

ISSN 2073-8315



ВЕСНИК

Магілёўскага дзяржаўнага
універсітэта
імя А.А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца с снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

2 (40)
2012

Галоўная рэдакцыйная камітэт:

д-р філос. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (галоўны рэдактар);
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара);
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (нам. галоўнага рэдактара);
д-р фіз.-мат. навук прафесар С.В. Жасткоў (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В);
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В.М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук дацэнт А.М. Гальмак (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А.А. Самадураў (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар **[М.В. Машчанка]** (Магілёў)
д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук дацэнт А.В. Марацкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Паліячонак (Магілёў)

ЗМЕСТ

ЛАПТИНСКИЙ В.Н., ЛАПКОВСКИЙ В.К., ПОДОЛЯН С.В. О периодических решениях линейного матричного уравнения Ляпунова с параметром	4
ЖЕСТКОВ С.В., КОЧЕГАРОВА М.А. О существовании кинковых волновых решений для комплекснозначных моделей уравнений реакций с диффузией	12
АЛЕХНО А.Г., СЕВРУК А.Б. Краевые задачи с бесконечным индексом для аналитических функций	22
МАКОВЕЦКАЯ О.А. Анализ периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати (правосторонняя регуляризация)	35
СОТСКИЙ А.Б., ЧУДАКОВСКИЙ П.Я., ПРИМАК И.У., СОТСКАЯ Л.И. Отражение светового пучка от призмы связи. II. Решение обратной задачи волноводной спектроскопии	45
ОВСИЮК Е.М. О нахождении параметров матриц Мюллера лоренцевского типа по результатам поляризационных измерений	59
КОВАЛЕНКО О.Е., ХОМЧЕНКО А.В., ГУЗОВСКИЙ В.Г., КОРНЕЕВА И.А. Влияние газовых примесей на фотоэлектрические свойства тонкопленочных наноструктур полупроводник – диэлектрик	71
ОСТРИКОВ О.М. Кинетический подход в модели единичных двойников клиновидной формы	79
МАРОЧКОВ А.В. Результаты применения двух различных визуальных аналоговых шкал для определения травматичности пункции периферической вены	84
 ПЕРСАНАЛИИ	
ГАЛЬМАК А.М., ЛАСЬКОВА Г.В. Великий математик Иссаи Шур	92
ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ	99
SUMMARIES	101

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 517.925.52

В.Н. ЛАПТИНСКИЙ, В.К. ЛАПКОВСКИЙ, С.В. ПОДОЛЯН

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

В данной работе исследуется задача о периодических периода ω решениях матричного дифференциального уравнения Ляпунова с ω -периодической по t правой частью. На основе метода регуляризации [1, гл. 2] разработана методика получения эквивалентного интегрального уравнения для исследуемой задачи. Для исследования разрешимости полученного интегрального уравнения применены методы теории интегральных уравнений [2, 3]. Разработан эффективный алгоритм типа [1] построения решения.

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t) X + \lambda X B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F_0(t)$, $F_1(t)$ – непрерывные ω -периодические ($n \times n$)-матрицы, λ – скалярный вещественный параметр. Примем следующие обозначения:

$$\alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad h_0 = \max_t \|F_0(t)\|, \quad h_1 = \max_t \|F_1(t)\|, \quad M = \int_0^\omega A(\tau) d\tau,$$

$$N = - \int_0^\omega B(\tau) d\tau, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad q = \frac{1}{2} \gamma \omega^2 (\alpha + \beta)^2, \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

где $t \in [0, \omega]$, Φ – линейный оператор: $\Phi X = MX - XN$, $\|\cdot\|$ – подходящая норма матриц (например, любая из норм, приведенных в [4, с. 21]), C – банахово пространство непрерывных ω -периодических ($n \times n$)-матричных функций.

Согласно [4, с. 216] задача об ω -периодических решениях уравнения (1) эквивалентна периодической краевой задаче для (1) с условием

$$X(0, \lambda) = X(\omega, \lambda). \quad (2)$$

Построим матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2).

Пусть $X = X(t, \lambda)$ – решение этой задачи. Тогда из (1) имеем

$$X(t, \lambda) = X(0, \lambda) + \int_0^t (\lambda A(\tau)X(\tau, \lambda) + \lambda X(\tau, \lambda)B(\tau) + F_0(\tau) + \lambda F_1(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

Полагая в (3) $t = \omega$, получим на основании условия (2) при $\lambda \neq 0$:

$$\int_0^\omega (A(\tau)X(\tau, \lambda) + X(\tau, \lambda)B(\tau)) d\tau = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\omega F_0(\tau) d\tau - \int_0^\omega F_1(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Далее воспользуемся формулой

$$X(\tau, \lambda) = X(t, \lambda) + \int_t^\tau \dot{X}(\sigma, \lambda) d\sigma,$$

где $\dot{X}(\sigma, \lambda) \equiv dX(\sigma, \lambda)/d\sigma$. Используя эту формулу, имеем из (4) в силу (1)

$$\begin{aligned} & \int_0^\omega A(\tau) d\tau X(t, \lambda) + X(t, \lambda) \int_0^\omega B(\tau) d\tau + \int_0^\omega A(\tau) \left(\int_t^\tau (\lambda A(\sigma)X(\sigma, \lambda) + \lambda X(\sigma, \lambda)B(\sigma) + \right. \\ & \left. + F_0(\sigma) + \lambda F_1(\sigma)) d\sigma \right) d\tau + \int_0^\omega \left(\int_t^\tau (\lambda A(\sigma)X(\sigma, \lambda) + \lambda X(\sigma, \lambda)B(\sigma) + F_0(\sigma) + \right. \\ & \left. + \lambda F_1(\sigma)) d\sigma \right) B(\tau) d\tau = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\omega F_0(\tau) d\tau - \int_0^\omega F_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть матрицы M и N не имеют общих характеристических чисел. Тогда согласно [5, с. 207] оператор Φ обратим и уравнение (5) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(t, \lambda) = & \Phi^{-1} \left\{ \int_0^\omega A(\tau) \left(\int_\tau^t (\lambda A(\sigma)X(\sigma, \lambda) + \lambda X(\sigma, \lambda)B(\sigma) + F_0(\sigma) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda F_1(\sigma)) d\sigma \right) d\tau + \int_0^\omega \left(\int_\tau^t (\lambda A(\sigma)X(\sigma, \lambda) + \lambda X(\sigma, \lambda)B(\sigma) + F_0(\sigma) + \lambda F_1(\sigma)) d\sigma \right) B(\tau) d\tau - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\lambda} \int_0^\omega F_0(\tau) d\tau - \int_0^\omega F_1(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, всякое (классическое) решение задачи (1), (2) удовлетворяет матричному интегральному уравнению (6). Покажем обратное: всякое непрерывное решение уравнения (6) является решением задачи (1), (2). Пусть $X = X(t, \lambda)$ – непрерывное решение уравнения (6). Дифференцируя обе части уравнения (6) по переменной t , получим с учетом перестановочности оператора дифференцирования и оператора Φ^{-1}

$$\begin{aligned} \frac{dX(t, \lambda)}{dt} = & \Phi^{-1} \left\{ \int_0^\omega A(\tau) d\tau (\lambda A(t) X(t, \lambda) + \lambda X(t, \lambda) B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t)) + \right. \\ & \left. + (\lambda A(t) X(t, \lambda) + \lambda X(t, \lambda) B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t)) \int_0^\omega B(\tau) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dX(t, \lambda)}{dt} = \lambda A(t) X(t, \lambda) + \lambda X(t, \lambda) B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t). \quad (7)$$

Покажем, что данное решение уравнения (6) является ω -периодическим. Из (7) имеем

$$dX(t, \lambda) \equiv [\lambda A(t) X(t, \lambda) + \lambda X(t, \lambda) B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t)] dt. \quad (8)$$

Выполнив интегрирование по частям в (6) с учетом (8), получим соотношение

$$\int_0^\omega [\lambda \dot{A}(t) X(t, \lambda) + \lambda X(t, \lambda) B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t)] dt = 0;$$

отсюда следует (2).

Таким образом, установлено, что полученное матричное интегральное уравнение (6) в соответствии с [4, с. 216] эквивалентно задаче об ω -периодических решениях дифференциального уравнения (1).

Для исследования разрешимости уравнения (6) воспользуемся методом разложения в ряд по степеням параметра λ [2, 3]. Следуя [1], формальное представление ω -периодического решения будем искать в следующем виде:

$$X(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} X_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X_k(t). \quad (9)$$

Для определения неизвестных матриц $X_{k-1}(t), k = 0, 1, 2, \dots$, подставим (9) в обе части уравнения (6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ . Тогда получим последовательно

$$\begin{aligned} X_{-1} = & -\Phi^{-1} \int_0^\omega F_0(\tau) d\tau, \\ X_0(t) = & \Phi^{-1} \left\{ \int_0^\omega A(\tau) \left(\int_\tau^t (A(\sigma) X_{-1} + X_{-1} B(\sigma) + F_0(\sigma)) d\sigma \right) d\tau + \right. \\ & \left. + \int_0^\omega \left(\int_\tau^t (A(\sigma) X_{-1} + X_{-1} B(\sigma) + F_0(\sigma)) d\sigma \right) B(\tau) d\tau - \int_0^\omega F_1(\tau) d\tau \right\}, \\ X_1(t) = & \Phi^{-1} \left\{ \int_0^\omega A(\tau) \left(\int_\tau^t (A(\sigma) X_0(\sigma) + X_0(\sigma) B(\sigma) + F_1(\sigma)) d\sigma \right) d\tau + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{\omega} \left(\int_{\tau}^t (A(\sigma)X_0(\sigma) + X_0(\sigma)B(\sigma) + F_1(\sigma))d\sigma \right) B(\tau)d\tau \Bigg\}, \\
X_{k+1}(t) &= \Phi^{-1} \left\{ \int_0^{\omega} A(\tau) \left(\int_{\tau}^t (A(\sigma)X_k(\sigma) + X_k(\sigma)B(\sigma))d\sigma \right) d\tau + \right. \\
& \left. + \int_0^{\omega} \left(\int_{\tau}^t (A(\sigma)X_k(\sigma) + X_k(\sigma)B(\sigma))d\sigma \right) B(\tau)d\tau \right\}, k = 1, 2, \dots. \quad (10)
\end{aligned}$$

Выполнив оценки по норме в (10), получим следующую рекуррентную формулу:

$$\|X_{k+1}\|_C \leq q \|X_k\|_C, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (11)$$

Из (11) имеем явную оценку

$$\|X_{k+1}\|_C \leq q^k \|X_1\|_C, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (12)$$

Используя неравенство (12), получим из (9) при $0 < |\lambda| < \frac{1}{q}$:

$$\begin{aligned}
\|X(t, \lambda)\|_C &\leq \frac{1}{\varepsilon} \|X_{-1}\|_C + \|X_0\|_C + \varepsilon \|X_1\|_C + \varepsilon q \|X_1\|_C + \dots + \varepsilon^k q^{k-1} \|X_1\|_C + \dots = \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \|X_{-1}\|_C + \|X_0\|_C + \varepsilon \|X_1\|_C \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon q}. \quad (13)
\end{aligned}$$

На основании [4, с. 43] можно заключить, что ряд (9) сходится абсолютно и равномерно относительно $t \in R$ в области $0 < |\lambda| < \frac{1}{q}$.

Согласно [3, с. 160] сумма $X(t, \lambda)$ этого ряда представляет собой решение уравнения (6) в указанной области. Применяя принцип сжимающих отображений [2, с. 605] к уравнению (6), нетрудно доказать, что при выполнении условия $0 < |\lambda|q < 1$ это решение единственное. Таким образом, получена

Теорема. Пусть матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел. Тогда в области $0 < |\lambda| < \frac{1}{q}$ ω -периодическое решение уравнения

(1) существует и единственное; оно представимо в виде (9).

Получим оценки, характеризующие скорость сходимости алгоритма (10). Из (9) имеем

$$\begin{aligned}
\|X(t, \lambda) - \tilde{X}_m(t, \lambda)\| &\leq \varepsilon^{m+1} \|X_{m+1}(t)\| + \\
&+ \varepsilon^{m+2} \|X_{m+2}(t)\| + \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{X}_m(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} X_{-1} + \sum_{k=0}^m \lambda^k X_k(t).$$

Выполнив оценки по норме в (14), получим

$$\|X(t, \lambda) - \tilde{X}_m(t, \lambda)\|_C \leq \frac{\|X_1\|_C}{1 - \varepsilon q} \varepsilon^{m+1} q^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots . \quad (15)$$

Поскольку для полученного алгоритма имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|X_{-1}\|_C &\leq \gamma \omega h_0, \\ \|X_0\|_C &\leq q \|X_{-1}\|_C + \tilde{q} h_0 + \gamma \omega h_1 \leq q \cdot \gamma \omega h_0 + \tilde{q} h_0 + \gamma \omega h_1, \\ \|X_1\|_C &\leq q \|X_0\|_C + \tilde{q} h_1 \leq (h_1 + q h_0)(\tilde{q} + q \gamma \omega), \end{aligned}$$

где $\tilde{q} = \frac{\gamma \omega^2}{2}(\alpha + \beta)$, то оценки (13), (15) нетрудно привести к коэффициентному виду:

$$\begin{aligned} \|X(t, \lambda)\|_C &\leq \frac{(h_0 + \varepsilon h_1)(\gamma \omega + \varepsilon \tilde{q})}{\varepsilon(1 - \varepsilon q)} = \frac{\gamma \omega(h_0 + \varepsilon h_1)[2 + \varepsilon \omega(\alpha + \beta)]}{2\varepsilon(1 - \varepsilon q)}, \\ \|X(t, \lambda) - \tilde{X}_m(t, \lambda)\|_C &\leq \frac{(h_1 + q h_0)(\tilde{q} + q \gamma \omega)}{1 - \varepsilon q} \varepsilon^{m+1} q^m = \\ &= \frac{\varepsilon \gamma(\alpha + \beta) \omega^2 [\gamma \omega(\alpha + \beta) + 1]}{4(1 - \varepsilon q)} \cdot \left[\gamma(\alpha + \beta)^2 \omega^2 h_0 + 2h_1 \right] \cdot (\varepsilon q)^m. \end{aligned}$$

Таким образом, на основе подхода [1] получено аналитическое представление ω -периодического решения уравнения (1) с удобным для применения алгоритмом (10) и эффективно проверяемыми условиями сходимости и скорости сходимости.

Затруднения могут возникнуть при получении оператора, обратного к Φ . Однако при дополнительных предположениях о характеристических числах матриц M и N , для Φ^{-1} имеют место явные аналитические представления [5, 6].

Полученные результаты проиллюстрируем на следующем примере, полагая

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2\cos t \\ \sin t & 1 \end{pmatrix}; \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3\sin t \\ \cos t & 1 \end{pmatrix}; \quad F_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sin 2t \\ \cos 2t & -1 \end{pmatrix};$$

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}; \quad \omega = 2\pi.$$

Поскольку $M = 2\pi E$, $N = -2\pi E$, то $\hat{O} = 4\pi E$, где E – единичная (2×2) -матрица. В качестве нормы матриц примем евклидову норму. Тогда

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}, \quad \alpha = \sqrt{6}, \quad \beta = \sqrt{11}, \quad h_0 = \sqrt{3}, \quad h_1 = \sqrt{2},$$

при этом

$$q = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(17 + 2\sqrt{66}). \quad (16)$$

Согласно доказанной теореме 2π -периодическое решение данного уравнения существует и единственno в проколотой окрестности

$$0 < |\lambda| < \frac{\sqrt{2}}{\pi(17 + 2\sqrt{66})}.$$

Построим приближенное решение

$$\tilde{X}_1(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} X_{-1} + X_0(t) + \lambda X_1(t), \quad (17)$$

используя разработанный алгоритм. Применимально к рассматриваемому уравнению имеем

$$X_{-1} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} F_0(\tau) d\tau, \quad (18)$$

$$X_0(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ A(\tau) \int_\tau^t \left[A(\sigma)X_{-1} + X_{-1}B(\sigma) + F_0(\sigma) \right] d\sigma + \right. \\ \left. \int_\tau^t \left[A(\sigma)X_{-1} + X_{-1}B(\sigma) + F_0(\sigma) \right] d\sigma B(\tau) - F_1(\tau) \right\} d\tau, \quad (19)$$

$$X_1(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ A(\tau) \int_\tau^t \left[A(\sigma)X_0(\sigma) + X_0(\sigma)B(\sigma) + F_1(\sigma) \right] d\sigma + \right. \\ \left. + \int_\tau^t \left[A(\sigma)X_0(\sigma) + X_0(\sigma)B(\sigma) + F_1(\sigma) \right] d\sigma B(\tau) \right\} d\tau. \quad (20)$$

Выполнив в (18) – (20) требуемые вычисления, получим соответственно

$$\begin{aligned}
X_{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
X_0(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{1}{2}(2\sin t + 3\cos t - \cos 2t) \\ \frac{1}{2}(\cos t + \sin t + \sin 2t) & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}, \\
X_1(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sin^3 t - \frac{2}{3}\cos^3 t + \sin^2 t + \frac{5}{8}\sin 2t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{17}{32} \\ \frac{5}{8}\cos t + \frac{3}{8}\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{8} \end{pmatrix} \\
&\quad \left| \begin{array}{l} \frac{7}{4}\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{9}{8}\cos t - \frac{7}{16} \\ \sin^3 t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{3}{2}\sin^2 t - \frac{5}{8}\sin 2t - \frac{1}{2}\cos t + \sin t - \frac{47}{32} \end{array} \right\}. \\
\tilde{X}_1(t, \lambda) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda} - \frac{5}{8} + \lambda(\frac{1}{3}\sin^3 t - \frac{2}{3}\cos^3 t + \sin^2 t + \frac{5}{8}\sin 2t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{17}{32}) \\ \frac{1}{2}(\cos t + \sin t + \sin 2t) + \lambda(\frac{5}{8}\cos t + \frac{3}{8}\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{8}) \end{pmatrix} \\
&\quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}(2\sin t + 3\cos t - \cos 2t) + \lambda(\frac{7}{4}\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{9}{8}\cos t - \frac{7}{16}) \\ \frac{1}{2\lambda} - \frac{5}{8} + \lambda(\sin^3 t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{3}{2}\sin^2 t - \frac{5}{8}\sin 2t - \frac{1}{2}\cos t + \sin t - \frac{47}{32}) \end{array} \right\}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Воспользовавшись (15), найдем оценку для $\|X(t, \lambda) - \tilde{X}_1(t, \lambda)\|$.

Поскольку $\| X_1 \|_C = \sqrt{16,06444...} \approx 4,008$,

то

$$\| X(t, \lambda) - \tilde{X}_1(t, \lambda) \| < \frac{\varepsilon^2 q}{1 - \varepsilon q} \frac{4,008}{}, \quad (22)$$

где q дается соотношением (16). Из (22) видно, что при достаточно малых значениях λ , формула (21) имеет высокую точность.

Найдем оценку для $\| X(t, \lambda) \|$ на основе соотношения

$$\| X(t, \lambda) \| \leq \frac{\gamma \omega (\sqrt{3} + \varepsilon \sqrt{2}) [2 + \varepsilon \omega (\sqrt{6} + \sqrt{11})]}{2 \varepsilon (1 - \varepsilon q)}. \quad (23)$$

Используя полученные выше конкретные значения величин, входящих в (23), имеем

$$\| X(t, \lambda) \| < \frac{(\sqrt{3} + \varepsilon \sqrt{2}) [1 + \varepsilon \pi (\sqrt{6} + \sqrt{11})]}{\varepsilon [\sqrt{2} - \varepsilon \pi (\sqrt{17} + 2\sqrt{66})]}.$$

Из структуры алгоритма (10) видно, что построение приближенных решений задачи (1), (2) связано с простыми вычислительными процедурами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Лаптінскій, В.Н.* Конструктивныі анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптінскій. – Минск : ИМ НАН Беларусі, 1998. – 300 с.
2. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторовіч, Г.П. Акілов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
3. *Рісс, Ф.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рісс, Б. Секефальві-Надь. – М. : ІЛ, 1954. – 499 с.
4. *Демідовіч, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демідовіч. – М. : Наука, 1967 – 472 с.
5. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
6. *Абдікасова, П.А.* Построение интегрального многообразия системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в банаховом пространстве / П.А. Абдікасова, К.Г. Валеев // Республиканский межведомственный сборник “Математическая физика”. – Киев : Наукова думка, 1976. – Вып. 19. – С. 3–10.

Поступила в редакцию 13.10.2011 г.

УДК 517+530.1

С.В. ЖЕСТКОВ, М.А. КОЧЕГАРОВА

О СУЩЕСТВОВАНИИ КИНКОВЫХ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ МОДЕЛЕЙ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИЙ С ДИФФУЗИЕЙ

Известно [1, 2], что происхождение пространственных структур – одна из наиболее важных проблем в биологии развития. Теория формирования пространственной структуры непосредственно связана с изучением систем реакций с диффузией, которые не интегрируются классическими методами, разработанными для солитонных уравнений. Поэтому разработка аналитических методов построения волновых решений этих уравнений является актуальной и важной математической задачей.

Введение

В работах [3-17] предложены различные методы исследования действительных моделей уравнений реакций с диффузией, которые описывают достаточно широкий круг биологических явлений. Менее изученными являются комплекснозначные модели, которые требуют разработки новых методов при изучении сложных механизмов реакций с диффузией [1]. Отметим, что в работах [18-23] обоснованы конструктивные подходы построения волновых решений нелинейных уравнений параболического типа.

В настоящей работе исследуются комплекснозначные модели уравнений реакций с диффузией вида (ср. с [1])

$$w_t = Dw_{xx} + Aw + B|w|^2 w + Cw_x, \quad (1)$$

$$w_t = Dw_{xx} + Aw + B|w|^2 w + Cww_x, \quad (2)$$

где $w = u + iv$ комплексная концентрация, состоящая из вещественных концентраций u, v , а A, B, C, D – произвольные комплексные числа. Основу анализа составляет прямой метод из [24], который основан на использовании дробно-рациональной формы кинковых волновых решений. Отметим, что впервые кинковое волновое решение было построено в работе [9] для действительного уравнения Фишера.

I. Рассмотрим уравнение (1). Полагая, что

$$A = a_1 + ia_2, \quad B = b_1 + ib_2, \quad C = c_1 + ic_2, \quad D = d_1 + id_2,$$

перепишем уравнение (1) в виде системы уравнений

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} - d_2 v_{xx} + a_1 u - a_2 v + b_1(u^2 + v^2) u - b_2(u^2 + v^2)v + c_1 u_x - c_2 v_x, \\ v_t = d_1 v_{xx} + d_2 u_{xx} + a_1 v + a_2 u + b_1(u^2 + v^2) v + b_2(u^2 + v^2)u + c_1 v_x + c_2 u_x. \end{cases} \quad (3)$$

Решение системы (3) будем строить в виде кинков вида (ср. с [9])

$$\begin{aligned} u(t, x) = u(\xi) &= \mu_0 + \mu_1 F^{-1}(\xi), \quad v(t, x) = v(\xi) = \chi_0 + \chi_1 F^{-1}(\xi), \\ \xi &= \alpha t + \beta x + \varphi, \quad u(\pm\infty) = u_{\pm}, \quad v(\pm\infty) = v_{\pm}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $F(\xi)$ – неизвестная волновая функция, $\alpha, \beta, \varphi, \mu_0, \mu_1, \chi_0, \chi_1$ – произвольные действительные числа, u_{\pm}, v_{\pm} – значения на бесконечности. Подставляя (4) в (3), найдем

$$\begin{aligned} -\alpha\mu_1 FF' &= d_1 \left[2\beta^2 \mu_1 (F')^2 - \beta^2 \mu_1 FF'' \right] - d_2 \left[2\beta^2 \chi_1 (F')^2 - \beta^2 \chi_1 FF'' \right] + \\ &\quad + a_1 \left[\mu_0 F^3 + \mu_1 F^2 \right] - a_2 \left[\chi_0 F^3 + \chi_1 F^2 \right] + \\ &\quad + b_1 \left[2F(\mu_0 \mu_1 + \chi_0 \chi_1) + F^2 (\mu_0^2 + \chi_0^2) + (\mu_1^2 + \chi_1^2) \right] [\mu_0 F + \mu_1] - \\ &\quad - b_2 \left[2F(\mu_0 \mu_1 + \chi_0 \chi_1) + F^2 (\mu_0^2 + \chi_0^2) + (\mu_1^2 + \chi_1^2) \right] [\chi_0 F + \chi_1] - \\ &\quad - c_1 \beta \mu_1 FF' + c_2 \beta \chi_1 FF', \\ -\alpha\chi_1 FF' &= d_1 \left[2\beta^2 \chi_1 (F')^2 - \beta^2 \chi_1 FF'' \right] + d_2 \left[2\beta^2 \mu_1 (F')^2 - \beta^2 \mu_1 FF'' \right] + \quad (5) \\ &\quad + a_1 \left[\chi_0 F^3 + \chi_1 F^2 \right] + a_2 \left[\mu_0 F^3 + \mu_1 F^2 \right] + \\ &\quad + b_1 \left[2F(\mu_0 \mu_1 + \chi_0 \chi_1) + F^2 (\mu_0^2 + \chi_0^2) + (\mu_1^2 + \chi_1^2) \right] [(\chi_0 F + \chi_1)] + \\ &\quad + b_2 \left[2F(\mu_0 \mu_1 + \chi_0 \chi_1) + F^2 (\mu_0^2 + \chi_0^2) + (\mu_1^2 + \chi_1^2) \right] [\mu_0 F + \mu_1] - \\ &\quad - c_1 \chi_1 \beta FF' - c_2 \beta \mu_1 FF'. \end{aligned}$$

Систему (5) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} F^3 H_3 + F^2 H_2 + FH_1 + FF' (\alpha\mu_1 - c_1 \beta \mu_1 + c_2 \beta \chi_1) + \\ + 2(F')^2 \beta^2 (d_1 \mu_1 - d_2 \chi_1) + \beta^2 FF'' (d_2 \chi_1 - d_1 \mu_1) + \\ + (b_1 \mu_1 - b_2 \chi_1) (\mu_1^2 + \chi_1^2) = 0, \\ F^3 \tilde{H}_3 + F^2 \tilde{H}_2 + F \tilde{H}_1 + FF' (\alpha\chi_1 - c_1 \chi_1 \beta - c_2 \beta \mu_1) + \\ + 2\beta^2 (F')^2 (d_1 \chi_1 + d_2 \mu_1) - \beta^2 FF'' (d_1 \chi_1 + d_2 \mu_1) + \\ + (\mu_1^2 + \chi_1^2) (b_1 \chi_1 + b_2 \mu_1) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$H_3 \equiv a_1 \mu_0 - a_2 \chi_0 + (\mu_0^2 + \chi_0^2) (b_1 \mu_0 - b_2 \chi_0),$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &\equiv a_1\mu_1 - a_2\chi_1 + (\mu_0^2 + \chi_0^2)(b_1\mu_1 - b_2\chi_1) + 2(\mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1)(b_1\mu_0 - b_2\chi_0), \\
 H_1 &\equiv 2(\mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1)(b_1\mu_1 - b_2\chi_1) + (\mu_1^2 + \chi_1^2)(b_1\mu_0 - b_2\chi_0), \\
 \tilde{H}_3 &\equiv a_2\mu_0 + a_1\chi_0 + (\mu_0^2 + \chi_0^2)(b_1\chi_0 + b_2\mu_0), \\
 \tilde{H}_2 &\equiv a_1\chi_1 + a_2\mu_1 + (\mu_0^2 + \chi_0^2)(b_1\chi_1 + b_2\mu_1) + 2(\mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1)(b_1\chi_0 + b_2\mu_0), \\
 \tilde{H}_1 &\equiv 2(\mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1)(b_1\chi_1 + b_2\mu_1) + (\mu_1^2 + \chi_1^2)(b_1\chi_0 + b_2\mu_0).
 \end{aligned}$$

Решение системы (6) строится в виде

$$F(\xi) = h_0 + h_1 \exp(\xi), \quad (7)$$

где $h_0 > 0$, $h_1 > 0$ неизвестные действительные числа. Подставляя (7) в (6) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях экспоненты, получим:

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 e^3 : a_1\mu_0 - a_2\chi_0 + (\mu_0^2 + \chi_0^2)(b_1\mu_0 - b_2\chi_0) &= 0 \\
 e^3 : a_2\mu_0 + a_1\chi_0 + (\mu_0^2 + \chi_0^2)(b_1\chi_0 + b_2\mu_0) &= 0
 \end{aligned} \right\}, \quad (I) \\
 \left. \begin{aligned}
 e^2 : H_2 + (\alpha\mu_1 - c_1\beta\mu_1 + c_2\beta\chi_1) + \beta^2(d_1\mu_1 - d_2\chi_1) &= 0 \\
 e^2 : \tilde{H}_2 + (\alpha\chi_1 - c_1\beta\chi_1 - c_2\beta\mu_1) + \beta^2(d_1\chi_1 + d_2\mu_1) &= 0
 \end{aligned} \right\}, \quad (II) \\
 \left. \begin{aligned}
 e : 2h_0H_2 + H_1 + h_0(\alpha\mu_1 - c_1\beta\mu_1 + c_2\beta\chi_1) + h_0(d_2\chi_1 - d_1\mu_1)\beta^2 &= 0 \\
 e : 2h_0\tilde{H}_2 + \tilde{H}_1 + h_0(\alpha\chi_1 - c_1\beta\chi_1 - c_2\beta\mu_1) - h_0(d_1\chi_1 + d_2\mu_1)\beta^2 &= 0
 \end{aligned} \right\}, \quad (III) \\
 \left. \begin{aligned}
 e^0 : h_0^2H_2 + h_0H_1 + (b_1\mu_1 - b_2\chi_1)(\mu_1^2 + \chi_1^2) &= 0 \\
 e^0 : h_0^2\tilde{H}_2 + h_0\tilde{H}_1 + (b_1\chi_1 + b_2\mu_1)(\mu_1^2 + \chi_1^2) &= 0
 \end{aligned} \right\}. \quad (IV)
 \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Для того чтобы система (6) имела решение вида (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (8).

Отметим, что параметр $h_1 > 0$ является произвольным.

Исследуем соотношения (8). С этой целью положим (для упрощения вычислений), что $h_0 = 1$. Тогда система (IV) примет вид

$$\begin{aligned}
 a_1\mu_1 - a_2\chi_1 + 2(\mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1)(b_1\mu_0 - b_2\chi_0 + b_1\mu_1 - b_2\chi_1) + \\
 + (\mu_0^2 + \chi_0^2)(b_1\mu_1 - b_2\chi_1) + (\mu_1^2 + \chi_1^2)(b_1\mu_0 - b_2\chi_0 + b_1\mu_1 - b_2\chi_1) = 0,
 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & a_1\chi_1 + a_2\mu_1 + 2(\mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1)(b_1\chi_0 + b_2\mu_0 + b_1\chi_1 + b_2\mu_1) + \\ & + (\mu_0^2 + \chi_0^2)(b_1\chi_1 + b_2\mu_1) + (\mu_1^2 + \chi_1^2)(b_1\chi_0 + b_2\mu_0 + b_1\chi_1 + b_2\mu_1) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из системы (I) найдем

$$a_1 = -b_1\Gamma_0, \quad a_2 = -b_2\Gamma_0, \quad \Gamma_0 \equiv \mu_0^2 + \chi_0^2. \quad (11)$$

Тогда коэффициенты H_1 , H_2 , \tilde{H}_1 , \tilde{H}_2 примут вид

$$H_1 = 2\Gamma_2(b_1\mu_1 - b_2\chi_1) + \Gamma_1(b_1\mu_0 - b_2\chi_0), \quad H_2 = 2\Gamma_2(b_1\mu_0 - b_2\chi_0),$$

$$\tilde{H}_1 = 2\Gamma_2(b_1\chi_1 + b_2\mu_1) + \Gamma_1(b_1\chi_0 + b_2\mu_0),$$

$$\tilde{H}_2 = 2\Gamma_2(b_1\chi_0 + b_2\mu_0), \quad \Gamma_2 \equiv \mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1, \quad \Gamma_1 \equiv \mu_1^2 + \chi_1^2.$$

Используя соотношения (11), уравнение (9) преобразуем к виду

$$(b_1M - b_2N)(2\Gamma_2 + \Gamma_1) = 0, \quad (12)$$

где $M \equiv \mu_0 + \mu_1$, $N \equiv \chi_0 + \chi_1$, а уравнение (10) – к виду

$$(b_1N + b_2M)(2\Gamma_2 + \Gamma_1) = 0. \quad (13)$$

Из (12), (13) следует, что, либо

$$2\Gamma_2 + \Gamma_1 = 0, \quad (14)$$

либо

$$M = N = 0, \quad (15)$$

если $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$.

Пусть выполнено условие (14). Тогда остается исследовать системы (II), (III).

Систему (II) преобразуем к виду

$$\begin{cases} d_1\beta^2\mu_1 - d_2\beta^2\chi_1 = -H_2 - (\alpha\mu_1 - c_1\beta\mu_1 + c_2\beta\chi_1), \\ d_1\beta^2\chi_1 + d_2\beta^2\mu_1 = -\tilde{H}_2 - (\alpha\chi_1 - c_1\beta\chi_1 - c_2\beta\mu_1). \end{cases}$$

Из нее определим параметры d_1 , d_2 . Имеем

$$d_1 = \frac{c_1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta^2} + \tilde{d}_1, \quad (16)$$

$$\tilde{d}_1 = \frac{1}{\Delta_1} \left[2\Gamma_2(b_2\chi_0\mu_1 - b_1\mu_0\mu_1 - b_1\chi_0\chi_1 - b_2\mu_0\chi_1) \right], \quad \Delta_1 \equiv \beta^2\Gamma_1,$$

$$d_2 = \frac{c_2}{\beta} + \tilde{d}_2, \quad (17)$$

$$\tilde{d}_2 = \frac{1}{\Delta_1} \left[2\Gamma_2(-b_1\chi_0\mu_1 - b_2\mu_0\mu_1 + b_1\mu_0\chi_1 - b_2\chi_0\chi_1) \right].$$

Систему (III) преобразуем к виду

$$\begin{cases} -2\beta\mu_1c_1 + 2\beta\chi_1c_2 = -2\alpha\mu_1 - H_1 - 2H_2 - \beta^2\chi_1\tilde{d}_2 + \beta^2\mu_1\tilde{d}_1 \equiv L_1, \\ -2\beta\chi_1c_1 + 2\beta\mu_1c_2 = -2\alpha\chi_1 - \tilde{H}_1 - 2\tilde{H}_2 + \beta^2\mu_1\tilde{d}_2 + \beta^2\chi_1\tilde{d}_1 \equiv L_2. \end{cases} \quad (18)$$

Из (18) определим параметры c_1, c_2 . Имеем

$$c_1 = \frac{2\beta(\mu_1L_1 - \chi_1L_2)}{\delta_1}, \quad c_2 = \frac{2\beta(\chi_1L_1 - \mu_1L_2)}{\delta_1}, \quad (19)$$

если $\delta_1 = 4\beta^2(\chi_1^2 - \mu_1^2) \neq 0$.

Таким образом, система уравнений (8) представляет собой законы распространения двух кинков вида (4). Их анализ показывает, что если

$$\beta \neq 0, \delta_1 \neq 0, h_0 = 1, \quad (20)$$

то можно задать произвольным образом параметры $\alpha, \beta, b_1, b_2, \mu_0, \mu_1, \chi_0, \chi_1$ а параметры $a_1, a_2, d_1, d_2, c_1, c_2$ можно однозначно найти по формулам (11), (16), (17), (19). Значения на бесконечности примут вид

$$\begin{aligned} u(\xi)|_{\xi \rightarrow +\infty} &= \mu_0, \\ u(\xi)|_{\xi \rightarrow -\infty} &= \mu_0 + \mu_1, \quad v(\xi)|_{\xi \rightarrow -\infty} = \chi_0 + \chi_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены условия (14), (20). Тогда уравнение (1) имеет решение вида (4), (7), которое удовлетворяет краевым условиям (21).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$w_t = \left(-\frac{13}{36} + \frac{13}{36}i \right) w_{xx} + \left(-\frac{13}{72} + \frac{13}{72}i \right) w + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) |w|^2 w + w_x.$$

По теореме 2 оно имеет решение вида

$$w(t, x) = \left[\frac{1}{2} - F^{-1}(\xi) \right] + i \left[\frac{1}{3} - \frac{2}{3} F^{-1}(\xi) \right], \quad F(\xi) = 1 + h_1 \exp(\xi), \quad h_1 > 0.$$

Пусть выполнено условие (15). Тогда $\mu_1 = -\mu_0, \chi_1 = -\chi_0$. Формулы (16), (17), (19) примут вид

$$d_1 = \frac{c_1}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta^2} + \tilde{d}_1, \quad \tilde{d}_1 = \frac{1}{\beta^2 \Gamma_1} [2\Gamma_2 \Gamma_0 b_1],$$

$$d_2 = \frac{c_2}{\beta} + \tilde{d}_2, \quad \tilde{d}_2 = \frac{1}{\beta^2 \Gamma_1} [2\Gamma_2 \Gamma_0 b_2],$$

$$c_1 = \frac{2\beta(\chi_0 L_2 - \mu_0 L_1)}{\delta_1} \Bigg|_{\substack{\mu_1 = -\mu_0 \\ \chi_1 = -\chi_0}}, \quad c_2 = \frac{2\beta(\mu_0 L_2 - \chi_0 L_1)}{\delta_1} \Bigg|_{\substack{\mu_1 = -\mu_0 \\ \chi_1 = -\chi_0}}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. Пусть выполнены условия (15), (20). Тогда уравнение (1) имеет решение вида (4), (7), которое удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} u(\xi)|_{\xi \rightarrow +\infty} &= \mu_0, \quad v(\xi)|_{\xi \rightarrow +\infty} = \chi_0, \\ u(\xi)|_{\xi \rightarrow -\infty} &= 0, \quad v(\xi)|_{\xi \rightarrow -\infty} = 0. \end{aligned} \quad (21')$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$w_t = -\left(\frac{31}{8} + \frac{5}{4}i\right)w_{xx} - \left(\frac{5}{8} + \frac{5}{16}i\right)w + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}i\right)|w|^2 w - \left(\frac{13}{8} + \frac{5}{8}i\right)w_x.$$

По теореме 3 оно имеет решение вида

$$w(t, x) = \left[1 - F^{-1}(\xi)\right] + i\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}F^{-1}(\xi)\right], \quad F(\xi) = 1 + h_1 \exp(\xi), \quad h_1 > 0.$$

II. Рассмотрим уравнение (2). Как и выше перепишем его в виде системы уравнений

$$\begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} - d_2 v_{xx} + (a_1 u - a_2 v) + b_1 (u^2 + v^2) u - b_2 (u^2 + v^2) v + \\ \quad + c_1 (u u_x - v v_x) - c_2 (u v_x + u_x v), \\ v_t = d_1 v_{xx} + d_2 u_{xx} + (a_1 v + a_2 u) + b_1 (u^2 + v^2) v + b_2 (u^2 + v^2) u + \\ \quad + c_1 (u v_x + u_x v) + c_2 (u u_x - v v_x). \end{cases} \quad (22)$$

Решение системы (22) строится в виде кинков (4). Подставляя (4) в (22), найдем

$$\begin{aligned} F^3 &\left[a_1 \mu_0 - a_2 \chi_0 + \Gamma_0 (b_1 \mu_0 - b_2 \chi_0) \right] + F^2 \left[a_1 \mu_1 - a_2 \chi_1 + 2\Gamma_2 (b_1 \mu_0 - b_2 \chi_0) + \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_0 (b_1 \mu_1 - b_2 \chi_1) \right] + F \left[\Gamma_1 (b_1 \mu_0 - b_2 \chi_0) + 2\Gamma_2 (b_1 \mu_1 - b_2 \chi_1) \right] + \\ &\quad + FF' \left[\alpha \mu_1 + \mu_0 (c_2 \chi_1 - c_1 \mu_1) \beta + \chi_0 (c_1 \beta \chi_1 + c_2 \beta \mu_1) \right] + \\ &\quad + FF'' \beta^2 (d_2 \chi_1 - d_1 \mu_1) + 2(F')^2 \beta^2 (d_1 \mu_1 - d_2 \chi_1) + \\ &\quad + F' \left[c_1 \beta (\chi_1^2 - \mu_1^2) + 2c_2 \beta \mu_1 \chi_1 \right] + (b_1 \mu_1 - b_2 \chi_1) \Gamma_1 = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} F^3 &\left[a_1 \chi_0 + a_2 \mu_0 + (b_1 \chi_0 + b_2 \mu_0) \Gamma_0 \right] + F^2 \left[a_1 \chi_1 + a_2 \mu_1 + 2\Gamma_2 (b_1 \chi_0 + b_2 \mu_0) + \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_0 (b_1 \chi_1 + b_2 \mu_1) \right] + F \left[\Gamma_1 (b_1 \chi_0 + b_2 \mu_0) + 2\Gamma_2 (b_1 \chi_1 + b_2 \mu_1) \right] + \\ &\quad + FF' \left[\alpha \chi_1 - \mu_0 (c_1 \chi_1 + c_2 \mu_1) \beta + \chi_0 (c_2 \chi_1 - c_1 \mu_1) \beta \right] - \\ &\quad - \beta^2 FF'' (d_1 \chi_1 + d_2 \mu_1) + 2\beta^2 (F')^2 (d_1 \chi_1 + d_2 \mu_1) + \\ &\quad + F' \left[-2c_1 \beta \chi_1 \mu_1 + c_2 \beta (\chi_1^2 - \mu_1^2) \right] + (b_1 \chi_1 + b_2 \mu_1) \Gamma_1 = 0. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$H_1 = \Gamma_1(b_1\mu_0 - b_2\chi_0) + 2\Gamma_2(b_1\mu_1 - b_2\chi_1),$$

$$H_2 = a_1\mu_1 - a_2\chi_1 + 2\Gamma_2(b_1\mu_0 - b_2\chi_0) + \Gamma_0(b_1\mu_1 - b_2\chi_1),$$

$$H_3 = a_1\mu_0 - a_2\chi_0 + \Gamma_0(b_1\mu_0 - b_2\chi_0),$$

$$R = \alpha\mu_1 + \mu_0(c_2\chi_1 - c_1\mu_1)\beta + \chi_0(c_1\chi_1 + c_2\mu_1)\beta, Q = c_1\beta(\chi_1^2 - \mu_1^2) + 2c_2\beta\mu_1\chi_1,$$

$$\tilde{H}_1 = \Gamma_1(b_1\chi_0 + b_2\mu_0) + 2\Gamma_2(b_1\chi_1 + b_2\mu_1),$$

$$\tilde{H}_2 = a_1\chi_1 + a_2\mu_1 + 2\Gamma_2(b_1\chi_0 + b_2\mu_0) + \Gamma_0(b_1\chi_1 + b_2\mu_1),$$

$$\tilde{H}_3 = a_1\chi_0 + a_2\mu_0 + \Gamma_0(b_1\chi_0 + b_2\mu_0),$$

$$\tilde{R} = \alpha\chi_1 - \mu_0(c_1\chi_1 + c_2\mu_1)\beta + \chi_0(c_2\chi_1 - c_1\mu_1)\beta, \tilde{Q} = c_2\beta(\chi_1^2 - \mu_1^2) - 2c_1\beta\chi_1\mu_1,$$

$$\Gamma_0 = \mu_0^2 + \chi_0^2, \Gamma_1 = \mu_1^2 + \chi_1^2, \Gamma_2 = \mu_0\mu_1 + \chi_0\chi_1.$$

Решение системы (23) строится в виде

$$F(\xi) = \lambda_0 + \lambda_1 \exp(\xi), \quad (24)$$

где $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$ – неизвестные действительные числа. Подставляя (24) в (23) и используя линейную независимость экспонент, найдем

$$\left. \begin{array}{l} e^3 : H_3 = 0 \Rightarrow a_1\mu_0 - a_2\chi_0 + \Gamma_0(b_1\mu_0 - b_2\chi_0) = 0 \\ e^3 : H_3 = 0 \Rightarrow a_1\chi_0 + a_2\mu_0 + \Gamma_0(b_1\chi_0 + b_2\mu_0) = 0 \end{array} \right\}, \quad (\text{I})$$

$$\left. \begin{array}{l} e^2 : H_2 + R + \beta^2(d_2\chi_1 - d_1\mu_1) + 2\beta^2(d_1\mu_1 - d_2\chi_1) = 0 \\ e^2 : \tilde{H}_2 + \tilde{R} - \beta^2(d_1\chi_1 + d_2\mu_1) + 2\beta^2(d_1\chi_1 + d_2\mu_1) = 0 \end{array} \right\}, \quad (\text{II})$$

$$\left. \begin{array}{l} e : 2\lambda_0 H_2 + H_1 + \lambda_0 R + \lambda_0 \beta^2(d_2\chi_1 - d_1\mu_1) + Q = 0 \\ e : 2\lambda_0 \tilde{H}_2 + \tilde{H}_1 + \lambda_0 \tilde{R} - \lambda_0 \beta^2(d_1\chi_1 + d_2\mu_1) + \tilde{Q} = 0 \end{array} \right\}, \quad (\text{III})$$

$$\left. \begin{array}{l} e^0 : \lambda_0^2 H_2 + \lambda_0 H_1 + (b_1\mu_1 - b_2\chi_1)\Gamma_1 = 0 \\ e^0 : \lambda_0^2 \tilde{H}_2 + \lambda_0 \tilde{H}_1 + (b_1\chi_1 + b_2\mu_1)\Gamma_1 = 0 \end{array} \right\}. \quad (\text{IV})$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. Для того чтобы система (23) имела решение вида (24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (25).

Отметим, что параметр $\lambda_1 > 0$ является произвольным.

Исследуем уравнения (25). Для упрощения вычислений положим, что $\lambda_0 = 1$. Из системы (I) найдем

$$a_1 = -b_1 \Gamma_0, \quad a_2 = -b_2 \Gamma_0. \quad (26)$$

Систему (IV) преобразуем к виду

$$(2\Gamma_2 + \Gamma_1)(b_1\omega_1 - b_2\omega_2) = 0, \quad (2\Gamma_2 + \Gamma_1)(b_1\omega_2 + b_2\omega_1) = 0. \quad (27)$$

$$\omega_1 = \mu_0 + \mu_1, \quad \omega_2 = \chi_0 + \chi_1.$$

Из (27) следует, что либо

$$\Gamma_1 + 2\Gamma_2 = 0, \quad (28)$$

либо

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad (29)$$

если $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$.

Пусть выполнено условие (28). Тогда остается исследовать системы (II), (III). Систему (II) приведем к виду

$$\begin{cases} H_2 + R + \beta^2(d_1\mu_1 - d_2\chi_1) = 0, \\ \tilde{H}_2 + \tilde{R} + \beta^2(d_1\chi_1 + d_2\mu_1) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Из (30) можно выразить коэффициенты d_1, d_2 через коэффициенты b_1, b_2, c_1, c_2 . Для этого обозначим

$$\Phi_1 = -\frac{H_2 + R}{\beta^2}, \quad \Phi_2 = -\frac{\tilde{H}_2 + \tilde{R}}{\beta^2}.$$

Тогда

$$d_1 = \frac{\mu_1\Phi_1 + \chi_1\Phi_2}{\Gamma_1}, \quad d_2 = \frac{\mu_1\Phi_2 - \chi_1\Phi_1}{\Gamma_1}. \quad (31)$$

Систему (III) приведем к виду

$$\begin{cases} H_1 + 3H_2 + 2R + Q = 0, \\ \tilde{H}_1 + 3\tilde{H}_2 + 2\tilde{R} + \tilde{Q} = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Из (32) следует, что параметры c_1, c_2 однозначно определяются, если выполняется хотя бы одно из условий

$$2(\chi_0\chi_1 - \mu_0\mu_1) + \chi_1^2 - \mu_1^2 \neq 0, \quad (33)$$

или

$$\mu_0\chi_1 + \chi_0\mu_1 + 2\mu_1\chi_1 \neq 0. \quad (34)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5. Пусть выполнены условия (28), (33) или (34). Тогда уравнение (2) имеет решение вида (4), (24), которое удовлетворяет краевым условиям (21).

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$w_t = \left(\frac{98}{343} i \right) w_{xx} + \left(\frac{265}{32} + \frac{265}{16} i \right) w - (2+4i)|w|^2 w + \left(-\frac{7791}{1715} + \frac{56}{245} i \right) w w_x.$$

По теореме 5 оно имеет решение вида

$$w(t, x) = \left[2 - \frac{1}{2} F^{-1}(\xi) \right] + i \left[-\frac{3}{8} - F^{-1}(\xi) \right], \quad F(\xi) = 1 + \lambda_1 \exp(\xi), \quad \lambda_1 > 0.$$

Пусть выполнены соотношения (29). Тогда $\mu_1 = -\mu_0$, $\chi_1 = -\chi_0$. В этом случае условие (33) примет вид

$$\mu_0^2 - \chi_0^2 \neq 0. \quad (35)$$

Условие (34) не выполняется. Следовательно, справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнены условия (29), (35). Тогда уравнение (2) имеет решение вида (4), (24), которое удовлетворяет краевым условиям (21').*

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$w_t = \left(\frac{63}{5} - 44i \right) w_{xx} + (-20 + 20i) w + (1-i)|w|^2 w + \left(\frac{8}{5} - \frac{109}{5} i \right) w w_x.$$

По теореме 6 оно имеет решение вида

$$w(t, x) = \left[4 - 4F^{-1}(\xi) \right] + i \left[2 - 2F^{-1}(\xi) \right], \quad F(\xi) = 1 + \lambda_1 \exp(\xi), \quad \lambda_1 > 0.$$

Таким образом, в работе развит прямой метод построения кинковых волновых решений нелинейных систем типа реакции с диффузией.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Murray, J.D.* Mathematical biology. Springer / J.D. Murray. – 1989.
2. *Bindu, P.S.* Symmetries and integrability properties of generalized Fisher type nonlinear diffusion equation / P.S. Bindu, M. Lakshmanan // Proceedings of institute of mathematics of NAS of Ukraine. – 2002. – Vol. 43. – Part. 1. – P. 36–48.
3. *Lotka, A.J.* Updaded oscillations derived from the law of mass action / A.J. Lotka // J.Amer. Chem. Soc. – 1920. – Vol. 42. – P. 1595–1599.
4. *Volterra, V.* Variazioni fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi / V. Volterra // Mem. Acad. Lincei. – 1926. – Vol. 2. – P. 31–113.
5. *Fisher, R.A.* The wave of advance of advantageous genes / R.A. Fisher // Ann. Eugenics. – 1937. – Vol. 7. – P. 353–369.
6. *Колмогоров, А.Н.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюллентень МГУ, Сер. А. Матем. и механика. – 1937. – Т. 1. – С. 1–25.
7. *Canosa, J.* Diffusion in nonlinear multiplicative media / J. Canosa // J. Math. Phys. – 1969. – Vol. 10. – P. 1862–1868.
8. *Aronson, D.G.* Partial differential equations and related topics / D.G. Aronson, H.F. Weinberger // Lecture Notes in Mathematics. Springer. – 1975. – V. 446. – P. 5–49.

9. **Ablowitz, M.J.** Explicit solution of Fisher's equation for a special wave speed / M.J. Ablowitz, A. Zeppetella // Bull. Math. Biol. – 1979. – V. 41. – P. 835–840.
10. **Shigesada, N.** Spatial segregation of interacting species / N. Shigesada, K. Kawasaki, E. Teramoto // J. Theor. Biol. – 1979. – Vol. 79. – P. 83–99.
11. **Brazhnik, P.K.** Travelling waves and static structures in a two-dimensional exactly solvable reaction-diffusion system / P.K. Brazhnik, J.J. Tyson // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – V. 32. – P. 8033–8044.
12. **Brazhnik, P.K.** On travelling wave solutions of Fisher's equation in two spatial dimensions / P.K. Brazhnik, J.J. Tyson // SIAM. J. Appl. Math. – 1999. – V. 60. – P. 371–391.
13. **Cherniha, R.** Lie symmetries of nonlinear two-dimensional reaction-diffusion systems / R. Cherniha // Rept. Math. Phys. – 2000. – Vol. 46. – P. 63–76.
14. **Черніга, Р.М.** Нові точні розв'язки та іхні властивості одного нелінійного рівняння математичної біології / Р.М. Черніга // Укр. мат. журнал. – 2001. – Т. 53. – № 10. – С. 1409–1421.
15. **Черніга, Р.М.** Дифузійна система Лотки – Вольтерра: симетрії Лі, точні та числові розв'язки / Р.М. Черніга, В.А. Дутка // Укр. мат. журнал. – 2004. – Т. 56. – № 10. – С. 1395–1404.
16. **Баранник, А.Ф.** Про нелійські розв'язки нелінійного рівняння реакції–дифузії / А.Ф. Баранник, І.І. Юрік // Доп. Нац. АН України. – 2005. – № 2. – С. 11–17.
17. **Сидоров, С.В.** Бегущие волны и динамический хаос в активных средах: численное исследование / С.В. Сидоров // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 2. – С. 250–254.
18. **Жестков, С.В.** О существовании волновых решений в модели нервной проводимости FitzHugh-Nagumo / С.В. Жестков // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. “Герценовские чтения-2009”. LXII. 13-18 апреля 2009. – СПб., 2009. – С. 50–54.
19. **Жестков, С.В.** О существовании новых форм волновых решений нелинейных уравнений математической биологии / С.В. Жестков, А.А. Романенко // Весні НАНБ. Сер. фіз.-мат. науок. – 2010. – № 2. – С. 46–51.
20. **Жестков, С.В.** Аналитическое моделирование волновых решений биологических систем типа Shigesada-Kawasaki-Teramoto / С.В. Жестков, А.С. Платонов // Матер. науч. конф. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. – “Герценовские чтения-2010”, 12-17 апреля 2010. – СПб., 2009. – С. 33–35.
21. **Жестков, С.В.** Об исследовании новых форм волновых решений двумерных уравнений Фишера и Лотки-Вольтерра / С.В. Жестков, А.А. Романенко // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. Сер. В. – Могилев. – 2010. – № 2(36). – С. 4–15.
22. **Жестков, С.В.** О существовании волновых решений двумерных уравнений Фишера с различными типами нелинейности / С.В. Жестков, А.А. Романенко // Доклады НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55. – № 3. – С. 55–58.
23. **Жестков, С.В.** Построение точных волновых решений нелинейных параболических уравнений с помощью аналитических функций комплексного аргумента / С.В. Жестков, А.А. Романенко // Весні НАНБ. Сер. фіз.-мат. науок. – 2011. – № 3. – С. 47–53.
24. **Жестков, С.В.** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных : монография / С.В. Жестков. – Могилев : МГУ им. А.А. Кулешова, 2006.

Поступила в редакцию 14.03.2012 г.

УДК 517.544

А.Г. АЛЕХНО, А.Б. СЕВРУК

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В статье дан обзор основных результатов, полученных по указанной тематике за пятьдесят лет ее развития. Результаты первых двадцати лет прокомментированы в [27, с. 95-103].

Краевые (граничные) задачи теории аналитических функций состоят в нахождении аналитических в некоторых областях функций, предельные значения которых на границе удовлетворяют заданному соотношению. Постановка таких задач восходит к Б. Риману [31, с. 177], а первое решение линейной краевой задачи дал Д. Гильберт [51].

Центральное место в теории краевых задач занимает задача Римана (задача линейного сопряжения), классическая постановка которой такова. Дан простой гладкий замкнутый контур L , разбивающий комплексную плоскость на две области D^+ и D^- . Требуется найти функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические и ограниченные соответственно в областях D^+ и D^- , предельные значения которых на контуре удовлетворяют линейному соотношению

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

а заданные функции $G(t) \neq 0$ и $g(t)$ подчинены условию Гельдера ($G(t), g(t) \in H$).

Полное решение задачи Римана дал в 1937 г. Ф.Д. Гахов [11], который ввел понятие индекса задачи

$$x = JndG(t) = (2\pi)^{-1} \int_L d \arg G(t),$$

являющегося основной ее характеристикой. При исследовании этой задачи эффективным оказался метод представления аналитических функций интегралом типа Коши. В 1940 г. И.Н. Векуа получил в замкнутом виде решение характеристического сингулярного интегрального уравнения (СИУ) с ядром Коши, сведя его к задаче Римана. Установленная тесная связь между краевыми задачами для аналитических функций и СИУ, а также сведение к ним ряда важных задач механики и математической физики способствовали интенсивному развитию теории краевых задач. Исследования велись по различным направлениям: рассматривались задачи для более широких классов контуров, заданных и искомых функций, изучались задачи с более сложным краевым условием, которое содержит сдвиг и сопряжение искомых функций, а также нелинейные краевые задачи, задачи на римановых поверхностях, векторно-матрич-

ные задачи, задачи для обобщенных аналитических функций и для решений некоторых квазилинейных эллиптических систем. Эта работа продолжается и в настоящее время.

Методы, разработанные при решении указанных задач, нашли широкое применение в различных областях математики, механики, физики, главным образом при решении краевых задач математической физики. Особое значение имеют приложения к механике сплошной среды, теории упругости, гидромеханике, электродинамике, теории дисперсионных отношений, установлены также связи с задачами квантовой теории поля, теории массового обслуживания и теории игр.

Классические результаты по теории краевых задач и СИУ изложены в известных монографиях Ф.Д. Гахова [12] и Н.И. Мусхелишвили [26], которые стимулировали научные исследования в различных направлениях развития и обобщения этой теории. Полученные многочисленные результаты и их приложения отражены более чем в 30 монографиях.

В большинстве обобщений краевые задачи и СИУ рассматривались в предположении, что их индекс есть конечное число. В начале 60-х гг. Ф.Д. Гахов поставил вопрос об исследовании краевой задачи Римана с бесконечным индексом. Систематическое изучение этой задачи начал его ученик Н.В. Говоров [13], который рассмотрел ее в предположении, что $L = [1, \infty)$ и

$$\arg G(t) \sim 2\pi\lambda t^\rho, \rho > 0, \lambda \neq 0, t \rightarrow +\infty.$$

При выполнении этого соотношения, следуя Н.В. Говорову, будем говорить, что коэффициент $G(t)$ имеет в точке $t = \infty$ степенное завихрение, ρ называть порядком завихрения, λ – коэффициентом завихрения, а задачу будем называть задачей с бесконечным индексом.

Решения Н.В. Говоров искал в классе ограниченных аналитических функций, обычно используемом в классической постановке. При исследовании этой задачи возникли принципиальные трудности. Они обусловлены тем обстоятельством, что каноническая функция задачи

$$X(z) = \exp \left\{ \frac{z^{q+1}}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau^{q+1}(\tau - z)} \right\}, q = [\rho] \quad (2)$$

имеет при $z \rightarrow \infty$ асимптотическое поведение, аналогичное поведениюю аналитической функции в окрестности существенно особой точки. Поэтому общее решение однородной задачи представимо в виде

$$\Phi(z) = X(z)F(z),$$

где $F(z)$ – некоторая целая функция. Таким образом, задача сводится к отысканию целых функций, которым соответствуют ее ограниченные решения. Выделение класса таких целых функций производится с учетом асимптотического поведения $X(z)$ при $z \rightarrow \infty$ и опирается на свойства функций, аналитических и ограниченных в угловой области $0 < \arg z < 2\pi$,

которые по теореме У. Хеймана [50] имеют в указанной области вполне регулярный рост (в.р.р.) при формальном порядке $\sigma = \frac{1}{2}$.

Н.В. Говоров разработал принципиально новый метод исследования задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка $\rho > 0$, привлекающий методы теории целых функций и созданной им теории функций, имеющих в.р.р. в угловых областях. Полученные им результаты изложены в монографии [15], переведенной на английский язык. Они дают полное исследование краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка в случае одностороннего завихрения. Развитые Н.В. Говоровым методы успешно применяются во всех исследованиях по краевым задачам и сингулярным интегральным уравнениям с бесконечным индексом, а также плодотворно используются для решения задач в других областях теории функций комплексной переменной. Наиболее важным приложением этого метода является данное Н.В. Говоровым решение проблемы Пэйли о росте целых функций конечного порядка [14], [16, с. 554-565].

Начатые Н.В. Говоровым исследования продолжены рядом авторов в различных направлениях. Укажем кратко на важнейшие из них.

П.Г. Юрлов [44, 46] исследовал задачу Римана (1) с бесконечным индексом логарифмического порядка для одностороннего завихрения на луче $L = [1, \infty)$, когда заданные функции $G(t)$, $g(t)$ удовлетворяют при $j=1$ условиям:

$$1) \arg G(t) = \varphi_j(t) \ln^\alpha |t|, \alpha > 0, \varphi(\infty) = \lambda_j \neq 0, \quad (3)$$

а функция $\varphi(t)$ принадлежит классу Дини-Липшица D_β с показателем $\beta > \alpha + 2$ [12, с. 519];

$$2) \ln|G(t)|, g(t) \in D_p, p > \max\{2, \alpha\}, g(\infty) = 0. \quad (4)$$

Для исследования задачи им построена каноническая функция

$$X(z) = \exp \left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau(\tau - z)} \right\}.$$

Плотность интеграла типа Коши в последней формуле имеет логарифмическую особенность в бесконечно удаленной точке. Для исследования асимптотики таких интегралов П.Г. Юрлов применил новый метод, использующий теорию конечных разностей [45]. Им показано, что для канонической функции имеет место представление

$$X(re^{i\theta}) = \exp \left\{ -\frac{\lambda (\ln r)^{\alpha+1}}{2\pi(\alpha+1)} + O(\ln^\alpha r) \right\}, r \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что каноническая функция имеет нулевой порядок и при $\lambda > 0$ ограничена в $D = C \setminus L$. Как и в случае степенного завихрения у Н.В. Говорова, однородная задача Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in L, \quad (5)$$

оказывается неразрешимой в классе B ограниченных аналитических функций при $\lambda < 0$, а при $\lambda > 0$ она имеет бесконечное множество решений вида

$$\Phi(z) = X(z)F(z), \quad (6)$$

где $F(z)$ – произвольная целая функция нулевого порядка, удовлетворяющая на L оценке

$$\ln|F(t)| < -\ln|X^\pm(t)| + const, \quad t \in L. \quad (7)$$

Решение неоднородной задачи с плюс-бесконечным индексом представляется в виде суммы

$$\Phi(z) = \Psi(z) + \Phi_0(z), \quad (8)$$

где $\Psi(z)$ – общее решение соответствующей однородной задачи, а $\Phi_0(z)$ – некоторое частное решение неоднородной задачи. Следуя Н.В. Говорову, $\Phi_0(z)$ берется в виде

$$\Phi_0(z) = \frac{\Psi_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)d\tau}{\Psi_0^+(\tau)(\tau - z)} \equiv \Psi_0(z)\Gamma(z), \quad (9)$$

где

$$\Psi_0(z) = X(z)F_0(z) \quad (10)$$

решение задачи (6), удовлетворяющее при $0 < \alpha < 1$ условиям

$$g_0(t) \equiv g(t)(\Psi^+(t))^{-1} \in H, \quad g_0(\infty) = 0. \quad (11)$$

Если $\alpha \geq 1$ и $g_0(t) \in D_q$, $q > 1$, то строится целая функция

$$F_0(z) = \exp \left\{ z \int_1^\infty \frac{\left[\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{Re}(\ln x - \pi i)^\alpha \right]}{x(x+z)} dx \right\}$$

с корнями на луче $(-\infty, 1]$, такая, что $\Psi_0(z)$ из (10) ограничена и удовлетворяет соотношениям (11).

Если $\alpha \in (0, 1)$, то при $g(t) \in H$ указывается целая функция $F_0(z)$, для которой $\Psi_0(z)$ не ограничена, а $\Phi_0(z) \in B$.

Для неоднородной задачи с минус-бесконечным индексом, следуя Н.В. Говорову, строится мероморфное решение

$$\Psi_0(z) = X(z)F_0^{-1}(z) \quad (12)$$

соответствующей однородной задачи, имеющее счетное множество полюсов на указанной последовательности точек $\{z_n\} \subset L$. Показано, что неоднородная задача с минус-бесконечным индексом разрешима тогда и только тогда, когда справедливы условия разрешимости

$$\Gamma(z_n) = 0, \quad n \in N. \quad (13)$$

При их выполнении единственное ограниченное решение задачи дается формулой (9).

М.Э. Толочко [39, 40] рассмотрел задачу Римана для полуплоскости с бесконечным индексом степенного порядка $\rho_j(r) = \rho < 1$ в случае двустороннего завихрения, когда $j = 1, 2$ и

$$1) \arg G(t) = 2\pi\varphi_j(t)|t|^{\rho_j(\mu)}, t \in L_j, \rho > 0, \varphi_j \in H_{L_j}, \varphi_j(\infty) = \lambda_j \neq 0, \quad (14)$$

где L_1, L_2 – соответственно отрицательный и положительный лучи вещественной оси L ,

$$2) \ln|G(t)|, g(t) \in H, g(\infty) = 0. \quad (15)$$

В работах М.Э. Толочко впервые возник случай неопределенно бесконечного индекса, когда изменение $\arg G(t)$ на контуре не определено. Им получены необходимые и указаны достаточные условия разрешимости однородной задачи Римана в классе B . В статье [40] установлено, что при выполнении одного из условий:

$$1) 0 < \rho < 1, \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0,$$

$$2) 0 < \rho < \frac{1}{2}, \lambda_1 \lambda_2 > 0, (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} < \cos \rho\pi,$$

однородная задача имеет бесконечное множество ограниченных решений вида (6), где $X(z)$ – каноническая функция (2) с $q = 0$, а $F(z)$ – произвольная целая функция порядка не выше ρ , удовлетворяющая соотношению (7). Если в условиях 1), 2) в неравенствах, содержащих λ_j , изменить знаки на противоположные, то однородная задача будет неразрешима. Для задачи с неопределенно бесконечным индексом ($\lambda_1 \lambda_2 > 0$), когда $(\lambda_1 \lambda_2)^{-1} = \cos \rho\pi$, показано, что разрешимость задачи зависит от дополнительных свойств $\arg G(t)$, которые не улавливаются соотношениями (14).

Неоднородная задача исследована для случая плюс или минус-бесконечного индекса. Получены результаты, аналогичные результатам Н.В. Говорова.

Уточненным порядком $\rho(r)$ называют [16, с. 69] положительную, непрерывно дифференцируемую на $[0, \infty)$ функцию, удовлетворяющую условиям $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho'(r)r \ln r = 0$. Однородную задачу (5) для полуплоскости с бесконечным индексом при уточненном порядке $\rho(r)$, $\rho > 0$ изучил И.Е. Сандригайло [36]. В этой работе рассмотрен случай, когда модуль коэффициента задачи неограничен, причем $\ln|G(t)| = O(|t|^{\rho_0})$, где $0 < \rho_0 < \max\{\rho, 1\}$. Показано, что при $\rho \geq 1$ разрешима только задача с плюс-бесконечным индексом и условие на рост модуля коэффициента не влияет на ее разрешимость. При $\rho > 1$ каноническая функция не ограничена и не существует ограниченных решений, имеющих порядок ρ . Поэтому дано описание множества целых функций $F(z)$ из (6), для которых порядок решения $\Phi(z)$ не превосходит 1 и выписана оценка (7).

Для этого установлены асимптотические свойства нулей ограниченной в полуплоскости функции, причем существенно используется формула Карлемана ее представления. Получено общее решение задачи в классе B и в классе ограниченных функций, имеющих в.р.р. при заданном порядке $\sigma < 1$.

А.Г. Алексно провел полное исследование краевой задачи Римана с бесконечным индексом при уточненном порядке $\rho(r)$ в случае многостороннего завихрения, когда коэффициент задачи $G(t)$ задан соотношениями (14), (15) на контуре L , состоящем из m уходящих в бесконечность лучей $L_j = \{ \arg z = \beta_j \}, 0 = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_m < 2\pi$. Указанные необходимые условия разрешимости в классе B ограниченных кусочно-аналитических функций однородной задачи Римана, зависящие от порядков завихрения ρ_j , коэффициентов λ_j и углов β_j , под которыми лучи L_j уходят в бесконечность [7]. Получены достаточные условия разрешимости однородной задачи и при их выполнении построено ее общее решение. Установлен критерий разрешимости однородной задачи Римана с неопределенным бесконечным индексом, позволяющий получить все ее ограниченные решения из общего решения некоторой задачи Римана с плюс-бесконечным индексом. Приведен пример задачи Римана с бесконечным индексом двустороннего завихрения, которая имеет единственное ограниченное решение.

Исследована неоднородная задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка $\rho > 0$. В случае разрешимости в классе B однородной задачи указаны условия на свободный член $g(t)$, при выполнении которых, разрешима неоднородная задача. Если неоднородная задача не имеет неограниченных решений, то получены достаточные условия разрешимости неоднородной задачи и в случае плюс-бесконечного индекса, доказана их необходимость. При выполнении установленных условий разрешимости общее решение неоднородной задачи построено в замкнутом виде.

Изучена однородная задача Римана с коэффициентом

$$G(t) = \exp \left\{ 2\pi i \varphi_j(t) |t|^{\rho(|t|)} \right\}, \varphi_j(t) \in H, \varphi_j(\infty) = \lambda_j + i\nu_j \neq 0, \quad (16)$$

имеющим разрыв второго рода, когда в окрестности бесконечно удаленной точки как аргумент, так и модуль $G(t)$ имеют одинаковый положительный уточненный порядок роста $\rho(r)$ [5]. Получены удобные для проверки достаточные условия разрешимости задачи в классе B и при их выполнении построено ее общее решение.

Работы П.Г. Юрова на случай двустороннего завихрения на вещественной оси при предположениях (3), (4), где $j = 1, 2$, обобщил П.Ю. Алексно [1]. Полученные им результаты принципиально аналогичны соответствующим результатам М.Э. Толочко. А.Г. Алексно исследовал однородную задачу Римана с коэффициентом (3) при нулевом уточненном порядке $\rho(r)$.

Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Римана с конечным числом точек завихрения получил А.Г. Алексно [3].

Л.И. Чибрикова [42, 43] изучила задачу Римана на луче $L = [0, \infty)$ с бесконечным индексом степенно-логарифмического порядка, когда

$$\ln G(t) = 2\pi i G_0(t)t^\rho \ln^n t, \quad \rho > 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad G_0(t) \in H, \quad G_0(\infty) = R_0 e^{i\theta_0} \neq 0. \quad (17)$$

Получена асимптотика интеграла типа Коши с плотностью (17). Задача Римана решена в классе функций, имеющих в области $D = C \setminus L$ заданный индикатор $h(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r)$, порожденном функцией

$$f(r) = \begin{cases} (1+r)^\rho \ln^n(1+r), & \rho \neq [\rho] \\ (1+r)^\rho \ln^{n+1}(1+r), & \rho = [\rho] \end{cases}$$

Для однородной задачи получены необходимые и достаточные условия, накладываемые на индикатор целой функции $F(z)$ из формулы (6), дающей решение задачи. Отметим, что эти условия не выражены через исходные данные коэффициента задачи. Для неоднородной задачи даны необходимые условия ее разрешимости. Установлены условия, при которых неоднородная задача безусловно разрешима и указаны случаи, когда для существования решения необходимо и достаточно выполнения счетного числа условий, накладывающих ограничения на $g(t)$.

Результаты Л.И. Чибриковой распространены Ф.Н. Гарифьяновым [10] на случай, когда областью D является плоскость с разрезом по кривой $l_0 = l_{2\pi}$ из семейства l_λ , $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, простых гладких разомкнутых кривых, заполняющих всю плоскость, для которых $\lim_{l_\lambda \ni z \rightarrow \infty} \arg z = \lambda$ и равномерно по λ выполняется неравенство $\lim_{l_\lambda \ni z \rightarrow \infty} |z|S^{-1}(z) > \varepsilon > 0$, где $S(z)$ – длина части кривой l_λ , лежащей в круге радиуса $|z|$. При этом коэффициент задачи удовлетворяет условиям (17) при $n = 0$.

Для однородной задачи Римана с коэффициентом (16) А.Г. Алексно установил необходимые и достаточные условия разрешимости в классе кусочно-аналитических функций, имеющих заданный индикатор в каждой из угловых областей $D_j = \{\beta_j < \arg z < \beta_{j+1}\}$, $j = \overline{1, m}$, $\beta_{m+1} = 2\pi$, и получил ее общее решение. Это позволило ему построить в [8] аналитическую в угловой области функцию, имеющую в ней заданный индикатор $h(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r)$, которая является решением однородной задачи Римана с коэффициентом (16), причем параметры λ_j и ν_j выражены через значения $h(\theta)$ и ее производной.

В.Н. Монахов и Е.В. Семенко [25] решили краевую задачу Римана для полуплоскости с коэффициентом (14), где $\rho_j(r) = \rho < 1$, для ограниченных на бесконечности решений $\omega(z)$, определенного во всей плоскости уравнения

$$\omega_{\bar{z}} - \mu_1(\omega, z)\omega_z - \mu_2(\omega, z)\omega_{\bar{z}} = A(\omega, z),$$

где $|\mu_1(\omega, z)| + |\mu_2(\omega, z)| \leq \mu_0 < 1$.

Они исследовали также краевую задачу Римана с бесконечным индексом для аналитических функций на замкнутой римановой поверхности.

Ими определены классы корректности краевой задачи Римана для полуплоскости с помощью введения дополнительных условий вида

$$J(G, g, z_n) = 0, n \in Z, z_n \notin L. \quad (18)$$

Класс корректности – это класс последовательностей $\{z_n\}$, обеспечивающих единственность и устойчивость ограниченных решений задачи (1). Он определяется свойствами коэффициента $G(t)$. При этом либо $J = \Psi_0(z)$ – в случае безусловной разрешимости задачи, либо $J = \Gamma(z)$ – в случае счетного множества условий ее разрешимости, где Ψ_0 и Γ определены равенством (9).

Рассмотрена также краевая задача Римана для полуплоскости в классе аналитических в верхней и нижней полуплоскостях функций, принадлежащих в них пространствам Харди H_p , $p > 1$. Коэффициент задачи имеет вид

$$G(t) = G_0(t)e^{i\theta(t)}, \ln G_0(t) \in C^\alpha(R), \alpha > 0,$$

а монотонная функция $\theta(t)$ обладает свойствами:

1) $\theta(t) \in C^{1+\alpha}(-R, R)$, причем постоянная Гельдера $K(R)$ удовлетворяет неравенству $K(R) \leq O(R^{\lambda-1})$, $\lambda \geq \rho - 1$, $\rho > 0$;

$$2) m_0 \leq |\theta'| |t|^{1-\rho} \leq m_1.$$

Тогда случаи $\theta'(t) \geq 0$ и $\theta'(t) \leq 0$ отвечают соответственно плюс и минус-бесконечному индексу. В работе дано описание общего решения как задачи Римана, так и соответствующего ей характеристического сингулярного интегрального уравнения.

Существенное уменьшение жесткости ограничений на поведение в бесконечности аргумента коэффициента однородной задачи Римана достигнуто И.В. Островским [28]. Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок и

$$V(r) = r^{\rho(r)}, V_0(r) = \int_1^r V(t)t^{-1} dt.$$

На поведение функции $\ln G$ на бесконечности наложены следующие ограничения. Существуют пара уточненных порядков $\rho(r)$, $\rho_1(r)$, для которых

$$\rho < \frac{1}{2}, V_1(r) \ln r = o(V_0(r)), r \rightarrow \infty, (V_1(r) = r^{\rho_1(r)}),$$

и неубывающая целозначная функция $n(t) \geq 0$ такие, что

- 1) $(2\pi)^{-1} \arg G(t) = n(t) + V(t) + O(V_1(t)),$
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} (V_0(t))^{-1} \left\{ (2\pi)^{-1} \int_0^{K(t)} (\arg G(t+u) - \arg G(t-u)) u^{-1} du - \right.$

$$\left. - \int_0^{K(t)} (n(t+u) - n(t-u)) u^{-1} du \right\} \leq 0,$$
- 3) $\ln|G(t)| = o(V(t)).$

Доказано, что при сделанных предположениях задача имеет бесконечное множество ограниченных решений, а результаты Н.В. Говорова, П.Г. Юрова содержатся в полученном результате. Кроме того, показано, что $\arg G(t)$ может иметь сколь угодно быстрый рост.

Задачу Римана с коэффициентом, удовлетворяющим условиям 1) – 3), на m лучах $L_j = \{\arg z = \beta_j\}$, исследовал А.Г. Алексно.

Задача Римана на луче $L = [1, \infty)$ с коэффициентом, имеющим счетное множество нулей и полюсов, в постановке близкой к условиям Н.В. Говорова, решена М.И. Журавлевой [21]. Коэффициент задачи $G(t) = G_0(t)G_1(t)G_2(t)$ подчинен условиям:

$$1) G_0(t) = \exp \left\{ 2\pi(\psi(t) + i\varphi(t))|t|^\rho \right\}, \quad 0 < \rho < \frac{1}{2},$$

$$2) G_1(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - ta_n^{-1}), \quad G_2(t) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - tb_n^{-1})^{-1},$$

причем не имеющие общих точек множества $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, лежащие на L , правильно распределены. В этой работе впервые рассмотрен случай, когда $\ln|G(t)|$ имеет рост того же порядка, что и $\arg G(t)$.

Эти результаты в дальнейшем обобщались в работах А.Г. Алексно, Б.В. Дыбина [19], С.В. Рогозина [32], С.В. Рогозина и М.Э. Толочко [33], а в работах [21, 27, с. 143–146] рассмотрен случай, когда коэффициент претерпевает счетное множество разрывов первого рода.

Задачу Римана на замкнутом контуре Ляпунова с коэффициентом

$$G(t) = \exp \{2\pi i(\alpha(t) - i\beta(t))\},$$

допускающих разрывы колебательного типа в окрестностях конечного множества точек $t_j \in L$, рассмотрел Б.А. Кац [22]. Предполагается, что пределы

$$\lim_{t \rightarrow t_j \pm 0} \alpha(t), \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow t_j \pm 0} \alpha(t)$$

могут независимо друг от друга принимать любые конечные и бесконечные значения. В работе описаны условия конечности числа линейно независимых решений однородной задачи и исследована разрешимость неоднородной задачи.

Краевая задача Римана с бесконечным индексом на различных классах жордановых кривых изучалась в работах А.Г. Алексно [5], Е.А. Данилова [17], Б.А. Каца [23], И.В. Островского [29], С.А. Плакса [30].

Краевая задача Гильберта для полуплоскости состоит в нахождении всех ограниченных аналитических в верхней полуплоскости $D^+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ функций $\Phi(z) = u(z) + iv(z)$, непрерывные граничные значения которых удовлетворяют на действительной оси соотношению

$$a(t)u(t) + b(t)v(t) = g(t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (19)$$

где $a(t), b(t) \in H$, $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$.

Задача Гильберта с бесконечным индексом степенного порядка $\rho < 1$ решена И.Е. Сандригайло [35]. Он применил метод Н.И. Мусхелишвили доопределения по симметрии искомой функции $\Phi(z)$ в нижнюю полуплоскость и свел задачу (19) к задаче Римана с коэффициентом $G(t) = (a(t) + ib(t)) \cdot (a(t) - ib(t))^{-1}$, удовлетворяющим условиям (14), (15) при $j = 1, 2$. Указанным методом задачу Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка исследовал П.Ю. Алекна [2], а А.Б. Севрук [37] изучил задачу Гильберта для кусочно-аналитических функций с бесконечным индексом при уточненном порядке $\rho(r)$.

Р.Б. Салимов и П.Л. Шабалин [34] решили задачу Гильберта (19) с бесконечным индексом методом регуляризующего множителя, разработанным Ф.Д. Гаховым [12, с. 273]. Предполагается, что коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ задачи Гильберта таковы, что функция $G(t) = (a(t) + ib(t)) \cdot (a(t) - ib(t))^{-1}$ удовлетворяет условиям (14), (15) при $\rho(r) = \rho$. А.Г. Алехно этим методом исследовал задачу с бесконечным индексом логарифмического порядка $\alpha = 1$.

Е.М. Конышкова [24] рассмотрела характеристическое СИУ

$$a(t)\varphi(t) + b(t) \frac{(t+i)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau+i)(\tau-t)} = f(t)$$

с бесконечным индексом первого порядка, когда

$$a(t) \pm b(t) = g_{\pm}(t) e^{i\alpha_{\pm} t}, \quad \alpha_+ \neq \alpha_-.$$

Стандартным приемом уравнение сведено к задаче Римана, для исследования которой применяется метод Н.В. Говорова. При сделанных предположениях установлена равносильность СИУ и соответствующей задачи Римана. Приведен пример, доказывающий, что не каждому решению $\varphi(t) \in \tilde{H}$ СИУ отвечает ограниченное решение задачи Римана. Это показывает, что в случае бесконечного индекса применение результатов по краевым задачам к СИУ связано с большими трудностями.

Указанным методом СИУ с бесконечным индексом при различных предположениях исследованы А.Г. Алехно [4], Ф.Д. Берковичем [9], М.В. Дубатовской и С.В. Рогозиным [18], Л.Н. Скомаха [38]. Глубокие результаты методами функционального анализа в указанном направлении получены В.Б. Дыбины, С.М. Грудским и В. Скафом [47].

К задачам с бесконечным индексом по характеру исследования примыкают задачи на счетном множестве контуров. Этот факт отражен в монографии [41].

Методы, разработанные при решении задачи Римана с бесконечным индексом в случае многостороннего завихрения, А.Г. Алехно применил для исследования нелинейной краевой задачи

$$\Phi^+(t)\Phi^-(t)=G(t), G(t)\neq 0, G(t)\in H, t\in L, \quad (20)$$

на произвольном замкнутом кусочно-гладком контуре L , имеющем конечное число точек самопересечения. Задача (20) на простом гладком замкнутом контуре впервые рассмотрена П.Г. Черепановым, который свел к ней некоторые упругопластические задачи в условиях антиплоской деформации. В дальнейшем исследование задачи (20) было продолжено в работах Н.В. Говорова и Н.К. Кузнецова, В.В. Кашевского, Л.П. Примачука, Г.Г. Чаевского, причем были найдены только те решения, которые имеют конечное множество нулей. А.Г. Алехно [6] построил общее решение задачи (20), зависящее от семейства целых функций. При этом существование у задачи бесконечного множества решений со счетным множеством нулей вызвано не свойствами функции $G(t)$, а наличием узловых точек контура L , в которых краевое условие (20) не выполнено.

Таким образом, в настоящее время теория краевых задач с бесконечным индексом получила широкое развитие. При этом получен ряд новых результатов, не имеющих аналогов в теории задач с конечным индексом. К сожалению, один из авторов этого обзора, доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей математики и информатики БГУ Александр Григорьевич Алехно, безвременно ушел из жизни. В заключение второй соавтор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А.Г. Алехно, под руководством и с активным участием которого подготовлен этот аналитический обзор.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Алекна, П.Ю.** Об одной краевой задаче Римана с бесконечным индексом логарифмического типа для полуплоскости / П.Ю. Алекна // Литовский мат. сб. – 1973. – Т. 13. – № 3. – С. 5–13.
2. **Алекна, П.Ю.** Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости / П.Ю. Алекна // Литовский мат. сб. – 1977. – Т. 17. – № 1. – С. 15–18.
3. **Алехно, А.Г.** О краевой задаче Римана с конечным числом точек завихрения / А.Г. Алехно // Докл. АН БССР. – 1979. – Т. 23. – № 12. – С. 1069–1072.
4. **Алехно, А.Г.** О разрешимости характеристического сингулярного интегрального уравнения с бесконечным индексом / А.Г. Алехно // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – 10. – С. 1805–1811.
5. **Алехно, А.Г.** Однородная задача Римана с коэффициентом, имеющим разрыв второго рода / А.Г. Алехно // Изв. вузов, Математика. – 1990. – № 2. – С. 29–34.
6. **Алехно, А.Г.** Об одной нелинейной краевой задаче на простом замкнутом кусочно-гладком контуре с одной угловой точкой / А.Г. Алехно // Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление : труды Междунар. конференции, Минск, 1996 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 1996. – С. 9–19.

7. *Алехно, А.Г.* Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в случае многостороннего завихрения / А.Г. Алехно // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41. – № 5. – С. 38–46.
8. *Алехно, А.Г.* Построение по заданному индикатору функции, аналитической в плоскости с разрезом по лучу / А.Г. Алехно // Доклады НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54. – № 2. – С. 10–15.
9. *Беркович, Ф.Д.* О приложении краевых задач с бесконечным индексом к исследованию интегральных уравнений // Сб. Материалы Всесоюзн. конф. по краевым задачам. – Казань, 1970. – С. 49–54.
10. *Гарифьянов, Ф.Н.* К решению однородной задачи Римана для неограниченного контура / Ф.Н. Гарифьянов // Труды семинара по краевым задачам. – Казань, 1980. – № 17. – С. 27–34.
11. *Гахов, Ф.Д.* О краевой задаче Римана / Ф.Д. Гахов // Матем. сб. – 1937. – Т. 2. – № 4. – С. 673–683.
12. *Гахов, Ф.Д.* Краевые задачи. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
13. *Говоров, Н.В.* О краевой задаче Римана с бесконечным индексом / Н.В. Говоров // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 154. – № 6. – С. 1247–1249.
14. *Говоров, Н.В.* О гипотезе Пэйли / Н.В. Говоров // Функциональный анализ и его приложения. – 1969. – Т. 3. – № 2. – С. 41–45.
15. *Говоров, Н.В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М. : Наука, 1986. – 239 с.
16. *Гольдберг, А.А.* Распределение значений мероморфных функций / А.А. Гольдберг, И.В. Островский. – М. : Наука, 1970. – 592 с.
17. *Данилов, Е.А.* О факторизации положительной функции на контуре неограниченной закругленности / Е.А. Данилов // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 286. – № 5. – С. 1051–1053.
18. *Дубатовская, М.В.* Однородное характеристическое уравнение с бесконечным индексом в исключительном случае / М.В. Дубатовская, С.В. Рогозин // Докл. АН Беларуси. – 1996. – Т. 40. – № 4. – С. 19–23.
19. *Дыбин, В.Б.* Корректные задачи для сингулярных интегральных уравнений. – Ростов н/Д : Изд-во Ростов. ун-та, 1988. – 160 с.
20. *Журавлева, М.И.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом со счетным множеством разрывов первого рода ее коэффициента / М.И. Журавлева // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 210. – № 1. – С. 15–17.
21. *Журавлева, М.И.* Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом со счетным множеством нулей и полюсов коэффициента / М.И. Журавлева // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 214. – № 4. – С. 755–757.
22. *Кац, Б.А.* О краевой задаче Римана с коэффициентом, допускающим разрывы колебательного типа / Б.А. Кац // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244. – № 3. – С. 521–525.
23. *Кац, Б.А.* Краевая задача Римана на негладких дугах и фрактальные размерности / Б.А. Кац // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6. – № 1.
24. *Конышкова, Е.М.* О характеристическом сингулярном интегральном уравнении с бесконечным индексом / Е.М. Конышкова // Изд. вузов. Математика. – 1974. – № 8. – С. 43–53.
25. *Монахов, В.Н.* Краевые задачи псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях / В.Н. Монахов, Е.В. Семенко. – М. : Физматлит. – 2003. – 414 с.
26. *Мусхелишвили, Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1968. – 512 с.
27. Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам. – Минск : Университетское, 1985. – 206 с.
28. *Островский, И.В.* Условия разрешимости краевой задачи Римана с бесконечным индексом / И.В. Островский // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 5. – С. 24–27.

29. *Островский, И.В.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом на криволинейном контуре / И.В. Островский // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1991. – № 4. – С. 8–11.
30. *Плакса, С.А.* Краевая задача Римана с плюс-бесконечным индексом на спрямляемой кривой / С.А. Плакса // Украинский мат. журнал. – 1990. – Т. 42. – № 9. – С. 1204–1213.
31. *Риман, Б.* Сочинения / Б. Риман. – М. : Гостехиздат, 1948. – 544 с.
32. *Рогозин, С.В.* Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в исключительном случае для полуплоскости / С.В. Рогозин // Вестник БГУ. Сер. 1. – 1983. – № 2. – С. 60–62.
33. *Рогозин, С.В.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом в исключительном случае / С.В. Рогозин, М.Э. Толочко // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1978. – № 3. – С. 5–10.
34. *Салимов, Р.Б.* К решению краевой задачи Гильберта с бесконечным индексом / Р.Б. Салимов, П.Л. Шабалин // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73. – № 5. – С. 724–734.
35. *Сандригайло, И.Е.* О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости / И.Е. Сандригайло // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1974. – № 6. – С. 16–23.
36. *Сандригайло, И.Е.* О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости / И.Е. Сандригайло, // Докл. АН БССР. – 1975. – Т. 19. – № 10. – С. 872–875.
37. *Севрук, А.Б.* Однородная краевая задача Гильберта с бесконечным индексом для кусочно-аналитических функций / А.Б. Севрук // Вестн. БГУ. – 2010. – Сер. 1. – С. 76–81.
38. *Скомаха, Л.Н.* Об одном сингулярном интегральном уравнении с бесконечным индексом для случая аналитического ядра / Л.Н. Скомаха // Литовский мат. сб. – 1976. – Т. 16. – № 3. – С. 117–125.
39. *Толочко, М.Э.* О разрешимости краевой задачи Римана с бесконечным индексом для полуплоскости / М.Э. Толочко // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1971. – № 3. – С. 31–38.
40. *Толочко, М.Э.* Об однородной задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости / М.Э. Толочко // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1972. – № 5. – С. 34–41.
41. *Чибрикова, Л.И.* Основные граничные задачи для аналитических функций. – Казань : Изд-во КГУ, 1977. – 302 с.
42. *Чибрикова, Л.И.* Об одном особом случае задачи Римана на неограниченном контуре, I / Л.И. Чибрикова // Труды семинара по краевым задачам. – Казань, 1978. – № 15.
43. *Чибрикова, Л.И.* Об одном особом случае задачи Римана на неограниченном контуре, II / Л.И. Чибрикова // Труды семинара по краевым задачам. – Казань, 1979. – № 116. – С. 185–201.
44. *Юров, П.Г.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа / П.Г. Юров // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 2. – С. 158–163.
45. *Юров, П.Г.* О представлении интегралов типа Коши / П.Г. Юров // Мат. заметки. – 1969. – Т. 6. – С. 55–63.
46. *Юров, П.Г.* Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом порядка $\alpha \geq 1$ / П.Г. Юров // Сб. Материалы Всесоюзн. конф. по краевым задачам. – Казань, 1970. – С. 279–284.
47. *Dybin, V.B.* Introduction to the Theory of Toeplitz Operators with Infinite Index / V.B. Dybin, S.M. Grydsky, W.W Schaaf. – Boston : Birkhauses Verlag, 2002.

48. **Gahov, F.D.** Boundary value problems / F.D. Gahov. – Oxford and Addison, 1966. – 532 p.
49. **Govorov, N.V.** Rieman's boundary problem with infinite index / N.V. Govorov. – Basel – Boston – Berlin : Birkhauser Verlag, 1994. – 274 p.
50. **Hayman, W.K.** Questions of regularity connected with the Phragmen–Lindelof principle / W.K. Hayman // I. math. Pures et appl. – 1956. – V. 35. – P. 115–126.
51. **Hilbert, D.** Grundzuge der Integralgleichungen / D. Hilbert. – Leipzig – Berlin, 1924.

Поступила в редакцию 28.11.2011 г.

УДК 517.925

O.A. MAKOVETS'KA

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ (правосторонняя регуляризация)

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати и априорная оценка области локализации решения. Исследован итерационный алгоритм построения решения, основанный на вычислительной схеме классического метода последовательных приближений.

Введение

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t, X), \quad X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (2)$$

где $t \in I$, $A, B, Q \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t, X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально); $F(t, 0) \neq 0$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$.

При $Q = 0$ двухточечная краевая задача качественными методами исследовалась в работе [1], конструктивными методами [2] – в [3–5], с периодическими краевыми условиями – в [6–8] (в этих работах исследован невырожденный случай с двухсторонней регуляризацией).

Основная часть

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 D_\rho &= \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leq \rho\}, \quad D = \{X(t) : \|X\|_C \leq \rho\}, \quad \tilde{B}(\omega) = \int_0^\omega B(\tau) d\tau, \\
 \tilde{\gamma} &= \|\tilde{B}^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad \delta = \max_t \|Q(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t, 0)\|, \\
 \varphi(\rho) &= \tilde{\gamma}\delta\omega \left(1 + \frac{1}{2}\beta\omega\right) \rho^2 + \tilde{\gamma}\omega \left[\alpha + L + \frac{1}{2}\beta\omega(\alpha + \beta + L)\right] \rho + \tilde{\gamma}\omega h \left(1 + \frac{1}{2}\beta\omega\right), \\
 q(\rho) &= \tilde{\gamma}\delta\omega(\beta\omega + 2)\rho + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}\beta\omega^2(\alpha + \beta + L) + \tilde{\gamma}\omega(\alpha + L), \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,
 \end{aligned}$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_ρ , $\|\cdot\|$ – норма матриц (S и T), удовлетворяющая мультипликативному неравенству $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$, например, любая из норм, приведенных в [9, с. 21].

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

$$\det \tilde{B}(\omega) \neq 0, \quad (3)$$

$$\varphi(\rho) \leq \rho, \quad (4)$$

$$q(\rho) < 1. \quad (5)$$

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единствено, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leq \varphi(\rho)$.

Доказательство. Используя условие (3), выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2).

Пусть $X(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем

$$X(t) = X(0) + \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (6)$$

Полагая в (6) $t = \omega$, получим на основании условия (2)

$$\int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau = 0. \quad (7)$$

Запишем соотношение (7) в следующем виде:

$$\int_0^\omega X(\tau)B(\tau) d\tau = - \int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (8)$$

В (8) воспользуемся тождеством типа [2, с. 47]:

$$\int_0^\omega X(\tau)B(\tau) d\tau = X(t)\tilde{B}(\omega) - \int_0^t (dX(\tau)) \left(\int_0^\tau B(\sigma) d\sigma \right) + \int_t^\omega (dX(\tau)) \left(\int_\tau^\omega B(\sigma) d\sigma \right). \quad (9)$$

Соотношение (8) на основании (9) и в силу (1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(t)\tilde{B}(\omega) &= \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\ &+ F(\tau, X(\tau))] \left[\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma \right] d\tau - \int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\ &+ F(\tau, X(\tau))] \left[\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma \right] d\tau - \int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \end{aligned}$$

Так как согласно (3), $\det \tilde{B}(\omega) \neq 0$ то отсюда получим матричное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} X(t) &= \left\{ \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right. \\ &+ F(\tau, X(\tau))] \left[\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma \right] d\tau - \int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\ &+ F(\tau, X(\tau))] \left[\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma \right] d\tau - \int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\ &\left. + F(\tau, X(\tau))] d\tau \right\} \tilde{B}^{-1}(\omega). \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] K(t, \tau) d\tau - \\ &- \int_0^\omega [X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau \tilde{B}^{-1}(\omega), \end{aligned}$$

где

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \int_0^\tau B(\sigma)d\sigma \tilde{B}^{-1}(\omega), & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ - \int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma \tilde{B}^{-1}(\omega), & 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение матричного интегрального уравнения (10) является решением задачи (1), (2). Для доказательства продифференцируем тождество (10). В результате получим

$$dX(t) = \left[A(t)X(t) + X(t)B(t) + X(t)Q(t)X(t) + F(t, X(t)) \right] dt.$$

Подставляя это соотношение в (10) и выполняя затем интегрирование по частям, используя известную формулу [9, с. 52], последовательно найдем

$$\begin{aligned} X(t) &= \left\{ \int_0^t (dX(\tau)) \left(\int_0^\tau B(\sigma) d\sigma \right) - \int_t^\omega (dX(\tau)) \left(\int_\tau^\omega B(\sigma) d\sigma \right) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\omega dX(\tau) - X(\tau)B(\tau) d\tau \right\} \tilde{B}^{-1}(\omega) = \left\{ X(t) \left(\int_0^t B(\sigma) d\sigma \right) - \int_0^t X(\tau)B(\tau) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + X(t) \left(\int_t^\omega B(\sigma) d\sigma \right) - \int_t^\omega X(\tau)B(\tau) d\tau - \int_0^\omega dX(\tau) + \int_0^\omega X(\tau)B(\tau) d\tau \right\} \tilde{B}^{-1}(\omega) = \\ &= \left\{ X(t)\tilde{B}(\omega) - \int_0^\omega dX(\tau) \right\} \tilde{B}^{-1}(\omega) = X(t) - \int_0^\omega dX(\tau) \tilde{B}^{-1}(\omega). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\int_0^\omega dX(\tau) = 0,$$

или

$$X(\omega) = X(0).$$

А это и есть условие (2).

Исследуем разрешимость уравнения (10). Для этого запишем его в операторной форме

$$X = \mathcal{L}(X), \quad (11)$$

где через \mathcal{L} обозначен соответствующий интегральный оператор в (10). Заметим, что оператор действует на множестве $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Покажем, что из условий (4), (5) следует выполнение принципа Банаха – Каччиополи [10, с. 605] сжимающих отображений на множестве D , то есть в замкнутом шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$.

Проверим, что $\mathcal{L}(X) \in D$ для произвольной матрицы-функции $X(t) \in D$. Выполнив оценки по норме в (11), получим последовательно

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(X)\| &\leq \left\| \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + F(\tau, X(\tau))] \left(\int_0^\tau B(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + F(\tau, X(\tau))] \left(\int_\tau^\omega B(\sigma) d\sigma \right) d\tau \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +F(\tau, X(\tau)) \left[\int_{\tau}^{\omega} B(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \int_0^{\omega} A(\tau) X(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + \\
& + F(\tau, X(\tau)) \left[d\tau \right] \left\| \tilde{B}^{-1}(\omega) \right\| \leq \tilde{\gamma} \left\{ \int_0^{\tau} \left[A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + \right. \right. \\
& + F(\tau, X(\tau)) \left. \left. \left\| \int_0^{\tau} B(\sigma) d\sigma \right\| \right] d\tau + \int_0^{\omega} \left[A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + \right. \right. \\
& + F(\tau, X(\tau)) \left. \left. \left\| \int_{\tau}^{\omega} B(\sigma) d\sigma \right\| \right] d\tau + \int_0^{\omega} \left[A(\tau) X(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + \right. \right. \\
& + F(\tau, X(\tau)) \left. \left. \left\| d\tau \right\| \right\| \leq \tilde{\gamma} \left\{ \int_0^{\tau} \left[\int_0^{\tau} \left\| B(\sigma) \right\| d\sigma \right] \left[(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \right. \right. \\
& + \left\| F(\tau, X(\tau)) \right\| \left. \left. d\tau + \int_{\tau}^{\omega} \left[\int_0^{\tau} \left\| B(\sigma) \right\| d\sigma \right] \left[(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left\| F(\tau, X(\tau)) \right\| \right] d\tau + \int_0^{\omega} \left[\int_0^{\tau} \left\| A(\tau) \right\| \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau \right\} \leq \\
& \leq \tilde{\gamma} \left\{ \beta \int_0^{\tau} \left[(\alpha + \beta) \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \right. \\
& + \beta \int_{\tau}^{\omega} (\omega - \tau) \left[(\alpha + \beta) \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \\
& \left. \left. + \int_0^{\omega} \left[\alpha \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau \right\} \leq \\
& \leq \tilde{\gamma} \omega \left\{ \frac{1}{2} \beta \omega \left[\delta \rho^2 + (\alpha + \beta + L) \rho + h \right] + \delta \rho^2 + (\alpha + L) \rho + h \right\} = \varphi(\rho). \quad (12)
\end{aligned}$$

Из (12) на основании (4) следует соотношение

$$\|\mathcal{L}(X)\|_{\mathbb{C}} \leq \rho. \quad (13)$$

Из (11) имеем для произвольных $\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}} \in D$:

$$\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}}) - \mathcal{L}(\tilde{X}) = \left\{ \int_0^{\tau} \left[A(\tau) \left(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right) + \left(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right) B(\tau) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \left[\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma \right] d\tau - \\
& - \int_0^\omega A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right) + \left(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right)B(\tau) + \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \\
& - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \left[\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma \right] d\tau - \\
& - \int_0^\omega A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right) + \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + \\
& + F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \Big] d\tau \Big] \tilde{B}^{-1}(\omega).
\end{aligned}$$

Преобразуем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) = \tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + \\
& + \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) = \tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right) + \\
& + \left(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right)Q(\tau)\tilde{X}(\tau),
\end{aligned}$$

а затем оценим его по норме

$$\left\| \tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) \right\| \leq 2\rho\delta \left\| \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\|.$$

Используя эту оценку, получим последовательно

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}}) - \mathcal{L}(\tilde{X}) \right\| \leq \tilde{\gamma} \left\{ \int_0^\tau \left\| A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right) + \left(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right)B(\tau) + \right. \right. \\
& + \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + F\left(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \left\| \int_0^\tau B(\sigma)d\sigma \right\| d\tau + \\
& + \int_0^\omega \left\| A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right) + \left(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right)B(\tau) + \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \right. \\
& - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + F\left(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \left\| \int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma \right\| d\tau + \\
& \left. \left. + \int_0^\omega A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right) + \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + F\left(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau)\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \right\| \right\| \int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma \right\| d\tau +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -F(\tau, \tilde{X}(\tau))\|d\tau\} \leq \tilde{\gamma} \left\{ \int_0^t (\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\| + \|\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \right. \\
& \quad \left. - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\| + \|F(\tau, \tilde{X}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau))\| \left[\int_0^\tau \|B(\sigma)\| d\sigma \right] d\tau + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^\omega (\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\| + \|\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\| + \right. \\
& \quad \left. + \|F(\tau, \tilde{X}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau))\| \left[\int_\tau^\omega \|B(\sigma)\| d\sigma \right] d\tau + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^\omega \|A(\tau)\| \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\| + \|\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\| + \right. \\
& \quad \left. + \|F(\tau, \tilde{X}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau))\| \right] d\tau \leq \tilde{\gamma} \left\{ \beta(\alpha + \beta + 2\delta\rho + L) \int_0^t \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\| d\tau + \right. \\
& \quad \left. + \beta(\alpha + \beta + 2\delta\rho + L) \int_t^\omega (\omega - \tau) \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\| d\tau + \right. \\
& \quad \left. + (\alpha + 2\delta\rho + L) \int_0^\omega \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\| d\tau \right\} \leq \\
& \leq \tilde{\gamma}\omega \left[\frac{1}{2} \beta\omega(2\delta\rho + \alpha + \beta + L) + 2\delta\rho + \alpha + L \right] \|\tilde{X} - \tilde{X}\|_{\mathbb{C}} = q \|\tilde{X} - \tilde{X}\|_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку

$$\|\mathcal{L}(\tilde{X}) - \mathcal{L}(X)\|_{\mathbb{C}} \leq q \|\tilde{X} - X\|_{\mathbb{C}}. \quad (14)$$

Из анализа соотношений (13), (14) видно, что неравенства (4), (5) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к уравнению (11). На основании этого заключаем, что в шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$ решение уравнения (11) существует и единственno. Таким образом, задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ . При этом на основании (12) справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \varphi(\rho)$. Теорема полностью доказана.

Для построения решения матричного интегрального уравнения (10) воспользуемся классическим методом последовательных приближений [10, с. 605], [11, с. 53]:

$$X_{k+1}(t) = \int_0^t A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)B(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) +$$

$$\begin{aligned}
& + F(\tau, X_k(\tau)) \left[\int_0^\tau B(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \int_t^\omega A(\tau) X_k(\tau) + X_k(\tau) B(\tau) + \\
& + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau)) \left[\int_\tau^\omega B(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \\
& - \int_0^\omega A(\tau) X_k(\tau) + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau)) \left[\int_\tau^\omega B(\sigma) d\sigma \right] d\tau \Bigg] \tilde{B}^{-1}(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \dots, (15)
\end{aligned}$$

где $X_0(t)$ – произвольная матричная функция класса $\mathbb{C}[0, \omega]$, принадлежащая множеству D .

Используя условие (4), нетрудно доказать индукцией по k , что все приближенные решения, полученные по алгоритму (15), принадлежат множеству D . Основой доказательства является рекуррентная оценка

$$\begin{aligned}
\|X_{k+1}\|_{\mathbb{C}} & \leq \tilde{\gamma} \delta \omega \left(1 + \frac{1}{2} \beta \omega \right) \|X_k\|_{\mathbb{C}}^2 + \tilde{\gamma} \omega \left[\alpha + L + \frac{1}{2} \beta \omega (\alpha + \beta + L) \right] \|X_k\|_{\mathbb{C}} + \\
& + \tilde{\gamma} \omega h \left(1 + \frac{1}{2} \beta \omega \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

которую можно получить по аналогии с (12).

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему [11, с. 54], этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + (X_2(t) - X_1(t)) + \dots + (X_k(t) - X_{k-1}(t)) + \dots \quad (16)$$

Докажем равномерную по $t \in [0, \omega]$ сходимость ряда (16). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на $[0, \omega]$ матричный функциональный ряд (16). Оценим $\|X_{m+1}(t) - X_m(t)\|$, учитывая, что

$$X_{m+1}(t) - X_m(t) = \mathcal{L}(X_m(t)) - \mathcal{L}(X_{m-1}(t)), \quad m = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Выполнив оценки в (17), получим на основании (14)

$$\|X_{m+1}(t) - X_m(t)\| = \|\mathcal{L}(X_m(t)) - \mathcal{L}(X_{m-1}(t))\| \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}},$$

т.е.

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (18)$$

На основе (18) получим явную формулу

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q^m \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

при этом $\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}} = \|\mathcal{L}(X_0) - X_0\|_{\mathbb{C}}$.

Используя оценку (18), нетрудно доказать с помощью известных приемов [10, с. 605], [11, с. 54], что последовательность $\{X_k(t)\}_{0}^{\infty}$ сходит-

ся равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (10), при этом справедливы конструктивные оценки

$$\|X - X_k\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{q^k}{1-q} \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \|X_0\|_{\mathbb{C}} + \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q}. \quad (21)$$

Замечание. Приближенные решения, построенные по алгоритму (15) не обязаны удовлетворять краевому условию (2). В связи с этим следует получить соответствующую оценку для $\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\|$, $k = 0, 1, 2, \dots$. На основании (15) имеем

$$dX_{k+1}(t) = [A(t)X_k(t) + X_k(t)B(t) + X_k(t)Q(t)X_k(t) + F(t, X_k(t))]dt. \quad (22)$$

Подставляя (22) в правую часть (15) и выполняя затем интегрирование по частям, получим

$$\left\{ X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0) + \int_0^\omega [X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)]B(\tau)d\tau \right\} \tilde{B}^{-1}(\omega) = 0.$$

Отсюда имеем соотношение

$$\Delta_{k+1} \equiv X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0) = - \int_0^\omega [X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)]B(\tau)d\tau. \quad (23)$$

Выполнив оценки по норме в (23), получим

$$\begin{aligned} \|\Delta_{k+1}\| &\leq \int_0^\omega \|[X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)]B(\tau)\| d\tau \leq \int_0^\omega \|B(\tau)\| \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \beta \int_0^\omega \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\| d\tau \leq \beta \omega \|X_{k+1} - X_k\|_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Отсюда на основании (19) имеем оценку

$$\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\| \leq \beta \omega q^k \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Оценки (20), (21), (24) следует дополнить формулой для $\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}$. В случае $X_0 = 0$ эту формулу можно получить в конструктивном виде. В самом деле из (15) при $k = 0$ имеем

$$X_1(t) = \int_0^\omega F(\tau, 0)K(t, \tau)d\tau - \int_0^\omega F(\tau, 0)d\tau B^{-1}(\omega). \quad (25)$$

Выполнив оценки по норме в (25), получим

$$\|X_1(t)\| \leq \int_0^\omega \|F(\tau, 0)K(t, \tau)\| d\tau + \int_0^\omega \|F(\tau, 0)\| d\tau \|B^{-1}(\omega)\| \leq$$

$$\leq h \int_0^\omega \|K(t, \tau)\| d\tau + \tilde{\gamma} \omega h \leq \tilde{\gamma} \omega h \left(\frac{1}{2} \beta \omega + 1 \right). \quad (26)$$

Используя (26), получим из (21)

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{\tilde{\gamma} \omega h (\beta \omega + 2)}{2(1-q)}. \quad (27)$$

Очевидно, оценка (27) будет эффективной, если

$$\frac{\tilde{\gamma} \omega h (\beta \omega + 2)}{2(1-q)} \leq \rho.$$

Легко видеть, что это соотношение выполняется при достаточно малых значениях h .

Итак, доказана

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (3)–(5). Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственno. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением (15).*

Заключение

Основные результаты данной работы заключаются в следующем:

- в невырожденном случае с правосторонней регуляризацией получено эквивалентное интегральное уравнение для периодической краевой задачи уравнения Ляпунова – Риккати;
 - получены эффективно проверяемые достаточные условия однозначной разрешимости указанного уравнения;
 - разработан алгоритм построения приближенных решений с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений;
 - выведены конструктивные оценки области локализации решения.
- Эти результаты обобщают и развивают соответствующие результаты, изложенные в работах [3, 8].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Murty, K.N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl., 1992. – V. 167. – P. 505–515.
2. *Лаптинский, В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
3. *Laptinsky, V.N.* On the Two-Point Boundary-Value Problem for the Riccati Matrix Differential Equations / V.N. Laptinsky, I.I. Makovetsky // Central European Science Journal, 2005. – V. 3(1). – P. 143–154.
4. *Лаптинский, В.Н.* К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий // Дифференц. Уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 7. – С. 994–996.

5. *Лаптінскій, В.Н.* О разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптінскій, И.И. Маковецкій // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 218–223.
6. *Лаптінскій, В.Н.* О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений / В.Н. Лаптінскій // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1997. – № 4. – С. 14–18.
7. *Лаптінскій, В.Н.* Конструктивный анализ периодической краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптінскій. – Могилев : Белорусско-Российский университет, 2007. – 26 с. – (Препринт / ИТМ НАН Беларуси; № 7).
8. *Подолян, С.В.* Периодические решения нелинейных матричных дифференциальных уравнений / С.В. Подолян // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1988. – № 6. – С. 31–34.
9. *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
10. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
11. *Бибиков, Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – М. : Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 11.04.2012 г.

УДК 621.372.8; 535.1

*А.Б. СОТСКІЙ, П.Я. ЧУДАКОВСКІЙ,
І.У. ПРИМАК, Л.І. СОТСКАЯ*

ОТРАЖЕНИЕ СВЕТОВОГО ПУЧКА ОТ ПРИЗМЫ СВЯЗИ II. Решение обратной задачи волноводной спектроскопии

Исследовано влияние ограниченности призмы связи и шероховатости границ раздела сред на точность решения обратной задачи волноводной спектроскопии. Предложен уточненный алгоритм восстановления комплексных постоянных распространения волноводных мод (часть I опубликована в № 1(39). – 2012).

В статье проанализирована сходимость соответствующей расчетной схемы и исследовано поле отраженного светового пучка в условиях ограниченной призмы связи и при наличии шероховатостей на границах раздела сред. При этом установлено, что модель неограниченной призмы связи [1] теряет свою эффективность при анализе возбуждения волноводных мод с малым затуханием. Получено приближенное аналитическое описание распределения интенсивности светового пучка, отраженного от ограниченной призмы связи. На его основе сформулирован уточненный алгоритм решения обратной задачи волноводной спектроскопии и продемонстрирована эффективность данного алгоритма на примерах исследования мод волноводных пленок с гладкой и шероховатой поверхностью.

Численное моделирование отражения пучка от призмы связи

В данном разделе представлены примеры расчета дифракционных полей в призменном устройстве связи на основании алгоритма, описанного в [2]. При расчетах использована длина волны $\lambda_0 = 0.6328 \text{ мкм}$. Вычисления выполнены для стеклянной призмы связи с параметрами $\varepsilon_3 = 1$, $\varepsilon_4 = 3.06145$, $\theta = 60^\circ$ и волноводной пленки толщиной $d_2 = 3 \text{ мкм}$, изготовленной из стекла крон ($\text{Re} \varepsilon_2 = 2.595192$) на кварцевой подложке ($\varepsilon_1 = 2.12314 - i \cdot 10^{-6}$). Пленка отделена от призмы связи воздушным буферным слоем ($\varepsilon_3 = \varepsilon_a = 1$) толщиной $g_0 = 0.1 \text{ мкм}$. Рассмотрено возбуждение волноводных мод гауссовым пучком радиусом $w_0 = 70 \text{ мкм}$, сфокусированным на основании призмы. С целью исследования влияния затухания возбуждаемой моды на распределение $S(\gamma)$, мы использовали два значения для мнимой части диэлектрической проницаемости волноводной пленки: $\text{Im} \varepsilon_2 = -10^{-6}$ (пленка 1) и $\text{Im} \varepsilon_2 = -10^{-5}$ (пленка 2). Рассмотрено возбуждение мод ТМ поляризации.

Предварительные исследования показали, что при указанных выше параметрах структуры отражение от вспомогательных идеально проводящих экранов становится не существенным, если выбрать PML с $\mu = 1$, $\Delta > 0.7 \text{ мкм}$ [3, 4]. Поэтому при расчетах мы полагали $\mu = 1$, $\Delta = 1 \text{ мкм}$. Геометрические размеры структуры, представленной на рис. 2 (см. [2]), полагались равными $P = y_s = 500 \text{ мкм}$, $y_0 = 1 \text{ мкм}$, $s = 5 \text{ мкм}$, $z_l = -500 \text{ мкм}$, $z_r = z_b + 15\tau$.

Ключевую роль при расчете дифракционных полей предлагаемым методом играет построение спектра постоянных распространения локальных мод структуры, изображенной на рис. 2 (см. [2]). Для решения этой задачи использован метод контурного интегрирования. Фрагмент полученного спектра $h_v^{(-)}$ для пленки 1 представлен на рис. 1а. Точки в верхней части рис. 1а соответствуют собственным модам пленки.

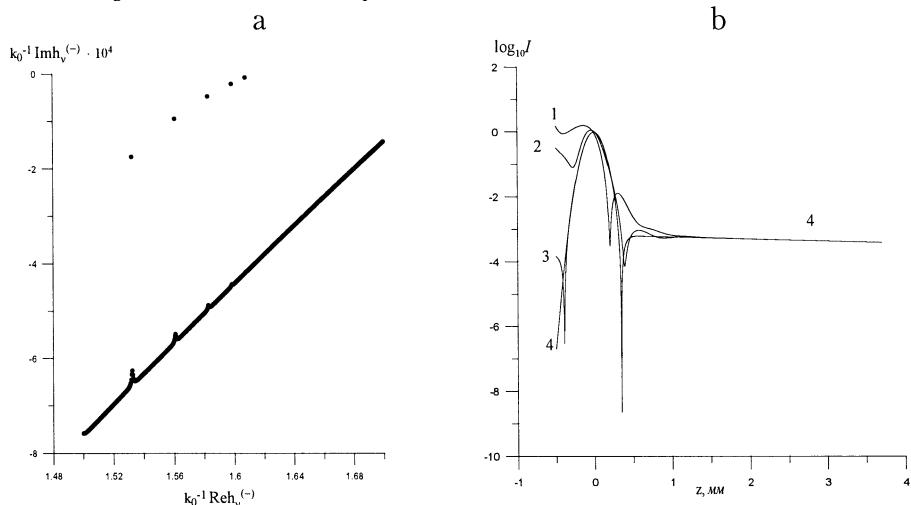


Рис. 1. Спектр постоянных распространения мод рассматриваемой структуры (а) и распределения интенсивности отраженного пучка, рассчитанные разработанным методом при порядках редукции $k = 10$ (кривая 1), $k = 20$ (2), $k = 30$ (3), $k \geq 35$ (4) и по строгой теории (кривая 4) (б)

Рис. 1b иллюстрирует эффективность использованной техники разложений полей по модам закрытой структуры. Здесь представлены распределения интенсивности пучка $I(z)$, отраженного от неограниченной регулярной призмы связи, рассчитанные на высоте y_0 от ее основания.

Для такой структуры функция $I(z)$ допускает строгий расчет по формуле [1]

$$I(z) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} r(k_z) \hat{H}_{xi}(k_z) \exp(-ik_z z - i\sigma_4 y_0) dk_z \right|^2, \quad (1)$$

где $r(k_z)$ – коэффициент отражения от основания призмы плоских волн ТМ поляризации. В то же время в предлагаемом подходе данная функция равна

$$I(z) = \left| \sum_{\nu} U_{\nu}(z) \psi_{\nu}(y_0, z) - H_{xi}(y_0, z) \right|^2, \quad (2)$$

где $U_{\nu}(z) = a_{\nu} \exp[-ih_{\nu}^{(-)} z]$, a_{ν} определяются по формуле (43) (см. [2]).

Графики на рис. 1b соответствуют возбуждению основной ТМ моды пленки 1, которая имеет постоянную распространения $k_0^{-1} h^{(0)} = 1.60782842 - i3.106 \cdot 10^{-6}$ (здесь $h^{(0)}$ обозначает постоянную распространения моды свободного, т.е. не нагруженного призмой связи волновода, i – номер моды). Расчеты выполнены при угле падения пучка на призму γ_0 , найденном из уравнения (44) при $k_z = k_{z0} = \operatorname{Re} \bar{h}^{(0)}$, где $\bar{h}^{(0)} = k_0(1.60783848 - i7.174 \cdot 10^{-6})$ – постоянная распространения рассматриваемой моды при наличии призмы связи [2]. При использовании выражения (2) в рядах (31) учитывались k мод, которым соответствуют $\operatorname{Re} h_{\nu}^{(-)}$, наиболее близкие к k_{z0} . Указанный выбор мод очевиден из рассмотрения формулы (43).

Согласно рис. 1b модель закрытой слоистой структуры позволяет с высокой точностью рассчитать поле отраженного пучка (при числе учитываемых мод $k \geq 35$ распределение $I(z)$ не отличается от точного). Из рис. 1b очевидна также возможность выделения в отраженном пучке обсуждавшихся выше двух пучков. В частности, в области $z > 1 \text{ мм}$ функция $I(z) \sim \exp(-2 \operatorname{Im} \bar{h}^{(0)} z)$ описывает вытекание возбужденной моды в призму.

Рис. 2 – 5 иллюстрируют характеристики отраженного пучка в нерегулярном призменном устройстве связи. Графики на данных рисунках построены в результате численного интегрирования уравнений (20), (21) для ТМ волн методом итераций. Практически сходимость решения наблюдалась при 4 – 5 итерациях. Представленные кривые соответствуют порядкам редукции в разложениях (31), $k \geq 38$. Необходимость учета сравнительно небольшого числа локальных мод при описании дифракционных эффектов света объясняется экспоненциальной зависимостью амплитуд a_{ν} от фактора $(h_{\nu}^{(-)} - k_{z0})^2$ (см. (43)) и быстрым убыванием коэффициентов (41) и (42) с ростом различия постоянных распространения локальных мод $h_{\mu}(z)$ и $h_{\nu}(z)$ [2].

На рис. 2 представлены распределения интенсивности (2) в случае возбуждения основных ТМ мод пленок 1 и 2 с гладкой поверхностью ($\Delta y_3(z) = \Delta y_4(z) = 0$).

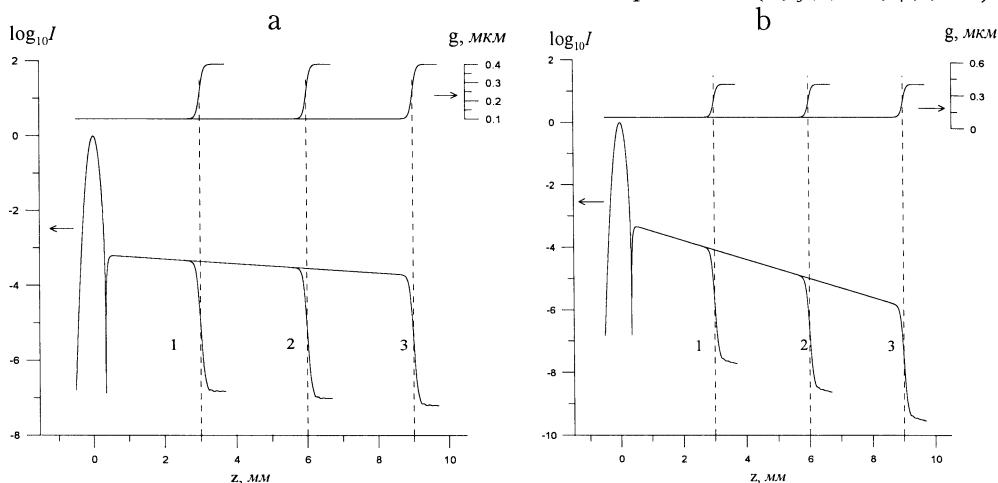


Рис. 2. Распределения интенсивности отраженного пучка в случае возбуждения основных ТМ мод пленки 1 (а) и пленки 2 (б) посредством ограниченной призмы связи. Штриховые линии – координата края призмы z_b в модели (3) (см. [2]).

В верхней части рисунка представлены соответствующие профили $g(z)$.

Кривые 1, 2, 3 относятся к $z_b = 3 \text{ мм}$, $z_b = 6 \text{ мм}$, $z_b = 9 \text{ мм}$

Заметим, что для пленки 2 $k_0^{-1}h^{(0)} = 1.60782842 - i3.106 \cdot 10^{-5}$, $k_0^{-1}\bar{h}^{(0)} = 1.60783848 - i3.513 \cdot 10^{-5}$. При расчетах использована модель изгиба основания призмы в окрестности выходного ребра (3) (см. [2]), где $\tau = 50 \text{ мкм}$, $\Delta y_0 = 0.3 \text{ мкм}$, а z_b принимает различные значения.

Отметим, что зависимости $I(z)$ в диапазоне $z_l < z < z_b - \tau$ на рис. 2а почти не отличаются от кривой (4) на рис. 1б. Это указывает на практически полное отсутствие отражения излучения от выходного ребра призмы связи. Резкий спад $I(z)$ в области изгиба основания призмы можно объяснить ослаблением вытекания возбужденной моды в призму, сопровождающим ослабление связи призмы с волноводом. При переходе от области $z - z_b < -\tau$ к области $z - z_b > \tau$ интенсивность отраженного пучка уменьшается примерно на четыре порядка и имеет величину, сопоставимую с $I(z_l)$. В результате поля отраженного пучка вне промежутка $z_l < z < z_b$ оказывает пренебрежимо малое влияние на функцию $\bar{S}(\gamma)$ вида (45) [2]. Тем не менее, интересно отметить небольшие осцилляции функции $I(z)$, наблюдаемые на рис. 2 при $z - z_b > \tau$. Они объясняются возбуждением высших мод пленки в месте изгиба основания призмы. Связь этих мод с призмой связи сильнее, чем связь основной моды. За счет этого поля данных мод при $y = y_0$ близки по величине к полю основной моды и могут интерферировать с ним, что и приводит к осцилляциям $I(z)$.

На рис. 3 представлены распределения $\bar{S}(\gamma)$, рассчитанные на основании (45), (47) (см. [2]) при тех же условиях, что и распределения $I(z)$ на рис. 2. Для сравнения на рис. 3 приведены также графики функций

$$\bar{S}_0(\gamma) = \left| 2w^{-1} \sqrt{\pi} \hat{H}_{xi}(k_z) r(k_z) \right|^2, \quad (3)$$

где $k_z = k_z(\gamma)$ (см. (46)). Функция (3) описывает угловое распределение интенсивности отраженного пучка в предельном случае неограниченной регулярной призмы связи [1].

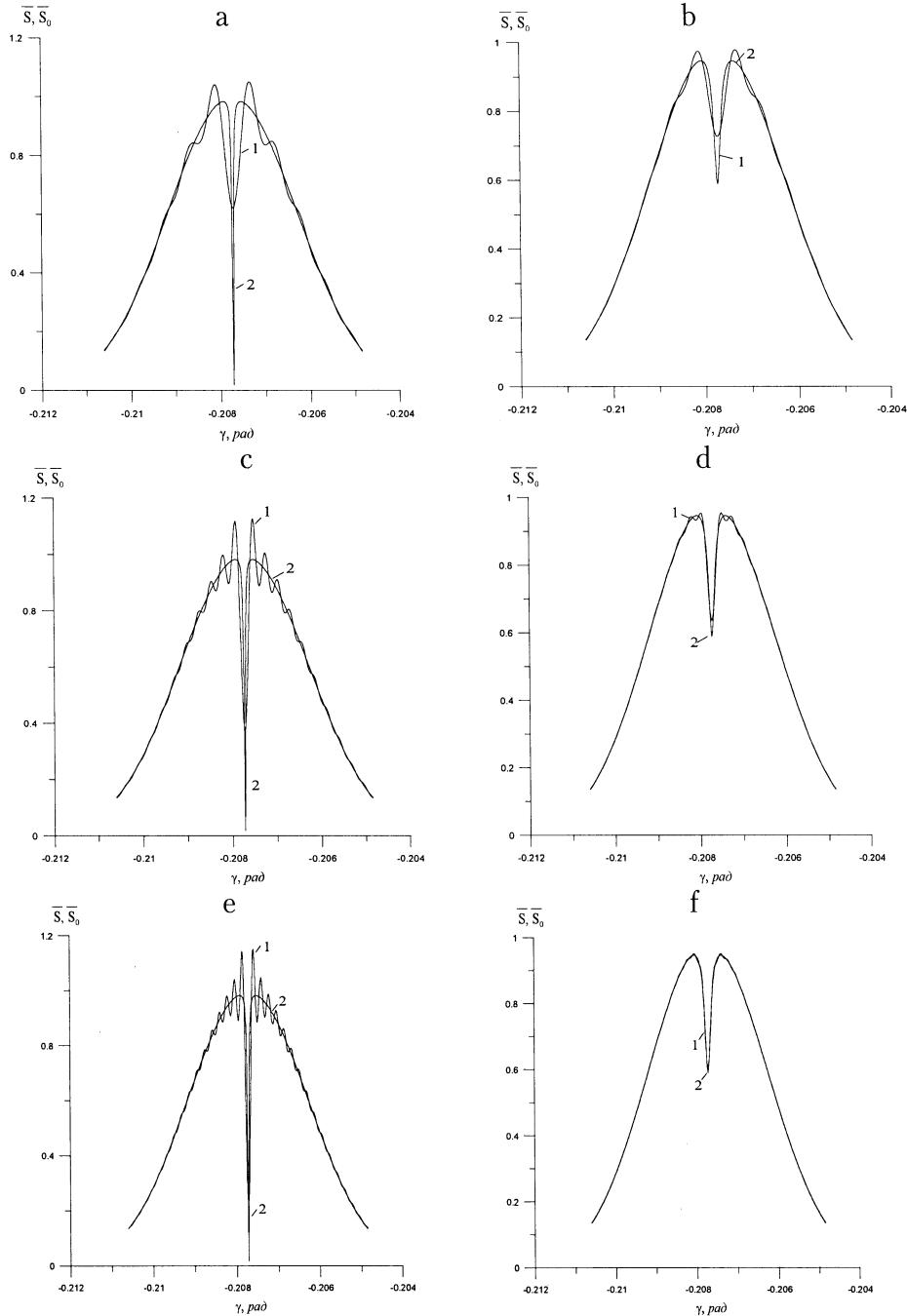


Рис. 3. Распределения $\bar{S}(\gamma)$ (кривые 1) и $\bar{S}_0(\gamma)$ (кривые 2) при возбуждении основных ТМ мод пленок 1 (а, с, е) и 2 (б, д, ф). Распределения $\bar{S}(\gamma)$ относятся к $z_b = 3 \text{ мм}$ (а, б), $z_b = 6 \text{ мм}$ (с, д) и $z_b = 9 \text{ мм}$ (е, ф); $\bar{S}_0(\gamma)$ соответствует $z_b = \infty$

Согласно рис. 3 ограничение протяженности основания призмы связи вызывает колебания в распределении $\bar{S}(\gamma)$. Особенно отчетливо этот эффект выражен в случае возбуждения моды со слабым затуханием (затухание основных мод пленок 1 и 2 составляет 2.7 дБ/см и 27 дБ/см, соответственно). В этом случае распределения $\bar{S}(\gamma)$ и $\bar{S}_0(\gamma)$ при разумной протяженности основания призмы связи существенно отличаются друг от друга (см. рис. 3 а, с, е), поэтому использование решения обратной задачи [1], основанное на анализе функции $\bar{S}_0(\gamma)$, может приводить к существенным погрешностям при восстановлении h . В случае возбуждения моды с сильным затуханием (рис. 3 б, д, ф) отличие распределений $\bar{S}(\gamma)$ и $\bar{S}_0(\gamma)$ менее заметно, и при $z_b = 9$ мм эти распределения практически совпадают.

Соответственно, можно ожидать, что решение обратной задачи [1] будет более эффективным. Соответствующие оценки представлены в следующем разделе.

Отмеченные особенности находятся в качественном согласии с экспериментальными данными (см. [5] и рис. 1 в [2]). Они очевидным образом объясняются дифракцией отраженного пучка на изгибе основания призмы связи в окрестности ее выходного ребра. В соответствии с рис. 1б, 2 и 3, данная дифракция является не существенной, если $I(z_b)/I(0) < 10^{-5}$, где $I(z)$ рассчитывается по формуле (1). В частности, при возбуждении основной ТМ моды пленки 1 для выполнения данного условия требуется использовать призму связи с протяженностью основания не менее 8 см, что труднодостижимо.

О влиянии шероховатостей поверхности волноводной пленки и основания призмы связи на затухание мод и параметры отраженного пучка позволяют судить рис. 4 и 5. Расчеты выполнены на основании модели (1), (2), где $a = 0.025$ мкм, $\Delta z = 3$ мкм [2]. При этом использована конкретная реализация функций $\Delta y_3(z)$ и $\Delta y_4(z)$, полученная при помощи генератора случайных чисел. Как показали расчеты, затухание мод пленки 2, вызванное поверхностным рассеянием света, пренебрежимо мало по сравнению с затуханием этих мод, связанным с материальным поглощением. Поэтому далее в настоящем разделе обсуждается только модовые характеристики пленки 1.

На рис. 4а представлены распределения интенсивности отраженного пучка при возбуждении основной и первой высшей ТМ мод волноводной пленки 1, рассчитанные при $z_b = 6$ мм.

Как видно из рис. 4а, шероховатость границ раздела сред наиболее сильно проявляется в области сформировавшихся треков вытекающих мод. Еще рис. 4а позволяет сделать вывод о более резком затухании высшей моды. Можно предположить, что эта особенность вызвана более сильным поверхностным рассеянием излучения высшей моды, поскольку затухание этой моды, вызванное материальным поглощением, почти не отличается от аналогичного затухания основной моды (для пленки с гладкой поверхностью $k_0^{-1}h^{(1)} = 1.59841697 - i3.113 \cdot 10^{-6}$).

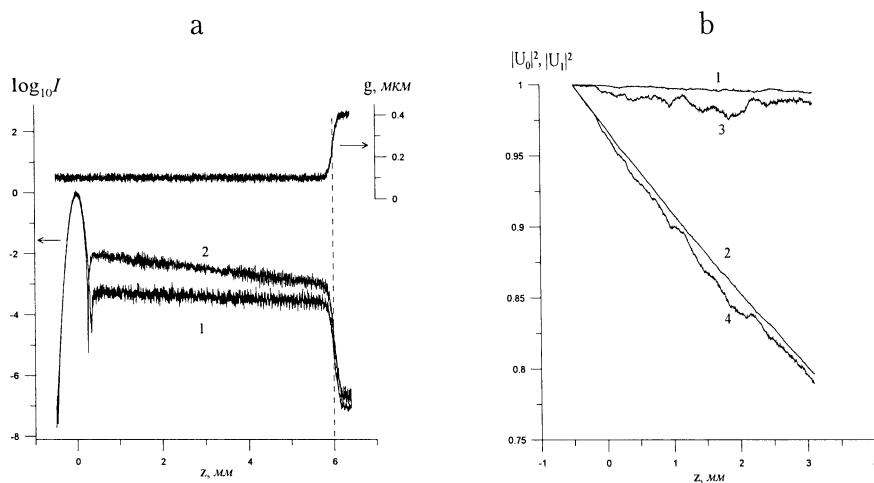


Рис. 4. Распределения интенсивности отраженного пучка при возбуждении основной (1) и первой высшей (2) мод волноводной пленки с шероховатой поверхностью (а) и кривые убывания квадратов модулей амплитуд основной (1, 2) и первой высшей (3, 4) локальных мод пленки при отсутствии призмы связи (б)

Чтобы подтвердить это предположение мы исследовали затухание основной и первой высшей мод волноводной пленки 1 с шероховатой поверхностью при отсутствии призмы связи ($\varepsilon_4 = \varepsilon_3 = \varepsilon_a = 1$). На рис. 4б представлены зависимости $|U_0(z)|^2$ и $|U_1(z)|^2$, где U_0 и U_1 – амплитуды основной и первой высшей локальных мод. Указанные функции рассчитаны путем численного решения уравнений (20), (21) методом итераций при начальных условиях $a_\nu = \delta_{\nu i}$, где $i = 0$ для основной моды и $i = 1$ для первой высшей моды [2]. Кривые 1 и 3 на рис. 4б получены для случая не поглощающих материалов пленки и подложки ($\text{Im } \varepsilon_{1,2} = 0$), а кривые 2 и 4 соответствуют конечным значениям $\text{Im } \varepsilon_1$ и $\text{Im } \varepsilon_2$, указанным выше.

Экспоненциальная интерполяция кривых 2 и 1 на рис. 4б дает оценки $k_0^{-1} \text{Im } h^{(0)} = -3.19 \cdot 10^{-6}$ и $k_0^{-1} \text{Im } h^{(0)} = -7.55 \cdot 10^{-8}$, соответственно. Разность этих величин $-3.11 \cdot 10^{-6}$ находится в хорошем соответствии с мнимой частью нормированной постоянной распространения основной моды пленки с гладкой поверхностью $k_0^{-1} \text{Im } h^{(0)} = -3.106 \cdot 10^{-6}$. Это совпадение указывает на мультиплективность модовых потерь, связанных с поглощением и поверхностным рассеянием излучения моды. Аналогичная обработка зависимостей 4 и 3 на рис. 4б дает значения $k_0^{-1} \text{Im } h^{(1)} = -3.40 \cdot 10^{-6}$ и $k_0^{-1} \text{Im } h^{(1)} = -2.77 \cdot 10^{-7}$, соответственно. Их разность $-3.12 \cdot 10^{-6}$ находится в удовлетворительном соответствии с мнимой частью нормированной постоянной распространения первой высшей моды пленки с гладкой поверхностью $k_0^{-1} \text{Im } h^{(1)} = -i3.113 \cdot 10^{-6}$, что также означает мультиплективность модовых потерь.

Таким образом, более существенное затухание первой высшей моды действительно объясняется поверхностным рассеянием света.

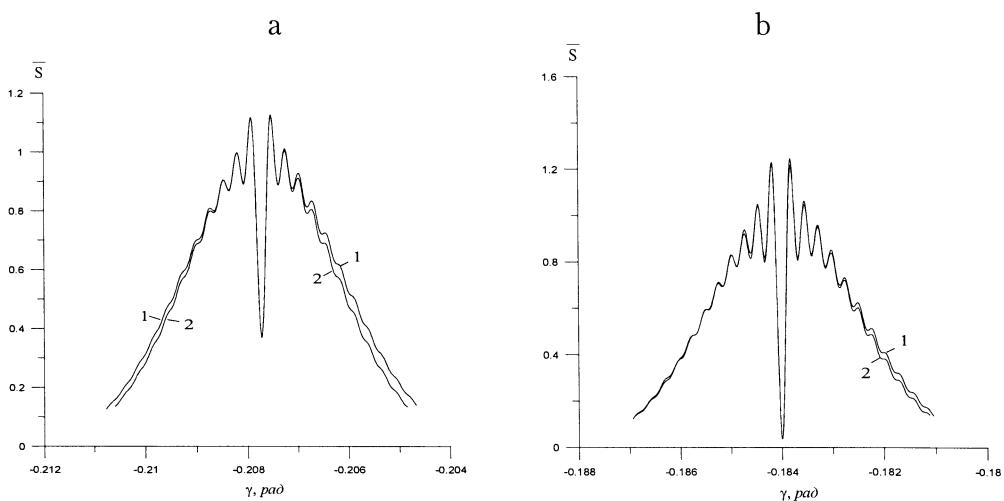


Рис. 5. Распределения интенсивности отраженного пучка при возбуждении основной (а) и первой высшей (б) мод пленки 1 при наличии (кривые 1) и отсутствии (кривые 2) поверхностных шероховатостей

Рис. 5 иллюстрирует влияние поверхностного рассеяния света на измеряемые в методе волноводной спектроскопии функции $\bar{S}(\gamma)$ при возбуждении основной и первой высшей мод пленки 1. Здесь кривые 1 рассчитаны на основании выражений (45) и (47) при тех же условиях (за исключением значения a), что и графики на рис. 4а. Для сравнения на рис. 5 представлены также зависимости 2, относящиеся к возбуждению мод пленки с гладкой поверхностью ($a=0$).

Согласно рис. 5 дифракционные колебания распределений $\bar{S}(\gamma)$, вызванные ограничением призмы связи, наблюдаются для структур, как с гладкими, так и с шероховатыми границами раздела сред. Рассеяние света на поверхностных шероховатостях приводит лишь к некоторому уширению распределений $\bar{S}(\gamma)$. Данное уширение асимметрично и происходит преимущественно в область $\gamma > \gamma_0$.

Обратная задача волноводной спектроскопии

Обратная задача волноводной спектроскопии заключается в восстановлении комплексных постоянной распространения моды оптического волновода путем обработки экспериментально регистрируемой функции $S(\gamma)$ [1]. Ввиду некорректности данной задачи, для ее успешного решения необходима аналитическая формула для функции $S(\gamma)$ [6]. С целью вывода такой формулы мы пренебрегаем наличием шероховатостей границ раздела сред. Согласно результатам предыдущего раздела в этом случае поле отраженного пучка в окрестности основания призмы при $z - z_b < -\tau$ может быть с высокой точностью рассчитано в рамках модели неограниченной призмы связи. Близи изгиба выходного ребра призмы, т.е при $|z - z_b| < \tau$, это поле спадает почти до нуля с увеличением зазора

между призмой и волноводом (см. рис. 2). Поэтому если расстояние от точки пересечения оси падающего пучка до выходного ребра призмы удовлетворяет неравенству $z_b >> \tau$, то относительный вклад области $|z - z_b| < \tau$ в интеграл (45) будет незначителен [2]. Таким образом, можно принять приближение, в котором поле отраженного пучка в окрестности основания призмы связи совпадает с полем пучка, отраженного от неограниченной призмы при $z < z_b$ и равно нулю при $z > z_b$.

В рамках данного приближения

$$\bar{S}(\gamma) = \left| \left(w\sqrt{\pi} \right)^{-1} \int_{-\infty}^{z_b} Y_r(y_0, z) \exp(ik_z z) dz \right|^2, \quad (4)$$

где γ и k_z связаны соотношением (46) (см. [2]), и

$$Y_r(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} r(k_z) \exp[i\sigma_p(k_z)y - ik_z z] \hat{Y}_i(k_z) dk_z,$$

где $r(k'_z)$ – коэффициент отражения от основания призмы плоских волн ТЕ, либо ТМ поляризации, $\sigma_p(k_z) = \sqrt{k_0^2 \epsilon_p - k_z^2}$,

$$\hat{Y}_i(k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_z z) Y_i(0, z) dz.$$

Выполнив в (3) интегрирование по переменной z , получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{z_b} Y_r(y_0, z) \exp(ik_z z) dz &= \pi r(k_z) \hat{Y}_i(k_z) \exp[i\sigma_p(k_z)y_0] + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} r(k'_z) \exp[i\sigma_p(k'_z)y_0 + i(k_z - k'_z)z_b] \hat{Y}_i(k'_z) [i(k_z - k'_z)]^{-1} dk'_z, \end{aligned} \quad (5)$$

где интеграл по k'_z понимается в смысле главного значения.

Для упрощения (5) заметим, что при условиях (44), (46) и значениях, сопоставимых по величине с λ_0 , в (5) можно положить

$$\begin{aligned} \exp[i\sigma_p(k'_z)y_0] &\approx \exp[i\sigma_p^{(0)}y_0], \\ \exp[i\sigma_p(k_z)y_0] &\approx \exp[i\sigma_p^{(0)}y_0], \end{aligned} \quad (6)$$

где $\sigma_p^{(0)} = \sqrt{k_0^2 \epsilon_p - k_{z0}^2}$ и использовать резонансное приближение для коэффициента отражения [1, 4]

$$r(k_z) = \frac{1-\delta}{1+\delta} - \frac{4\delta}{1-\delta^2} \frac{\Delta h}{(k_z - \bar{h})}, \quad (7)$$

где $\delta = -i(\epsilon_p \epsilon_g^{-1})^T \sqrt{(h^2 - k_0^2 \epsilon_g)(k_0^2 \epsilon_p - h^2)^{-1}}$, $\Delta h = \bar{h} - h = -|\Delta h|(1-\delta)(1+\delta)^{-1}$, $T = 0$ для ТЕ волн, $T = 1$ для ТМ волн, h и \bar{h} – постоянные распрастра-

нения возбуждаемой моды волновода при наличии и отсутствии призмы связи (в последнем случае $g \rightarrow \infty$).

После подстановки (6) и (7) в (8) и интегрирования полученного выражения на основании теоремы о вычетах получаем следующий результат:

$$\int_{-\infty}^{z_b} Y_r(y_0, z) \exp(ik_z z) dz = 2\pi \exp[i\sigma_p^{(0)} y_0] \left\{ r(k_z) \hat{Y}_i(k_z) + \frac{4\delta \Delta h \exp[i(k_z - \bar{h}) z_b]}{(1 - \delta^2)(k_z - \bar{h})} \hat{Y}_i(\bar{h}) \right\}. \quad (8)$$

При возбуждении волновода упоминавшимся выше гауссовым пучком единичной амплитуды мы должны подставить в (8) функцию

$$\hat{Y}_i(x) = w \left(2\sqrt{\pi} \right)^{-1} \exp[-0.25(x - k_{z0})^2 w^2].$$

Тогда выражение (8) приобретает вид

$$\bar{S}(\gamma) = \frac{\left| \exp(-0.25\kappa^2)[p_1 + 2p_2 + i(\kappa - p_4)] - 2p_2 \exp[0.25(p_1 - ip_4)^2 + p_1 \zeta_b + i(\kappa - p_4)\zeta_b] \right|^2}{p_1^2 + (\kappa - p_4)^2}, \quad (9)$$

где введены обозначения

$$\kappa = w(k_z - k_{z0}), \quad p_1 = w \operatorname{Im} \bar{h}, \quad p_2 = -w \operatorname{Im} \Delta \bar{h}, \quad p_4 = w(\operatorname{Re} \bar{h} - k_{z0}), \quad \zeta_b = w^{-1} z_b. \quad (10)$$

Заметим, что в соответствии с (44), (46), (48) переменная κ может быть записана в виде $\kappa = -k_0 w_0 \sqrt{\varepsilon_a} (\gamma - \gamma_0)$ [2].

Выражение (9) позволяет объяснить все отмечавшиеся в предыдущем разделе особенности распределения $\bar{S}(\gamma)$. Например, при выборе угла падения пучка из условия $p_4 = 0$ распределение $\bar{S}(\gamma)$ становится симметричным относительно угла γ_0 (см. рис. 3). Далее, нетрудно видеть, что за колебания функции $\bar{S}(\gamma)$ отвечает фактор $p_1 \zeta_b + i(\kappa - p_4) \zeta_b$ в показателе экспоненты. Амплитуда и период этих колебаний убывают при увеличении z_b , что согласуется с графиками на рис. 3. В пределе неограниченной призмы связи ($p_1 \zeta_b = \operatorname{Im} \bar{h} z_b \rightarrow -\infty$) функция $\bar{S}(\gamma)$ переходит в $\bar{S}_0(\gamma)$, где

$$\bar{S}_0(\gamma) = \frac{\exp(-0.5\kappa^2)[(p_1 + 2p_2)^2 + (\kappa - p_4)^2]}{p_1^2 + (\kappa - p_4)^2}. \quad (11)$$

Графики функции (11) представлены на рис. 3.

Распределение (11) составляет основу для стандартного решения обратной задачи волноводной спектроскопии [5]. Это решение предполагает симметризацию функции $\bar{S}_0(\gamma)$ за счет выбора угла падения пучка из условия $p_4 = 0$. В этом случае $\operatorname{Re} \bar{h} = k_{z0}$, а функция $\bar{S}_0(\gamma)$ имеет один минимум при угле $\gamma = \gamma_0$ и два максимума при углах $\gamma_{1,2} = \gamma_0 \pm \Delta\gamma$. Введем в рассмотрение величину $\eta = \bar{S}_{0\min} \bar{S}_{0\max}^{-1} \exp(-0.5\kappa_m^2)$, характеризующую контраст распределения $\bar{S}_0(\gamma)$. Здесь $\bar{S}_{0\min} = \bar{S}_0(\gamma_0)$, $\bar{S}_{0\max} = \bar{S}_0(\gamma_2)$, $\kappa_m = k_0 w_0 \sqrt{\varepsilon_a} \Delta\gamma$.

Тогда из (11) найдем [4]:

$$p_1 = \sqrt{G}, \quad p_2 = 0.5 \left[\sqrt{G} + (-1)^\rho \sqrt{D} \right], \quad (12)$$

где $\rho = 1$, либо $\rho = 2$ (способ выбора ρ при практических измерениях описан в [3]),

$$D = \eta \kappa_m^4 \left[2(1-\eta) - \eta \kappa_m^2 \right]^{-1}, \quad G = \kappa_m^4 \left[2(1-\eta) - \kappa_m^2 \right]^{-1}.$$

Учитывая теперь выражения (10), имеем

$$h = k_{z_0} + p_2 \left(1 - |\delta|^2 \right) \left(2w|\delta| \right)^{-1} + i(p_1 + p_2)w^{-1}. \quad (13)$$

Выражение (13), содержащее допускающие измерение параметры k_{z_0} , D и G , дает аналитическое решение обратной задачи волноводной спектроскопии для планарного волновода с произвольным профилем диэлектрической проницаемости. Однако поскольку данное решение основано на приближении неограниченной призмы связи (11), оно может давать существенные погрешности при исследовании волноводных мод с малым затуханием.

Более корректное решение рассматриваемой обратной задачи может быть получено на основании выражения (9). Однако ввиду сложности данного выражения такое решение может быть найдено только численно. В этом случае целесообразно использовать метод наименьших квадратов, в котором ищется минимальное значение суммы

$$f(C, p_1, p_2, p_4, \zeta_b) = \sum_{j=1}^n \left[S(\gamma_j) - C\bar{S}(\gamma_j) \right]^2, \quad (14)$$

где $S(\gamma_j)$ – значения интенсивности пучка, отраженного от призмы связи, измеренные при m углах γ_j , $\bar{S}(\gamma_j)$ – соответствующие значения функции (9). В представленных ниже примерах использовано значение $n = 600$. Минимизация функции (14) осуществлялась градиентным методом [7], в котором в качестве нулевого приближения использованы значения $C = 1$, $p_4 = 0$, $\zeta_b = 5$ и p_1 , p_2 , найденные из (12). Последующий расчет постоянной распространения моды производился по формуле (13).

На рис. 6 представлены результаты восстановления комплексных постоянных распространения основных ТМ мод волноводных пленок 1 и 2 с гладкими границами раздела сред. Восстановленные значения обозначены через h , точные значения – через $h^{(0)}$. В качестве $S(\gamma)$ использованы распределения, представленные на рис. 3 и аналогичные распределения, рассчитанные изложенным выше методом при $\tau = 50 \text{ мкм}$ и различных значениях z_b .

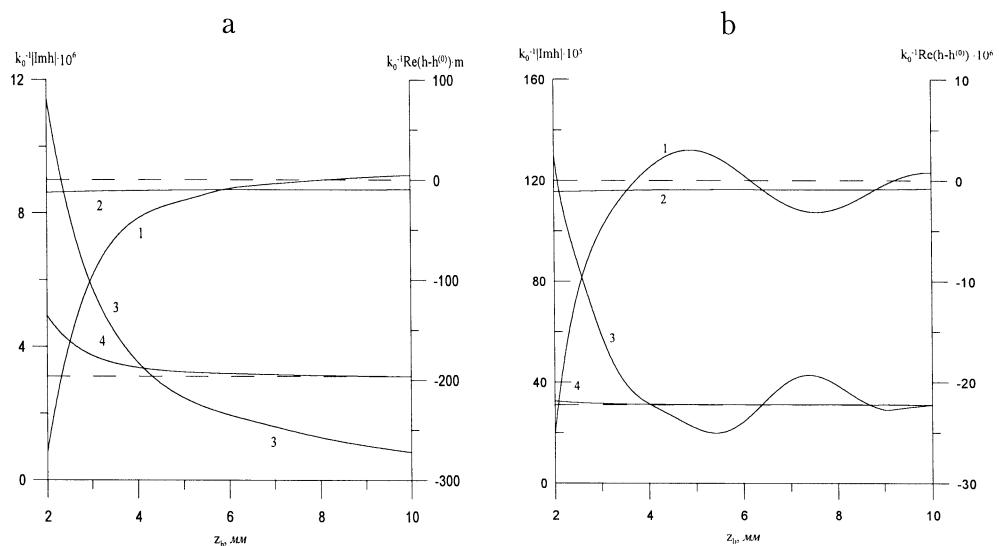


Рис. 6. Восстановление комплексных постоянных распространения основных ТМ мод пленок 1 (а) и 2 (б) при различных протяженностях основания призмы связи. Кривые 1 и 3 – стандартное решение обратной задачи (12), (13), 2 и 4 – результат минимизации целевой функции (14). Кривые 1 ($m = 10^6$) и 2 ($m = 10^7$) относятся к $\text{Re } h$, 3 и 4 – $\text{Im } h$. Штриховые линии – точные h

Согласно рис. 6 модель (9) обеспечивает гораздо более точное решение обратной задачи по сравнению со стандартной моделью (11). Вместе с тем модель (9) приводит к небольшой систематической ошибке при восстановлении $\text{Re } h$. Это объясняется использованием резонансного приближения для коэффициента отражения (7). Еще из рис. 6 следует, что точность решения обратной задачи в обоих рассмотренных приближениях снижается при уменьшении z_b . Этот результат является следствием усиления дифракции света на выходном ребре призмы связи и погрешностями описания дифракционных полей в рамках использованных моделей. Действительно, в приближении (11) указанная дифракция полностью игнорируется, а в приближении (9) поле отраженного пучка принимается равным нулю при $z > z_b$, тогда как при плавном изгибе основания призмы данное поле должно непрерывно зависеть от z . Таким образом, в соответствии с представленным выше качественным обоснованием приближения (9), его точность должна снижаться по мере уменьшения расстояния z_b и увеличения параметра τ , характеризующего крутизну изгиба основания призмы (см. (3) в [2]). Эти особенности иллюстрирует таблица, где значение комплексной постоянной распространения h основной ТМ моды пленки 1, восстановленное при различных значениях z_b и τ , сопоставлено с точным значением $h^{(0)}$.

Влияние изгиба основания призмы связи на результат решения обратной задачи с использованием модели (9)

$z_b, \text{мм}$	$\tau, \text{мкм}$	$k_0^{-1}h$	$k_0^{-1}h^{(0)}$
3	10	$1.60782744 - i3.1886 \cdot 10^{-6}$	$1.60782842 - i3.1062 \cdot 10^{-6}$
	50	$1.60782727 - i3.7344 \cdot 10^{-6}$	
	100	$1.60782694 - i5.553 \cdot 10^{-6}$	
6	10	$1.60782747 - i3.1064 \cdot 10^{-6}$	$1.60782842 - i3.1062 \cdot 10^{-6}$
	50	$1.60782742 - i3.1810 \cdot 10^{-6}$	
	100	$1.60782733 - i3.4246 \cdot 10^{-6}$	

Рис. 7 иллюстрирует применение модели (9) к решению обратной задачи волноводной спектроскопии для волноводной пленки с шероховатой поверхностью. Здесь в качестве $S(\gamma)$ использованы распределения 1, приведенные на рис. 5 и аналогичные распределения, относящиеся $z_b \neq 6 \text{ мм}$. Расчеты показали, что при наличии поверхностных шероховатостей влияние протяженности основания призмы z_b на результат решения обратной задачи становится более существенным, чем в случае пленок с гладкой поверхностью. В частности, при выборе $z_b < 6 \text{ мм}$ восстановленная функция $h(z_b)$ не только существенно отклонялась от приведенных выше значений $h^{(0)}$ и $h^{(1)}$, но и обладала существенной дисперсией. Поэтому на рис. 7 приведены результаты решения обратной задачи в диапазоне $z_b > 6 \text{ мм}$, где дисперсия результатов сравнительно не высока (уменьшение дисперсии функции $h(z_b)$ при увеличении z_b объясняется расширением промежутка интегрирования случайной функции $Y_r(y_0, z)$ в (45)).

Штриховыми линиями на рис. 7а отмечены найденные в предыдущем разделе значения $\text{Im } h^{(i)}$ ($i = 0$ и $i = 1$ соответствуют основной и первой высшей модам) для мод пленки с гладкой и шероховатой поверхностью при отсутствии призмы связи. Как видно из рис. 7а, при достаточно больших значениях z_b предлагаемый алгоритм решения обратной задачи приводит к корректному восстановлению суммарного затухания мод, вызванного эффектами поглощения и рассеяния света. Однако из сравнения рис. 6а и 7а следует, что при исследовании вклада в затухание моды поверхностного рассеяния необходимо выбирать гораздо большую протяженность основания призмы связи z_b , чем при решении обратной задачи для пленок с гладкой поверхностью.

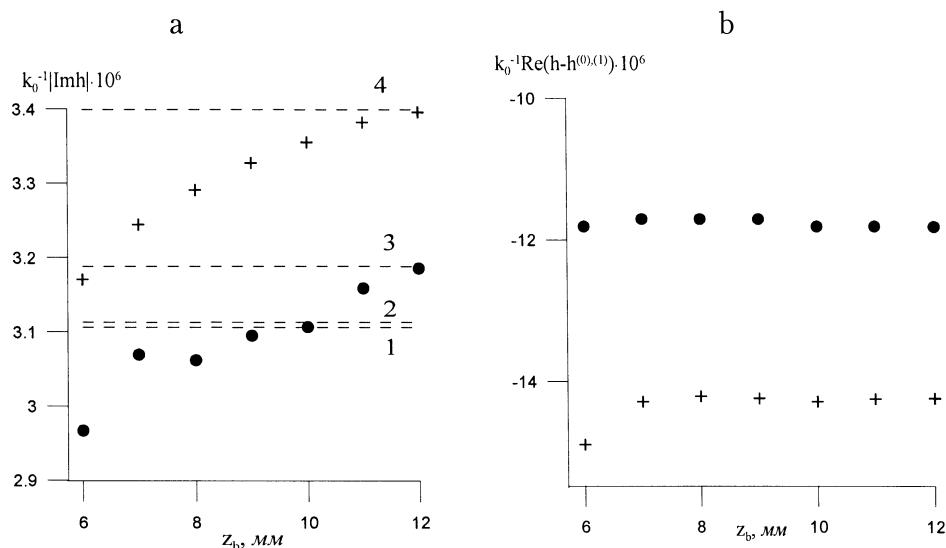


Рис. 7. Восстановление постоянных распространения основной (точки и линии 1,3) и первой высшей (крестики и линии 2, 4) мод пленки 1 с шероховатой поверхностью. Штриховые линии – значения $\text{Im } h^{(0),(1)}$ для волновода с гладкой (1, 2) и шероховатой (3, 4) поверхностью

Из рассмотрения рис. 7б можно заключить, что поверхностное рассеяние света приводит к гораздо более заметному уменьшению восстанавливаемой вещественной части постоянной распространения моды по сравнению с аналогичным уменьшением, которое наблюдалось при исследовании волноводной пленки с гладкой поверхностью. Действительно, согласно рис. 6а, при $z_b > 6 \text{ мм}$ справедлива оценка $k_0^{-1} \text{Re}(h - h^{(0)}) \approx -0.95 \cdot 10^{-6}$, тогда как в соответствии с рис. 7б $k_0^{-1} \text{Re}(h - h^{(0)}) \approx -11.8 \cdot 10^{-6}$. Аналогичные значения для первой высшей моды равны $k_0^{-1} \text{Re}(h - h^{(1)}) \approx -4.25 \cdot 10^{-6}$ и $k_0^{-1} \text{Re}(h - h^{(1)}) \approx -14.3 \cdot 10^{-6}$, соответственно. Таким образом, систематическое занижение результатов восстановления $\text{Re } h$, наблюдаемое на рис. 7б, нельзя объяснить погрешностью резонансного приближения (7). Отмеченный эффект является следствием отмечавшегося выше асимметричного уширения распределения $\bar{S}(\gamma)$, вызванного поверхностным рассеянием света (см. рис. 5).

Итак, исследованы прямая и обратная задачи волноводной спектроскопии тонких пленок с учетом дифракционных эффектов, вызванных ограниченностью призмы связи и рассеянием света на шероховатых границах раздела сред. Предложен новый алгоритм восстановления комплексных постоянных распространения мод планарных оптических волноводов, основанный на обработке углового распределения интенсивности отраженного светового пучка в схеме призменного устройства связи. Показано, что данный алгоритм позволяет получить корректный результат при исследовании мод как с высоким, так и с низким затуханием. В частности, при исследовании волноводной моды с затуханием $\sim 2.8 \text{ дБ/см}$

он приводит к восстановлению мнимой части постоянной распространения с относительной погрешностью, не превосходящей один процент даже при наличии поверхностного рассеяния (см. рис. 7а).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Анализ распределения интенсивности отраженного пучка в схеме временного возбуждения диэлектрических волноводов / А.Б. Сотский [и др.] // Радиотехника и электроника. – 1999. – Т. 44. – № 6. – С. 687–695.
2. Отражение светового пучка от призмы связи. I. Теоретическая модель / А.Б. Сотский [и др.] // Вестник Могилевского государственного университета им. А.А. Кулешова. Серия В. – 2012. – № 1(39). – С. 44–59.
3. Обратная задача волноводной спектроскопии при ограниченной призме связи / А.Б. Сотский [и др.] // Известия НАН Беларуси, сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 3. – С. 66–74.
4. **Сотский, А.Б.** Теория оптических волноводных элементов / А.Б. Сотский. – Могилев : УО “МГУ им. А.А. Кулешова”, 2011. – 456 с.
5. **Хомченко, А.В.** Волноводная спектроскопия тонких пленок / А.В. Хомченко. – Минск : БГУ, 2002. – 222 с.
6. **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 284 с.
7. **Корн, Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1977. – 832 с.

Поступила в редакцию 22.12.2011 г.

УДК 535.51

E.M. ОВСИЮК

О НАХОЖДЕНИИ ПАРАМЕТРОВ МАТРИЦ МЮЛЛЕРА ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В предположении, что оптический элемент описывается матрицей Мюллера лоренцевского типа, развита методика нахождения 3-мерного комплексного вектор-параметра Федорова соответствующих матриц Мюллера по результатам поляризационных измерений при известном в литературе специальном выборе четырех зондовых пучков света.

Для аналитического описания состояния поляризации света используются 4 параметра Стокса [1]. При любом линейном оптическом процессе параметры Стокса падающего пучка линейно преобразуются в параметры Стокса вышедшего пучка с помощью матрицы Мюллера [2]; любой оптический элемент описывается своей матрицей Мюллера. Поляризация света может описываться также в рамках формализма Джонса [3-6]; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным

вектором, линейные оптические элементы описываются 2-мерными матрицами Джонса.

Стоит отметить, что 2-мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим также и для описания частично поляризованного света.

Теория матриц Мюллера недеполяризующих оптических систем развивалась в работах П.И. Ламекина [7-14]. В частности, были описаны собственные поляризации всех типов недеполяризующих оптических систем; в рамках формализма матриц Мюллера построена общая классификация недеполяризующих оптических систем; построены полярные формы матриц Мюллера недеполяризующих систем.

В настоящей работе основное внимание уделяется другим аспектам теории матриц Мюллера. Известно, что при описании полностью или частично поляризованного света существенную роль может играть группа псевдоортогональных преобразований, изоморфная группе Лоренца. Это означает, что техника оперирования с преобразованиями Лоренца, хорошо развитая в релятивистской физике [15-19], может сыграть существенную эвристическую роль при анализе вопросов оптики поляризованного света. А.А. Богушем и др. были инициированы исследования теории матриц Мюллера с акцентом на их групповой структуре, в частности, на группе псевдоортогональных преобразований, изоморфных группе Лоренца [20-27]. При этом была описана общая факторизованная структура возможных матриц Мюллера, показана эффективность применения параметризации Федорова в теории матриц Мюллера лоренцевского типа, найден способ построения 4-мерных спиноров Джонса для частично поляризованного света, выполнен теоретико-групповой анализ степени неопределенности матрицы Мюллера оптического элемента из результатов одного поляризационного измерения, построена классификация возможных вырожденных матриц Мюллера с нулевым определителем.

1. Действие лоренцевских бустов на частично поляризованный свет

Рассмотрим применение лоренцевских преобразований в контексте формализма Мюллера. При этом будем использовать аналогию между 4-векторами Стокса частично поляризованного света и 4-векторами скорости массивных частиц в релятивистской кинематике:

$$S^a = (I, I\mathbf{p}), \quad U^a = (U^0, U^0\mathbf{V});$$

эти две 4-мерные величины ведут себя одинаково относительно лоренцевских бустов:

$$L = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \beta & -\mathbf{e} \operatorname{sh} \beta \\ -\mathbf{e} \operatorname{sh} \beta & [\delta_{ij} + (\operatorname{ch} \beta - 1)e_i e_j] \end{vmatrix}, \quad \mathbf{e}^2 = 1. \quad (1.1)$$

Такой буст действует на стоксов 4-вектор согласно

$$I' = I (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}), \quad I' \mathbf{p}' = I [-\operatorname{sh} \beta \mathbf{e} + \mathbf{p} + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})]$$

или

$$I' = I (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}), \quad \mathbf{p}' = \frac{-\operatorname{sh} \beta \mathbf{e} + \mathbf{p} + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})}{\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}}. \quad (1.2)$$

Рассмотрим несколько специальных случаев.

Первый:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{p} = 0, \quad I' = I \operatorname{ch} \beta, \quad \mathbf{p}' = \frac{-\operatorname{sh} \beta \mathbf{e} + \mathbf{p}}{\operatorname{ch} \beta}. \quad (1.3)$$

Второй:

$$\mathbf{p} = +p \mathbf{e}, \quad I' = I (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta p), \quad \mathbf{p}' = p' \mathbf{e} = \frac{-\operatorname{sh} \beta + \operatorname{ch} \beta p}{\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta p} \mathbf{e}. \quad (1.4)$$

При этом существует “система отсчета покоя”, в которой частично поляризованный свет выглядит как естественный свет:

$$L_0 = L_0(\beta_0, \mathbf{n}), \quad \operatorname{th} \beta_0 = p, \\ p' = 0, \quad I' = I (\operatorname{ch} \beta_0 - \operatorname{sh} \beta_0 \operatorname{th} \beta_0) = \frac{I}{\operatorname{ch} \beta_0}. \quad (1.5)$$

Третий:

$$\mathbf{p} = -p \mathbf{e}, \quad I' = I (\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta p), \quad \mathbf{p}' = p' \mathbf{e} = -\frac{\operatorname{sh} \beta + \operatorname{ch} \beta p}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta p} \mathbf{e}; \quad (1.6)$$

здесь также существует аналог “системы покоя” L_0 , в которой частично поляризованный свет выглядит как естественный.

Теперь рассмотрим роль релятивистского эллипсоида в поляризационной оптике. Исходим из преобразования Лоренца (Мюллера) (1.2). Учитывая тождество

$$I'^2 (1 - p'^2) = I^2 (1 - p^2) \Rightarrow 1 - p'^2 = \frac{1 - p^2}{[\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p})]^2} \quad (1.7)$$

и затем исключая переменную \mathbf{p}

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}' + \mathbf{e} \operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}')}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}'}, \\ \operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}) = \frac{1}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}'}, \quad (1.8)$$

приходим к соотношению

$$1 - p'^2 = (1 - p^2) (\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{p}')^2, \quad (1.9)$$

которое представляет собой уравнение эллипсоида, ориентированного вдоль вектора \mathbf{e} .

2. Действие лоренцевских бустов на полностью поляризованный свет

Рассмотрим действие мюллеровских (лоренцевских) бустов на полностью поляризованный свет (аналог изотропных 4-векторов релятивистской кинематики), описываемый 4-вектором Стокса

$$S^a = (I, \mathbf{In}), \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (2.1)$$

Относительно лоренц-мюллеровских бустов (1.1) стоксов 4-вектор (2.1) преобразуется согласно:

$$I' = I (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{n}), \quad \mathbf{n}' = \frac{-\operatorname{sh} \beta \mathbf{e} + \mathbf{n} + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{n})}{\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{n}}. \quad (2.2)$$

Можно выделить несколько специальных случаев.

Первый:

$$\underline{\mathbf{e} \mathbf{n} = 0}, \quad I' = I \operatorname{ch} \beta, \quad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n} - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e}}{\operatorname{ch} \beta}. \quad (2.3)$$

Второй:

$$\underline{\mathbf{e} = +\mathbf{n}}, \quad I' = I (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta) = I e^{-\beta}, \\ \mathbf{n}' = \frac{-\operatorname{sh} \beta \mathbf{n} + \mathbf{n} + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{n}}{\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta} = +\mathbf{n}. \quad (2.4)$$

Третий:

$$\underline{\mathbf{e} = -\mathbf{n}}, \quad I' = I (\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta) = I e^{+\beta}, \\ \mathbf{n}' = \frac{\operatorname{sh} \beta \mathbf{n} + \mathbf{n} + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{n}}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta} = +\mathbf{n}. \quad (2.5)$$

Отмечаем, что известный факт отсутствия “системы покоя” для изотропных 4-векторов в релятивистской кинематике проявляется в оптике как невозможность преобразовать полностью поляризованный свет в естественный.

3. Об измерении параметров матриц Лоренца-Мюллера

В книге Снопко [28] изложен способ восстановления 16 элементов матрицы Мюллера (причем не обязательно лоренцевского типа); метод основан на использовании специальным образом выбранных зондирующих пучков света (одного естественного и трех полностью поляризованных). Естественно поставить вопрос о выделении из общей методики [28] специального случая матриц Мюллера лоренцевского типа. Эта задача решена в настоящей работе.

Изложим алгоритм нахождения матриц Мюллера произвольного оптического элемента (пока без всяких ограничений к классу, сопостави-

мых с лоренцевскими матрицами Мюллера) [28]. Первым зондирующими пучком света выбирается естественный свет

$$S_{(0)}^a = (I, 0, 0, 0) \Rightarrow S_{(0)}^{a'},$$

$$M = \begin{vmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} I = S_{(0)}^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{vmatrix} S_{(0)}^{0'} \\ S_{(0)}^{1'} \\ S_{(0)}^{2'} \\ S_{(0)}^{3'} \end{vmatrix},$$

$$m_{00}I = S_{(0)}^{0'}, \quad m_{10}I = S_{(0)}^{1'}, \quad m_{20}I = S_{(0)}^{2'}, \quad m_{30}I = S_{(0)}^{3'}. \quad (3.1)$$

Следующие три зондирующих пучка выбираются полностью поляризованными, причем специального вида. В результате получим

$$S_{(1)}^a = (I, I, 0, 0) \Rightarrow S_{(1)}^{a'},$$

$$M = \begin{vmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{vmatrix} S_{(1)}^{0'} \\ S_{(1)}^{1'} \\ S_{(1)}^{2'} \\ S_{(1)}^{3'} \end{vmatrix},$$

$$S_{(0)}^{0'} + m_{01}I = S_{(1)}^{0'}, \quad S_{(0)}^{1'} + m_{11}I = S_{(1)}^{1'},$$

$$S_{(0)}^{2'} + m_{21}I = S_{(1)}^{2'}, \quad S_{(0)}^{3'} + m_{31}I = S_{(1)}^{3'}. \quad (3.2)$$

$$S_{(2)}^a = (I, 0, I, 0) \Rightarrow S_{(2)}^{a'},$$

$$M = \begin{vmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{vmatrix} S_{(2)}^{0'} \\ S_{(2)}^{1'} \\ S_{(2)}^{2'} \\ S_{(2)}^{3'} \end{vmatrix},$$

$$S_{(0)}^{0'} + m_{02}I = S_{(2)}^{0'}, \quad S_{(0)}^{1'} + m_{12}I = S_{(2)}^{1'},$$

$$S_{(0)}^{2'} + m_{22}I = S_{(2)}^{2'}, \quad S_{(0)}^{3'} + m_{32}I = S_{(2)}^{3'}. \quad (3.3)$$

$$S_{(3)}^a = (I, 0, 0, I) \Rightarrow S_{(3)}^{a'},$$

$$M = \begin{vmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \begin{vmatrix} S_{(3)}^{0'} \\ S_{(3)}^{1'} \\ S_{(3)}^{2'} \\ S_{(3)}^{3'} \end{vmatrix},$$

$$S_{(0)}^{0'} + m_{03}I = S_{(3)}^{0'}, \quad S_{(0)}^{1'} + m_{13}I = S_{(3)}^{1'},$$

$$S_{(0)}^{2'} + m_{23}I = S_{(3)}^{2'}, \quad S_{(0)}^{3'} + m_{33}I = S_{(3)}^{3'}. \quad (3.4)$$

Полученные системы уравнения приводят к следующим явным выражениям для 16 элементов матрицы Мюллера:

$$\begin{aligned}
 m_{00} &= S_{(0)}^{0'}/I, & m_{10} &= S_{(0)}^{1'}/I, & m_{20} &= S_{(0)}^{2'}/I, & m_{30} &= S_{(0)}^{3'}/I, \\
 m_{01} &= \frac{S_{(1)}^{0'} - S_{(0)}^{0'}}{I}, & m_{11} &= \frac{S_{(1)}^{1'} - S_{(0)}^{1'}}{I}, & m_{21} &= \frac{S_{(1)}^{2'} - S_{(0)}^{2'}}{I}, & m_{31} &= \frac{S_{(1)}^{3'} - S_{(0)}^{3'}}{I}. \\
 m_{02} &= \frac{S_{(2)}^{0'} - S_{(0)}^{0'}}{I}, & m_{12} &= \frac{S_{(2)}^{1'} - S_{(0)}^{1'}}{I}, & m_{22} &= \frac{S_{(2)}^{2'} - S_{(0)}^{2'}}{I}, & m_{32} &= \frac{S_{(2)}^{3'} - S_{(0)}^{3'}}{I}. \\
 m_{03} &= \frac{S_{(3)}^{0'} - S_{(0)}^{0'}}{I}, & m_{13} &= \frac{S_{(3)}^{1'} - S_{(0)}^{1'}}{I}, & m_{23} &= \frac{S_{(3)}^{2'} - S_{(0)}^{2'}}{I}, & m_{33} &= \frac{S_{(3)}^{3'} - S_{(0)}^{3'}}{I}.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Нас будет интересовать случай, когда матрица Мюллера изоморфна матрице из группы Лоренца. Это означает, что мы должны учесть для четырех пар векторов Стокса условие инвариантности “релятивистской длины” $g_{ab}S^aS^b = g_{ab}S'^aS'^b$:

$$\begin{aligned}
 I^2 &= (S_{(0)}^{0'})^2 - (\mathbf{S}'_{(0)})^2, & 0 &= (S_{(1)}^{0'})^2 - (\mathbf{S}'_{(1)})^2, \\
 0 &= (S_{(2)}^{0'})^2 - (\mathbf{S}'_{(2)})^2, & 0 &= (S_{(3)}^{0'})^2 - (\mathbf{S}'_{(3)})^2.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Сначала рассмотрим более простую задачу, предполагая, что матрица Мюллера изоморфна матрице из группы 3-мерных вращений:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}. \tag{3.7}$$

При этом система (3.5) принимает вид

$$\begin{aligned}
 1 &= 1, & 0 &= 0, & 0 &= 0, & 0 &= 0, \\
 0 &= 0, & m_{11} &= \frac{S_{(1)}^{1'}}{I}, & m_{21} &= \frac{S_{(1)}^{2'}}{I}, & m_{31} &= \frac{S_{(1)}^{3'}}{I}. \\
 0 &= 0, & m_{12} &= \frac{S_{(2)}^{1'}}{I}, & m_{22} &= \frac{S_{(2)}^{2'}}{I}, & m_{32} &= \frac{S_{(2)}^{3'}}{I}. \\
 0 &= 0, & m_{13} &= \frac{S_{(3)}^{1'}}{I}, & m_{23} &= \frac{S_{(3)}^{2'}}{I}, & m_{33} &= \frac{S_{(3)}^{3'}}{I};
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

дополнительные условия упрощаются

$$I^2 = I^2, \quad I^2 = (\mathbf{S}'_{(1)})^2, \quad I^2 = (\mathbf{S}'_{(2)})^2, \quad I^2 = (\mathbf{S}'_{(3)})^2. \tag{3.9}$$

Согласно (3.8) матрица (3.7) представима в виде (следим за трехмерной матрицей)

$$M = \frac{1}{I} \begin{vmatrix} S_{(1)}^{1'} & S_{(2)}^{1'} & S_{(3)}^{1'} \\ S_{(1)}^{2'} & S_{(2)}^{2'} & S_{(3)}^{2'} \\ S_{(1)}^{3'} & S_{(2)}^{3'} & S_{(3)}^{3'} \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Определитель этой матрицы (для группы вращений он должен быть равен +1) равен

$$\det M = \frac{1}{I} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{I^3} \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 1. \quad (3.11a)$$

Если воспользоваться вектором поляризации $\mathbf{S} = I \mathbf{p}$, то полученное ограничение можно представить как

$$\mathbf{p}'_{(1)}(\mathbf{p}'_{(2)} \times \mathbf{p}'_{(3)}) = 1. \quad (3.11b)$$

Отметим, что эти три вектора нельзя рассматривать как не связанные величины, поскольку они получены в результате действия одной и той же матрицы на вполне определенные начальные векторы поляризации:

$$\mathbf{p}_{(1)} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{p}_{(2)} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{p}_{(3)} = (0, 0, 1). \quad (3.11c)$$

Три вектора $\mathbf{p}'_{(1)}, \mathbf{p}'_{(2)}, \mathbf{p}'_{(3)}$ являются единичными, ортогональными друг другу и составляют правую тройку.

Матрица (3.10) должна быть отождествлена с ортогональной матрицей из группы $SO(3, R)$

$$O = \begin{vmatrix} 1 - 2(n_2^2 + n_3^2) & -2n_0n_3 + 2n_1n_2 & +2n_0n_2 + 2n_1n_3 \\ +2n_0n_3 + 2n_1n_2 & 1 - 2(n_2^2 + n_3^2) & -2n_0n_1 + 2n_2n_3 \\ -2n_0n_2 + 2n_1n_3 & +2n_0n_1 + 2n_2n_3 & 1 - 2(n_1^2 + n_2^2), \end{vmatrix}. \quad (3.12a)$$

Параметры подчинены условию

$$n_0^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = +1. \quad (3.12b)$$

Дальше воспользуемся (с небольшими изменениями) развитой в [18] методикой. Вычисляем $\text{Sp } M$ и находим n_0 :

$$\begin{aligned} \text{Sp } M &= (S_{(1)}^{1'} + S_{(2)}^{2'} + S_{(3)}^{3'})/I = p_{(1)}^{1'} + p_{(2)}^{2'} + p_{(3)}^{3'}, \\ 2n_0 &= \sqrt{p_{(1)}^{1'} + p_{(2)}^{2'} + p_{(3)}^{3'} + 1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Выделяем в матрице антисимметричную часть матрицы $M_{as} = (M - \tilde{M})/2$ и приравниваем ее к $O_{as} = (O - \tilde{O})/2$:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -(p_{(1)}^{2'} - p_{(2)}^{1'}) & (p_{(3)}^{1'} - p_{(1)}^{3'}) \\ (p_{(1)}^{2'} - p_{(2)}^{1'}) & 0 & -(p_{(2)}^{3'} - p_{(3)}^{2'}) \\ -(p_{(3)}^{1'} - p_{(1)}^{3'}) & (p_{(2)}^{3'} - p_{(3)}^{2'}) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2n_0n_3 & +2n_0n_2 \\ +2n_0n_3 & 0 & -2n_0n_1 \\ -2n_0n_2 & +2n_0n_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.14)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} 2n_0 n_1 &= \frac{1}{2}(p_{(2)}^{3'} - p_{(3)}^{2'}) \Rightarrow n_1 = \frac{p_{(2)}^{3'} - p_{(3)}^{2'}}{2\sqrt{p_{(1)}^{1'} + p_{(2)}^{2'} + p_{(3)}^{3'} + 1}}, \\ 2n_0 n_2 &= \frac{1}{2}(p_{(3)}^{1'} - p_{(1)}^{3'}) \Rightarrow n_2 = \frac{p_{(3)}^{1'} - p_{(1)}^{3'}}{2\sqrt{p_{(1)}^{1'} + p_{(2)}^{2'} + p_{(3)}^{3'} + 1}}, \\ 2n_0 n_3 &= \frac{1}{2}(p_{(1)}^{2'} - p_{(2)}^{1'}) \Rightarrow n_3 = \frac{p_{(1)}^{2'} - p_{(2)}^{1'}}{2\sqrt{p_{(1)}^{1'} + p_{(2)}^{2'} + p_{(3)}^{3'} + 1}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отметим, что согласно методике [26] для восстановления матрицы Мюллера в 3-мерном случае достаточно было только двух пар векторов. Здесь используются три пары.

Возвращаемся к 4-мерной матрице Мюллера

$$M = \frac{1}{I} \begin{vmatrix} S_{(0)}^{0'} & S_{(1)}^{0'} - S_{(0)}^{0'} & S_{(2)}^{0'} - S_{(0)}^{0'} & S_{(3)}^{0'} - S_{(0)}^{0'} \\ S_{(0)}^{1'} & S_{(1)}^{1'} - S_{(0)}^{1'} & S_{(2)}^{1'} - S_{(0)}^{1'} & S_{(3)}^{1'} - S_{(0)}^{1'} \\ S_{(0)}^{2'} & S_{(1)}^{2'} - S_{(0)}^{2'} & S_{(2)}^{2'} - S_{(0)}^{2'} & S_{(3)}^{2'} - S_{(0)}^{2'} \\ S_{(0)}^{3'} & S_{(1)}^{3'} - S_{(0)}^{3'} & S_{(2)}^{3'} - S_{(0)}^{3'} & S_{(3)}^{3'} - S_{(0)}^{3'} \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

и введем следующие обозначения:

$$S_{(0)}^{a'} = F^a, \quad S_{(1)}^{a'} = A^a, \quad S_{(2)}^{a'} = B^a, \quad S_{(3)}^{a'} = C^a. \quad (3.17)$$

Тогда получим

$$M = \frac{1}{I} \begin{vmatrix} F^0 & A^0 - F^0 & B^0 - F^0 & C^0 - F^0 \\ F^1 & A^1 - F^1 & B^1 - F^1 & C^1 - F^1 \\ F^2 & A^2 - F^2 & B^2 - F^2 & C^2 - F^2 \\ F^3 & A^3 - F^3 & B^3 - F^3 & C^3 - F^3 \end{vmatrix}. \quad (3.18)$$

Отождествим матрицу (3.18) с матрицей из группы Лоренца и воспользуемся развитой в [29] методикой восстановления параметров матрицы Лоренца по ее яльному виду (в главных моментах она совпадает с развитой в книге Федорова [10], отличия связаны с переходом к спинорной накрывающей $SL(2, C)$ для группы Лоренца L_+^\uparrow). Изложим кратко этот алгоритм. Матрицу собственного ортохронного преобразования Лоренца можно представить следующим образом:

$$L_b^a(k, k^*) = \bar{\delta}_b^c \left[-\delta_c^a k^n k_n^* + k_c k^{a*} + k_c^* k^a + i \varepsilon_c^{anm} k_n k_m^* \right], \quad (3.19)$$

где $\bar{\delta}_b^c$ – специальный (отличающийся от обычного) символ Кронекера:

$$\bar{\delta}_b^c = \begin{cases} 0, & \text{если } c \neq b; \\ +1, & \text{если } c = b = 0; \\ -1, & \text{если } c = b = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Удобно 4-мерный параметр – вектор k_a разложить на действительную и мнимую части:

$$k_0 = m_0 - i n_0 = \Delta e^{i\kappa}, \quad \vec{k} = (k_j) = \vec{m} - i \vec{n} \quad (3.20)$$

и представить матрицу Λ ($L_a^b = \bar{\delta}_a^c \Lambda_c^b$) в виде суммы симметричной и антисимметричной частей $\Lambda = (S + A)$: (использованы обозначения: $(\vec{n} \bullet \vec{n})_{ij} = n_i n_j$, $(\vec{m} \bullet \vec{m})_{ij} = m_i m_j$, $(\vec{b}^\times)_{ij} = \varepsilon_{ijk} b_k$)

$$S = \begin{vmatrix} \Delta^2 + \vec{m}^2 + \vec{n}^2 & 2[\vec{n} \vec{m}] \\ 2[\vec{n} \vec{m}] & -\Delta^2 + \vec{m}^2 + \vec{n}^2 - 2\vec{m} \bullet \vec{m} - 2\vec{n} \bullet \vec{n} \end{vmatrix},$$

$$A = 2\Delta \begin{vmatrix} 0 & -(\vec{m} \cos \kappa - \vec{n} \sin \kappa) \\ (\vec{m} \cos \kappa - \vec{n} \sin \kappa) & (\vec{m} \cos \kappa + \vec{n} \sin \kappa)^\times \end{vmatrix}. \quad (3.21)$$

Учитывая характер зависимости элементов матрицы A от параметра κ , фазы комплексного числа k_0 , вводим трехмерные векторы \vec{M} и \vec{N} :

$$\begin{vmatrix} \vec{M} \\ \vec{N} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa \\ \sin \kappa & \cos \kappa \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \vec{m} \\ \vec{n} \end{vmatrix}. \quad (3.22)$$

Тогда для матриц S и A получаем представления

$$S = \begin{vmatrix} \Delta^2 + \vec{M}^2 + \vec{N}^2 & 2[\vec{N} \vec{M}] \\ 2[\vec{N} \vec{M}] & -\Delta^2 + \vec{M}^2 + \vec{N}^2 - 2\vec{M} \bullet \vec{M} - 2\vec{N} \bullet \vec{N} \end{vmatrix},$$

$$A = 2\Delta \begin{vmatrix} 0 & -\vec{M} \\ +\vec{M} & \vec{N}^\times \end{vmatrix}. \quad (3.23)$$

Соотношения можно переписать как комплексное равенство

$$e^{-i\kappa} \vec{k} = e^{-i\kappa} (\vec{m} - i \vec{n}) = \vec{M} - i \vec{N}$$

и, соответственно, условие единичности детерминанта матрицы $B(k)$ можно представить в виде

$$\Delta^2 - (\vec{M} - i \vec{N})^2 = e^{-2i\kappa}. \quad (3.24)$$

Сформулируем правило для нахождения по яльному виду матрицы L_a^b отвечающего ей параметра k_a . Прежде всего, поскольку выполняется равенство

$$\text{Sp } L = 2(g^{nm} + \bar{g}^{nm}) k_n k_m^* = 4 k_0 k_0^* = 4 \Delta^2, \quad (3.25)$$

то по значению $\text{Sp } L$ нужно вычислить величину Δ . Затем по антисимметричной части A матрицы Λ с учетом уже известного выражения для Δ определяем векторы \vec{M} и \vec{N} . И наконец, по найденным таким образом величинам $(\Delta, \vec{M}, \vec{N})$ восстанавливаем параметр k_a :

$$(k_0, k_j) = \frac{\pm 1}{\sqrt{\Delta^2 - (\vec{M} - i \vec{N})^2}} (\Delta, \vec{M} - i \vec{N}), \quad (3.26)$$

где (\pm) отражают возможность нахождения спинорного преобразования из векторного только с точностью до знака.

Применим изложенный алгоритм для нахождения параметров матрицы M из (3.18). Вычисляем след матрицы M и параметр Δ

$$2\Delta = \pm \sqrt{\frac{F^0 + (A^1 - F^1) + (B^2 - F^2) + (C^3 - F^3)}{I}}. \quad (3.27)$$

По матрице M находим матрицу Λ

$$\Lambda = \frac{1}{I} \begin{vmatrix} F^0 & (A^0 - F^0) & (B^0 - F^0) & (C^0 - F^0) \\ -F^1 & -(A^1 - F^1) & -(B^1 - F^1) & -(C^1 - F^1) \\ -F^2 & -(A^2 - F^2) & -(B^2 - F^2) & -(C^2 - F^2) \\ -F^3 & -(A^3 - F^3) & -(B^3 - F^3) & -(C^3 - F^3) \end{vmatrix}.$$

Вычисляем антисимметричную часть и отождествляем ее с антисимметричной частью матрицы Лоренца

$$\begin{aligned} \frac{1}{2I} \begin{vmatrix} 0 & -F^0 + F^1 + A^0 & -F^0 + F^2 + B^0 & -F^0 + F^3 + C^0 \\ F^0 - F^1 - A^0 & 0 & -B^1 + F^1 + A^2 - F^2 & -C^1 + F^1 + A^3 - F^3 \\ F^0 - F^2 - B^0 & B^1 - F^1 - A^2 + F^2 & 0 & -C^2 + F^2 + B^3 - F^3 \\ F^0 - F^3 - C^0 & C^1 - F^1 - A^3 + F^3 & C^2 - F^2 - B^3 + F^3 & 0 \end{vmatrix} = \\ = 2\Delta \begin{vmatrix} 0 & -M_1 & -M_2 & -M_3 \\ M_1 & 0 & N_3 & -N_2 \\ M_2 & -N_3 & 0 & N_1 \\ M_3 & N_2 & -N_1 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{F^0 - F^1 - A^0}{2I} = 2\Delta M_1, \quad \frac{F^0 - F^2 - B^0}{2I} = 2\Delta M_2, \quad \frac{F^0 - F^3 - C^0}{2I} = 2\Delta M_3, \\ \frac{F^2 - F^3 - C^2 + B^3}{2I} = 2\Delta N^1, \quad \frac{F^3 - F^1 - A^3 + C^1}{2I} = 2\Delta N^2, \quad \frac{F^1 - F^2 - B^1 + A^2}{2I} = 2\Delta N^3. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Ответ можно представить в более краткой форме, если перейти к 3-мерному вектор-параметру Федорова

$$\mathbf{q} = i \frac{\mathbf{k}}{k_0} = i \frac{\mathbf{M} - i\mathbf{N}}{\Delta}, \quad (3.29)$$

т.е.

$$\begin{aligned} q_1 &= 2i \frac{(F^0 - A^0) - F^1 - i[(F^2 - F^3) - (C^2 - B^3)]}{F^0 + (A^1 - F^1) + (B^2 - F^2) + (C^3 - F^3)}, \\ q_2 &= 2i \frac{(F^0 - B^0) - F^2 - i[(F^3 - F^1) - (A^3 - C^1)]}{F^0 + (A^1 - F^1) + (B^2 - F^2) + (C^3 - F^3)}, \end{aligned}$$

$$q_3 = 2i \frac{(F^0 - C^0) - F^2 - i[(F^1 - F^2) - (B^1 - A^2)]}{F^0 + (A^1 - F^1) + (B^2 - F^2) + (C^3 - F^3)}. \quad (3.30)$$

Для контроля полученных формул рассмотрим простой пример. Пусть имеется матрица Мюллера лоренцевского типа

$$M = L = \begin{vmatrix} \cosh \beta & 0 & 0 & \sinh \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \beta & 0 & 0 & \cosh \beta \end{vmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} S_{(0)}^{0'} &= F^0 = I \cosh \beta, & S_{(0)}^{1'} &= F^1 = 0, & S_{(0)}^{2'} &= F^2 = 0, & S_{(0)}^{3'} &= F^3 = I \sinh \beta, \\ S_{(1)}^{0'} &= A^0 = I \cosh \beta, & S_{(1)}^{1'} &= A^1 = I, & S_{(1)}^{2'} &= A^2 = 0, & S_{(1)}^{3'} &= A^3 = I \sinh \beta, \\ S_{(2)}^{0'} &= B^0 = I \cosh \beta, & S_{(2)}^{1'} &= B^1 = 0, & S_{(2)}^{2'} &= B^2 = I, & S_{(2)}^{3'} &= B^3 = I \sinh \beta, \\ S_{(3)}^{0'} &= C^0 = I(\cosh \beta + \sinh \beta), & S_{(3)}^{1'} &= C^1 = 0, \\ S_{(3)}^{2'} &= C^2 = 0, & S_{(3)}^{3'} &= C^3 = I(\cosh \beta + \sinh \beta). \end{aligned}$$

Следовательно, формулы (3.30) приводят к требуемому результату

$$q_1 = 0 \quad q_2 = 0, \quad q_3 = -i \frac{\sinh \beta}{\cosh \beta + 1} = -i \tanh \frac{\beta}{2}.$$

Автор благодарна В.М. Редькову за интерес к работе и полезные советы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Stokes, G.G.** On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources / G.G. Stokes // Trans. Cambridge Phil. Soc. – 1852. – Vol. 9. – P. 399–416.
2. **Mueller, H.** Memorandum on the polarization optics of the photo-eleastic shutter; Report № 2 of the OSRD project OEMsr576, Boston, MA, USA, 1943.
3. **Jones, R.C.** New calculus for the treatment of optical systems. I. Description and discussion of the calculus / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 488–493.
4. **Hurwitz, H.** A new calculus for the treatment of optical systems. II. Proof of three general equivalence theorems / H. Hurwitz, R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 493–499.
5. **Jones, R.C.** A new calculus for the treatment of optical systems. III. The Sohncke Theory of optical activity / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 500–503.
6. **Jones, R.C.** A new calculus for the treatment of optical systems, IV / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1942. – Vol. 32. – P. 486–493.
7. **Lamekin, P.I.** Intrinsic polarization states of corner reflectors / P.I. Lamekin // Sov. J. Opt. Tech. – 1987. – Vol. 54. – P. 658–661.
8. **Ламекин, П.И.** Необходимые и достаточные условия недеполяризации оптических систем / П.И. Ламекин // Оптика и спектроскопия. – 1996. – Т. 81. – Вып. 1. – С. 164–168.

9. **Ламекин, П.И.** Преобразование степени поляризации излучения оптическими системами / П.И. Ламекин // Оптический журнал. – 1997. – № 6. – С. 50–55.
10. **Lamekin, P.I.** Polar forms of Mueller matrices of nondepolarizing optical systems / P.I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2000. – Vol. 88. – № 5. – P. 737–742.
11. **Lamekin, P.I.** Polarization Eigenstates of Nondepolarizing Optical Systems / P.I. Lamekin // Optics and Spectroscopy. – 2001. – Vol. 91. – № 5. – P. 741–748.
12. **Lamekin, P.I.** Formalism of Mueller matrices and its application to calculation of phase-shifting devices / P.I. Lamekin, Yu.V. Sivaev, K.G. Predko // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V.V. Shepelevich, N.N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 289–293.
13. **Lamekin, P.I.** Mueller matrices of nondepolarizing optical systems: the theory and a new method of determination / P.I. Lamekin // Optics of Crystals: Proceedings of SPIE / V.V. Shepelevich, N.N. Egorov (Eds.). – 2000. – Vol. 4358. – P. 294–302.
14. **Ламекин, П.И.** Кратные собственные значения и собственные состояния поляризации матриц Мюллера частичных поляризаторов / П.И. Ламекин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 5(8). – С. 128–132.
15. **Гельфанд, И.М.** Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения / И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 367 с.
16. **Федоров, Ф.И.** Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1958. – 380 с.
17. **Федоров, Ф.И.** Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
18. **Федоров, Ф.И.** Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
19. **Березин, А.В.** Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.
20. **Bogush, A.A.** On Unique Parametrization of the Linear Group $GL(4, C)$ and Its Subgroups by Using the Dirac Algebra Basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11. – № 1. – P. 1–24.
21. Бикватерионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51. – № 5. – С. 71–76.
22. **Богуш, А.А.** Матрицы Мюллера в поляризационной оптике / А.А. Богуш // Веснік НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 96–102.
24. **Red'kov, V.M.** Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.
25. **Овсюк, Е.М.** Транзитивность в теории группы трехмерных вращений и формализм Стокса–Мюллера в поляризационной оптике / Е.М. Овсюк // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя науки: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2011. – № 1(37). – С. 69–75.
26. **Ред'ков, В.М.** О нахождении матрицы Мюллера оптического элемента по результатам поляризационных экспериментов, теоретико-групповой анализ / В.М. Ред'ков, Е.М. Овсюк // Оптика неоднородных структур – 2011 : материалы III Международной научно-практической конференции, г. Могилев, 16-17 февраля 2011 г. / УО “МГУ им. А.А. Кулешова” ; ред-кол.: В.А. Карпенко (отв. ред.) [и др.]. – Могилев : УО “МГУ им. А.А. Кулешова”, 2011. – С. 32–35.

27. *Red'kov, V.M.* Classification of degenerate 4-dimensional matrices with semi-group structure and polarization optics / V.M. Red'kov, E.M. Ovsiyuk // arXiv.org e-Print archive [Electronic resource]. – 2012. – Mode of access : <http://arxiv.org/abs/1201.6555>. – Date of access : 01.02.2012.
28. *Снопко, В.Н.* Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск : Наука и техника, 1992. – 334 с.
29. *Редьков, В.М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск : Белорусская наука, 2009. – 495 с.

Поступила в редакцию 04.05.2012 г.

УДК 535:539.2:621.383

*О.Е. КОВАЛЕНКО, А.В. ХОМЧЕНКО,
В.Г. ГУЗОВСКИЙ, И.А. КОРНЕЕВА*

ВЛИЯНИЕ ГАЗОВЫХ ПРИМЕСЕЙ НА ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ НАНОСТРУКТУР ПОЛУПРОВОДНИК – ДИЭЛЕКТРИК

Исследован механизм воздействия газовых примесей на фотоэлектрические свойства тонкопленочных наноструктур полупроводник – диэлектрик, полученных электронно-лучевым испарением в вакууме. Изучено влияние паров аммиака и воды на оптические и фотоэлектрические свойства наноструктур. Показана возможность использования данных структур в качестве селективных датчиков газа.

Введение

Повышенный интерес к системам, получившим название “электронный нос” [1, 2] обусловлен широким спектром их возможных применений во многих отраслях науки и техники [3 – 7]. Эти приборы формируются на основе набора датчиков газа (мультисенсорной системы), генерирующих первичный сигнал, и устройства распознавания образов, обрабатывающих мультисенсорный сигнал. Одной из основных проблем разработки подобных устройств является подбор чувствительного материала для изготовления сенсора. Материалы, используемые в промышленных датчиках, обычно не пригодны для таких целей, так как обладают низкой селективностью и требуют определенного режима работы [8].

Перспективным направлением развития приборов “электронный нос” является формирование сенсорных систем из однотипных чувствительных элементов, расположенных на одном кристалле [2, 9, 10]. В этом случае датчики мультисенсорной системы имеют единый тип сигнала, а вариация свойств и выходных характеристик достигается путем соответствующего выбора внутренних параметров и условий работы. Подобными свойствами обладают тонкопленочные наноразмерные структуры,

созданные на основе диэлектрической матрицы, содержащей полупроводниковые наночастицы [11].

Процессы адсорбции и десорбции газов протекают в приповерхностных слоях нанокристаллов, поэтому, чем больше отношение площади поверхности таких кристаллитов к их объему, тем выше чувствительность датчика и тем эффективнее его работа. При адсорбции молекул газа, обладающих донорными или акцепторными свойствами, происходит изменение ширины потенциального барьера вблизи поверхности наночастицы полупроводника, обуславливающее изменение условий фотогенерации электронно-дырочных пар и, как следствие, изменение фотопроводимости структуры в целом [12]. Диэлектрическая матрица при адсорбции на поверхности пленки молекул газа также изменяет свои токопроводящие свойства [13]. Поэтому при рассмотрении вопросов повышения эффективности работы и селективности чувствительного элемента необходимо учитывать роль всех влияющих факторов.

В настоящей работе представлены результаты исследования механизмов воздействия газовых примесей на фотоэлектрические свойства тонкопленочныхnanoструктур CdSe/полиэтилентерефталат (ПЭТФ) и CdTe/ПЭТФ, сформированных электронно-лучевым испарением в вакууме. Указанные структуры получены путем послойного (за 100-500 циклов) осаждения компонент из двух независимых источников. Суммарная толщина пленок составляла ~ 0,5 мкм. Полупроводниковая фракция представляла собой отдельные частицы размером 4...6 нм, который оценивался по величине голубого сдвига ширины запрещенной зоны [14].

Основная часть

Эффективность взаимодействия газов с поверхностью наночастицы в структуре "полупроводник – диэлектрик" можно оценить, сравнивая размеры области локализации пространственного заряда в кристаллите (или дебаевскую длину) с его размерами. Чем больше размеры области локализации пространственного заряда по отношению к размерам кристаллита, тем существеннее будет изменяться поверхностное электрическое сопротивление пленки при взаимодействии с газами. Концентрация свободных носителей заряда в объеме пленки по нашим оценкам составляла $\sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$, при этом $L \approx 1 \text{ мкм}$. В таком случае влияние газов на электрофизические свойства структур должно быть существенным, так как размеры области локализации пространственного заряда соизмеримы с толщиной пленки и значительно превышают размеры кристаллических зерен в пленке [15].

Действительно, при исследовании свойств тонкопленочной структуры в схеме датчика (рис. 1), появление газовой примеси в камере приводило к обратному изменению электрических свойств пленки, что обуславливало изменение фототока структуры, который регистрировался с помощью селективного усилителя. В качестве примесей были использованы пары водного раствора аммиака или воды. При этом было обнару-

жено, что пары аммиака изменяют не только фототок, но и темновой ток в структуре. Исследования показали, что увеличение темновой проводимости связано с образованием на поверхности образца адсорбированного проводящего слоя. Поэтому, для исключения темновой составляющей проводимости, измерения фототока проводились при облучении образца модулированным излучением. Результаты исследования зависимости изменения фототока структуры CdSe/ПЭТФ от концентрации детектируемой примеси приведены на рис. 2, где $\Delta I = I - I_0$, а I и I_0 – модулированный ток в присутствии газовой примеси в анализируемом объеме и в атмосфере сухого воздуха соответственно.

Для определения механизма воздействия газовых примесей на фотоэлектрические свойства тонкопленочных наноструктур изучалась зависимость фотопроводимости структур от интенсивности засветки. Было обнаружено, что состав газовой среды влияет на характер люкс-амперных характеристик (ЛАХ): при помещении структур CdSe/ПЭТФ и CdTe/ПЭТФ в камеру с аммиаком изменение угла наклона ЛАХ в логарифмическом масштабе для некоторых образцов достигало 15% (рис. 3, а).

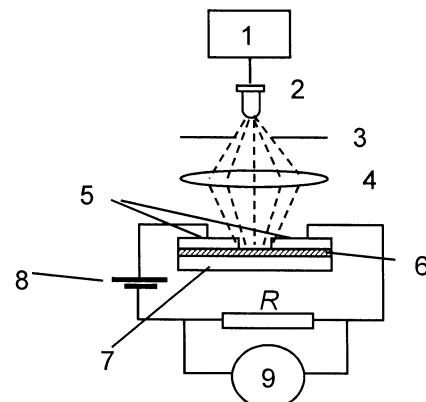


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – генератор, 2 – светодиод, 3 – диафрагма, 4 – собирающая линза, 5 – индийевые электроды, 6 – исследуемая структура, 7 – подложка, 8 – источник питания, 9 – селективный усилитель

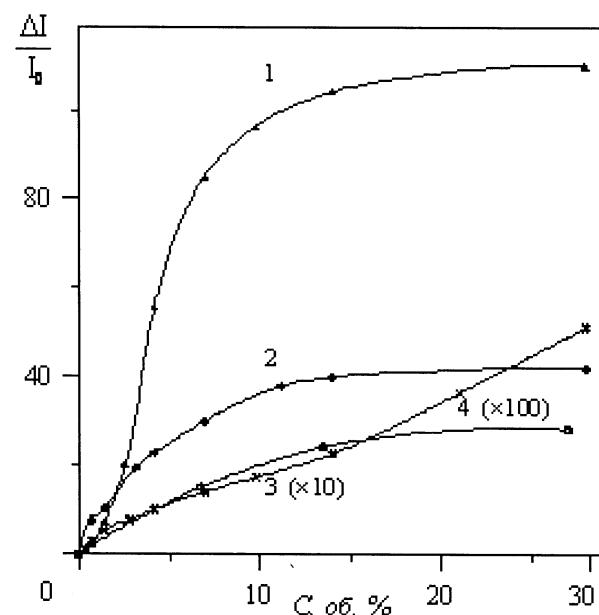


Рис. 2. Зависимость относительного изменения тока фотопроводимости от концентрации аммиака для структур с содержанием полупроводника 20, 50 и 90 об. % (кривые 1, 2, 3 соответственно) и концентрации паров воды для структуры с содержанием полупроводника 50 об. % (кривая 4)

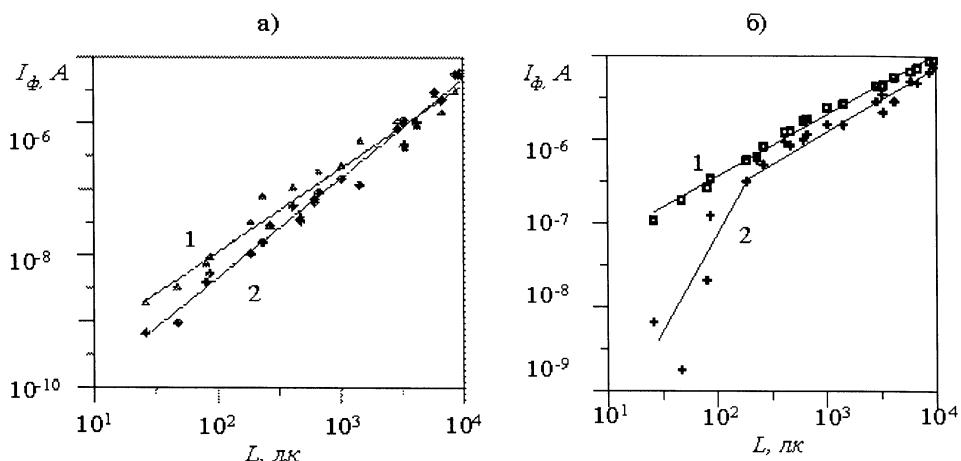


Рис. 3. ЛАХ тонкопленочных структур CdSe/ПЭТФ в сухом воздухе (1) и в парах аммиака (2). Толщина пленки 0,75 нм; содержание полупроводника: а) 50 об. %, б) 25 об. %

Необычно вели себя в данном случае тонкопленочные образцы, содержащие низкую концентрацию полупроводниковой фракции: зависимость фототока от освещенности в присутствии паров аммиака в начале росла квадратично (рис. 3, б, кривая 2), затем ее характер становился таким же, как в сухом воздухе (рис. 3, б, прямая 1). Такой характер ЛАХ свидетельствует об образовании ограниченного количества рекомбинационных центров, влияющих на фотопроводимость пленок. Вероятно, уровень освещенности, при котором происходит изменение характера ЛАХ, зависит от состава окружающей среды, а точка излома на ЛАХ характеризует концентрацию примесных центров, образованных в результате адсорбции газовых примесей и энергетические уровни которых находятся в запрещенной зоне структуры. При интенсивности света, соответствующей точке излома ЛАХ, происходит истощение примеси.

Методы фотопроводимости не позволили обнаружить положение энергетических уровней, соответствующих таким примесям. Однако изучение фотомодуляционных спектров пропускания показало небольшое (5-10%) изменение коэффициента пропускания вблизи зоны проводимости при помещении исследуемого образца в пары аммиака (рис. 4). Пары воды подобных изменений в фотомодуляционный спектр пропускания не вносили и не влияли на наклон ЛАХ. Кроме этого, при таких условиях наблюдалось изменение характера оптического гашения фототока (рис. 5). Иногда эффект гашения при внесении исследуемого образца в пары аммиака полностью исчезал. Дальнейшие исследования показали, что причиной исчезновения оптического гашения является изменение электронных транспортных свойств полимерной матрицы помещенной в газовую среду.

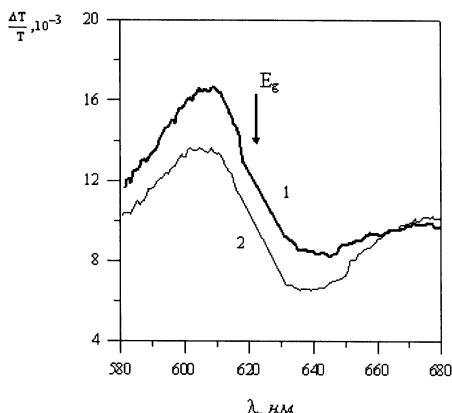


Рис. 4. Фотомодуляционные спектры в парах аммиака (кривая 1) и в сухом воздухе (кривая 2). Содержание полупроводника – 90 об.%; $\Delta T/T$ – относительное изменение коэффициента пропускания пленки при облучении светом с $\lambda_p = 633$ нм

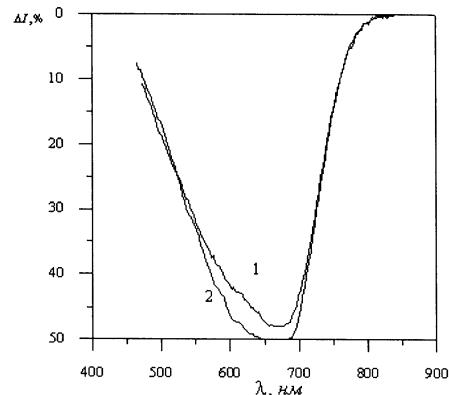


Рис. 5. Спектральная зависимость степени оптического гашения фототока структуры CdSe/ПЭТФ в сухом воздухе (кривая 1) и в парах аммиака (кривая 2)

При этом слаботочечный эффект оптического гашения маскируется сильноточечным эффектом увеличения проводимости матрицы.

Известно, что при адсорбции на поверхности пленки молекул газа изменяются электрические свойства полимера [16]. Перенос носителей заряда между наночастицами полупроводника через диэлектрик осуществляется посредством туннельного эффекта, подтверждением чему может служить нелинейность вольтамперных характеристик тонкопленочных структур CdSe/ПЭТФ и CdTe/ПЭТФ при подаче на них импульсного напряжения (рис. 6).

Кроме этого, при увеличении толщины слоя полимера между наночастицами проводимость структур падает и при толщине $l \approx 4$ нм не фиксируется измерительными приборами. Однако при помещении исследуемых образцов в среду, насыщенную парами воды, темновая проводимость и фотопроводимость структуры повышается. Причем изменений в форме спектра фотопроводимости не наблюдается. В тоже время вольтамперные характеристики при подаче импульсного напряжения остаются нелинейными. Это может свидетельствовать об изменении электронных транспортных свойств полимерной матрицы, при этом механизм переноса заряда остается туннельным.

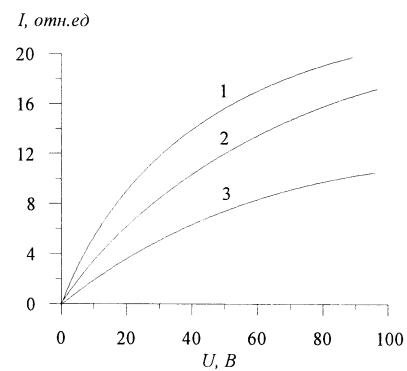


Рис. 6. Вольтамперная характеристика наноструктуры CdTe / ПЭТФ при подаче импульсного напряжения. Частота импульсов: 1 – 500 Гц, 2 – 1 кГц, 3 – 10 кГц

Отмеченное предположение было подтверждено в ходе экспериментов с объемной генерацией носителей импульсами света и последующем разделением противоположно заряженных носителей электрическим полем. В таких условиях на значительные расстояния могли перемещаться носители только одного знака, чем были обусловлены наблюдавшиеся экспериментально импульсы фототока. На рис. 7 показаны временные развертки импульсов тока, возникающие при облучении образца вблизи отрицательного электрода импульсом света азотного лазера ЛГИ-21 с длиной волны 337 нм. В этом опыте электроны двигались через структуру, а дырки преимущественно захватывались ловушками вблизи освещенного электрода.

Изменение электронных транспортных свойств полимерной матрицы при помещении образца в среду, насыщенную парами воды, отражается на амплитуде релаксационной кривой (рис. 7, б), тогда как при освещении положительного электрода (через образец двигаются преимущественно дырки) в данных условиях релаксационная кривая не изменилась.

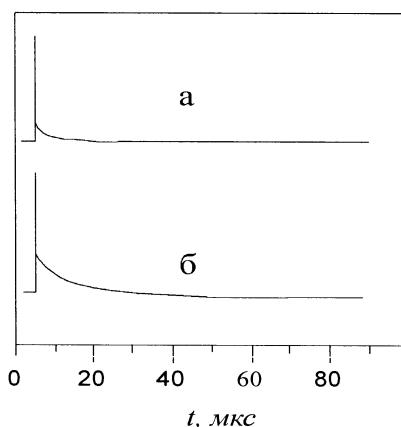


Рис. 7. Осциллограммы импульса фототока в сухом воздухе (а) и в парах воды (б) при возбуждении импульсом света длительностью 10 нс и $\lambda = 337$ нм.

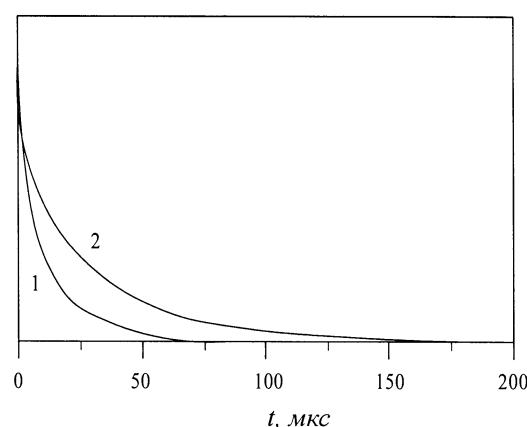


Рис. 8. Осциллограммы импульса фототока в сухом воздухе (кривая 1) и в парах аммиака (кривая 2)

Пары аммиака влияли на форму кривой фотоотклика. Релаксационная кривая состояла из двух частей – быстрой и медленной (рис. 8).

Характерное время быстрой составляющей не зависело от состава окружающей среды и имело значение порядка 10 мкс. В присутствии паров аммиака характерное время медленной составляющей увеличивалось по сравнению его значением в сухом воздухе с 70 до 150 мкс. Причиной такого поведения фотоотклика является образование примесных центров при адсорбции молекул аммиака на поверхности тонкопленочной структуры.

Эта особенность примесных центров отражалась и на ЛАХ записанных при различных частотах модуляции облучения (рис. 9). Пары амми-

ака переставали влиять на характер зависимости фототока от интенсивности излучения уже при частоте модуляции облучающего света 10 кГц. Так как ответственными за быстрые процессы являются центры рекомбинации (т.н. s-центры), а за медленные – центры прилипания (т.н. г-центры) [17], то из анализа релаксационных кривых и ЛАХ следует, что газовые примеси создают медленные центры прилипания для основных носителей заряда.

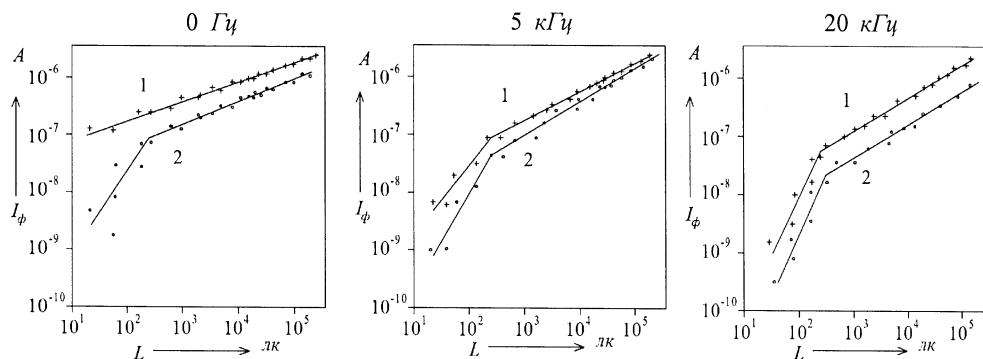


Рис. 9. ЛАХ тонкопленочных структур CdSe/ПЭТФ в сухом воздухе (1) и в парах аммиака (2), записанные при различной частоте модуляции облучения

Заключение

Анализ представленных данных позволяет сделать вывод о том, что адсорбция молекул газа на поверхности тонкопленочнойnanoструктуры приводит к образованию ограниченного количества медленных рекомбинационных центров, которые обуславливают появление в запрещенной зоне дополнительных энергетических уровней. Причем положение этих уровней зависит от вида газа. Полимерная матрица также изменяет свои токопроводящие свойства при помещении структуры в газовую атмосферу. Прежде всего, улучшаются электронные транспортные свойства матрицы, при этом туннельный механизм токопереноса сохраняется.

Таким образом, тонкопленочные nanoструктуры полупроводник-диэлектрик могут быть использованы в качестве высокочувствительных селективных датчиков газовых примесей, причем характеристики таких устройств можно целенаправленно подбирать при изготовлении чувствительного элемента. Одним из важных преимуществ таких сенсорных систем является то, что их стоимость практически не превышает стоимости отдельного датчика, а использование современных микро- и нанотехнологий позволяет разрабатывать эти устройства в тонкопленочном исполнении с малыми размерами, массой и низким энергопотреблением.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Persaud, K.* Analysis of discrimination mechanisms in the mammalian olfactory system using a model nose / K. Persaud, G. Dodd // Nature. – 1982. – V. 299. – P. 352–355.
2. *Rock, F.* Electronic nose: current status and future trends / F. Rock, N. Barsan, U. Weimar // Chem. Rev. – 2008. – V. 108. – P. 705–725.
3. *Gardner, J.W.* Electronic noses principles and applications / J.W. Gardner, P.N. Bartlett. – NY., Oxford University Press, 1999. – 245 p.
4. *Natale, C.D.* Complex chemical pattern recognition with sensor array: the discrimination of vintage years of wine / C.D. Natale, F.A.M. Davide [et al] // Sensors and Actuators B. – 1995. – V. 24–25. – P. 801–804.
5. *Gardner, J.W.* Application of an electronic nose to the discrimination of coffees / J.W. Gardner, H.V. Shurmer, T.T. Tan // Sensors and Actuators B. – 1992. – V. 6. – P. 71–75.
6. *Pearce, T.C.* Handbook of machine olfaction electronic nose technology / T.C. Pearce, S.S. Schiffman [et al]. – Wiley – VCH., Weinheim, Germany, 2003. – 592 p.
7. *Nagle, H.T.* The how and why of electronic noses / H.T. Nagle, R. Gutierrez-Osuna, S.S. Schiffman // IEEE Spectrum. – 1998. – V. 35. – P. 22–31.
8. *Виглеб, Г.* Датчики / Г. Виглеб. – М. : Мир, 1989. – 196 с.
9. *Hagleitner, C.* Smart single-chip gas sensor microsystem / C. Hagleitner, A. Hierlemann, D. Lange [et al] // Nature. – 2001. – V. 414. – P. 293–296.
10. *Lundstrom, I.* Olfactory images from a chemical sensor using a light-pulse technique / I. Lundstrom, R. Erlandsson, U. Frykman [et al] // Nature. – 1991. – V. 352. – P. 47–50.
11. *Коваленко, О.Е.* Влияние адсорбции газов на фотопроводимость тонкопленочных структур CdSe/диэлектрик / О.Е. Коваленко, В.Г. Гузовский // Письма в ЖТФ. – 2005. – Т. 31. – № 17. – С. 63–68.
12. *Miremadi, B.K.* A CdS photoconductivity gas sensor as an analytical tool for detection and analysis of hazardous gases in the environment / B.K. Miremadi, K. Colbow // Rev. Sci. Instrum. – 1997. – Vol. 68. – № 10. – P. 3898–3903.
13. *Коваленко, О.Е.* Механизм воздействия газовых примесей на фотоэлектрические свойства тонкопленочных композиционных наноструктур / О.Е. Коваленко, В.Г. Гузовский, А.В. Хомченко // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев : БРУ, 2010. – Ч. 2. – С. 249.
14. Квантово-размерные структуры селенид кадмия/полимер, изготовленные методом вакуумного испарения / А.С. Борбицкий [и др.] // Письма в ЖТФ. – 1996. – Т. 22. – № 13. – С. 1–5.
15. *Коваленко, О.Е.* Фотопроводимость квантово-размерных структур CdSe/диэлектрик / О.Е. Коваленко, А.И. Войтенков, В.П. Редько // Доклады НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44. – № 5. – С. 49–50.
16. *Волькенштейн, Ф.Ф.* Электронные процессы на поверхности полупроводников при хемосорбции / Ф.Ф. Волькенштейн. – М. : Наука, 1987. – 432 с.
17. *Бьюб, Р.* Фотопроводимость твердых тел / Р. Бьюб. – М. : Издательство иностранной литературы, 1962. – 560 с.

Поступила в редакцию 23.02.2012 г.

УДК 548.24

О.М. ОСТРИКОВ

КІНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В МОДЕЛИ ЕДИНИЧНЫХ ДВОЙНИКОВ КЛІНОВИДНОЙ ФОРМЫ

На основе известных экспериментальных данных впервые предложена модель, описывающая кинетику развития единичного некогерентного двойника клиновидной формы. Впервые получены кинетические уравнения для единичного двойника. Модель позволила вывести соотношения для расчета длительности процесса развития двойника и нормальной скорости его роста. Установлено, что время формирования единичного двойника прямо пропорционально мощности источника двойникообразующих дислокаций и обратно пропорционально скорости генерации двойникообразующих дислокаций. Нормальная скорость роста двойника связана со временем по экспоненциальному закону.

Введение

В настоящее время интерес к двойникованиею возрос в связи с исследованием физических свойств материалов с памятью формы [1] – [3]. Это свойство памяти формы полностью обеспечивается родственным двойникованиею явлением, называемым бездиффузионным фазовым мартенситным превращением. Процессы на границе раздела мартенсита и аустенита аналогичны процессам на двойниковой границе. Поэтому в приближении равенства модулей упругости мартенсита и аустенита, как и в случае приближения изотропности среды по обе стороны двойниковой границы, для количественного описания явления памяти формы с успехом может быть использована теория двойникования [4].

При своем развитии двойники проходят стадию клиновидной или линзовидной формы [5]. При этом линзовидную форму, как это было показано в работе [4], можно представить совокупностью двух клиновидных двойников одинаковой ширины у устья и развивающихся из одной точки в противоположных направлениях. Таким образом, исследование клиновидной формы двойников является общим случаем, который может быть применен в случае линзовидного двойника. Рост двойников существенно зависит от процесса генерации частичных двойникообразующих дислокаций. Этот процесс имеет много общего с кинетическими, например, химическими реакциями и может быть описан аналогичными уравнениями [6]. Поэтому целью работы является обоснование математической модели процесса генерации двойникообразующих дислокаций.

Основная часть

Представим процесс генерирования двойникообразующих дислокаций как параллельную кинетическую реакцию, протекающую на двух двойниковых границах (рис. 1). Предположим, что в деформируемом твердом теле активировался источник двойникообразующих дислокаций, который испускает

N_u двойникующих дислокаций. Эти дислокации сформировали две двойниковые границы. При этом на формирование первой границы расходовалось N_1 дислокаций источника, а на образование второй границы – N_2 двойникующих дислокаций.

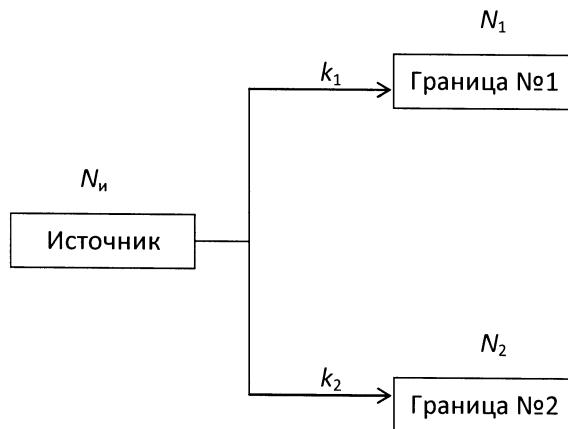


Рис. 1. Схематическое изображение параллельной кинетической реакции развития двойника клиновидной формы

Такой процесс можно описать следующей системой кинетических уравнений (по аналогии с [6]):

$$\begin{cases} \frac{dN_u}{dt} = -(k_1 + k_2)N_u \\ \frac{dN_1}{dt} = k_1 N_u + \alpha_1 N_1 + \beta_1 N_1^{3/2} - \gamma_1 N_1^2 , \\ \frac{dN_2}{dt} = k_2 N_u + \alpha_2 N_2 + \beta_2 N_2^{3/2} - \gamma_2 N_2^2 \end{cases}, \quad (1)$$

где t – время, а k_1 и k_2 имеют физический смысл скоростей генерации двойникующих дислокаций на первой и второй границе двойника соответственно; α_1 и α_2 – коэффициенты размножения двойникующих дислокаций на неоднородностях структуры у первой и второй границы двойника соответственно; β_1 и β_2 – коэффициенты размножения двойникующих дислокаций на первой и второй двойниковом границе; γ_1 и γ_2 – коэффициенты аннигиляции двойникующих дислокаций на первой и второй границе двойника соответственно.

Систему уравнений (1) для бесконечно большого количества дислокаций аналогичным образом можно записать не для числа, а для плотности двойникующих дислокаций и их источников. Пренебрегая процессами размножения двойникующих дислокаций на двойниковых границах и на неоднородностях структуры кристалла, а также процессом анниги-

ляции двойникующих дислокаций из системы (1) получим систему линейных кинетических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dN_u}{dt} = -(k_1 + k_2)N_u, \\ \frac{dN_1}{dt} = k_1 N_u, \\ \frac{dN_2}{dt} = k_2 N_u. \end{cases} \quad (2)$$

Разделяя переменные в первом уравнении системы (2), интегрируя правую и левую часть, получим:

$$\int_{(N_u)_{\max}}^{N_u} \frac{dN_u}{N_u} = - \int_0^t (k_1 + k_2) dt, \quad (3)$$

где $(N_u)_{\max}$ – максимальное число двойникующих дислокаций в источнике.

После интегрирования (3) получим

$$N_u(t) = (N_u)_{\max} e^{-(k_1 + k_2)t}. \quad (4)$$

Приняв в (4) $t = t_{дв}$, где $t_{дв}$ – время формирования двойника клиновидной формы или время генерации источником двойникующих дислокаций, получим

$$N_u(t_{дв}) = \delta = (N_u)_{\max} e^{-(k_1 + k_2)t_{дв}}, \quad (5)$$

где δ – величина, характеризующая истощение источника двойникующих дислокаций. Примем $\delta = 1$, т.е. пусть источник прекращает генерацию двойникующих дислокаций, когда в нем остается одна двойникующая дислокация. Тогда из (5) получим

$$t_{дв} = \frac{(N_u)_{\max}}{k_1 + k_2}. \quad (6)$$

Согласно экспериментальным данным [7] среднее время образования двойника длиной около 100 мкм в сурьме $t_{дв} = 0,8$ с. Для двойника с шириной у устья $H = 20$ мкм в монокристалле сурьмы, имеющем в плоскости, перпендикулярной плоскости двойникования, межатомное расстояние $a = 2 \cdot 10^{-10}$ м, скорость генерации двойникующих дислокаций будет иметь величину $k = k_1 + k_2 = 1,25 \cdot 10^5$ с⁻¹.

Из второго и третьего уравнений системы (2) получим

$$dN_1 = k_1 N_u dt, \quad (7)$$

$$dN_2 = k_2 N_u dt. \quad (8)$$

Подставляя в (7), (8) выражение для N_u из (4), получим

$$dN_1 = k_1 (N_u)_{\max} e^{-(k_1+k_2)t} dt, \quad (9)$$

$$dN_2 = k_2 (N_u)_{\max} e^{-(k_1+k_2)t} dt. \quad (10)$$

Интегрируя (8) и (9), имеем

$$N_1(t) = \frac{k_1 (N_u)_{\max}}{k_1 + k_2} \left[1 - e^{-(k_1+k_2)t} \right], \quad (11)$$

$$N_2(t) = \frac{k_2 (N_u)_{\max}}{k_1 + k_2} \left[1 - e^{-(k_1+k_2)t} \right]. \quad (12)$$

Соотношения (11) и (12) с учетом (4) могут быть представлены в виде:

$$N_1(t) = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \left[(N_u)_{\max} - N_u(t) \right], \quad (13)$$

$$N_2(t) = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \left[(N_u)_{\max} - N_u(t) \right]. \quad (14)$$

Отношение (11) к (12), или (13) к (14) дает

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{k_1}{k_2}. \quad (15)$$

Из (15), в частности, следует, что если скорости генерации двойникующих дислокаций на обоих двойниковых границах равны ($k_1 = k_2$), то и количество дислокаций на этих границах будет одинаковым ($N_1 = N_2$). Такие двойники, как правило, в бездефектной области кристалла при заклинивании имеют границы прямолинейной формы [8]. Если же $k_1 \neq k_2$, то на границе, на которой скорость генерации двойникующих дислокаций выше, их число будет больше, что приводит к приобретению границей выпуклой формы [8]. На другой же границе будет наблюдаться вогнутость [8].

Известно [9], что число двойникующих дислокаций на границах клиновидного двойника связана с его шириной следующими соотношениями

$$N_1 = \frac{H_1}{a}, \quad N_2 = \frac{H_2}{a}, \quad (16)$$

где H_1 и H_2 – геометрические параметры двойника, представленные на рис. 2. Из рис. 2 очевидно, что ширина клиновидного двойника у устья равна

$$H = H_1 + H_2. \quad (17)$$

Нетрудно показать, что из (16) и (17) следует

$$N_u = N_1 + N_2. \quad (18)$$

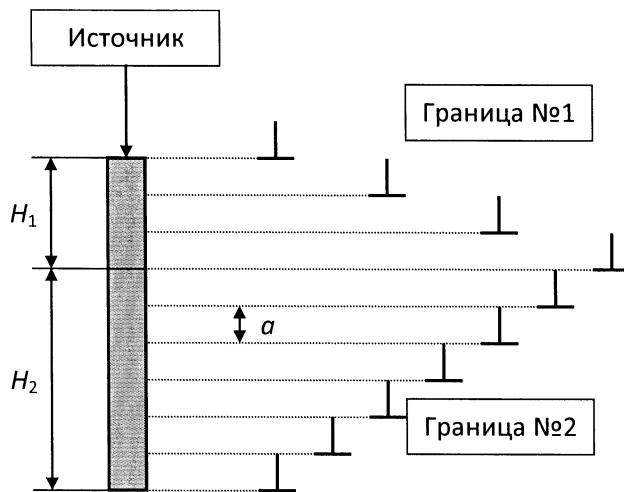


Рис. 2. Схематическое изображение источника двойникующих дислокаций и границ клиновидного двойника в виде совокупности двойникующих дислокаций

Используя соотношения (16) – (18) и (11), (12) для нормальной (перпендикулярной направлению движения вершинной дислокации двойникового клина) скорости роста рассматриваемого двойника получаем

$$V_n = \frac{dH}{dt} = a \frac{dN_u}{dt} = a \frac{d}{dt} (N_1(t) + N_2(t)) = a (N_u)_{\max} (k_1 + k_2) e^{-(k_1+k_2)t}. \quad (19)$$

При $k_1 = k_2 = k$ из (19) имеем

$$V_n = 2ak (N_u)_{\max} e^{-2kt}. \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует, что нормальная скорость роста клиновидного двойника не является постоянной величиной, а в зависимости от времени убывает по экспоненциальному закону.

Из (20) не трудно получить формулу для расчета стартовых скоростей двойникующих дислокаций. Для этого нужно принять $t = 0$. Тогда

$$V_n = 2ak (N_u)_{\max}, \quad (21)$$

или, учитывая (16) – (18),

$$V_n = 2kH. \quad (22)$$

Для рассмотренного выше двойника шириной устья 20 мкм из (22) получим $V_n = 5$ м/с, что соответствует известным экспериментальным данным [9], [10].

Таким образом, используя принцип аналогии кинетических реакций, получены уравнения кинетики дислокационных процессов при формировании двойника клиновидной формы. С использованием данных уравнений получены формулы для расчета времени процесса двойникования и нормальной скорости роста двойника.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Giant magnetic-field-induced strain in NiMnGa seven-layered martensitic phase / A. Sozinov [et all.] // Appl. Phys. Lett. – 2002. – V. 80. – № 10. – P. 1746–1748.
2. 6% magnetic-field-induced strain by twin-boundary motion in ferromagnetic Ni-Mn-Ga / S.J. Murray [et all.] // Appl. Phys. Lett. – 2000. – V. 77. – P. 886–888.
3. Large magnetic-field-induced strains in Ni₂MnGa single crystals / K. Ullakko [et all.] // Appl. Phys. Lett. – 1996. – V. 69. – P. 1966–1968.
4. **Остриков, О.М.** Механика двойникования твердых тел : монография / О.М. Остриков. – Гомель : УО “ГГТУ им. П.О. Сухого”, 2008. – 301 с.
5. **Солдатов, В.П.** Механизм расширения двойниковой прослойки в кристаллах кальцита / В.П. Солдатов, В.И. Старцев, Н.М. Чайковская // Физика твердого тела. – 1971. – Т. 13. – № 11. – С. 3153–3159.
6. **Стромберг, А.Г.** Физическая химия / А.Г. Стромберг, Д.П. Семченко. – М. : Выш. шк., 1988. – 496 с.
7. **Остриков, О.М.** Исследование механического двойникования монокристаллов сурьмы методом наноиндицирования / О.М. Остриков, С.Н. Дуб // Инженерно-физический журнал. – 2003. – Т. 76. – № 1. – С. 170–172.
8. **Остриков, О.М.** Учет формы границ клиновидного двойника в его макроскопической дислокационной модели / О.М. Остриков // Физика металлов и металловедение. – 2008. – Т. 106. – № 5. – С. 471–476.
9. **Косевич, А.М.** Дислокационная теория упругого двойникования кристаллов / А.М. Косевич, В.С. Бойко // Успехи физических наук. – 1971. – Т. 104. – № 2. – С. 101–255.
10. **Солдатов, В.П.** Механизм расширения двойниковой прослойки в кристаллах кальцита / В.П. Солдатов, В.И. Старцев, Н.М. Чайковская // Физика твердого тела. – 1971. – Т. 13. – № 11. – С. 3153–3159.

Поступила в редакцию 01.02.2012 г.

УДК 612.08+616.14

А.В. МАРОЧКОВ

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ДВУХ РАЗЛИЧНЫХ ВИЗУАЛЬНЫХ АНАЛОГОВЫХ ШКАЛ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАВМАТИЧНОСТИ ПУНКЦИИ ПЕРИФЕРИЧЕСКОЙ ВЕНЫ

Для реализации поставленной цели и задач использовались две визуальные аналоговые шкалы. Это линейная визуальная аналоговая шкала длиной 100 мм и оригинальная, разработанная автором цветовая дискретная шкала. У пациентов, которым проводилась пункция периферической вены, количественно определялось ощущение боли. Оценка травматичности пункции вены по линейной визуальной аналоговой шкале составила 12 баллов болевого восприятия. Травматичность пункции с использованием цветовой дискретной шкалы оценена в 2-5 баллов.

Установлено, что различия в восприятии острой боли между мужчинами и женщинами не отмечено. В результате исследования доказано, что при повтор-

ных пункциях вены с интервалом в 24 часа количественная оценка боли не изменялась.

Введение

На протяжении длительного времени одной из основных задач, стоявших перед физиологами и врачами, являлась борьба с болью. Практические наблюдения, разрозненные эксперименты энтузиастов и сложившиеся традиции врачевания привели к существенному прогрессу в области обезболивания, и дату 16 октября 1846 г. – первая публичная демонстрация методики обезболивания при проведении хирургического вмешательства – мы считаем началом развития анестезиологии как практической дисциплины и как науки.

Первоначально основной задачей анестезиологии являлось обеспечение комфортных условий для проведения травматических хирургических вмешательств. Накопление научных знаний и практического опыта позволило сформулировать задачу целенаправленной борьбы с болью как междисциплинарную проблему. В этом ракурсе боль представляется не как помеха на пути к излечению, но как самостоятельный патологический процесс, познание которого базируется на междисциплинарном подходе [1-3].

В этой связи представляется особенно важным универсальное понимание описываемой величины и однозначность трактовки результатов исследований. Однако, несмотря на гигантский прогресс в физиологии, патофизиологии, хирургии, анестезиологии, других областях биологии и медицины методов измерения боли до настоящего времени не создано. Все, что известно до настоящего времени, связано с измерением сопутствующих боли параметров, не вышло за рамки специальных исследовательских лабораторий и не нашло широкого применения в клинической практике.

Основная часть

В настоящее время наибольшее распространение получили методы оценки боли посредством визуальных аналоговых и словесных рейтинговых шкал, не требующие специальных инструментов и методов для их реализации [2-4]. Разность между практической и научной потребностью измерения боли и имеющимися методиками оценки боли значительно затрудняет учет различных факторов агрессии и защиты пациента в клинике [6].

Практика ведения больных в пред- и послеоперационном периоде все чаще ставит перед анестезиологом-реаниматологом задачу максимально точного и ясного представления о том, какому уровню болевого воздействия подвергается пациент. Особенно актуальны подобные вопросы в свете представления о необходимости тестирования пациента в предоперационном периоде для прогнозирования переносимости операционного и послеоперационного стресса.

Таким образом, современная клиническая практика нуждается во внедрении тех инструментов, которые до настоящего времени находили

применение только в физиологических лабораториях. В то же время практическая деятельность требует инструментов, которые отвечали бы строгим условиям простоты и доступности для массового применения.

Представляется актуальным исследование минимальных инвазивных процедур, широко распространенных в клинике, на предмет их использования в качестве модели болевого поведения пациента. Представляется также важным выяснение проблемы устойчивости ответов пациента на однократный тестирующий стимул в различные моменты своего пребывания в стационаре.

Целью настоящего исследования является количественное определение травматичности пункции периферической вены как наиболее распространенной травматичной манипуляции, выполняемой у человека.

Задачи.

1. Определить уровень болевого восприятия при пункции периферической вены двумя различными шкалами – линейная визуальная аналоговая шкала (лВАШ) и монотонная цветовая дискретная шкала (мЦДШ).

2. Определить, как влияет фактор повторения болевого стимула через 24 часа (фактор времени) на результат измерения.

Материалы и методы.

Для определения интенсивности боли использовалась лВАШ длиной 100 мм, на одном конце которой указывались “0” и “Нет боли”, на другом – “100” и “Непереносимая боль” (рис. 1).

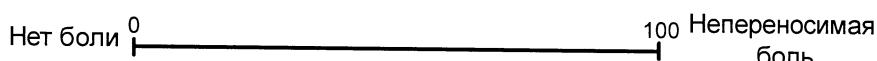


Рис. 1. Визуальная аналоговая шкала (линейная)

Количественную оценку каждого болевого ощущения получали путем измерения циркулем расстояния от нуля до отметки, сделанной обследуемым. Результат колебался от 0 до 100. Один миллиметр по лВАШ расценивался как один балл болевого восприятия (ББВ).

Монотонная цветовая дискретная шкала смоделирована с помощью приложения MS Word. Для закрашивания использована цветовая модель HSL палитры MS Word. За начало шкалы (Код 0) принят белый цвет (Оттенок 0, Насыщенность 0, Яркость 255). Следующий цвет сформирован с параметрами: Оттенок 0, Насыщенность 0, Яркость 240. Последующие цвета получены вычитанием из параметра “Яркость” предшествующего цветового поля 10 баллов для формирования последующего. Параметры “Оттенок” и “Насыщенность” были равны нулю для всех оттенков в ряду. За окончание шкалы (Код 25) принят черный цвет (Оттенок 0, Насыщенность 0, Яркость 0).

Каждому цветовому полю присвоено число от 0 до 100 – код цветового поля. При формировании шкалы по длине листа белой бумаги формата А4 в один ряд расположено 26 прямоугольников (рис. 2).

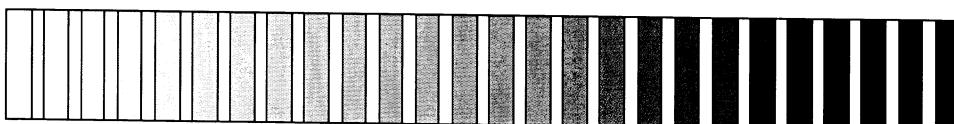


Рис. 2. Цветовая дискретная шкала (монотонная)

В мЦДШ для закрашивания прямоугольников цвета расположены согласно последовательному нарастанию Кода цвета от белого цвета с Кодом “0” до черного цвета с Кодом “100”:

0-4-8-12-16-20-24-28-32-36-40-44-48-52-56-60-64-68-72-76-80-84-88-92-96-100.

На обратной стороне шкалы каждому цвету было присвоено его значение Кода. Числовое значение Кода соответствует числу ББВ для определяемого уровня оценки боли.

Исследование проведено на базе отделения детоксикации УЗ “Могилевская областная больница”. Произведено измерение болевого ощущения у 102 взрослых лиц различного возраста обоих полов, подвергшихся процедуре пункции периферической вены с целью проведения сеанса детоксикации. Во время пункции состояние всех обследуемых лиц оценивалось как удовлетворительное.

Сеанс детоксикации производился один раз в день с понедельника по пятницу. Количество сеансов определялось клинической необходимостью и составляло 5-8 сеансов, обычно 5.

Непосредственно перед пункцией обследуемому сообщалась следующая информация: “Мы проводим исследование болевой чувствительности. Отметьте на предлагаемых шкалах, насколько Вам было больно при уколе иглой”.

Кроме того, перед проведением пункции обследуемому дополнительно предлагалась следующая информация. При работе с лВАШ: “Отметьте на предлагаемой шкале насколько Вам было больно при пункции вены, учитывая, что начало шкалы – “0” – нет боли, а окончание шкалы – “100” – самая сильная, непереносимая боль”. При работе с мЦДШ: “Выберите на предлагаемой шкале интенсивность серого цвета, соответствующего Вашим болевым ощущениям при пункции вены, учитывая, что начало шкалы – белый цвет – нет боли, а окончание шкалы – черный цвет – самая сильная, непереносимая боль. Серые цвета – чем темнее, тем больнее”.

Пункция производилась медицинской сестрой, использующей иглы диаметром 0,9 мм и 1,2 мм. У всех включенных в исследование пациентов постановка внутривенного доступа осуществлялась с первой попытки. Выбор иглы для пункции определялся клинической необходимостью. В момент прокола кожи возникало болевое ощущение, для оценки которого и предлагали две шкалы – лВАШ и мЦДШ. Обследуемый ручкойставил отметку на шкале-линии при работе в лВАШ и указывал прямоугольник, соответствующий перенесенной боли, при работе в мЦДШ. Время между пункцией и ответом – 1-2 минуты. Так же нами фиксировались возраст, пол, диаметр иглы, номер сеанса, диагноз.

Результаты и обсуждение.

Среди 102 пациентов, определивших количественно свое индивидуальное восприятие острой боли, было 32 женщины и 70 мужчин. Средний возраст обследуемых составил $51,0 \pm 13,2$ лет, женщин $53,9 \pm 16,4$, мужчин $50,0 \pm 11,6$. Случаи отказа в исследовании по причине непонимания методики исследования не учитывались.

При помощи теста Шапиро-Уилка проверим полученные результаты измерения болевой чувствительности на нормальность распределения. Для результатов, полученных с помощью лВАШ $W = 0,71$, $p < 0,001$; для результатов, полученных с помощью ЦДШ $W = 0,76$, $p < 0,001$. Распределение не соответствует критериям нормальности и для оценки результатов нами использованы методы непараметрической статистики [7].

Для достижения цели и задач исследования мы последовательно решили ряд вопросов.

Ответим на вопрос, существует ли различие в восприятии пункции иглами 0,9 и 1,2 мм. Применим U-критерий Манна-Уитни. Для ответов по лВАШ получаем $Z = -2,18$, $p = 0,03$. Для ответов по ЦДШ получаем $Z = -1,28$, $p = 0,20$. При оценке боли с помощью лВАШ выявляется достоверное различие между пункциями иглами 0,9 и 1,2 мм. При оценке боли с помощью ЦДШ достоверного отличия не выявлено.

Ответим на вопрос, существует ли различие в восприятии боли между мужчинами и женщинами. Применим U-критерий Манна-Уитни. Среди всех ответов по лВАШ $Z = -0,36$, $p = 0,72$. При пункции иглой 0,9 мм и применении лВАШ $Z = 0,16$, $p = 0,87$. При пункции иглой 1,2 мм и применении лВАШ $Z = -1,03$, $p = 0,30$. Среди всех ответов по ЦДШ $Z = -1,14$, $p = 0,25$. При пункции иглой 0,9 мм и применении ЦДШ $Z = -0,94$, $p = 0,35$. При пункции иглой 1,2 мм и применении ЦДШ $Z = -0,68$, $p = 0,50$. Таким образом, в исследовании достоверного отличия в восприятии боли между мужчинами и женщинами не получено.

У 12 человек измерение производилось 1 раз, у 12 – 2 раза, у 8 – 3 раза, у 23 – 4 раза, у 39 – 5 раз, у 2 – 6 раз, у 4 – 7 раз, у 2 – 8 раз. Всего произведено 403 измерения. Пункция иглой диаметром 0,9 мм произведена в 288 случаях, иглой диаметром 1,2 мм – в 115 случаях.

Измерения при проведении первого сеанса было произведено в 69 случаях, при втором – в 83 случаях, при третьем – в 77 случаях, при четвертом – в 79 случаях, при пятом – в 70 случаях, при шестом – в 8 случаях, при седьмом – в 10 случаях, при восьмом – в 7 случаях. Учитывая малое количество ответов в последних трех группах, в дальнейшем будем работать с первыми пятью группами. Таким образом, в анализ было включено 378 случаев измерения боли при пункции.

Средний возраст участников составил $51,2 \pm 13,4$ лет, измерения у мужчин 277 раз, у женщин – 101 раз, пункция иглой 0,9 мм произведена в 268 случаях, иглой 1,2 мм – в 110 случаях. Выясним, сравнимы ли выбранные нами пять групп между собой по перечисленным признакам, т.е. возрастному составу, полу и распределению пункций иглами большего и меньшего диаметров.

Применим ранговый анализ вариаций по Краскелу-Уоллису для сравнения групп по возрасту. Получаем $H = 0,96$, $p = 0,92$. То есть изучаемые группы получены из одной генеральной совокупности.

Применим тест χ^2 для сравнения изучаемых групп по полу. Получаем $\chi^2 = 0,90$, $p = 0,92$. То есть изучаемые группы получены из одной генеральной совокупности.

Применим тест χ^2 для сравнения изучаемых групп по распределению пункций иглами 0,9 и 1,2 мм. Получаем $\chi^2 = 6,40$, $p = 0,17$. То есть изучаемые группы получены из одной генеральной совокупности.

Сравним результаты измерения болевых ощущений каждой последующей пункции с первой. Применим U-критерий Манна-Уитни. Результат вычисления представлен в таблице.

Сравнение результатов измерения болезненности пункций вены между собой (измерение в баллах болевого восприятия (ББВ))

	N	M	s	Ме	25-й процентиль	75-й процентиль	Z	p
Оценка боли при первом сеансе								
лВАШ	69	12,0	13,6	8,0	5,0	14,0	-	-
мЦДШ	69	2,3	3,0	2,0	0,0	3,0	-	-
Оценка боли при втором сеансе								
лВАШ	83	12,9	15,3	10,0	4,0	15,0	-0,33	0,74
мЦДШ	83	2,6	3,2	2,0	0,0	4,0	-0,49	0,63
Оценка боли при третьем сеансе								
лВАШ	77	12,2	12,5	7,0	4,0	16,0	0,10	0,92
мЦДШ	77	2,6	2,9	2,0	0,0	3,0	-0,67	0,50
Оценка боли при четвертом сеансе								
лВАШ	79	12,2	14,6	7,0	4,0	15,0	0,47	0,63
мЦДШ	79	2,3	2,8	2,0	0,0	3,0	-0,06	0,96
Оценка боли при пятом сеансе								
лВАШ	70	11,9	14,4	7,0	3,0	13,0	0,85	0,40
мЦДШ	70	2,6	3,4	2,0	0,0	4,0	-0,44	0,66

При сравнении результатов оценки боли при каждой последующей пункции с первой достоверного отличия не получено ни в одном рассмотренном случае как при измерении боли с помощью лВАШ, так и при использовании мЦДШ.

Проанализируем, как каждый обследуемый определял свои болевые ощущения. В анализ включим респондентов, имеющих три и более измерения; 78 человек и 367 измерений.

Для интерпретации полученных с помощью лВАШ данных в клинике применяется ряд шкал, соотносящих количественные результаты со словесной формулировкой. Рассмотрим две из них.

Согласно первой системе перевода ББВ расшифровка данных проводится следующим образом: 0 – 5 баллов – нет боли, 6 – 40 баллов – слабая боль, 41 – 74 балла – средняя боль, 75 – 100 баллов – сильная боль. Всего 4 градации.

При анализе результатов, полученных при измерении боли с помощью лВАШ получаем: все ответы в пределах одной градации – 34 человека (43,6%), все ответы в пределах двух градаций – 39 человек (50%), все ответы в пределах трех градаций – 3 человека (3,8%), все ответы в пределах 4 градаций – 2 человека (2,6%).

Согласно второй системе перевода ББВ 0 оценивают как нет боли, 1-25 – слабая боль, 26-50 – умеренная боль, 51-75 – сильная боль и 76-100 – нестерпимая боль. Всего 5 градаций.

При анализе результатов, полученных при измерении боли с помощью лВАШ получаем: все ответы в пределах одной градации – 56 человек (71,8%), все ответы в пределах двух градаций – 18 человек (23,1%), все ответы в пределах трех градаций – 4 человека (5,1%).

Таким образом, мы видим, что не наблюдается соответствия между строгими рамками критериев рассмотренных систем перевода ББВ в словесную формулировку и последовательностью ответов респондентов. Несколько большее постоянство в ответах согласно второй системе словесных оценок объясняется соответствием одной из областей (от 1 до 25) области средних результатов по выборке. В первой описанной системе в этой области есть разрыв (от 0 до 5 с одной стороны и от 6 до 40 с другой).

Заключение

1. При сравнении результатов оценки боли при каждой последующей пункции с первой достоверного отличия не получено ни при измерении боли с помощью лВАШ, ни при использовании ЦДШ.

2. При проверке ответов респондентов, полученных с помощью лВАШ, применение шкал словесных характеристик связано с большой погрешностью. Применение для этих целей шкалы мЦДШ обосновано как широким диапазоном оценок, так и системой интерпретации боли, отличной от прямой линии лВАШ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Жудро, А.А.** Острая боль в хирургической практике и ее количественная оценка / А.А. Жудро // Медицинские новости. – № 7. – 2007. – С. 12–18.
2. **Марочкив, А.В.** Оценка эффективности применения цветовой дискретной шкалы для измерения болевой чувствительности / А.В. Марочкив, Д.А. Якимов // Вестник интенсивной терапии. – № 2. – 2007. – С. 23–27.
3. **Морган, Дж.** Клиническая анестезиология / Дж. Морган, М. Михаил : кн. 1. – Изд. 2-е, испр. ; пер. с англ. ; под ред. А.А. Бунятиана. – М. : БИНОМ, 2005. – 400 с. : ил.
4. Пат. 20010108 РБ, МКИ7 А 61 В. Способ количественной оценки острой боли / А.В. Марочкив, А.А. Жудро ; заявл. 09.02.2001 ; опубл. 30.09.2002, Бюл. № 3. – С. 10.
5. Послеперационная боль : руководство ; пер. с англ. ; под ред. Ф.М. Ферранте, Т.Р. Вейд Бонкора. – М. : Медицина, 1998. – 640 с. : ил.

6. **Якімов, Д.А.** Методы объективизации и прогнозирования способности пациента переносить боль / Д.А. Якімов // Республіканская научно-практическая конференция оториноларингологов с международным участием "Комплексная реабилитация больных с патологией слуха, голоса и речи", посвященная 25-летию ГУ "РКБ ПСГР", Минск, 15-16 ноября 2007 г. : сборник научно-практических статей ; под ред. Л.Э. Макариной-Кибак. – Минск : ГУ "РКБ ПСГР", 2007. – С. 100–102.
7. **Реброва, О.Ю.** Статистический анализ медицинских данных. Применение пакета прикладных программ STATISTICA / О.Ю. Реброва. – М. : МедиаСфера, 2003. – 312 с.

Поступила в редакцию 25.05.2012 г.

ПЕРСАНАЛІІ

УДК 51(092)

А.М. ГАЛЬМАК, Г.В. ЛАСЬКОВА

ВЕЛИКИЙ МАТЕМАТИК ИССАИ ШУР

Статья посвящена известному математику, уроженцу Могилева И. Шуру, имя которого до сих пор отсутствует в официальной могилевской историографии. Указываются основные вехи биографии И. Шура, отмечается его выдающийся вклад в современную математику и мировой уровень полученных им научных результатов, подчеркивается огромный авторитет И. Шура среди математиков, формулируются вопросы для будущих исследователей могилевского периода жизни И. Шура. Особое внимание в статье уделяется взаимоотношениям И. Шура и другого знаменитого могилевчанина О.Ю. Шмидта.



В 1973 г. известный американский математик Карл Фейс (Carl Faith) опубликовал двухтомную монографию “Algebra: rings, modules and categories”, сразу же ставшую очень популярной среди математиков-алгебраистов. В 1977 – 1979 гг. в московском издательстве “Мир” вышел русский перевод этой монографии [1]. Двухтомник К. Фейса, как всякий солидный труд, предваряет предисловие, в котором для нас особый интерес представляет один абзац. В нем К. Фейс перечисляет математиков всего мира, внесших наибольший вклад в современную алгебру, и обессмертивших тем самым свое имя. Приведем этот абзац полностью.

“Практика перечислять авторов, работы которых отражены в тексте, порочна не только потому, что некоторые авторы неизбежно будут пропущены (просто из-за того, что важность их работы не была осознана автором монографии), но и потому, что авторы могут быть представлены не лучшими из их работ. Тем не менее, должны быть воспеты следующие **бессмертные**: Э. Артин, Г. Бернсайд, Дж. Веддербёрн, Р. Дедекинд, К. Гаусс, Д. Гильберт, О. Гёльдер, К. Жордан, Л. Кронекер, В. Крулль, Дж. Левицкий, Э. Машке, Т. Накаяма, Дж. фон Нейман, Э. Нёттер, О. Оре, Р. Ремак, Г. Фиттинг, Г. Фробениус, О.Ю. Шмидт, О. Шрейер, И. Шур”.

Тот, кто знаком с историей Могилева, просмотрев список “бессмертных”, обратит внимание, прежде всего на О.Ю. Шмидта, инициалы которого позволяют предположить, что это наш знаменитый земляк. Да, это действительно Отто Юльевич Шмидт, в честь которого назван проспект

в Могилеве, а его имя увековечено на мемориальной доске, установленной на здании бывшей мужской гимназии, в которой он учился (теперь – торговый центр “Алиса”).

Список “бессмертных” К. Фейса примечателен еще и тем, что в нем О.Ю. Шмидт – не единственный могилевчанин. Есть в нем еще один математик, имеющий самое непосредственное отношение к нашему городу и обессмертивший себя тем, что многим важнейшим теоремам алгебры, которые он доказал, впоследствии было присвоено его имя.

Могилевское происхождение О.Ю. Шмидта – хорошо известный факт, отмечаемый во всех энциклопедиях, справочниках и словарях, в которых имеются посвященные ему статьи. Не обделяли О.Ю. Шмидта вниманием и могилевские СМИ. Может сложиться впечатление, что данная статья – очередная публикация, посвященная О.Ю. Шмидту, поводом для которой послужило его попадание в отмеченный выше список выдающихся алгебраистов. Нахождение в этом списке, конечно же, престижно, как для самого О.Ю. Шмидта, так и для его земляков, но оно мало что может прибавить к его славе и не заслуживает, на наш взгляд, отдельной публикации. Основное внимание в данной статье будет уделено другому математику из указанного списка. С научными достижениями этого математика, несомненно, был знаком О.Ю. Шмидт. Можно даже утверждать, что они оказали на него огромное влияние. *Кто же этот математик? И какое отношение он имеет к Могилеву?*

Если в списке К. Фейса рядом с фамилией каждого ученого указать место его рождения, то обнаружится, что двое из этого списка родились в одном городе. Речь идет о Могилеве, где в 1875 г. за 16 лет до рождения О.Ю. Шмидта появился на свет будущий классик алгебраической науки Иссаи Шур.

В доинтернетовские времена для получения какой-либо информации об известном человеке, в том числе и о месте его рождения, нужно было обращаться к энциклопедиям и биографическим справочникам. В случае с И. Шуром такой подход чаще всего оказывается безрезультатным, так как во многих энциклопедиях (Большая советская энциклопедия, Российская энциклопедия, Белорусская энциклопедия, The World Book Encyclopedia) информация об И. Шуре вообще отсутствует. В некоторых изданиях есть статьи об И. Шуре без указания места его рождения [2, 3]. Нам известны только два энциклопедических издания [4, 5], а также книга [6], в которых Могилев указан как место рождения И. Шура. Особо отметим, что ничего не сообщает об И. Шуре и энциклопедический справочник [7], посвященный Могилеву.

С наступлением эры Интернета поиск любой информации значительно упростился. Набрав в какой-либо поисковой системе слова “Иссаи Шур” или “Issai Schur”, легко обнаружить массу ссылок на сайты, где можно найти разнообразную информацию, в том числе и некоторые биографические сведения о нашем земляке, например, www.eleven.co (электронная еврейская энциклопедия). На другом сайте www.history.mcs.st-

andrews.ac.uk биографии И. Шура предшествует следующий текст: “Born: 10 Jan 1875 in Mogilev, Russian Empire (now Belarus). Died: 10 Jan 1941 in Tel Aviv, Palestine (now Israel)”. Как видим, авторы текста, чтобы исключить путаницу с украинским Могилевом-Подольским поставили маркер “Belarus”. Более того, в самой биографии подчеркивается, что речь идет о Могилеве на Днепре (“Although Issai Schur was born in Mogilev on the Dnieper”). Биографические данные И. Шура имеются также на сайтах: ru.wikipedia.org; en.wikipedia.org; www.philosophy.by; www.enotes.com.

Укажем только основные факты биографии И. Шура.

- 10 января 1875 – дата рождения.
- 1888 – переехал с семьей из Могилева в Курляндию (ныне – Латвия).
- 1894 – поступил в Берлинский университет.
- 1901 – получил докторскую степень.
- 1903 – приступил к чтению лекций в Берлинском университете.
- 1911 – профессор математики Боннского университета.
- 1916 – возвратился в Берлинский университет.
- 1922 – избран в Прусскую Академию.
- 1929 – избран иностранным членом-корреспондентом Академии наук СССР.
- 1933 – уволен нацистами из университета, после протестов преподавателей и студентов восстановлен.
- 1935 – окончательно изгнан нацистами из университета.
- 1938 – вынудили уйти из Прусской Академии.
- 1939 – переехал в Палестину, преподавал в Ерейском университете в Иерусалиме.
- 10 января 1941 – дата смерти (умер в день своего рождения).

О студенческой жизни И. Шура, его педагогической и научной деятельности, о других сторонах жизни И. Шура в Германии, где он прожил более 40 лет, можно узнать из воспоминаний о нем его современников, учеников и коллег, из его писем, а также из официальных документов, хранящихся в немецких архивах.

Нас, конечно же, интересуют, прежде всего, первые 13 лет жизни И. Шура, которые он провел в Могилеве. К сожалению, детство И. Шура, на которое приходится могилевский период его жизни – абсолютно неисследованная часть биографии нашего земляка. Для ликвидации указанного пробела необходимо ответить на ряд вопросов, среди которых отметим, на наш взгляд, первоочередные.

- Где конкретно в Могилеве родился И. Шур, сохранился ли дом, в котором он родился?
- В каких учебных заведениях Могилева обучался И. Шур?
- Кто были его учителя?
- Кто обучал его математике?
- Насколько рано проявились математические склонности И. Шура?
- Общались ли между собой члены семей И. Шура и О.Ю. Шмидта?
- Как глубоко в историю Могилева уходят корни семьи И. Шура?

По мнению признанного знатока могилевской старины, известного историка И.А. Пушкина, для ответа на эти и другие вопросы, касающиеся жизни И. Шура в Могилеве, понадобится кропотливая исследовательская работа, как в белорусских архивах, так и в архивах Вильнюса и Санкт-Петербурга, где по разным причинам оказалась значительная часть официальной документации различных учреждений Могилева, относящейся к интересующему нас периоду.

В данной статье, адресованной аудитории, включающей не только математиков, но также историков-профессионалов и всех тех, кто интересуется историей Могилева, мы не будем описывать научные достижения И. Шура, так как для этого понадобилось бы использование сложнейшей математической терминологии и соответствующей символики. Для того чтобы нематематик имел возможность самостоятельно оценить величие И. Шура как математика, достаточно отметить, что выдающийся вклад И. Шура в математику зафиксирован в названиях ряда полученных им результатов, которые известны сегодня как теоремы и леммы Шура (см., например, [8]). Эти результаты, полученные И. Шуром почти сто лет назад, и сегодня остаются одними из наиболее часто цитируемых в алгебре.

О грандиозности научных свершений И. Шура и его непрекаемом авторитете среди математиков свидетельствуют их многочисленные восторженные высказывания о нем. Ограничимся здесь только одним, но очень убедительным примером, подтверждающим сказанное. Немецкий математик Герман Вейль, который после прихода фашистов в 1933 г. к власти в Германии эмигрировал в США (работал в институте перспективных исследований в Принстоне), издал в 1939 г. книгу “The classical groups. Their invariants and representations” (в 1947 г. появился русский перевод [9]) с посвящением И. Шуру: “Великому алгебраисту ИССАИ ШУРУ в знак глубокого уважения”. Это редчайший случай, когда один великий математик посвящает книгу другому великому математику. При этом надо отметить, что Г. Вейль не был учеником И. Шура и не состоял с ним в каком-либо родстве. Уникальность посвящения Г. Вейля состоит в том, что обычно в таких посвящениях фигурируют родственники автора, реже благодарный ученик посвящает книгу своему учителю. Например, цитированную выше монографию [1], К. Фейс посвятил своим жене и детям.

Отдельного разговора заслуживает тема взаимоотношений И. Шура и О.Ю. Шмидта. В связи с этим, прежде всего, необходимо ответить на вопрос: *знали ли И. Шур и О.Ю. Шмидт о существовании друг друга?* Не могли не знать, так как в первой четверти XX в. круг лиц, занимавшихся исследованиями в области теории групп, был еще очень узким. Кроме того, до появления “железного занавеса”, разделившего Россию и остальной мир, между Россией и Европой не было барьеров, препятствовавших обмену научной информацией. Поэтому, независимо от того, в какой стране были получены новые научные результаты, тем более такие

выдающиеся, как у И. Шура и О.Ю. Шмидта, они очень быстро становились общим достоянием всех заинтересованных исследователей, где бы они ни проживали.

Есть и документальное свидетельство заочного знакомства наших земляков. В 1916 г. О.Ю. Шмидт опубликовал монографию [10], в конце которой помещен именной указатель, содержащий и фамилию И. Шура. В § 102 этой монографии цитируется работа И. Шура 1905 г., еще раз И. Шур упоминается в § 106.

После того, как достоверно установлено заочное знакомство двух великих математиков, совершенно естественным выглядит следующий вопрос: встречались ли они? Понятно, что в Могилеве встретиться они не могли, так как в 1888 г. И. Шур и его семья переехали в Латвию, а О.Ю. Шмидт родился только в 1891 году.

Анализ биографий И. Шура и О.Ю. Шмидта наводит на мысль, что наиболее вероятным местом их встречи могла быть Германия, куда в 1927 г. на 2 месяца (май – июль) для проведения научных исследований был командирован О.Ю. Шмидт, и где в это время, как видно из приведенной выше информации, проживал и работал И. Шур. И такая встреча действительно состоялась. Это документально зафиксировано в официальной хронологии “Даты жизни и деятельности Отто Юльевича Шмидта”, помещенной в книге [11]. В указанной хронологии отмечается, что во время командировки в Германию О.Ю. Шмидт встречался не только с И. Шуром, но также с Д. Гильбертом и Э. Нётер (все из списка К. Фейса).

Оказывается, встреча И. Шура и О.Ю. Шмидта в Германии была не первой. В сентябре 1923 г. О.Ю. Шмидт находился в командировке в Италии, где принимал участие в работе Всемирной книжной выставки, проходившей во Флоренции. Именно там и состоялась, по-видимому, первая встреча И. Шура и О.Ю. Шмидта. Была ли эта встреча случайной? Многое прояснилось бы, если бы было установлено, что они переписывались друг с другом. Существование такой переписки вполне возможно, так как в то время одним из основных видов коммуникации между учеными являлись обычные письма. Общаться наши земляки могли, как на русском, так и на немецком языке, так как оба языка для них были родными.

Еще один интересный вопрос: *знали ли И. Шур и О.Ю. Шмидт, что у них общая малая родина?* С большой долей вероятности можно предположить, что их сближали и делали интересными друг для друга не только общие научные интересы, но и осведомленность о том, что оба они родом из Могилева. Это обстоятельство вполне могло быть одной из причин того, что они использовали любую возможность для личной встречи.

Особое отношение О.Ю. Шмидта к И. Шуру можно усмотреть и в избрании последнего в 1929 г. иностранным членом-корреспондентом АН СССР. Это стало возможным во многом благодаря тому, что за год до этого О.Ю. Шмидт был назначен представителем Совета народных комиссаров в комиссии по выборам новых академиков в АН СССР.

Заметим, что сам О.Ю. Шмидт стал членом-корреспондентом АН СССР только в 1933 г.

Отсутствие И. Шура в могилевской историографии – досадное недоразумение, к возникновению которого в равной степени причастны как летописцы могилевской истории, не сумевшие самостоятельно раскопать могилевские корни И. Шура, так и сами математики, не обратившие на это внимание историков.

Некоторые города и даже целые государства, за неимением собственных исторических персонажей мирового уровня, приукрашивают свою историю, сочиняя красочные легенды и мифы, водруженя на пьедесталы нелепые символы, и присваивая себе чужую историю и чужих героев. Могилевчанам нет необходимости заниматься подобного рода сочинительством и присвоением чужого. Достаточно не проходить мимо того, что нам принадлежит по праву. Пришло время возвращать И. Шура в родной город. Значимость этого ученого для современной математики не меньше, чем значимость М. Шагала для живописи. Поэтому Иссаи Шур вполне может стать для Могилева таким же символом, каким для Витебска является Марк Шагал.

Начинать восстановление исторической справедливости по отношению к И. Шуру можно с того, что не требует значительных материальных затрат. Например, обязательно включать информацию о нем во все вновь издаваемые книги по истории Могилева. Параллельно нужно добиваться появления статей, посвященных И. Шуру, с обязательным указанием места его рождения в переизданиях уже существующих энциклопедий, а также в электронных энциклопедиях.

К популяризации имени И. Шура и его выдающихся научных достижений должны подключиться и могилевские СМИ, предоставляя свои страницы для публикаций, посвященных различным сторонам его жизни и деятельности. Не должна оставаться в стороне и существующая в Могилеве общественная топонимическая комиссия. В резервном списке названий улиц и переулков, составленном этой комиссией, одной из первых, на наш взгляд, должна быть фамилия И. Шура. Великий математик, результаты и работы которого до сих пор цитируются в сотнях статей, публикуемых каждый год по всему миру, заслуживает того, чтобы его имя былоувековечено в названии улицы, проспекта или площади родного для него Могилева.

По непонятным причинам в Могилеве до сих пор нет памятника О.Ю. Шмидту. Может быть, это и к лучшему. С позиций сегодняшнего дня отсутствие спешки с установкой памятника О.Ю. Шмидту можно оправдать тем, что теперь появилась возможность сделать так, чтобы И. Шур и О.Ю. Шмидт встретились в Могилеве на постаменте общего для них памятника.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Фейс, К.** Алгебра: кольца, модули и категории : в 2 т. / К. Фейс. – М. : Мир, 1977. – Т. 1. – 686 с.; М. : Мир, 1979. – Т. 2. – 232 с.

2. *Бородин, А.И.* Биографический словарь деятелей в области математики / А.И. Бородин, А.С. Бугай. – Киев : Радянська школа, 1979. – 607 с.
3. Большой Российской энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М. : Большая Российская энциклопедия, 2003. – 1888 с.
4. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М. : Советская энциклопедия, 1988. – 847 с.
5. *Боголюбов, А.Н.* Математики. Механики / А.Н. Боголюбов. – Киев : Наукова думка, 1983. – 639 с.
6. История могилевского еврейства : документы и люди : в 2 кн. / сост. А. Литин. – Минск : Юникап, 2006. – Кн. 2. – Ч. 1. – 388 с.
7. Могилев : энциклопедический справочник / гл. ред. И.П. Шамякин. – Минск : Белорусская советская энциклопедия, 1990. – 472 с.
8. Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. – М. : Советская энциклопедия, 1988. – 1248 с.
9. *Вейль, Г.* Классические группы. Их инварианты и представления / Г. Вейль. – М. : Гос. изд-во иностранной литературы, 1947. – 408 с.
10. *Шмидт, О.Ю.* Абстрактная теория групп / О.Ю. Шмидт. – Киев, 1916.
11. *Шмидт, О.Ю.* Избранные труды. Математика / О.Ю. Шмидт. – М. : Изд-во Академии наук СССР, 1959. – 315 с.

Поступила в редакцию 22.03.2012 г.

ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ

ЛАПЦІНСКІ

Валерый Мікалаевіч

– доктар фізіка-матэматычных навук, галоўны навуковы супрацоўнік Інстытута тэхналогіі металаў НАНБ

ЛАПКОЎСКІ

Валерый Кузьміч

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітета харчавання

ПАДАЛЯН

Святлана Уладзіміраўна

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітета харчавання

ЖАСТКОЎ

Сяргей Васільевіч

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, за-гадчык кафедры матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў МДУ імя А.А. Куляшова

КАЧАГАРАВА

Марына Анатольеўна

– аспірант Інстытута тэхналогіі металаў НАНБ

АЛЯХНО

Аляксандр Рыгоравіч

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар БДУ

СЯЎРУК

Антон Браніслававіч

– старшы выкладчык кафедры агульнай матэматыкі і інфарматыкі БДУ

МАКАВЕЦКАЯ

Вольга Аляксандраўна

– аспірант Інстытута тэхналогіі металаў НАНБ

СОЦКІ

Аляксандр Барысавіч

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар МДУ імя А.А. Куляшова

ЧУДАКОЎСКІ

Павел Якаўлевіч

– аспірант кафедры эксперыментальнай і тэарэтычнай фізікі МДУ імя А.А. Куляшова

ПРЫІМАК

Ігар Ульянавіч

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі Беларуска-Расійскага ўніверсітета

СОЦКАЯ

Людміла Іванаўна

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі Беларуска-Расійскага ўніверсітета

АЎСІЮК

Алена Міхайлаўна

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладання фізікі Мазырскага дзяржаўнага педагогічнага ўніверсітета імя І.П. Шамякіна

КАВАЛЕНКА

Алег Яўгеньевіч

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры фізікі Беларуска-Расійскага ўніверсітета

ХОМЧАНКА*Аляксандр Васільевіч*

– доктар фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры фізікі Беларуска-Расійскага ўніверсітэта

ГУЗОЎСКІ*Віталь Генадзьевіч*

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры фізікі Беларуска-Расійскага ўніверсітэта

КАРНЕНЕВА*Ірына Аляксандраўна*

– аспірант кафедры эксперыментальнай і тэарэтычнай фізікі МДУ імя А.А. Кулішова

ОСТРЫІКАЎ*Алег Міхайлавіч*

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры інжынернай графікі ГДТУ імя П.В. Сухога

МАРАЧКАЎ*Аляксей Віктараўч*

– доктар медыцынскіх навук, загадчык аддзялення анестэзіялогіі і рэанімацыі ўстановы аховы здароўя “Магілёўская абласная бальніца”

ГАЛЬМАК*Аляксандр Міхайлавіч*

– доктар фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры вышэйшай матэматыкі Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта харчавання

ЛАСЬКОВА*Галіна Уладзіміраўна*

– асістэнт кафедры вышэйшай матэматыкі Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта харчавання

SUMMARIES

Alehno A.G., Sevruk A.B. BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH THE INFINITE INDEX FOR ANALITICAL FUNCTIONS.

The review of the basic results on this topic obtained over fifty years of its development has been done in this article. The results of the first twenty years have been commented in [27, c. 95-103].

Kovalenko O.E., Khomchenko A.V., Guzovsky V.G., Korneyeva I.A. GAS IMPURITIES INFLUENCE ON PHOTOELECTRIC PROPERTIES OF THIN-FILM SEMICONDUCTOR-DIELECTRIC NANOSTRUCTURES.

The mechanism of gas impurities impact on photoelectric properties of thin-film nanostructures from semiconductors and dielectrics obtained by vacuum electron beam deposition is investigated. The influence of ammonia and water vapors on optical and photoelectric properties of nanostructures at room temperature is studied. The possible application of these structures as the selective gas sensors is shown.

Laptinskiy V.N., Lapkovskiy V.K., Podolyan S.V. ABOUT PERIODIC SOLUTIONS OF LINEAR MATRIX LYAPUNOV EQUATION WITH PARAMETER.

Coefficient sufficient conditions for unique solvability are obtained and an algorithm for constructing periodic solutions of Lyapunov matrix equation is developed.

Makovetskaya O.A. ANALYSIS OF PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LYAPUNOV – RIKKATI MATRIX DIFFERENTIAL EQUATION.

Constructive sufficient conditions of unique solvability of the periodic boundary value problem for Lyapunov – Rikkati matrix differential equation are received. The estimation of the localization area of the decision is received. The iteration algorithm of the construction based on the computing scheme of a classical method of successive approximations is given.

Marochkov A.V. APPLICATION OF TWO VISUAL ANALOGUE SCALES TO ASSESS PUNCTURE TRAUMATIC EFFECT.

To reach the aim two visual analogue scales have been applied. One of them is a linear visual analogue scale of 100 mm and the other is a colour discrete original scale designed by the author. The patients' traumatic effect has been measured after the puncture of the peripheral vein. The evaluation of the traumatic effect by the linear visual analogue scale constitutes 12 points. The traumatic effect of the puncture produced by the colour discrete scale is assessed as 2-5 points. It has been found out that there is no difference in the perception of pain among males and females. The research

proves that after a number of repeated punctures of the peripheral vein every 24 hours the quantitative evaluation of the pain does not change.

Ostrikov O.M. KINETIC APPROACH IN INDIVIDUAL WEDGE-SHAPED TWINS MODELS.

On the basis of the known experimental data the model describing kinetic developments of the individual not coherent twin of the wedge form is offered. For the first time the kinetic equations for the individual twin are received. The model has allowed the deduction of parities to calculate the duration of the twin development and normal speed of its growth. It has been proved that the time of the individual twin formation is directly proportional to the capacities of the twining dispositions source and is inversely proportional to the speed of twining dispositions generation. Normal growth rate of the twin is connected in due course on exhibitor to the law.

Ovsiyuk E.M. ON FINDING PARAMETERS OF MUELLER MATRICES OF THE LORENTZIAN TYPE IN POLARIZATION MEASUREMENTS.

With the assumption that an optical element is described by a Mueller matrix of the Lorentzian type, a method to find a 3-dimentional complex Fedorov vector-parameter for a corresponding Mueller matrix as a result of polarization measurements has been elaborated taking into account special choice for 4 probing light beams available in the literature.

Sotsky A.B., Chudakovsky P.Y., Primak I.U., Sotskaya L.I. REFLECTION OF THE LIGHT BEAM FROM THE PRISM-FILM COUPLER II. SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM FOR THE WAVEGUIDE SPECTROSCOPY.

Influence of the limited prism-film coupler and roughness of media interfaces on the accuracy of the solution of the inverse problem for the waveguide spectroscopy is investigated. The improved algorithm for the reconstruction of the complex propagation constants of the waveguide modes is offered.

Zhestkov S.V., Kochegarova M.A. ON EXISTENCE OF KINK WAVE SOLUTIONS FOR COMPLEX MODELS OF REACTION-DIFFUSION EQUATIONS.

The direct method of constructing of kink wave solutions for complex models of reaction-diffusion equations is developed.

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў
на англійскую мову
Я.В. Рубанава

Тэхнічны рэдактар *А.Л. Пазнякоў*
Камп'ютарны набор і вёрстка *А.Л. Пазнякоў*
Карэктар *І.Г. Каржова*

Падпісана да друку **31.07.2012 г.**
Фармат 70x108¹/₁₆. Папера афсётная. Гарнітура Petersburg.
Ум.-друк. арк. 8,7. Ул.-выд. арк. 7,0. Тыраж 100 экз. Заказ **279**

Установа аддукцыі "Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А.А. Куляшова", 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.
ЛИ № 02330/278 ад 30.04.2004 г.

Надрукавана ў аддзеле аператыўнай паліграфіі
УА "МДУ імя А.А. Куляшова". 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.