
$z_2''$	0,498	0,526	0,551	0,575	0,600	0,622	0,644
$r_1 \cdot 10^6, м$	1,180	1,132	1,090	1,040	1,001	0,963	0,926
$r_2 \cdot 10^7, м$	7,220	7,081	6,940	6,830	6,713	6,600	6,496
$z_x$	0,51	0,54	0,57	0,59	0,62	0,64	0,66

Окончание табл. 4

$z'_1 = z''_1$	0,658	0,678	0,697	0,715	0,732	0,748	0,764
$z'_2$	0,685	0,704	0,722	0,739	0,755	0,771	0,786
$z''_2$	0,665	0,684	0,703	0,720	0,737	0,754	0,769
$r_1 \cdot 10^7, м$	8,910	8,580	8,265	7,970	7,681	7,410	7,154
$r_2 \cdot 10^7, м$	6,400	6,307	6,224	6,140	6,070	6000	5,932
$z_x$	0,68	0,70	0,71	0,73	0,75	0,764	0,778
$z'_1 = z''_1$	0,778	0,793	0,806	0,819	0,831	0,843	0,854
$z'_2$	0,800	0,813	0,826	0,838	0,850	0,861	0,872
$z''_2$	0,783	0,797	0,811	0,824	0,836	0,848	0,859
$r_1 \cdot 10^7, м$	6,910	6,670	6,452	6,240	6,030	5,840	5,649
$r_2 \cdot 10^7, м$	5,870	5,810	5,754	5,700	5,649	5,600	5,557
$z_x$	0,793	0,806	0,819	0,831	0,843	0,854	0,865
$z'_1 = z''_1$	0,865	0,876	0,901	0,895	0,905	0,914	0,922
$z'_2$	0,882	0,892	0,901	0,910	0,919	0,928	0,936
$z''_2$	0,870	0,880	0,890	0,900	0,909	0,918	0,927
$r_1 \cdot 10^7, м$	5,471	5,300	5,135	4,980	4,826	4,680	4,540
$r_2 \cdot 10^7, м$	5,514	5,470	5,434	5,400	5,359	5,330	5,290
$z_x$	0,876	0,886	0,895	0,905	0,914	0,922	0,930
$z'_1 = z''_1$	0,930	0,938	0,946	0,954	0,961	0,969	0,975
$z'_2$	0,944	0,952	0,959	0,966	0,973	0,980	0,987
$z''_2$	0,935	0,943	0,951	0,959	0,966	0,973	0,980
$r_1 \cdot 10^7, м$	4,399	4,270	4,141	4,020	3,895	3,799	3,660
$r_2 \cdot 10^7, м$	5,261	5,230	5,202	5,170	5,146	5,119	5,090
$z_x$	0,938	0,946	0,954	0,961	0,969	0,975	0,982
$z'_1 = z''_1$	0,982	0,989	0,995	0,998	0,999		
$z'_2$	0,993	0,999	1,000	1,000	1,000		
$z''_2$	0,987	0,993	0,997	0,999	1,000		
$r_1 \cdot 10^7, м$	3,556	3,450	3,346	3,330	3,330		
$r_2 \cdot 10^7, м$	5,070	5,050	5,024	5,010	5,000		
$z_x$	0,989	0,995	0,998	0,999	1,000		

Таким образом, приведенные выше рассуждения относительно перераспределения жидкости из узкого в более широкий смежный канал справедливы для любого из 27 бинарных сочетаний капилляров независимо от их поперечных размеров.

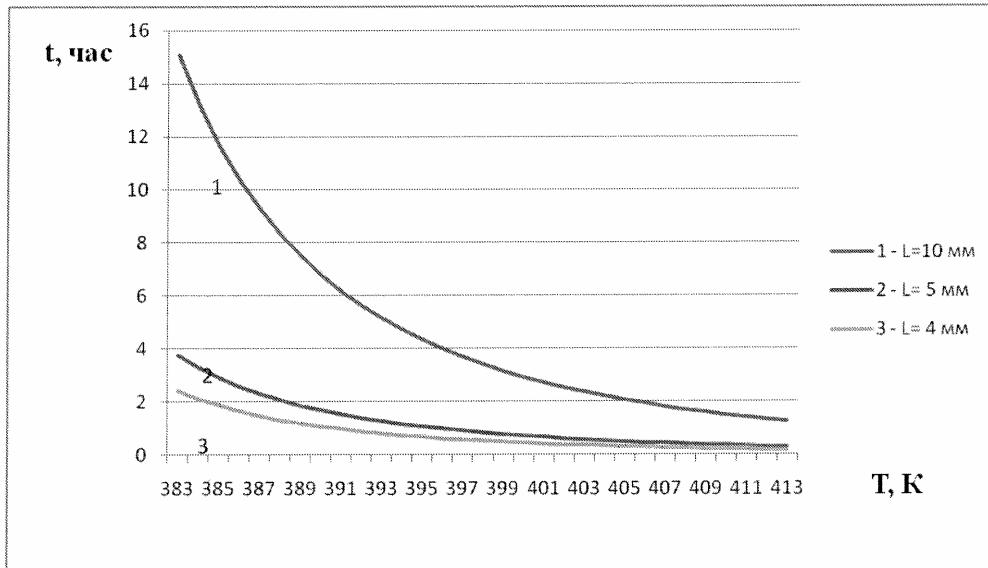


Рис. 3. Влияние длины капилляров  $L$  на длительность испарения при различных температурах (модель № 8)

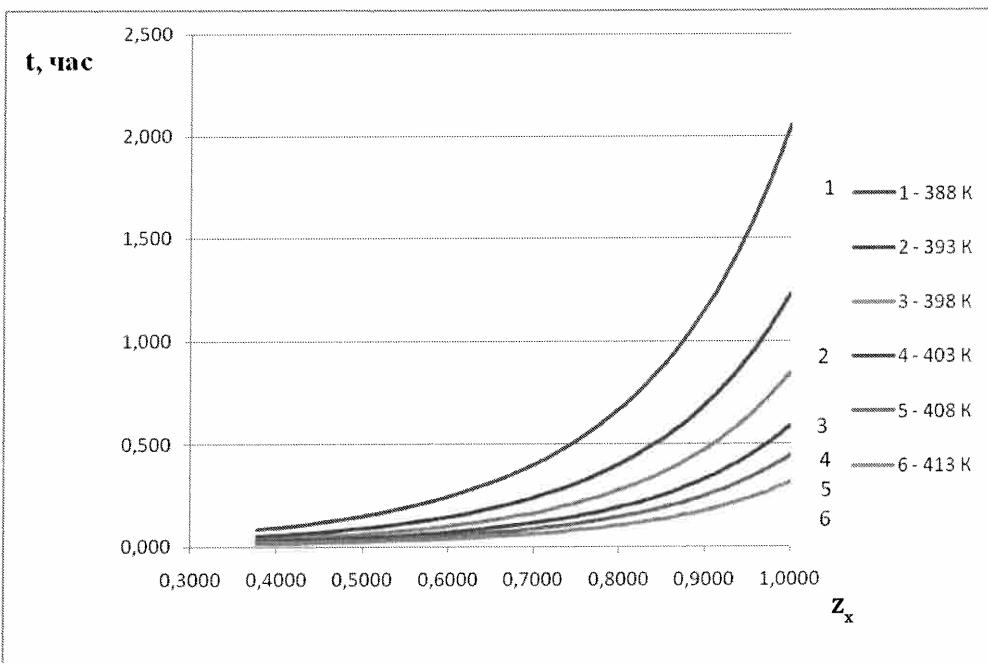


Рис. 4. Зависимость времени испарения от температуры (модель № 8)

Таблица 5

## Время испарения в смежных (I-II) и независимых (I, II) каналах

	T, K	373	378	383	388	393	398	403	408	413
<i>t</i> (I-II)	$10^{-3}$ с	652,568	32,394	13,802	7,767	4,805	3,429	2,513	1,996	1,537
	сут	181,269	8,998	3,834	2,157	1,335	0,953	0,698	0,554	0,427
<i>t</i> (I)	$10^{-3}$ с	416,545	13,280	13,768	7,571	4,526	3,110	2,165	1,562	1,105
	сут	115,707	3,689	3,824	2,103	1,257	0,864	0,601	0,434	0,307
<i>t</i> (II)	$10^{-3}$ с	4 251,665	208,204	87,263	47,984	28,689	19,712	13,721	9,899	7,004
	сут	1 181,018	57,834	24,240	13,329	7,969	5,476	3,811	2,750	1,945

Следуя разработанной методике, может быть установлена функциональная связь между временем испарения из бинарной системы сообщающихся капилляров и их длиной (рис. 3), а также временем и температурой процесса (рис. 4). В таблице 5 проводится сравнительный анализ времени испарения из смежных каналов и времени осушения каждого из них в отдельности.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Испарение жидкостей из капилляров переменного сечения / Н.И. Гамаюнов [и др.] // ИФЖ. – 1984. – Т. 47. – № 4. – С. 647–651.
2. **Малышев, В.Л.** Влияние структуры гетерогенных сред на испарение жидкостей при интенсивном тепловом воздействии/ В.Л. Малышев // ТВТ. – 2009. – Т. 47. – № 4. – С. 584–588.
3. **Малышев, В.Л.** Интенсивность испарения перегретых жидкостей из конических каналов / В.Л. Малышев // Веснік НАНБ. Серыя фізіка-тэхнічных навук. – 2010. – № 1. – С. 71–76.
4. **Уварова, Л.А.** Математическая теория высокотемпературного парообразования неоднородных жидкостей в капиллярах / Л.А. Уварова, В.Л. Малышев. – Могилев : МГТИ. – 2002. – 128 с.
5. **Малышев, В.Л.** Вязкий режим испарения жидкости в системе сообщающихся капилляров / В.Л. Малышев, // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітета імя А.А. Кулішова. – 2009. – № 4(34). – С. 178–184.
6. **Чураев, Н.В.** Физикохимия процессов массопереноса в пористых телах / Н.В. Чураев // Химия. – 1990. – 272 с.
7. **Гамаюнов, Н.И.** Тепломассоперенос в пористых материалах / Н.И. Гамаюнов, В.А. Миронов, С.Н. Гамаюнов. – Тверь : ТвГТУ, 2002. – 224 с.
8. **Ершова, Г.Ф.** Температурная зависимость толщины полимолекулярных адсорбционных пленок воды на поверхности кварца / Г.Ф. Ершова, З.М. Зорин, Н.В. Чураев // Колл. журн. – 1975. – Т. 37 – № 1. – С. 208–210.

Поступила в редакцию 19.04.2013 г.

УДК 612+57.042+57.043+574.24

Н.Г. КРУЧИНСКИЙ, Н.В. АКУЛИЧ\*

## ПАТОГЕНЕЗ ИШЕМИЧЕСКОЙ БОЛЕЗНИ СЕРДЦА: РОЛЬ ТРОМБОЦИТАРНОГО И ТРАНСФОРМИРУЮЩЕГО ФАКТОРОВ РОСТА

Атеросклероз – многофакторное заболевание, ограниченное участками артерий с преобладанием ответвлений и бифуркаций. Характеризуется экспрессией проатерогенных генов, представляющих дополнительный фактор риска атерогенеза, наряду с гиперхолестеринемией, гомоцистеинемией, оксидативным стрессом и гипергликемией. С их изучением связан прогресс в понимании роли биохимии и физиологии иммuno- и ангиоцитов. Наряду с этими факторами – новой областью в исследовании патогенеза атеросклероза являются факторы роста. В экспериментах *in vitro* выявлены обратимые время- и дозозависимые реакции хроматина лимфоцитов периферической крови на введение экзогенного  $TGF_{\beta 1}$  и  $PDGF$  у больных атеросклерозом. Полученные данные имеют прикладное значение в понимании механизмов атерогенеза.

### Введение

В настоящее время достигнуты определенные успехи в изучении механизмов патогенеза атеросклероза и его осложнений – ишемической болезни сердца (ИБС). Так, в многочисленных руководствах и учебниках причиной ИБС называется уменьшение или полное прекращение доставки крови к миокарду в связи с атеросклеротическим процессом в коронарных артериях, что нарушает равновесие между коронарным кровотоком и потребностями миокарда в кислороде [5; 13; 16; 17; 20].

Известно, что атеросклеротический процесс чаще всего поражает переднюю нисходящую (межжелудочковую) ветвь левой коронарной артерии, затем огибающую ветвь левой коронарной артерии и правую коронарную артерию. По мере прогрессирования атеросклероз поражает две и более ветви коронарных артерий, причем наиболее характерно повреждение преимущественно проксимальных отделов. По данным [13], атеросклеротические поражения чаще всего располагаются на расстоянии первых 6 см от устья коронарных артерий.

Коронарография у больных ишемической болезнью сердца выявляет множественные поражения коронарных артерий (три, четыре, пять крупных коронарных ветвей). При наличии у больного выраженной клинической картины ИБС имеется обычно стенозирующий коронарный атеросклероз сужением просвета коронарной артерии на 75% и более. У больных с безболевой формой ИБС при помощи коронарографии обычно определяются атеросклеротические изменения в одной коронарной артерии [13].

\* Выпускник факультета физического воспитания 1993 г.

Показано [17], что снижение кровотока обусловлено сочетанным стеноэзом сосуда и дизрегуляцией сосудистого тонуса, обусловленного атеросклеротической дисфункцией эндотелиальных клеток.

Несмотря на то, что до настоящего времени отсутствуют исчерпывающие представления о развитии атеросклеротических поражений, некоторые ключевые этапы его идентифицированы [5; 9; 11; 13; 14; 18; 20; 22]. Атерогенез требует участия клеток сосудистой стенки (эндотелиальных и гладкомышечных), циркулирующих форменных элементов крови (моноциты, тромбоциты) и некоторых цитокинов и факторов роста [14; 18; 20; 22].

Принято считать, что, событием, инициирующим атерогенез, является “повреждение” эндотелия артерии. Существуют различные доказательства этого утверждения. Так, известно, что далеко зашедшие атеросклеротические поражения практически не встречаются на протяжении кривеносного сосуда, но часты в местах ветвления артерии – зоны турбулентности, где существует наибольшая вероятность травмы эндотелия [16; 18].

Нарушение функционирования эндотелиоцитов – ключевое звено действия практически всех факторов атерогенеза. Например, курение повышает уровень циркулирующего монооксида углерода и усугубляет тканевую гипоксию, что может повреждать эндотелий. Высокий уровень ЛНП или низкий ЛВП создают избыток холестерина, доступного для захвата интимой с возможным ее повреждением. Артериальная гипертензия непосредственно увеличивает гемодинамический стресс, испытываемый эндотелием [13; 24].

С другой стороны, недавние исследования продемонстрировали, что наличие структурного повреждения эндотелия не обязательно. Фактически ранние стадии развития атеросклеротического поражения, включая аккумуляцию липидов внутри артериальной стенки и миграцию моноцитов, проходит при интактной поверхности эндотелиальных клеток. Эти ранние сдвиги обусловлены специфическими биохимическими изменениями и клеточными сигнальными путями, а не структурными изменениями эндотелиального слоя [12].

Многие факторы риска, ассоциированные с атеросклерозом (высокий уровень холестерина, ЛНП, курение, гипертензия, диабет) предрасполагают к дисфункции эндотелия. Даже до появления видимых атеросклеротических поражений эта дисфункция может проявляться следующим образом: нарушением барьерной функции эндотелия, изменением его нормальной антитромботической активности, нарушением высвобождения вазоактивных субстанций, что влияет на тонус подлежащих гладкомышечных клеток. Эти нежелательные последствия дисфункции эндотелия лежат в основе последующих событий атерогенеза [12; 24].

Таким образом, основываясь на мультидисциплинарных исследованиях, проведенных на различных объектах, нами выдвинута гипотеза:

результатом дизрегуляции клеточных сигнальных молекул, в частности, ростовых факторов, могут быть различные гиперплазии, например, атеросклероз [1]. Ключевым же фактором ингибиторных путей является – трансформирующий фактор роста в ( $TGF\beta$ ), а тромбоцитарный фактор роста (PDGF) – является основным митогеном, высвобождающимся в процессе формирования тромба [2; 7; 23].

Факт влияния некоторых цитокинов, например, трансформирующего фактора роста, на рост гладкомышечных клеток предполагает наличие связи между двумя компонентами атерогенеза: воспалительной реакцией и пролиферацией гладкомышечных клеток в интиме [2].

Способность интерлейкина 1 (ИЛ 1) и  $TGF\beta$  индуцировать аутокринные взаимодействия между тромбоцитарным фактором роста и гладкомышечными клетками с одной стороны, и существованием механизма секреции цитокинов активированными лейкоцитами с другой – может послужить началом длительной активации пролиферации гладкомышечных клеток и как следствие быть причиной атерогенеза [10].

Цель исследования – в условиях *in vitro* оценить влияние трансформирующего и тромбоцитарного факторов роста на структурно-функциональное состояние хроматина ядер лимфоцитов у пациентов с ишемической болезнью сердца.

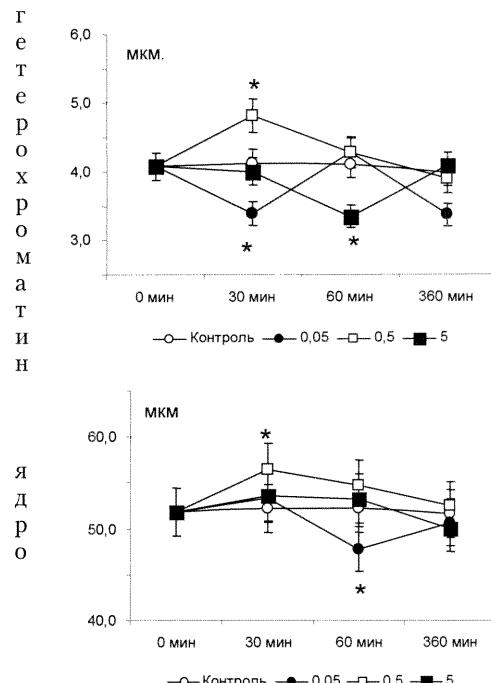
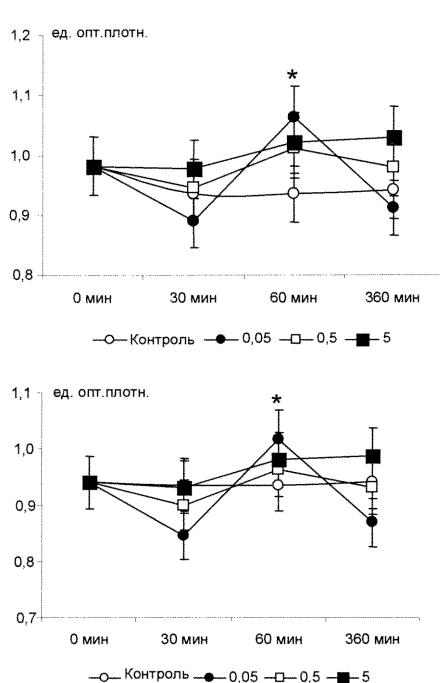
Материалы и методы исследований. Исследования проводились в лаборатории гематологии, гемостазиологии и межклеточных взаимодействий Института экологической и профессиональной патологии, а также в лаборатории экологической физиологии МГУ имени А.А. Кулешова.

В качестве объекта исследования выбраны лимфоциты периферической цельной крови с антикоагулантом (цитрат натрия, 0,9% в соотношении 1/10) от 23 человек с поражением венечных артерий, стабильной стенокардией напряжения. Диагноз уточнялся с помощью общепринятых клинических, инструментальных и лабораторных тестов.

Контроль – лимфоциты 10 практически здоровых мужчин без признаков атеросклеротического поражения магистральных артерий. Время инкубации при  $t=37^{\circ}\text{C}$  цельной крови с  $TGF\beta_1$  и PDGFAB ("Sigma", США) составляло 360 мин. Результаты исследования получены с помощью морфоденситометрического метода (МДМ), основанного на анализе изображения [4].

Статистический анализ включал в себя методы описательной статистики, анализ распределения данных; сравнение серий экспериментальных исследований проводился с использованием непараметрических методов.

Результаты исследования. При 30-минутной инкубации цельной крови с  $TGF\beta_1$  (концентрация 0,05 нг/мл) в контрольной группе снижается активность синтетических процессов в ядрах лимфоцитов, в это же время в основной группе отмечаются все признаки повышения активности хроматина (рисунок).



**Морфоденситометрические параметры хроматина у пациентов с атеросклерозом при инкубации цельной крови с  $TGF\beta_1$  (\* –  $p < 0,05$ )**

При увеличении времени инкубации до 60 мин. с  $TGF\beta_1$  в этой же концентрации наибольшие перестройки у пациентов с атеросклерозом обнаружены в перигранулярной зоне гетерохроматина. В частности, в контрольной группе ее вклад в функциональное состояние хроматина снижается, а в основной – повышается, что, с одной стороны, дополняет результаты настоящего исследования об активации хроматина у больных атеросклерозом, а с другой – вступает в противоречие с литературными данными об иммуносупрессивном влиянии  $TGF\beta_1$  при этой патологии [4].

Экзогенный  $TGF\beta_1$  в концентрации 0,5 нг/мл вызвал перестройки хроматина лимфоцитов при 30- и 60-минутной инкубации, которые связаны с разрыхлением перигранулярной зоны гетерохроматина по сравнению, как с исходным состоянием, так и с контролем в сочетании с активацией ядра в целом. В контрольной группе не было выявлено значимых изменений МДМ параметров при воздействии  $TGF\beta_1$  в концентрации 0,5 нг/мл во всех временных интервалах наблюдения.

$TGF\beta_1$  в концентрации 5,0 нг/мл индуцировал активационную перестройку хроматина лимфоцитов у пациентов с атеросклерозом, тогда как в контрольной группе в ядрах лимфоцитов происходило снижение активационных биосинтетических процессов как в гетеро-, так и в эухроматиновых областях. Обнаруженные реакции хроматина на введение экзогенного  $TGF\beta_1$  в различных концентрациях имели обратимый характер и, как правило, структурно-функциональное состояние ядер лимфоцитов

при 360 мин. инкубации в основной и контрольной группах возвращалось к исходным значениям.

При воздействии тромбоцитарного фактора роста в концентрациях 0.5, 5.0 и 10.0 нг/мл согласно схеме проведенного эксперимента интерфазный хроматин лимфоцитов изучался также в трех временных интервалах – 30, 60 и 360 мин.

В опыте с наименьшей (0.5 нг/мл) концентрацией цитокина в основной группе не было выявлено достоверных изменений ядер клеток во всех временных точках.

После получасовой инкубации с PDGF в 10-кратно большей (5.0 нг/мл) концентрации исследованные параметры ядер лимфоцитов изменились: увеличились размеры ( $p=0.04$ ) и снизилась изрезанность ядер ( $p=0.04$ ). Отмечено так же достоверное увеличение суммарной площади перигранулярной компоненты  $q_2$  хроматина ( $p=0.02$ ).

Статистически значимых изменений параметров при более длительной инкубации (60 мин.) с данной концентрацией PDGF не обнаружено.

После 6-часовой инкубации по сравнению с исходным состоянием достоверно изменилась лишь контрастность ( $q_4$ ) хроматина, которая выросла в 1.2 раза ( $p=0.03$ ). Также не было обнаружено каких-либо изменений при воздействии PDGF в концентрации 10.0 нг/мл (после 30 мин. инкубации). Более длительное воздействие (60 мин.) вызвало снижение оптической плотности хроматина в отдельных компонентах ядра и ядре в целом, достоверно изменились площадь  $q_2$  ( $p=0.05$ ) и  $q_4$  ( $p=0.03$ ).

Наиболее выраженный ответ лимфоцитов вызвала 6-часовая инкубация с PDGF в концентрации 10.0 нг/мл. В данной временной точке достоверно увеличились показатели контрастности всех компонент хроматина и ядра в целом.

После проведения анализа параметров хроматина в аналогичном опыте у контрольной группы было выявлено, что ответ лимфоцитов этой группы на воздействие PDGF значительно отличается от такового у пациентов с атеросклерозом. Так, после 30 мин. инкубации с PDGF (0.5 нг/мл) в контрольной группе оптические параметры остались неизменными; лишь доля перигранулярной компоненты в ядре увеличилась с  $0.33 \pm 0.01$  до  $0.29 \pm 0.01$  ( $p=0.04$ ).

Наиболее выраженный ответ клеток на воздействие был зарегистрирован при воздействии PDGF в концентрации 5.0 нг/мл. Причем при инкубации в течение 60 мин. не отмечено достоверных изменений параметров. В то же время кратковременное (30 мин.) и длительное (360 мин.) воздействия данного цитокина на пробы цельной крови в группе контроля вызвали статистически достоверные перестройки интерфазного хроматина. Следует отметить, что в опытной группе подобных изменений не обнаружено.

Следовательно, после получасовой инкубации PDGF в отличие от пациентов с атеросклерозом в контрольной группе наблюдались перестройки как в ядре в целом, так и в гетеро- и эухроматиновых областях.

Прежде всего, в 1.6 раза снизилось отношение гетерохроматина к эухроматину ( $p=0.019$ ). Изменились параметры ядра: увеличилась площадь ( $p=0.02$ ) и периметр ( $p=0.03$ ), снизилась их изрезанность ( $p=0.02$ ), контрастность хроматина, как и оптическая плотность всего ядра достоверно снизились ( $p=0.02$  и  $p=0.01$ , соответственно).

Таким образом, в результате поставленного эксперимента выявлена активация хроматина с перестройками в гетеро- и эухроматиновых областях ядра в контрольной группе после 30-минутного воздействия PDGF в концентрации 5.0 нг/мл.

При 6 часовой инкубации при той же концентрации зарегистрированы обратные изменения хроматина ядер лимфоцитов. Показатель соотношения гетеро- и эухроматина вырос в 1.6 раза с  $0.92\pm0.08$  до  $1.43\pm0.08$ . Ядра лимфоцитов уменьшились ( $p=0.01$ ), их изрезанность выросла в 1.8 раза ( $p=0.02$ ). Оптические показатели изменились обратно таковым при 30 мин. Оптические плотности компоненты и ядер в целом достоверно выросли.

Таким образом, после 6 часов инкубации в интерфазном хроматине ядер здоровых людей в отличие от опытной группы происходит снижение биосинтетической активности, клетки приближаются к состоянию покоя. В опыте с высокой концентрацией цитокина PDGF (10.0 нг/мл) в группе контроля не было обнаружено значительных изменений структурно-функционального состояния хроматина. Так же, как и в опытной группе, при 30- и 60-минутной инкубации в концентрации 10.0 нг/мл в контрольной группе не было зарегистрировано статистически значимых изменений параметров хроматина.

Лишь после 360 минут воздействия PDGF, как и в группе пациентов, увеличились площадь ( $p=0.02$ ) и периметр ( $p=0.03$ ) гранулярной компоненты, площадь  $q_2$  снизилась ( $p=0.03$ ).

В опыте с воздействием PDGF в количестве 5.0 нг/мл различия в ответе у здоровых и больных атеросклерозом людей обнаружены после 6 часов воздействия цитокина на клетки крови. В самой компактной компоненте  $q_{1b}$  опытной группе повышается дисперсность, увеличиваются площадь, периметр и оптическая плотность. А в контрольной группе, напротив, дисперсность резко снижается, площадь  $q_1$  растет, периметр, оптическая плотность и контрастность хроматина увеличиваются. В компоненте  $q_2$  (опытная группа) снижается площадь, но увеличивается периметр, растет оптическая плотность. В контрольной группе площадь и периметр  $q_2$  снижаются, а оптическая плотность возрастает. В  $q_4$  контрольной группы снижается общий периметр компоненты, и увеличивается оптическая плотность  $q_4$ . В опытной группе, напротив, увеличивается периметр, а оптическая плотность снижается.

Анализ изменений параметров хроматина показал, что воздействие PDGF в концентрации 10.0 нг/мл в течение 30 и 360 мин. вызвало в группах сравнения односторонний ответ клеток. Однако инкубация в течение часа привела к различным изменениям в хроматине лимфоцитов.

В контрольной группе в гетерохроматиновых областях ядер произошло снижение активности, наиболее отчетливо проявившееся в гранулярной компоненте. Увеличились доля, оптическая плотность, контрастность гранул  $q_4$ . Также увеличилась оптическая плотность  $q_2$ . В опытной группе подобных изменений не наблюдается, напротив, отмечена тенденция к повышению активационных процессов.

Изменения параметров, характеризующих состояние эухроматина и ядра в целом, свидетельствовали о достоверных разнонаправленных изменениях параметров гетерохроматиновых компонент  $q_1$  и  $q_2$  в контрольной и опытной группах при заданных параметрах инкубации и концентрации PDGF.

В эухроматиновых областях опытной группы наблюдалась тенденция к активации, в то время как в контрольной группе биосинтетическая активность снижается, и, видимо, клетки приближаются к состоянию покоя.

### Обсуждение

Предпосылками к проведению настоящего исследования стали полученные нами в течение более 10 лет данные, когда у больных с верифицированным диагнозом ишемической болезни сердца был выявлен рост уровня провоспалительных цитокинов и молекул клеточной адгезии [1–8; 23].

Известно, что активация иммунокомпетентных клеток в большинстве случаев приводит к иммунному ответу или воспалительной реакции, которой дебютируют многие заболевания. Так, нарушение ламинарного кровотока в артериях вызывает нарушение образования в эндотелиоцитах азота оксида, что, в свою очередь, способствует повышению активности фактора NF- $\kappa$ B и увеличению количества адгезивных молекул и хемоаттрактантного протеина-1 для моноцитов [10].

Предполагается что Т-лимфоциты, основные участники клеточного звена системы иммунитета, также играют важную роль на ранних стадиях развития атеросклероза, поскольку внутри атероматозной бляшки обнаружены Т-клетки [9]. Принято считать, что Т-хелперы 1-го типа выделяют провоспалительные ( $\gamma$ -интерферон, ИЛ-1, ФНО  $\alpha$ ) цитокины, которые способствуют развитию воспаления эндотелия путем активации эндотелиоцитов, макрофагов, стимуляции продукции свободных радикалов, протеолитических ферментов и значительного повышения прокоагулянтной активности.

Факт влияния некоторых цитокинов, например, трансформирующего фактора роста, на рост гладкомышечных клеток предполагает наличие связи между двумя компонентами атерогенеза: воспалительной реакцией и пролиферацией гладкомышечных клеток в интиме.

Считается так же [13], что практически любая причина, вызывающая активацию тромбоцитов и их адгезию к активированному эндотелию или обнажившемуся субэндотелиальному матриксу, в последующем (особенно при длительном воздействие различных биохимических и гемодинамических факторов) индуцирует пролиферацию субинтимальных гладкомышечных клеток.

Продолжение работ в этом направлении позволило выяснить, что этот процесс обусловлен митогенным действием PDGF на гладкомышечные клетки [20]. Обнаружение структурной идентичности В-цепи этого цитокина иprotoонкогена *c-sis*, который влечет за собой активацию пролиферации, подтвердило гипотезу "псевдотуморозного роста" [20], согласно которой все пролиферирующие гладкомышечные элементы, образующие атерому, имеют моноклоновое происхождение.

Прояснению патофизиологической роли функциональной активации сосудисто-клеточного звена системы гемостаза и ухудшения реологических свойств крови у пациентов с атеросклерозом способствовали исследования влияния длительного низкоуровневого радиационного воздействия [6], когда было выявлено увеличение тромбогенного риска, связанное со смещением гемостазиологического равновесия. Это позволило выдвинуть предположение о ведущей роли нарушений гомеостазиса (на уровне межклеточных взаимодействий) в инициации атерогенеза и тромбоза. В частности, у пациентов с ИБС отмечено увеличение концентрации фибриногена в плазме крови и тенденцией к увеличению его парокоагуляционных дериватов, совпадающей с ускорением тромбинового времени, что может расцениваться как проявление процесса диссеминированного внутрисосудистого свертывания (ДВС) крови, а исследование антикоагулянтного потенциала крови по функциональной активности антитромбина-III позволило высказать предположение [6], что этот процесс связан со снижением антикоагулянтного потенциала и снижением активности V фактора свертывания крови.

Поскольку V-й фактор играет ключевую роль в развитии острого и хронического ДВС крови, то его активность может являться точкой приложения для комплекса антикоагулянтов (протеины С и S) [7]. Далее активация 2-й фазы процесса свертывания крови свидетельствует о гемостазиологическом дисбалансе, проявляющемся именно в виде развития процесса ДВС крови. Высокая же активность других исследованных факторов свертывания крови подтверждает снижение антикоагулянтного потенциала и свидетельствует об активации компенсаторных анти thrombotических механизмов у пациентов с ИБС, пострадавших от аварии на ЧАЭС [6; 7; 23].

Известно, что в патогенезе воспалительной реакции адгезия форменных элементов к поверхности эндотелия занимает не последнее место. Захват ЛПНП стимулирует продуцирование цитокинов в моноцитах/макрофагах, эндотелиоцитах, гладкомышечных и Т-клетках [13]. И, как итог, образуется своеобразный порочный круг: липопротеины низкой плотности запускают синтез окружающими клетками медиаторов воспаления – цитокинов и молекул клеточной адгезии, последние же, экспрессируемые активируемыми клетками, усиливают образование ЛПНП и синтез острофазовых реагентов, в том числе и фибриногена гепатоцитами. Эти реакции происходят при участии IL-1, 6 и TNF $\alpha$ , продуцируемых макрофагами в зоне формирования атеросклеротических пораже-

ний и стимулирующих модификацию ЛПНП [9; 13; 15; 18]. Выявленное сходство в клеточной популяции атеросклеротических бляшек и очагов иммунного воспаления при различных заболеваниях [16] дает нам основание рассматривать атерогенез как хроническую воспалительную реакцию гиперчувствительности замедленного типа.

Еще одной возможной причиной патогенеза нарушений регионарного кровообращения является изменение функционального состояния полиморфноядерных лейкоцитов (ПМЯЛ) [9], поскольку выброс из ПМЯЛ свободных радикалов и вазотропных факторов, их последующая агрегация и способность влиять на состояние гемостазиологического равновесия, делает внутрисосудистую активацию ПМЯЛ одним из факторов, обуславливающих развитие окклюзионно-тромботических осложнений [16; 19; 24].

Отмечено [23], что при нарушении коронарного и церебрального кровообращения наблюдаются изменения функционального состояния ПМЯЛ, проявляющиеся в виде их повышенной чувствительности к активирующему агентам, на воздействие которых ПМЯЛ отвечают мощным кислородным взрывом с образованием в результате реакции спонтанной дисмутации синглетного кислорода и реализацией их протеолитического потенциала через высвобождение вазотропных факторов потенциала, что предполагает связь между процессами атерогенеза и тромбообразования.

Проведенное исследование показало, что  $TGF_{\beta_1}$  оказывает выраженное влияние на структурно-функциональное состояние хроматина лимфоцитов как у здоровых лиц, так и у пациентов с различными клиническими вариантами течения (цереброваскулярная патология и ишемическая болезнь сердца) атеросклероза, причем это влияние неоднозначно и зависит и от концентрации экзогенно вводимого цитокина, и от времени его воздействия.

Полученные результаты дополняют представления, которые сложились в течение последнего десятилетия в результате многочисленных исследований о роли трансформирующего фактора роста в атерогенезе, и наблюдаемые реакции хроматина на введение  $TGF_{\beta_1}$  могут отражать изменение функционального состояния лимфоцитов, эндотелия и характера секреции растворимых медиаторов межклеточных взаимодействий у больных атеросклерозом.

Установленная активация лимфоцитов может быть связана с каскадным принципом усиления сигнала при атерогенезе, особой интеграцией путей его передач, например, обусловленном синтезом и секрецией растворимых форм молекул клеточной адгезии, обладающих цитокиноподобной активностью.

Обнаруженный нами патологический характер воздействия экзогенного  $TGF_{\beta_1}$  может иметь прикладное значение в прогрессировании атеросклеротического процесса, одним из механизмов которого является снижение активности иммунокомпетентных клеток крови и изменение течения адаптивных иммунных реакций.

Влияние PDGF на морфоденситометрические параметры лимфоцитов у пациентов с ИБС можно расценить как пермиссивный эффект,

обусловленный активацией иммунокомпетентных клеток у пациентов с ишемической болезнью сердца.

Следовательно, при атеросклерозе имеет место модификация структурно-функциональных характеристик лимфоцитов, что позволило можно говорить о различиях эпигенома лимфоцитов в исследуемых группах.

Еще раз остановимся на установленных феноменах. Введение цито-PDGF в конечной концентрации 0.5 нг/мл не вызвало реакции со стороны иммунокомпетентных клеток больных ИБС, тогда как у здоровых добровольцев наблюдалось определенное усиление биохимических процессов в ядре. Влияние PDGF в концентрации 5.0 нг/мл четко зависело от экспозиции: при кратковременной инкубации отмечается некоторое усиление активности IX, которое к 6 часам инкубации возвращалось к исходному.

У здоровых добровольцев, напротив, уже кратковременная инкубация с минимальной концентрацией PDGF вызывала мощную реакцию IX, которая проявлялась перестройкой компонент IX и ядра в целом.

Продолжение инкубации приводило к диаметрально противоположным изменениям: растет отношение гетеро- и эухроматина, отмечены внутриядерные перестройки ядра: глубокое функциональное угнетение (“стремление к покоя”) либо проапоптотические изменения, имеющие сходство с хроматином лимфоцитов при моделировании процесса свертывания крови, т.е. тем процессом в котором тромбоцитарный фактор роста играет ведущую роль.

Исследование выполнено при поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований (грант № Б 99М-042 и № Б04М-203).

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Модификация иммунного ответа при атеросклерозе / Н.В. Акулич [и др.] // Иммунопатология, аллергология, инфектология. – 2004. – № 2. – С. 49–52.
2. **Акулич, Н.В.** Гомеостазис: анализ концепции с позиции межклеточных взаимодействий / Н.В. Акулич, Н.Г. Кручинский. – Могилев : МГУ им. А.А. Кулешова. 2004. – 176 с.
3. **Акулич, Н.В.** Структурно-функциональные особенности лимфоцитов пациентов с ишемической болезнью сердца / Н.В. Акулич // Фундаментальные и прикладные аспекты воспаления : материалы Междунар. конф. (27-28 окт. 2011 г., Минск, Беларусь) / науч. ред. И.В. Залуцкий, А.В. Кульчицкий, В.С. Улащик. – Минск : Экономпресс, 2011. – С. 9–12.
4. **Акулич, Н.В.** Физиометрия хроматина лимфоцитов в норме и при функциональных нагрузках: разработка и оптимизация методов / Н.В. Акулич // Вестник МГУ им. А.А. Кулешова. – 2009. – № 1. – С. 192–199.
5. **Кручинский, Н.Г.** Функциональное состояние тромбоцитов и молекулы клеточной адгезии: новые маркеры при коронарном и церебральном атеросклерозе / Н.Г. Кручинский, А.И. Тепляков // Пробл. и перспект. использования методов тромбоцит. агрегатометрии в клинич. практик. : матер науч.-практич. конф. – Минск, 2000. – С. 11–13.
6. **Кручинский Н.Г.** Механизмы формирования гемостазиопатий в условиях низкоуровневого радиационного воздействия : автореф. дис. ... д. м. н. / Н.Г. Кручинский. – Могилев, 2004. – 42 с.

7. Роль молекул клеточных адгезивных и цитокинов в регуляции межклеточных взаимодействий при атеросклерозе / А.И. Тепляков [и др]. // Ангиол. и сосуд. хир. – 1999. – Т. 5. – № 3. – С. 11–15.
8. *Akulich, N.V.* Image analysis of lymphocytes chromatin at the apoptosis / N.V. Akulich, A.N. Osipenko, S.M. Vishnevskaya, N.G. Kruchinsky // J. Thromb. Haemost. – 2007. – Vol. 5, Supplement 2. – P-S-495.
9. *Alkemade, F.E.* Prenatal Exposure to apoE deficiency and postnatal hypercholesterolemia are associated with altered cell-specific lysine methyltransferase and histone methylation patterns in the vasculature / F.E. Alkemade, P. Van Vliet, P. Henneman et al. // American Journal of Pathology. – 2010. – Vol. 176. – № 2. – P. 542–548,
10. *Barnesand, P.J.* Nuclear factor- $\kappa$ B – a pivotal transcription factor in chronic inflammatory diseases / P. J. Barnesand, M. Karin // N Engl J Med. – 1997. – Vol. 336. – № 15. – P. 1066–1071,
11. *Brattstrom, L.* Homocysteine and cardiovascular disease: cause or effect? / L. Brattstrom, D.E.L. Wilcken, // American Journal of Clinical Nutrition. – 2000. – Vol. 72. – № 2. – P. 315–323,
12. *Deng, D. X.-F.* Molecular signatures determining coronary artery and saphenous veins smooth muscle cell phenotypes: distinct responses to stimuli / D.X.-F. Deng, J.M. Spin, A. Tselenko et al. // Arteriosclerosis, Thrombosis, and Vascular Biology. – 2006 – Vol. 26. – № 5. – P. 1058–1065.
13. *Fuster, V.* The pathogenesis of coronary artery disease and the acute coronary syndromes. / V. Fuster, L. Badimon, J.J. Badimon, et al. // N Engl J Med. 1992. – Vol. 326. – P. 242–250. (Part I), Vol. 326. – P. 310–318 (Part II).
14. *Gaustadnes, M.* Intermediate and severe hyperhomocysteinemia with thrombosis: a study of genetic determinants / M. Gaustadnes, N. Riidiger, K. Rasmussen, and J. Ingerslev // Thrombosis and Haemostasis. – 2000. – Vol. 83. – № 4. – P. 554–558.
15. *Iiyama, K.* Patterns of vascular cell adhesion molecule-1 and intercellular adhesion molecule-1 expression in rabbit and mouse atherosclerotic lesions and at sites predisposed to lesion formation, / K. Iiyama, L. Hajra, M. Iiyama et al. // Circulation Research. – 1999. – Vol. 85. – № 2. – P. 199–207
16. *Libby, P.* Inflammation and atherosclerosis / P. Libby, P. M. Ridker, and A. Maseri // Circulation. – 2002. – Vol. 105. – № 9. – P. 1135–1143.
17. *Lusis, A.J.* Atherosclerosis / A.J. Lusis // Nature. – 2000. – Vol. 407. – № 6801. – P. 233–241.
18. *Napoli, C.F.* Fatty streak formation occurs in human fetal aortas and is greatly enhanced by maternal hypercholesterolemia. Intimal accumulation of low density lipoprotein and its oxidation precedes monocyte recruitment into early atherosclerotic lesions / C. Napoli, F.P. D'Armiento, F.P. Mancini et al. // Journal of Clinical Investigation. – 1997. – Vol. 100. – № 11. – P. 2680–2690.
19. *Regan, C.P.* Molecular mechanisms of decreased smooth muscle differentiation marker expression after vascular injury // C.P. Regan, P.J. Adam, C.S. Madsen, G.K. Owens // Journal of Clinical Investigation. – 2000. – Vol. 106. – № 9. – P. 1139–1147.
20. *Ross, R.* The pathogenesis of atherosclerosis: a perspective for the 1990s. In: Braunwald E, ed. Heart Disease: A Textbook of Cardiovascular Medicine. Philadelphia: WB Saunders, – 1997. – P. 1105–1125.
21. *Shiftman, D.* Identification of four gene variants associated with myocardial infarction, / D. Shiftman, S.G. Ellis, C.M. Rowland et al. // American Journal of Human Genetics. – 2005. – Vol. 77. – № 4. – P. 596–605,
22. *Sirtori, C.R.* LDL-cholesterol lowering or HDL-cholesterol raising for cardiovascular prevention: a lesson from cholesterol turnover studies and other /

- C.R. Sirtori and R. Fumagalli // Atherosclerosis. – 2006. – Vol. 186. – № 1. – P. 1–11.
23. *Teplyakov, A.I.* Cytokines and soluble cell adhesion molecules: possible markers of inflammatory response in atherosclerosis / A.I. Teplyakov, E.V. Pryschevova, N.G. Kruchinsky, T.I. Chegerova // Ann. New York Acad. Sc. – 2000. – Vol. 902. – P. 320–322.
24. *Won, D.* Relative reduction of endothelial nitric-oxide synthase expression and transcription in atherosclerosis-prone regions of the mouse aorta and in ane in vitro model of disturbed flow / D. Won, S.-N. Zhu, M. Chen et al. // American Journal of Pathology. – 2007. – Vol. 171. – № 5. – P. 1691–1704.

Поступила в редакцию 27.03.2013 г.

УДК 612.821:796

**О.Л. БОРИСОВ<sup>1</sup>, Е.А. КОНДРАТЕНКОВА<sup>2</sup>, Н.О. МАРТУСЕВИЧ<sup>3</sup>**

## **ОСОБЕННОСТИ СЕНСОМОТОРНОГО РЕАГИРОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ДОЛГОВРЕМЕННОЙ АДАПТАЦИИ К МЫШЕЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЦИКЛИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА**

*В работе обсуждаются результаты психофизиологического обследования юных гребцов с различным стажем спортивной деятельности. Установлено, что по мере роста спортивного стажа у гребцов улучшаются различные показатели качества быстроты: укорачивается время простой и сложной зрительно-моторной реакций, увеличивается подвижность нервных процессов. Полученные данные свидетельствуют о положительном влиянии систематических циклических нагрузок на функциональное состояние центральной нервной системы юных спортсменов, а также о необходимости периодической диагностики их психофизиологического состояния.*

Современный спорт предъявляет все более строгие требования к критериям отбора и организации тренировочного процесса юных спортсменов. Помимо антропометрических данных, во многом определяющих успешность в большинстве видов спорта, одно из главных мест среди показателей подготовленности атлета занимают функциональное состояние центральной нервной системы (ЦНС) и ее типологические особенности, позволяющие достичь высоких результатов порой менее одаренным от природы спортсменам по сравнению с их более гармонично сложенными соперниками.

К настоящему времени установлено, что у представителей самых различных видов спорта по мере повышения квалификации отмечается улучшение целого ряда показателей функционального состояния нервной

<sup>1</sup> Выпускник биологического факультета 1995 г.

<sup>2</sup> Выпускница биологического факультета 1997 г.

<sup>3</sup> Выпускница факультета естествознания 1998 г.

системы. Так, мастера спорта и мастера спорта международного класса достоверно отличаются от перворазрядников и кандидатов в мастера спорта по времени простых реакций на свет и на звук, частоте движений (по данным теппинг-теста) и по точности воспроизведения временных интервалов [1].

Наихудшее время простой двигательной реакции, как правило, демонстрируют представители игровых видов спорта [2; 3]. Отдельные исследователи объясняют это утратой необходимости в постоянном напряжении нервно-мышечного аппарата при командном взаимодействии, и как следствие, снижением требований к его функциональному состоянию [3].

Лучшие показатели времени простой зрительно-моторной реакции отмечены у представителей скоростно-силовых видов спорта, деятельность которых направлена преимущественно на выполнение краткосрочных и простых по структуре движений [3; 4].

У спортсменов, занимающихся игровыми видами спорта, наилучшим оказалось время реакции различения. Кроме того, они допускают минимальное количество ошибок при выполнении психофизиологических тестов, что вероятно обусловлено высокой значимостью в их профессиональной деятельности аналитических процессов, направленных на принятие решения [1; 5].

В игровых видах спорта и спортивных единоборствах имеет значение не только скорость реакции, но и своевременность реагирования. Поэтому у представителей перечисленных видов спорта время реакции на движущийся объект значительно короче и точнее, чем у спортсменов, занимающихся циклическими видами спорта [1; 2; 4].

Таким образом, внимание подавляющего большинства исследователей, изучающих функциональное состояние ЦНС, сфокусировано главным образом на высококлассных взрослых атлетах, занимающихся сложно-координационными и игровыми видами спорта [6; 7; 8]. Сведения о динамике психофизиологических показателей юных спортсменов носят отрывочный характер и явно недостаточны для научного подхода к расширению диапазона компенсаторных возможностей организма на фоне значительных по объему и интенсивности физических и психоэмоциональных нагрузок. Принимая во внимание данное обстоятельство, целью настоящей работы явилось изучение особенностей функционального состояния ЦНС подростков 13-16 лет, специализирующихся в гребных видах спорта.

**Объект исследования** – функциональное состояние ЦНС юных гребцов с различным стажем спортивной деятельности.

**Предмет исследования** – показатели простой и сложной (реакция выбора) зрительно-моторных реакций спортсменов-гребцов 13-16 лет.

**Методика исследования.** В исследовании приняли участие 47 подростков мужского пола 13-14 и 15-16 лет – учащиеся Могилевского государственного училища олимпийского резерва, Могилевской областной детско-юношеской спортивной школы по гребным видам спорта и средней школы № 28 г. Могилева. Они были объединены в четыре группы:

две экспериментальные – начинающие спортсмены-гребцы 13-14 лет (n=12), спортсмены-гребцы 15-16 лет (n=11) и две контрольные – учащиеся школы № 28 г. Могилева 13-14 лет (n=12) и 15-16 лет (n=12), не занимающиеся спортом.

В работе использовался аппаратно-программный комплекс для психофизиологического исследования “НС-Психотест” (“НейроСофт”, Россия, г. Иваново). Психофизиологическое тестирование включало оценку показателей простой и сложной двигательной реакции.

**Методика “Простая зрительно-моторная реакция” (ПЗМР).** Простая зрительно-моторная реакция – это элементарный вид произвольной реакции человека на зрительный стимул. ПЗМР состоит из двух последовательных компонентов: сенсорного (латентного) и моторного. Латентный период – это период восприятия и идентификации стимульного сигнала. Моторный – период выполнения движения.

Реализация методики: обследуемому последовательно предъявляются световые сигналы одного цвета. При появлении сигнала необходимо как можно быстрее нажать на соответствующую кнопку, стараясь при этом не допускать ошибок (ошибками считаются: преждевременное нажатие кнопки и пропуск сигнала). Световой сигнал подается в случайные моменты времени, чтобы не вырабатывался рефлекс на время, и в то же время достаточно регулярно, чтобы каждый очередной сигнал был ожидаем. Исследовались следующие показатели простой зрительно-моторной реакций: время реакции (ВР), стандартное отклонение, коэффициент точности Уиппла и уровень функциональных возможностей (УФВ).

**Методика “Реакция выбора” (РВ).** Реакция выбора – это способность человека наиболее быстро осуществлять выбор адекватного ответа на разнообразные раздражители в условиях дефицита времени и пространства. Пространственная сенсомоторная реакция выбора сложнее простой сенсомоторной реакции и поэтому характеризуется большими значениями времени.

Реализация методики: обследуемому последовательно предъявляются световые сигналы красного и зеленого цвета. При появлении сигнала обследуемый должен как можно быстрее нажать на соответствующую кнопку, стараясь при этом не допускать ошибок (ошибками считаются преждевременное нажатие кнопки и пропуск сигнала). Исследовались следующие показатели реакции на выбор: время реакции (ВР), стандартное отклонение, коэффициент точности Уиппла.

**Реакция на движущийся объект (РДО).** Относится к классу сложных зрительно-моторных реакций, так как содержит выбор момента, когда необходимо ответить на сигнал. Сущность РДО состоит в том, что сигнал, с которым связано ответное действие, не фиксирован на месте, а движется с определенной скоростью.

Реализация методики: на экране монитора изображен круг. Со скоростью один оборот в секунду красная заливка заполняет его диаметр. Испытуемому предлагается нажать на кнопку в момент совмещения красной заливки с чертой, которая постоянно меняет угол расположения, что

предотвращает привыкание к условиям задачи. Исследовались следующие показатели реакции на движущийся объект: количество точных, запаздывающих и опережающих реакций.

Статистическая обработка данных проводилась с использованием программы “STATISTICA 6.0”.

**Результаты исследований и их обсуждение.** Согласно результатам анализа собранных нами данных, показатели ПЗМР у спортсменов 13-14 лет и их сверстников, не занимающихся спортом, достоверно не отличаются. Однако у юных спортсменов зафиксирована меньшая величина стандартного отклонения, что свидетельствует о большей стабильности сенсомоторного реагирования.

Скорость ПЗМР у 15-16-летних гребцов была достоверно выше, а величина стандартного отклонения меньше, чем у их сверстников, не занимающихся спортом, и у начинающих гребцов (табл. 1). Как известно, ВР обратно коррелирует с концентрацией внимания: при высокой концентрации внимания время между воздействием раздражителя и выполнением ответного движения уменьшается, при низкой – увеличивается [2]. Следовательно, у гребцов 15-16 лет данный показатель также улучшается.

Таблица 1

Показатели простой зрительно-моторной реакции спортсменов-гребцов и подростков, не занимающихся спортом.

Показатель	Испытуемые 13-14 лет		Испытуемые 15-16 лет	
	гребцы	контроль	гребцы	контроль
Средняя скорость ПЗМР ( $M \pm m$ )	223,2±39,2	233±47,2	204±33,3*;**	213±39,9
Коэффициент Уиппла ( $M \pm m$ )	0,06±0,03	0,05±0,04	0,07±0,07	0,04±0,02
УФВ ( $M \pm m$ )	2,7±0,7	2,7±0,93	3,3±1,1	3,23±1,0

Примечание:

\* –  $P < 0,05$  (между гребцами 13-14 и 15-16 лет);

\*\* –  $P < 0,05$  (между гребцами 15-16 лет и их сверстниками из контрольной группы).

Уровень функциональных возможностей 13-14-летних гребцов находился в пределах 2,0-3,7 усл. ед., что позволяет охарактеризовать их работоспособность как “незначительно сниженную”. Отмеченный уровень работоспособности указывает на необходимость систематического контроля функционального состояния юных спортсменов в различные периоды учебно-тренировочного процесса.

Время РВ у начинающих гребцов оказалось несколько меньше, чем у учащихся средней школы (табл. 2), однако выявленные различия не были достоверными.

Таблица 2

**Показатели реакции выбора у юных гребцов и подростков, не занимающихся спортом.**

Показатель	Испытуемые 13-14 лет		Испытуемые 15-16 лет	
	Гребцы	контроль	гребцы	контроль
Средняя скорость РВ (M±m)	373,6±97,2	382,8±103,1	304±63,7*	339,9±77,9
Коэффициент Уиппла (M±m)	0,14±0,07**	0,28±0,05	0,19±0,05	0,21±0,07

Примечание:

\* –  $P < 0,05$  (между гребцами 13-14 и 15-16 лет);

\*\* –  $P < 0,05$  (между гребцами 13-14 лет и их сверстниками из контрольной группы).

Средняя скорость РВ у гребцов с большим стажем спортивной деятельности была выше, чем у начинающих гребцов ( $p < 0,05$ ), а величина стандартного отклонения меньше, чем у испытуемых других групп. Уменьшение величины стандартного отклонения свидетельствует не только о лучшем состоянии нервно-мышечного аппарата 15-16-летних гребцов, но и о более высокой стресс-устойчивости спортсменов данной возрастной группы.

Коэффициент Уиппла у начинающих гребцов был достоверно ниже, чем у учащихся средней школы, т.е. спортсмены совершали меньше ошибок, чем их сверстники, не занимающиеся спортом.

О выраженности изменений функционального состояния ЦНС можно также судить, опираясь на результаты РДО, которая объективно отражает уровень тренированности и степень утомления ЦНС [9]. Анализ индивидуальных реакций на движущийся объект и стратегий реагирования не выявил существенных различий между начинающими гребцами и их сверстниками из контрольной группы. У 15-16-летних спортсменов имело место увеличение числа опережающих реакций по сравнению с их контролем ( $22,4 \pm 6,7$  и  $30,3 \pm 1,9$ ) и 13-14-летними гребцами ( $22 \pm 2,8$  и  $30,3 \pm 1,9$ ), что свидетельствует о доминировании процессов возбуждения.

Принимая во внимание то, что увеличение числа опережающих реакций у гребцов старшей возрастной группы сочеталось с приростом количества точных реакций можно говорить о некоторой оптимизации у них баланса процессов возбуждения и торможения по сравнению с более юными и менее опытными спортсменами.

### **Заключение**

Как следует из полученных данных, уже на начальном этапе занятий греблей у подростков намечается тенденция к стабилизации сенсомоторного реагирования. В процессе долговременной адаптации к мышечной деятельности циклического характера возрастает подвижность нервных

процессов и баланс тормозно-возбудительных систем смещается в сторону возбуждения. К 15-16 годам у гребцов повышается устойчивость функционального состояния ЦНС и общая мобилизационная готовность, что делает их более устойчивыми к стрессовым воздействиям, неизбежно возникающим в условиях напряженной тренировочной деятельности и соревнований. Под влиянием систематических тренировок увеличивается скорость восприятия и переработки поступающей информации, улучшается состояние нервно-мышечного аппарата, возрастает скорость проведения нервных импульсов, благодаря чему обеспечивается все более совершенная адаптация к физическим нагрузкам.

Таким образом, регулярные занятия греблей, начатые в 13-14-летнем возрасте к 15-16 годам приводят к заметному улучшению целого ряда показателей сенсомоторного реагирования, что свидетельствует о положительном влиянии мышечных нагрузок циклического характера на функциональное состояние центральной нервной системы.

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. **Литвинова, Н.А.** Индивидуальные психофизиологические особенности человека и их значение в спортивной деятельности / Н.А. Литвинова, Э.М. Казин, Н.В. Дорофеева // Валеология. – 2000. – № 2. – С. 47–52.
2. **Демакова, О.А.** Зависимость времени простой зрительно-моторной реакции от латентного периода предъявления стимула и уровня функционального напряжения / О.А. Демакова, В.А. Шерстяных // Биология – наука XXI века : 8-я Пущинская школа-конференция молодых ученых. – Пущино, 2004. – С. 109.
3. **Чарыкова, И.А.** Анализ особенностей сенсомоторного реагирования в условиях адаптации к физической активности разной направленности / И.А. Чарыкова, Е.А. Стаценко, Н.А. Парамонова // Медицинский журнал. – Минск, 2009. – № 4. – С. 119–121.
4. **Таймазов, В.А.** Психофизиологическое состояние спортсмена (методы оценки и коррекции) / В.А. Таймазов, Я.В. Голуб. – СПб. : Олимп, 2004. – 400 с.
5. **Беленко, И.С.** Психофизиологические особенности у юных спортсменов игровых видов спорта разного возрастного периода развития и тренированности / И.С. Беленко // Вестник ТГПУ. – 2009. – № 3(81). – С. 54–57.
6. Physical exercise facilitates motor processes in simple reaction time performance: an electromyographic analysis / K. Davranche [et all.] // Neurosci. Lett. – 2006. – 396. – Р. 54–56.
7. Effects of exercise on visual evoked potentials / R. Ozmerdivenli [et all.] // Int. J. Neurosci. – 2005. – 115. – Р. 1043–1050.
8. **Dane, S.** Sex and handedness differences in eye-hand visual reaction times in handball players / S. Dane, A. Erzurumluoglu // Int. J. Neurosci. – 2003. – 113. – Р. 923–929.
9. **Сурнина, О.Е.** Половые и возрастные различия времени реакции на движущийся объект у детей и взрослых / О.Е. Сурнина, Е.В. Лебедева // Физиология человека. – 2001. – Т. 27. – № 4. – С. 56–60.

Поступила в редакцию 15.03.2013 г.

## ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ

**АМЕЛЬКІН**

*Уладзімір Васільевіч*

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар БДУ

**ВАСІЛЕВІЧ**

*Mіхail Mіkalaеvіch*

– аспірант БДУ

**БОРУХАЎ**

*Валянцін Цярэнцьевіч*

– доктар фізіка-матэматычных навук, галоўны навуковы супрацоўнік Інстытута матэматыкі НАНБ

**ГАЛЬМАК**

*Аляксандар Mіhailавіch*

– доктар фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры вышэйшай матэматыкі Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта харчавання

**ЖАСТКОЎ**

*Сяргей Васільевіч*

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры алгебры, матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў МДУ імя А.А. Куляшова

**НАВАШЫНСКАЯ**

*Вікторыя Сяргееўна*

– старшы выкладчык кафедры інфарматыкі МДУ імя А.А. Куляшова

**МАРОЗАЎ**

*Mіkalай Парфір'евіch*

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры, матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў МДУ імя А.А. Куляшова

**ШАМУКОВА**

*Наталля Валянцінаўна*

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры інфарматыкі, статыстыкі і вышэйшай матэматыкі Бабруйскага філіяла БДЭУ

**ДАВЫДАВА**

*Вераніка Аляксандраўна*

– студэнт механіка-матэматычнага факультэта БДУ

**КАВАЛЕНКА**

*Mіkalай Сямёнаўч*

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар БДЭУ

**ВЕНГЕРАЎ**

*Віктар Mіkalaеvіch*

– кандыдат тэхнічных навук, вядучы навуковы супрацоўнік Аўтаматызаціі інфарматыкі НАНБ

**ЗАРНІЦКІ**

*Юрый Фёдаравіч*

– інжынер-фізік лабараторыі плазмы фізічнага факультэта Інстытута Вейцмана (Ізраіль)

**ВАЛАСЕВІЧ**

*Аляксандра Уладзіміраўна*

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар МДУ імя А.А. Куляшова

**МАЛЫШАЎ**

*Уладзімір Львовіч*

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры фізікі Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта харчавання

**СВЯТЛОВА**

*Таццяна Вячаславаўна*

– старшы выкладчык Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта харчавання

**КРУЧЫНСКІ**

*Mіkalай Генрыхаўч*

– доктар медыцынскіх навук, дацэнт, прафесар кафедры спартыўнай медыцыны і лячэбнай фізкультуры БелМАПА

**АКУЛІЧ**

*Mіkalай Васільевіч*

– кандыдат біялагічных навук, дацэнт, загадчык лабараторыі экалагічнай фізіялогіі рэурснага цэнтра МДУ імя А.А. Куляшова

**БАРЫСАЎ***Алег Леанідавіч*

– кандыдат біялагічных науок, дацент, загадчык кафедры анатомии і фізіялогії чалавека МДУ імя А.А. Кулшова

**КАНДРАЦЕНКАВА***Кацярына Аляксандраўна*

– кандыдат біялагічных науок, дацент кафедры анатомии і фізіялогії чалавека МДУ імя А.А. Кулшова

**МАРТУСЕВІЧ***Наталля Алегаўна*

– кандыдат біялагічных науок, дацент кафедры анатомии і фізіялогії чалавека МДУ імя А.А. Кулшова

## **SUMMARIES**

### **Amelkin V.V., Vasilevich M.N. CONSTRUCTION OF THE FUCHSIAN SYSTEM WITH FOUR SINGULAR POINTS AND NILPOTENT IRREDUCIBLE MATRICES-RESIDUA ON A COMPLEX PROJECTIVE LINE**

One inverse problem of the analytic theory of linear differential equations is considered in the article. Namely, the second-order Fuchsian system with four singular points and nilpotent irreducible matrices-residua is constructed.

### **Borisov O.L., Kondratenkova Y.A., Martusevich N.O. SENSORY-MOTOR REACTIONS AS A RESULT OF LONG-LASTING ADAPTATION TO CYCLIC MUSCLE ACTIVITIES**

The paper discusses the results of the psycho-physiological examination of young rowers with different sport experience. It proves that the increase of sport experience improves the indices of speed quality: the duration of simple and complex visual-motor reactions shortens and the mobility of nervous processes improves. The findings reveal the positive effect of systematic cyclic training for the functional state of the central nervous system of young athletes as well as the need for periodic diagnosis of their psycho-physiological state.

### **Borukhov V.T. IDENTIFICATION OF THE HEAT SOURCES INTENSITY FOR THE NONLINEAR HYPERBOLIC HEAT EQUATION**

In the paper the problem of the reconstruction of the time components of the source function for the quasilinear hyperbolic equation is considered. This problem is interpreted as a problem of invertibility of hyperbolic dynamical systems. Two types of the inverse dynamical systems are described.

### **Galmak A.M. VECTOR MAPPINGS**

The vector mappings are defined and studied in this paper.

### **Kovalenko N.S., Vengherov V.N. TECHNIQUES FOR ACCELERATION OF ALLOCATION AND VECTOR-PIPELINE DATA PROCESSING**

The techniques to accelerate computing speed and vector-pipelined processing of several functional units through excess data and operations provided by low-intensity flows of inter-processor data transfers are discussed in the paper.

### **Kruchinski N.G., Akulich N.V. PATHOGENESIS OF ISCHEMIC HEART DISEASE: THE ROLE OF PLATELET-DERIVED AND TRANSFORMATION GROWTH FACTORS**

Atherosclerosis is considered to be a multifactorial pathology where preferential zones within the arteries, such as branches and curvatures, are prone to differential expression of genes with a proatherosclerotic profile, serving as potential substratum for lesions when risk factors are introduced. Hypercholesterolemia, homocysteine, oxidative stress, and hyperglycemia have been recognized as the major risk factors for atherogenesis. Their impact on the physiology and biochemistry of immune and vascular cells has been widely demonstrated for the last century. However, the recent discovery of the role of growth factor in human disease has opened up a new field in the study of atherogenic factors. In experiments in vitro doze and time dependent reactions of

chromatin of peripheral blood lymphocytes to introduction of exogenous TGF<sub>β1</sub> and PDGF to patients with ischemic heart disease are revealed. The received data have applied value in understanding of atherogenesis mechanisms.

**Malyshev V.L., Svetlova T.V. INFLUENCE OF ADJACENT PORES FLUID REPLENISHMENT ON MASS EXCHANGE INTENSITY IN BINARY CAPILLARIES**

The influence of adjacent pores fluid replenishment on the evaporation of binary combinations of cylindrical and conical capillaries is examined.

The high-temperature mass transfer processes in the system of connected channels with variable sections occur synchronously as opposed to normal conditions.

Twenty seven algebraic equations are obtained, an algorithm for necessary calculations is worked out and a numerical experiment on conformed evaporation of connected channels is carried out.

**Morozov N.P. INTEGRALS OF QUADRATIC SYSTEM IN CASE CENTER**  
The quadratic system is integrated in closed form in case center.

**Shamukova N.V., Davydova V.A. MEASURE ESTIMATES FOR SETS OF REAL NUMBERS WITH THE GIVEN ORDER OF APPROXIMATION OF ZERO BY POLYNOMINAL VALUES AND THEIR DERIVATIVES**

The article deals with a number of problems of the theory of Diophantine approximation.

**Zarnitsky Y.F., Volosevich A.V. EXPERIMENTAL DIAGNOSIS OF HETEROGENEITY IN AURORAL IONOSPHERE**

Reduced Maxwell functions are applied for ions component of unstable E-layer with the purpose to develop a more accurate linear model of modified two-stream instability (FB) in analytic form. Linear dispersion equation has been derived and solved for both long wave and short wave sub ranges, taking into account real temperatures of ionospheric plasma, adiabaticity of electrons, the temperature dependence of electron-neutral collisions frequency and other kinetic effects. On the basis of the obtained models the boundary position of linear generation region, steady-state phase velocities of excited waves and its aspect-angle dependence have been studied. Upper boundary value for steady-state phase velocities is also estimated.

**Zhestkov S.V., Novashinskaya V.S. ON THEORY OF PROPAGATION OF BRIGHT AND DARK SOLITONS OF (2+1)-DIMENSIONAL SCHRODINGER'S EQUATIONS WITH POWER LAWS OF NONLINEARITY AND ATTENUATION**

The direct method of constructing bright and dark solitons of (2+1)-dimensional Schrodinger's equations with power laws of nonlinearity and attenuation is developed.