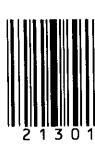


ISSN 2073-8315



# ВЕСНИК

Магілёўскага дзяржаўнага  
універсітэта  
імя А.А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

*Выдаецца с снежня 1998 года*

Серый В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ  
(матэматыка, фізіка, біялогія)

*Выходзіць два разы ў год*

**1 (41)**  
**2013**

### **Галоўная рэдакцыйная камегія:**

д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (галоўны рэдактар);  
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара);  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (нам. галоўнага рэдактара);  
д-р фіз.-мат. навук прафесар С.В. Жасткоў (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В);  
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

### **Матэматыка, фізіка:**

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)  
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)  
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)  
д-р тэхнічных навук А.С. Турцэвіч (Мінск)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А.А. Самадураў (Мінск)  
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

### **Біялогія:**

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)  
д-р біял. навук дацэнт А.Д. Навумаў (Мінск)  
д-р біял. навук дацэнт С.У. Лазарэвіч (Горкі)  
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)  
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)  
д-р мед. навук дацэнт А.В. Марачкаў (Магілёў)  
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)  
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)  
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)

## **ЗМЕСТ**

<i>ГАЛЬМАК А.М.</i> Полиадические группы вектор-матриц .....	4
<i>КОЛЕДА Д.В., САКОВИЧ Н.В.</i> Число многочленов над кольцом гауссовых целых, имеющих пару близких корней .....	14
<i>СИДОРЕНКО И.Н.</i> О существовании двукратного предельного цикла в системе Льенара .....	18
<i>ВОЛОСЕВИЧ А.В., ЗАРНИЦКИЙ Ю.Ф.</i> Обобщенная теория Фарлей-Бунемановской неустойчивости в столкновительной плазме .....	24
<i>ОСТРИКОВ О.М.</i> Дислокационная модель нанодвойникового композита .....	35
<i>ШУЛЬГА А.В.</i> Оценка разрешающей способности волноводного спектроанализатора призменного типа .....	47
<i>ВЕКО О.В., ОВСИЮК Е.М., РЕДЬКОВ В.М.</i> О 4-спинорах Джонса полностью поляризованного света .....	56
<i>МАСАЛКОВА Ю.Ю.</i> Влияние некоторых экологических факторов на развитие яиц отдельных видов гельминтов собак .....	65
<i>АФАНАСЬЕВ О.Е.</i> Объект и парадигмы природопользования как научного направления в географии .....	72
ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ .....	84
SUMMARIES .....	85

# МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

## ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ВЕКТОР-МАТРИЦ

Получен положительный ответ на вопрос: существует ли в частичной  $l$ -арной полугруппе  $\langle \mathbf{M}(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  всех  $k$ -компонентных вектор-матриц над ассоциативным коммутативным кольцом  $P$  с единицей  $l$ -арные подгруппы, элементы которых обладают компонентами, отличными от квадратных матриц. При получении ответа на этот вопрос используются  $\sigma$ -согласованные вектор-матрицы, так как ранее автором было установлено, что если подмножество  $\mathbf{M}$  множества  $\mathbf{M}(k, P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  то  $\langle \mathbf{M}, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  –  $l$ -арная подполугруппа  $l$ -арной полугруппы  $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  всех  $k$ -компонентных вектор-матриц размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$  над  $P$ , согласованных с подстановкой  $\sigma$ .

### 1 Введение

Вектор-матрицей размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$  над кольцом  $P$  называется [1, определение 1] всякий упорядоченный набор  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$  матриц  $A_1, \dots, A_k$  размеров  $m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k$  с элементами из  $P$ . Вектор-матрица, у которой все компоненты  $A_1, \dots, A_k$  – квадратные матрицы одного и того же порядка  $n$  называется [1] квадратной вектор-матрицей порядка  $n$ .

Множество всех  $k$ -компонентных вектор-матриц фиксированного размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$  над  $P$  будем обозначать символом  $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ . Для обозначения множества всех  $k$ -компонентных квадратных вектор-матриц порядка  $n$  над  $P$  вместо символа  $\mathbf{M}_{n \times n, \dots, n \times n}(P)$  используется символ  $\mathbf{M}_n(k, P)$ .

Определение вектор-матрицы обобщает понятие  $m$ -адической ( $m$ -арной) матрицы Э. Поста [2], которую он определил как упорядоченный набор  $m - 1$  квадратных матриц одного и того же порядка над полем комплексных чисел.

В [1, определение 4] для всех  $k \geq 2, l \geq 2$  и любой подстановки  $\sigma \in S_k$  на множестве  $\mathbf{M}(k, P)$  всех  $k$ -компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом  $P$  определена частичная  $l$ -арная операция  $[ ]_{l, \sigma, k}$  и доказано [1, теорема 1] ее ассоциативность в случае тождественности подстановки  $\sigma^{l-1}$ . В этом случае подмножество  $\mathbf{M}_n(k, P)$  множества  $\mathbf{M}(k, P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  то есть универсальная алгебра  $\langle \mathbf{M}_n(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  является  $l$ -арной полугруппой [1, предложение 4].

Возникает единственный вопрос: *существуют ли в частичной  $l$ -арной полугруппе  $\langle \mathbf{M}(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$   $l$ -арные подполугруппы, элементы которых не обязаны быть квадратными вектор-матрицами?* Положительный ответ на этот вопрос получен в [3, теорема 4.1]. Для этого понадобилось ввести понятие  $\sigma$ -согласованной вектор-матрицы [3, определение 3.2].

Во множестве  $\mathbf{M}_n(k, P)$ , где  $P$  – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, выделим подмножество  $\mathbf{GL}_n(k, P)$  всех  $k$ -компонентных квадратных вектор-матриц порядка  $n$  над  $P$ , у которых все компоненты обратимы в кольце  $\mathbf{M}_n(P)$ . Ясно, что обратимость компонент в  $\mathbf{M}_n(P)$  можно заменить обратимостью определителей этих компонент в  $P$ .

Если  $\sigma^{l-1}$  – тождественная подстановка, то множество  $\mathbf{GL}_n(k, P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  а универсальная алгебра  $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  является  $l$ -арной группой [4, теорема 4.2]. Информация об этой  $l$ -арной группе имеется также в [5].

Представляет интерес следующий вопрос: *существуют ли в частичной  $l$ -арной полугруппе  $\langle \mathbf{M}(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$   $l$ -арные подгруппы, элементы которых обладают компонентами, отличными от квадратных матриц?* В данной работе получен положительный ответ на этот вопрос.

Используются результаты из [1, 3 – 7].

Отметим, что после Э. Поста изучением многоместных операций на множествах упорядоченных наборов матриц над произвольным полем характеристики нуль занимался А.К. Слипенко [8, 9]. Среди изучавшихся им операций имеется и  $n$ -арная операция, которую Э. Пост определил на множестве всех упорядоченных наборов, состоящих из  $n - 1$  квадратных матриц над полем комплексных чисел. По-видимому, автор работ [8, 9] не знал об этом, так как в указанных работах отсутствуют ссылки на Э. Поста.

## 2 ПОЛНАЯ ЛІНЕЙНАЯ И СПЕЦІАЛЬНАЯ ЛІНЕЙНАЯ ПОЛІАДИЧЕСКІЕ ГРУППЫ

**2.1 Определение** [1, определение 4]. Если  $k \geq 2, l \geq 2, \sigma$  – подстановка из  $S_k$ ,

$$\mathbf{A}_i = (A_{ii}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, l$$

–  $k$ -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом  $P$  такие, что для любого  $j \in \{1, \dots, k\}$  определено произведение

$$Y_j = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{l\sigma^{l-1}(j)}, \quad (2.1)$$

то положим

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \{Y_1, \dots, Y_k\}. \quad (2.2)$$

$l$ -Арную операцию (2.2) иногда для краткости будем называть  $l$ -арным произведением.

**2.2 Замечание.** Если в определении 2.1 все компоненты матриц  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$  являются матрицами 1-го порядка, то операция  $[ ]_{l, \sigma, k}$  определена на декартовой степени  $P^k$ . Таким образом, операцию  $[ ]_{l, \sigma, k}$  из определения 2.1 можно считать обобщением операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  из [6, 7].

Аналогично бинарному случаю,  $l$ -арное произведение (2.2) определено не всегда, а только в тех случаях, когда для любых соседних сомножителей в правой части (2.1), число столбцов предшествующего сомножителя совпадает с числом строк последующего сомножителя.

**2.3 Теорема** [1, теорема 1]. *Пусть*

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \dots, A_{mk}), m = 1, \dots, 2l - 1$$

–  $k$ -компонентные вектор-матрицы над  $P$ ,  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$  удовлетворяющая условию  $\sigma^l = \sigma$ . Тогда, если для некоторого  $i = 0, 1, \dots, l - 1$  определена  $k$ -компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{j-1}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}$$

то для любого  $j = 0, 1, \dots, l - 1$  определена  $k$ -компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j [\mathbf{A}_{j+1} \dots \mathbf{A}_{j+l}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}$$

и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{j-1}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k} =$$

$$= [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j [\mathbf{A}_{j+1} \dots \mathbf{A}_{j+l}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}$$

Согласно теореме 2.3, если  $P$  – ассоциативное кольцо, а подстановка  $\sigma^{l-1}$  – тождественная, то на множестве  $\mathbf{M}(k, P)$  определена частичная ассоциативная  $l$ -арная операция  $[ ]_{l, \sigma, k}$  то есть  $\mathbf{M}(k, P)$ , рассматриваемое вместе с этой  $l$ -арной операцией, является частичной  $l$ -арной полугруппой.

Из теоремы 2.3 вытекает

**2.4 Предложение** [1, предложение 4]. *Если подстановка  $\sigma \in S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то  $\langle \mathbf{M}_n(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  –  $l$ -арная полугруппа.*

**2.5 Теорема** [4, теорема 4.2]. *Если подстановка  $\sigma \in S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то  $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  –  $l$ -арная группа. В частности,  $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), [ ]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$  –  $(k+1)$ -арная группа.*

$l$ -Арную группу  $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  по аналогии с бинарным случаем естественно называть полной линейной  $l$ -арной группой, соответствующей данным  $k$  и  $\sigma$ .

Во множестве  $\mathbf{GL}_n(k, P)$  выделим подмножество  $\mathbf{SL}_n(k, P)$  всех  $k$ -компонентных вектор-матриц, у которых определитель каждой компоненты равен единице кольца  $P$ . Так как множество  $\mathbf{SL}_n(k, P)$  совпадает с  $k$ -й декартовой степенью специальной линейной группы  $\mathbf{SL}_n(P)$ , то, применяя теорему 2.9.3 [7], получим следующий результат.

**2.6 Предложение.** *Если подстановка  $\sigma \in S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то множество  $\mathbf{SL}_n(k, P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  а универсальная алгебра  $\langle \mathbf{SL}_n(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  является  $l$ -арной группой.*

$l$ -Арную группу  $\langle \mathbf{SL}_n(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  по аналогии с бинарным случаем назовем специальной линейной  $l$ -арной группой, соответствующей данным  $k$  и  $\sigma$ .

### 3 σ-СОГЛАСОВАННЫЕ ВЕКТОР-МАТРИЦЫ

Для всякой подстановки  $\sigma \in S_k$  положим:

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p \sigma_{p+1} \dots \sigma_q \quad (3.1)$$

— разложение  $\sigma$  в произведение независимых циклов, где  $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_q$  — все циклы длины 1;

$$X_1 = \{i_{11}, \dots, i_{1l_1}\}, \dots, X_p = \{i_{p1}, \dots, i_{pl_p}\}, X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \dots, X_q = \{l_q\} \quad (3.2)$$

—  $\sigma$ -орбиты, соответствующие циклам  $\sigma_1, \dots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \dots, \sigma_q$ . Длина цикла  $\sigma_r$  ( $r = 1, \dots, q$ ) обозначается через  $l_r$ . В частности,  $l_{p+1} = \dots = l_q = 1$ .

**3.1 Определение** [3, определение 3.1]. Упорядоченный набор пар  $((m_1, \dots, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  целых положительных чисел называется  $\sigma$ -согласованным или согласованным с подстановкой  $\sigma \in S_k$ , имеющей разложение (3.1), если:

1) для каждой орбиты  $X_r = \{i_{r1}, \dots, i_{rl_r}\}$ , где  $r = 1, \dots, p$ , и любого ее элемента  $i_{rs}$ , где  $s = 1, \dots, l_r$ , верны равенства

$$n_{i_{rs}} = m_{\sigma(i_{rs})}, n_{\sigma(i_{rs})} = m_{\sigma^2(i_{rs})}, \dots, n_{\sigma^{l_r-2}(i_{rs})} = m_{\sigma^{l_r-1}(i_{rs})}, n_{\sigma^{l_r-1}(i_{rs})} = m_{i_{rs}}; \quad (3.3)$$

$$2) m_{i_{p+1}} = n_{i_{p+1}}, \dots, m_{i_q} = n_{i_q}.$$

**3.2 Определение** [3, определение 3.2]. Вектор-матрица размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$  называется  $\sigma$ -согласованной или согласованной с подстановкой  $\sigma \in S_k$  имеющей разложение (3.1), если набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma$ .

**3.3 Замечание.** Если условие 1) определения 3.1 распространить на одноэлементные циклы, то для орбит  $X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \dots, X_q = \{i_q\}$  равенства (3.3) примут вид

$$n_{\sigma^{l_{p+1}-1}(i_{p+1})} = n_{\sigma^{l-1}(i_{p+1})} = n_{\sigma^0(i_{p+1})} = n_{i_{p+1}} = m_{i_{p+1}}, \dots$$

$$\dots, n_{\sigma^{l_q-1}(i_q)} = n_{\sigma^{l-1}(i_q)} = n_{\sigma^0(i_q)} = n_{i_q} = m_{i_q}.$$

Таким образом, в определении 3.1 можно обойтись без условия 2), если в условии 1) считать  $r = 1, \dots, q$ .

**3.4 Замечание.** Можно показать [3], что из выполнимости условия (3.3) для некоторого  $i_r \in X_r$  следует его выполнимость для любого  $i_{rs} \in X_r$ .

Один и тот же набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ , соответственно, одна и та же  $k$ -компонентная вектор-матрица размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$  могут быть согласованы с различными подстановками. Например, набор  $((m, n), (n, m), (m, n), (n, m))$ , соответственно, 4-компонентная вектор-матрица  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$  размера  $(m \times n, n \times m, m \times n, n \times m)$  согласованы и с подстановкой  $(12)(34) \in S_4$ , и с подстановкой  $(1234) \in S_4$ .

Вектор-матрицы, согласованные с одной и той же подстановкой, могут иметь разные размеры. Мы будем рассматривать  $\sigma$ -согласованные вектор-матрицы фиксированного размера.

Ясно, что если набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma \in S_k$ , то все вектор-матрицы из  $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$  также согласованы с  $\sigma$ .

**3.5 Теорема** [3, теорема 4.1]. *Пусть  $P$  – ассоциативное кольцо, упорядоченный набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma \in S_k$ , удовлетворяющей условию  $\sigma' = \sigma$ . Тогда множество  $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  а универсальная алгебра  $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  является  $l$ -арной полугруппой.*

**3.6 Теорема** [3, теорема 6.1]. *Пусть  $P$  – ассоциативное кольцо,  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$ , удовлетворяющая условию  $\sigma' = \sigma$ ,  $\mathbf{M}$  – подмножество множества  $\mathbf{M}(k, P)$ , замкнутое относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$ . Тогда универсальная алгебра  $\langle \mathbf{M}, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  является  $l$ -арной подполугруппой  $l$ -арной полугруппы  $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  для некоторого набора  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ , согласованного с подстановкой  $\sigma$ .*

Таким образом, согласно теореме 3.6, вопрос о существовании в частичной  $l$ -арной полугруппе  $\langle \mathbf{M}(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$   $l$ -арных подгрупп сводится к вопросу о существовании  $l$ -арных подгрупп в  $l$ -арной полугруппе,  $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ , где набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma$ , удовлетворяющей условию  $\sigma' = \sigma$ .

#### 4 ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть  $P$  – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей;  $A_1, A_2, \dots, A_r$  ( $r \geq 2$ ) матрицы размеров  $m_s \times n_s$  ( $1 \leq s \leq r$ ) над  $P$ , где

$$n_1 = m_2, \dots, n_{r-1} = m_r; \mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, n_r\}.$$

Пусть также в каждой матрице  $A_s$  все элементы в строках с номерами  $\mu + 1, \dots, m_s$  и столбцах с номерами  $\mu + 1, \dots, n_s$  равны нулю кольца  $P$ , то

есть матрицы  $A_s$  имеют блочный вид  $A_s = \begin{pmatrix} B_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $1 \leq s \leq r$ , где блок  $B_s$  – квадратная подматрица порядка  $\mu$ , остальные блоки – нулевые матрицы соответствующих размеров. При сделанных предположениях имеет место формула

$$A_1 A_2 \dots A_r = C = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где

$$B_1 B_2 \dots B_r = D. \quad (4.2)$$

Положим  $\mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$  и выделим во множестве  $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$  подмножество  $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}^{(\mu)}(P)$  всех вектор-матриц вида

$$\mathbf{A} = \left( A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, A_k = \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad (4.3)$$

где  $B_1, \dots, B_k$  – квадратные матрицы порядка  $\mu$  над  $P$ .

$$\mathbf{M}^{(\mu)} = \{\mathbf{A} = \left( \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \mid \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), B_1 \dots B_k \in \mathbf{M}_\mu(P)\},$$

где для сокращения записей использовано обозначение  $\mathbf{M}^{(\mu)} = \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}^{(\mu)}(P)$ , которое иногда будет употребляться, если из контекста ясно, о чём идет речь.

**4.1 Предложение.** Пусть  $P$  – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma$ , удовлетворяющей условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $\mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$ . Тогда множество  $\mathbf{M}^{(\mu)}$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  а универсальная алгебра  $< \mathbf{M}^{(\mu)}, [ ]_{l, \sigma, k} >$  является  $l$ -арной полугруппой, изоморфной  $l$ -арной полугруппе  $< \mathbf{M}_\mu(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} >$ .

**Доказательство.** Заметим, что по теореме 3.5  $< \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [ ]_{l, \sigma, k} >$  –  $l$ -арная полугруппа. Пусть

$$\mathbf{A}_i = \left( A_{i1} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, A_{ik} = \begin{pmatrix} B_{ik} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad i = 1, \dots, l \quad (4.4)$$

– произвольные вектор-матрицы из  $\mathbf{M}^{(\mu)}$ ,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = (Y_1, \dots, Y_k).$$

Согласно определению операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$

$$Y_j = A_{1j} A_{2\sigma j} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{l\sigma^{l-1}(j)}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Если учесть тождественность подстановки  $\sigma^{l-1}$ , то

$$Y_j = A_{1j} A_{2\sigma j} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{lj},$$

откуда, учитывая (4.1) и (4.2), получаем  $Y_j = \begin{pmatrix} D_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , где

$$B_{1j} B_{2\sigma j} \dots B_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} B_{lj} = D_j, \quad j = 1, \dots, k. \quad (4.5)$$

Ясно, что  $D_j \in \mathbf{M}_\mu(P)$ . Таким образом,

$$\mathbf{A} = \left( \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} D_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathbf{M}^{(\mu)}.$$

Следовательно, множество  $\mathbf{M}^{(\mu)}$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции, а универсальная алгебра  $< \mathbf{M}^{(\mu)}, [ ]_{l, \sigma, k} >$  является  $l$ -арной полугруппой.

Определим отображение  $f: \mathbf{M}^{(\mu)} \rightarrow \mathbf{M}_\mu(k, P)$  по правилу

$$f: \mathbf{U} = \left( \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} V_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \rightarrow f(\mathbf{U}) = (V_1, \dots, V_k).$$

Ясно, что  $f$  – биекция  $\mathbf{M}^{(\mu)}$  на  $\mathbf{M}_\mu(k, P)$ . Так как

$$\begin{aligned} f([A_1 \dots A_k]_{l, \sigma, k}) &= f(A) = f(Y_1, \dots, Y_k) = (D_1, \dots, D_k) = \\ &= (B_{11} B_{2\sigma(1)} \dots B_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)} B_{11}, \dots, B_{lk} B_{2\sigma(k)} \dots B_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)} B_{lk}) = \\ &= [(B_{11}, \dots, B_{1k}) \dots (B_{l1}, \dots, B_{lk})] = [f(A_1) \dots f(A_k)]_{l, \sigma, k} \end{aligned}$$

то есть

$$f([A_1 \dots A_k]_{l, \sigma, k}) = [f(A_1) \dots f(A_k)]_{l, \sigma, k}$$

то  $f$  – изоморфизм  $l$ -арной полугруппы  $\langle M^{(\mu)}, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  на  $l$ -арную полу-группу  $\langle M_\mu(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ . Предложение доказано.

Для всякого подмножества  $F$  полугруппы  $M_\mu(P)$  обозначим через  $F^{(\mu)}$  множество всех вектор-матриц из  $M^{(\mu)}$  вида (4.3), у которых подматрицы  $B_1, \dots, B_k$  принадлежат  $F$ .

**4.2 Теорема.** Пусть  $P$  – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma$ , удовлетворяющей условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $\mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$ ,  $F$  – подгруппа группы  $GL_\mu(P)$ . Тогда множество  $F^{(\mu)}$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  а универсальная алгебра  $\langle F^{(\mu)}, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  является  $l$ -арной группой, изоморфной  $l$ -арной группе  $\langle F^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ .

**Доказательство.** Пусть  $A_1, \dots, A_l$  – произвольные вектор-матрицы из  $F^{(\mu)}$ , имеющие вид (4.4);  $A, Y_1, \dots, Y_k, D_1, \dots, D_k$  – те же, что и в доказательстве предложения 4.1. Так как в левой части (4.5) все сомножители принадлежат группе  $F$ , то  $D_j \in F$  для любого  $j \in 1, \dots, k$ . Таким образом,  $[A_1 \dots A_l]_{l, \sigma, k} = A \in F^{(\mu)}$ , то есть множество  $F^{(\mu)}$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$ .

Сужение отображения  $f$  из доказательства предложения 4.1 на  $F^{(\mu)}$  является биекцией на  $k$ -ую декартову степень  $F^k$ . А так как по доказанному в предложении 4.1  $f$  – изоморфизм  $\langle M^{(\mu)}, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  на  $\langle M_\mu(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ , и, кроме того, согласно теореме 2.9.3 [7],  $\langle F^k, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  –  $l$ -арная группа, то  $\langle F^{(\mu)}, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  –  $l$ -арная группа. Теорема доказана.

Утверждение теоремы 4.2 о том, что  $\langle F^{(\mu)}, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  –  $l$ -арная группа, было доказано с помощью изоморфизма  $f$  без использования какого-либо определения  $l$ -арной группы, то есть без нахождения решений соответствующих уравнений и вычисления косых элементов. Сделаем это.

Пусть  $\mu \leq \min\{m, n\}$ ,  $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  – матрица размера  $m \times n$  над ассо-

циативным коммутативным кольцом  $P$  с единицей. Блок  $B$  является квадратной матрицей порядка  $\mu$ , определитель которой обратим в  $P$ , что равносильно обратимости  $B$  в  $M_\mu(P)$ . Обозначим через  $\hat{A}$  матрицу размера

$n \times m$ , имеющую вид  $\hat{A} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Ясно, что  $A\hat{A}$  и  $\hat{A}A$  – квадратные матрицы порядков  $m$  и  $n$  соответственно, имеющие вид  $A\hat{A} = \begin{pmatrix} E_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$\hat{A} A = \begin{pmatrix} E_\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , где  $E_\mu$  – единичная матрица порядка  $\mu$ .

**4.3 Предложение.** Пусть  $P$  – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma$ , удовлетворяющей условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $\mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$ ,  $\mathbf{F}$  – подгруппа группы  $\mathbf{GL}_\mu(P)$ . Тогда для любого  $i = 1, \dots, l$  и любых

$$\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{A}_{i+1}, \dots, \mathbf{A}_l, \mathbf{C} \in \mathbf{F}^{(\mu)}$$

в  $\mathbf{F}^{(\mu)}$  однозначно разрешимо уравнение

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{X} \mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{C}.$$

**Доказательство.** Пусть

$$\mathbf{C} = \left( \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} D_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathbf{A}_s = \left( A_{s1} = \begin{pmatrix} B_{s1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, A_{sk} = \begin{pmatrix} B_{sk} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), s = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, l.$$

Положим

$$\mathbf{X} = \left( X_1 = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, X_k = \begin{pmatrix} Y_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где

$$X_{\sigma^{i-1}(j)} = \hat{A}_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} \dots \hat{A}_{2\sigma(j)} \hat{A}_{1j} C_j \hat{A}_{lj} \hat{A}_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} \dots \hat{A}_{(i+1)\sigma^i(j)}$$

для любого  $j = 1, \dots, k$ . Ясно, что  $X \in \mathbf{F}^{(\mu)}$ . Если

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{X} \mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = (Z_1, \dots, Z_k),$$

то

$$\begin{aligned} Z_j = & A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} \hat{A}_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)} \dots \hat{A}_{2\sigma(j)} \hat{A}_{1j} C_j \\ & \hat{A}_{lj} \hat{A}_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} \dots \hat{A}_{(i+1)\sigma^i(j)} A_{(i+1)\sigma^i(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{lj} = C_j. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\mathbf{X}$  – решение искомого уравнения, которое в  $l$ -арной группе является единственным. Предложение доказано.

**4.4 Предложение.** Пусть  $P$  – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma$ , удовлетворяющей условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $\mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$ ,  $\mathbf{F}$  – подгруппа группы  $\mathbf{GL}_\mu(P)$ . Тогда для любой вектор-матрицы

$$\mathbf{A} = \left( A_1 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, A_k = \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathbf{F}^{(\mu)}$$

в  $l$ -арной группе  $\langle \mathbf{F}^{(\mu)}, [\cdot]_{l, \sigma, k} \rangle$  существует косая вектор-матрица

$$\bar{\mathbf{A}} = \left( U_1 = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, U_k = \begin{pmatrix} V_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где  $V_j = B_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1}, \dots, B_{\sigma(j)}^{-1}$ .

**Доказательство.** Положим

$$[\underbrace{\bar{\mathbf{A}} \mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{l-1}]_{l, \sigma, k} = \left( R_1 = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, R_k = \begin{pmatrix} S_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathbf{F}^{(\mu)}.$$

Тогда  $R_j = U_j A_{\sigma(j)} \dots A_{\sigma^{l-2}(j)} A_j$ , откуда

$$S_j = V_j B_{\sigma(j)} \dots B_{\sigma^{l-2}(j)} B_j = B_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1} \dots B_{\sigma(j)}^{-1} B_{\sigma(j)} B_{\sigma^{l-2}(j)} B_j = B_j,$$

то есть  $S_j = B_j$ . Следовательно,  $R_j = A_j$ , для любого  $j = 1, \dots, k$ , откуда

$[\underbrace{\bar{\mathbf{A}} \mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{l-1}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{A}$ , а это означает, что  $\bar{\mathbf{A}}$  косой элемент для  $\mathbf{A}$ . Предложение доказано.

## 5 СЛЕДСТВИЯ

Если  $d$  – порядок подстановки  $\sigma$  из  $S_k$ , то из теоремы 4.2 вытекает

**5.1 Следствие.** Пусть  $P$  – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma \in S_k$  порядка  $d$ ,  $\mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$ ,  $\mathbf{F}$  – подгруппа группы  $\mathbf{GL}_\mu(P)$ . Тогда множество  $\mathbf{F}^{(\mu)}$  замкнуто относительно  $(d+1)$ -арной операции  $[ ]_{d+1, \sigma, k}$  и универсальная алгебра  $\langle \mathbf{F}^{(\mu)}, [ ]_{d+1, \sigma, k} \rangle$  является  $(d+1)$ -арной группой, изоморфной  $(d+1)$ -арной группе  $\langle \mathbf{F}^k, [ ]_{d+1, \sigma, k} \rangle$ .

Считая в следствии 5.1  $\sigma$  циклом длины  $k$  из  $S_k$  получим

**5.2 Следствие.** Пусть  $P$  – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с циклом  $\sigma \in S_k$  длины  $k$ ,  $\mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$ ,  $\mathbf{F}$  – подгруппа группы  $\mathbf{GL}_\mu(P)$ . Тогда множество  $\mathbf{F}^{(\mu)}$  замкнуто относительно  $(k+1)$ -арной операции  $[ ]_{k+1, \sigma, k}$  и универсальная алгебра  $\langle \mathbf{F}^{(\mu)}, [ ]_{k+1, \sigma, k} \rangle$  является  $(k+1)$ -арной группой, изоморфной  $(k+1)$ -арной группе  $\langle \mathbf{F}^k, [ ]_{k+1, \sigma, k} \rangle$ .

Полагая в следствии 5.2  $\sigma = (12 \dots k)$ , получим

**5.3 Следствие.** Пусть  $P$  – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с циклом  $(12 \dots k) \in S_k$ ,  $\mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$ ,  $\mathbf{F}$  – подгруппа группы  $\mathbf{GL}_\mu(P)$ . Тогда множество  $\mathbf{F}^{(\mu)}$  замкнуто относительно  $(k+1)$ -арной операции  $[ ]_{k+1, (12 \dots k), k}$  и универсальная алгебра  $\langle \mathbf{F}^{(\mu)}, [ ]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$  является  $(k+1)$ -арной группой, изоморфной  $(k+1)$ -арной группе  $\langle \mathbf{F}^k, [ ]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ .

Полагая в следствии 5.3  $k = 2$ ,  $m_1 = n_2 = m$ ,  $n_1 = m_2 = n$ , получим

**5.4 Следствие.** Пусть  $P$  – ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей,  $\mu \leq \min\{m, n\}$ ,  $\mathbf{F}$  – подгруппа группы  $\mathbf{GL}_\mu(P)$ . Тогда множество

$F^{(\mu)}$  замкнуто относительно тернарной операции  $[ ]_{3,(12),2}$  а универсальная алгебра  $\langle FF^{(\mu)}, [ ]_{3,(12),2} \rangle$  является тернарной группой, изоморфной тернарной группе  $\langle F^2, [ ]_{3,(12),2} \rangle$ .

Полагая в теореме 4.2  $F = GL_\mu(P)$ , получим

**5.5 Следствие.** Пусть  $P$  – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma \in S_k$  удовлетворяющей условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $\mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$ . Тогда множество  $GL_\mu^{(\mu)}(P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l,\sigma,k}$  а универсальная алгебра  $\langle GL_\mu^{(\mu)}(P), [ ]_{l,\sigma,k} \rangle$  является  $l$ -арной группой, изоморфной  $l$ -арной группе  $\langle GL_\mu^k(P), [ ]_{l,\sigma,k} \rangle$ .

Полагая в теореме 4.2  $F = SL_\mu(P)$ , получим

**5.6 Следствие.** Пусть  $P$  – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma \in S_k$  удовлетворяющей условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $\mu \leq \min\{m_1, n_1, \dots, m_k, n_k\}$ . Тогда множество  $SL_\mu^{(\mu)}(P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l,\sigma,k}$  а универсальная алгебра  $\langle SL_\mu^{(\mu)}(P), [ ]_{l,\sigma,k} \rangle$  является  $l$ -арной группой, изоморфной  $l$ -арной группе  $\langle SL_\mu^k(P), [ ]_{l,\sigma,k} \rangle$ .

Для каждого из следствий 5.5 и 5.6 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 5.1 – 5.4.

Теорема 4.2 и следствия 5.1 – 5.6 устанавливают существование полиадических групп вектор-матриц, компоненты которых не обязаны быть квадратными матрицами, что является положительным ответом на вопрос, сформулированный в конце введения. Однако все эти полиадические группы изоморфны полиадическим группам вектор-матриц, у которых все компоненты являются квадратными вектор-матрицами одного и того же порядка. Поэтому закономерен следующий вопрос: *существуют ли полиадические группы вектор матриц, не изоморфные полиадическим группам вектор-матриц с квадратными компонентами?*

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002).

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А.М. Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2011. – № 1(37), Серія В. – С. 30–37.
2. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208–350.
3. Гальмак, А.М.  $\sigma$ -Согласованные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2011. – № 2(38), Серія В. – С. 30–37.
4. Гальмак, А.М. Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1(6). – С. 52–56.
5. Гальмак, А.М. Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2(7). – С. 1–5.

6. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
7. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
8. Слипенко, А.К. Про матрични оперативи / А.К. Слипенко // Доповіді АН УССР. – 1975. – А, №3. – С. 207–208.
9. Слипенко, А.К. Абстрактная характеристизация матричных операторов / А.К. Слипенко // Український мат. журнал. – 1974. – Т. 26. – № 1. – С. 112–114.

Поступила в редакцию 26.08.2011 г.

УДК 511.42

*Д.В. КОЛЕДА, Н.В. САКОВИЧ*

## ЧИСЛО МНОГОЧЛЕНОВ НАД КОЛЬЦОМ ГАУССОВЫХ ЦЕЛЫХ, ИМЕЮЩИХ ПАРУ БЛИЗКИХ КОРНЕЙ

*Для полиномов от комплексной переменной над кольцом целых гауссовых чисел показано, что малые значения модуля производной встречаются достаточно редко.*

Пусть  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[i][x]$  многочлен степени  $n$ , а  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  – корни  $p$ . Далее  $p(x)$  будем записывать в виде  $p(x) = a_n(x - \alpha_1)\dots(x - \alpha_n)$ . Число

$$D(p) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \quad (1)$$

называется дискриминантом многочлена  $p(x)$ . Известно, что дискриминант – целочисленный многочлен от  $n+1$  переменных коэффициентов многочлена  $p(x)$ . Всюду  $\#M$  обозначает число элементов во множестве  $M$ , а  $\text{mes}_k M$  –  $k$ -мерную меру Лебега множества  $M \subset \mathbb{R}^d$  ( $k \leq d$ ). Будем использовать символ Виноградова  $\ll$ . Выражение  $f \ll g$  равносильно тому, что  $f \leq c_1 g$  для некоторой постоянной  $c_1$ , которая зависит только от степени  $n$ . Выражение  $f \asymp g$  означает, что  $g \ll f \ll g$ .

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ . Для норм будем использовать следующие обозначения

$$\|x\|_m = \left( \sum_{i=1}^d |x_i|^m \right)^{\frac{1}{m}}, \quad m \geq 1,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|.$$

Евклидову норму  $\|\cdot\|_2$  для краткости будем обозначать просто  $\|\cdot\|$ .

Поле  $\mathbb{C}$  будем рассматривать как векторное пространство над  $\mathbb{R}$  размерности  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ .

Высоту многочлена  $p \in \mathbb{C}[x]$  определим как  $H(p) = \max_{0 \leq i \leq n} \|a_i\|$ , где  $\|\cdot\|$  – некоторая норма комплексного числа, рассматриваемого как вектор из  $\mathbb{R}^2$ . Удобно выбрать норму  $\|\cdot\|_\infty$ , т.е. для  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $\|z\| = \max\{|x|, |y|\}$ .

Многочлены  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$  будем отождествлять с векторами коэффициентов  $p = (a_n, \dots, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^{2n+2}$  (здесь учитывается, что каждый коэффициент многочлена – вектор из  $\mathbb{R}^2$ ). В этих обозначениях  $H(p) = \|p\|_\infty$ .

Пусть заданы  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q > 1$  и  $\delta \in (0, 1)$ . Определим следующие множества:

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{p(x) \in \mathbb{Z}[i][x] : \deg p \leq n, H(p) \leq Q\}, \quad (2)$$

$$\mathcal{F}_n(Q, \delta) = \{p(x) \in \mathcal{P}_n(Q) : \exists \alpha_1, \alpha_2 \mid \alpha_1 - \alpha_2 \mid \leq \delta\}. \quad (3)$$

Цель данной работы – оценить  $\#\mathcal{F}_n(Q, \delta)$ .

**Теорема 1.** Справедлива оценка

$$\#\mathcal{F}_n(Q, \delta) \ll Q^{2n+2} \delta + Q^{2n+1}. \quad (4)$$

Для доказательства теоремы 1 потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Оценим расстояние от точки  $p \in \mathbb{R}^{2n+2}$  до ближайшей точки поверхности  $D(p) = 0$ .

**Теорема 2.** Пусть у многочлена  $p(x) \in \mathbb{C}[x]$  корни  $\alpha_1, \alpha_2$  таковы, что

$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq \delta < 1$ . Тогда существует многочлен  $q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{C}[x]$ , такой, что  $D(q) = 0$  и

$$\|p - q\| \ll H(p)\delta, \quad (5)$$

где  $q = (b_n, \dots, b_1, b_0)$ . При этом  $b_n = a_n$ ,  $b_{n-1} = a_{n-1}$ .

Доказательство. Пусть  $\rho := (\alpha_1 - \alpha_2)/2$ .  $\rho \in \mathbb{C}$ ,  $|\rho| < \delta/2$ . Построим многочлен  $q(x) = b_n(x - \beta_1) \dots (x - \beta_n)$ . Выберем  $b_n = a_n$ , а корни определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 - \rho, \\ \beta_2 &= \alpha_2 + \rho, \\ \beta_i &= \alpha_i, \quad i = 3, \dots, n \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно,  $\beta_1 = \beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ .

Нетрудно видеть, что при таком выборе корней многочлена  $q(x)$  у него будут действительные коэффициенты, и  $b_{n-1} = a_{n-1}$ . Введем обозначения для симметрических функций

$$\sigma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (7)$$

Полагаем,  $\sigma_0(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ ,  $\sigma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$  при  $k < 0$  и при  $k > n$ .

Обозначим  $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$  – множество натуральных чисел от 1 до  $n$ . Пусть  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ .  $\alpha_{\mathcal{M}} = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$  – упорядоченный набор (вектор), где  $i_m \in \mathcal{M}$ ,  $m = 1, \dots, k$ , – различные элементы множества  $\mathcal{M}$ ,  $k = \#\mathcal{M}$ .

$$\sigma_k(\alpha_{\mathcal{M}}) = \sum_{\substack{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M} \\ \#\mathcal{I}=k}} \prod_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i.$$

$$\frac{\partial \sigma_k(\alpha_{\mathcal{M}})}{\partial \alpha_i} = \begin{cases} \sigma_{k-1}(\alpha_{\mathcal{M} \setminus \{i\}}), & i \in \mathcal{M}, \\ 0, & i \notin \mathcal{M}. \end{cases} \quad (8)$$

С учетом введенных обозначений

$$a_k = a_n \sigma_{n-k}(\alpha_{\mathcal{N}}), \quad k = 0, \dots, n. \quad (9)$$

Чтобы оценить насколько отличаются коэффициенты рассмотрим разность

$$\sigma_k(\alpha_{\mathcal{N}} + \Delta \alpha_{\mathcal{N}}) - \sigma_k(\alpha_{\mathcal{N}}) = \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{N} \\ \#\mathcal{I}=m}} \sigma_{k-m}(\alpha_{\mathcal{N} \setminus \mathcal{I}}) \prod_{i \in \mathcal{I}} \Delta \alpha_i, \quad (10)$$

где  $\Delta \alpha_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Оценим правую часть (10) сверху. Для этого понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.** (Фельдман [1]) Для любого набора корней  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_t}$ ,  $t \leq n$ ,  $i_k \neq i_l$  при  $k \neq l$  справедливо неравенство

$$|\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_t}| \leq (n+1)2^n \cdot \frac{H(p)}{|a_n(p)|}, \quad (11)$$

где  $a_n(p) = a_n$  – старший коэффициент многочлена  $p(x)$ ,  $H(p)$  – высота многочлена  $p(x)$ .

Из леммы Фельдмана следует

$$|\sigma_k(\alpha_{\mathcal{M}})| \ll \frac{H(p)}{|a_n(p)|} \quad \forall \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Полагая все  $|\Delta \alpha_i| < 1$ , получаем

$$|\sigma_k(\alpha_{\mathcal{N}} + \Delta \alpha_{\mathcal{N}}) - \sigma_k(\alpha_{\mathcal{N}})| \ll \frac{H}{|a_n|} \cdot \sum_{i \in \mathcal{N}} |\Delta \alpha_i|. \quad (12)$$

Из (6) следует  $|\Delta\alpha_i| < \delta$ , что влечет

$$|a_k - b_k| \ll H(p)\delta, \quad k = 0, \dots, n.$$

Это доказывает теорему.

Пусть

$$W_n = W_n(\delta) := \{p \in \mathbb{C}[x] : \deg p \leq n, H(p) \leq 1, \exists \alpha_1, \alpha_2 \mid \alpha_1 - \alpha_2 \leq \delta\},$$

$$G_n(r) := \{p \in \mathbb{C}[x] : \deg p \leq n, H(p) \leq 1, \exists q \in \mathbb{C}[x], D(q) = 0, \|p - q\| \leq r\}.$$

**Следствие 1.** Существует постоянная  $c(n)$ , такая, что

$$W_n(\delta) \subseteq G_n(c(n)\delta). \quad (13)$$

Рассмотрим решетку в  $\mathbb{R}^d$

$$L_d(Q) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : x_i = \frac{a_i}{Q}, a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, d \right\}.$$

Обозначим открытый  $d$ -мерный куб с центром в точке  $x = (x_1, \dots, x_d)$  и длиной стороны  $Q^{-1}$

$$\pi(x, Q) := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : y_i = x_i + \frac{t_i}{Q}, t_i \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), i = 1, \dots, d \right\}.$$

Пусть  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$  – ограниченная область,  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < r\}$  – шар радиуса  $r$  с центром в  $x$ .

Обозначим покрытие области  $\mathcal{D}$  шарами радиуса  $r$

$$\mathcal{D}_B(r) = \bigcup_{x \in \mathcal{D}} B(x, r).$$

Введем обозначения

$$\Lambda(Q) = L_d(Q) \cap \mathcal{D},$$

$$\mathcal{D}^*(Q) = \bigcup_{x \in \Lambda(Q)} \pi(x, Q).$$

Очевидно,  $\mathcal{D}^*(Q) \subseteq \mathcal{D}_B(\sqrt{d}/Q)$ , что влечет  $\text{mes}_d \mathcal{D}^*(Q) \leq \text{mes}_d \mathcal{D}_B(\sqrt{d}/Q)$ .

Принимая во внимание соотношение  $\text{mes}_d \mathcal{D}^*(Q) = Q^{-d} \cdot \# \Lambda(Q)$ , получаем:

**Теорема 3.** Число точек решетки  $L_d(Q)$  в области  $\mathcal{D}$  удовлетворяет неравенству

$$\#\Lambda(Q) \leq Q^d \cdot \text{mes}_d \mathcal{D}_B(\sqrt{d}/Q), \quad (14)$$

где  $\mathcal{D}_B(r)$  – покрытие множества  $\mathcal{D}$  радиуса  $r$ .

Полагаем  $d = 2n+2$  и  $\mathcal{D} = W_n(\delta)$ . Легко заметить, что  $\#\Lambda(Q) = \#\mathcal{F}_n(Q, \delta)$ . Из следствия теоремы 2 и теоремы 3 получаем

$$\#\mathcal{F}_n(Q, \delta) \leq Q^{2n+2} \cdot \text{mes}_{2n+2} G_n(c(n)\delta + \sqrt{2n+2}/Q).$$

При достаточно малом  $\delta$  и большом  $Q$  получаем

$$\text{mes}_{2n+2} G_n(c(n)\delta + \sqrt{2n+2}/Q) = S \cdot (c(n)\delta + \sqrt{2n+2}/Q) + o(\delta + Q^{-1}) \ll \delta + Q^{-1},$$

где  $S = \text{mes}_{2n+1}\{p \in \mathbb{R}^{2n+2} : \|p\|_\infty \leq 1, D(p) = 0\}$ . Теорема 1 доказана.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Фельдман Н.И.** Приближение некоторых трансцендентных чисел / Н.И. Фельдман // Известия Акад. Наук СССР. Сер. матем. – 19(1951). – С. 53–74.

Поступила в редакцию 19.07.2012 г.

УДК 517.925.42

*И.Н. СИДОРЕНКО*

## О СУЩЕСТВОВАНИИ ДВУКРАТНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА В СИСТЕМЕ ЛЬЕНАРА

Одной из фундаментальных задач качественной теории является задача нахождения максимального числа предельных циклов с учетом их взаимного расположения. При этом актуальной является задача нахождения систем, у которых возможны кратные предельные циклы. В связи с этой задачей рассматривается система Льенара с линейной силой упругости и потенциалом силы трения в виде полинома пятой степени. Целью работы является получение оценки параметра, при котором рассматриваемая система имеет двукратный предельный цикл. Предложен алгоритм определения верхней и нижней границ значений параметра системы Льенара, при котором наблюдается бифуркация рождения (исчезновения) двукратного предельного цикла.

### Введение

Задача оценки максимального числа предельных циклов известна как вторая часть шестнадцатой проблемы Гильберта [1]. Методы качественного исследования динамических систем, использующие теорию бифуркаций для получения полной картины должны определить: множество всех бифуркационных значений параметров (или доказать их отсутствие); область значений этих параметров; качественную структуру динамической системы при каких-либо частных значениях параметров. На основании этих сведений, используя соображения непрерывности, можно определить качественную структуру для любой точки во всем пространстве параметров изучаемой системы [2]. Однако использование теории бифуркаций не всегда является эффективным. В простейших случаях, связанных с оценкой числа предельных циклов, рождающихся из особой

точки типа негрубого фокуса или от петли сепаратрисы, теория бифуркаций дает ответ, исходя из условий устойчивости фокуса или устойчивости петли и характера поворота векторного поля системы при изменении параметра. В тех случаях, когда наблюдаются сложные бифуркации, требующие сведения о глобальном поведении траекторий, связанных с вопросами существования сепаратрис, идущих из седла в седло, а также рождением полуустойчивых предельных циклов из сгущения траекторий, однозначный ответ удается получить очень редко. Обычно в таких случаях удается оценить количество предельных циклов с точностью до их четного числа.

Целью работы является получение оценки параметра, при котором система Льенара пятой степени с линейной восстанавливающей силой имеет двукратный предельный цикл.

## 2. Предварительные результаты

Для точной оценки числа предельных циклов используется функция Дюлака-Черкаса.

**Определение.** Функция  $\Psi(x, y) \in C^1(\Omega)$  называется функцией Дюлака-Черкаса для системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

$$P(x, y), Q(x, y) \in C^1(\Omega),$$

в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , если существует такое действительное число  $k \neq 0$ , что справедливо неравенство

$$\Phi = k\Psi \operatorname{div} \varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0 (< 0), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \varphi = (P, Q). \quad (2)$$

Справедлива

**Теорема 1.[3,4]** Пусть в односвязной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  система (1) имеет единственную особую точку – антиседло  $A$ ,  $\operatorname{div} \varphi(A) \neq 0$ ,  $\varphi = (P, Q)$ . Пусть также для системы (1) существует функция Дюлака-Черкаса  $\Psi(x, y) \in C^1(\Omega)$ , при этом уравнение  $\Psi(x, y) = 0$  определяет гнездо из  $q$  вложенных друг в друга овалов. Тогда в каждой из  $q-1$  двусвязных областей, ограниченных соседними овалами, система (1) имеет точно один предельный цикл, а в целом в области  $\Omega$  не более  $q$  предельных циклов.

Известно [4], что для системы Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) \quad (3)$$

в полосе  $\Omega_x = \{(x, y) : x \in [\alpha, \beta], y \in \mathbb{R}\}$  функцию Дюлака-Черкаса  $\Psi$  всегда можно найти в виде многочлена переменной  $y$  степени  $n-1$ , т.е.

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \Psi_i(x) y^{n-i}$$

такую, что соответствующая функция  $\Phi$  из (2) зависит только от  $x$ . При этом функция  $\Phi$  является линейной комбинацией функций переменной  $x$ ,

$$\Phi = \Phi(x, C) = \sum_{j=1}^n C_j \Phi_j(x), \quad C = (C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (4)$$

Для существования положительной на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функции  $\Phi$  в семействе (4) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$L = \max_{|C_j| \leq 1} \min_{x \in [\alpha, \beta]} \Phi(x, C) > 0. \quad (5)$$

Максимин (5) можно приближенно найти, решив соответствующую задачу оптимизации

$$\Phi(x_i, C) \geq L, \quad L \rightarrow \max, \quad |C_j| \leq 1 \quad (6)$$

на сетке узлов  $x_i \in [\alpha, \beta], i = \overline{1, N},$  сведя ее к стандартной задаче линейного программирования. Выбор сетки узлов, числа  $k < 0$  и числа  $n$  осуществляется в соответствии с конкретной задачей.

### Основная часть

#### 3. Оценка бифуркационного значения параметра

Рассмотрим классическую систему Льенара пятой степени

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon(x^5 + a_3x^3 + a_1x), \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad (7)$$

где  $\varepsilon > 0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ . В работе [5] показано, что максимальное число предельных циклов для системы (7) равно двум. В работе [6] предложены критерии существования и отсутствия предельных циклов у систем Льенара (3) с линейной восстанавливающей силой ( $g(x) = x$ ) и потенциалом трения в виде полинома, в котором отсутствуют мономы с четными степенями. В частности, в работе [6] доказана

**Теорема 2. [6]** Система (7) при  $\varepsilon = 1$  и  $a_3 = 2.17$  имеет точно два предельных цикла.

Отметим некоторые общие результаты известные для системы Льенара (7), полученные при помощи исследования нулей интегралов Абеля:

1) Для  $\varepsilon > 0$  в работе [5] доказано, что система (7) имеет два предельных цикла, если  $a_3 < -2.5.$

2) Альсхольм [7] доказал, что при  $a_3 < -2.3178$  система имеет два предельных цикла.

3) Одани [8] уточнил результат Альсхольма:  $a_3 < -\sqrt{5} \approx 2.23607.$

Рассмотрим систему Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y - \varepsilon(x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x), \quad \frac{dy}{dt} = -x \quad (8)$$

и применим для ее исследования метод функций Дюлака-Черкаса. Параметр  $a_3$  в системе (8) является параметром, поворачивающим векторное поле. Получим оценки для параметра  $a_3$ , при котором система (8) имеет двукратный предельный цикл.

Зафиксируем параметры  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1/2$ . Тогда для системы (8) можно определить функцию Андronова-Хопфа  $a_3 = AH(x)$ , равную тому значению параметра  $a_3$ , при котором система (8) имеет предельный цикл, проходящий через точку  $(x, 0)$ . Используя гипотезу Смейла для рассматриваемой системы, можно определить прогнозную функцию Андronова-Хопфа  $a_3 = AH_p(x)$  [9], равную тому значению параметра  $a_3$ , при котором нечетная часть функции  $F(x)$  имеет положительный корень. Прогнозная функция Андronова-Хопфа в известных ситуациях дает нужное приближение функции  $a_3 = AH(x)$  (рисунок 1) и определяется уравнением

$$a_3 = \frac{1-x^4}{x^2}.$$

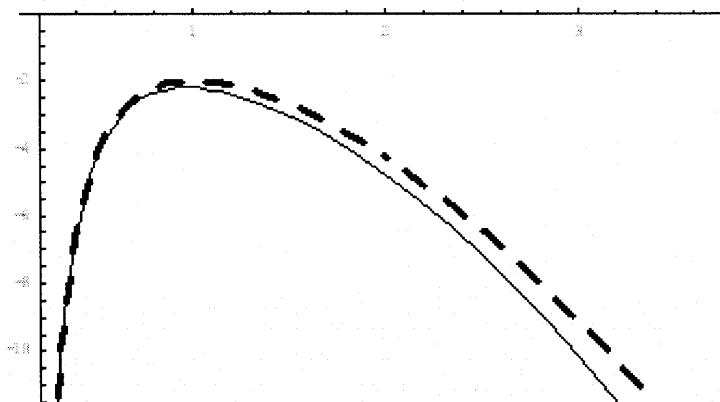


Рис. 1. Реальная и прогнозная (изображена пунктиром) функции Андronова-Хопфа для системы (8)

Для решения поставленной задачи, выберем значение параметра  $a_3$ , при котором система (8) имеет два предельных цикла. Такое значение можно выбрать, используя построенную функцию Андronова-Хопфа (рисунок 1). Далее увеличиваем значение параметра  $a_3$  с некоторым шагом до тех пор, пока для доказательства существования двух предельных циклов применима функция Дюлака-Черкаса. В результате получается нижняя граница для значения бифуркационного параметра  $a_3$ . Затем выбираем значения  $a_3$  таким образом, чтобы система (8) не имела предельных циклов и уменьшаем, его до тех пор, пока для доказательства отсутствия предельных циклов у рассматриваемой системы применим метод функций Дюлака-Черкаса. Полученное значение будет являться верхней границей для значения параметра  $a_3$ .

Справедлива

**Теорема 3.** Система (8) имеет точно два предельных цикла при  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1/2$ ,  $a_3 = -2.13$ ,  $\varepsilon = 0.1$  в полосе  $\Omega_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-2, 2], y \in \mathbb{R}\}$ .

**Доказательство.** Будем искать функции  $\Phi(x, C)$ ,  $\Psi(x, y, C)$  при  $n = 14$ ,  $k = -5/4$  на равномерной сетке  $x_i \in [-2, 2]$ ,  $i = \overline{1, 901}$ . Для этого решим соответствующую задачу оптимизации

$$\Phi(x_i, C) \geq L, \quad L \rightarrow \max, \quad |C_j| \leq 1, \quad i = \overline{1, 901}, \quad j = \overline{1, 14}. \quad (9)$$

В результате найдем решение задачи (9)  $(C^*, L^*)$ , при этом  $L^* \approx 0.000036 > 0$ , т.е. функция  $\Phi(x, C^*)$  положительна при  $x \in [-2; 2]$ , а уравнение  $\Psi(x, y, C^*) = 0$  определяет в этой области два овала (рисунок 2). Таким образом, из теоремы 1 следует, что система (8) имеет точно два предельных цикла в полосе  $x \in [-2; 2]$ .

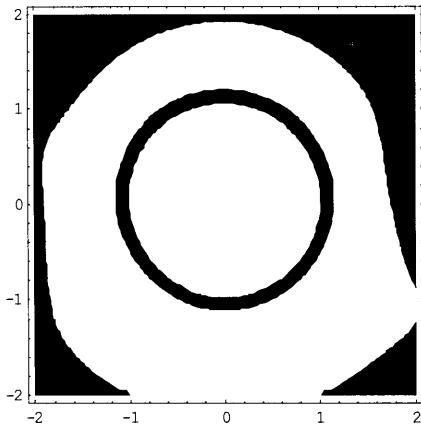


Рис. 2. Овалы кривой  $\Psi = 0$  для системы (8)

при  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1/2$ ,  $a_3 = -2.13$ ,  $\varepsilon = 0.1$

**Теорема 4.** Система (8) не имеет предельных циклов при  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1/2$ ,  $a_3 = -2.05$ ,  $\varepsilon = 0.1$ .

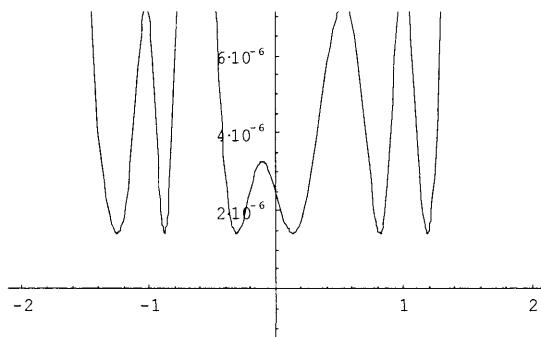


Рис. 3. График функции

Для доказательства отсутствия предельных циклов ищем функции  $\Phi(x, C)$ ,  $\Psi(x, y, C)$  при  $n = 9$ ,  $k = -1$ . Решая задачу (6) на равномерной сетке  $x_i \in [-2; 2]$ ,  $i = 1, 1001$ , получаем, что  $\Phi(x, C^*) > 0$ , для всех  $x$ , а уравнение  $\Psi(x, y, C) = 0$  не определяет овалов во всей плоскости, что по теореме 1 доказывает отсутствие предельных циклов у рассматриваемой системы.

**Теорема 5.** Значение параметра  $a_3$ , при котором в системе Льенара (8) с  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  происходит бифуркация рождения (исчезновения) двукратного предельного цикла принадлежит промежутку  $(-2.05, -2.03)$ .

Доказательство теоремы следует из теорем 3, 4 и предложенного алгоритма.

### Заключение

Следует отметить, что применяемые в работах [5 – 8] методы и полученные критерии справедливы только в случае, если потенциал силы трения  $F(x)$  является нечетным полиномом 5-й степени, т.е. только для семейств систем Льенара (7). В то время, как метод функций Дюлака-Черкаса позволяет производить оценку числа предельных циклов и бифуркационных значений параметров систем Льенара в случае, когда  $F(x)$  является произвольным полиномом 5-й степени.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Hilbert, D.* Mathematische probleme. English transl. / D. Hilbert / D. Bull. Amer. Math. Soc. – 1902. – Vol. 8. – P. 437–479.
2. *Баутин, Н.Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М. : Наука, 1976. – 496 с.
3. *Черкас, Л.А.* Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л.А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 5. – С. 689–699.
4. *Гринь, А.А.* Функция Дюлака для систем Льенара / А.А. Гринь, Л.А. Черкас // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2000. – № 4. – С. 29–38.
5. *Рычков, Г.С.* Максимальное число предельных циклов системы  $\dot{y} = -x, \dot{x} = y - \sum_{i=0}^2 a_i x^{2i+1}$  равно двум / Г.С. Рычков // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11. – С. 155–171.
6. *Gasul, A.* New criteria for the existence and non-existence of limit cycles in Lienard differential systems / A. Gasul, H. Giacomini, J. Llibre // Dynamical Systems: An International Journal. – 2009. – V. 24. – N. 2. – P. 171–185.
7. *Alsholm, P.* Existence of limit cycles for generalized Lienard equations / P. Alsholm // J. Math. Anal. Appl. – 1992. – V. 171. – P. 242–255.
8. *Odany, K.* Existence of exactly N periodic solutions for Lienard systems / K. Odany // Funkcialaj Ekvacioj. – 1996. – V. 39. – P. 217–234.
9. *Сидоренко, И.Н.* Предельные циклы кубической системы Льенара с квадратичной функцией трения / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 2008. – № 2(44). – С. 217–221.

Поступила в редакцию 03.12.2012 г.

УДК 550.388.2

A.V. ВОЛОСЕВИЧ, Ю.Ф. ЗАРНИЦКИЙ

## ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ФАРЛЕЙ- БУНЕМАНОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

*На основе магнитогидродинамической системы уравнений рассматривается теоретическая модель формирования неоднородностей электронной плотности в авроральной Е-области ионосферы. Получены законы дисперсии и инкременты нарастания волн для реальных физических условий. Основное внимание уделяется исследованию дисперсионных свойств ФБ волн, в области срыва неустойчивости, где дисперсионные соотношения становятся нелинейными. Показано, что в высокочастотной части спектра неустойчивости закон дисперсии становится нелинейным, что приводит к стабилизации неустойчивости.*

### Введение

В экспериментах по авроральному рассеянию радиоволн в Е-области ионосферы были обнаружены интенсивные электростатические структуры, связанные с возмущениями фоновой электронной плотности. Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования этого уникального явления, связанного с полярными сияниями и магнитными бурями, получило название "радиоаврора". В результате проведенного исследования на протяжении более 50 лет [1-8] были выявлены основные особенности радиоотражений: их ракурсная чувствительность, частотный диапазон генерации волн, интервал фазовых скоростей движения этих неоднородностей, а также были определены области параметрического пространства (высотная, частотная и азимутальная зависимость), в котором возникают неоднородности.

Основой большинства теоретических и численных моделей является предположение о возникновении плазменных неустойчивостей в Е-области авроральной ионосферы. В этих работах предполагалось, что основной причиной возбуждения неустойчивостей является протекание холловских токов в замагниченной слабоионизированной плазме, в высотной области ионосферы 95-120 км, т.е. там, где выполняются условия замагниченности для электронов  $\omega_{Be} \gg v_e$  и незамагниченности для ионов  $\omega_{Bi} \ll v_i$ . ( $\omega_{Be}$ ,  $\omega_{Bi}$  – гирочастоты электронов, ионов,  $v_e$ ,  $v_i$  – частоты столкновений электронов, ионов с нейтралами). Такая неустойчивость известна как модифицированная двухпотоковая неустойчивость или Фарлей-Бунемановская (ФБ) неустойчивость в слабоионизированной плазме и изучалась в работах [1-5]. В линейной теории определялись пороговые значения электрического поля для возбуждения неустойчивости, фазовые скорости возбуждаемых ФБ волн. Для стабилизации этой неустойчивости исследовались различные нелиней-

ные механизмы: квазилинейное ограничение амплитуды за счет турбулентного нагрева, нелинейное взаимодействие волн, наличие эффективных столкновений [4–7]. Были предприняты многочисленные попытки согласовать выводы линейной и нелинейной теории с экспериментальными данными радарных и ракетных экспериментов. Однако рассчитанные на основе этих теорий диапазоны частот неустойчивых волн, фазовых скоростей, ракурсных и азимутальных углов, а также интервал высот ионосферы во многих случаях противоречили результатам экспериментального исследования аврорального рассеяния радиоволн и не соответствовали, как линейным, так и нелинейным теориям. Например, в экспериментах было обнаружено:

- а) зависимость фазовой скорости неустойчивых ФБ волн от дрейфовой скорости электронов  $\vec{V}_0 = [\vec{E}, \vec{B}_0]/B^2$  не являлась линейной, а предельная фазовая скорость приблизительно совпадала со скоростью звука в плазме  $c_s^2 = k_b(T_e + T_i)/m_i$  – (где  $T_e, T_i$  – температура электронов, ионов,  $m_i$  – масса иона и  $k_b$  – постоянная Больцмана);
- в) не подтверждалась сильная ракурсная чувствительность, предсказанная теорией, трудно было объяснить наблюдение радиоотражений с ракурсными углами вплоть до  $14^\circ$ ;
- с) частотный диапазон возбуждаемых волн не соответствовал линейной теории, были обнаружены радиоотражения с частотами до 3000 МГц.

Таким образом, несмотря на успехи известных теоретических моделей, из результатов экспериментального исследования механизмов формирования авроральных неоднородностей следует, что существуют значительные противоречия и трудности при интерпретации экспериментальных данных по авроральному рассеянию радиоволн.

Данная работа посвящена обобщению известных линейных теоретических моделей ФБ неустойчивостей применительно к реальным физическим условиям в ионосфере. Особое внимание уделяется сравнению простых гидродинамических моделей, которые допускают аналитическое решение, с кинетическими моделями [2, 3, 5, 7, 8]. Основной проблемой теоретических моделей является исследование дисперсионных соотношений ФБ волн, которые определяют эффективность нелинейных механизмов стабилизации ФБ неустойчивости.

### Основная часть

Ниже исследуем возбуждение ФВ неустойчивости в рамках магнитогидродинамической МГД модели. Заметим, что наиболее точное решение проблемы дает рассмотрение кинетической теории движения заряженных частиц совместно с системой уравнений для электростатического поля. Эта теория рассматривалась впервые в работе [2–5], а также в работах с использованием метода компьютерного моделирования [2, 3]. Однако при таком подходе не удается в аналитической форме определить закон дисперсии, условия нарастания волн, а также выяснить физи-

ческие механизмы формирования нелинейных электростатических структур в столкновительной ионосферной плазме. Эти вопросы особенно важны для интерпретации известных экспериментальных результатов по авроральному рассеянию радиоволн.

Ниже рассмотрим простую гидродинамическую модель и ее аналитическое решение и сравним его с результатами, полученными в рамках кинетической модели.

В общем случае запишем магнитогидродинамическую систему уравнений движения заряженных частиц сорта  $\alpha$ , где  $\alpha = i, e$  (ионы, электроны) совместно с уравнениями для электростатического поля.

$$m_\alpha \partial_t \vec{v}_\alpha = e_\alpha \left( \vec{E} + [\vec{v}_\alpha, \vec{B}] \right) - m_\alpha v_\alpha \vec{v}_\alpha - \frac{V_{T\alpha}^2 \nabla n_\alpha}{n_\alpha} m_\alpha, \quad (1)$$

$$\partial_t n_\alpha + \nabla (n_\alpha \vec{v}_\alpha) = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = e(n_i - n_e) / \epsilon_0, \quad (3)$$

где  $V_{T\alpha}^2 = k_b T_\alpha / m_\alpha$  – тепловая скорость частиц,  $k_b$  – постоянная Больцмана,  $\vec{v}_\alpha$ ,  $n_\alpha$ ,  $T_\alpha$ ,  $m_\alpha$  – скорость, масса, температура и плотность заряженных частиц сорта  $\alpha$ .  $v_i$ ,  $v_e$  – частоты столкновений ионов и электронов с нейтралами.

Далее рассмотрим динамику электронов и ионов применительно к физическим условиям в авроральной ионосфере.

### Динамика электронов

Динамика электронов описывается системой уравнений:

$$\partial_t \vec{v}_e + \vec{v}_e \nabla \vec{v}_e = e \nabla \varphi / m_e + \omega_{be} [\vec{v}_e, \vec{e}_z] - v_e \vec{v}_e - V_{Te}^2 \nabla N_e \quad (4)$$

$$\partial_t n_e + \nabla (n_e \vec{v}_e) = 0. \quad (5)$$

Здесь приняты следующие обозначения  $\omega_{be} = e B_0 / m_e$ ,  $v_e = k_b T_e / m_e$  – гирочастота, частота столкновений электронов с нейтралами, тепловая скорость,  $k_b$  – постоянная Больцмана,  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ ,  $\vec{e}_z$  – единичный вектор в направлении постоянного магнитного поля.

Пренебрегая нелинейными эффектами и проводя процедуру линеаризации, полагаем

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \quad \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}_1, \quad n = n_0 + n_1, \quad (6)$$

где  $\vec{E}_1, \vec{V}_1, n_1$  – величины I порядка малости пропорциональные  $\sim \exp(-i(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$  ( $\vec{k}$  – волновой вектор,  $\omega$  – частоты волны). Предполагаем, наличие потенциального электрического поля  $\vec{E} = -\nabla \varphi$ , ( $\varphi$  – электростатический потенциал), наличие постоянного магнитного поля  $\vec{B}_0$ , направленного вдоль оси Z и электрического поля  $\vec{E}_0$  ортогонального магнитному полю. Эти поля вызывают постоянный дрейф электронов

со скоростью  $V_0 = [E, B_0]/B^2$ , ортогонально этим постоянным полям. Постоянным дрейфом ионов пренебрегаем в силу их незамагниченности, т.е. в силу условий  $\omega_{Bi} \ll v_e$ . Заметим, что наличие постоянного дрейфа электронов является основной причиной возникновения неустойчивости. При этих предположениях из уравнения (4) можно определить скорость электронов, обусловленную возмущениями электронной плотности и электрического поля:

$$\vec{v}_\perp = \frac{\vec{k}_\perp v_{te}^2}{\tilde{\omega}_e} \frac{(N_e - \Phi)}{(1 - \frac{\omega_{be}^2}{\tilde{\omega}_e^2})} \quad (7)$$

$$\vec{v}_\parallel = \frac{\vec{k}_\parallel v_{te}^2}{\tilde{\omega}_e} (N_e - \Phi), \quad (8)$$

где  $\Phi = e\varphi/k_b T_e$  – нормированный электростатический потенциал,  $N = n_e/n_0$  – относительная электронная плотность,  $k_b$  – постоянная Больцмана,  $T_e$  – температура электронов  $\tilde{\omega}_e = \omega' + iv_e$ ,  $\omega' = \omega - kV_0$ .

Подставляя соотношения (7) и (8) в уравнение (5) получаем соотношение для относительной плотности электронов

$$N_e = \frac{\hat{k}^2 v_{te}^2}{\hat{k}^2 v_{te}^2 + \frac{\omega_{be}^2 \omega'}{\tilde{\omega}_e}} \Phi. \quad (9)$$

$$\text{Здесь принято обозначение } \hat{k}^2 = k^2 \left(1 + \frac{k_\parallel^2}{k^2} \left(1 - \frac{\omega_{be}^2}{\tilde{\omega}_e^2}\right)\right). \quad (10)$$

Заметим, что, полагая  $k_\parallel^2/k^2 = \sin^2 \psi$ , ( $\psi$  – ракурсный угол – угол между волновым вектором и плоскостью ортогональной направлению магнитного поля), можно сделать вывод, что параметр  $\hat{k}^2$  определяет ракурсную чувствительность радиоотражений, причем степень ракурсной чувствительности при постоянном магнитном поле зависит только от частоты столкновений электронов с нейтралами или эффективными столкновениями (концепция эффективных столкновений). Отсюда можно сделать вывод, что при увеличении частоты столкновений, например, за счет нагрева электронов, ракурсная чувствительность ослабевает и диапазон возможных ракурсных углов расширяется.

В частном случае при выполнении условия  $|\omega - \vec{k}\vec{V}_0| \ll v_e$  соотношение (10) сводится к виду

$$\hat{k}^2 = k^2 \left(1 + \frac{k_\parallel^2}{k^2} \frac{\omega_{be}^2}{v_e^2}\right) = k^2 \left(1 + \sin^2(\psi) \frac{\omega_{be}^2}{v_e^2}\right). \quad (11)$$

Соотношение (11) определяет характер ракурсной чувствительности.

### Динамика ионов

Динамику ионов будем рассматривать на основе упрощенной магнитогидродинамической модели, предполагая ионы незамагничеными в силу условия  $v_i \gg \omega_{bi}$ , которое приблизительно выполняется в Е-области ионосферы. В расчетных моделях не трудно учесть дрейф ионов. Однако будем учитывать наличие ионной динамической вязкости, и, как покажем ниже, этот эффект эквивалентен учету затухания Ландау на ионах в кинетической модели. Запишем МГД систему уравнений для ионов:

$$\partial_t \vec{v}_i + \vec{v}_i \nabla \vec{v}_i = -e \nabla \varphi / m_i - v_i \vec{v}_i - V_{Ti}^2 \nabla N_i - \eta_i \Delta v_i, \quad (12)$$

$$\partial_t n_i + \nabla (n_i \vec{v}_i) = 0. \quad (13)$$

Здесь обозначено:  $\eta_i$  – коэффициент динамической вязкости [5].

Из системы уравнений (12) и (13), используя метод малых возмущений (6), получаем соотношение для относительной ионной плотности  $N_i = n_i / n_0$ :

$$N_i = \frac{\tau k^2 v_{ii}^2}{\tilde{\omega}_i \omega - k^2 v_{ii}^2} \Phi, \quad (14)$$

$$\text{где } \tilde{\omega}_i = \omega + i\hat{\nu}_i, \quad \hat{\nu}_i = \nu_i (1 + \eta_i \frac{k^2 v_{ii}^2}{\nu_i^2}) \quad \tau = T_e / T_i. \quad (15)$$

Соотношение (14) можно записать в обобщенном виде, учитывая (15) и вводя функцию,  $f(\omega, \nu_i)$ , которая по-разному записывается в низкочастотной и высокочастотной области неустойчивости

$$N_i = \frac{\tau k^2 v_{ii}^2}{\omega(\omega + i\nu_i) - k^2 v_{ii}^2 f(\omega, \nu_i)} \Phi. \quad (16)$$

Для низкочастотной области  $\omega \ll \nu_i$  с точностью до величин первого порядка малости можно записать

$$f(\omega, \nu_i) = 1 - i\eta_i \omega / \nu_i. \quad (17)$$

Заметим, что используя кинетическую модель, рассмотренную в работах [8] для низкочастотной области можно определить эту функцию в виде  $f(\omega, \nu_i) = 1 - 2i\omega / \nu_i$ , что совпадает с определением (17) при  $\eta_i = 2$ .

Для высокочастотной области  $\omega \gg \nu_i$ , аналогично можно записать

$$f(\omega, \nu_i) = 3 - i\nu_i / \omega. \quad (18)$$

Отсюда можно заключить, что с точностью до численного коэффициента, который определяется коэффициентом вязкости ионов  $\eta_i$ , учет кинетических эффектов эквивалентен учету ионной вязкости в МГД модели. Это позволяет получить в аналитическом виде закон дисперсии для неустойчивых волн в рамках простой МГД модели, которая соответствует более точному кинетическому описанию. Но, следует учесть, что в

рамках этой модели не учитывается затухание Ландау на ионах для низкочастотных волн, а также затухание Ландау на электронах для высокочастотных волн. Этот факт нужно учитывать при вычислении инкремента нарастания волн, но его можно не учитывать при нахождении дисперсионных соотношений, так как закон дисперсии определяется при  $\omega \ll \gamma$  и обычно полагают  $\gamma = 0$ .

Также из анализа соотношений (16), (17) можно заключить, что при условии  $\omega \ll v_i$  мнимая часть выражения (16) (вклад ионов в относительную диэлектрическую проницаемость) много больше реальной  $\text{Im } \varepsilon_i \gg \text{Re } \varepsilon_i$ . Однако в высокочастотной области соотношений мнимой и реальной части, как это следует из (16), (18) противоположное  $\text{Im } N_i \ll \text{Re } N_i$ . Из этого можно сделать важный вывод, что закон дисперсии в низкочастотной и высокочастотной области генерации ФБ волн не должен совпадать, т.к. эти законы должны определяться из различных соотношений. Это будет показано ниже.

### Дисперсионные уравнения Фарлей-Бунемановских волн

Для возмущенных величин уравнение Пуассона для электростатического потенциала (3) можно записать в виде

$$1 + \frac{\omega_{0i}^2}{k^2 v_{ti}^2 \tau} (N_i - N_e) = 0, \quad (19)$$

где обозначено  $\omega_{0i}^2 = e^2 n_0 / \varepsilon_0 m_i$  – плазменная частота ионов, которая определяется фоновой плотностью заряженных частиц при условии квазинейтральности  $n_0 \approx n_{0i} \approx n_{0e}$ .  $\tau = T_e / T_i$  – степень неизотермичности плазмы. Заметим, что при условии квазинейтральности в плазме  $N_i \approx N_e$  зависимость параметров неустойчивости от фоновой плотности заряженных частиц исчезает. Поэтому можно заключить, что учет отклонения от условия квазинейтральности в плазме приводит к зависимости параметров неустойчивости, например,  $\omega, \gamma$  – частота, инкремент нарастания волн должен зависеть от фоновой плотности заряженных частиц.

Далее, подставляя соотношения (14) и (16) в уравнение (19), получаем дисперсионное уравнение для ФБ волн

$$1 + \frac{\omega_{oe}^2 \hat{k}^2 / k^2}{\hat{k}^2 v_{te}^2 + \frac{\omega_{be}^2 \omega'}{\tilde{\omega}_e}} + \frac{\omega_{oi}^2}{\omega(\omega + i\omega) - k^2 v_{ti}^2 f(\omega, v_i)} = 0, \quad (20)$$

где  $\omega_{0e}^2 = e^2 n_0 / \varepsilon_0 m_e$  – плазменная частота электронов.

Уравнение (18) можно записать в виде

$$1 + \frac{\omega_{oi}^2}{k^2 v_{ti}^2 \tau + \frac{\omega_g^2 \omega' k^2}{\tilde{\omega}_e \hat{k}_\perp^2}} + \frac{\omega_{oi}^2}{\omega(\omega + i\omega) - k^2 v_{ti}^2 f(\omega, v_i)} = 0. \quad (21)$$

В этом выражении введена нижнегибридная частота  $\omega_g^2 = \omega_{be}\omega_{bi}$ .

Если в дисперсионном уравнении (21) пренебречь единицей по сравнению с остальными членами, что соответствует, как указывалось выше, условию квазинейтральности в плазме, то получим простое дисперсионное уравнение, справедливое для низкочастотных волн. При этом исчезает зависимость параметров неустойчивости от равновесной плотности заряженных частиц. Однако как следует из работ [2, 7], такая зависимость существенна для высокочастотных волн. При частотах  $\omega \geq \omega_g$  неустойчивость срывается.

В общем случае уравнение (21) можно привести к виду:

$$\frac{\omega'(1+\delta+\beta)+iv_e(1+\delta)}{\omega'(k^2v_{ii}^2\tau+\beta\omega_{oi}^2)+iv_ek^2v_{ii}^2\tau} + \frac{1}{\omega(\omega+iv_i)-k^2v_{ii}^2f(\omega,v_i)} = 0. \quad (22)$$

Здесь приняты обозначения:  $\delta = k^2v_{ii}^2\tau/\omega_{oi}^2$ ,  $\beta = k\omega_g^2/k^2\omega_{oi}^2$ .

Заметим, что величины  $\delta$  и  $\beta$  учитывают зависимость параметров неустойчивости от фоновой плотности заряженных частиц и, следовательно, определят условия существования неустойчивости или частоту ее срыва.

Записанное дисперсионное уравнение в аналитическом виде позволяет определить закон дисперсии волн в общем случае, причем это уравнение соответствует кинетической модели.

Для удобства анализа представим частоту в виде  $\omega \Rightarrow \omega + i\gamma$ , (где  $\gamma \ll \omega$  – инкремент нарастания волн) и соотношение (22) запишем в виде

$$\varepsilon_e = \frac{\omega'(1+\delta+\beta)+i(v_e(1+\delta)+\gamma(1+\delta+\beta))}{\omega'(k^2v_{ii}^2\tau+\beta\omega_{oi}^2)+i(v_ek^2v_{ii}^2\tau+\gamma(k^2v_{ii}^2\tau+\beta\omega_{oi}^2))} \equiv \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}. \quad (23)$$

Здесь приняты обозначения:

$$a_1 = \omega'(1+\delta+\beta), \quad b_1 = v_e(1+\delta)+\gamma(1+\delta+\beta), \quad (24)$$

$$a_2 = \omega'(k^2v_{ii}^2\tau+\beta\omega_{oi}^2), \quad b_2 = v_ek^2v_{ii}^2\tau+\gamma(k^2v_{ii}^2\tau+\beta\omega_{oi}^2). \quad (25)$$

Соответственно для ионной части диэлектрической проницаемости из соотношения (21) получим

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\omega(\omega+iv_i)-k^2v_{ii}^2f(\omega,v_i)} \equiv \frac{1}{a+ib}. \quad (27)$$

Для низкочастотных волн  $\omega \ll v_i$ : получаем

$$a = \omega^2 - k^2v_{ii}^2 - v_i\gamma, \quad b = \omega\hat{v}, \quad \hat{v} = v_i(1+2\frac{k^2v_{ii}^2}{v_i^2}), \quad (28)$$

Соответственно для высокочастотных волн определим

$$a = \omega^2 - 3k^2v_u^2 - v_i\gamma, \quad b = \omega\hat{v}, \quad \hat{v} = \omega(v_i(1 + 2\frac{k^2v_u^2}{\omega^2}) + 2\gamma). \quad (29)$$

Соотношения (23)–(28) позволяют проанализировать условия возбуждения ФБ волн, исследовать закон дисперсии и инкремент нарастания волн как в низкочастотной области, которая традиционно используется при анализе экспериментальных данных, так и в высокочастотной.

Далее исследуем это уравнение отдельно для низкочастотных волн и высокочастотных волн.

### Низкочастотная неустойчивость ФБ волн

Для получения закона дисперсии и инкремента нарастания неустойчивых волн разделяем на реальную и мнимую части уравнение (22) и в принятых обозначениях (24), (25) и (28) запишем систему уравнений:

$$\begin{aligned} aa_1 - bb_1 &= a_2 \\ ab_1 + a_1b &= b_2 \end{aligned} \quad (30)$$

При выполнении условий  $\omega \ll v_i$  и  $|\omega - kv_0| \ll v_e$  можно положить  $a_1 = 0$  и записать закон дисперсии и инкремент нарастания низкочастотных волн в виде

$$\begin{aligned} \omega &= kV_0/(1 + \hat{R}), \quad \hat{R} = \frac{\hat{v}_e \hat{v}_i}{\omega_g^2}, \\ \hat{v}_e &= \frac{v_e}{(1 + \delta)} \frac{k^2}{k_\perp^2} \left(1 + \frac{k_\perp^2 v_u^2 \tau}{\omega_g^2}\right) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\gamma = \frac{\hat{R}}{(1 + \hat{R})\hat{v}_i^2} (\omega^2(1 + \delta) - k^2 c_s^2), \quad c_s^2 = v_u^2(1 + \tau). \quad (32)$$

Полученные соотношения (31) и (32) совпадают с используемыми в многочисленных работах [2-7] выражениями для закона дисперсии и инкремента нарастания неустойчивых волн. Поправки  $\delta = k^2 v_u^2 \tau / \omega_{0i}^2$  и  $k^2 v_u^2 / v_i^2$  в обобщенной МГД модели за счет учета ионной вязкости и отклонения от условия квазинейтральности в плазме соответствуют кинетическим поправкам. Заметим, что эти поправки для низкочастотной моды невелики. Это означает, что параметры неустойчивости для этой области не будут зависеть от фоновой электронной плотности, закон дисперсии будет почти линейным для масштабов волн  $k^2 \ll v_i^2 / v_u^2$ , например, для параметров ионосферы  $v_i = 2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $v_u = 300 \text{ m/s}$ , масштабы ФБ волн  $k = 6.6^{-1}/m$ , т.е. соответствуют метровым волнам  $\lambda \approx 1 \text{ m}$ .

Отметим ряд особенностей низкочастотной неустойчивости:

а) для моды, определенной соотношением (31), условие  $|\omega - kv_0| \ll v_e$ , хорошо выполняется.

- b) отсутствует зависимость от фоновой плотности заряженных частиц;
- c) срыв неустойчивости по частоте определяется параметром  $k^* = v_i / v_u$  с;
- d) из анализа соотношения (27) следует, что при  $\omega < v_i$  выполняется соотношение  $|Im \varepsilon_i| \gg |Re \varepsilon_i|$  и закон дисперсии определяется из условия  $Im \varepsilon_i = 0$  при  $\gamma = 0$ ;
- e) для линейного закона дисперсии фазовая скорость волн совпадает с групповой и пропорциональна дрейфовой скорости электронов –  $V_0$ . Однако в области срыва неустойчивости закон дисперсии носит нелинейный характер;
- f) поправки, определяемые параметром  $\delta$ , становятся существенными при масштабах  $k > \omega_{0i} / v_u \sqrt{\tau}$  и для выбранных параметров  $\omega_{0i} = 4 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ ,  $v_u \sqrt{\tau} = c_s = 350 \text{ m/c}$  получаем оценку  $k \approx 100 \text{ m}^{-1}$  или  $\lambda \sim 6 \text{ см}$ , что соответствует частотам радара  $f_r > 2400 \text{ МГц}$ . На более низких частотах радара эти поправки не существенны.

### Неустойчивость высокочастотных Фарлей-Бунемановских волн

Основная проблема возбуждения ФБ волн состоит в том, что с точки зрения линейной теории волны с законом дисперсии, определенным соотношением (31) вообще возбуждаться не могут при реальных скоростях дрейфа электронов. Будем считать высокочастотными волны, для которых выполняется соотношение  $\omega < v_i$ , или для моды с законом дисперсии  $\omega = kV_0 / (1 + \hat{R})$  при скоростях дрейфа 500-750 м/с могут возникать радиоотражения на частотах радара меньше 100 Мгц. Но в экспериментах были обнаружены радиоотражения на частотах до 1000-2000 Мгц. Таким образом, для высокочастотного диапазона при реальных условиях в ионосфере выполняется условие  $|Im \varepsilon_i| \ll |Re \varepsilon_i|$  и, закон дисперсии нужно определить из этого условия.

Также учтем, что частота порядка  $\omega = kc_s / \sqrt{1 + \delta}$ . Для такой высокочастотной моды соотношение  $|\omega - kV_0| \ll v_e$  не выполняется. Для частот радара больших 650 Мгц при значении  $V_0 / C_s = 3$ ; соответственно, для значения  $V_0 / C_s = 2$  частота радара 1360 Мгц.

Это приводит к тому, что для частотной области вблизи частоты среза мода  $\omega = kV_0 / (1 + \hat{R})$  переходит в моду порядка  $\omega = kc_s / \sqrt{1 + \delta}$ .

Заметим, что и для электронной диэлектрической проницаемости должно выполняться условие  $|Im \varepsilon_r| \ll |Re \varepsilon_r|$ , т.е. закон дисперсии должен определяться из условия  $Re \varepsilon_e = 0$  и дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} aa_1 - bb_1 &= a_2 \\ ab_1 + a_1 b &= b_2 \end{aligned} \quad (33)$$

Учитывая соотношения (24), (25), (28) и полагая  $\omega \rightarrow \omega + i\gamma$ , получаем систему двух уравнений для получения закона дисперсии  $\omega(k)$  и инкремента нарастания волн  $\gamma(k)$ :

$$\begin{aligned} \gamma[(\omega'(1+\delta+\beta)+\beta\omega)\nu_i/\nu_e+2\omega(1+\delta)]\nu_e = \\ \omega'[(1+\delta+\beta)(\omega^2-3k^2\hat{c}_s^2)-\omega_g^2]-\omega\nu_i\nu_e(1+\delta) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \gamma[\beta(\omega^2-3k^2v_{ii}^2)-\nu_i\nu_e(1+\delta)+2\omega\omega'(1+\delta+\beta)-k^2v_{ii}^2\tau-\omega_g^2] = \\ -\nu_e(1+\delta)(\omega^2-3k^2v_{ii}^2)-\omega\omega'\hat{\nu}_i(1+\delta+\beta)+\nu_e k^2 v_{ii}^2 \tau \end{aligned} \quad (35)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} \hat{c}_s^2 = v_{ii}^2(3+\tau/(1+\delta+\beta)), \quad \hat{\nu}_i = \nu_i(1+2k^2v_{ii}^2/\omega^2), \\ \delta = k^2v_{ii}^2\tau/\omega_{oi}^2, \quad \beta = \omega_g^2k^2/\omega_{oi}^2\hat{k}^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Определим закон дисперсии из уравнения (34) при условии  $\gamma = 0$ . Для простоты предположим, что выполняются соотношения  $k^2\hat{c}_s^2, \omega^2 \ll \omega_g^2$ . В этом случае закон дисперсии с точностью до поправки  $\delta$  совпадает с линейным законом дисперсии ФБ волн при отсутствии дисперсии:

$$\omega' = \omega - kV_0 = -\hat{R}\omega, \quad \hat{R} = \hat{\nu}_i\nu_e(1+\delta)/\omega_g^2. \quad (37)$$

Поправка  $\delta$  определяет зависимость дисперсии волн от фоновой электронной плотности. Заметим, что дисперсия волн проявляется на масштабах волновых чисел, которые определяются условием:  $k > k^* = \omega_{0i}/v_{ii}\sqrt{\tau}$ . Так для параметров  $\omega_{0i} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ ,  $v_{ii} \approx 300 \text{ m/s}$ ,  $\tau = 2$ ,  $k^* \approx 95 \text{ m}^{-1}$ , что соответствует частоте радара  $f_r \approx 23.87k = 2267 \text{ МГц}$ . Для выбранных параметров эта величина соответствует частоте срыва неустойчивости.

Если выполняется условие  $\omega\hat{\nu}_i\nu_e(1+\delta) \ll \omega'\omega_g^2$ , то из уравнения (34) при условии  $\gamma = 0$  получаем закон дисперсии

$$\omega^2 = k^2\hat{c}_s^2 + \omega_g^2, \quad (38)$$

здесь обозначено  $\hat{c}_s^2 = v_{ii}^2(3+\tau/(1+\delta+\beta))$ . Из этого соотношения следует, что частота неустойчивых волн может быть вблизи или выше нижнегибридной частоты и определяет частоту среза неустойчивости. Этот результат соответствует численным расчетам, полученным в работе [4]. Есть другая возможность определить закон дисперсии ФВ волн из уравнения (35) при условии  $\gamma = 0$ . В этом случае при условии  $\omega\omega'\hat{\nu}_i \ll \nu_e\omega^2$ , закон дисперсии определится:

$$\omega^2 = k^2\tilde{c}_s^2, \quad \tilde{c}_s^2 = v_{ii}^2(3+\tau/(1+\delta)). \quad (39)$$

В этом случае дисперсия обусловлена отклонением от условия квазинейтральности плазмы, т.е. параметром  $\delta$ . Инкремент нарастания волн для частот, определяемых законом дисперсии (37) и (38) и (39) определяется из уравнения (35). Численное исследование дисперсионных зави-

симостей, фазовых скоростей и инкрементов нарастания ФБ волн для ионосферной плазмы проведено в работе [8].

### Заключение

Традиционно при интерпретации экспериментальных данных по авторальному рассеянию радиоволн использовалась линейная теория ФБ неустойчивости в столкновительной ионосферной плазме. На основе этой теории делались выводы о пороговых значениях дрейфовой скорости электронов для возбуждения неустойчивости, рассчитывались фазовые скорости и закон дисперсии этих волн. Из этой теории следовало, что закон дисперсии является линейным (31)  $\omega = kV_0/(1+R)$ ,  $R = v_e v_i / \omega_g^2$ , фазовая скорость волн равна дрейфовой скорости электронов –  $V_0$  при условии  $R \ll 1$ . Однако эти результаты, как правило, противоречат экспериментальным данным. Основная проблема состоит в следующем: используемая теория соответствует низкочастотной моде волн  $\omega < v_i$  и применима для масштабов волновых чисел  $k \ll v_i / v_u$ , что при выбранных ионосферных параметрах соответствует частоте радара порядка 150 МГц ( $k = 6.3 m^{-1}$ ). Остается также открытым вопрос о пределах применимости простейшей линейной теории для  $\omega > v_i$ .

В данной работе рассмотрена обобщенная линейная теория при учете эффектов ионной вязкости, отклонения от условия квазинейтральности в плазме, учете инерции электронов. Показано, что учет затухания Ландау на ионах в кинетической модели, соответствует учету вязкости ионов. Кроме того, при исследовании динамики электронов в гидродинамической модели учтены члены, соответствующие инерции электронов. На основе рассмотренной обобщенной теории показано, что существует, по крайней мере, три моды ФБ волн. Одна из них представляет собой низкочастотную моду, которая при учете отклонения от квазинейтральности, соответствует модифицированной низкочастотной моде –  $\omega = kc_s / \sqrt{1+\delta}$ , причем волны обладают дисперсией, величина которой зависит от фоновой электронной плотности (параметр  $\delta$ ) и от степени неизотемичности (параметр  $\tau$ ). Другие две моды волн определяются соотношениями (38), (39) и также обладают нелинейной дисперсией. По существу, эти моды совпадают при условии  $kc_s \gg \omega_g$ .

Таким образом, из рассмотренной обобщенной теоретической модели можно сделать следующие выводы:

а) высокочастотная мода фарлей-бунемановских волн обладает нелинейной дисперсией, которая обусловлена эффектами ионной вязкости, неизотермичности, инерцией электронов и отклонением от квазинейтральности ионосферной плазмы;

б) нелинейная дисперсия ФБ волн существенна на высоких частотах и приводит к срыву неустойчивости, что происходит на масштабах волновых чисел  $k > \omega_g / c_s \approx 50 m^{-1}$  или частотах радара  $\geq 1200-2500$  МГц;

с) для высокочастотной моды  $|\omega - k\vec{V}_0| \geq v_e$ , что приводит к срыву неустойчивости в области высоких частот;

d) результаты, полученные аналитическим путем, совпадают с численными расчетами, проведенными в работе [2, 5, 7, 8].

Рассмотренная обобщенная теоретическая модель явилась основой для численного моделирования закона дисперсии, фазовой скорости и инкремента нарастания ФБ волн [8] применительно к реальным физическим условиям экспериментов по авроральному рассеянию радиоволн.

#### *СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ*

1. *Farley, D.T.* The equatorial E-region and its plasma instabilities: a tutorial / D.T. Farley // Ann.Geophys. – 2009. – Vol. 27. – P. 1509–1520.
2. *Lee, K.* High-frequency Hall current instability / K. Lee, C.F. Kennel, J.M. Kindel // Radio Science. – 1971. – Vol. 6. – N 2. – P. 209–213.
3. *Ya, S. Dimant.* Kinetic theory of low-frequency cross-field instability in a weakly ionized plasma / Ya.S. Dimant, R.N. Sudan // Phys. Plasmas. – 1995. – Vol. 2. – N 4. – P. 1157–1168.
4. *Volosevich, A.V.* Coherent nonlinear interaction of waves in collisional ionospheric plasma / A.V. Volosevich, C.-V. Meister // International Journal of Geomagnetism and Aeronomy. – 2002. – Vol. 3. – N 2. – P. 151–156.
5. *Gershman, B.N.* Wave phenomena in the ionosphere / B.N. Gershman, L.M. Erukhimov and Yu.Ya. Yashin // Nauka. – Moscow, 1984.
6. *Volosevich, A.V.* Nonlinear wave structures in collisional plasma of auroral ionosphere / A.V. Volosevich, Y.I. Galperin // Ann. Geophys. – 1997. – Vol. 15. – P. 899–905,
7. *Волосевич, А.В.* Неустойчивость Фали – Бунемана в полярной ионосфере / А.В. Волосевич // Явления в полярной ионосфере. – 1978. – Изд. “Наука”. – С. 50–62.
8. *Волосевич, А.В.* Экспериментальная диагностика Фарлей – Бунемановской неустойчивости в авроральной ионосфере / А.В. Волосевич, Ю.Ф. Зарницкий // Вестник МГУ им. А.А. Кулешова, Могилев, 2012 (в печати).

Поступила в редакцию 02.11.2012 г.

УДК 548.24

*О.М. ОСТРИКОВ*

## **ДИСЛОКАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ НАНОДВОЙНИКОВОГО КОМПОЗИТА**

*Разработана дислокационная мезоскопическая модель нанокомпозита, содержащего остаточные нанодвойники линзовидной формы. Показано, что нанодвойники способствуют локализации напряжений, относительной объемной дилатации и зарождению новой фазы, образование которой вдали от источников напряжений невозможно.*

### **Введение**

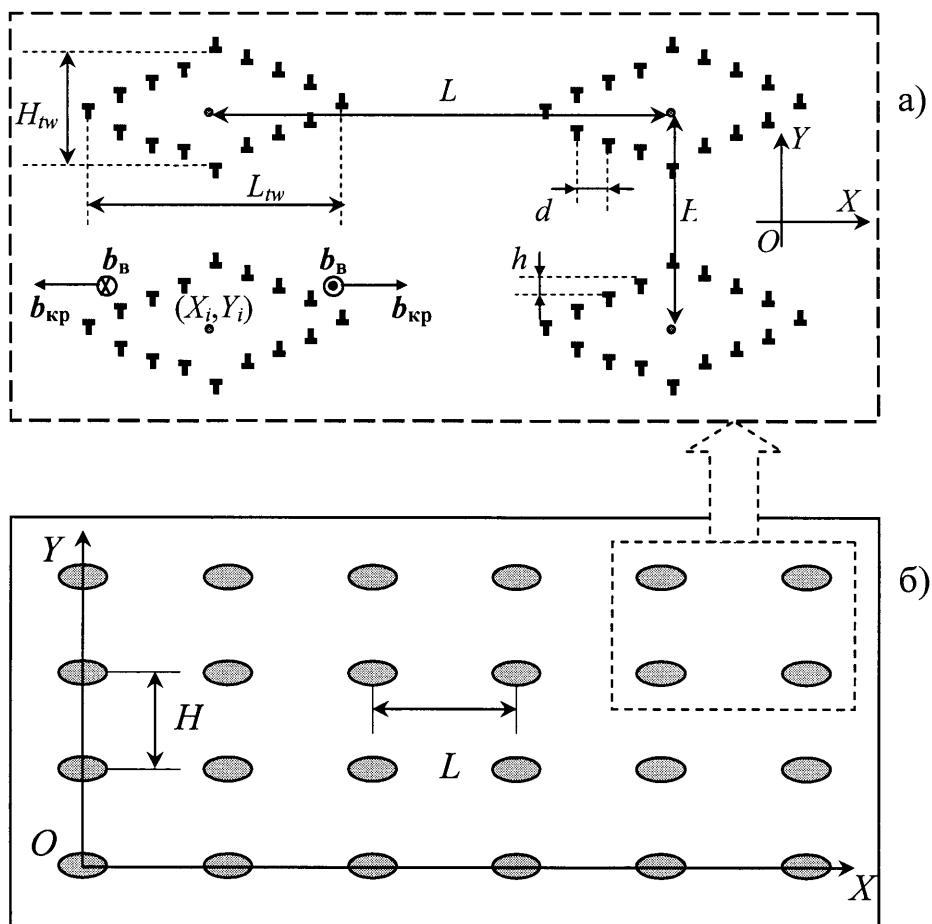
Экспериментально явление механического нанодвойникования, заключающееся в формировании остаточных наноразмерных двойников под действием приложенной к поверхности нагрузки, рассмотрено в работе [1].

В работах [2] – [5] разработана дислокационная модель нанодвойника. При этом предложено использовать нанодвойникование для синтеза материалов нового поколения – нанокомпозитов с управляемым распределениемnanoфаз, образующихся внутри нанодвойников, или у их границ в матрице несдвойникованного материала [3].

Целью данной работы стала разработка дислокационной модели нанокомпозита синтезированного на основе явления нанодвойникования.

#### Постановка задачи

На рис. 1 представлено схематическое изображение нанодвойникового композита в виде упорядоченно (рис. 1, б) и неупорядочено (рис. 1, а) распределенных нанодвойников в однородном и изотропном твердом теле. На рис. 1 показаны фрагменты таких тел вдали от их поверхностей для исключения необходимости учета ее роли в формировании напряженно-деформированного состояния.



**Рис. 1.** Схематическое изображение нанодвойникового композита:  
а) дислокационная модель; б) композит с упорядоченным расположением  
в нем нанодвойников

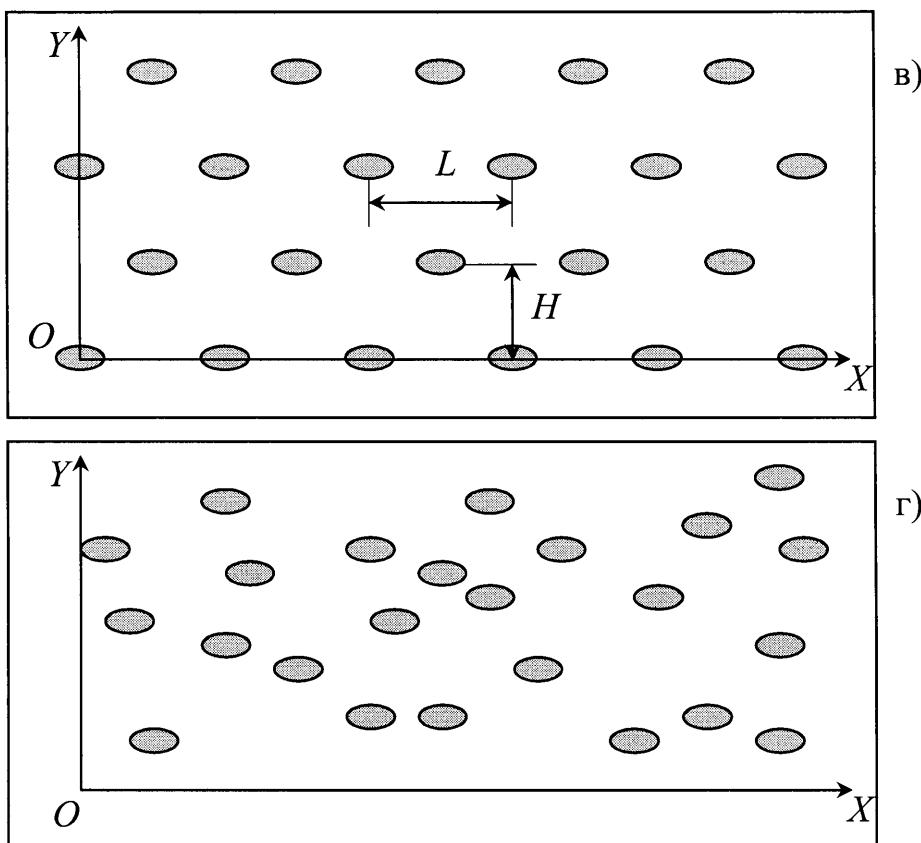


Рис. 1. Схематическое изображение нанодвойникового композита:  
в) композит, в котором нанодвойники расположены в шахматном порядке;  
г) композит с хаотическим расположением нанодвойников

В работах [2] – [5] модель единичного нанодвойника разрабатывалась по аналогии с моделью макроскопического двойника линзовидной формы [6], [7]. Отличительной особенностью модели нанодвойника по сравнению с макродвойником, рассмотренным в [6], [7], является дискретное, а не непрерывное, как в [6], [7], распределение на границах конечного числа двойникующих дислокаций. Более того, в [2] – [5] не используется приближение тонкого двойника, принятное в [6], [7].

По аналогии с [4], [5] не трудно показать, что для линзовидного нанодвойника с центром симметрии в точке с координатами  $(X_i, Y_i)$  функция напряжений Эйри, обусловленная краевой составляющей частичной двойникующей дислокации, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{kp}(x, y) = & -\frac{\mu b_{kp}}{4\pi(1-\nu)} \times \\ & \times \left( \sum_{n=0}^N (y + nh - Y_i) \ln \left( (x + nd - L_{tw} - X_i)^2 + (y + nh - Y_i)^2 \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{n=0}^{N-1} (y + nh - Y_i) \ln \left( (x - nd + L_{tw} - X_i)^2 + (y + nh - Y_i)^2 \right) + \\
 & + \sum_{n=1}^{N-1} (y - nh - Y_i) \ln \left( (x + nd - L_{tw} - X_i)^2 + (y - nh - Y_i)^2 \right) - \\
 & - \sum_{n=1}^N (y - nh - Y_i) \ln \left( (x - nd + L_{tw} - X_i)^2 + (y - nh - Y_i)^2 \right), \quad (1)
 \end{aligned}$$

где  $\mu$  – модуль сдвига;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $b_{kp}$  – модуль краевой составляющей вектора Бюргерса частичной двойникующей дислокации;  $n$  – индекс суммирования;  $d$  и  $h$  – проекции, соответственно, на оси  $OX$  и  $OY$  отрезка, соединяющего две соседние дислокации;  $L_{tw}$  – половина длины нанодвойника;  $N$  – число дислокаций на каждой из выделенных четырех границ двойника (рис. 1, а).

Для нанодвойникового композита с упорядоченным расположением нанодвойников, как на рис. 1, б, формула (1) преобразуется в

$$\begin{aligned}
 \psi_{kp}(x, y) = & -\frac{\mu b_{kp}}{4\pi(1-\nu)} \times \\
 & \times \left( \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (y + nh - kH) \ln \left( (x + nd - L_{tw} - mL)^2 + (y + nh - kH)^2 \right) - \right. \\
 & - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} (y + nh - kH) \ln \left( (x - nd + L_{tw} - mL)^2 + (y + nh - kH)^2 \right) + \\
 & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} (y - nh - kH) \ln \left( (x + nd - L_{tw} - mL)^2 + (y - nh - kH)^2 \right) - \\
 & \left. - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N (y - nh - kH) \ln \left( (x - nd + L_{tw} - mL)^2 + (y - nh - kH)^2 \right) \right), \quad (2)
 \end{aligned}$$

где  $k$  и  $m$  – индексы суммирования;  $K$  и  $M$  – количество строк и столбцов соответственно, составленных из единичных нанодвойников;  $L$  и  $H$  – расстояния вдоль оси  $OX$  и  $OY$ , соответственно, между ближайшими нанодвойниками.

Для ситуации, представленной на рис. 1, в, получим функцию напряжений Эйри в следующем виде:

$$\psi_{kp}(x, y) = \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \varphi_{1\text{чт}}(x + nd - L_{tw} - mL, y + nh - 2kH) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_{2\text{чт}}(x - nd + L_{tw} - mL, y + nh - 2kH) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} \varphi_{3\text{чт}}(x + nd - L_{tw} - mL, y - nh - 2kH) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \varphi_{4\text{чт}}(x - nd + L_{tw} - mL, y - nh - 2kH) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \varphi_{1\text{нчт}} \left( x + nd - L_{tw} - \left( m + \frac{1}{2} \right) L, y + nh - (2k-1)H \right) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_{2\text{нчт}} \left( x - nd + L_{tw} - \left( m + \frac{1}{2} \right) L, y + nh - (2k-1)H \right) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} \varphi_{3\text{нчт}} \left( x + nd - L_{tw} - \left( m + \frac{1}{2} \right) L, y - nh - (2k-1)H \right) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \varphi_{4\text{нчт}} \left( x - nd + L_{tw} - \left( m + \frac{1}{2} \right) L, y - nh - (2k-1)H \right), \quad (3)
\end{aligned}$$

где  $\varphi_{p\text{чт}}$  и  $\varphi_{p\text{нчт}}$  – соответствующие четной или нечетной, соответственно, строке нанодвойников составляющие функции Эйри, связанные с  $p$ -ой ( $p = 1, 2, 3$  или  $4$ ) границей линзовидного нанодвойника, приближенно представляемого в виде ромба [4], [5].

Для нанодвойникового композита с хаотическим распределением нанодвойников (рис. 1, г) в (1) координаты  $(X_i, Y_i)$  задаются случайным образом с помощью генератора случайных чисел.

#### Результаты расчетов и их обсуждение.

Знание функции напряжений Эйри позволяет перейти к расчету компонент тензора напряжений [8]

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \psi_{kp}}{\partial x^2} \\ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \psi_{kp}}{\partial y^2} \\ \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi_{kp}}{\partial xy} \end{array} \right\}.$$

Тензор напряжений по закону Гука связан с тензором деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , который в свою очередь связан со смещениями  $u_i$  соотношением Коши [8], [9].

Таким образом, поля смещений  $u_i(x, y)$ , деформаций  $\varepsilon_{ij}(x, y)$  и напряжений  $\sigma_{ij}(x, y)$  в нанодвойниковом композите, представленном на рис. 1, б, могут быть найдены из следующих обобщенных соотношений:

$$\begin{aligned} u_i(x, y) = & \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N u_i^{(1)}(x + nd - L_{tw} - mL, y + nh - kH) + \\ & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} u_i^{(2)}(x - nd + L_{tw} - mL, y + nh - kH) + \\ & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} u_i^{(3)}(x + nd - L_{tw} - mL, y - nh - kH) + \\ & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N u_i^{(4)}(x - nd + L_{tw} - mL, y - nh - kH); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(x, y) = & \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \varepsilon_{ij}^{(1)}(x + nd - L_{tw} - mL, y + nh - kH) + \\ & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_{ij}^{(2)}(x - nd + L_{tw} - mL, y + nh - kH) + \\ & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon_{ij}^{(3)}(x + nd - L_{tw} - mL, y - nh - kH) + \\ & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \varepsilon_{ij}^{(4)}(x - nd + L_{tw} - mL, y - nh - kH); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, y) = & \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sigma_{ij}^{(1)}(x + nd - L_{tw} - mL, y + nh - kH) + \\ & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_{ij}^{(2)}(x - nd + L_{tw} - mL, y + nh - kH) + \\ & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} \sigma_{ij}^{(3)}(x + nd - L_{tw} - mL, y - nh - kH) + \\ & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \sigma_{ij}^{(4)}(x - nd + L_{tw} - mL, y - nh - kH). \end{aligned} \quad (6)$$

Для нанодвойникового композита, схематически представленного на рис. 1, в, получим

$$\begin{aligned}
 u_i(x, y) = & \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N u_i^{(1)\text{чт}}(x + nd - L_{tw} - mL, y + nh - 2kH) + \\
 & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} u_i^{(2)\text{чт}}(x - nd + L_{tw} - mL, y + nh - 2kH) + \\
 & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} u_i^{(3)\text{чт}}(x + nd - L_{tw} - mL, y - nh - 2kH) + \\
 & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N u_i^{(4)\text{чт}}(x - nd + L_{tw} - mL, y - nh - 2kH) + \\
 & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N u_i^{(1)\text{нчт}}\left(x + nd - L_{tw} - \left(m + \frac{1}{2}\right)L, y + nh - (2k-1)H\right) + \\
 & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} u_i^{(2)\text{нчт}}\left(x - nd + L_{tw} - \left(m + \frac{1}{2}\right)L, y + nh - (2k-1)H\right) + \\
 & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} u_i^{(3)\text{нчт}}\left(x + nd - L_{tw} - \left(m + \frac{1}{2}\right)L, y - nh - (2k-1)H\right) + \\
 & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N u_i^{(4)\text{нчт}}\left(x - nd + L_{tw} - \left(m + \frac{1}{2}\right)L, y - nh - (2k-1)H\right); \quad (7) \\
 \varepsilon_{ij}(x, y) = & \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \varepsilon_{ij}^{(1)\text{чт}}(x + nd - L_{tw} - mL, y + nh - 2kH) + \\
 & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_{ij}^{(2)\text{чт}}(x - nd + L_{tw} - mL, y + nh - 2kH) + \\
 & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon_{ij}^{(3)\text{чт}}(x + nd - L_{tw} - mL, y - nh - 2kH) + \\
 & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \varepsilon_{ij}^{(4)\text{чт}}(x - nd + L_{tw} - mL, y - nh - 2kH) + \\
 & + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \varepsilon_{ij}^{(1)\text{нчт}}\left(x + nd - L_{tw} - \left(m + \frac{1}{2}\right)L, y + nh - (2k-1)H\right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_{ij}^{(2)\text{нчт}} \left( x - nd + L_{tw} - \left( m + \frac{1}{2} \right) L, y + nh - (2k-1)H \right) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon_{ij}^{(3)\text{нчт}} \left( x + nd - L_{tw} - \left( m + \frac{1}{2} \right) L, y - nh - (2k-1)H \right) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \varepsilon_{ij}^{(4)\text{нчт}} \left( x - nd + L_{tw} - \left( m + \frac{1}{2} \right) L, y - nh - (2k-1)H \right); \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(x, y) = & \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sigma_{ij}^{(1)\text{чт}} (x + nd - L_{tw} - mL, y + nh - 2kH) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_{ij}^{(2)\text{чт}} (x - nd + L_{tw} - mL, y + nh - 2kH) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} \sigma_{ij}^{(3)\text{чт}} (x + nd - L_{tw} - mL, y - nh - 2kH) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \sigma_{ij}^{(4)\text{чт}} (x - nd + L_{tw} - mL, y - nh - 2kH) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sigma_{ij}^{(1)\text{нчт}} \left( x + nd - L_{tw} - \left( m + \frac{1}{2} \right) L, y + nh - (2k-1)H \right) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_{ij}^{(2)\text{нчт}} \left( x - nd + L_{tw} - \left( m + \frac{1}{2} \right) L, y + nh - (2k-1)H \right) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} \sigma_{ij}^{(3)\text{нчт}} \left( x + nd - L_{tw} - \left( m + \frac{1}{2} \right) L, y - nh - (2k-1)H \right) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \sigma_{ij}^{(4)\text{нчт}} \left( x - nd + L_{tw} - \left( m + \frac{1}{2} \right) L, y - nh - (2k-1)H \right). \quad (9)
\end{aligned}$$

При хаотическом распределении нанодвойников в композите (рис. 1, г) получим:

$$\begin{aligned}
u_i(x, y) = & \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N u_i^{(1)} (x + nd - L_{tw} - X_i, y + nh - Y_i) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} u_i^{(2)} (x - nd + L_{tw} - X_i, y + nh - Y_i) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} u_i^{(3)}(x + nd - L_{tw} - X_i, y - nh - Y_i) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N u_i^{(4)}(x - nd + L_{tw} - X_i, y - nh - Y_i); \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}(x, y) = & \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \varepsilon_{ij}^{(1)}(x + nd - L_{tw} - X_i, y + nh - Y_i) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon_{ij}^{(2)}(x - nd + L_{tw} - X_i, y + nh - Y_i) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon_{ij}^{(3)}(x + nd - L_{tw} - X_i, y - nh - Y_i) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \varepsilon_{ij}^{(4)}(x - nd + L_{tw} - X_i, y - nh - Y_i); \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(x, y) = & \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sigma_{ij}^{(1)}(x + nd - L_{tw} - X_i, y + nh - Y_i) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_{ij}^{(2)}(x - nd + L_{tw} - X_i, y + nh - Y_i) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N-1} \sigma_{ij}^{(3)}(x + nd - L_{tw} - X_i, y - nh - Y_i) + \\
& + \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N \sigma_{ij}^{(4)}(x - nd + L_{tw} - X_i, y - nh - Y_i). \quad (12)
\end{aligned}$$

Относительная объемная дилатация рассчитывается по формуле [10]

$$\frac{\Delta V(x, y)}{V} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx}(x, y) + \sigma_{yy}(x, y)) [1 - \mu(2\mu + 1)], \quad (13)$$

где  $V$  – объем;  $E$  – модуль Юнга.

Распределение легирующего компонента в нанодвойниковом композите определяется из соотношения [2, 8]

$$C(x, y) = C_0 \exp\left(-\frac{U(x, y)}{kT}\right), \quad (14)$$

где  $C_0$  – концентрация легирующего компонента вдали от внутренних источников напряжений;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная

температура;  $U(x, y)$  – энергия взаимодействия атомов легирующего компонента с клиновидным двойником, которая находится по формуле [2, 8]

$$U(x, y) = -\frac{4}{3}\pi r^3 \varepsilon (\sigma_{xx}(x, y) + \sigma_{yy}(x, y) + \sigma_{zz}(x, y)). \quad (15)$$

Здесь  $r$  – радиус атома матрицы;  $\varepsilon = (r - r_0)/r$  – малый параметр ( $r_0$  – радиус атома легирующего компонента);  $\sigma_{xx}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}(x, y)$  и  $\sigma_{zz}(x, y)$  – нормальные компоненты тензора напряжений, которые, как и в случае (13), находятся по формулам (6), (9) или (12).

Пример расчетов для монокристаллического железа с нанодвойниками включениями представлен на рис. 2. При расчетах принималось:  $\nu = 0,33$ ;  $N = 10$ ;  $M = 20$ ;  $K = 20$ ;  $L = 20$  нм;  $H = 10$  нм;  $d = 3$  нм;  $h = 1,5$  нм;  $b_{kp} = 0,168$  нм;  $m = 81$  ГПа;  $E = 200$  ГПа;  $r_0 = 0,97$  Å (радиус атома бора);  $r = 1,27$  Å;  $T = 300$  К;  $C_0 = 25$  ат. %.

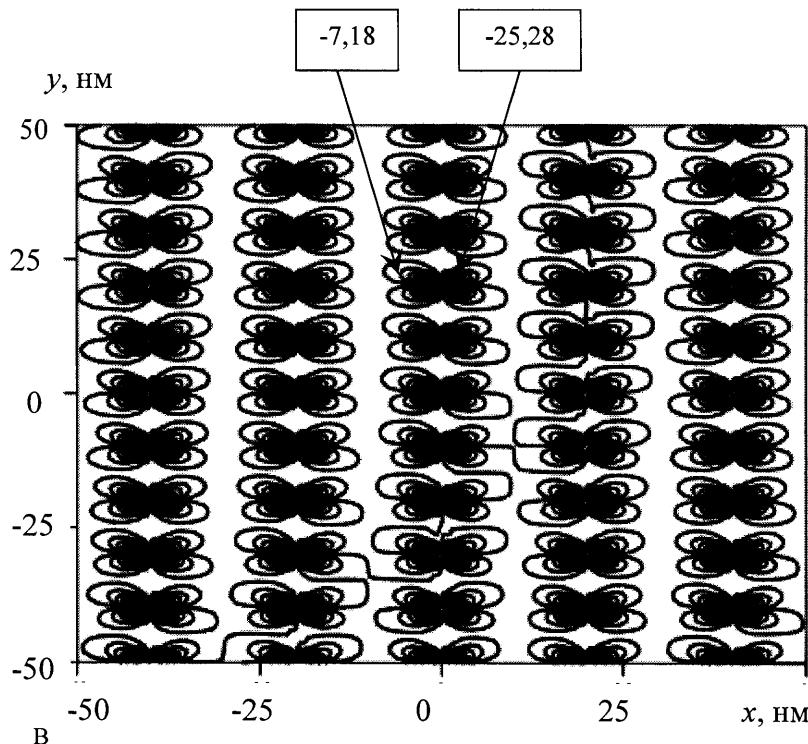


Рис. 2. Распределение сдвиговых напряжений  $\sigma_{xy}$ (а)  
в упорядоченном нанодвойниковом композите

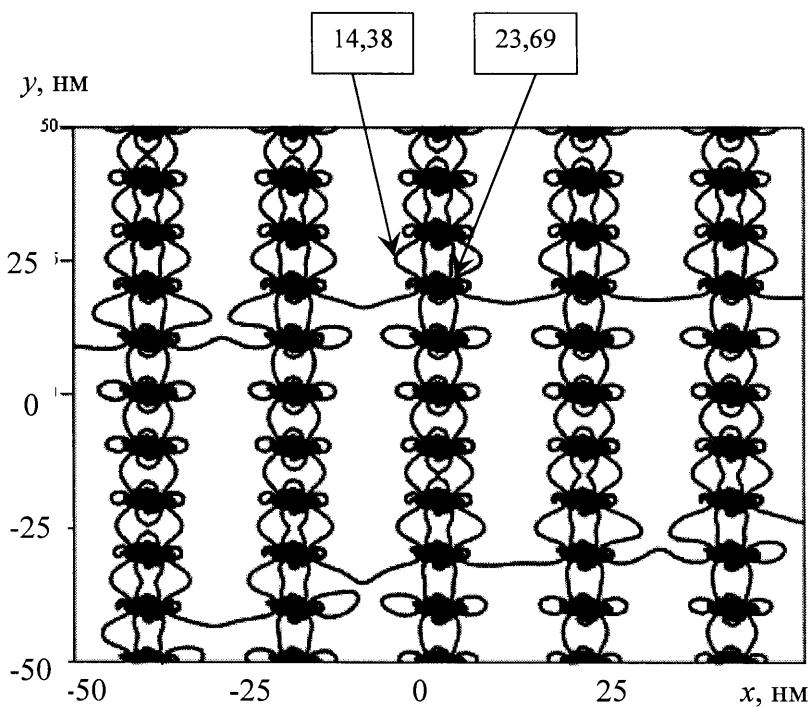


Рис. 2. Распределение легирующего компонента (б)  
в упорядоченном нанодвойниковом композите

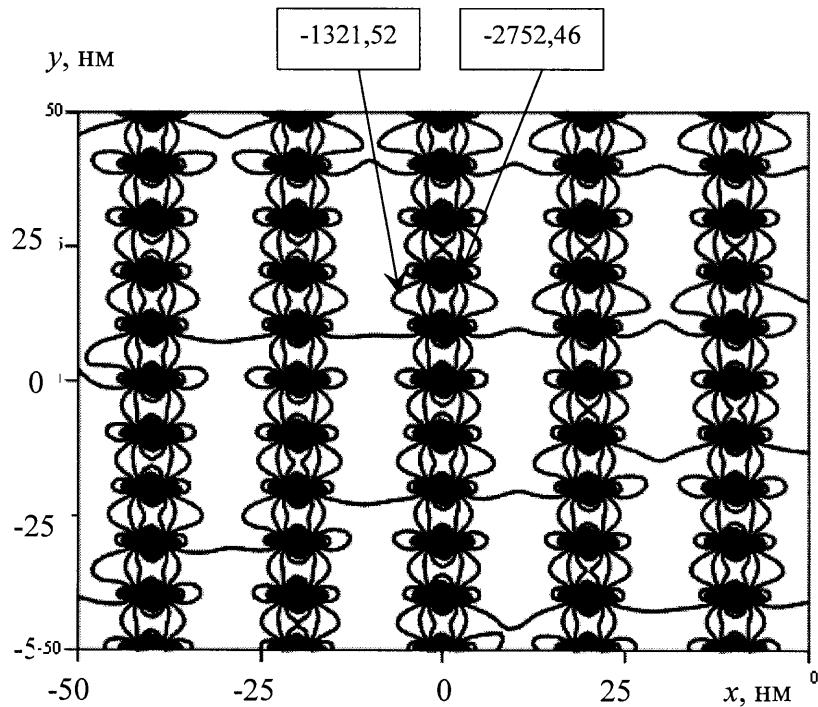


Рис. 2. Распределение относительной объемной дилатации (в)  
в упорядоченном нанодвойниковом композите

Как видно из рис. 2(а), нанодвойниковые включения являются концентраторами больших внутренних напряжений и дилатаций, что приводит к миграции примесей и легирующего компонента к нанодвойникам, способствуя гетерогенному образованию зародышей новой фазы, образование которой вдали от источников напряжений маловероятно.

### Заключение

Таким образом, разработана дислокационная модель нанодвойникового композита. В модели использовано дискретное суммирование вклада двойникующих дислокаций в напряженно-деформированное состояние, обусловленное нанодвойниками. Показано, что нанодвойники в нанокомпозите являются источниками больших внутренних напряжений и дилатаций, что способствует зарождению новых фаз.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Остриков, О.М.* Нанодвойникование монокристаллов висмута / О.М. Остриков // Изв. вузов. Сер. Черная металлургия. – 2002. – № 3. – С. 51 – 52.
2. *Остриков, О.М.* Формирование наноразмерных фаз в нанодвойниках / О.М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2006. – № 3. – С. 3 – 7.
3. *Остриков, О.М.* Нанодвойникование, как эффективный способ формирования композитов с наноразмерными включениями / О.М. Остриков // Структурные основы модификации материалов методами нетрадиционных технологий. Тез. докл. конф. – Обнинск : ИАТЭ. 2007. – С. 89–90.
4. *Остриков, О.М.* Механика двойникования твердых тел : монография. / О.М. Остриков. – Гомель: Учреждение образования “Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого”, 2008. – 301 с.
5. *Остриков, О.М.* Дислокационная модель нанодвойника / О.М. Остриков // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 5. – С. 124–129.
6. *Косевич, А.М.* Соотношение между дислокационной теорией двойников и макроскопической теорией Лифшица / А.М. Косевич, Л.А. Паустур // Физика твердого тела. – 1963. – Т. 5. – № 7. – С. 1970–1978.
7. *Косевич, А.М.* Дислокации в теории упругости / А.М. Косевич. – Киев : Наук. думка, 1978. – 220 с.
8. *Хирт, Дж.* Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М. : Атомиздат, 1972. – 600 с.
9. *Работнов, Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М. : Наука, 1988. – 712 с.
10. *Грабский, М.В.* Структура границ зерен в металлах / М.В. Грабский. – М. : Металлургия, 1972. – 160 с.

Поступила в редакцию 14.09.2012 г.

УДК 621.378

*A.B. ШУЛЬГА*

## ОЦЕНКА РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ВОЛНОВОДНОГО СПЕКТРОАНАЛИЗАТОРА ПРИЗМЕННОГО ТИПА

*Представлены результаты исследования зависимости разрешающей способности спектроанализатора на основе призменного устройства возбуждения мод тонкопленочного волновода от величины коэффициента поглощения материала волноводного слоя и подложки для мод различных порядков. Проанализированы условия достижения максимальной разрешающей способности.*

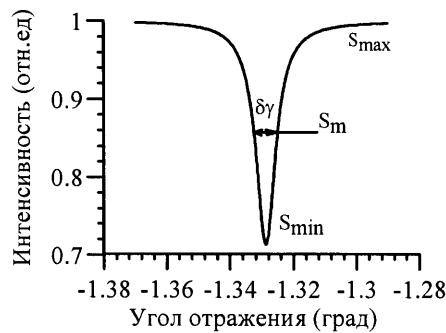
### 1. Введение

При возбуждении волновода немонохроматическим светом для каждой хроматической компоненты формируются моды, структура поля, фазовая скорость распространения и, соответственно, волноводный показатель преломления которых будут зависеть не только от параметров волноводного слоя, но и от длины волны распространяющегося излучения. Поэтому такое устройство можно использовать для анализа спектрального состава излучения [1, 2, 3]. Миниатюрные оптические спектроанализаторы представляют интерес при создании датчиков концентрации в химии, биологии и медицине [4]. Разрешающая способность такого спектроанализатора будет определяться наименьшей разностью волноводных показателей преломления мод для соответствующих близлежащих хроматических компонент светового пучка [1].

### 2. Спектроанализатор на основе призменного устройства возбуждения волноводных мод

Возбуждение планарного диэлектрического волновода при помощи призменного устройства связи основано на явлении нарушенного полного внутреннего отражения [5, 6], при котором происходит туннелирование энергии световых волн через среду с меньшим показателем преломления (буферный слой) и толщиной меньше, чем длина волны возбуждающего света [7]. Описание установки и методика регистрации пространственной структуры интенсивности отраженного светового пучка при возбуждении волноводной моды приведено в [8]. Возбуждение волноводных мод возможно при определенных дискретных углах падения светового пучка на основание призменного устройства связи, при которых выполняется условие фазового синхронизма для электромагнитной волны, распространяющихся вдоль границы раздела “призма – буферный слой” и моды волноводной структуры. В случае возбуждения одномодового волновода полихроматическим светом, в отраженном свете будет также наблюдаться серия темных *m*-линий [7], угловое положение которых будет определяться волноводным показателем преломления  $n_s$  для

соответствующей хроматической компоненты светового пучка. Волноводный показатель преломления связан с комплексной постоянной распространения волноводной моды  $h$  следующим соотношением  $n_e = k^{-1} \operatorname{Re} h$ , где  $k = 2\pi / \lambda$ .



**Рис. 1.** Угловой спектр  $m$ -линии, соответствующий волноводной моде, возбуждаемой монохроматическим излучением

Распределение интенсивности отраженного от призменного элемента связи излучения при возбуждении моды планарного диэлектрического волновода сходящимся монохроматическим световым пучком со сферическим волновым фронтом, представлено на рис. 1. Угловая ширина  $m$ -линии зависит от мнимой части постоянной распространения вытекающей структуры “призма – волновод”  $h_s$ , которая в свою очередь определяется мнимой частью комплексной постоянной распространения волноводной моды  $h$  и коэффициентом оптической связи волновода и призмы [8].

Разрешающая способность спектрального прибора равна отношению угловой дисперсии прибора к угловой ширине его аппаратной функции [9]

$$R = \frac{\lambda}{\delta\gamma} \frac{d\gamma}{d\lambda},$$

где  $\delta\gamma$  – угловая ширина аппаратной функции,  $\frac{d\gamma}{d\lambda}$  – дисперсия углового положения  $m$ -линии в зависимости от длины волны.

В случае спектрального прибора на основе призменного элемента связи в качестве аппаратной функции можно рассматривать профиль  $m$ -линии, наблюдаемой в фокальной плоскости объектива, при отражении монохроматического света от призменного элемента связи, и, следовательно,  $\delta\gamma$  в таком случае равно угловой ширине регистрируемой  $m$ -линии. В случае, когда угловое положение минимума  $m$ -линии совпадает с угловым положением оси симметрии отраженного пучка, распределение интенсивности в его поперечном сечении будет описываться функцией [8]

$$S(\gamma) = \frac{(p_1 + 2 \operatorname{Re}|p_2|)^2 + \kappa^2}{p_1^2 + \kappa^2}, \quad (1)$$

где  $p_1 = \omega \operatorname{Im} h_s$ ;  $p_2 = -i 2 \omega \Delta h D (1 - D)^2$ ;  $\kappa = -k_0 n_a \omega_0 (\gamma - \gamma_0)$ ,

$$\omega = \omega_0 N(\gamma); \quad D = -i \left( \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_g} \right)^T \sqrt{\frac{(\operatorname{Re} h)^2 - k_0^2 \varepsilon_g^2}{k_0^2 \varepsilon_p - (\operatorname{Re} h)^2}}; \quad N(\gamma) = \frac{\sqrt{1 - \frac{n_a^2}{n_p^2} \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma \sin \varphi};$$

$$\varphi = \arccos \frac{\operatorname{Re} h_s}{k_0 n_p}.$$

Угловую ширину  $m$ -линии  $\delta\gamma$  определим как

$$\Delta\gamma = 2(\gamma_m - \gamma_0), \quad (2)$$

где  $\gamma_m$  – угловая координата, соответствующая значению  $S = S_m$ ,

$\gamma_0$  – угловая координата резонансного минимума,

$$S_m = (S_{\min} + S_{\max})/2.$$

Так как спектр интенсивности светового пучка предполагается нормированным, то  $S_{\max} = 1$  и

$$S_m = (1 + S_{\min})/2. \quad (3)$$

Учитывая, что интенсивность энергетического минимума пучка находится при  $\kappa = 0$  (т.к.  $\gamma = \gamma_0$ ), то из (1) следует:

$$S_{\min} = \frac{(p_1 + 2 \operatorname{Re}|p_2|)^2}{p_1^2},$$

а из (3):

$$S_m = \frac{(p_1 + 2 \operatorname{Re}|p_2|)^2 + \kappa_m^2}{p_1^2 + \kappa_m^2}. \quad (4)$$

Учитывая что

$$\kappa_m = -k_0 \omega_0 \frac{\delta\gamma}{2} \quad (5)$$

из (3) получим

$$S_m = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{(p_1 + 2 \operatorname{Re}|p_2|)^2}{p_1^2} \right). \quad (6)$$

Из выражений (4) и (5) получим, что  $\kappa_m^2 = p_1^2$ , а с учетом (1)

$$\delta\gamma = 2 \frac{N(\gamma)}{n_a} \frac{\operatorname{Im} h_s}{k_0}. \quad (7)$$

Из (7) явно вытекает линейная зависимость угловой ширины  $m$ -линии от мнимой части постоянной распространения вытекающей моды структуры “волновод – призма связи”.

Уравнение, определяющее связь между волноводным показателем преломления и угловым положением  $m$ -линии по отношению к выходной грани призмы связи, имеет вид

$$n_e(\lambda) = n_p(\lambda) \sin \beta, \quad (8)$$

где  $\beta = \Theta_p - \arcsin \xi$  – угол падения луча на основание призмы связи,

$\xi = \sin \alpha = \frac{n_a}{n_p} \sin \gamma$ ,  $n_a$  и  $n_p$  – показатель преломления окружающей среды и призмы соответственно,  $\alpha$  – угол падения отраженного луча на выходную грань призмы.

Дифференцируя уравнение призменного элемента связи (8) по длине волны  $\lambda$  и полагая, что материальная дисперсия призмы связи зависит от длины волны  $n_p = n_p(\lambda)$ , можно получить выражение для дисперсии углового положения  $m$ -линии соответствующего призменного элемента связи

$$\frac{d\gamma}{d\lambda} = \frac{\left( \sin \beta \sqrt{1-\xi^2} + \xi \cos \beta \right) \frac{dn_p}{d\lambda} - \sqrt{1-\xi^2} \frac{dn_e}{d\lambda}}{n_a \cos \gamma \cos \beta}, \quad (9)$$

тогда выражение для разрешающей способности будет иметь вид

$$R = \frac{\lambda}{2} \left( \left( \sin \beta + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \beta \right) \frac{dn_p}{d\lambda} - \frac{dn_e}{d\lambda} \right) \left( \frac{\operatorname{Im} h_s}{k_0} \right)^{-1}$$

или после несложных преобразований

$$R = \pi \left( \left( \frac{n_p}{\operatorname{tg} \Theta \sqrt{n_p^2 - n_e^2} - n_e} \right) \frac{dn_p}{d\lambda} - \frac{dn_e}{d\lambda} \right) (\operatorname{Im} h_s)^{-1}. \quad (10)$$

Как следует из выражения (10), материальная дисперсия призмы связи приводит к уменьшению угловой дисперсии призменного элемента связи.

Если для призменного устройства связи  $\frac{dn_p}{d\lambda} \approx 0$  или дисперсия материала призмы скомпенсирована, то

$$R = \frac{\lambda}{2} \frac{dn_e}{d\lambda} \left( \frac{\operatorname{Im} h_s}{k_0} \right)^{-1}$$

или

$$R = \pi \frac{dn_e}{d\lambda} (\operatorname{Im} h_s)^{-1}. \quad (11)$$

Выражение (11) определяет предельную разрешающую способность волноводного спектрального прибора, обычно  $R$  будет всегда меньше, так как зависит также от способа и аппаратуры регистрации профиля  $m$ -линии, например, разрешающей способности и чувствительности фоторегистрирующего устройства.

### 3. Анализ разрешающей способности тонкопленочного спектроанализатора

Известно, что волноводный показатель преломления  $n_e$  находят из дисперсионных уравнений, например, для ТЕ-мод данное уравнение имеет вид [11]

$$V(1-b)^{1/2} = m\pi + \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{1-b} \right)^{1/2} + \operatorname{arctg} \left( \frac{a+b}{1-b} \right)^{1/2}, \quad (12)$$

где  $V = kh(n^2 - n_s^2)^{1/2}$  – нормированная толщина волновода, зависящая от его толщины  $d$ ;  $a = \frac{n_s^2 - n_a^2}{n^2 - n_s^2}$  – показатель асимметрии волновода;  $b = \frac{n_e^2 - n_s^2}{n^2 - n_s^2}$  – нормированный волноводный показатель преломления;  $n_e$  – волноводный показатель преломления;  $n_s$ ,  $n$ ,  $n_a$  – показатели преломления подложки, волноводного слоя и покрытия соответственно.

Тогда величина волноводной дисперсии волновода будет

$$\frac{dn_e}{d\lambda} = -Q_g (n^2 - n_s^2) (\lambda n_e)^{-1}, \quad (13)$$

где  $Q_g = V(1-b)/\alpha$  – коэффициент волноводной дисперсии;

$$\alpha = V + 1/\sqrt{b} + 1/\sqrt{a+b},$$

а разрешающая способность будет определяться величиной

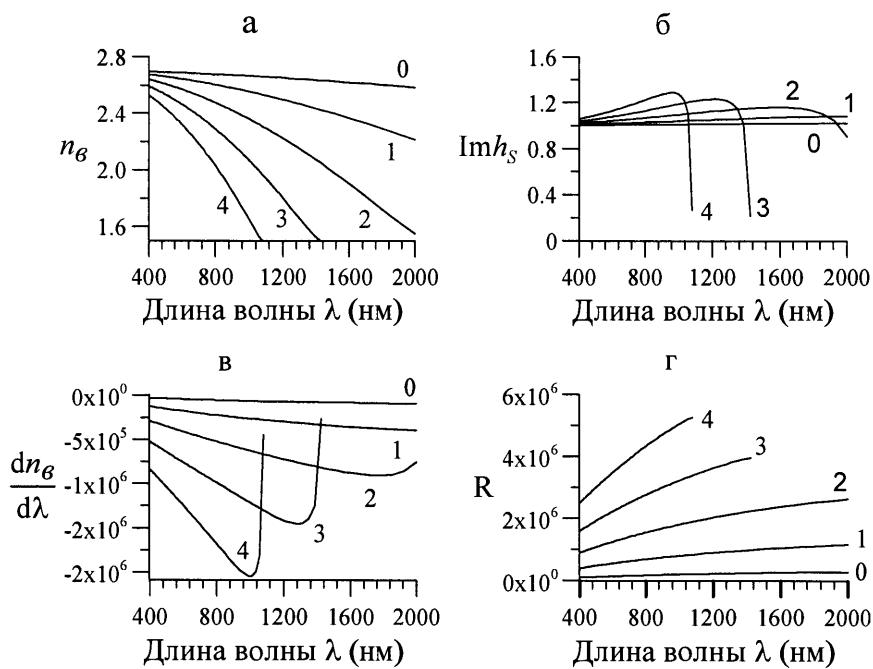
$$R = \frac{dn_e}{d\lambda} \operatorname{Im}(h)^{-1} = -Q_g (n^2 - n_s^2) (\lambda n_e \operatorname{Im}(h))^{-1}. \quad (14)$$

Выражение (10) позволяет оценить разрешающую способность волноводного спектроанализатора с учетом значений показателей преломления и коэффициентов поглощения волноводного слоя, подложки и окружающей среды.

Спектральные зависимости волноводного показателя преломления, величины волноводной дисперсии, мнимой части комплексной постоянной распространения волноводной моды и разрешающей способности представлены на рис. 2. Из приведенных данных следует, что в случае, когда коэффициент поглощения материала волноводного слоя значительно превышает коэффициент поглощения материала подложки, т.е. когда основная доля поглощенной световой энергии приходится на волноводный слой, разрешающая способность волноводного спектроанализатора увеличивается при переходе к модам высших порядков. Иллюстрация данного утверждения представлена на рис. 4. Оценка выполнена для значений коэффициента затухания материала волноводного слоя

$$\kappa(\lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} \alpha(\lambda) : \kappa_1 = 5 \cdot 10^{-6}; \kappa_2 = 2 \cdot 10^{-5}; \kappa_3 = 5 \cdot 10^{-5}; \kappa_4 = 1 \cdot 10^{-4}. \text{ Для заданной}$$

моды переход в более длинноволновую часть спектра сопровождается увеличением предельной разрешающей способности тонкопленочного спектроанализатора и достигает своего максимума вблизи частоты отсечки. Как следует из представленных данных на рис. 2 и 3, увеличение (уменьшение) коэффициента поглощения сопряжено с увеличением



**Рис. 2.** Зависимость действительной (а) и мнимой частей постоянной распространения, волноводной дисперсии и разрешающей способности от длины волны излучения для мод 0-4 порядков

(уменьшением) величины волноводной дисперсии волновода. Таким образом, представляется наиболее целесообразной работа прибора в спектральной области, где его светосила достигает максимального значения. Это приводит к тому, что влияние аппаратных искажений становится минимальным, и, следовательно, можно с более высокой точностью исследовать распределение энергии в спектре источника излучения. В случае нанесения волноводного слоя на поглощающую подложку работа на модах высших порядков приводит хотя и к незначительному, но уменьшению разрешающей способности тонкопленочного анализатора спектра, а переход в длинноволновую часть спектра также сопровождается уменьшением разрешающей способности спектроанализатора. Это вполне очевидно, так как в коротковолновой области спектра основная доля световой энергии сосредоточена в волноводном слое, и только незначительная ее часть в виде экспоненциальных "хвостов" сосредоточена за пределами волновода, что приводит к малым потерям, и как следствие большей разрешающей способности.

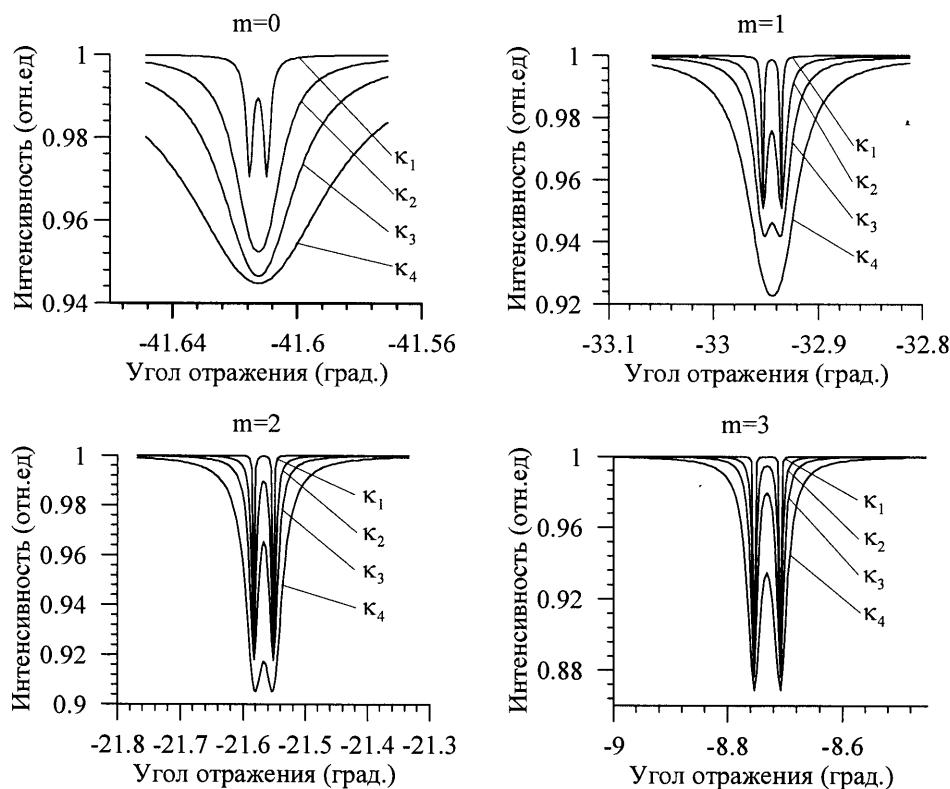


Рис. 3. Угловое распределение интенсивности светового пучка, содержащего две хроматические компоненты ( $\Delta\lambda=0,5$  нм) отраженного от призменного устройства возбуждения волноводных мод различного порядка  $m$  при  $\kappa_1=5 \cdot 10^{-6}$ ;  $\kappa_2=2 \cdot 10^{-5}$ ;  $\kappa_3=5 \cdot 10^{-5}$ ;  $\kappa_4=1 \cdot 10^{-4}$

При наличии волноводной моды вблизи отсечки значительная часть световой энергии находится вне волновода, что приводит к увеличению потерь и уменьшению разрешающей способности (рисунок 4).

Изготовление волноводов с малыми оптическими потерями позволяет создать анализатор спектра, разрешающая способность которого сравнивается с эталоном Фабри-Перо. Даная зона максимальной спектральной прозрачности у оптических материалов находится в области минимального значения материальной дисперсии оптического материала  $\frac{d^2n(\lambda)}{d\lambda^2} = 0$  [10, 12, 13], что приводит к другой проблеме – пространственного разрешения хроматического спектра *m*-линий в фокальной плоскости линзы. Возникает необходимость увеличения ширины угловой спектра *m*-линий. Использование некоторых оксидных материалов, обладающих заметной дисперсией показателя преломления материала ( $Ta_2O_5$ ,  $TiO_2$ ) [14], позволяет увеличить разрешающую способность спектрального прибора. Это связано с тем, что обычно рост величины хроматической дисперсии оптических материалов сопровождается ростом показателя поглощения, особенно это заметно при приближении к полосе поглощения.

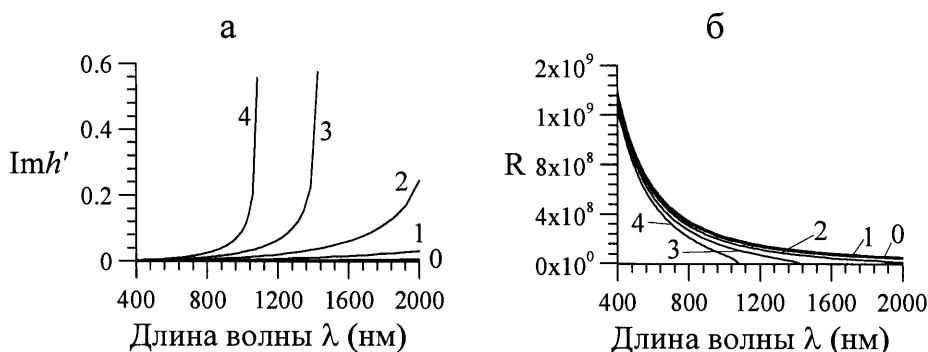


Рис. 4. Зависимость мнимой части постоянной распространения (а) и разрешающей способности (б) от длины волны для мод 0 - 4 порядков

Поэтому несмотря на увеличение дисперсии волновода за счет материальной дисперсии волноводного слоя, нельзя однозначно утверждать, что это приведет к увеличению разрешающей способности, т.к. рост показателя поглощения приводит к увеличению угловой ширины *m*-линии, и, как следствие, уменьшению разрешающей способности спектрального прибора. Однако использование материалов с высокой дисперсией обуславливает увеличение светосилы прибора и его реальной разрешающей способности.

### Заключение

При исследовании свойств спектроанализатора призменного типа показано, что разрешающая способность такого спектрального прибора увеличивается при росте дисперсии волновода, и обратно пропорцио-

нальна мнимой части постоянной распространения оптической моды, возбуждаемой в структуре “волновод – призма связи”. Получено выражение, позволяющее оценить предельную разрешающую способность тонкопленочного спектроанализатора. Установлено, что его разрешающая способность увеличивается при переходе к модам высших порядков при использовании волноводов, для которых коэффициент поглощения намного превышает коэффициент поглощения подложки.

#### *СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ*

1. *Кузали, А.С.* Экспериментальное исследование спектроанализатора на тонкопленочном волноводе с призменным выводом излучения / А.С. Кузали, А.В. Чекан // Квантовая электроника. – 1976. – № 11. – С. 2457–2459.
2. *Шульга, А.В.* Измерение параметров световых пучков методами волноводной спектроскопии / А.В. Шульга // Вестник МГТУ. – 2006. – № 2. – С. 205–213.
3. Способ определения частотного спектра мощности световых пучков и устройство для его осуществления Патент РБ на изобретение № 15533 2012.02.28 заявка № a20100145 приор. от 04.02.10 G01N 21/01 Сотский А.Б., Шульга А.В., Сотская Л.И., Хомченко В.В.
4. Concept of a miniature optical spectrometer using integrated optical and micro-optical components / I. Avrutsky [et al.] // Applied Optics – 2006. – Vol. 45. – No. 30. – P. 7811–7817.
5. *Шварцбург, А.Б.* Туннелирование электромагнитных волн – парадоксы и перспективы / А.Б. Шварцбург // УФН. – 2007. – Т. 177. – № 1 – С. 43–58.
6. *Когельник, Г.* Введение в интегральную оптику / Г. Когельник // УФН. – 1977. – Т. 121. – № 4. – С. 695–726.
7. *Tien, P.K.* Light waves in thin films and integrated optics / P.K. Tien // Applied Optics. – 1971. –Vol. 10. – № 11. – P. 2395–2413.
8. *Хомченко, А.В.* Волноводная спектроскопия тонких пленок. Основные принципы и техника эксперимента / А.В. Хомченко. – Минск : Изд. центр БГУ, 2002. – 223 с.
9. *Малышев, В.И.* Введение в экспериментальную спектроскопию / В.И. Малышев. – М. : Наука, 1979. – 480 с.
10. *Гауэр, Дж.* Оптические системы связи / Дж. Гауэр. – М. : Радио и связь, 1989. – 504 с.
11. *Сотский, А.Б.* Теория оптических волноводных элементов / А.Б. Сотский. – Могилев : УО “МГУ им. А.А. Кулешова”, 2011. – 456 с.
12. *Гончаренко, А.М.* Теория оптических волноводов / А.М. Гончаренко, В.А. Карпенко. – Минск : Наука и техника, 1983. – 420 с.
13. *Hewak Daniel, W.* Generalized dispersion properties of thin-film waveguides / Hewak W. Daniel, W.Y. Lit John // Applied Optics. – 1986. – Vol. 25. – P. 1978–1981.
14. *Бордун, О.М.* Дисперсия света в тонких оксидных пленках / О.М. Бордун // Оптика и спектроскопия. – Т. 84. – № 2. – 1998. – С. 289–292.
15. *Вольпян, О.Д.* Оптические свойства пленок  $Ta_2O_5$ , полученных реактивным магнетронным распылением / О.Д. Вольпян, П.П. Яковлев, Б.Б. Мешков // Оптический журнал. – 2003. – Т. 79. – № 9. – С. 56–60.

Поступила в редакцию 05.11.2012 г.

УДК 535.51

*О.В. ВЕКО, Е.М. ОВСИЮК, В.М. РЕДЬКОВ*

## О 4-СПИНОРАХ ДЖОНСА ПОЛНОСТЬЮ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

*Известное теоретико-групповое описание способов построения 4-тензоров из комплексного 4-спинора позволяет ввести определение для 4-спиноров Джонса для полностью поляризованного света и связать этот объект с 4-вектором и антисимметричным 4-тензором Стокса для такого света. Это обобщает известную в литературе ситуацию, когда для описания полностью поляризованного света используются, как правило, только 4-вектор Стокса и 2-мерные спиноры Джонса.*

### 1. Введение и постановка задачи

Для аналитического описания состояния поляризации света используются 4 параметра Стокса [1]. При любом линейном оптическом процессе параметры Стокса падающего пучка линейно преобразуются в параметры Стокса вышедшего пучка с помощью матрицы Мюллера [2]; любой оптический элемент описывается своей матрицей Мюллера. Поляризация света может описываться также в рамках формализма Джонса [3-6]; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным вектором, линейные оптические элементы описываются 2-мерными матрицами Джонса. В литературе обсуждается множество возможных типов матриц Мюллера [7]. В частности, теория матриц Мюллера недеполяризующих оптических систем развивалась в работах П.И. Ламекина [8-15]: были описаны собственные поляризации всех типов недеполяризующих оптических систем; в рамках формализма матриц Мюллера построена общая классификация недеполяризующих оптических систем; построены полярные формы матриц Мюллера недеполяризующих систем.

В последние годы много внимания уделяется другим аспектам теории матриц Мюллера. Известно, что при описании полностью или частично поляризованного света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразований, изоморфная группе Лоренца. Это означает, что техника оперирования с преобразованиями Лоренца, хорошо развитая в релятивистской физике [16-19], может сыграть существенную эвристическую роль при анализе вопросов оптики поляризованного света. А.А. Богушем и другими были инициированы исследования теории матриц Мюллера с акцентом на их групповой структуре, в частности, на группе псевдоортогональных преобразований, изоморфных группе Лоренца [20-29]. При этом была описана общая факторизованная структура возможных матриц Мюллера, показана эффективность применения параметризации Федорова в теории матриц Мюллера лоренцевского типа, выполнен теоретико-групповой анализ степени неопределенности мат-

рицы Мюллера оптического элемента из результатов одного поляризационного измерения, построена классификация возможных вырожденных матриц Мюллера с нулевым определителем.

Стоит отметить, что 2-мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим также и для описания частично поляризованного света. Следует обратить внимание на то, что 4-векторы Стокса полностью и частично поляризованного света являются аналогами изотропных и времениподобных 4-векторов в рамках специальной теории относительности.

В настоящей работе известная теоретико-групповая задача о способах построения 4-тензоров из комплексного 4-спинора переформулируется как задача о связях между 4-спинорным (типа Джонса) и тензорным (типа Стокса) описаниями поляризованного света. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением полностью поляризованного света (предварительный анализ проблемы был частично выполнен в [23]).

Исходим из разложения биспинора второго ранга  $\Psi \otimes \Psi$  по тензорам [29]

$$U = \Psi \otimes \Psi = (-i\Phi + \gamma^b \Phi_b + i\sigma^{ab} \Phi_{ab} + \gamma^5 \tilde{\Phi} + i\gamma^b \gamma^5 \tilde{\Phi}_b) E^{-1}; \quad (1)$$

для матриц Дирака будем использовать спинорный базис. Обратные к (1) соотношения имеют вид:

$$\Phi_a = \frac{1}{4} \text{Sp}[E\gamma_a U], \quad \tilde{\Phi}_a = \frac{1}{4i} \text{Sp}[E\gamma^5 \gamma_a U],$$

$$\Phi = \frac{i}{4} \text{Sp}[EU], \quad \tilde{\Phi} = \frac{1}{4} \text{Sp}[E\gamma^5 U], \quad \Phi^{mn} = -\frac{1}{2i} \text{Sp}[E\sigma^{mn} U]. \quad (2)$$

Находим явный вид 4-вектора:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{2} (\xi^1 \eta_{\dot{2}} - \xi^2 \eta_{\dot{1}}), & \Phi_1 &= \frac{1}{2} (\xi^1 \eta_{\dot{1}} - \xi^2 \eta_{\dot{2}}), \\ \Phi_2 &= \frac{i}{2} (\xi^1 \eta_{\dot{1}} + \xi^2 \eta_{\dot{2}}), & \Phi_3 &= -\frac{1}{2} (\xi^1 \eta_{\dot{2}} + \xi^2 \eta_{\dot{1}}); \end{aligned} \quad (3)$$

4-псевдовектора и двух скаляров:

$$\tilde{\Phi}_a = 0, \quad \Phi = 0, \quad \tilde{\Phi} = 0 \quad (4)$$

и антисимметричного тензора:

$$\begin{aligned} \Phi^{01} &= \frac{i}{4} (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2 + \eta_{\dot{1}} \eta_{\dot{1}} - \eta_{\dot{2}} \eta_{\dot{2}}), & \Phi^{23} &= \frac{1}{4} (\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2 - \eta_{\dot{1}} \eta_{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}} \eta_{\dot{2}}), \\ \Phi^{02} &= -\frac{1}{4} (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2 + \eta_{\dot{1}} \eta_{\dot{1}} + \eta_{\dot{2}} \eta_{\dot{2}}), & \Phi^{31} &= -\frac{1}{4i} (\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2 - \eta_{\dot{1}} \eta_{\dot{1}} - \eta_{\dot{2}} \eta_{\dot{2}}), \\ \Phi^{03} &= -\frac{i}{2} (\xi^1 \xi^2 + \eta_{\dot{1}} \eta_{\dot{2}}), & \Phi^{12} &= -\frac{1}{2} (\xi^1 \xi^2 - \eta_{\dot{1}} \eta_{\dot{2}}). \end{aligned} \quad (5)$$

Собирая результаты вместе, имеем

$$\Psi = \begin{vmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_\alpha \end{vmatrix}, \Psi \otimes \Psi \Rightarrow \Phi = 0, \tilde{\Phi} = 0, \tilde{\Phi}_a = 0, \Phi_a \neq 0, \Phi_{mn} \neq 0. \quad (6)$$

Поскольку исходный 4-спинор определяется четырьмя комплексными величинами (восемью вещественными), то 10 величин в наборе  $\Phi_a \neq 0, \Phi_{mn} \neq 0$  не могут быть независимыми – должны существовать дополнительных условия. Отмечаем также, чтобы в (6) иметь вещественные вектор и тензор, нужно накладывать дополнительные ограничения.

Рассмотрим ограничение следующего вида:

$$\underline{\eta^{(+)} = +i \sigma^2 \xi^*} \Rightarrow \eta_1 = +\xi^{2*}, \eta_2 = -\xi^{1*}; \quad (7)$$

что приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} \Phi_0^+ &= -\frac{1}{2}(\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*}) < 0, & \Phi_3^+ &= \frac{1}{2}(\xi^1 \xi^{1*} - \xi^2 \xi^{2*}), \\ \Phi_1^+ &= \frac{1}{2}(\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*}), & \Phi_2^+ &= \frac{i}{2}(\xi^1 \xi^{2*} - \xi^2 \xi^{1*}); \\ (\Phi^{01})^+ &= \frac{i}{4}[\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*}], \\ (\Phi^{23})^+ &= \frac{1}{4}(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*}), \\ (\Phi^{02})^+ &= -\frac{1}{4}(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*}), \\ (\Phi^{31})^+ &= -\frac{1}{4i}(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*}), \\ (\Phi^{03})^+ &= -\frac{i}{2}(\xi^1 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{1*}), & (\Phi^{12})^+ &= -\frac{1}{2}(\xi^1 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{1*}). \end{aligned} \quad (8)$$

Существует другая симметричная возможность дополнительных условий:

$$\underline{\eta^{(-)} = -i \sigma^2 \xi^*} \Rightarrow \eta_1 = -\xi^{2*}, \eta_2 = +\xi^{1*}; \quad (10)$$

которая дает  $\Phi_a^- = -\Phi_a^+, (\phi^{ab})^- = (\Phi^{ab})^+$ .

## 2. Полностью поляризованный свет

Поскольку нулевая компонента 4-вектора Стокса равна интенсивности пучка света и должна быть положительной, случай (10) можно применять для описания стоксового 4-вектора и сопутствующего 4-тензора поляризации света:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \xi \\ \eta = -i \sigma^2 \xi^* \end{vmatrix}, \quad \Psi \otimes \Psi \Rightarrow S_a \neq 0, S_{mn} \neq 0, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2}(\xi^1 \xi^{1*} + \xi^2 \xi^{2*}) > 0, & S_3 &= -\frac{1}{2}(\xi^1 \xi^{1*} - \xi^2 \xi^{2*}), \\ S_1 &= -\frac{1}{2}(\xi^1 \xi^{2*} + \xi^2 \xi^{1*}), & S_2 &= -\frac{i}{2}(\xi^1 \xi^{2*} - \xi^2 \xi^{1*}), \end{aligned} \quad (12)$$

$$a_1 = S^{01} = \frac{i}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})],$$

$$b_1 = S^{23} = \frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 - \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} - \xi^{1*} \xi^{1*})],$$

$$a_2 = S^{02} = -\frac{1}{4} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) + (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})],$$

$$b_2 = S^{31} = -\frac{1}{4i} [(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2) - (\xi^{2*} \xi^{2*} + \xi^{1*} \xi^{1*})],$$

$$a_3 = S^{03} = -\frac{i}{2}(\xi^1 \xi^2 - \xi^{2*} \xi^{1*}), \quad b_3 = S^{12} = -\frac{1}{2}(\xi^1 \xi^2 + \xi^{2*} \xi^{1*}). \quad (13)$$

Для этого случая вычислим главный инвариант для 4-вектора

$$S_0 S_0 - S_j S_j = 0; \quad (14)$$

следовательно,  $S_a$  может рассматриваться как стоксов 4-вектор для полностью поляризованного света. В свою очередь, сопутствующий 4-тензор  $S^{mn}$  нужно рассматривать как стоксов тензор поляризации для полностью поляризованного света.

Вычислим два инварианта тензора  $S^{mn}$ :

$$I_1 = -\frac{1}{2} S^{mn} S_{mn} = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = 0, \quad I_2 = \frac{1}{4} \epsilon_{abmn} S^{ab} S^{mn} = \mathbf{a}\mathbf{b} = 0. \quad (15)$$

Для дальнейшего удобно ввести следующую параметризацию исходного биспинора Джонса  $\Psi$  с помощью четырех вещественных величин:

$$\Psi = \begin{vmatrix} N e^{i\alpha} \\ +M e^{i\beta} \\ -M e^{-i\beta} \\ N e^{-i\alpha} \end{vmatrix}, \quad \Psi \otimes \Psi \Rightarrow S_a \neq 0, \quad S_{mn} \neq 0. \quad (16)$$

Тогда из (12) следуют формулы для 4-вектора Стокс в виде:

$$S_0 = M^2 + N^2, \quad S_3 = M^2 - N^2,$$

$$S_1 = -2MN \cos(\alpha - \beta), \quad S_2 = 2MN \sin(\alpha - \beta); \quad (17)$$

т.е. изотропный вектор Стокса зависит только от трех параметров  $M, N, \alpha - \beta$ ; четвертый параметр  $(\alpha + \beta)$  может быть любым – он не влияет на явный вид 4-вектора Стокса:

$$\Psi = \begin{vmatrix} e^{+i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 & 0 & N e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ 0 & e^{+i(\alpha+\beta)/2} & 0 & 0 & +M e^{-i(\alpha-\beta)/2} \\ 0 & 0 & e^{-i(\alpha+\beta)/2} & 0 & -M e^{+i(\alpha-\beta)/2} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i(\alpha+\beta)/2} & N e^{-i(\alpha-\beta)/2} \end{vmatrix}$$

или кратко

$$\Psi = e^{i\gamma_5(\alpha+\beta)/2} \Psi^{(0)}. \quad (18)$$

Выражения для компонент 4-вектора Стокса определяются полностью только 4-спинором  $\Psi^{(0)}$ . Обратные к (22) формулы выглядят так:

$$M = \sqrt{\frac{S_0 + S_3}{2}}, \quad N = \sqrt{\frac{S_0 - S_3}{2}}, \quad e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{-S_1 + iS_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}. \quad (19)$$

Найдем в этой параметризации явный вид 4-тензора Стокса:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2}(N^2 \sin 2\alpha - M^2 \sin 2\beta), & b_1 &= +\frac{1}{2}(N^2 \cos 2\alpha - M^2 \cos 2\beta), \\ a_2 &= -\frac{1}{2}(N^2 \cos 2\alpha + M^2 \cos 2\beta), & b_2 &= -\frac{1}{2}(N^2 \sin 2\alpha + M^2 \sin 2\beta), \\ a_3 &= +NM \sin(\alpha + \beta), & b_3 &= -NM \cos(\alpha + \beta). \end{aligned} \quad (20)$$

Легко убеждаемся в справедливости равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^2 &= \mathbf{b}^2 = \frac{(N^2 + M^2)^2}{4}, & \mathbf{ab} &= 0, \\ \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 &= \frac{(N^2 + M^2)^2}{2}, & a_3^2 + b_3^2 &= M^2 N^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Эти соотношения позволяют найти величины  $M, N$ :

$$\begin{aligned} M^2 &= +\sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2} - \sqrt{a_3^2 + b_3^2}}, \\ N^2 &= +\sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2}} \mp \sqrt{\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}{2} - \sqrt{a_3^2 + b_3^2}}; \end{aligned} \quad (22)$$

обращаем внимание на существование двух разных решений. Если сопоставить эти формулы с (19), то понятно, что решения  $M > N$  соответствуют положительным  $S_3 > 0$ , а решения  $M < N$  соответствуют отрицательным  $S_3 < 0$ .

Полезно ввести комплексный 3-вектор Стокса  $\mathbf{s} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ :

$$s_1 = a_1 + i b_1 = \frac{i}{2} (\xi^1 \bar{\xi}^1 - \xi^2 \bar{\xi}^2),$$

$$s_2 = a_2 + ib_2 = -\frac{1}{2}(\xi^1 \xi^1 + \xi^2 \xi^2), s_3 = a_3 + ib_3 = -i \xi^1 \xi^2; \quad (23)$$

он преобразуется как 3-вектор относительно комплексной группы вращений  $SO(3.C)$ . Это означает, что в дополнение к спинорной технике Джонса и мюллеровского векторного формализма, можно применять и комплексный 3-мерный векторный формализм, базирующийся на группе  $SO(3.C)$ . Из (23) следуют равенства

$$s_1 + is_2 = -i \xi^2 \xi^2, \quad s_1 - is_2 = +i \xi^1 \xi^1, \quad s_3 = -i \xi^1 \xi^2; \quad (24)$$

в параметризации (16) они выглядят так:

$$s_1 + is_2 = -i M^2 e^{2i\beta}, \quad s_1 - is_2 = +i N^2 e^{2i\alpha}, \quad s_3 = -i MN e^{i(\alpha+\beta)}; \quad (25)$$

т.е.

$$e^{i\alpha} = \pm \sqrt{\frac{-s_2 - is_1}{N^2}}, \quad e^{i\beta} = \pm \sqrt{\frac{-s_2 + is_1}{M^2}}. \quad (26)$$

Отметим два соотношения

$$\frac{s_1 - is_2}{s_1 + is_2} = -\frac{N^2}{M^2} e^{2i(\alpha-\beta)}, \quad e^{i(\alpha+\beta)} = \frac{i}{MN} s_3. \quad (27)$$

Втрое соотношение в (27) означает, что вместе с ненаблюдаемым физически фактором  $e^{i(\alpha+\beta)}$  также ненаблюдаемым является фаза комплексной величины  $s_3$ .

Выражения для  $M, N$  из (22) можно представить в более краткой форме:

$$M^2 = +\sqrt{\frac{\mathbf{ss}^*}{2}} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{ss}^*}{2} - \sqrt{s_3 s_3^*}}, \quad N^2 = +\sqrt{\frac{\mathbf{ss}^*}{2}} \mp \sqrt{\frac{\mathbf{ss}^*}{2} - \sqrt{s_3 s_3^*}}. \quad (28)$$

Формулы говорят о том, что при заданном 4-векторе Стокса (есть процедура измерения его компонент) он однозначно фиксируется параметрами  $N, M, \Delta = \alpha - \beta$ , но при этом может существовать множество различных сопутствующих 4-тензоров Стокса, и свобода в их выборе определяется параметром  $\alpha + \beta$ . Другими словами, измеренный 4-вектор Стокса фиксирует у 4-спинора Джонса только три параметра из четырех, соответственно существует множество 4-векторов Стокса, ограниченных этой дополнительной однопараметрической неопределенностью в 4-спиноре Джонса.

Наиболее простой выбор частного случая 4-тензора Джонса достигается при  $\beta = -\alpha$ :

$$\Psi^{(0)} = \begin{vmatrix} N e^{+i\alpha} \\ +M e^{-i\alpha} \\ -M e^{+i\alpha} \\ N e^{-i\alpha} \end{vmatrix}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 a_1^{(0)} &= -\frac{1}{2}(N^2 + M^2)\sin 2\alpha, & b_1^{(0)} &= +\frac{1}{2}(N^2 - M^2)\cos 2\alpha, \\
 a_2^{(0)} &= -\frac{1}{2}(N^2 + M^2)\cos 2\alpha, & b_2^{(0)} &= -\frac{1}{2}(N^2 - M^2)\sin 2\alpha, \\
 a_3^{(0)} &= 0, & b_3^{(0)} &= -NM, & s_3 &= -iMN.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Зависимость тензора Стокса от дополнительного параметра  $\alpha + \beta$  можно пояснить, обратившись к формулам (2)

$$\Phi_a = \frac{1}{4} \operatorname{Sp}[E\gamma_a U], \quad \Phi^{mn} = -\frac{1}{2i} \operatorname{Sp}[E\sigma^{mn} U].$$

Ниже используем обозначения  $\sigma = (\alpha + \beta)/2$ ,  $\exp[i\gamma^5\sigma] = \Gamma_\sigma$ . С учетом симметричности матриц  $\gamma^5$  и  $\Gamma_\sigma$  получаем

$$\begin{aligned}
 S_a &= \frac{1}{4} \operatorname{Sp}[E\gamma_a(\Gamma_\sigma\Psi^0 \otimes \Gamma_\sigma\Psi^0)] = \frac{1}{4} \operatorname{Sp}[\Gamma_\sigma E\gamma_a \Gamma_\sigma(\Psi^0 \otimes \Psi^0)], \\
 S^{mn} &= -\frac{1}{2i} \operatorname{Sp}[E\sigma^{mn}(\Gamma_\sigma\Psi^0 \otimes \Gamma_\sigma\Psi^0)] = -\frac{1}{2i} \operatorname{Sp}[\Gamma_\sigma E\sigma^{mn} \Gamma_\sigma(\Psi^0 \otimes \Psi^0)].
 \end{aligned}$$

Учитывая антикоммутируемость матрицы  $\gamma^5$  с  $\gamma_a$  и коммутируемость с  $E$ , находим:

$$\begin{aligned}
 S_a &= \frac{1}{4} \operatorname{Sp}[\Gamma_\sigma \Gamma_\sigma^{-1} E\gamma_a (\Psi^0 \otimes \Psi^0)] = \Phi_a^{(0)}, \\
 S^{mn} &= -\frac{1}{2i} \operatorname{Sp}[\Gamma_\sigma \Gamma_\sigma E\sigma^{mn} (\Psi^0 \otimes \Psi^0)]. \tag{31}
 \end{aligned}$$

Отсюда с учетом  $\Gamma_\sigma \Gamma_\sigma = \Gamma_{2\sigma}$ , имеем

$$\begin{aligned}
 S^{mn} &= -\frac{1}{2i} \operatorname{Sp}[\Gamma_{2\sigma} E\sigma^{mn} (\Psi^0 \otimes \Psi^0)] \neq (\Phi^{mn})^{(0)}, \\
 (S^{mn})^{(0)} &= -\frac{1}{2i} \operatorname{Sp}[E\sigma^{mn} (\Psi^0 \otimes \Psi^0)]. \tag{32}
 \end{aligned}$$

Отметим следующее: исходный 4-спинор в (1) определяется 4 независимыми комплексными параметрами (или 4 комплексными функциями). Соответствующие ему тензоры содержат  $4 + 6 = 10$  параметров; условия изотропности комплексного 4-вектора и тензора накладывают дополнительные условия, но их явно недостаточно, чтобы оставить только 4 независимых величины. Можно показать, что тензорное условие связи

$$S^{ab} S_b = 0 \tag{33}$$

эквивалентно следующему

$$S_0 \mathbf{a} = \mathbf{S} \times \mathbf{b}. \quad (34)$$

Построенные выше релятивистские 4-спиноры Джонса являются обобщением нерелятивистских 2-мерных спиноров Джонса, которые обычно применяются в литературе.

Возможность введения комплексных 4-спиноров Джонса для частично поляризованного света в аналогичном подходе будет детально исследована в отдельной работе (частичный анализ этой проблемы приведен в [23]).

#### *СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ*

1. *Stokes, G.G.* On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources / G.G. Stokes // Trans. Cambridge Phil. Soc. – 1852. – Vol. 9. – P. 399–416.
2. *Mueller, H.* Memorandum on the polarization optics of the photo-eleastic shutter; Report № 2 of the OSRD project OEMsr576, Boston, MA, USA, 1943.
3. *Jones, R.C.* New calculus for the treatment of optical systems. I. Description and discussion of the calculus / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 488–493.
4. *Hurwitz, H.* A new calculus for the treatment of optical systems. II. Proof of three general equivalence theorems / H. Hurwitz, R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 493–499.
5. *Jones, R.C.* A new calculus for the treatment of optical systems. III. The Sohncke Theory of optical activity / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 500–503.
6. *Jones, R.C.* A new calculus for the treatment of optical systems, IV / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1942. – Vol. 32. – P. 486–493.
7. *Снопко, В.Н.* Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск : Наука и техника, 1992. – 334 с.
8. *Lamekin, P.I.* Intrinsic polarization states of corner reflectors / P.I. Lamekin // Sov. J. Opt. Tech. – 1987. – Vol. 54. P. 658–661.
9. *Ламекин, П.И.* Необходимые и достаточные условия недеполяризуемости оптических систем / П.И. Ламекин // Оптика и спектроскопия. – 1996. – Т. 81, вып. 1. – С. 164–168.
10. *Ламекин, П.И.* Преобразование степени поляризации излучения оптическими системами / П.И. Ламекин // Оптический журнал. – 1997. – № 6. – С. 50–55.
11. *Lamekin, P.I.* Polar forms of Mueller matrices of nondepolarizing optical systems / P.I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2000. – Vol. 88. – № 5. – P. 737–742.
12. *Lamekin, P.I.* Polarization Eigenstates of Nondepolarizing Optical Systems / P.I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2001. – Vol. 91. – № 5. – P. 741–748.
13. *Lamekin, P.I.* Formalism of Mueller matrices and its application to calculation of phase-shifting devices / P.I. Lamekin, Yu.V. Sivaev, K.G. Predko // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V.V. Shepelevich, N.N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 289–293.
14. *Lamekin, P.I.* Mueller matrices of nondepolarizing optical systems: the theory and a new method of determination / P.I. Lamekin // Optics of Crystals:

- Proceedings of SPIE / V.V. Shepelevich, N.N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – Р. 294–302.
15. **Ламекин, П.И.** Кратные собственные значения и собственные состояния поляризации матриц Мюллера частичных поляризаторов / П.И. Ламекин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 5(8). – С. 128–132.
  16. **Федоров, Ф.И.** Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1958. – 380 с.
  17. **Федоров, Ф.И.** Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
  18. **Федоров, Ф.И.** Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
  19. **Березин, А.В.** Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.
  20. **Bogush, A.A.** On Unique Parametrization of the Linear Group and Its Subgroups by Using the Dirac Algebra Basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11. – № 1. – Р. 1–24
  21. Бикватерионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51. – № 5. – С. 71–76.
  22. **Богуш, А.А.** Матрицы Мюллера в поляризационной оптике / А.А. Богуш // Веснік НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 96–102 .
  23. **Red'kov, V.M.** Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – Р. 203–220.
  24. **Овсиюк, Е.М.** Транзитивность в теории группы трехмерных вращений и формализм Стокса-Мюллера в поляризационной оптике / Е.М. Овсиюк // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя науки : матэматыка, фізіка, біялогія. – 2011. – № 1(37). – С. 69–75.
  25. **Ред'ков, В.М.** Транзитивность в теории группы Лоренца и формализм Стокса-Мюллера в поляризационной оптике / В.М. Ред'ков, Е.М. Овсиюк // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 18–23.
  26. **Овсиюк, Е.М.** О нахождении параметров матриц Мюллера лоренцевского типа по результатам поляризационных измерений / Е.М. Овсиюк // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя науки: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2012. – № 2(40). – С. 59–71.
  27. **Овсиюк, Е.М.** Полугруппы Мюллера ранга 1 и 2. / Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.М. Ред'ков // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2(11). – С. 34–40.
  28. **Ovsyuk, E.M.** Degenerate 4-dimensional matrices with semi-group structure and polarization optics / E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov // XLVIII Всероссийская конференция по проблемам физики частиц, физики плазмы и конденсированных сред, оптоэлектронники посвящается 100-летию профессора Терлецкого Я.П. Россия, г. Москва, 15-18 мая 2012 г. // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2012.
  29. **Ред'ков, В.М.** Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Ред'ков. – Минск : Белорусская наука, 2009. – 495 с.

Поступила в редакцию 08.11.2012 г.

---

УДК 591.69-9:599.742.13

Ю.Ю. МАСАЛКОВА

## ВЛИЯНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА РАЗВИТИЕ ЯИЦ ОТДЕЛЬНЫХ ВИДОВ ГЕЛЬМИНТОВ СОБАК

В связи с интенсификацией развития общества одной из важнейших проблем современности становится проблема паразитарного, в частности гельминтологического загрязнения урбанизированных территорий возбудителями гельминтозов домашних плотоядных, прежде всего, собак. Решение данной проблемы напрямую связано с выяснением устойчивости инвазионного начала гельминтов собак к воздействию как природных, так и антропических факторов среды. Статья содержит обзор имеющихся материалов в отношении данного вопроса, в частности, влияние на выживаемость инвазионного начала *T. canis*, *T. leonina* относительной влажности, температуры почвы, ее типа, времени попадания и глубины залегания в почве яиц гельминтов указанных видов; кроме того, некоторые выявленные особенности экологии *T. hydatigena*, *T. pisiformis*, *E. granulosus*.

В настоящее время в силу специфики развития современного общества во всем мире непрерывно возрастает количество домашних питомцев, среди которых первое место, безусловно, занимают собаки. Однако далеко не каждый человек, приобретая собаку, имеет представления об особенностях содержания данных животных в домашних условиях, ответственности за них, и, сталкиваясь с множеством трудностей, отказывается от животного, выпуская его во внешнюю среду. Этот процесс, в свою очередь содействует росту численности на урбанизированных территориях безнадзорных собак (а также кошек и др. животных), которые благодаря особенностям своего существования становятся переносчиками целого ряда опасных для человека заболеваний, включая гельминтозы. По доступным для нас данным [1] всего в мире у собак зарегистрировано паразитирование около 150 видов гельминтов, из которых 57 видов относятся к классу Trematoda, 48 видов – классу Cestoda, 40 видов – классу Nematoda и 5 видов – классу Acanthocephala. Причем 43 из 150 видов гельминтов отмечено паразитирование у сельскохозяйственных животных, а 36 – у человека. В настоящее время установлено, что среди всех заболеваний плотоядных гельминтозы занимают четвертое-пятое место [2; 3], в структуре всех паразитарных болезней животных в целом на гельминтозы приходится 84,7%, оставшиеся 15,3% составляютprotozoïческие болезни [4].

Постоянное увеличение в мире численности собак, в том числе и безнадзорных, несомненно, ведет к накоплению в окружающей среде (почве и водоемах) выделяемых ими фекалий. Так на 2010 год в равнинном пояссе Дагестана [5] насчитывалось более 75 тыс. собак, в том числе около 40 тыс. пастушьих и прифермерских. В г. Новосибирске по

предварительным оценкам [6] количество домашних плотоядных, включая собак и кошек, составляет 267 тыс. особей, причем более половины из них приходится на собак. В Кабардино-Балкарской Республике [7] согласно данным членов Кабардино-Балкарского общества кинологов зарегистрировано около 2,6 тысяч безнадзорных и бродячих собак, которые загрязняют окружающую среду фекалиями, способствуя ее контаминации яйцами и личинками гельминтов. В Москве и Московской области [8] популяция собак насчитывает более 300 тыс. особей, по другим данным [9] эта цифра давно превышает 1 млн. По данным Института кормов для домашних животных (Pet Food Institute) [10], в 2006 г. в США численность собак составила 65,7 млн особей и эта цифра постоянно возрастает (например, с 54 млн в 1981 г. до 65,7 млн в 2006 г.). В Великобритании в этом же году зарегистрировано 5,6 млн собак. Около 30% семей во Франции, 25% – в Великобритании, 13 % – в Японии, 11% – в Швейцарии, 30-50% домовладельцев США содержат собак и кошек [10].

На территории Республики Беларусь специального учета численности собак не проводится, однако официально зарегистрированное коммунальной службой количество собак за 2005 г., 2007 г. в целом по стране отражено в таблице 1. Только на территории г. Витебска ежегодно отлавливается более тысячи безнадзорных животных (собаки, коты) разных возрастов, что составляет по приблизительной оценке пятую часть их истинного количества.

**Количество собак, официально зарегистрированных по областным центрам Республики Беларусь, гол.**

Город	2005 г.	2007 г.
Брест	3453	3674
Витебск	1515	1936
Гомель	1719	3638
Гродно	2192	2373
Минск	8387	9311
Могилев	1939	2071
<b>ИТОГО</b>	<b>19205</b>	<b>23003</b>

Если посчитать, что одна собака в среднем в сутки выделяет объем фекалий, соответствующий 3% массы ее тела (от 270 до 450 грамм) [11; 12; 13], то с учетом численности собак, общее количество фекалий в разных странах и городах мира достигает тысяч и миллионов тонн. Вместе с фекалиями в окружающую среду поступают и паразитирующие в организме животных гельминты, что способствует ее паразитарному загрязнению и распространению инвазии среди других животных и в популяции людей.

В мире проводится множество исследований по оценке загрязнения внешней среды гельминтами собак, в Республике Беларусь работа в данном направлении так же проводится (И.Н. Дубина, А.М. Субботин, Л.Э. Бекиш, Л.В. Скрипова и др.), но целостной картины обсемененности почвы страны пока не существует. Согласно данным “Республиканского центра гигиены, эпидемиологии и общественного здоровья” [14] в период с 2001 по 2010 гг. индекс паразитарной загрязненности почвы Республики Беларусь снизился на 18,5% на ряду с тенденцией к снижению динамики заболеваемости гельминтозами населения страны с интенсивностью 16%. Индекс паразитарной загрязненности сточной воды возрос к 2010 г. по сравнению с 2001 г. на 1,6%.

В настоящее время в связи с необходимостью поиска наиболее эффективных и экономичных методов очистки объектов окружающей среды от яиц гельминтов, в частности гельминтов собак, большое внимание привлекает вопрос о выживаемости инвазионного начала во внешней среде.

С учетом вышесказанного нами была поставлена задача обобщить доступные литературные данные в области влияния отдельных факторов среды на выживаемость в ней некоторых видов гельминтов собак.

Яйца гельминтов, попадая в окружающую среду, подвергаются воздействию целого ряда неблагоприятных факторов, таких, как относительная влажность воздуха, влажность и температура почвы, солнечная инсоляция, воздействие химических веществ и т.д., что может способствовать их гибели. Но в ряде случаев сочетание факторов способствует формированию оптимальных условий для развития яиц гельминтов до инвазионной стадии, находясь в которой они представляют непосредственную опасность заражения.

Установлено, что наиболее важными факторами, определяющими возможноть и скорость развития инвазионного начала *Toxocara canis* (Werner, 1782 г.) собак в почве являются ее относительная влажность и температура. В зависимости от влажности и температуры развитие яиц токсокар в почве может длиться от 5 до 36 суток [15; 16; 17; 18; 19]. Оптимальная относительная влажность воздуха для развития яиц токсокар составляет 80-85%, а почвы – 20% и выше при ее оптимальной температуре +23-30°C. В данных условиях личинка способна развиться за 5-8 суток [16; 20]. П.А. Солопов [21] в качестве оптимальных для созревания яиц токсокар указывает более узкие границы относительной влажности и температуры почвы – 23-25°C и 82-85% соответственно. Минимальная относительная влажность почвы, при которой возможно развитие яиц токсокар, составляет 5-8% [22].

Температурными пределами развития яиц токсокар в почве по данным Л.Н. Старчиковой [20] являются +10°C-+13°C и +37°C. Когда температурные значения выходят за указанные пределы, гибель яиц ускоряется и основная их масса погибает в течение 7 суток. Некоторые источники [22] указывают в качестве температурных пределов развития яиц

токсокар в почве значения  $+12^{\circ}\text{C}$  и  $+37^{\circ}\text{C}$ , другие [18] –  $+13^{\circ}\text{C}$  и  $+36^{\circ}\text{C}$ . Согласно одним исследованиям [16] при температуре  $+15^{\circ}\text{C}$  развитие яиц токсокар приостанавливается, они переходят в состояние анабиоза, другие исследования [17] свидетельствуют о гибели яиц токсокар при указанной температуре почвы на всех стадиях развития в течение 5-15 дней. При температуре почвы  $+17^{\circ}\text{C}$  срок развития яиц токсокар составляет 44 дня, при  $20^{\circ}\text{C}$  – 23 дня, при  $26^{\circ}\text{C}$  – 13 дней, при  $28^{\circ}\text{C}$  – 12 дней [17], или согласно исследованиям А.Я. Лысенко и др. [16] при  $+13 - +18^{\circ}\text{C}$  – 36 суток,  $+25^{\circ}\text{C}$  – 15 суток. При температуре  $+37^{\circ}\text{C}$  яйца токсокар в почве гибнут в течение 5 суток [19].

Многолетними исследованиями А.М. Субботина [23] установлены сроки развития яиц *Toxocara canis* в окружающей среде на севере Республики Беларусь в зависимости от солнечной инсоляции, температуры. 33-36 дней, по данным А.М. Субботина, требуется для достижения инвазионной стадии яиц *Toxocara canis* в условиях лета на территории Витебской области и 20-21 день или 13-14 дней в воде при температуре среды  $18-22^{\circ}\text{C}$  или  $24-28^{\circ}\text{C}$  соответственно. Яйца стронгилят плотоядных в опыте достигали инвазионной стадии при тех же условиях в два раза быстрее. Кроме того, было установлена гибель яиц всех видов гельминтов собак под прямыми солнечными лучами не более чем за 6 часов.

Экспериментальные исследования, проведенные Н.Ю. Куприяновой [19] в природно-климатических условиях г. Иркутска, показали зависимость скорости созревания яиц *Toxocara canis* от времени попадания в почву и глубины залегания в ней.

На поверхности почвы развитие яиц токсокар начиналось во второй половине мая. Минимальными сроками развития – 18-23 дня характеризовались яйца, попавшие в почву в конце июня-июле. Попавшие в почву ранее или позднее указанного периода яйца характеризовались более длительными сроками развития: поступившие в мае – начале июня – в течение 32-47 дней, а яйца, поступившие в почву в августе, начиная с начала месяца, резко замедляли свое развитие и переходили в стадию анабиоза. Яйца, находящиеся в почве на глубине 20 см начинали развитие только при наступлении устойчивых оптимальных температур почвы – в конце первой декады июля. Этим объясняется то, что развитие яиц, поступивших в почву в начале, середине мая и начале июня закончилось одновременно. Сроки развития яиц в данном варианте опыта колебались от 55 до 89 суток, резко замедлялось и полностью останавливалось развитие яиц с конца августа и начала сентября соответственно. Кроме того, в результате исследования установлена 68% выживаемость созревших яиц токсокар в зимний период на поверхности почвы под снежным покровом при температуре от  $-20^{\circ}\text{C}$  до  $-25^{\circ}\text{C}$  и 85% выживаемость – в аналогичных условиях в почве на глубине 20 см.

Высокую устойчивость к воздействию неблагоприятных факторов внешней среды яиц вида *Toxascaris leonina* (Linstow, 1902) показали сходные исследования, проведенные в условиях Республики Башкортостан [24].

С увеличением глубины закладки яиц в почву сроки их развития возрастили, количество погибших яиц снижалось: первоначально развитие начинали яйца на поверхности почвы, затем на глубине 5-10 см. Причем данный процесс наблюдался только, когда температура воздуха в среднем за декаду составляла +10°C и более. Зимой развитие приостанавливалось, 52-66% яиц благополучно перезимовывали. Сроки развития и выживаемость яиц *T. leonina* значительно определяются временем попадания их в почву: 18-41 день при поступлении в июне-августе (наименьший процент погибших), 232-268 дней – в сентябре-октябре (наибольший процент погибших). Следовательно, оптимальные условия для развития яиц данного вида гельминта складываются при попадании их в почву в июне – июле.

По типам почв наиболее благоприятными для развития и созревания яиц *T. leonina* до инвазионной стадии явились почвы выщелоченного чернозема, наименее – суглинистые почвы [24], в то время как оптимальными для развития яиц *Toxocara canis* были отмечены глинистые влагомягкие почвы [20; 22].

На территории Витебской области Республики Беларусь И.Н. Дубина [25; 26] исследовал влияние температуры почвы, температуры и влажности почвы в сочетании, типа почвы, солнечной инсоляции, глубины залегания в почве на выживаемость яиц гельминтов *Taenia hydatigena* (Pallas, 1766), *Taenia pisiformis* (Bloch, 1780), *Echinococcus granulosus* (Batsch, 1786). Установлено, что яйца указанных видов паразитов при нахождении при температуре 90°C характеризуются появлением необратимых изменений структуры и 100% гибелью уже через 2 минуты. При воздействии температуры 70°C все яйца погибали через 7 минут, 60°C – в период через 4-6 часов, 47-50°C – после 12 часов температурного воздействия. Оптимальной температурой для нормальной жизнедеятельности яиц цестод указанных видов была определена температура от +3°C до +40°C, 99,9% яиц погибали после облучения их прямыми солнечными лучами в течение 3-5 часов, а наиболее благоприятной для их развития явилась влажная глинистая почва.

### Заключение

Как видно из вышеизложенного, исследования влияния факторов среды на развитие и сохранение в ней возбудителей гельминтозов собак проводятся, данные зафиксированы, но они довольно немногочисленны, разрознены и не дают единой целостной всеобъемлющей картины в отношении рассматриваемого вопроса. Неисследованным остается выживаемость яиц и личинок гельминтов собак в почве и водной среде при различных значениях pH, разном количестве кислорода, частотах ультразвукового, электромагнитного излучения, а так же комплексное действие указанных факторов, что требует проведения тщательных исследований в данном направлении.

К тому же в условиях постоянно нарастающего техногенного воздействия на окружающую среду, в частности ее загрязнения, весьма акту-

альны будут исследования по оценке влияния различных химических элементов и соединений в отдельности и при их одновременном присутствии в почве и водоемах на сохранение и развитие в них инвазионного начала гельминтов собак. Большой интерес представляет и комплексное воздействие различных химических, климатических, биологических и др. факторов на выживаемость и сроки развития яиц.

Необходимо иметь в виду, что риск заражения промежуточных хозяев и человека находится в прямой зависимости от устойчивости возбудителей инвазии (яиц) во внешней среде, их выживаемости и инвазионной способности. Чем более полной информацией будет владеть человечество в отношении данных вопросов, тем больше вариантов откроется к их решению.

#### *СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ*

1. *Делянова, Р.Ш.* Распространение гельминтов собак по различным географическим зонам СССР / Р.Ш. Делянова // Труды всесоюзного института гельминтологии им. Академика К.И. Скрябина. – Сельхозгис, 1959. – Т. 6. – С. 115–120.
2. *Сивкова, Т.Н.* Распространение гельминтозов собак на территории Перми / Т.Н. Сивкова // Ветеринарная жизнь. – 2007. – № 2. – С. 5.
3. *Пешков, Р.А.* Паразитофауна собак и кошек мегаполиса Москвы / Р.А. Пешков // Ветеринарный консультант. – 2006. – № 13. – С. 12–13.
4. Фауна гельминтов сельскохозяйственных животных Кабардино-Балкарской Республики / А.М. Биттиров [и др.] // Российский паразитологический журнал. – 2010. – № 4. – С. 6–8.
5. *Гаджиев, И.Г.* Фауна гельминтов плотоядных и диких псовых (Canidae) в равнинном поясе Дагестана / И.Г. Гаджиев, А.М. Атаев, М.Г. Газимагамедов // Российский паразитологический журнал. – 2010. – № 4. – С. 12–15.
6. *Зубарева, И.М.* Обсемененность почвы г. Новосибирска яйцами и спорогонистами паразитов / И.М. Зубарева, О.С. Ощепкова // Вестник Новосибирского государственного аграрного университета. – 2004. – № 1. – С. 72–75.
7. *Журавлев, А.С.* Основные гельминтозы собак в регионе Северного Кавказа / А.С. Журавлев // Вестник Красноярского государственного аграрного университета. – 2008. – № 5. – С. 257–259.
8. *Воличев, А.Н.* Гельминты и простейшие плотоядных в мегаполисе Москвы / А.Н. Воличев // Ветеринария. – 1999. – № 11. – С. 7–9.
9. Паразитарная ситуация в России по новым и возвращающимся гельминтозам / А.В. Успенский [и др.] // Ветеринария. – 2006. – № 3. – С. 3–6.
10. *Бессонов, А.С.* Toxocara spp. и токсокароз: проблемы эпидемиологии и перспективы борьбы / А.С. Бессонов // Ветеринария. – 2002. – № 3. – С. 55–58.
11. *Федотов, С.Г.* Гельминтофауна плотоядных животных Архангельской области / С.Г. Федотов, В.В. Горохов // Ветеринария. – 2006. – № 7. – С. 33–35.
12. *Бекиш, Л.Э.* Обсемененность почвы г. Витебска яйцами токсокар / Л.Э. Бекиш // Вестник Витебского государственного медицинского университета. – 2006. – Т. 5. – № 2. – С. 105–110.

13. *Верета, Л.Е.* Обсемененность почвы яйцами токсокар в детских дошкольных учреждениях Москвы и ее источники / Л.Е. Верета, О.И. Мамыкова // Медицинская паразитология и паразитарные болезни. – 1984. – № 3. – С. 19–22.
14. Гельминтозы, протозоозы, трансмиссивные зоонозы, заразные кожные и венерические заболевания в Республике Беларусь: аналитический бюллетень за 2008 – 2010 года / Республиканский центр гигиены и эпидемиологии. – Минск, 2008 г., 2009 г., 2010 г.
15. *Гламаздин, И.Г.* Токсокароз собак – проблема практической ветеринарии / И.Г. Гламаздин, С.В. Петрушина // Ветеринарный консультант. – 2006. – № 12. – С. 18–19.
16. *Лысенко, А.Я.* Токсокароз / А.Я. Лысенко, Т.И. Константинова, Т.И. Автюхина. – М., 1996. – 36 с.
17. *Радун, Ф.Л.* Развитие яиц *T. canis* в зависимости от температуры / Ф.Л. Радун // Труды ВСХИЗО. – М., 1971. – Вып. 44. – С. 202–206.
18. *Радун, Ф.Л.* К эпизоотологии токсокароза собак / Ф.Л. Радун // Проблемы паразитологии: Труды VII научной конференции паразитологов в УССР, Киев, 1972 г. – Ч. 2. – С. 150–151.
19. *Куприянова, Н.Ю.* География токсокароза в СССР. Сообщение 1. Ареал Toxocara canis (Werner, 1772) / Н.Ю. Куприянова // Медицинская паразитология и паразитарные болезни. – 1988. – № 4. – С. 73–77.
20. *Старчикова, Л.Н.* Токсокароз – общее заболевание животных и человека / Л.Н. Старчикова // Налоги. Инвестиции. Капитал. – 2003. – № 5, 6,1. – С. 226.
21. *Солопов, П.А.* Иммуноферментный метод диагностики токсокароза собак, сероэпизоотологический мониторинг и терапия : дис. ...канд. вет. наук : 03.00.19 / П.А. Солопов. – Рязань, 2009. – 114 л.
22. *Березина, Е.С.* Особенности распространения токсокароза в популяциях собак и человека / Е.С. Березина // Ветеринарная патология. – 2006. – № 3. – С. 45–56.
23. *Субботин, А.М.* Гельминты собак Беларуси и меры борьбы с ними : автограф. дис. ...канд. вет. наук: 03.00.19 / А.М. Субботин; РУП “Белорусский научно-исследовательский институт экспериментальной ветеринарии им. С.Н. Вышеселского”. – Минск, 2002. – 20 с.
24. *Дементьев, Е.П.* Влияние природно-климатических условий Республики Башкортостан на выживаемость и сроки развития яиц гельминтов / Е.П. Дементьев, М.А. Казанина // Успехи современного естествознания. – 2009. – № 2. – С. 81–82.
25. *Дубина, И.Н.* Роль гельминтов в развитии патологии у собак / И.Н. Дубина // Ветеринарная медицина Беларуси. – 2008. – № 1-2. – С. 14–24.
26. *Дубина, И.Н.* Экологические закономерности распространения и циркуляции возбудителей цестодозов животных в окружающей среде / И.Н. Дубина // Актуальные проблемы интенсивного развития животноводства: Материалы XI международной научно-практической конференции, посвященной 75-летию кафедры разведения и генетики сельскохозяйственных животных УО “БГСХА”, Горки, 2-4 декабря 2008 г. / Белорусская государственная сельскохозяйственная академия ; редкол.: М.В. Шалак [и др.]. – Горки, 2008. – С. 27–34.

Поступила в редакцию 05.11.2012 г.

УДК 910.1

*О.Е. АФАНАСЬЕВ*

## ОБЪЕКТ И ПАРАДИГМЫ ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЯ КАК НАУЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ В ГЕОГРАФИИ

*Природопользование рассматривается как отдельное сквозное направление географии, объектом исследования которого является бинарная система “Человек – Природа” во временной динамике ее развития. Историко-географический анализ пространственных форм природопользования (или территориальных систем природопользования) является одним из важных инструментов познания и прогнозирования регионального развития. Проанализированы возможности реализации в исследованиях проблематики регионального природопользования важнейших научных парадигм.*

### **Введение**

История взаимоотношений человеческого общества и природы сложна и противоречива. Будучи творением природы, человек не может существовать без использования ее природных ресурсов (как в узком их понимании – например, минеральных, водных, почвенных, так и в широком – например, вмещающих ресурсов геопространства). В географии существуют термины, которые определяют процесс взаимодействия общества и природы. Основным из них является “природопользование” – сложный системный, мультифакторный, временной и многоаспектный процесс, взаимообусловленный природными, социальными, этническими и другими институтами развития. При этом важнейшим условием, определяющим формы природопользования человеческого общества, являются особенности географической (окружающей) среды. Природопользование как явление соответствует всей истории развития человечества как рода видов *Homo habilis* (“Человек умелый”) и *Homo sapiens* (“Человек разумный”) и как процесс проистекает из глубокой древности, так же как и хозяйствование, – в связи с насущными жизненными потребностями людей – с охотой, рыболовством, скотоводством, земледелием. На самых ранних стадиях развития хозяйства, еще при позднем палеолите, охотники на крупных млекопитающих (мамонтов и т.п.) уже сильно изменяли окружающую среду.

### **Понятие природопользование**

Понятие “природопользование” широко распространено и в фундаментальной научно-теоретической сфере, и в среде практической (прикладной) деятельности. Впрочем, трактовка его достаточно широка – от узкопрофессиональных определений, связанных с определенными сферами научно-практического интереса (выделяется множество направлений и вариаций трактовки данного термина: природоведческий / физико-географический, ресурсоведческий / экономический, социально-экономический / экономико-географический, экологический / геоэкологический-биосферный, юридический и др.) до широкого понимания приро-

допользования в качестве характеристики всей глобальной системы “Человек – Окружающая среда” (или “Человек – Природа”), процессов, взаимосвязей, отношений в ней. Подобный “размах” в понимании термина не случаен. Напротив, он обусловлен всем процессом общественно-экономического развития, эволюции общества как научно-технологической, так и ментальной. Соответственно, окончательно не оформилась и методология данной области знания, чем обусловлено наличие противоречий во взглядах отдельных ученых на содержание ее объект-предметного компонента, существование значительного количества подходов к классификации направлений и содержания видов природопользования, и довольно часто имеющие место отличные (часто диаметрально противоположные) видения методологических парадигм науки. Несмотря на то, что понимание природопользования в качестве отдельной науки является широко принятым, тем не менее, до сих пор существуют противоречивые взгляды относительно ее принадлежности к той или иной “семье” наук (как минимум – к географии, экологии, экономике) или же вообще ставится под сомнение ее особый статус как науки с позиции якобы отсутствия собственной научной методологии, ее базирования на методах иных научных направлений. Считаем подобные взгляды глубоко ошибочными, не соответствующими реальному месту и роли научных и практических знаний, накопленных в природопользовании как научном направлении, хотя его и можно считать одним из наиболее молодых наук географического содержания. Поэтому попробуем разобраться с основными методологическими положениями этого научного географического направления.

Понятие “природа” в широком смысле отражает все сущее, является синонимом мира вообще, и в этом смысле общество оказывается ее частью со всеми исходными особенностями их соотношений. В узком смысле под природой понимается та сфера действительности, которая относительно противостоит обществу и испытывает на себе его влияние. Разграничение природы и общества, выявление их взаимных связей, механизмов и способов взаимодействия – бинарная задача. Теоретическому осмыслению комплекса отношений в системе “Человек – Природа” посвящено множество публикаций как философско-социологического содержания, так и в рамках исследований конкретных наук [1]. В многочисленных публикациях одной из главных форм связей общества и природы определяется производственная деятельность как основа воспроизводства и развития общества, с помощью которой осуществляется обмен веществом между человеком и природой [2]. Впрочем, многими исследователями отмечено, что процесс взаимодействия и взаимозависимости человека и природы гораздо шире, и в этом смысле термин “природопользование” выступает как общая система взаимоотношений человека с природой, как комплекс всех воздействий человека на природу и воздействий природы на человека [1].

Природопользование – это процесс, в основе которого лежат субъект-объектные отношения. Объектом в них выступает природа, а субъектом – пользователь среды (человек, группа людей как социальная целостность) [3].

В этом аспекте природопользование может представляться не отдельной наукой, не объектом определенной научной дисциплины, а должно быть отнесено к общенаучным и даже философским понятиям [4].

Следовательно, главной задачей природопользования является исследование отношений между человеком и природой. В то же время в большинстве исследований зачастую рассматривается лишь влияние человека на окружающую среду (экологическое направление) и взаимосвязь природных ресурсов и экономики (экономика ресурсо-и недропользования), тогда как существуют и другие стороны такого взаимодействия: влияние природы на особенности культуры, экологические факторы формирования тех или иных этносов, традиции их культуры природопользования, формирования региональных различий (хозяйственных, ментальных, социокультурных и т.п.), а также уникальные виды и типы природопользования, присущие локальным региональным общностям. Указанная проблематика может представлять собой самостоятельный интерес и чрезвычайно важна для теоретического обоснования концепции природопользования [5]. Поэтому для современной науки актуальна необходимость разработки общих принципов осуществления всякой деятельности, связанной с применением ресурсов природной среды, необходимость использования геопространства в различных целях человеческого общества. Конечная цель при этом – обеспечить единый подход к природе как к общей основе жизнедеятельности человека и общества. Именно в этом видел задачи природопользования как науки ее основатель – профессор Ю.Н. Куражковский [6]. В дальнейшем, как указывает Н.Ф. Реймерс [7], к понятию и одновременно явлению природопользования стали подходить двояко: во-первых, как к научному направлению, базирующемуся на естественнонаучном знании и комплексе фундаментальных социально-экономических дисциплин, а во-вторых – как к чрезвычайно широкой практике использования природы человеком. Это привело к многочисленной и разнообразной рубрикации предмета науки.

В среде географических наук было выработано представление о научном объекте природопользования в широком смысле – бинарной системе “Человек – Природа”, а также представления о его более структурированном виде в составе трех компонентов – “Природа – Население – Хозяйство”. Последний тернарный вариант объекта природопользования заменяет понятие “человек” (что понималось в широком смысле, включая все разнообразие жизни и деятельности человека в географической среде) более конкретными составляющими жизнедеятельности, которые образуют территориальные (региональные) по(рас)селенческие и хозяйствственные системы. В таком составе из содержания научного интереса природопользования выпадает целый пласт деятельности человека по использованию, организации и преобразованию среды, в частности, все, что касается так называемой культуросферы, демосферы, админо- и политосферы, то есть социо- и техносферы в широком понимании. Безусловно, мы вполне согласны с К.В. Зворыкиным [8] в том, что все больше получает признание тот

факт, что триада “Природа – Население – Хозяйство” является элементами единой системы природопользования. Впрочем, по нашему мнению, исходя из широкого понимания природопользования как глобального механизма и системы взаимодействия человеческого общества с географической средой (еще шире – деятельности человека в пределах географической оболочки и даже вне ее), более всеобъемлющим выражением объект-предметной его сущности будет бинарная система “Человек – Природа”. Именно такая формулировка объекта природопользования является более целесообразной вследствие того, что оно:

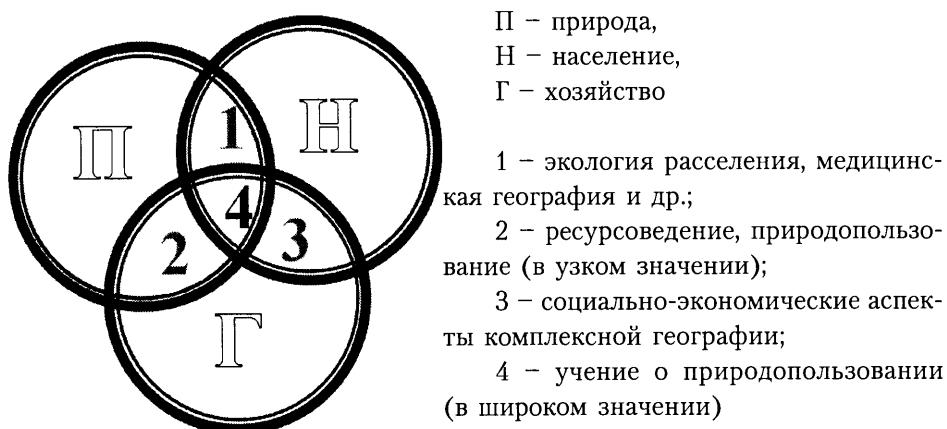
- 1) наследует традиции и сохраняет антропоцентричность (“человек” в этой системе стоит на первом месте, именно в отношении интересов различных форм его деятельности рассматриваются условия и ресурсы природы);
- 2) обеспечивает равнозначность баланса интересов двух глобальных мегасистем (тогда как в тернарном подходе по количеству составляющих объекта явно доминирует человек с его интересами, а природе отводится подчиненное содержание);
- 3) преодолевает неопределенность по поводу отнесения или, наоборот, невключения в сферу научных интересов природопользования многих предметных составляющих, так как доказано, что абсолютно все виды деятельности человека осуществляются в т.н. “Ресурсном поле” среды, и каждый такой вид (сфера, направление и т.п.) использует той или иной ресурс природы (начиная от “вмещающего” / пространственно-территориального и заканчивая традиционными минерально-сырьевыми);
- 4) способствует реализации задачи интеграции научных сфер (по крайней мере, реализует интегративную функцию для физической географии, изучающей природные геосфера – атмо-, гидро-, лито-, биосферу, и общественной географии, которая занимается исследованием антропосферы).

Таким образом, исходя из бинарной формулировки объекта природопользования, можно говорить о том, что это научное направление является сквозным для географической науки, но при этом – и междисциплинарным, что связывает географию с другими общественными и естественными науками в вопросах совместных научно-исследовательских интересов. Это одновременно может создавать существенные ограничения в попытках провести четкие границы науки, выяснить систему его междисциплинарных (внутри географии) и межотраслевых (с другими науками) связей.

Мы считаем природопользование, прежде всего, географической наукой по генезису ее объект-предметной области. Такая интуитивная комплексная традиция “географичности” природопользования естественно связана с идеями В.Н. Татищева, М.В. Ломоносова, А. Гумбольдта, В.П. и П.П. Семеновых-Тян-Шанских, А.И. Войкова, В.И. Вернадского, К. Риттера, Л.С. Берга, Ю.Г. Саушкина, Н.Н. Баранского, Ю.Н. Куражковского, Д.Н. Анучина, И.П. Герасимова и многих других выдающихся ученых-географов, вклад которых в становление и формирование приро-

допользования как отдельного научного направления заслуживает комплексного исследования. Здесь же отметим, что в вопросах природопользования специалисты-географы традиционно профессионально ориентированы на системное познание пространственно-временной и внутренней структуры как природных, так и социально-экономических территориальных комплексов. Как и для каждой географической по генезису науки, природопользование реализует определяющие парадигмы географии – хорологическую (пространственно-территориальную), хронологическую (временно-динамическую), системную, систематическую, модельную, экологическую и др. Сущность и значение этих парадигм для географии в целом хорошо раскрыты Н.В. Багровым с соавторами [9], их содержание в приложении к природопользованию как науке ничем принципиальным отличаться не будет, поэтому в нашей работе мы не станем останавливаться на их характеристике. Рассмотрим лишь возможности для реализации в пределах природопользования важнейших из них.

*Хорологическую парадигму* в природопользовании наиболее ярко иллюстрируют слова выдающегося ученого-географа, академика Н.Н. Баранского: “Географически мыслит тот, кто в достаточной мере привык обращать внимание на различия от места к месту не только по природным условиям, но и по историческим судьбам. Для такого рода исследований требуется приобщение не только к географии, но и к истории, культуре, этнографии выбранного объекта” [10, с. 21]. Поэтому природопользованию как науке часто (на наш взгляд – и вполне логично) отводилась основная роль в изучении взаимоотношений между природой и человеком. Так, например, профессор В.С. Жекулин, рассматривая проблематику природопользования, определил его место в центре (на пересечении) трех базовых компонентов (за тернарной моделью объектной сферы) (рисунок).



Место природопользования в изучении взаимоотношений системы  
“Природа – Население – Хозяйство” по В.С. Жекулину [11, с. 43]

Как отмечает М.Ю. Березкин [12], многие географы считают, что характер природопользования, его “специализация”, не является прямым следствием свойств той или иной территории, а есть результат истории людей, географического разделения труда (например, И.И. Невяжский [13] и др.). При этом природопользование рассматривается как многоуровневая система разнообразных природных условий хозяйственной деятельности с теми или иными экологическими, экономическими и социальными результатами. Таким образом, в природопользовании реализуется хронологическая (временная, диахроническая, историческая) парадигма: при изучении природопользования следует учитывать не только современные факторы, но и те исторические, культурные, этнографические и даже политические, религиозные и иные особенности, определявшие взаимодействие человека и окружающей среды, которые, несомненно, всегда сказывались на специфике природопользования территории. “Прошлое для географа всегда было и есть частью исследования, ключом к настоящему и будущему”, – писал В.А. Анучин [14, с. 147]. Реализация хронологической парадигмы содержательно заключается в том, что все существующие ныне особенности природы, образа жизни населения, его хозяйствования, связанные с ними особенности природопользования можно полностью понять и объяснить, прослеживая и анализируя пути их формирования во времени. Такой подход в полной мере может раскрыть “генетический код” территориальной организации современных и исторических типов природопользования [12]. Историческая парадигма предполагает учет наследственности в развитии территории и всех элементов, составляющих ее, исследование опыта всего предшествующего историко-культурного состояния территории для прогнозирования и формирования современных процессов, включая и политические. По И.П. Герасимову [15], заставляет исследователя не только вникать в процессы формирования природопользования на конкретной территории, но и всесторонне способствует изучению взаимной связи природы, хозяйства, населения и роли каждого из них в историческом становлении друг друга. При этом важно учитывать, что в географии, как утверждает А.Г. Исаченко [16], выработано два варианта исторического подхода – палеогеографический и историко-географический с динамическим. Первый из них применяется при исследованиях геологического (или доисторического) прошлого геосфера (по Исаченко – “эпигеосфера”) и геосистем, которые ее составляют, при этом основывается преимущественно на методике исторической геологии с привлечением некоторых специальных географических методов. Историко-географический подход, по версии А.Г. Исаченко, связан со спецификой географических процессов исторического периода, когда геосфера перешла к принципиально новому этапу своего развития с появлением человека. Таким образом, хронологическая парадигма в географии может реализовываться методами археологии, обработки исторических первоисточников, анализа разновременных картографических произведений, топонимического анализа и

путем ретроспективного исследования регионального природопользования.

*Экологическая парадигма* изначально была заложена в содержание природопользования ее основателем Ю.Н. Куражковским. Также она основывается и на положениях американской школы культурной географии (Дж. Стюард [17], Л. Уайт, М. Салинс [18], Е. Вайда, Р. Раппапорт [19] и др.). Ее ключевым понятием является “культурная адаптация”, которая в самом общем плане обычно понимается как процесс приспособления общества к условиям среды и преобразования этой среды преимущественно вследствие трудовой деятельности людей. Основатель “культурной экологии” Дж. Стюард задачей науки видел изучение влияния определенных технологий освоения природных ресурсов на другие аспекты культуры [17]. Как отмечает М.Ю. Березкин [12], для изучения исторических типов природопользования в содержании культурной экологии важно положение о том, что для каждой культуры наличие природных ресурсов определяется не просто фактом физического существования на конкретной территории, но и суммой производственных знаний и навыков населения, что в конечном счете находит отражение в культуре его природопользования. Этот подход предполагает, что вся культура народа, не только материальная, непосредственно связана с жизнеобеспечением, но и социальная, и духовная культура, возможно и не в полной мере, но детерминируется, организуется, структурируется под влиянием стратегии его жизнедеятельности, навыков природопользования. По мнению ряда культурологов (Э.С. Маркарян, А.Я. Флиер, С.В. Лурье и др.), если культура – это специфический способ человеческой адаптации, то механизм адаптации к биофизическому окружению путем его соответствующего преобразования является способом (технологией) природопользования [20].

Согласно М.Ю. Березкину [12], если рассматривать понятие “культура” как организованную вследствие хозяйственной деятельности среду обитания людей, насыщенную продуктами (результатами) этой деятельности, то в глубинной своей сути культура является специфическим человеческим средством адаптации к окружающей среде и приспособления среды к потребностям общества, то есть человек и его культура формировались во взаимоотношении с природой в процессе природопользования. Известно, что многие обычаи, устои, виды и типы природопользования различных этносов исторически выработаны способами деятельности, благодаря которым обеспечивалась и обеспечивается адаптация различных народов к окружающим их условиям природной и социальной среды. Между тем в географии взаимосвязь природы и культуры нашла свое отражение в концепции культурного ландшафта, начавшей разрабатываться в середине XX ст. [21]. Сегодня под культурными ландшафтами понимается целостная, территориально-локальная совокупность природных, технических и социально-культурных явлений, сформировавшихся в результате действия природных процессов и деятельности по жизнеобеспечению людей [22].

Для целей исследования региональных исторических типов природопользования в концепции культурных ландшафтов в основном важны представления о видах использования природной среды этническими культурами в процессе их исторического развития. Используя тезис “пространство Земли организует культуру, а культура организует пространство” [22], М.Ю. Березкин [12] утверждает: пространство, его природные условия формируют культуру природопользования в процессе культуро- и этногенеза, будучи подчиняющим, а культура (традиционное природопользование), уже сложившееся, организовывает пространство, выступая в роли подчиняемого. Культура в таком случае является средством хозяйственной, природопользовательской адаптации к окружающей среде и средством приспособления среды к потребностям общества. Ярко взаимосвязь культурных ландшафтов и человека в результате природопользования раскрыл в своих работах Л.Н. Гумилев [23 и др.], обосновывая многообразие этносов и типов природопользования пестротой вмещающих их ландшафтов.

Возвращаясь к экологической парадигме природопользования, стоит отметить, что бережное отношение к природной среде, или “экофильное поведение”, в традициях природопользования формировалось на протяжении тысячелетий в условиях агрессивной среды и является адаптационным механизмом коэволюционного развития общества и природы. К сожалению, контроль и сознательная регуляция людьми изменений природной среды в целом пока наложены недостаточно, и это становится опасным для сохранения системы “Человек – Природа”, прежде всего, по причине нехватки именно “экофильности” в способах природопользования. Антропогенные изменения природы происходят далеко не всегда в благоприятном для людей направлении. Человеческое общество и природа – это единственная динамическая система, части которой находятся в подвижном соотношении по принципу обратной связи. Чем больше изменяется одна часть, тем больше происходят изменения другой части. Эти свойства уже давно исследуются как в научном естествознании, так и в родственных науках (прежде всего, в экологии), где и получили общее название *законы и принципы природопользования*. Длительная история эксплуатации человеком ресурсов природы (т.е. история природопользования) и их разнообразие, причастность к природопользованию многих наук привели к накоплению большого количества информации в области теоретического природопользования и формирования системы различных законов, принципов, правил. Поэтому, несмотря на относительную “молодость” природопользования как науки, ее междисциплинарность позволила за сравнительно короткое время сформировать свой собственный понятийный аппарат и постулаты, которые обобщают наиболее важные сведения и причинно-следственные связи, установленные различными науками в приложении к задачам природопользования и проблематике взаимодействия человека с географической средой. Проведенный нами анализ показывает, что абсолютно невозможно опреде-

лить точное количество законов и закономерностей, которые можно было бы назвать исключительно прерогативой природопользования как науки. Перечень таких постулатов будет зависеть от объекта и предмета исследования, направления и специальности исследователя и т.п. Так, например, часто в перечень законов природопользования относят закон о географической зональности, климатической цикличности, высотной и широтной поясности и т.д., которые, как известно, генетически производны из географии. Также трудной задачей является проблема классификации и систематизации всей совокупности законов, закономерностей и правил природопользования. Эти законы группируются авторами по-разному: от нескольких законов экологии Б. Коммонера до законов общей экологии Ю.Н. Куражковского [6] и "масштабных обобщений" М.Ф. Реймерса [7]. Большинство специалистов выделяют 10–15 законов, позволяющих сформулировать основные особенности природопользования. Так, например, М.Ф. Реймерс в своем словаре-справочнике [7, с. 142–167] приводит перечень и определения 70 законов природопользования, значительная часть которых имеет ярко выраженный биологический и экологический генезис. С точки зрения содержания именно географического природопользования нами определен и систематизирован перечень законов, закономерностей и правил, которые позволяют объяснить те или иные процессы эволюции, динамики, связи между компонентами системы "Человек – Природа", определить пространственно-временные механизмы, влияющие на формирование региональных типов, видов и форм природопользования. В общем приближении эти постулаты можно классифицировать в три группы: 1) фундаментальные законы биосфера, лимитирующие природопользование; 2) процессы и причинно-следственные связи в природе, проявляющиеся под воздействием антропогенеза, 3) основные задачи и тенденции развития современного этапа природопользования в направлении коэволюции человека и природы. Первая группа характеризует фундаментальные законы биосфера (для условий Земли постоянные), а две другие имеют исторический характер. Эти законы проявляются во взаимодействии общества с природой, поэтому они временные и зависят от этапа развития человечества.

Совершенно справедливо, на наш взгляд, некоторые ученые ставят вопрос о крайней необходимости познания законов взаимодействия общества и природы. Реализация упомянутых законов происходит через соблюдение соответствующих принципов рационального природопользования, под которыми понимаются определенные экономически, законодательно, морально-этически обусловленные правила поведения человека и общества в природной среде. Соблюдение принципов рационального природопользования целесообразно во всех регионах независимо от их иерархического уровня. Обеспечение общего экологического равновесия возможно при сохранении условия равновесия природных систем отдельных регионов, и наоборот. Как видно, путь к этому – реализация

на практике методологических основ новейшей концепции устойчивого развития.

В контексте развернутой на страницах “Украинского географического журнала” [24] ведущими учеными дискуссии о парадигмальном поиске в современной географии предлагаем обратить внимание именно на содержание, место и роль в ней концепта регионального природопользования и его исторического компонента.

Основой для дискуссии о ролевой функции концепта “истории регионального природопользования” считаем представление об интегральном потенциале территории и региональной географии как новом направлении исследований (Л.Г. Руденко [24, с. 3-13], И.А. Горленко [24, с. 26-31], В.П. Нагорная [24, с. 32-39]), хорологической и хронологической парадигмах (Н.В. Багров, В.А. Боков, И.Г. Черванев [24, с. 5-13]), тернарной структуре новейшей географии (“естественная + общественная + техническая” по Н.В. Багрову, Л.Г. Руденко, И.Г. Черваневу [24, с. 5-13]), интенциональной парадигме и концепции общественно-исторического развития (А.Г. Топчиев [24, с. 22-24]), стадийно-эволюционном характере развития общества (Г.П. Пидгрушный [24, с. 40-44]) и др.

Как отмечает А.Г. Топчиев [24, с. 23], историко-географические процессы, получившие широкое распространение в географии, следует рассматривать в контексте новейших парадигм цивилизационного развития человечества. Это полностью соответствует расширенному представлению об истории регионального природопользования как комплексном научном направлении, объектом которого является стадиальный процесс формирования регионального компонента антропосферы (в смысле сферы жизни и деятельности человека), от процесса появления на территории человека, через эволюцию его систем и средств взаимодействия (владения) с геопространством, к пониманию региональных и субрегиональных различий. Географами уже неоднократно высказывалось представление о том, что всю историю человечества можно рассматривать и как историю природопользования: развивался человек – расширялась сфера ее деятельности по использованию ресурсов окружающего геопространства; усовершенствование систем и форм природопользования, эволюция сфер деятельности человека приводили к развитию как самого человека, так и человеческих отношений.

### Заключение

Как представляется, комплексная программа исследования истории природопользования отдельных макрорегионов тех или иных стран вполне способна удовлетворить поставленную А.Г. Топчиевым потребность в методологическом обосновании взаимодействия отдельных компонентов – природных, социальных, экономических (производственных), духовных (культурно-цивилизационных) и, следовательно, понять сущность, структуру интегрального потенциала территории (его систем природопользования в широком понимании). Региональное природопользование сквозь

призму хронологической парадигмы представляет собой механизм общей интеграции отдельных направлений географической науки – физико- и общественно-географического, что многими учеными признается актуальной и неотложной задачей дальнейшего развития географической науки.

#### *СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ*

1. *Помазкова, Н.В.* Географические типы природопользования в горной тайге Читинской области : дисс. ... канд. геогр. наук / Н.В. Помазкова : 25.00.36 / Сибирское отделение РАН. – Чита, 2004. – 171 с.
2. *Бурматова, О.П.* Оптимизация пространственной структуры ТПК. Экологический аспект / О.П. Бурматова. – Новосибирск : Наука, 1983. – 225 с.
3. *Михайлов, Ю.П.* Географические аспекты природопользования (по результатам исследований в районах таежной зоны Сибири) : дис. ... д-ра геогр. наук в форме науч. докл. / Ю.П. Михайлов. – Л., 1989. – 31 с.
4. *Михайлов, Ю.П.* Проблемы природопользования и география / Ю.П. Михайлов // Природопользование и география (методологические аспекты). – Владивосток : ДВО АН СССР, 1989. – С. 8–16.
5. *Глазовский, Н.Ф.* К формированию теории природопользования / Н.Ф. Глазовский // Глобальные проблемы современности и комплексного землепользования. – Л. : Наука, 1988. – 273 с.
6. *Куражковский, Ю.Н.* Очерки природопользования / Ю.Н. Куражковский. – М. : Мысль, 1969. – 268 с.
7. *Реймерс, Н.Ф.* Природопользование : словарь-справочник / Н.Ф. Реймерс. – М. : Мысль, 1990. – 637 с.
8. *Зворыкин, К.В.* Географическая концепция природопользования / К.В. Зворыкин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 5, География. – 1993. – № 3. – С. 3–16.
9. *Багров, М.В.* Землеведство / М.В. Багров, В.О. Боков, И.Г. Черваньов. – К. : Либідь, 2000. – 464 с.
10. *Баранский, Н.Н.* Краткий курс экономической географии / Н.Н. Баранский. – М.-Л. : Госиздат, 1928. – 653 с.
11. География в системе наук: [Сб. ст.] / [отв. ред. В.С. Жекулин, С.Б. Лавров]. – Л. : Наука, 1987. – 212 с.
12. *Березкин, М.Ю.* Эколого-экономическая оценка современных и исторических типов природопользования Крыма : дис. ... канд. геогр. наук / М.Ю. Березкин : 25.00.24. – М., 2003. – 186 с.
13. *Невяжский, И.И.* Природопользование как наука и место этносоциальных природохозяйственных систем в ней / И.И. Невяжский // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 5, География. – 1994. – № 3. – С. 21–26.
14. *Анучин, В.А.* Географический фактор в развитии общества / В.А. Анучин. – М. : Мысль, 1982. – 334 с.
15. *Герасимов, И.П.* Избранные труды. Конструктивная география / И.П. Герасимов. – М. : Наука, 1996. – 144 с.
16. *Исаченко, А.Г.* Теория и методология географической науки / А.Г. Исащенко. – М. : Изд. центр “Академия”, 2004. – 400 с.
17. *Steward, J.* Theory of culture change / J. Steward. – Urbana : University of Illinois Press, 1955. – 244 p.
18. *Sahlins, M.D.* Culture and environment: The study of cultural ecology / M.D. Sahlins // Horizons of anthropology. – 1965. – 134 p.
19. *Vayda, A.P.* Ecology: cultural and non-cultural / A.P. Vayda, R.A. Rappaport // Introduction to cultural anthropology. – 1968. – P. 488–499.

20. *Маркарян, Э.С.* Теория культуры и современная наука: логико-методологический анализ / Э.С. Маркарян. – М. : Мысль, 1983. – 284 с.
21. *Саушкин, Ю.Г.* Культурный ландшафт / Ю.Г. Саушкин // Вопросы географии. – 1946. – Сб. 1. – С. 97–106.
22. *Веденин, Ю.А.* Очерки по географии искусства / Ю.А. Веденин. – М. : Рос. НИИ культурного и природного наследия, 1997. – 224 с.
23. *Гумилев, Л.Н.* География этноса в исторический период / Л.Н. Гумилев. – Л. : Наука, 1990. – 279 с.
24. Український географічний журнал / [гол. ред. Л.Г. Руденко]. – 2010. – № 2(70). – 76 с.

Поступила в редакцию 03.12.2012 г.

## ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ

<b>ГАЛЬМАК Аляксандар Mіхайлавіч</b>	– доктар фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры вышэйшай матэматыкі Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта харчавання
<b>КАЛЯДА Дзяніс Уладзіміравіч</b>	– студэнт БДУ
<b>САКОВІЧ Наталля Уладзіміраўна</b>	– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт МДУ імя А.А. Куляшова
<b>СІДАРЭНКА Іван Мікалаевіч</b>	– дацэнт кафедры алгебры, матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў МДУ імя А.А. Куляшова
<b>ВАЛАСЕВІЧ Аляксандра Уладзіміраўна</b>	– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар МДУ імя А.А. Куляшова
<b>ЗАРНІЦКІ Юрый Фёдаравіч</b>	– інжынер-фізік лабараторыі плазмы фізічнага факультэта інстытута Вейцмана (Ізраіль)
<b>ОСТРЫКАЎ Алег Mіхайлавіч</b>	– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, загадчык кафедры інжынернай графікі ГДТУ імя П.В. Сухога
<b>ШУЛЬГА Аляксандар Васільевіч</b>	– асістэнт кафедры фізікі Беларуска-Расійскага ўніверсітэта (Магілёў)
<b>ВЕКА Вольга Уладзіміраўна</b>	– студэнт фізіка-матэматычнага факультэта Мазырскага дзяржаўнага педагогічнага ўніверсітэта
<b>АЎСІЮК Алена Mіхайлаўна</b>	– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагогічнага ўніверсітэта
<b>РЭДЗЬКОЎ Віктар Mіхайлавіч</b>	– кандыдат фізіка-матэматычных навук, вядучы наўуковы супрацоўнік лабараторыі тэарэтычнай фізікі Інстытута фізікі НАНБ
<b>МАСАЛКОВА Юлія Юр'еўна</b>	– аспірант кафедры экалогіі і аховы прыроды ВДУ імя П.М. Машэрава
<b>АФАНАСЬЕЎ Алег Яўгенавіч</b>	– кандыдат геаграфічных навук, дацэнт кафедры фізічнай і эканамічнай геаграфіі Днепрапятоўскага нацыянальнага ўніверсітэта імя Алеся Ганчара

## **SUMMARIES**

### **Afanasiev O.Y. OBJECT AND PARADIGMS OF NATURE MANAGEMENT AS A BRANCH OF GEOGRAPHY.**

Nature management is considered as a separate branch of geography with its own object of research – the binary system “Human – Nature” in the temporal dynamics of its development. Historical and geographical analysis of regional forms of nature management is one of the important tools to investigate and predict regional development. The author analyses how major scientific paradigms can be implemented in the research of regional nature use.

### **Galmak A.M. POLYADIC GROUPS OF VECTOR-MATRICES.**

The polyadic groups of vector-matrices are studied in this paper.

### **Kaliada D.U., Sakovich N.V. THE NUMBER OF POLYNOMIALS WITH COEFFICIENTS FROM THE RING OF GAUSSIAN INTEGERS AND A PAIR OF CLOSE ROOTS.**

The upper bound of the number of polynomials which coefficients are Gaussian integers and have a pair of close roots has been defined.

### **Masalkova Yu.Yu. INFLUENCE OF SOME ECOLOGICAL FACTORS ON DOG HELMINTHIASES SPECIES.**

The intensive development of the society has caused one of the main ecological problems: parasitic contamination of urban territories with the activator of dog helminthiases. To solve this problem one should know resistance of the activator of dog helminthiases to natural and anthropogenic factors of the environment. The article contains the review of the materials on the issue. It highlights the dependence of the activator of *T. canis*, *T. leonina* viability on relative humidity, temperature and type of the soil, time and depth of helminthiases penetration into the soil. Besides the article reveals some peculiarities of *T. hydatigena*, *T. pisiformis*, *E. granulosus* ecological features. The author outlines the perspectives of the research.

### **Ostrikov O.M. DISLOCATION MODEL OF NANOTWINING COMPOSITE.**

The dislocation mesoscopic model of nanocomposite containing residual nanotwins of a lens form is designed. The article proves that nanotwins benefit the localisation of pressure, relative volume dilatation and a new phase formation impossible being far from a source of pressure.

### **Shulga A.V. ESTIMATION OF RESOLVING POWER OF PRISM-TYPE WAVEGUIDE SPECTRUM ANALYZER.**

The article displays the dependence of the resolving power of spectrum analyzer based on a prism-coupler exciting thin-film waveguide modes on the

waveguide substrate absorption coefficient and mode bases of different orders. Conditions necessary to obtain maximum resolving power are studied.

**Sidorenko I.N. ON DOUBLE LIMIT CYCLE IN THE LIENARD SYSTEM.**

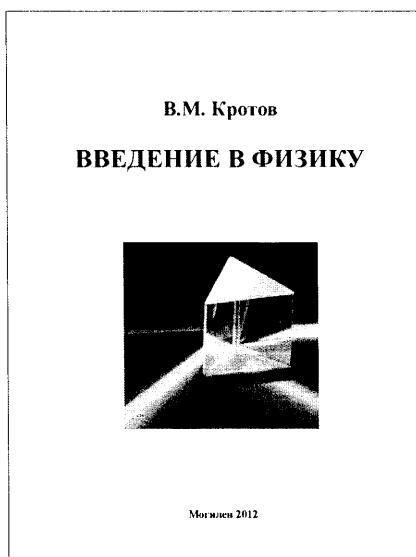
The value of the parameter, for which the Lienard system of the  $\gamma$ th degree has a double limit cycle, is estimated.

**Veko O.V., Ovsiyuk E.M., Redkov V.M. ON JONES 4-SPINORS FOR COMPLETELY POLARIZED LIGHT.**

The known theoretical description of the ways to construct 4-tensors out of 4-spinor permits to give the definition of Jones 4-spinor of the completely polarized light and relate this object to Stokes 4-vector and Stokes antisymmetric 4-tensor. It elaborates the issue when the description of the completely polarized light involves as a rule only Stokes 4-vector and Jones 2-spinor.

**Volosevich A.V., Zarnitsky Yu.F. GENERALIZED THEORY OF THE FARLEY-BUNEMAN INSTABILITY IN AURORAL IONOSPHERE.**

The linear theory of the excitation of modified two-stream or the Farley-Buneman (FB) instability in the auroral ionosphere is investigated. From the magnetohydrodynamic (MHD) and kinetic systems of equations the generalized theoretical models for the low-frequency waves (wave frequency is much less than ion-neutral collision frequency) and high-frequency waves (wave frequency is much more than ion-neutral collision frequency) for the real physical conditions are obtained. On the basis of the considered generalized linear theory the dispersive equations and speeds of phase for low-frequency and high-frequency waves are calculated. Also the main physical mechanisms of stabilization of the FB instability are considered: a) the Landau attenuation on ions in kinetic model or viscosity in MHD models; b) deviation from the condition of quasi-neutrality of plasma.



УДК 53(075.4)

**Кротов, В.М.**

Введение в физику : пособие / В.М. Кротов. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2012. – 348 с. : ил.  
ISBN 978-985-480-839-0

Пособие включает модульное описание физических знаний по всем темам механики, молекулярной физики, электродинамики и квантовой физики, вопросы для самоконтроля, тренировочные текстовые задачи по каждому модулю содержания и четыре варианта текстовых контрольных задач по каждому разделу. Особое внимание обращено на свойства изучаемых объектов и особенности протекания физических явлений и процессов.

Рекомендуется студентам физико-математических факультетов университетов и может быть использовано учащимися средних общеобразовательных школ для саморазвития.

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по педагогическому образованию в качестве пособия для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальности 1-02 05 04-01 Физика. Математика*



УДК 372.853.(075.8)

**Герасимова, Т.Ю.**

Частные вопросы преподавания физики в средней школе: пособ.: в 5 ч. Ч. 1 / Т.Ю. Герасимова. – Могилев: УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2012. – 276 с.: ил.

ISBN 978-985-480-803-1

В пособии приводится один из вариантов преподавания физики в 6 и 7 классах на основе технологических карт, в которых описан учебный материал урока – изучение нового материала, деятельность учителя и деятельность учеников на нем. В каждой технологической карте есть задания для входного, выходного контроля, рефлексии, направленные на развитие познавательного интереса к физике. Рекомендуется учителям физики, студентам физико-математических факультетов педагогических специальностей, школьникам, интересующимся физикой.

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по педагогическому образованию в качестве пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 1-02 05 02 Физика; 1-02 05 04 Физика. Дополнительная специальность*

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў  
на англійскую мову  
Я.В. Рубанава

Тэхнічны рэдактар А.Л. Пазнякоў  
Камп'ютарны набор і вёрстка А.Л. Пазнякоў  
Карэктар І.Г. Каржова

Падпісана да друку .2013 г.  
Фармат 70x108<sup>1</sup>/16. Папера афсетная. Гарнітура Petersburg.  
Ум.-друк. арк. 7,7. Ул.-выд. арк. 6,3. Тыраж 100 экз. Заказ .

Установа адукацыі "Марілеўскі дзяржаўны ўніверсітэт  
імя А.А. Кулішова", 212022, Марілёў, Касманаўтаў, 1.  
ЛІ № 02330/278 ад 30.04.2004 г.

Надрукавана ў аддзеле аператыўнай паліграфії  
МДУ імя А.А. Кулішова. 212022, Марілёў, Касманаўтаў, 1.