

ISSN 2073-8315



ВЕСНИК

Магілёўскага дзяржаўнага
універсітэта
імя А.А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца с снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

1 (39)
2012

Галоўная рэдакцыйная камегія:

д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (галоўны рэдактар);
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара);
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (нам. галоўнага рэдактара);
д-р фіз.-мат. навук прафесар С.В. Жасткоў (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В);
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.І. Бернік (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А.А. Самадураў (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар М.В. Машчанка (Магілёў)
д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук дацэнт А.В. Марацкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Мінск)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)

ЗМЕСТ

ЛАПТИНСКИЙ В.Н., МАКОВЕЦКАЯ О.А. Анализ периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати (левосторонняя регуляризация)	4 4
СИДОРЕНКО И.Н. Предельные циклы “нормального размера” укороченной системы Куклеса с симметрией	14
НОВАШИНСКАЯ В.С. О существовании нетопологических солитонов для (2+1)-мерного уравнения Захарова – Кузнецова с дисперсионными членами пятого порядка	23
ЕРОВЕНКО В.А., ЩЕТНИКОВИЧ Е.К. Вероятность конкурирующих гипотез, или “достоверность свидетельских показаний”	30
КУКСО О.С., САКОВИЧ Н.В., ШАМУКОВА Н.В. Приближения действительных векторов значениями целочисленных многочленов в немонотонном случае	41
СОТСКИЙ А.Б., ЧУДАКОВСКИЙ П.Я., ПРИМАК И.У., СОТСКАЯ Л.И. Отражение светового пучка от призмы связи. I. Теоретическая модель	44
ОСТРИКОВ О.М. Метод расчета распределения термических полей, созданных границами механического клиновидного двойника на конечной стадии его развития	59
ЖАРИНА И.А. Влияние фундазола и эпина на морфологические показатели стебля льна-долгунца	63
ИВАНЦОВА Е.Ю. Оценка лежких форм томата (<i>Lycopersicon esculentum</i> Mill.) по признакам биохимического состава плодов в диаллельных скрещиваниях	69
БУРАК Ф.Ф., УСС Е.А., РЯБЧЕНКО А.И. К вопросу формирования стволов еловых древостоев Беларуси	75
ДИОН (доступно и искренне о науке)	
ЖЕСТКОВ С.В. Золотое сечение как отражение красоты и гармонии реального мира	83
ПУБЛІЦЫСТЫКА	
МАТЮХИН В.И. Секрет вечной молодости (П.С. Александров)	86
ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ	94
SUMMARIES	96

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 517.925

В.Н. ЛАПТИНСКИЙ, О.А. МАКОВЕЦЬКАЯ

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РІККАТИ (левосторонняя регуляризация)

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Ріккати и априорная оценка области локализации решения. Дан итерационный алгоритм построения решения, основанный на вычислительной схеме классического метода последовательных приближений.

Введение

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t, X), \quad X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (2)$$

где $t \in I$, $A, B, Q \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t, X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально); $F(t, 0) \neq 0$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$.

При $Q = 0$ двухточечная краевая задача качественными методами исследовалась в работе [1], конструктивными методами [2] – в [3–5], с периодическими краевыми условиями – в [6–8].

Основная часть

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} D_\rho &= \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leq \rho\}, \quad D = \{X(t) : \|X\|_C \leq \rho\}, \quad \tilde{A}(\omega) = \int_0^\omega A(\tau) d\tau, \\ \gamma &= \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad \delta = \max_t \|Q(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t, 0)\|, \\ \varphi(\rho) &= \gamma\delta\omega \left(1 + \frac{1}{2}\alpha\omega\right) \rho^2 + \gamma\omega \left[\beta + L + \frac{1}{2}\alpha\omega(\alpha + \beta + L)\right] \rho + \gamma\omega h \left(1 + \frac{1}{2}\alpha\omega\right), \\ q(\rho) &= \gamma\delta\omega(\alpha\omega + 2)\rho + \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2(\alpha + \beta + L) + \gamma\omega(\beta + L), \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|, \end{aligned}$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_ρ , $\|\cdot\|$ – подходящая норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [9, с. 21].

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

$$\det \tilde{A}(\omega) \neq 0, \quad (3)$$

$$\varphi(\rho) \leq \rho, \quad (4)$$

$$q(\rho) < 1. \quad (5)$$

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единствен-но, при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leq \varphi(\rho)$.

Доказательство. Используя условие (3), сначала выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2).

Пусть $X(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем

$$X(t) = X(0) + \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (6)$$

Полагая в (6) $t = \omega$, получим на основании условия (2)

$$\int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau = 0. \quad (7)$$

Запишем соотношение (7) в следующем виде:

$$\int_0^\omega A(\tau)X(\tau) d\tau = - \int_0^\omega [X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (8)$$

В (8) воспользуемся тождеством типа [2, с. 47]:

$$\int_0^\omega A(\tau)X(\tau) d\tau = \tilde{A}(\omega)X(t) - \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) dX(\tau) + \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) dX(\tau). \quad (9)$$

Соотношение (8) на основании (9) и в силу (1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\omega)X(t) &= \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\ &\quad + F(\tau, X(\tau))] d\tau - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\ &\quad + F(\tau, X(\tau))] d\tau - \int_0^\omega [X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \end{aligned}$$

Так как, согласно (3), $\det \tilde{A}(\omega) \neq 0$, то отсюда получим матричное интегральное уравнение вида

$$\begin{aligned}
X(t) = & \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) \left[A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) \left[A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau - \int_0^\omega \left[X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau \right\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Уравнение (10) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
X(t) = & \int_0^\omega K(t, \tau) \left[A(\tau) X(\tau) + X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau - \\
& - \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\omega \left[X(\tau) B(\tau) + X(\tau) Q(\tau) X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\tau A(\sigma) d\sigma, & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\tilde{A}^{-1}(\omega) \int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma, & 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение матричного интегрального уравнения (10) является решением задачи (1), (2). Это можно показать с помощью несложных выкладок. А именно: сначала обратимся к тождеству (10). Дифференцируя по t обе части этого тождества, получим

$$dX(t) = \left[A(t) X(t) + X(t) B(t) + X(t) Q(t) X(t) + F(t, X(t)) \right] dt.$$

Далее воспользуемся этим соотношением в (10) и выполним затем интегрирование по частям, используя известную формулу [9, с. 52]. Тогда получим последовательно

$$\begin{aligned}
X(t) = & \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) dX(\tau) - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) dX(\tau) - \right. \\
& \left. - \int_0^\omega \left[dX(\tau) - A(\tau) X(\tau) d\tau \right] \right\} = \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \left(\int_0^t A(\sigma) d\sigma \right) X(t) - \int_0^t A(\tau) X(\tau) d\tau + \right. \\
& \left. + \left(\int_t^\omega A(\sigma) d\sigma \right) X(t) - \int_t^\omega A(\tau) X(\tau) d\tau - \int_0^\omega dX(\tau) + \int_0^\omega A(\tau) X(\tau) d\tau \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \tilde{A}(\omega) X(t) - \int_0^\omega dX(\tau) \right\} = X(t) - \tilde{A}^{-1}(\omega) \int_0^\omega dX(\tau).$$

Отсюда имеем

$$\int_0^\omega dX(\tau) = 0,$$

то есть условие (2) имеет место.

Исследуем разрешимость уравнения (10). Это уравнение запишем в операторной форме:

$$X = \mathcal{L}(X), \quad (11)$$

где через \mathcal{L} обозначен соответствующий интегральный оператор в (10). Этот оператор действует на множестве $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Покажем, что из условий (4), (5) следует выполнение принципа Банаха – Каччиопполи [10, с. 605] сжимающих отображений на множестве D , то есть в замкнутом шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$.

Сначала покажем, что $\mathcal{L}(X) \in D$ для произвольной матрицы-функции $X(t) \in D$. Выполнив оценки по норме в (11), получим последовательно

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(X)\| &\leq \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\| \left\| \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau - \int_0^\omega \left[X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right] d\tau \right\| \leq \\ &\leq \gamma \left\{ \int_0^t \left\| \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) \right\| \|A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))\| d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^\omega \left\| \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) \right\| \|A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))\| d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\omega \left\| X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right\| d\tau \right\} \leq \\ &\leq \gamma \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \|A(\sigma)\| d\sigma \right) \left[(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|F(\tau, X(\tau))\| \Big] d\tau + \int_{\tau}^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} \|A(\sigma)\| d\sigma \right) \left[(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \right. \\
& \left. + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \int_{\tau}^{\omega} \left(\|B(\tau)\| \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right) d\tau \Bigg] \leq \\
& \leq \gamma \left\{ \alpha \int_0^{\tau} \left[(\alpha + \beta) \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \right. \\
& + \alpha \int_{\tau}^{\omega} \left((\alpha + \beta) \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right) d\tau + \\
& \left. + \int_0^{\omega} \left[\beta \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau \right\} \leq \\
& \leq \gamma \omega \left\{ \frac{1}{2} \alpha \omega \left[\delta \rho^2 + (\alpha + \beta + L) \rho + h \right] + \delta \rho^2 + (\beta + L) \rho + h \right\}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|\mathcal{L}(X)\| \leq \gamma \omega \left\{ \frac{1}{2} \alpha \omega \left[\delta \rho^2 + (\alpha + \beta + L) \rho + h \right] + \delta \rho^2 + (\beta + L) \rho + h \right\} = \varphi(\rho). \quad (12)$$

Из (12) на основании (4) следует соотношение

$$\|\mathcal{L}(X)\|_{\mathbb{C}} \leq \rho. \quad (13)$$

Далее из (11) имеем для произвольных $\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}} \in D$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}}) - \mathcal{L}(\tilde{X}) = \\
& = \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^{\tau} \left(\int_0^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right) \left[A(\tau) (\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)) + (\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)) B(\tau) + \right. \right. \\
& + \tilde{\tilde{X}}(\tau) Q(\tau) \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) + F(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau)) \Big] d\tau - \\
& \left. \left. - \int_{\tau}^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} A(\sigma) d\sigma \right) \left[A(\tau) (\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)) + (\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)) B(\tau) + \right. \right. \right. \\
& + \tilde{\tilde{X}}(\tau) Q(\tau) \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) + F(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau)) \Big] d\tau - \\
& \left. \left. \left. - \int_0^{\omega} \left[(\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)) B(\tau) + \tilde{\tilde{X}}(\tau) Q(\tau) \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + \tilde{\tilde{X}}(\tau) Q(\tau) \tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau) Q(\tau) \tilde{X}(\tau) + F(\tau, \tilde{\tilde{X}}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau)) \right] d\tau \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$+F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right)\Big] d\tau\Big\}.$$

Преобразуем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) &= \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + \\ &+ \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) = \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right) + \\ &+ \left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\right)Q(\tau)\tilde{X}(\tau), \end{aligned}$$

а затем оценим его по норме

$$\left\| \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) \right\| \leq 2\rho\delta \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\|.$$

Используя эту оценку, получим последовательно

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L}(\tilde{X}) - \mathcal{L}(\tilde{X}) \right\| &\leq \gamma \left\{ \int_0^t \left\| \int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right\| \left\| A(\tau) \left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right) + \left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right) B(\tau) + \right. \right. \\ &+ \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \Big\| d\tau + \\ &+ \int_t^\omega \left\| \int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right\| \left\| A(\tau) \left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right) + \left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right) B(\tau) + \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \right. \\ &- \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \Big\| d\tau + \int_0^\omega \left\| \left(\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right) B(\tau) + \right. \\ &+ \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) + F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \Big\| d\tau \Big\} \leq \\ &\leq \gamma \left\{ \int_0^t \left[\int_0^\tau \left\| A(\sigma) \right\| d\sigma \right] \left(\left\| A(\tau) \right\| + \left\| B(\tau) \right\| \right) \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\| + \right. \\ &+ \left. \left\| \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) \right\| + \left\| F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \right\| \right] d\tau + \\ &+ \int_t^\omega \left[\int_\tau^\omega \left\| A(\sigma) \right\| d\sigma \right] \left(\left\| A(\tau) \right\| + \left\| B(\tau) \right\| \right) \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\| + \\ &+ \left. \left\| \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) \right\| + \left\| F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) - F\left(\tau, \tilde{X}(\tau)\right) \right\| \right] d\tau + \\ &+ \int_0^\omega \left[\left\| B(\tau) \right\| \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\| + \left\| \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) \right\| + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| F(\tau, \tilde{X}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau)) \right\| d\tau \Bigg\} \leq \gamma \left\{ \alpha(\alpha + \beta + 2\delta\rho + L) \int_0^\tau \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\| d\tau + \right. \\
& \quad \left. + \alpha(\alpha + \beta + 2\delta\rho + L) \int_\tau^\omega (\omega - \tau) \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\| d\tau + \right. \\
& \quad \left. + (\beta + 2\delta\rho + L) \int_0^\omega \left\| \tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau) \right\| d\tau \right\} \leq \\
& \leq \gamma \omega \left[\frac{1}{2} \alpha \omega (2\delta\rho + \alpha + \beta + L) + 2\delta\rho + \beta + L \right] \left\| \tilde{X} - \tilde{X} \right\|_{\mathbb{C}} = q \left\| \tilde{X} - \tilde{X} \right\|_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем оценку

$$\left\| \mathcal{L}(\tilde{X}) - \mathcal{L}(X) \right\|_{\mathbb{C}} \leq q \left\| \tilde{X} - X \right\|_{\mathbb{C}}. \quad (14)$$

Из анализа соотношений (13), (14) видно, что неравенства (4), (5) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к (11). На основании этого заключаем, что в шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$ решение уравнения (11) существует и единствено. Таким образом, задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ . При этом на основании (12) справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \varphi(\rho)$. Теорема полностью доказана.

Для построения решения матричного интегрального уравнения (10) воспользуемся классическим методом последовательных приближений [10, с. 605], [11, с. 53]:

$$\begin{aligned}
X_{k+1}(t) = & \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left[\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right] \left[A(\tau) X_k(\tau) + X_k(\tau) B(\tau) + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + F(\tau, X_k(\tau)) \right] d\tau - \int_t^\omega \left[\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right] \left[A(\tau) X_k(\tau) + X_k(\tau) B(\tau) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau)) \right] d\tau - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^\omega \left[X_k(\tau) B(\tau) + X_k(\tau) Q(\tau) X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau)) \right] d\tau \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)
\end{aligned}$$

где $X_0(t)$ – произвольная матричная функция класса $\mathbb{C}[0, \omega]$, принадлежащая множеству D .

Используя условие (4), нетрудно доказать индукцией по k , что все приближенные решения, полученные по алгоритму (15), принадлежат множеству D . Основой доказательства является рекуррентная оценка

$$\|X_{k+1}\|_{\mathbb{C}} \leq \gamma \delta \omega \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \omega \right) \|X_k\|_{\mathbb{C}}^2 + \gamma \omega \left[\beta + L + \frac{1}{2} \alpha \omega (\alpha + \beta + L) \right] \|X_k\|_{\mathbb{C}} +$$

$$+\gamma\omega h\left(1+\frac{1}{2}\alpha\omega\right), \quad k=0,1,2,\dots,$$

которую нетрудно получить по аналогии с (12).

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему [11, с. 54], этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + (X_2(t) - X_1(t)) + \dots + (X_k(t) - X_{k-1}(t)) + \dots \quad (16)$$

Докажем равномерную по $t \in [0, \omega]$ сходимость ряда (16). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на $[0, \omega]$ матричный функциональный ряд (16).

Оценим $\|X_{m+1}(t) - X_m(t)\|$, учитывая, что

$$X_{m+1}(t) - X_m(t) = \mathcal{L}(X_m(t)) - \mathcal{L}(X_{m-1}(t)), \quad m=1,2,\dots \quad (17)$$

Выполнив оценки в (17), получим на основании (14)

$$\|X_{m+1}(t) - X_m(t)\| = \|\mathcal{L}(X_m(t)) - \mathcal{L}(X_{m-1}(t))\| \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}, \quad m=1,2,\dots \quad (18)$$

На основе (18) получим явную оценку

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q^m \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, \quad m=1,2,\dots \quad (19)$$

при этом $\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}} = \|\mathcal{L}(X_0) - X_0\|_{\mathbb{C}}$.

Используя оценку (18), нетрудно доказать с помощью известных приемов [10, с. 605], [11, с. 54], что последовательность $\{X_k(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (10), при этом справедливы оценки

$$\|X - X_k\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{q^k}{1-q} \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, \quad k=0,1,2,\dots, \quad (20)$$

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \|X_0\|_{\mathbb{C}} + \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q}. \quad (21)$$

Замечание. Приближенные решения, построенные по алгоритму (15), вообще говоря, не обязаны удовлетворять краевому условию (2). В связи с этим следует получить соответствующую оценку для $\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\|$, $k=0,1,2,\dots$. На основании (15) имеем

$$\frac{dX_{k+1}(t)}{dt} = A(t)X_k(t) + X_k(t)B(t) + X_k(t)\mathcal{Q}(t)X_k(t) + F(t, X_k(t)). \quad (22)$$

Подставляя (22) в правую часть (15) и выполняя затем интегрирование по частям, получим

$$\tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0) + \int_0^\omega A(\tau) [X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)] d\tau \right\} = 0.$$

Отсюда имеем соотношение

$$\Delta_{k+1} \equiv X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0) = - \int_0^\omega A(\tau) [X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)] d\tau. \quad (23)$$

Выполнив оценки по норме в (23), получим

$$\begin{aligned} \|\Delta_{k+1}\| &\leq \int_0^\omega \|A(\tau)\| [X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)] d\tau \leq \int_0^\omega \|A(\tau)\| \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \alpha \int_0^\omega \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\| d\tau \leq \alpha \omega \|X_{k+1} - X_k\|_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Отсюда на основании (19) имеем оценку

$$\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\| \leq \alpha \omega q^k \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Оценки (20), (21), (24) следует дополнить оценкой для $\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}$. В случае $X_0 = 0$ эту оценку можно получить в конструктивном виде. В самом деле, из (15) при $k = 0$ имеем в этом случае

$$X_1(t) = \int_0^\omega K(t, \tau) F(\tau, 0) d\tau. \quad (25)$$

Выполнив оценки по норме в (25), получим

$$\|X_1(t)\| \leq \int_0^\omega \|K(t, \tau) F(\tau, 0)\| d\tau \leq h \int_0^\omega \|K(t, \tau)\| d\tau \leq \frac{1}{2} \gamma \alpha \omega^2 h. \quad (26)$$

Используя (26), получим из (21)

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{\gamma \alpha \omega^2 h}{2(1-q)}. \quad (27)$$

Очевидно, оценка (27) будет эффективной, если

$$\frac{\gamma \alpha \omega^2 h}{2(1-q)} \leq \rho.$$

Легко видеть, что это соотношение выполняется при достаточно малых значениях ω, h .

Итак, доказана

Теорема 2. Пусть выполняются условия (3)–(5). Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственno. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением (15).

Заключение

Основные результаты данной работы заключаются в следующем:

- в невырожденном случае с левосторонней регуляризацией разработана конструктивная методика получения эквивалентного интегрального уравнения для периодической краевой задачи уравнения Ляпунова - Риккати;
- получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости указанного уравнения;
- исследован алгоритм построения приближенных решений с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений;
- выведены конструктивные оценки области локализации решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Murty, K.N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – V. 167. – P. 505–515.
2. *Лаптінський, В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптінський. – Мінск : ІМ НАН Беларусі, 1998. – 300 с.
3. *Laptinsky, V.N.* On the Two-Point Boundary-Value Problem for the Riccati Matrix Differential Equations / V.N. Laptinsky, I.I. Makovetsky // Central European Science Journal. – 2005. – V. 3(1). – P. 143–154.
4. *Лаптінський, В.Н.* К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптінський, І.І. Маковецький // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 7. – С. 994–996.
5. *Лаптінський, В.Н.* О разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптінський, І.І. Маковецький // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 218–223.
6. *Лаптінський, В.Н.* О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений / В.Н. Лаптінський // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 14–18.
7. *Лаптінський, В.Н.* Конструктивный анализ периодической краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптінський. – Могилев : Белорусско-Российский университет, 2007. – 26 с. – (Препринт / ІТМ НАН Беларусі; № 7).
8. *Подолян, С.В.* Периодические решения нелинейных матричных дифференциальных уравнений / С.В. Подолян // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1988. – № 6. – С. 31–34.
9. *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
10. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
11. *Бібиков, Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бібиков. – М. : Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 04.10.2011 г.

УДК 517.925.42

І.Н. СИДОРЕНКО

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ
“НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА”
УКОРОЧЕННОЙ СИСТЕМЫ КУКЛЕСА
С СИММЕТРИЕЙ**

В настоящей работе предложены методы построения укороченной системы Куклеса с симметрией и различными распределениями предельных циклов “нормального размера” (т.е. циклами, которые могут быть построены численными методами). Рассматриваются системы Куклеса, которые имеют в конечной части плоскости специальные конфигурации особых точек. Построены конкретные примеры рассматриваемых систем Куклеса. Для доказательства точности полученных распределений используются функции Дюлака – Черкаса.

1. Введение

В работе [1] рассматривалась система Куклеса

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + a_8y + a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x^3 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7y^3, \quad (1)$$

где $a = (a_1, \dots, a_8) \in \mathbb{R}^8$. Там же дан обзор основных результатов известных по системе (1). Сформулируем некоторые из них. Впервые проблема различия центра и фокуса для особой точки $O(0, 0)$ системы (1) была рассмотрена И.С. Куклесом в 1944 [2], где были получены практически все условия центра для системы (1). В работе [3] без вычисления фокусных величин были найдены достаточные условия центра, которые, как выяснилось позже, оказались и необходимыми [4]. Проблема центра и фокуса для случая $a_7 = 0$ была решена в работах [5, 6], причем в работе [6] доказано, что в этом случае существуют системы (1) с $a_7 = 0$, имеющие пять предельных циклов. Случай, когда $a_2 = 0$ рассматривался в работах [7, 8], где проблема центра фокуса решалась путем анализа фокусных величин и было также доказано существование системы (1) с шестью предельными циклами. Для общего случая $a_2a_7 \neq 0$ проблема центра и фокуса решена в [9, 10]. Найденные там условия центра требуют вычисления пяти фокусных величин, однако, система (1) в этом случае может иметь негрубый фокус $O(0,0)$ седьмого порядка, и это – максимальный порядок негрубости. Таких систем всего семь, и все они выписаны в [10]. В [11] найдены необходимые и достаточные условия существования у систем (1) двух центров. В [1] предложены методы построения систем Куклеса с различными распределениями предельных циклов “нормального размера” [12] (т.е. предельными циклами, которые могут быть построены численными методами). При помощи этих методов построены системы Куклеса со следующими распределениями предельных циклов: ((0,7),0), ((0,6),0), ((1,5),0),

$((1,4),1)$, $((2,2),1)$, $((0,1),3)$. Здесь, например, распределение $((0,1),3)$ означает, что вокруг левого антиседла предельных циклов нет, вокруг правого – не менее одного предельного цикла, и не менее трех предельных циклов, окружающих группу особых точек. Для расширенной системы Куклеса (в которой первое уравнение системы (1) заменяется уравнением $\frac{dx}{dt} = y(1 + Dx + Px^2)$, $P, D \in \mathbb{R}$) с одним фокусом кратности восемь и другим негрубым фокусом удалось построить систему, имеющую восемь предельных циклов вокруг одного фокуса, при этом второй фокус остается негрубым.

В настоящей работе рассматриваются укороченные системы Куклеса

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1+x^2) + (V_0 + Wx^2)y + Ry^3, \quad (2)$$

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1-x^2) + (V_0 + Wx^2)y + Ry^3, \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1-x^2) + (V_0 + Wx^2)y + Ry^3, \quad (4)$$

где V_0, W, R – действительные числа. Системы (2-4) имеют векторные поля симметричные относительно начала координат. Целью данной работы является построение всевозможных распределений предельных циклов у рассматриваемых систем, а также доказательства точности полученных результатов при помощи построения функции Дюлака – Черкаса.

Сформулируем некоторые предварительные результаты, которые понадобятся в дальнейшем.

2. Предварительные результаты

2.1 Метод построения систем с максимальным числом предельных циклов нормального размера с помощью возмущения кратного фокуса [1]

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, a), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, a), \quad (5)$$

где P, Q – полиномы от переменных x, y, a – вектор их коэффициентов. Пусть при $a = a_0$ система (5) имеет негрубый фокус $O(0,0)$ кратности k . Тогда можно определить функцию последования $\Delta(x_0, a) = x(T, x_0, a) - x_0$, где $x(t), y(t)$ – решение системы (5), $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, T – период обхода дуги соответствующей траектории вокруг особой точки $O(0,0)$. Выберем на промежутке $I = [p, q], p > 0$ точки x_1, \dots, x_k+1 и рассмотрим функцию последования $\Delta(x_i, a_0 + \Delta a)$, $x \in I$, Δa некоторое возмущение системы (5). Разложим функцию последования в ряд Тейлора в окрестности точки a^0 ,

учитывая, что $\Delta(x_i, a^0) \neq 0$, т.к. траектории в окрестности a^0 являются спиральными. Тогда

$$\Delta(x_i, a^0 + \Delta a) = \Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j + o(\Delta a),$$

где $tp(i, j) = \frac{\partial \Delta(x_i, a^0)}{\partial a_j}$ находятся численно. Как известно [14], вопрос о

числе предельных циклов у системы (5) эквивалентен вопросу о числе достаточно малых действительных корней функции последования. Поэтому потребуем, чтобы в точке x_1 функция последования была отрицательна (положительна), если фокус устойчивый (неустойчивый), в точке x_2 положительна (отрицательна) и т.д. При этом Δ должны быть достаточно малыми, чтобы $o(\Delta a)$ в разложении Тейлора не влияло на знак функции последования. Все перечисленные условия соответствуют задаче линейного программирования

$$L \rightarrow \min, \pm (-1)^i \left(\Delta(x_i, a^0) + \sum_{j=1}^n tp(i, j) \Delta a_j \right) \geq 0, i = \overline{1, k+1}, |\Delta a_j| \leq L. \quad (6)$$

В неравенствах (6) выбираем знак “плюс”, если фокус неустойчивый, и знак “минус” – в противном случае. Если задача (6) имеет решение $\Delta a = \Delta a^*$, $L = L^*$, то проверяем неравенства $(-1)^i \Delta(x_i, \Delta a^*) > 0$, $i = \overline{1, k+1}$, если они выполняются, то система (5) имеет, по крайней мере, k предельных циклов. Если же неравенства не выполняются и $\Delta a^* > 1$ и при последующих итерациях увеличивается, то это означает, что метод расходится. Если неравенства не выполняются и $\Delta a^* < 1$, то систему можно “улучшить”, взяв вместо точки a_0 точку $a_0 + \Delta a^*$ сделав, таким образом, процесс “улучшения” итерационным. Здесь важно следить за тем, чтобы, улучшая систему, мы не пришли к системе с центром. На каждом шаге итерации знак функции $\Delta(x, a^0 + \Delta a^*)$ должен проверяться на более мелкой сетке узлов.

Замечание 1. С помощью описанного метода можно также “передвинуть” или “раздвинуть” предельные циклы, полученные другими методами.

2.2 Построение функции Дюлака – Черкаса.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (7)$$

где $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Определение. Функция $\Psi(x, y)$ называется функцией Дюлака – Черкаса для системы (7) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, если существует такое $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, что справедливо неравенство

$$\Phi = k\Psi \operatorname{div}(f) + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0 (< 0), \forall (x, y) \in \Omega.$$

где $f = (P, Q)$.

Замечание 2. Если функция $\Psi(x, y)$ является функцией Дюлака – Черкаса, то функция $B(x, y) = |\Psi(x, y)|^{\frac{1}{k}}$ является функцией Дюлака в классическом смысле в каждой из областей $\Psi > 0$, $\Psi < 0$.

В работе [15] Л.А. Черкасом получено обобщение критерия Дюлака для односвязной области.

Теорема 1. [15] Пусть в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ система (7) имеет единственную особую точку – антиседло A , $\operatorname{div} f(A) \neq 0$, $f = (P, Q)$. Пусть также функция $\Psi(x, y) \in C^1(\Omega)$ при некотором значении $k \in \mathbb{R}$, $k < 0$, удовлетворяет условию

$$\Phi = k\Psi \operatorname{div} f + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0,$$

при этом уравнение $\Psi(x, y) = 0$ определяет гнездо из q вложенных друг в друга овалов. Тогда в каждой $q-1$ из двусвязных областей, ограниченных соседними овалами, система (1) имеет точно один предельный цикл, а в целом в области Ω она имеет не более q предельных циклов.

Для точной оценки числа предельных циклов конкретной системы Куклеса будем использовать следующую теорему, основанную на редукции к задаче линейного программирования.

Теорема 2 [16]. Полином $\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(x) y^{n-i}$, $n \in \mathbb{N}$, является функцией Дюлака – Черкаса для системы (1) в полосе $\Omega_x = \{(x, y) : x \in [x_1, x_{N_0}], y \in \mathbb{R}\}$, если имеет место условие

$$\Phi(x, y) = \Phi_{n+1}(x) y^{n+1} + \Phi_n(x) y^n + \dots + \Phi_1(x) y + \Phi_0(x) > 0, \quad (8)$$

для выполнения которого существуют конструктивные методы редукции $\Phi(x, y)$:

а) неравенству $\Phi = \Phi_0(x) > 0$, где равенство нулю всех остальных коэффициентов достигается за счет решения системы из n линейных дифференциальных уравнений относительно n функций $\Psi_i(x)$;

б) полиному, у которого при всех нечетных степенях y^p все коэффициенты $\Phi_p(x) = 0$, при четных степенях y^p все $\Phi_p(x) \geq 0$, а $\Phi_0(x) > 0 \quad \forall x \in [x_1, x_{N_0}]$.

Для реализации метода б) применимы следующие алгоритмы:

1) Если $a_7 \neq 0$, то при нечетном (четном) $n+1$ функции $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, $\Psi_4(x)$, ..., $\Psi_{n-2}(x)$ ($\Psi_1(x)$, $\Psi_3(x)$, $\Psi_5(x)$, ..., $\Psi_{n-2}(x)$) выбираются произвольным образом, а функции $\Psi_3(x)$, $\Psi_5(x)$, ..., $\Psi_{n-1}(x)$ ($\Psi_2(x)$, $\Psi_4(x)$, ..., $\Psi_{n-1}(x)$) последовательно алгебраически выражаются через них из условий $\Phi_{n-1} \equiv 0$, ..., $\Phi_3 \equiv 0$ ($\Phi_n \equiv 0$, ..., $\Phi_3 \equiv 0$);

2) При нечетном (четном) $n+1$ произвольными выбираем функции $\Psi_1(x)$, $\Psi_3(x)$, $\Psi_5(x)$, ..., $\Psi_{n-1}(x)$ ($\Psi_2(x)$, $\Psi_4(x)$, ..., $\Psi_{n-1}(x)$), а функции $\Psi_2(x)$, $\Psi_4(x)$, ..., $\Psi_n(x)$ ($\Psi_1(x)$, $\Psi_3(x)$, ..., $\Psi_n(x)$) находятся через них с помощью решения линейных дифференциальных уравнений $\Phi_{n-1} \equiv 0$, ..., $\Phi_1 \equiv 0$;

3) Все функции $\Psi_i(x)$ из Ψ выбираются произвольным образом.

3. Укороченная система Куклеса с одной особой точкой в конечной части плоскости.

Рассмотрим систему (2)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1+x^2) + (V_0 + Wx^2)y + Ry^3.$$

Она имеет единственную особую точку в конечной части плоскости $O(0,0)$, которая является антиседлом. Как показывает проведенный анализ фокусных величин, фокус может быть кратности 2. Построим систему Куклеса (2) с двумя предельными циклами нормального размера.

Для того чтобы система (2) имела двукратный фокус необходимо выполнение условий:

$$V_0 = 0, \quad W = -3R. \quad (8)$$

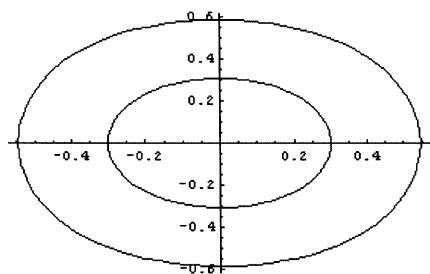


Рис. 1. Предельные циклы системы (2) с коэффициентами из примера 1

-0.010827), имеющую два предельных цикла, которые проходят примерно через точки $(x_i^0, 0)$, $x_i^0 \in \{0.3, 0.5\}$ (рисунок 1).

Замечание 2. Описанным методом также можно возмущать и грубый фокус.

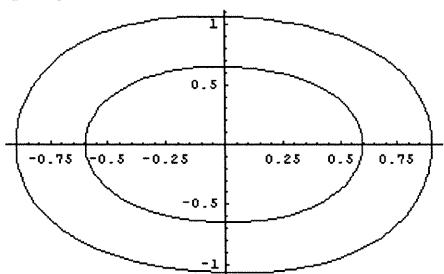


Рис. 2. Предельные циклы системы (2) с коэффициентами из примера 2

систему (2) с $(V_0, W, R) = (-0.0052831876, 0.2243829694, -0.04700867449)$, имеющую два предельных цикла, которые проходят примерно через точки $(x_i^0, 0)$, $x_i^0 \in \{0.5, 0.8\}$ (рисунок 2).

Теорема 3. Система (2) с коэффициентами $V_0 = -0.0052831876$, $W = 0.2243829694$, $R = -0.04700867449$ имеет точно два предельных цикла окружающие $O(0,0)$.

Пример 1. Рассмотрим систему (2) при $V_0 = 0$, $R = -0.07$, $W = 0.21$ и с ее помощью найдем систему Куклеса с двумя предельными циклами, т.е. $k = 2$. Их будем искать на промежутке $[0.3, 0.9]$. Для этого зафиксируем точки $x_i = 0.3 + 0.3(i-1)$, $i = 1, k+1$ и будем возмущать систему (8) методом, представленным в пункте 2.1. После применения метода получим систему (2) с $(V_0, W, R) = (-0.000111, 0.038824,$

Пример 2. Рассмотрим систему (2) при $V_0 = 1$, $R = -2/7$, $W = -12/7$, в этом случае она имеет грубый фокус в начале координат. Найдем с ее помощью систему Куклеса (2) с двумя предельными циклами ($k = 2$). Их будем искать на промежутке $[0.3, 0.9]$. Для этого зафиксируем точки $x_i = 0.3 + 0.3(i-1)$, $i = 1, k+1$ и будем возмущать систему (2) методом, представленным в пункте 2.1. После трех итераций получили

Доказательство: Функцию Дюлака – Черкаса будем искать в виде полинома $\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^n \Psi_i(x) y^{n-i}$ степени $n-1 = 4$ в полосе $I = [-1.2, 1.2]$. По теореме 2 для этого необходимо проверить выполнения условия (8), причем $\Phi(x, y)$ будем искать в виде полинома у которого при всех нечетных степенях y^p все коэффициенты $\Phi_p(x) = 0$, а при четных степенях $y^p - \Phi_p(x) \geq 0$, а $\Phi_0(x) > 0 \quad \forall x \in [x_1, x_{N_0}]$. Зафиксируем $k = -4/3$, и выберем на промежутке I равномерную сетку с $N_0 = 422$ узлами. Так как $n = 5$, то произвольными будем выбирать функции $\Psi_2(x)$, $\Psi_4(x)$, а функции $\Psi_1(x)$, $\Psi_3(x)$, $\Psi_5(x)$ находятся через них с помощью решения линейных дифференциальных уравнений $\Phi_4 \equiv 0$, $\Phi_3 \equiv 0$, $\Phi_2 \equiv 0$, $\Phi_1 \equiv 0$.

В результате получим

$\Psi(0, y) = 0.072164684 - 5.55612 \cdot 10^{-12}y - 1.02817y^2 - 6.29723 \cdot 10^{-10}y^3 + y^4$, которая в $\Omega_x = \{(x, y) : x \in [-1.2, 1.2], y \in \mathbb{R}\}$ определяет два вложенных друг в друга овала (рисунок 3), а следовательно, по теореме 1 система (2) с коэффициентами $V_0 = -0.0052831876$, $W = 0.2243829694$, $R = -0.04700867449$ имеет точно два предельных цикла.

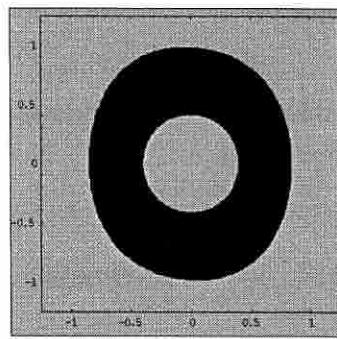


Рис. 3. Овалы кривой $\Psi(x, y)$ для системы (2)

4. Система Куклеса 2S+1A и симметричным векторным полем

Рассмотрим теперь систему (3)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x(1-x^2) + (V_0 + Wx^2)y + Ry^3.$$

Она имеет три конечные особые точки, две из которых седла $A(-1, 0)$ и $E(1, 0)$ и одно антиседло $O(0, 0)$. Как показывает проведенный анализ фокусных величин, фокус может быть кратности 2. Построим систему Куклеса (3) с двумя предельными циклами нормального размера.

Пример 2. Выберем коэффициенты в системе (3) таким образом, чтобы фокус $O(0, 0)$ был двукратным. Для того чтобы первая фокусная величина равнялась нулю, необходимо, чтобы

$$R = -\frac{W}{3(1+V_0^2)}.$$

Зафиксируем $V_0 = 0.1$, $W = 1$ тогда $R = 100/303$, система (3) при таких значениях коэффициентов имеет двукратный фокус. С ее помощью найдем систему Куклеса (3) с $k = 2$ предельными циклами. Их будем искать на промежутке $[0.2, 0.8]$. Для этого зафикси-

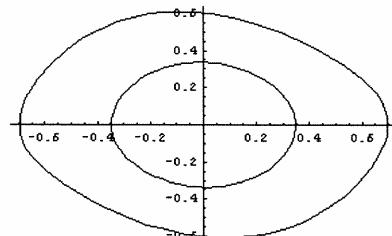


Рис. 4. Предельные циклы системы (3) с коэффициентами из примера 2

руем точки $x_i = 0.2 + 0.1(i - 1)$, $i = \overline{1, k+1}$ и будем возмущать систему (3) методом, представленным в пункте 2.1. После двух итераций получим систему (3) с $(V_0, W, R) = (0.00906191, 0.886197526, -0.422)$, имеющую два предельных цикла, которые проходят примерно через точки $(x_i^0, 0)$, $x_i^0 \in \{0.35, 0.7\}$ (рисунок 4).

Теорема 4. Система (3) с коэффициентами $V_0 = -0.00906191$, $W = 0.886197526$, $R = -0.442$ имеет точно два предельных цикла окружающие $O(0,0)$.

Доказательство: Функцию Дюлака – Черкаса будем искать по алгоритму описанному при доказательстве теоремы 3, при $k = -4/3$, $n = 5$ в полосе $I = [-1.2, 1.2]$.

В результате получим

$\Psi(0, y) = 0.0080281952 - 1.5149*10^{-12}y + 0.354027y^2 - 1.15884*10^{-11}y^3 + y^4$, которая в $\Omega_x = \{(x, y) : x \in [-1.2, 1.2], y \in \mathbb{R}\}$ определяет два вложенных друг в друга овала, а следовательно, по теореме 1 система (3) с коэффициентами $V_0 = -0.00906191$, $W = 0.886197526$, $R = -0.442$ имеет точно два предельных цикла.

Так как система (3) имеет седла $A(-1,0)$ и $E(1,0)$, а функция Дюлака – Черкаса построена в полосе $[-1.2, 1.2]$ и в этой полосе она является положительной, то можно утверждать, что полученная оценка является справедливой во всей плоскости Oxy .

5. Система Куклеса 2A+1S и симметричным векторным полем

Рассмотрим теперь систему (4)

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - x^2) + (V_0 + Wx^2)y + Ry^3.$$

Она имеет три особые точки: седло $O(0,0)$ и два антиседла $A(-1,0)$ и $E(1,0)$. Построим конкретные примеры систем (4) с различными распределениями предельных циклов с помощью описанных выше методов. Очевидно, что система (4) является обобщением кубической системы Льенара с квадратичной функцией трения [17]. При построении конкретных примеров систем (4) можно возмущать систему Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x(1 - x^2) + (V_0 + Wx^2)y. \quad (8)$$

Пример 3. Построим систему Куклеса (4) с максимальным числом предельных циклов, окружающие все особые точки. За первоначальную систему возьмем систему Льенара с симметрией (8) при $V_0 = -1.8$, $W = 1$, имеющей один предельный цикл, окружающий все конечные особые точки. Так как система (4) имеет только три параметра, которые можно изменять, не нарушая структуру системы, то по замечанию 2 k можно выбирать не больше чем 3. Зафиксируем $k = 3$, предельные циклы будем искать вокруг всех трех конечных особых точек на промежутке $[1.45, 2.125]$. Для этого зафиксируем точки $x_i = 1.45 + 0.27(i - 1)$, $i = \overline{1, k+1}$, и выбрав в неравенствах (6) знак “–”, будем возмущать систему (4) мето-

дом, представленным в пункте 2.1. После трех итераций получим систему (4) с $(V_0, W, R) = (0.004889, -0.006887975, -0.0007955364)$, имеющую три предельных цикла, которые проходят примерно через точки $(x_i^0, 0)$, $x_i^0 \in \{1.45, 1.72, 1.98\}$ (рисунок 6).

Аналогичным способом строятся системы (4) с распределениями $((2,2),1)$ и $((1,1),2)$ предельных циклов.

Пример 4. Система (4) при $V_0 = 0.04919$, $W = -0.048732$, $R = 0.023424$, полученная при помощи метода, представленного в 2.1, имеет распределение $((2,2),1)$ предельных циклов (рисунок 7). В качестве первоначальной системы здесь также взята система Лъенара (8) при $V_0 = 1$, $W = -1.13$ с распределением $((1,1),1)$ предельных циклов, а метод применяется только для особой точки $E(1,0)$, а за счет симметричности векторного поля число предельных циклов вокруг особой точки $A(-1,0)$ будет таким же. Причем, в данном случае возмущения, проводимые над коэффициентами, не оказывают влияния на внешний (окружающий все конечные особые точки) предельный цикл.

Пример 5. Система (4) при $V_0 = -0.00394067$, $W = 0.0048241274$, $R = 0.0004215$ имеет распределение $((1,1),2)$ предельных циклов (рисунок 8). В качестве первоначальной системы здесь также взята система Лъенара (8) при $V_0 = 1$, $W = -1.13$ с распределением $((1,1),1)$ предельных циклов, а метод применяется для группы особых точек $(A(-1,0), O(0,0), E(1,0))$, причем возмущения не влияют на предельные циклы, окружающие каждый из фокусов.

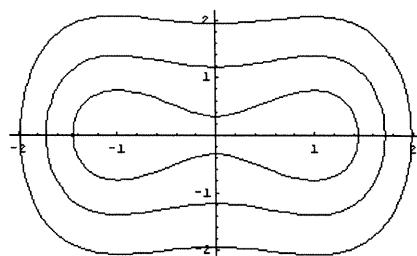


Рис. 6. Предельные циклы системы (4) с коэффициентами из примера 3

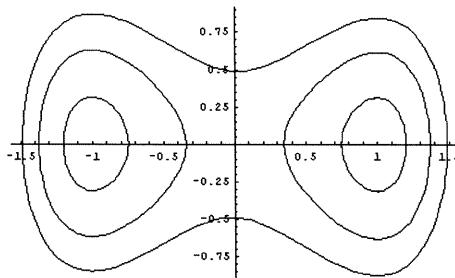


Рис. 7. Пять предельных циклов системы Куклеса в распределении $((2,2),1)$

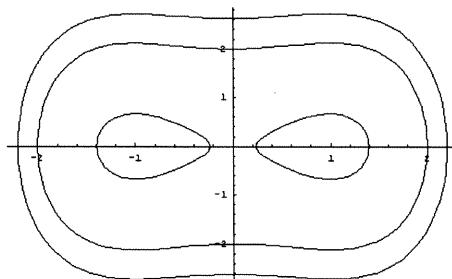


Рис. 8. Фазовый портрет системы Куклеса (4) с распределением $((1,1),2)$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сидоренко, И.Н. Системы Куклеса с максимальным числом предельных циклов нормального размера / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Весн. Грод. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка. Вылічальная тэхніка і ўпраўленне. Біялогія. – № 3. –

2. **Черкас, Л.А.** Условия центра для уравнения / Л.А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14. – № 9. – С. 1594–1600.
3. **Садовский, А.П.** Условия центра для кубической системы нелинейных колебаний/ А.П. Садовский // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 15. – № 10. – С. 1716–1719.
4. **Куклес, И.С.** О некоторых случаях отличия фокуса от центра/ И.С. Куклес // Докл. Академии Наук СССР. – 1944. – Т. 42. – № 5. – С. 208–211.
5. **Jin, X.** On the conditions of Kukles for the existence of a Centre / X. Jin, D. Wang // Bull. London Math. Soc. – 1990. – Vol. 22. – No 1. – Pp. 1–4.
6. **Christopher, C.J.** On the paper of Jin and Wang concerning for a centre in certain cubic systems / C.J. Christopher, N.G. Lloyd // Bull. London Math. Soc. – 1990. – Vol. 22. – No 1. – Pp. 5–12.
7. **Lloyd, N.G.** Limit cycles and centres: an example / N.G. Lloyd, J.M. Pearson // Lecture Notes in Math. Bifurcations of Planar Vector Fields, New York. – 1990. – Vol. 1455. – Pp. 230–242.
8. **Садовский, А.П.** О предельных циклах кубической системы нелинейных колебаний / А.П. Садовский // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 2. – С. 323–326.
9. **Садовский, А.П.** Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний / А.П. Садовский // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 2. – С. 236–244.
10. **Садовский, А.П.** Кубическая система нелинейных колебаний с семью предельными циклами / А.П. Садовский // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 4. – С. 472–481.
11. **Chen, L.** A class of cubic systems with two center or two foci / L. Chen, Z. Lu, D. Wang // J. of Math. Analysis and Applic. – 2000. – Vol. 242. – Pp. 154–163.
12. **Perko, L.M.** Limit cycles of quadratic systems in the plane / L.M. Perko // Rocky Mountain of Mathematics. – 1984. – Vol. 14. – Pp. 619–644.
13. **Сидоренко, И.Н.** Системы Куклеса с максимальным числом предельных циклов нормального размера / И.Н. Сидоренко // Дифференциальные уравнения и топология : материалы Междунар. науч. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, Москва, 17–22 июня 2008 г. / Мат. Инст. им. В.А. Стеклова, МГУ им. М.В. Ломоносова ; редкол.: Д.В. Аносов [и др.]. – М., 2008. – С. 193–194.
14. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др.]. – М. : Наука, 1967. – 488 с.
15. **Черкас, Л.А.** Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л.А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 5. – С. 689–699.
16. **Гринь, А.А.** Функция Дюлака-Черкаса в виде полинома для обобщенной системы Куклеса / А.А. Гринь // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений, Минск, 14–19 сентябрь 2009 г. / ИМ НАНБ ; редкол.: А.А. Килбас [и др.]. – Минск, 2009. – С. 49–50.
17. **Сидоренко, И.Н.** Предельные циклы кубической системы Льенара с квадратичной функцией трения / И.Н. Сидоренко, Л.А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44. – № 2. – С. 217–221.
18. **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1961. – 704 с.
19. **Smale, S.** Mathematical problems for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer. – 1998. – Vol. 20. – No. 2. – Pp. 7–15.

УДК 517+530.1

B.C. НОВАШИНСКАЯ

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ ДЛЯ (2+1)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА – КУЗНЕЦОВА С ДИСПЕРСИОННЫМИ ЧЛЕНАМИ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Известно [1], что вопрос о существовании нетопологических солитонов для (2+1)-мерного уравнения Захарова – Кузнецова представляет значительный интерес для приложений. В работе на основе прямого метода из [2] строятся нетопологические солитоны (2+1)-мерного уравнения Захарова – Кузнецова с дисперсионными членами, содержащими производные пятого порядка. Отметим, что в [3] на основе теории возмущений исследовалось обобщенное уравнение КДФ с производными пятого порядка.

Понятие нетопологического солитона [1, 4, 5, 6] связывается с его поведением на бесконечности и формой его огибающей. Как правило, эта форма представляет собой колоколообразную функцию, которая моделируется выражением [1]

$$u(\xi) = A ch^{-p} \xi, \quad p > 0,$$

где ξ – фазовая переменная, A – амплитуда солитона. В настоящей работе эта формула выведена прямым интегрированием соответствующей краевой задачи.

Рассмотрим (2+1)-мерное уравнение Захарова – Кузнецова пятого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (a_1 u^{2m}) \frac{\partial u}{\partial x} + (a_2 u^{2m}) \frac{\partial u}{\partial y} + a_3 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + a_4 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + a_5 \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + a_6 \frac{\partial^5 u}{\partial y^5} = 0, \quad m > 0 \quad (1)$$

с произвольными действительными коэффициентами. Волновое решение будем строить в виде бегущей волны

$$u(t, x, y) = f(\xi), \quad \xi = kx + ly - \omega t, \quad (2)$$

где k, l, ω – произвольные действительные числа. Подставляя (2) в (1), найдем

$$\begin{aligned} -\omega f'(\xi) + a_1 k f^{2m}(\xi) f'(\xi) + a_2 l f^{2m}(\xi) f'(\xi) - a_3 \omega k^2 f^{(3)}(\xi) + a_4 k l^2 f^{(3)}(\xi) + \\ + a_5 k^5 f^{(5)}(\xi) + a_6 l^5 f^{(5)}(\xi) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} [-\omega f(\xi) + \frac{a_1 k f^{2m+1}(\xi)}{2m+1} + \frac{a_2 l f^{2m+1}(\xi)}{2m+1} - a_3 \omega k^2 f^{(2)}(\xi) + a_4 k l^2 f^{(2)}(\xi) + \\ + a_5 k^5 f^{(4)}(\xi) + a_6 l^5 f^{(4)}(\xi)]' = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее уравнение один раз по ξ и полагая постоянную интегрирования равной нулю, получим

$$-\omega f(\xi) + \frac{(a_1 k + a_2 l)}{2m+1} f^{2m+1}(\xi) + (a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2) f''(\xi) + (a_5 k^5 + a_6 l^5) f'''(\xi) = 0$$

или

$$f'''(\xi) + a f''(\xi) = b f(\xi) + c f^{2m+1}, \quad (3)$$

где

$$a = \frac{a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2}{a_5 k^5 + a_6 l^5}, \quad b = \frac{\omega}{a_5 k^5 + a_6 l^5}, \quad c = -\frac{(a_1 k + a_2 l)}{(2m+1)(a_5 k^5 + a_6 l^5)}.$$

Уравнение (3) – нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Добавим к нему краевые условия

$$f(\pm\infty) = 0, \quad f'(\pm\infty) = 0. \quad (4)$$

Краевая задача (3), (4) определяет существование нетопологического солитона. Для ее решения заметим, что уравнение (3) представляет собой линейную комбинацию второй и четвертой производных, которая должна быть полиномом по f степени не выше $(2m+1)$. Это условие выполняется, если взять вторую производную в виде

$$f''(\xi) = A_1 f(\xi) - A_2 f^{m+1}(\xi), \quad (5)$$

где A_1, A_2 – производные действительные числа.

Действительно, из (5) последовательно найдем

$$f'''(\xi) = A_1 f'(\xi) - (m+1) A_2 f^m(\xi) f'(\xi),$$

$$f''''(\xi) = A_1 f''(\xi) - m(m+1) A_2 f^{m-1}(\xi) [f'(\xi)]^2 - (m+1) A_2 f^m(\xi) f''(\xi).$$

Очевидно, что первое и третье слагаемое в сумме представляют собой полином по f степени не выше $(2m+1)$. Чтобы определить степень второго слагаемого, проинтегрируем один раз уравнение (5). Для этого обозначим $f'(\xi) = z(\xi)$. Тогда

$$f''(\xi) = \frac{dz}{d\xi} = \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\xi} = \frac{dz}{df} z.$$

Следовательно, уравнение (5) запишется в виде

$$\frac{dz}{df} z = A_1 f - A_2 f^{m+1}$$

или

$$z dz = (A_1 f - A_2 f^{m+1}) df. \quad (6)$$

Из (6) с учетом краевых условий (4) найдем

$$\frac{z^2}{2} = A_1 \frac{f^2}{2} - \frac{A_2}{m+2} f^{m+2}$$

или

$$z^2 = [f'(\xi)]^2 = A_1 f^2 - \frac{2A_2}{m+2} f^{m+2}. \quad (7)$$

Таким образом, слагаемое $m(m+1)A_2 f^{m-1}(\xi)[f'(\xi)]^2$ является полиномом степени не выше $(2m+1)$ и вместо уравнения (3) можно исследовать уравнение (5) с краевыми условиями (4).

Из (7) получим

$$\frac{df}{d\xi} = -\sqrt{A_1 f^2 - \frac{2A_2}{m+2} f^{m+2}}, \quad (8)$$

где знак “минус” указывает на убывание решения на бесконечности. Из (8) найдем

$$I \equiv \int \frac{df}{\left[A_1 f^2 - \frac{2A_2}{m+2} f^{m+2} \right]^{\frac{1}{2}}} = -\xi + \xi_0,$$

где ξ_0 – произвольная постоянная. Вычислим интеграл I . Для этого обозначим $f^2 = S$. Тогда $2f ds = ds$. Отсюда найдем

$$\frac{2df}{f} = \frac{ds}{S}.$$

Следовательно,

$$I \equiv \frac{1}{2} \int \frac{ds}{S \left[A_1 - \frac{2A_2}{m+2} S^{\frac{m}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Введем новую переменную $h = S^{\frac{m}{2}}$. Тогда

$$dh = \frac{m}{2} S^{\frac{m-1}{2}} ds$$

или

$$\frac{2dh}{mh} = \frac{ds}{S}.$$

В результате получим

$$I \equiv \frac{1}{m} \int \frac{dh}{h \left[A_1 - \frac{2A_2}{m+2} h \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Сделаем замену переменной h по формуле

$$A_1 - \frac{2A_2}{m+2} h = \theta^2,$$

где θ – новая переменная. Тогда

$$h = \frac{(m+2)}{2A_2} (A_1 - \theta^2)$$

и

$$\frac{dh}{h} = -\frac{2\theta d\theta}{A_1 - \theta^2}.$$

Следовательно, получим

$$\frac{2}{m} \int \frac{d\theta}{A_1 - \theta^2} = \xi - \xi_0. \quad (9)$$

Из (9) найдем, если $A_1 > 0$, что

$$\frac{1}{m\sqrt{A_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{A_1} + \theta}{\sqrt{A_1} - \theta} \right| = \xi - \xi_0. \quad (10)$$

Обозначим

$$\exp \left\{ m\sqrt{A_1} (\xi - \xi_0) \right\} \equiv e.$$

Тогда из (10) получим

$$\theta = \sqrt{A_1} \left(\frac{e-1}{e+1} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h &= \left[\frac{2(m+2)A_1}{A_2} \right] \frac{e}{(e+1)^2} \Rightarrow s = \left[\frac{(m+2)A_1}{2A_2} \frac{1}{ch^2 \left(\frac{1}{2}\eta \right)} \right]^{\frac{2}{m}}, \\ \eta &= m\sqrt{A_1} (\xi - \xi_0) \Rightarrow f(\xi) = \left[\frac{(m+2)A_1}{2A_2} \right]^{\frac{1}{m}} ch^{-\frac{2}{m}} \left\{ \frac{1}{2} m\sqrt{A_1} (\xi - \xi_0) \right\}, \\ &\quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, формула (11) моделирует нетопологический солитон краевой задачи (5), (4). Сформулируем окончательный результат.

Теорема 1. Краевая задача (5), (4) имеет решение вида

$$f(\xi) = \left[\frac{(m+2)A_1}{2A_2} \right]^{\frac{1}{m}} \operatorname{ch}^{-\frac{2}{m}} \left\{ \frac{1}{2} m \sqrt{A_1} (\xi - \xi_0) \right\},$$

если $A_1 > 0$, $A_2 > 0$.

Тем самым получена форма нетопологического солитона, приведенная в работе [1].

Чтобы определить неизвестные коэффициенты A_1 , A_2 через величины a , b , c и найти законы распространения нетопологического солитона, подставим следующий анзац

$$f(\xi) = \Gamma \operatorname{ch}^{\frac{2}{m}} \{ \alpha(\xi - \xi_0) \} \quad (12)$$

в уравнение (3), где $\Gamma > 0$ – амплитуда солитона, α – произвольный параметр. Для этого найдем соответствующие производные:

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= -\mu \Gamma \alpha \operatorname{ch}^{-\mu-1}(\eta) \operatorname{sh}(\eta), \\ f''(\xi) &= \mu(\mu+1) \Gamma \alpha^2 \operatorname{ch}^{-\mu-2}(\eta) \operatorname{sh}^2(\eta) - \mu \Gamma \alpha^2 \operatorname{ch}^{-\mu}(\eta), \\ f'''(\xi) &= -\mu(\mu+1)(\mu+2) \Gamma \alpha^3 \operatorname{ch}^{-\mu-3}(\eta) \operatorname{sh}^3(\eta) + \\ &\quad + [2\mu(\mu+1) \Gamma \alpha^3 + \mu^2 \Gamma \alpha^3] \operatorname{ch}^{-\mu-1}(\eta) \operatorname{sh}(\eta), \\ f''''(\xi) &= \lambda \Gamma \alpha^4 \operatorname{ch}^{-\mu-4}(\eta) \operatorname{sh}^4(\eta) - \lambda_1 \Gamma \alpha^4 \operatorname{ch}^{-\mu-2}(\eta) \operatorname{sh}^2(\eta) + \lambda_2 \Gamma \alpha^4 \operatorname{ch}^{-\mu}(\eta), \quad (13) \\ \mu &= \frac{2}{m}, \quad \eta \equiv \alpha(\xi - \xi_0), \quad \lambda = \mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3), \\ \lambda_1 &= \mu(\mu+1)(6\mu+8), \quad \lambda_2 = 3\mu^2 + 2\mu. \end{aligned}$$

Подставляя (13) в (3), найдем

$$\chi_1 \operatorname{ch}^4(\eta) + \chi_2 \operatorname{ch}^2(\eta) \operatorname{sh}^2(\eta) + \chi_3 \operatorname{sh}^4(\eta) = c \Gamma^{2m}, \quad (14)$$

где

$$\chi_1 \equiv \lambda_2 \alpha^4 - a \mu \alpha^2 - b, \quad \chi_2 \equiv a \mu (\mu+1) \alpha^2 - \lambda_1 \alpha^4, \quad \chi_3 \equiv \lambda \alpha^4.$$

Из уравнения (14), используя линейную независимость функций $e^{4\eta}$, $e^{2\eta}$, e^0 , $e^{-2\eta}$, $e^{-4\eta}$, получим

$$\begin{aligned}
 e^{4\eta} : \quad & \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = 0, \\
 e^{-4\eta} : \quad & \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = 0, \\
 e^{2\eta} : \quad & \chi_1 - \chi_3 = 0, \\
 e^{-2\eta} : \quad & \chi_1 - \chi_3 = 0, \\
 e^0 : \quad & 3\chi_1 - \chi_2 + 3\chi_3 = 8c\Gamma^{2m}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2. Для того чтобы краевая задача (3), (4) имела решение вида (12), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (15).

Из соотношений (15) найдем

$$\chi_1 = \chi_3, \quad \chi_2 = -2\chi_3, \quad \chi_3 = c\Gamma^{2m}. \tag{16}$$

Соотношения (16) можно переписать в виде

$$\lambda_2\alpha^4 - a\mu\alpha^2 - b = \lambda\alpha^4, \quad a\mu(\mu+1) - \lambda_1\alpha^2 = -2\lambda\alpha^2, \quad \lambda\alpha^4 = c\Gamma^{2m}. \tag{17}$$

Они связывают коэффициенты уравнения (3) a, b, c с параметрами α, Γ солитона (12). Из (17) следует, что $c > 0$, и, кроме того,

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 = -\frac{a}{2(\mu^2 + 2\mu + 2)}, \quad \Gamma^m = -\frac{a\sqrt{\lambda}}{2(\mu^2 + 2\mu + 2)\sqrt{c}}, \\
 b = \frac{c}{\lambda}(\lambda_2 - \lambda_1)\Gamma^{2m} + \frac{a^2\mu}{2(\mu^2 + 2\mu + 2)}, \quad a < 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Соотношения (18) являются законами распространения нетопологического солитона (12). Если хотя бы одно из них не выполняется, то распространение солитона (12) невозможно.

Выразим неизвестные коэффициенты A_1, A_2 уравнения (5) через a, b, c . Имеем

$$\chi_3 = c\Gamma^{2m} \Rightarrow \lambda\alpha^4 = c\Gamma^{2m}. \tag{19}$$

Из формулы (11) находим

$$\alpha = \frac{1}{2}m\sqrt{A_1}, \quad \Gamma^m = \frac{(m+2)A_1}{2A_2}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), получим

$$A_2 = \frac{2(m+2)\sqrt{c}}{m^2\sqrt{\lambda}}.$$

Найдем коэффициент A_1 . Из (18) имеем

$$\alpha^2 = \frac{a\mu(\mu+1)}{\lambda_1 - 2\lambda} \Rightarrow \frac{1}{4}m^2 A_1 = \frac{a\mu(\mu+1)}{\lambda_1 - 2\lambda} \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{4a\mu(\mu+1)}{m^2(\lambda_1 - 2\lambda)} = -\frac{2a}{m^2(\mu^2 + 2\mu + 2)}.$$

Таким образом, в работе полностью решен вопрос о законах распространения нетопологических солитонов для уравнения Захарова – Кузнецова пятого порядка.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования нетопологических солитонов систем связанных уравнений КДФ и Захарова – Кузнецова [7, 8].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Biswas, A.** Topological and non-topological solitons for the generalized Zakharov – Kuznetsov modified equal width equation / A. Biswas // Int. J. Theor. Phys. – 2009. – Vol.48. – P. 2698–2703.
2. **Жестков, С.В.** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных : монография / С.В. Жестков. – Могилев : МГУ им. А.А. Кулешова, 2006.
3. **Biswas, A.** Soliton perturbation theory for the generalized fifth-order KdV equation / A. Biswas, E. Zerrad, S. Konar // Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simul. – 2008. – Vol. 13. – N 7. – P. 1281–1286.
4. **Жестков, С.В.** О построении солитоноподобных решений (2+1)-мерного уравнения Захарова – Кузнецова со степенными законами нелинейности / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : мат-лы науч. конф. “Герценовские чтения – 2011”. – LXIV. – СПб., 2011. – С. 54–56.
5. **Жестков, С.В.** Конструктивный анализ топологических и нетопологических солитонов (2+1)-мерных обобщенных уравнений Захарова – Кузнецова / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Веснік МДУ ім Я.А. Куляшова. – Сер.В. – 2011. – № 2(38).
6. **Жестков, С.В.** Об аналитическом моделировании волновых и солитонных решений нелинейных уравнений, связанных с классическим уравнением КДФ / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Веснік МДУ ім Я.А. Куляшова. – Сер.В. – 2010. – № 1(35). – С. 4–12.
7. **Новашинская, В.С.** О построении солитоноподобных решений систем второго порядка связанных нелинейных уравнений КДФ и уравнений мелкой воды / В.С. Новашинская // Научное творчество молодых : сб. статей Междунар. науч.-практич. конф. – Тула : АНО ВПО “ИЭУ”, 2011. – С. 296–303.
8. **Новашинская, В.С.** Об одном подходе к исследованию солитоноподобных решений системы связанных уравнений КДФ / В.С. Новашинская // Оптика неоднородных структур – 2011 : материалы III Междунар. науч.-практич. конф. – Могилев : УО “МГУ им. А.А. Кулешова”, 2011. – С. 248–251.

Поступила в редакцию 28.06.2011 г.

УДК 510.2

В.А. ЕРОВЕНКО, Е.К. ЩЕТНИКОВИЧ

ВЕРОЯТНОСТЬ КОНКУРИРУЮЩИХ ГИПОТЕЗ, ИЛИ “ДОСТОВЕРНОСТЬ СВИДЕТЕЛЬСКИХ ПОКАЗАНИЙ”

Всякий познавательный процесс имеет явные и неявные цели. На первых ступенях юридических знаний правовые предметы ограничиваются в основном формализованными данными о законах, юридических нормах и правовых отношениях, необходимых для практической юриспруденции. Но в теории права более высокого порядка понимание права опирается на весь инструментарий, способный воплотить требования правовой жизни и интеллектуальные достоинства разума в строгих и математически выверенных конструкциях, позволяющих увидеть своеобразную логику права. Даже всеобщая компьютеризация не повлияла на принципы взаимоотношения математики и права, а именно на содержание “математики права” и “математического правоведения”. В работе показано такое взаимодействие на примере приложений формулы Байеса в юриспруденции.

Введение

Благодаря работам швейцарского математика Яакоба Бернулли (1654 – 1705) теория вероятностей приобрела мировоззренческую значимость в практической деятельности. В 1703 г., несмотря на плохое здоровье, он был близок к завершению труда “Искусство предположения”, в котором решил некоторые задачи комбинаторики и доказал так называемую теорему Бернулли, как частный случай закона больших чисел, имеющего важное значение в теории вероятностей и ее приложениях к статистике. Недоставало лишь раздела, в котором он хотел показать применение своей теории к гражданским, моральным и хозяйственным вопросам. Бернулли предполагал, что его теория вероятностей сможет применяться, например, в исследованиях о страховании, о пожизненных рентах и о разделе имущества. Издатели тоже просили его завершить работу согласно первоначальным намерениям автора, имея в виду его диссертацию, в которой он пытался применить “искусство предположений” в вопросах права. Однако после смерти Я. Бернулли не удалось обнаружить даже набросков предполагаемых новых приложений теории вероятностей или продолжения его работы.

В 1708 г. крупный французский математик, серьезно изучавший также философию, Пьер де Монмор (1678 – 1719) анонимно издал трактат “Анализ азартных игр”, в котором, выражаясь философским языком, эксплицировал удовольствие от приложений самих математиков, а не пользу игроков. В предисловии своей книги, отмечая эффективное применение математики к анализу бесконечно малых в естественных науках, он выражал надежду на проникновение математических методов за пределы естествознания, а именно, в политику, право и мораль. Имея в виду

математику и, в частности исчисление вероятностей, Монмор писал: “*Каждой бы славой было для этой науки, если бы она могла служить сверх того, для определения суждений и поведения людей в практической жизни*” [1, с. 39-40]. Это был бурный период развития классической теории вероятностей, в котором сочетались обоснованные применения математических результатов с нелепыми с современной точки зрения попытками их приложения к “моральным” проблемам. Нельзя не отметить, что хотя Я. Бернулли и П. Монмор все же надеялись на применение исчисления вероятностей в политических, правовых и нравственных вопросах, они, тем не менее, не видя методологической возможности математически строго обосновать эти приложения, воздержались от реализации своих многообещающих намерений, имея в виду недостаточный уровень развития самих общественных наук.

Основной целью этой работы является демонстрация некоторых прикладных возможностей теории вероятности в юридической практике. Для понимания математического смысла соответствующих приложений рассмотрим несколько вспомогательных определений. Пусть в начале некоторого испытания у нас имеется n гипотез H_1, H_2, \dots, H_n о природе изучаемого объекта, которым приписаны вероятности $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$. Эти вероятности называются *априорными* (*предшествующими*). Пусть произведен опыт, в результате которого может наступить или не наступить событие A . Если событие A наступает, то мы “переоцениваем нашу веру” в справедливость каждой гипотезы, заменяя вероятности $P(H_i)$ на вероятности $P(H_i/A)$. Эти вероятности называются апостериорными (*последующими*). Понятно, что, вообще говоря, $P(H_i/A) \neq P(H_i)$. Эту процедуру, вообще говоря, можно продолжать до тех пор, пока для некоторого фиксированного индекса, например $i = i_0$, апостериорная вероятность гипотезы H_{i_0} сделается почти равной единице. Только тогда можно будет математически заключить, что гипотеза H_{i_0} на самом деле верна.

Заметим, что юриспруденция первоначально была одной из тех областей, в которых весьма широко использовались вероятностные методы. Так, в работе французского механика и математика Симеона Пуассона (1781 – 1840) “*Исследования о вероятности судебных приговоров по уголовным и гражданским делам*” (1873) рассматривались приложения исчисления вероятностей к установлению достоверности свидетелей, правильности приговоров, выносимых присяжными, и верности решений судов. Однако даже в то время не все математики считали естественным применять теорию вероятностей к законодательству, юриспруденции и политическим наукам. Они не были склонны считать теорию вероятностей областью чистой математики, а рассматривали ее как часть математического естествознания, использующего специфические методы математического анализа. Сейчас, трудно поверить в то, что такого рода вопросы в свое время вызывали серьезные математические дебаты и, например, активно обсуждались в качестве актуальной философско-методологической проблемы “*достоверности свидетельских показаний*”,

которую можно описать с помощью следующего модельного примера, который будет рассмотрен после ознакомления с соответствующим математическим инструментарием теории вероятностей.

Модельный пример “достоверность свидетельских показаний”. Свидетель А сказал, что свидетель В сообщил ему, что свидетель С сказал неправду. Если каждый из этих людей говорит правду с вероятностью p , то какова вероятность того, что свидетель С на самом деле солгал?

Трудность изучения таких задач, сформулированных на естественном языке, связана с тем, что они выглядят очень запутанно и требуют, с точки зрения юристов, излишнего многословия для своего объяснения. Поэтому для их формализации докажем вначале “формулу полной вероятности”, которую можно рассматривать в качестве приложения теоремы умножения вероятностей и теоремы сложения вероятностей, или свойств вероятностей суммы и произведения событий.

Теорема (формула полной вероятности). Пусть пространство элементарных событий Ω представляется в виде суммы $\Omega = H_1 + H_2 + \dots + H_n$ попарно непересекающихся случайных событий H_i , т.е. $H_i H_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и A – любое случайное событие, т.е. $A \subset \Omega$. Тогда для вероятности $P(A)$ случайного события A имеет место равенство

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i),$$

которое называют **формулой полной вероятности**.

Замечание. Условие $H_i H_j = H_i \cap H_j = \emptyset$ при любых $i \neq j$ означает, что события H_i попарно несовместны. Условие $\Omega = H_1 + H_2 + \dots + H_n = \bigcup_{i=1}^n H_i$ говорит о том, что в результате опыта *одно из событий H_i обязательно произойдет*. В таком случае говорят, что набор случайных событий H_1, \dots, H_n образует **полную группу событий**, а так как Ω – достоверное событие, то справедливо равенство $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$.

Доказательство теоремы. Так как $A \subset \Omega$, то $A = A \cap \Omega$. Поскольку $\Omega = \bigcup_{i=1}^n H_i$, то, в силу *дистрибутивного закона*, получим следующее представление для события $A = A \cap \Omega = A \cap (\bigcup_{i=1}^n H_i) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap H_i)$. Нетрудно видеть, что события, объединяемые в правой части последнего равенства, в силу *свойства коммутативности* и *свойства ассоциативности* операции пересечения, а также в силу условия теоремы $H_i \cap H_j = \emptyset$, попарно несовместны, так как $(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = (A \cap A) \cap (H_i \cap H_j) = A \cap \emptyset = \emptyset$, для $i \neq j$. Отсюда, пользуясь *аксиомой аддитивности* (или *теоремой сложения вероятностей*) и *теоремой умножения вероятностей*, из описанного представления для события A , получаем следующее равенство для его вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n P(H_i / A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A / H_i).$$

Теорема доказана.

Методическое замечание. Если событие A может наступить только вместе с одним из событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу несовместных событий, называемых **гипотезами**, то формула полной вероятности читается так: вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез H_i , т.е. $P(H_i)$, на соответствующую условную вероятность события A , т.е. на $P(A / H_i)$.

Математическое замечание. Формула полной вероятности сохраняется, если условие $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$ заменить на включение вида $A \subset \bigcup_{i=1}^n H_i$.

Для решения задач важность понятия “полная группа событий” или “полная группа исходов опыта” состоит в следующем: “в опыте выделяются n событий H_1, H_2, \dots, H_n , таких, что в результате опыта одно из них обязательно происходит и любая их пара – несовместные события” [2, с. 7]. Каждое событие H_i называют также *исходом опыта*.

Пример 1 (Файлы международного права). На рабочем столе компьютера находятся две папки с файлами, содержащими материалы по международному публичному и международному частному праву. В первой папке 16 файлов, причем 4 из них имеют размер менее 500 килобайт. Во второй папке 20 файлов, из них 5 файлов размером менее 500 килобайт. Пользователь наудачу переводит из первой папки во вторую один файл, а затем открывает файл из второй папки. Какова вероятность того, что будет открыт файл размером менее 500 килобайт?

Решение. Рассмотрим следующие гипотезы H_1 и H_2 , а именно следующие предположения о вариантах перевода пользователем файлов из первой папки во вторую:

$H_1 = \{\text{из первой папки во вторую переведен файл размером менее 500 кб}\};$
 $H_2 = \{\text{из первой папки во вторую переведен файл размером не менее 500 кб}\}.$

Эти гипотезы образуют полную группу попарно несовместных событий. Найдем вероятности этих гипотез, истолковывая фразу “наудачу переводит” так, что все элементы $\Omega = H_1 + H_2$ равновозможны, и используя формулу классической вероятности:

$$P(H_1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad P(H_2) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Пусть событие $A = \{\text{файл из второй папки, открытой пользователем, имеет размер менее 500 кб}\}$. Заметим, что событие A произойдет или вместе с событием H_1 , или вместе с событием H_2 .

В случае наступления события H_1 во второй папке будет 21 файл, из них 6 файлов размером менее 500 кб. Поэтому *условная вероятность*

$$P(A / H_1) = \frac{6}{21}.$$

В случае наступления события H_2 во второй папке будет 21 файл, из них 5 файлов размером менее 500 кб. Поэтому условная вероятность

$$P(A/H_2) = \frac{5}{21}.$$

По формуле полной вероятности при $n = 2$ найдем искомую вероятность события A :

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{21} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{21} = \frac{1}{4}.$$

Пример 2 (“Урновая схема” для формулы полной вероятности). В первой урне содержится 7 белых и 3 черных шара, во второй – 8 белых и 4 черных шара, в третьей – 2 белых и 13 черных шаров. Из трех урн наугад выбирается одна урна и из нее наугад извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется белым?

Решение. Рассмотрим гипотезы H_1 , H_2 , H_3 о том, что из данных трех урн выбрана первая, вторая, третья урны соответственно. Эти гипотезы образуют полную группу попарно несовместных событий с вероятностями

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Пусть событие $A = \{\text{из выбранной урны извлечен белый шар}\}$. Учитывая, что условные вероятности равны, соответственно,

$$P(A/H_1) = \frac{7}{10}, \quad P(A/H_2) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \quad P(A/H_3) = \frac{2}{15},$$

По формуле полной вероятности получим:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Как отмечает известный специалист по теории вероятностей, профессор В.Н. Тутубалин: “В общем-то формула полной вероятности не имеет права на существование в курсе теории вероятностей в качестве самостоятельной теоремы. Это связано с тем, что она не только тривиальна с математической точки зрения, но и не дает ничего нового по сравнению с понятием условной вероятности для целей перевода условий задач на язык элементарных событий” [3, с. 154]. С точки зрения методически последовательного изложения курса теории вероятностей, традиционная привязанность к этой формуле вынуждает выделять ей отдельное место в лекциях, хотя иногда вполне достаточно разобрать ее на специальных упражнениях.

Заметим, что в ряде случаев приходится иметь дело с опытами, в которых случайным образом может присутствовать то или иное условие. Представим себе следующую ситуацию. До опыта о его условиях можно

было сделать ряд несовместных гипотез H_1, H_2, \dots, H_n , образующих полную группу событий. Вероятности гипотез до опыта, т.е. *априорные вероятности*, заданы и, соответственно, равны: $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, причем $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$.

Теперь предположим, что произведен опыт, подразумевающий многократное повторение некоторого действия, исход которого – это *событие A*. Спрашивается, как надо пересмотреть вероятности гипотез с учетом этого факта? Другими словами, надо найти *апостериорные вероятности* гипотез при условии, что результатом проведенного опыта явилось событие A , т.е. надо вычислить $P(H_1/A), P(H_2/A), \dots, P(H_n/A)$.

Теорема (формула Байеса). Пусть A – некоторое событие, имеющее положительную вероятность, т.е. $P(A) > 0$, а гипотезы H_1, H_2, \dots, H_n образуют полную группу попарно несовместных событий. Тогда для апостериорной вероятности $P(H_k/A)$ справедлива следующая формула

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)},$$

которая называется *формулой Байеса*.

Замечание. Отметим, что апостериорная вероятность $P(H_k/A)$, вообще говоря, отличается от априорной вероятности $P(H_k)$, в которой не учтен тот факт, что событие A произошло. Таким образом, *формула Байеса* уточняет представление о вероятности любого из событий, составляющих полную группу, с учетом информации об осуществлении некоторого события.

Доказательство теоремы. Вывод формулы Байеса весьма прост. Записывая формулы для вероятности произведения событий, в силу *теоремы умножения вероятностей*, имеем

$$P(AB_k) = P(A \cap H_k) = P(H_k \cap A) = P(H_k)P(A/H_k),$$

$$P(AB_k) = P(A \cap H_k) = P(A)P(H_k/A).$$

Приравняв правые части последних формул, получаем равенство

$$P(H_k)P(A/H_k) = P(A)P(H_k/A),$$

откуда, поделив обе части полученного равенства на $P(A)$, в силу *формулы полной вероятности*, найдем

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Теорема доказана.

Методическое замечание. Поскольку события H_k называют гипотезами, то доказанную формулу Байеса можно назвать также “*формулой вероятности гипотез*” или “*формулой послеопытной переоценки вероят-*

ностей гипотез". Пользуясь формулой Байеса, мы определяем вероятность того, как после опыта реализовалась гипотеза H_k , т.е. в том смысле, что событие A произошло совместно с гипотезой H_k .

Математическое замечание. Формально применение формулы Байеса не вызывает сомнения, поскольку трудности начинаются только при попытке ее *практической реализации*, т.к. при отсутствии наблюдений, вообще говоря, нельзя определить условные вероятности $P(A/H)$. Кроме того, гипотезы H_1, H_2, \dots, H_n должны быть такими, чтобы условные вероятности имели смысл, т.е. чтобы для них наблюдалась статистическая устойчивость. Именно это обстоятельство ограничивает область применения формулы Байеса.

Байесовский анализ, позволяющий оценить вероятность событий эмпирическим путем, точнее вероятности конкурирующих гипотез, если известны результаты их проверок, впервые появился в очерке английского священника и математика Томаса Байеса (1702 – 1761), опубликованном в “*Философских трудах*” в 1763 г. Хотя формула Байеса и не содержалась в его работах, она была названа так из-за ее сходства с одним из *правил Байеса*. Ее методологическая суть состоит в том, что по *формуле Байеса* можно более точно пересчитывать вероятность, беря в расчет как ранее известную информацию, так и данные новых наблюдений. Применение правила Байеса, впрочем, как и всей теории вероятностей, обусловлено гносеологической неопределенностью, поскольку использование в нем априорных вероятностей связано с философским принципом недостаточного основания.

Пример 3 (Детектор лжи). При контроле правдивости показаний подозреваемого на “детекторе лжи” вероятность признать ложью ответ, не соответствующий действительности, равна 0,99, а вероятность ошибочно признать ложью правдивый ответ равна 0,01. Статистика показывает, что ответы, не соответствующие действительности, составляют 1% всех ответов подозреваемого. Какова вероятность того, что ответ, признанный ложью, и в самом деле не соответствует действительности?

Решение. Рассмотрим следующие гипотезы:

$H_1 = \{\text{ответ подозреваемого не соответствует действительности}\}$;

$H_2 = \{\text{ответ подозреваемого соответствует действительности}\}$.

Эти гипотезы образуют полную группу попарно независимых событий. Так как ответы, не соответствующие действительности, составляют 1% всех ответов подозреваемого, то априорные вероятности гипотез H_1 и H_2 равны: $P(H_1) = 0,01$, $P(H_2) = 1 - P(H_1) = 1 - 0,01 = 0,99$.

Пусть событие $A = \{\text{ответ подозреваемого признан ложью}\}$. По условию задачи вероятность события A , которое произойдет или вместе с событием H_1 , или вместе с событием H_2 , соответственно, равна $P(A/H_1) = 0,99$ и $P(A/H_2) = 0,01$. Тогда по формуле Байеса искомая апостериорная вероятность $P(H_1/A)$ равна

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} = \frac{0,01 \cdot 0,99}{0,01 \cdot 0,99 + 0,99 \cdot 0,01} = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что простейший тест на “чтение мыслей” – это определение, желательное правильное, лжет испытуемый человек или говорит правду. Согласно легенде, первый в мире детектор лжи “волшебный ослик” придумал несколько веков назад один индийский жрец. Подозреваемого человека запирали в комнате с осликом. Предполагаемый преступник должен был потянуть рукой за хвост ослика. Предполагалось, что если ослик молчит, то человек говорит правду. Затем жрец незаметно осматривал руки подозреваемого. Если руки оказывались чистыми, то это означало, что человек лжет, так как втайне от всех хвост ослика натирали сажей. Известно, что иногда угроза применения детектора лжи бывает более эффективной, чем сам детектор. Как отмечает один из авторов теории струн, американский физик японского происхождения Митио Кацу, со временем стало ясно, что детектор лжи можно обмануть, “в частности, это без труда делают социопаты – ведь они не раскаиваются в своих действиях и не чувствуют за собой вины” [4, с. 121]. А в 2003 г. Национальная академия наук США опубликовала доклад по вопросу о надежности и достоверности детекторов лжи. В этом докладе содержится длинный список методов обмана детектора лжи, а также ситуаций, при которых невиновный человек может выглядеть лжецом.

Пример 4 (“Урновая схема” для формулы Байеса). В первой урне содержится 7 белых и 3 черных шара, во второй – 8 белых и 4 черных шара, в третьей – 2 белых и 13 черных шаров. Из этих трех урн наугад выбирается одна урна и из нее наугад извлекается один шар. Он оказался белым. Этот шар возвращается в урну, из которой он был извлечен, а затем наугад извлекается из нее еще один шар. Какова вероятность того, что и он окажется белым?

Решение. Заметим, что исходные данные этой задачи совпадают с условием примера 2. Рассмотрим гипотезы H_1 , H_2 , H_3 о том, что из данных трех урн выбрана первая, вторая, третья урны соответственно. Суть “байесовского подхода” к решению такого рода задач состоит в том, что в отличие от предыдущего примера 2 вместо априорных вероятностей этих гипотез $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$ в этом примере должны использоваться апостериорные вероятности $P(H_1 / A)$, $P(H_2 / A)$, $P(H_3 / A)$, где событие $A = \{\text{из выбранной урны извлечен белый шар}\}$. Используя вычисления из примера 2, найдем их по формуле Байеса

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k)P(A / H_k)}{P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + P(H_3)P(A / H_3)}, \text{ где } k = 1, 2, 3.$$

Соответственно, имеем

$$P(H_1 / A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15}} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 3}{1 \cdot 7 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 10 + 1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15},$$

$$P(H_2 / A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 10}{1 \cdot 7 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 10 + 1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9},$$

$$P(H_3 / A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 7 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 10 + 1 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{4}{45}.$$

Отметим, что $P(H_1 / A) + P(H_2 / A) + P(H_3 / A) = \frac{7}{15} + \frac{4}{9} + \frac{4}{45} = 1$. Пусть событие $B = \{\text{из выбранной урны, после возвращения шара, извлечен белый шар}\}$. Заметим, что в силу условий этого примера $P(B/(H_k / A)) = P(A/H_k)$, $k = 1, 2, 3$. Поэтому, используя вычисления из предыдущего примера 2, имеем, что $P(B/(H_1 / A)) = \frac{7}{10}$, $P(B/(H_2 / A)) = \frac{2}{3}$, $P(B/(H_3 / A)) = \frac{2}{15}$.

Следовательно, по *формуле полной вероятности*, с учетом найденных априорных вероятностей гипотез $P(B/(H_1 / A)) = \frac{7}{10}$, $P(H_2 / A) = \frac{4}{9}$, $P(H_3 / A) = \frac{4}{45}$, искомая *условная вероятность* $P(B/A)$ равна

$$\begin{aligned} P(B/A) &= P(H_1 / A)P(B/(H_1 / A)) + P(H_2 / A)P(B/(H_2 / A)) + \\ &+ P(H_3 / A)P(B/(H_3 / A)) = \frac{7}{15} \cdot \frac{7}{10} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{45} \cdot \frac{2}{15} = \frac{857}{1350}. \end{aligned}$$

Замечание. Предыдущий пример можно решить без применения *формулы Байеса*. Для этого в примере 4 достаточно дважды воспользоваться формулой полной вероятности для вычисления $P(A)$ и $P(AB)$:

$$\begin{aligned} P(B/A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(H_1)P(AB/H_1) + P(H_2)P(AB/H_2) + P(H_3)P(AB/H_3)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)} = \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^2}{\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15}} = \frac{857}{1350}. \end{aligned}$$

Можно сравнить полученное значение условной вероятности $P(B/A)$ с ответом предыдущего примера.

Мы можем, наконец, рассмотреть решение модельного примера, сформулированного в начале этой статьи, используя формулу Байеса.

Пример 5 (Достоверность свидетельских показаний). Свидетель А сказал, что свидетель В сообщил ему, что свидетель С сказал неправду. Если каждый из этих людей говорит правду с вероятностью p , то какова вероятность того, что свидетель С на самом деле солгал?

Решение. Решение примера будет выглядеть более понятным, если его переформулировать в терминах следующей модели. Например, пусть свидетель С передает “–” или “+” в соответствии с тем, лжет он или говорит правду, затем свидетель В передает сообщение от свидетеля С верно (т.е. “+”) или неверно (т.е. “–”), соответственно, если он лжет или говорит правду. Затем свидетель А передает сообщение от свидетеля В аналогичным образом. Понятно, что теоретически при такой передаче возможно восемь случаев – это число комбинаций из трех элементов, составленных из символов “+” или “–”. Заметим, что при такой интерпретации этого примера не возникает “смыслового тупика”, даже если обобщить пример на любое количество свидетелей.

Рассмотрим следующие гипотезы:

$$H_1 = \{\text{свидетель С солгал, т.е. отправлен “–”}\};$$

$$H_2 = \{\text{свидетель С сказал правду, т.е. отправлен “+”}\}.$$

Эти гипотезы образуют полную группу независимых событий, причем априорные вероятности равны: $P(H_1) = 1 - p$, $P(H_2) = p$.

Пусть событие $A = \{\text{свидетель А через свидетеля В узнал, что свидетель С солгал, т.е. получен “–”}\}$. Поскольку достаточно рассмотреть только те цепочки символов из “+” и “–”, в конце которых получен “–”, то число вариантов таких цепочек сократится до четырех случаев.

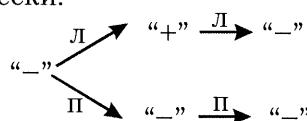
В такой интерпретации вопрос теперь звучит так: *Если в конце цепочки символов получен “–”, то какова вероятность того, что символ “–” был отправлен первоначально?*

Таким образом, надо найти апостериорную вероятность $P(H_1 / A)$. По формуле Байеса искомая вероятность равна

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2)},$$

где по формуле полной вероятности $P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2)$.

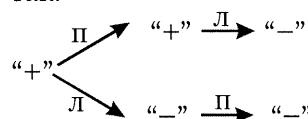
Найдем условную вероятность $P(A / H_1)$, т.е. вероятность того, что отправлен “–” и получен “–”. Рассмотрим эту ситуацию, состоящую из двух случаев, графически:



В этой схеме либо свидетели В и А оба солгали, либо оба сказали правду, тогда по теореме умножения вероятностей независимых событий и по теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем

$$P(A/H_1) = (1-p)(1-p) + p \cdot p.$$

Найдем условную вероятность $P(A/H_2)$, т.е. вероятность того, что отправлен “+” и получен “-”. Графически эту ситуацию можно аналогичным образом описать так:



В этой схеме либо свидетель В сказал правду, а свидетель А солгал, либо свидетель В солгал, а свидетель А сказал правду, тогда

$$P(A/H_2) = p(1-p) + (1-p)p.$$

Таким образом, по формуле полной вероятности для $P(A)$ имеем

$$P(A) = (1-p)[(1-p)^2 + p^2] + p[2p(1-p)] = (1-p)[(1-p)^2 + 3p^2],$$

и, соответственно, искомая вероятность равна

$$P(H_1/A) = \frac{(1-p)[(1-p)^2 + p^2]}{(1-p)[(1-p)^2 + 3p^2]} = \frac{(1-p)^2 + p^2}{(1-p)^2 + 3p^2}.$$

Необходимо отметить, что теория вероятностей в значительной степени сформировалась в работах французского математика и механика Пьера Лапласа (1749 – 1827), который также дал современную формулировку теоремы Байеса, относящейся к “вероятности причин”. Ведущим мотивом философско-методологических воззрений Лапласа было его убеждение в том, что подавляющее большинство наших знаний о реальности носит вероятностный характер. Об этом он говорит в самом начале своей работы “*Опыт философии теории вероятностей*”, помещенной в качестве введения к его фундаментальному труду “*Аналитическая теория вероятностей*” (1812), который трижды издавался при его жизни. В частности, Лаплас отмечал: “*Мы только что убедились в выгоде, предоставленной анализом вероятностей при изыскании законов естественных явлений, причины которых неизвестны или же слишком сложны для того, чтобы действия их могли быть подчинены вычислению. То же самое относится почти ко всем объектам нравственных наук*” [5, с. 211–212]. Он был крайне оптимистично настроен по отношению к перспективам приложений теории вероятностей в области теории ошибок и других естественнонаучных проблем, а также по поводу возможности приложений теории вероятностей в области общественных наук.

В заключение можно сказать, что по формуле Байеса можно более точно пересчитывать вероятность, принимая в расчет как ранее известную информацию, так и данные новых наблюдений, но при реализации этого плана возникают вполне естественные трудности. Хотя эффективные методы вероятностных оценок интенсивно применялись и ранее, особенно в экспертных и криptoаналитических системах, по-настоящему

широкая популярность или “мода на Байеса” пришла в 1990-е гг. В основном благодаря тому, что главная особенность теоремы Байеса состоит в том, что для ее практического применения обычно требуется огромное количество вычислений или пересчетов, поэтому расцвет методов байесовских оценок пришелся на современную эпоху компьютерных информационных технологий. Но прямое применение формулы Байеса не всегда возможно, да и задача машинной обработки иногда требует далеко не тривиальных усилий, если, конечно, стремиться к получению заслуживающих доверия результатов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Григорян, А.А. Закономерности и парадоксы развития теории вероятностей: философско-методологический анализ / А.А. Григорян. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 120 с.
2. Иващев-Мусатов, О.С. Начала теории вероятностей для школьников / О.С. Иващев-Мусатов. – М. : ИЛЕКСА, 2009. – 64 с.
3. Тутубалин, В.Н. Теория вероятностей: краткий курс и научно-методические замечания / В.Н. Тутубалин. – М. : МГУ, 1972. – 230 с.
4. Каку, М. Физика невозможного / М. Каку. – М. : Альпина нон-фикшен, 2009. – 456 с.
5. Григорян, А.А. Философские проблемы теории вероятностей / А.А. Григорян // Философия математики и технических наук. – М. : Академический Проект, 2006. – С. 165-272.

Поступила в редакцию 07.06.2011 г.

УДК 511.36

О.С. КУКСО, Н.В. САКОВИЧ, Н.В. ШАМУКОВА

ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ВЕКТОРОВ ЗНАЧЕНИЯМИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В НЕМОНОТОННОМ СЛУЧАЕ

Получено обобщение известной теоремы В.Г. Спринджука о приближении нуля значениями целочисленных многочленов. Доказано, что аналогичный результат справедлив для приближения любого действительного числа при немонотонной правой части.

Обозначим через $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ высоту целочисленного многочлена

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Классической задачей метрической теории трансцендентных чисел является задача о нахождении теоретико-множественных характеристик множества решений неравенства

$$|P(x)| < \Psi(H). \quad (1)$$

В (1) функция $\Psi(H)$ задана на \mathbb{R}^+ , x принадлежит некоторому интервалу $I = [a, b]$. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство (1) имеет бесконечно много решений в $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, а через μA меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$. Оказывается [1], что $\mathcal{L}_n(\Psi) = I$ для $\Psi(x) = x^{-n}$, $\mu\mathcal{L}_n(\Psi) = 0$ при $\Psi(x) = x^{-n-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. В работах В.И. Берника и В.В. Бересневича был получен полный аналог теоремы Хинчина о приближении действительных чисел рациональными. Было доказано, что для монотонно убывающей функции $\Psi(H)$

$$\mu\mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) H^{n-1} < \infty, \\ \mu I, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) H^{n-1} = \infty. \end{cases}$$

В работе [2] решена неоднородная задача: доказано, что при $\forall d \in \mathbb{R}$ и $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) H^{n-1} < \infty$ неравенство

$$|P(x) + d| < \Psi(H) \quad (2)$$

имеет бесконечное число решений только на множестве нулевой меры. Далее $\bar{d} = (d_1, \dots, d_k) \in \mathbb{R}^k$. Вопрос о разрешимости неравенства (1) для немонотонной функции $\Psi(H)$ долгое время оставался открытым. В 2005 г. В.В. Бересневич доказал аналог теоремы Хинчина в случае сходимости и для немонотонной функции [3]. В данной работе мы обобщаем его результат на немонотонные функции в многомерном случае.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{L}_n(\Psi_1, \bar{d})$ множество $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k) \in [a, b]^k$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x_1) + d_1| < \Psi_1(H), \\ \dots \\ |P(x_k) + d_k| < \Psi_k(H) \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений при некоторой (не обязательно монотонной функции $\Psi_i(H)$). Тогда, если ряд $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi^k(H) H^{n-k}$ сходится, то для $\forall \bar{d} \in \mathbb{R}^k$

$$\mu\mathcal{L}_n(\Psi_1, \bar{d}) = 0.$$

Приведем схему доказательства теоремы при $k = 1$. От произвольных полиномов $P(x) + d$ можно перейти к полиномам $T(x) = (b_n + d)x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x^1 + a_0$, для которых выполнено неравенство $|b_n + d| > c_1 H(T)$. Это приводит к ограниченности корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ полиномов $T(x)$. Кроме этого, полиномы $T(x)$ можно поделить на конечное число классов, внутри которых полиномы имеют близкие по ве-

личине производные, расстояния между корнями и т.д. Обоснование таких переходов можно найти в [1]. Из неравенства (2) следует, что для корня α_1 , ближайшего к x

$$|x - \alpha_1| < c_2 |P(x)| |T'(\alpha_1)|^{-1} < c_2 \Psi(H) |T'(\alpha_1)|^{-1}, \quad (3)$$

Определим число $p_1 = p_1(T)$ как решение неравенства $H^{1-p_1-\varepsilon} < |T'(\alpha_1)| < H^{1-p_1}$ при достаточно малом $\varepsilon = M^{-1}$, где $M > M_0(n) \in \mathbb{Z}$, p_1 – рациональное число со знаменателем M . Множество решений неравенства (3) обозначим через $\sigma(T)$. Наряду с интервалом $\sigma(T)$ будем рассматривать и интервалы $\sigma_i(T)$, $i = 1, 2, 3$, как множество решений неравенств

$$|x - \alpha_1| < c_{i+2} H^{-u_i} |T(\alpha_1)|^{-1}, \quad (4)$$

где $u_i \geq 0$ будут выбираться в зависимости от величины p_1 .

Если $0 \leq p_1 < 0,5 - \varepsilon$, то положим $u_1 = 0$. Разложим многочлены $T(x)$ в ряд Тейлора на $\sigma_1(T)$ и оценим их модули сверху. Получим $|T(x)| < 2c_6$. Если у многочленов $T(x)$ зафиксировать коэффициенты

$(b_n, b_{n-1}, \dots, b_1) = \bar{b}$, то при $c_6 = \frac{1}{4}$ интервалы $\sigma_1(T)$, построенные для $T(x)$

с одним и тем же вектором \bar{b} , не пересекаются. Это позволяет получить для суммы мер $\mu\sigma(T)$ многочленов $T(x)$ с условием $H(T) \leq K$ оценку $s_K = c_6 \Psi(K) K^{n-1}$. Ряд с таким общим членом s_K сходится по условию. По лемме Бореля – Кантелли, получаем доказательство теоремы.

Если $0,5 - \varepsilon \leq p_1 < 1 - \varepsilon$, то положим $u_2 = 1$. Опять оценим $T(x)$ на $\sigma_2(T)$ сверху после разложения $T(x)$ в ряд Тейлора. Получим $|T(x)| < 2c_7 K^{-1}$. Зафиксируем вектор $b_1 = (b_n, b_{n-1}, \dots, b_2)$ и если $\sigma_2(T_1) \cap \sigma_2(T_2) \neq \emptyset$, то на пересечении интервалов для полинома первой степени получим $R_1(x) = T_2(x) - T_1(x) = m_1 x + m_0$ выполнение оценки $|m_1 x + m_0| < c_8 K^{-1}$, $|m_1| < K^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. По теореме Хинчина такая оценка может выполняться бесконечно часто только на множестве нулевой меры. В том случае, если пересечение $\sigma_2(T_1) \cap \sigma_2(T_2) = \emptyset$, вновь непосредственно подсчитаем сумму мер $\mu\sigma(T)$ многочленов $T(x)$. Получаем оценку $c_9 \Psi(K) K^{n-1}$. Применив лемму Бореля – Кантелли, получаем доказательство теоремы.

Если $1 - \varepsilon \leq p_1 < 1,5 - \varepsilon$, то положим $u_3 = 2$. Зафиксируем вектор $b_2 = (b_n, b_{n-1}, \dots, b_3)$. В случае если $\sigma_3(T_1) \cap \sigma_3(T_2) \neq \emptyset$, то на пересечении для многочлена $R_2(x)$ второй степени с целыми коэффициентами получим выполнение неравенства $|R_2(x)| = |T_2(x) - T_1(x)| < 2c_5 K^{-2}$. Для нахождения оценки $|x - \alpha(R_2)|$ применим дискриминант $D(R_2)$ [1]. Для производной $R'_2(x)$ будем иметь оценку $|R'_2(x)| < c_{10} K^\varepsilon$, $|m_1| < K^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. По теореме Хинчина такая оценка может выполняться бесконечно часто только на множестве нулевой меры. Если $\sigma_3(T_1) \cap \sigma_3(T_2) = \emptyset$, то опять под-

считаем сумму мер $\mu\sigma T$ многочленов $T(x)$. Получаем оценку $c_{11}\Psi(K)K^{n-1}$. Применив лемму Бореля – Кантелли, получаем доказательство теоремы.

Если $p_1 \geq 1,5 - \varepsilon$, то из сходимости ряда $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H)H^{n-1}$ следует, что $\Psi(H) = o(H^{-n+1}) < c_{12}H^{-n+1}$. Применим теорему 1.3 из [4] к системе неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < c_{12}H^{-n+1}, \\ |P'(x)| < c_{13}H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}. \end{cases}$$

Данная система имеет бесконечное число решений на множестве меры нуль.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Спринджук, В.Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – М. : Наука и Техника, 1967.
2. *Берник, В.И.* Приближение действительных чисел значениями целочисленных полиномов / В.И. Берник, Х. Диккинсон, М. Додсон // Доклады НАН Беларуси. – 1998. – 42/4. – С. 51–54.
3. *Beresnevich, V.V.* On a theorem of V. Bernik in the metric theory of Diophantine approximation / V.V. Beresnevich // Acta Arith. – 2005. – 117/1. – P. 71–80.
4. *Kleinbock, D.Y.* Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds / D.Y. Kleinbock, G.A. Margulis // Ann. Math. – 1998. – 148. – P. 339–360.

Поступила в редакцию 06.08.2011 г.

УДК 621.372.8; 535.1

*А.Б. СОТСКИЙ, П.Я. ЧУДАКОВСКИЙ,
И.У. ПРИМАК, Л.И. СОТСКАЯ*

ОТРАЖЕНИЕ СВЕТОВОГО ПУЧКА ОТ ПРИЗМЫ СВЯЗИ I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Получены системы дифференциальных и интегральных уравнений относительно амплитуд локальных мод в представлении поля светового пучка, отраженного от призменного устройства связи возбуждения планарных волноводов. Предложены эффективные алгоритмы решения названных систем.

Введение

В настоящее время используется ряд методов измерения постоянных расстояния и коэффициентов затухания мод оптических волноводов [1, 2]. Волноводная спектроскопия является одним из наиболее эффективных ме-

тодов такого рода [2, 3-9]. В этом методе осуществляется обработка углового распределения интенсивности отраженного светового пучка при возбуждении моды планарного волновода посредством призмы связи. В результате такой обработки одновременно определяются действительная и мнимая части комплексной постоянной распространения моды h . Это открывает возможности неразрушающего контроля параметров тонких пленок. В частности, определение толщин, показателей преломления и поглощения пленок сводится к решению известных дисперсионных уравнений для планарных волноводов и не вызывает принципиальных затруднений [3, 10, 11].

Аналитическое решение обратной оптической задачи о восстановлении h методом волноводной спектроскопии было сформулировано в [11]. Практика использования этого решения показала, что оно достаточно эффективно при восстановлении вещественных частей постоянных распространения мод $\operatorname{Re} h$, так как в нем минимизируется погрешность измерения $\operatorname{Re} h$, связанная с возмущающим влиянием на волновод призмы связи [2]. Однако при восстановлении $\operatorname{Im} h$ возникли проблемы. Оказалось, что в некоторых случаях решение [11] может давать завышенное (иногда более чем на порядок) значение коэффициента затухания волноводной моды. Такая ситуация имеет место при исследовании пленок, обладающих малым (менее 10ДБ/см) поглощением [2]. Отмеченный дефект можно связать с неполной адекватностью математической модели проблемы реальной физической ситуации. Действительно, в [11] рассмотрена неограниченная призма связи, отделенная от планарного оптического волновода однородным буферным слоем с фиксированной толщиной g . Такая модель не позволяет учесть выход части энергии возбуждаемой моды за пределы призмы связи. В то же время возникающая в этом случае дифракция излучения на краю призмы может существенно ограничить точность восстановления $\operatorname{Im} h$ [14]. Кроме того, значение g в реальных экспериментах может быть сопоставимо с амплитудой шероховатостей поверхности волновода и основания призмы. Таким образом, применимость использованной ранее модели неограниченной призмы связи и однородного буферного слоя является проблематичной.

В настоящей статье теоретически анализируется более корректная модель призменного устройства связи. Мы предполагаем, что основание призмы имеет ограниченную протяженность, что обеспечивается надлежащим выбором зависимости $g(z)$, где z – координата, отсчитанная вдоль основания призмы. Поверхность волноводной пленки и основание призмы могут быть в общем случае шероховатыми.

Схема призменного устройства связи представлена на рис. 1а. Предполагается, что плоскость падения возбуждающего светового пучка описывается уравнением $x = 0$. Ось пучка составляет угол α с основанием призмы.

Окружающая призму среда, сама призма, зазор между призмой связи и пленкой, волноводная пленка и подложка имеют относительные диэлектрические проницаемости ϵ_a , ϵ_p , ϵ_g , ϵ_w и ϵ_s , соответственно. Электромагнитное поле в средах предполагается монохроматическим, про-

порциональным $\exp(i\omega t)$. Угловое распределение мощности отраженного пучка $S(\gamma)$ (γ – угол, отсчитанный от нормали к выходной грани призмы) в плоскости $x = 0$ регистрируется матрицей фотоприемников 6, расположенной в фокальной плоскости объектива 5. На рис. 1 б, с представлены типичные экспериментальные распределения $S(\gamma)$, относящиеся к волноводным пленкам с сильным (>10 дБ/см) и слабым (<10 дБ/см) поглощением. Распределение $S(\gamma)$ на рис. 1с имеет колебательный характер, что указывает на дифракцию света на выходном ребре призмы связи (см. ниже).

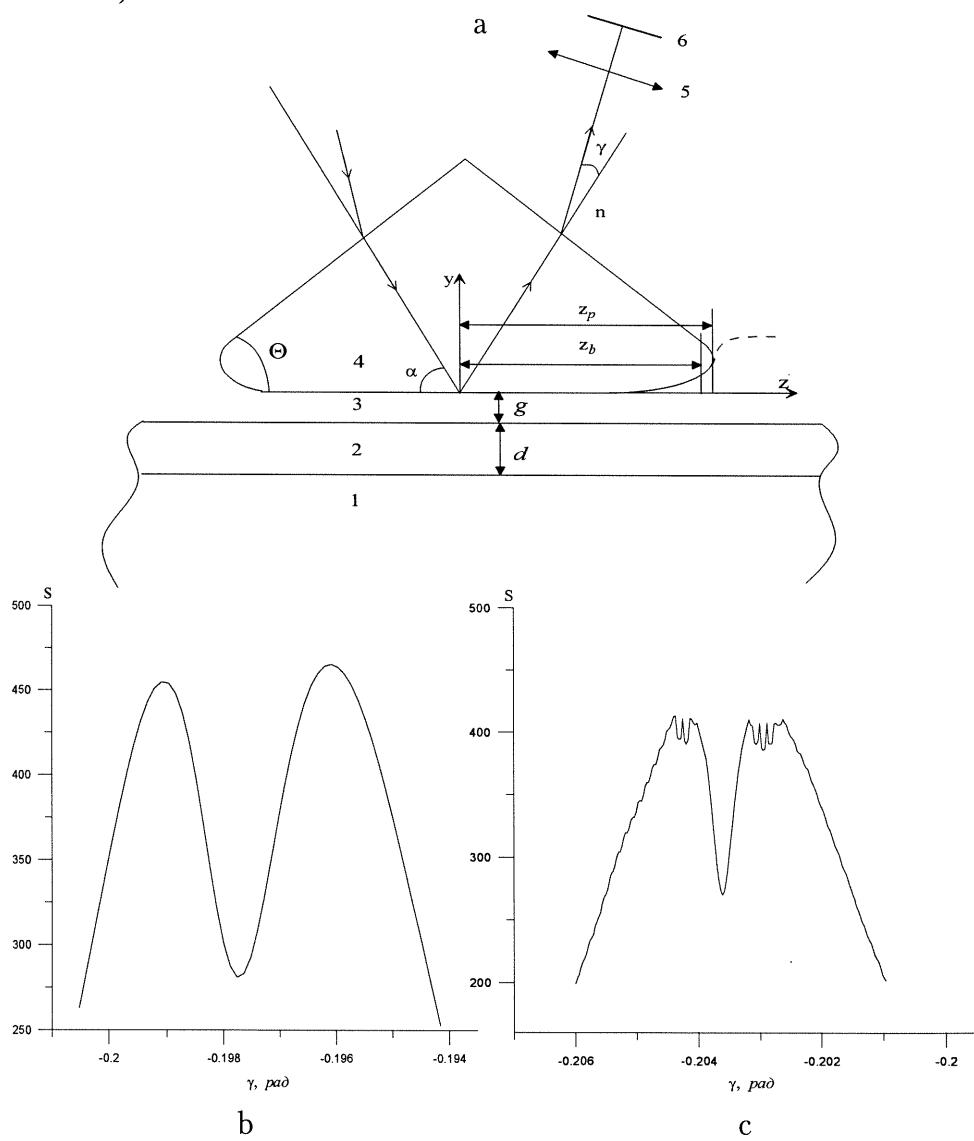


Рис. 1. Схема призменного устройства связи: 1 – равнобедренная призма, 2 – зазор, 3 – волноводная пленка, 4 – подложка, 5 – объектив, 6 – матрица фотоприемников (а) и угловые распределения интенсивности отраженного пучка при возбуждении моды пленки с высоким (б) и низким (с) затуханием

Для анализа функции $S(\gamma)$ заметим, что при туннельном возбуждении волноводной моды поле отраженного пучка в окрестности основания призмы связи может быть приближенно представлено суммой полей двух пространственно разделенных пучков [14]. Первый из этих пучков формируется в результате полного внутреннего отражения падающего пучка на основании призмы. Он подобен пучку, отраженному от призмы, не связанной с волноводом ($g \rightarrow \infty$). При надлежащей фокусировке излучения дифракцией этого пучка на ребрах призмы можно пренебречь. Второй из указанных пучков образуется в результате вытекания поля возбужденной моды по мере ее распространения по волноводу в призму связи. В случае неограниченной призмы поле этого пучка существенно отличается от нуля в области $0 \leq z \leq |\text{Im } \bar{h}^{(i)}|^{-1}$ (рис. 1а), где $\bar{h}^{(i)}$ – постоянная распространения возбужденной вытекающей моды с номером i . Однако протяженность основания реальных призм связи ограничена неравенством $z \leq z_b$ (рис. 1а). Поэтому при условии $z_p < |\text{Im } \bar{h}^{(i)}|^{-1}$, которое выполняется при возбуждении моды с малым затуханием, данный пучок будет испытывать сильную дифракцию на выходном ребре призмы. Эта дифракция может влиять на функцию $S(\gamma)$. Как уже отмечалось, на данную функцию могут влиять также шероховатости поверхности волновода и основания призмы связи.

Предположим, что прекращение вытекания возбужденной моды в призму связи происходит за счет изгиба основания призмы в окрестности ее выходного ребра. Тогда описанные физические эффекты могут быть проанализированы путем рассмотрения продольно-нерегулярной слоистой структуры, представленной на рис. 2. Данная структура содержит слои 1, 2, 3, 4, которые имеют те же характеристики, что и среды с соответствующими номерами на рис. 1а.

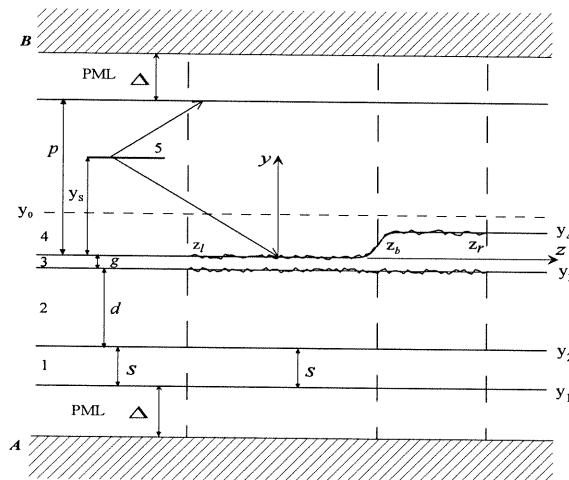


Рис. 2. Нерегулярная закрытая слоистая структура, моделирующая призменное устройство связи: s , d , g , p – толщины слоев, соответствующих подложке, волноводной пленке, гар и призме вне отрезка нерегулярности (z_1, z_r) , 5 – планарный источник излучения. Заштрихованные области – идеально проводящие экраны с PML толщины Δ

Основание призмы и поверхность волновода описываются функциями $y_4(z)$ и $y_3(z)$, соответственно. Здесь

$$\left. \begin{array}{l} y_4(z) = y_4^{(0)}(z) + \Delta y_4(z) \quad (z_l \leq z \leq z_r) \\ y_4(z) \equiv 0 \quad (z \leq z_l), \\ y_4(z) \equiv y_4^{(0)}(z_r) \quad (z \geq z_r), \end{array} \right\}, \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} y_3(z) = -g_0 + \Delta y_3(z) \quad (z_l \leq z \leq z_r) \\ y_3(z) \equiv -g_0 \quad (z \leq z_l, z \geq z_r) \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Остальные границы раздела сред предполагаются плоскими. Функции $\Delta y_4(z)$ и $\Delta y_3(z)$ в (1) и (2) моделируют случайные отклонения функций $y_4(z)$ и $y_3(z)$ от их средних значений $y_4^{(0)}(z)$ и $-g_0$ (g_0 – толщина буферного слоя в области $z \leq z_l$). Непрерывная функция $y_4^{(0)}(z) > 0$ моделирует изгиб призмы связи в окрестности ее выходного ребра. При расчетах мы полагали

$$y_4^{(0)}(z) = \frac{\Delta y_0}{1 + \exp[-\tau(z - z_b)]}. \quad (3)$$

Здесь z_b характеризует расстояние от точки пересечения оси возбуждающего пучка с основанием призмы до выходного ребра призмы, а параметры Δy_0 и τ отвечают за крутизну изгиба основания призмы в окрестности ее выходного ребра.

Следует отметить, что функция $y_4^{(0)}(z)$ вида (3) является монотонно возрастающей (ее график схематически представлен на рис. 1а штриховой линией). Таким образом, она не позволяет полностью описать форму выходного ребра призмы. Однако, как известно, вытекание возбужденной моды в призму связи резко убывает при увеличении толщины буферного слоя $g(z) = g_0 + y_4^{(0)}(z)$ [15]. Поэтому при выборе достаточно большого значения Δy_0 в (3) формирование поля отраженного от призмы пучка происходит в области $z < z_b$, где модель (3) адекватна физической ситуации.

Для задания случайных функций $\Delta y_i(z)$ ($i = 3, 4$) при конкретных расчетах мы использовали модель, в которой в эквидистантных точках $z_j = z_l + j\Delta z$ ($j = \overline{0, N}$, $\Delta z = (z_r - z_l)/N$) отрезка $z_l \leq z \leq z_r$ функции $\Delta y_i(z)$ принимают значения $\Delta y_i^{(j)} = a(r_j - 0.5)$, а при $z_j \leq z \leq z_{j+1}$ она равна $\Delta y_i(z) = \Delta y_i^{(j)} + (z - z_j)(\Delta y_i^{(j+1)} - \Delta y_i^{(j)})/\Delta z$. Здесь r_j – независимые (при различных j) случайные числа, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$, $0.5a$ – амплитуда колебаний функций $\Delta y_i(z)$. В рамках данной модели автокорреляционная функция $\rho(\sigma) = \langle \Delta y_i(z)\Delta y_i(z + \sigma) \rangle$ равна

$$\rho(\sigma) = \overline{\Delta y_i^2} \left[\frac{7}{6} - \frac{3}{2}\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}(1-\zeta)^3 \right] (\zeta < 1),$$

$$\rho(\sigma) = \frac{\overline{\Delta y_i^2}(2-\zeta)^3}{6} \quad (1 < \zeta < 2), \quad \rho(\sigma) = 0 \quad (\zeta > 2),$$

где $\overline{\Delta y_i^2} = a^2 / 12$, $\zeta = \sigma / \Delta z$.

Запись (1), (2) означает, что мы рассматриваем двумерную продольно-нерегулярную структуру на отрезке $z_l \leq z \leq z_r$. Вне этого отрезка структура регулярна (ее параметры не зависят от z). Для анализа дифракционных полей в подобных структурах в [16] был предложен метод спектральных разложений полей по локальным модам. Однако при рассмотрении открытых структур этот метод приводит к сложным интегро-дифференциальным уравнениям относительно амплитуд мод непрерывного спектра. Поэтому с целью упрощения вычислений будем считать, что при $y = A$ и $y = B$ структура ограничена идеально проводящими экранами (см. рис. 2). К экранам примыкают полностью согласованные слои (PML) фиксированной толщины Δ . Тензоры относительной магнитной и диэлектрической проницаемости PML удовлетворяют соотношениям [17]

$$\left. \begin{aligned} \mu_{ij} &= \mu_{ji}, & \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji}, & \mu_{xy} &= \mu_{xz} = \mu_{yz} = 0, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \\ \mu_{xx} &= \mu_{zz} = \mu_o = \mu \exp(-i\pi/4), & \mu_{yy} &= \mu_e = 1/\mu_o, & \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{zz} = \varepsilon_o = \varepsilon_i \mu_o, & \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_e = \varepsilon_i / \mu_o \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где $\mu > 0$ – некоторая вещественная константа, ε_i ($i = 1, n$) – диэлектрическая проницаемость среды, контактирующей с PML. Нетрудно показать, что при выполнении (4) коэффициенты отражения плоских волн TE- и TM-поляризации от границы раздела диэлектрик-PML равны

$$R = -\exp(-2i\mu_o\sigma_i k_0 \Delta), \quad (5)$$

где $\sigma_i = \sqrt{\varepsilon_i} \sin \theta_i$, θ_i – угол падения, $k_0 = 2\pi / \lambda_0$ – волновое число вакуума. Таким образом, при достаточно большом значении Δ отражение излучения от PML становится пренебрежимо малым ($|R| \rightarrow 0$), иными словами, PML моделирует открытое пространство в закрытой структуре. Возбуждающий волновод световой пучок в описанной структуре задается планарным источником излучения, расположенным при $y = y_s$ (см. рис. 2). Параметры источника описаны ниже.

Предположим, что волновод возбуждается 3D линейно-поляризованным световым пучком. Строго говоря, полное поле такого пучка содержит все шесть ненулевых компонент напряженности электромагнитного поля. Тем не менее, как показано в [11], расчет функции $S(\gamma)$, регистрируемой в плоскости падения пучка, сводится к решению несвязанных двумерных ($\nabla_x \equiv 0$) дифракционных задач для волн TE-, или TM-поляризации. Проанализируем вначале случай волн TE-поляризации.

В соответствии с уравнениями Максвелла, x – компонента напряженности электрического поля TE-волн в области $A \leq y \leq B$ (рис. 2) описывается уравнением

$$\mu_e \nabla_y \mu_o^{-1} \nabla_y E_x + \nabla_z^2 E_x + k_0^2 \varepsilon(y, z) E_x = f(y, z), \quad (6)$$

решаемым с нулевыми граничными условиями при $y = A$, $y = B$. Здесь в областях PML $\varepsilon(y, z) = \varepsilon_i$, а значения μ_o и μ_e определяются по формулам (4). Вне этих областей $\mu_o = \mu_e = 1$, а функция $\varepsilon(y, z)$ описывает диэлектрическую проницаемость в общем случае нерегулярной планарной структуры. Функция $f(y, z)$ задается источником излучения (см. ниже).

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля

$$[\mu_e \nabla_y \mu_o^{-1} \nabla_y + k_0^2 \varepsilon(y, z) - h_\nu^2(z)] \varphi_\nu(y, z) = 0, \quad (7)$$

$$\varphi_\nu(A, z) = 0, \quad \varphi_\nu(B, z) = 0. \quad (8)$$

Эта задача имеет дискретный набор нетривиальных решений (мод), которые формируют полный набор функций на отрезке $A \leq y \leq B$ при любом значении z [18]. При этом $h_\nu(z)$ имеет смысл постоянной распространения, а $\varphi_\nu(y, z)$ – поперечного распределения поля ν -й моды продольно-регулярной планарной структуры с $\varepsilon(y) = \varepsilon(y, z)$. Предположим, что последняя структура состоит из n однородных слоев. Из соображений общности подхода будем считать n произвольным числом, несмотря на то, что на рис. 2 $n = 4$.

В соответствии с (7), j -ом слое структуры

$$\varphi_\nu(y, z) = \varphi_{\nu j} \cos[\sigma_j(y - y_j)] + \varphi'_{\nu j} \sin[\sigma_j(y - y_j)] / \sigma_j, \quad (9)$$

где $\varphi_{\nu j} = \varphi_\nu(y_j, z)$, $\varphi'_{\nu j} = \partial \varphi_\nu / \partial y|_{y=y_j}$, $y_j = y_j(z)$ – нижняя граница слоя

(см. рис. 2), $\sigma_j = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_j - h_\nu^2(z)}$, ε_j – диэлектрическая проницаемость слоя.

Из (7), (9) следуют рекуррентные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\nu j+1} &= \varphi_{\nu j} \cos(\sigma_j d_j) + \varphi'_{\nu j} \sin(\sigma_j d_j) / \sigma_j, \\ \varphi'_{\nu j+1} &= -\varphi_{\nu j} \sigma_j \sin(\sigma_j d_j) + \varphi'_{\nu j} \cos(\sigma_j d_j) \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

где $j = \overline{2, n}$, $\varphi'_{\nu 2} = t_\nu$, $\varphi_{\nu 2} = t_\nu (1 - q)[i\sigma_1(1 + q)]^{-1}$, $q = \exp[-2i\sigma_1(d_1 + \mu_o \Delta)]$,

$d_j = d_j(z)$ – локальная толщина j -го слоя, $t_\nu = t_\nu(z)$ – множитель, определяемый из условия нормировки полей мод

$$\int_A^B \mu_e^{-1} \varphi_\nu(y, z) \varphi_\mu(y, z) dy = \delta_{\nu\mu}, \quad (11)$$

где $\delta_{\nu\mu}$ – символ Кронекера (ортогональность функций φ_ν с различными номерами ν следует из (7), (8)).

Из (5), (8), (9) получаем дисперсионное уравнение относительно $h_\nu(z)$:

$$\sigma_n \{ (i\sigma_n \varphi_{\nu n} - \varphi'_{\nu n}) \exp[-i\sigma_n(d_n + \mu_o \Delta)] + (i\sigma_n \varphi_{\nu n} + \varphi'_{\nu n}) \exp[i\sigma_n(d_n + \mu_o \Delta)] \} = 0, \quad (12)$$

которое предполагает использование рекуррентных соотношений (10). В соответствии с (10), левая часть (12) является целой трансцендентной функцией комплексной переменной h_ν . В результате число корней уравнения (12) на полной комплексной плоскости неограниченно велико [18]. Значения этих корней в любой замкнутой области комплексной плоскости могут быть рассчитаны методом контурного интегрирования [19]. Последующее построение функций $\varphi_\nu(y, z)$ на основании (9), (10) не вызывает затруднений.

В силу полноты набора функций $\varphi_\nu(y, z)$ на отрезке $A \leq y \leq B$ решение уравнения (6) может быть представлено в виде равномерно сходящихся рядов [18]

$$E_x(y, z) = \sum_\nu U_\nu(z) \varphi_\nu(y, z), \quad \nabla_z E_x(y, z) = \sum_\nu V_\nu(z) \varphi_\nu(y, z), \quad (13)$$

где $U_\nu(z)$ и $V_\nu(z)$ – некоторые функции z . Подставляя (13) в (6) и учитывая (11), приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами

$$\nabla_z U_\nu = V_\nu - \sum_\mu D_{\nu\mu} U_\mu, \quad \nabla_z V_\nu = -U_\nu h_\nu^2 - \sum_\mu D_{\nu\mu} V_\mu + \bar{f}_\nu(z), \quad (14)$$

где

$$D_{\nu\mu}(z) = D_{\nu\mu}(z) = k_0^2 [h_\mu^2(z) - h_\nu^2(z)]^{-1} \int_{A+\Delta}^{B-\Delta} \mu_e^{-1} \varphi_\nu(y, z) \varphi_\mu(y, z) \nabla_z \varepsilon dy \quad (\nu \neq \mu), \quad D_{\mu\mu} = 0 \quad (15)$$

$$\bar{f}_\nu(z) = \int_A^B \mu_e^{-1} \varphi_\nu(y, z) f(y, z) dy. \quad (16)$$

Ограничимся в бесконечных рядах (13) k слагаемыми ($\nu = \overline{1, k}$). В этом случае (14) представляет собой замкнутую систему $2k$ обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее заметим, что вне интервала $z_l \leq z \leq z_r$ выполняется тождество $D_{\nu\mu}(z) \equiv 0$, так как рассматриваемая структура в соответствующих областях продольно-регулярна. Предположим также, что на некоторых интервалах оси $0z$, примыкающих к отрезку (z_l, z_r) , источники излучения отсутствуют ($\bar{f}_\nu(z) \equiv 0$). Тогда на этих интервалах, согласно (14),

$$U_\nu = a_\nu \exp(-ih_\nu^{(-)} z) + b_\nu \exp(ih_\nu^{(-)} z), \quad V_\nu = -ih_\nu^{(-)} [a_\nu \exp(-ih_\nu^{(-)} z) - b_\nu \exp(ih_\nu^{(-)} z)] \quad (z_l \leq z), \quad (17)$$

$$U_\nu = c_\nu \exp(-ih_\nu^{(+)} z) + e_\nu \exp(ih_\nu^{(+)} z), \quad V_\nu = -ih_\nu^{(+)} [c_\nu \exp(-ih_\nu^{(+)} z) - e_\nu \exp(ih_\nu^{(+)} z)] \quad (z \geq z_r), \quad (18)$$

где $h_\nu^{(-)}$ и $h_\nu^{(+)}$ – постоянные распространения ν -й моды регулярных планарных структур, находящихся в областях $z < z_l$ и $z > z_r$, $a_\nu, b_\nu, c_\nu, e_\nu$ – некоторые постоянные, имеющие смысл амплитуд падающих, отраженных и прошедших мод указанных регулярных структур.

Пусть при $z > z_r$ источники излучения отсутствуют. Тогда, очевидно, $e_\nu = 0$, значения амплитуд a_ν задаются внешними источниками излучения, а амплитуды b_ν и c_ν должны определяться в результате решения дифракционной задачи.

Один из возможных путей такого решения состоит в поочередном интегрировании $k+1$ задачи Коши для системы (14) на отрезке $z_l \leq z \leq z_r$ (в общем случае данное интегрирование должно осуществляться численно). В первой из этих задач используются начальные условия $U_\nu(z_l) = a_\nu \exp(-ih_\nu^{(-)} z_l)$, $V_\nu(z_l) = -ih_\nu^{(-)} U_\nu(z_l)$. После ее интегрирования получим $U_\nu^{(0)} = U_\nu(z_r)$, $V_\nu^{(0)} = V_\nu(z_r)$. В остальных k задачах полагаем в (14) $\bar{f}_\nu(z) \equiv 0$ и используем начальные условия $U_\nu(z_l) = \delta_{\nu\mu} \exp(ih_\nu^{(0)} z_l)$, $V_\nu(z_l) = ih_\nu^{(0)} U_\nu(z_l)$. В результате интегрирования этих задач будут построены две матрицы размерности $k \times k$: $U_{\nu\mu} = U_\nu(z_r)$, $V_{\nu\mu} = V_\nu(z_r)$. Учитывая линейность уравнений (14) и представление (18), получаем неоднородную алгебраическую систему относительно неизвестных b_ν :

$$\sum_{\mu=1}^k (V_{\nu\mu} + ih_\nu^{(+)} U_{\nu\mu}) b_\mu = -ih_\nu^{(+)} U_\nu^{(0)} - V_\nu^{(0)}, \quad (19)$$

где $\nu=1, \dots, k$. Определив из (19) коэффициенты b_ν , мы можем рассчитать дифракционное поле по формулам (13). При этом вне отрезка $z_l \leq z \leq z_r$ следует использовать представления (17), (18), где $c_\nu = \exp(ih_\nu^{(+)} z_r)(U_\nu^{(0)} + \sum_{\mu=1}^k U_{\nu\mu} b_\mu)$, а при $z_l \leq z \leq z_r$ функции $U_\nu(z)$ и $V_\nu(z)$ можно вычислить, численно проинтегрировав систему (14) при начальных условиях для $U_\nu(z)$ и $V_\nu(z)$, вытекающих из (17).

Исследование различных структур показало, что из-за накопления вычислительной погрешности при численном интегрировании задачи Коши описанный способ решения дифракционных задач эффективен в случае коротких отрезков нерегулярности ($z_r - z_l \leq 10\lambda_0$). Если же $z_r - z_l > 10\lambda_0$, то предпочтителен иной подход. В нем выражения (14), (17), (18) заменяются эквивалентными интегральными уравнениями

$$U_\nu(z) = \Phi_\nu(z) + a_\nu \exp(-ih_\nu^{(-)} z) + 0.5 \int_{z_l}^z \Phi_\nu^{(-)}(z, z') dz' - 0.5 \int_z^{z_p} \Phi_\nu^{(+)}(z, z') dz', \quad (20)$$

$$V_\nu(z) = -0.5ih_\nu^{(-)} \left[-2\Phi_\nu(z) + 2a_\nu \exp(-ih_\nu^{(-)} z) + \int_{z_l}^z \Phi_\nu^{(-)}(z, z') dz' + \int_z^{z_p} \Phi_\nu^{(+)}(z, z') dz' \right], \quad (21)$$

где

$$\Phi_\nu(z) = \frac{h_\nu^{(-)} - h_\nu^{(+)}}{h_\nu^{(-)} + h_\nu^{(+)}} \left\{ a_\nu \exp(ih_\nu^{(-)} z - 2ih_\nu^{(-)} z_r) + 0.5 \exp[-h_\nu^{(-)}(z - z_r)z'] \int_{z_l}^{z_p} \Phi_\nu^{(-)}(z_r, z') dz' \right\}$$

$$\Phi_\nu^{(\pm)}(z, z') = \exp[\pm ih_\nu^{(-)}(z - z')] [F_\nu(z') \pm G_\nu(z')],$$

$$F_\nu(z) = -\sum_\mu D_{\nu\mu}(z) U_\mu(z),$$

$$G_v(z) = [ih_v^{(-)}]^{-1} \left\{ [(h_v^{(-)})^2 - h_v^2(z)]U_v(z) - \sum_{\mu \neq v} D_{v\mu}(z)V_\mu(z) + \bar{f}_v(z) \right\}.$$

Уравнения (20), (21) особенно эффективны при исследовании слабо нерегулярных слоистых структур, поскольку в этом случае они содержат малые параметры $h_v^{(-)} - h_v^{(+)}$, $(h_v^{(-)})^2 - h_v^2(z)$, $D_{v\mu}(z)$ и допускают численное решение методом итераций (см. ниже).

Следует отметить, что объем вычислений в обеих описанных схемах возрастает при увеличении порядка редукции рядов (13). Значение k при заданной точности решения определяется спектром используемых мод $\varphi_v(y, z)$, который, в свою очередь, зависит от толщины РМЛ Δ . В частности, при $\Delta \rightarrow \infty$ данный спектр становится квазинепрерывным, поэтому $k \rightarrow \infty$. С другой стороны, при $\Delta \rightarrow 0$ спектр мод является разреженным (k можно выбрать конечным), но получаемое решение будет искажено вследствие паразитного отражения излучения от вспомогательных идеально проводящих экранов. Таким образом, оптимальные значения k и Δ должны определяться в ходе решения каждой конкретной задачи путем контроля устойчивости получаемых решений относительно выбора этих значений [19].

Детализируем полученные общие соотношения для структуры, представленной на рис. 2. В данном случае зависимость диэлектрической проницаемости от координаты z определяется только функциями (1) и (2). Для вычисления коэффициентов системы (14) заметим, что дифференцирование ступенчатой функции $\varepsilon(y, z)$ в (15) приводит к появлению делта-функций Дирака. Их интегрирование дает аналитический результат:

$$D_{v\mu}(z) = k_0^2 [h_\mu^2(z) - h_v^2(z)]^{-1} \left[(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) \frac{dy_4}{dz} (\varphi_v \varphi_\mu)_{y=y_4(z)} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \frac{dy_3}{dz} (\varphi_v \varphi_\mu)_{y=y_3(z)} \right]. \quad (22)$$

Возбуждающий пучок зададим при помощи планарного дипольного источника излучения, расположенного на высоте y_s от основания призмы. В этом случае

$$f(y, z) = -2i\delta(y - y_s) \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_4(k_z) \exp(-ik_z z + i\sigma_4 y_s) \hat{E}_{xi}(k_z) dk_z, \quad (23)$$

где $\delta(y - y_s)$ – делта-функция Дирака, $\sigma_4 = \sigma_4(k_z) = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_4 - k_z^2}$,

$$\hat{E}_{xi}(k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_z z) E_{xi}(0, z) dz, \quad (24)$$

$E_{xi}(y, z)$ – поле возбуждающего пучка в призме ($y = 0$ – плоскость основания призмы). Для гауссова пучка единичной амплитуды и радиуса w , сфокусированного на основание призмы, выполняются соотношения

$$E_{xi}(0, z) = \exp[-(z/w)^2 - ik_{z0} z], \quad (25)$$

$$\hat{E}_{xi}(k_z) = w \left(2\sqrt{\pi} \right)^{-1} \exp[-0.25w^2(k_z - k_{z0})^2], \quad (26)$$

где $k_{z0} = k_0 \sqrt{\varepsilon_4} \sin \theta_i$, $\theta_i = 0.5\pi - \alpha$ – угол падения пучка (рис. 1а). Поэтому если, как это имеет место в большинстве представляющих практический интерес случаев, выполняется неравенство $k_0 w \gg 1$, то радикал $\sigma_4(k_z)$ в (23) может быть разложен в ряд Тейлора в окрестности точки $k_z = k_{z0}$. Ограничившись в показателе экспоненты в (23) тремя членами данного ряда, в результате интегрирования находим

$$f(y, z) = -2i\delta(y - y_s)\sigma_4^{(0)}Q^{-1} \exp[-ik_{z0}z + i\sigma_4^{(0)}y_s - (z + y_s \operatorname{tg} \theta_i)^2 / (wQ)^2], \quad (27)$$

где $\sigma_4^{(0)} = \sigma_4(k_{z0})$,

$$Q = \sqrt{1 + 2 \left[ik_0^2 \varepsilon_4 y_s + (k_0^2 \varepsilon_4 + k_{z0}^2)(\sigma_4^{(0)})^{-1} \right] \left[w^2 (\sigma_4^{(0)})^3 \right]^{-1}}. \quad (28)$$

Заметим, что освещенная возбуждающим пучком область на основании призмы связи находится в промежутке $-w < z$. Поэтому при исследовании эффектов дифракции света границы отрезка нерегулярности структуры должны удовлетворять условиям $z_l \ll -w$, $z_r \gg w$. При достаточно большом значении y_s эти условия совместимы с неравенством $-y_s \operatorname{tg} \theta_i + w \ll z_l$. С другой стороны, в представляющем практический интерес случае, когда $|Q| \approx 1$, функция $f(y, z)$ вида (27) заметно отличается от нуля в только диапазоне $-y_s \operatorname{tg} \theta_i - w < z < -y_s \operatorname{tg} \theta_i + w$. Очевидно, что при указанных условиях функции $\bar{f}_v(z)$ в (14) будут иметь пре-небрежимо малые значения на отрезке нерегулярности $z_l \leq z \leq z_r$, а амплитуды падающих мод a_v можно рассчитать аналитически, решив неоднородную систему (14) при $D_{vu}(z) \equiv 0$. В результате

$$a_v = -(2ih_v^{(-)})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ih_v^{(-)}z) \bar{f}_v(z) dz.$$

Выполнив в последнем выражении интегрирование с учетом (16), (27), получаем аналитический результат:

$$a_v = \frac{\sigma_4^{(0)} \sqrt{\pi} w \varphi_v(y_s, z_l)}{h_v^{(-)}} \exp \left[i\sigma_4^{(0)} y_s - \frac{i(h_v^{(-)} - k_{z0})k_{z0}(i - y_s \sigma_4^{(0)})}{\sigma_4^{(0)}} - 0.25(h_v^{(-)} - k_{z0})^2 w^2 Q^2 \right]. \quad (29)$$

Данные величины можно использовать при решении уравнений (14), либо (20), (21) на отрезке $z_l \leq z \leq z_r$ по описанным выше схемам, полагая в этих уравнениях $\bar{f}_v(z) \equiv 0$.

Рассмотрение волн ТМ-поляризации может быть выполнено по аналогичной схеме. Для этих волн уравнение (6) заменяется на

$$\varepsilon_e \nabla_y \varepsilon_o^{-1} \nabla_y H_x + \varepsilon_e \nabla_z \varepsilon_e^{-1} \nabla_z H_x + k_0^2 \varepsilon_e(y, z) \mu_o(y) H_x = f(y, z), \quad (30)$$

где H_x – компонента магнитного поля; в областях PML ε_e , ε_o и μ_o определяются по формулам (4), а вне этих областей $\varepsilon_e = \varepsilon_o = \varepsilon(y, z)$, $\mu_o \equiv 1$. Решение уравнения (30) ищется в виде разложений

$$H_x(y, z) = \sum_v U_v(z) \psi_v(y, z), \quad \nabla_z H_x(y, z) = \sum_v V_v(z) \psi_v(y, z), \quad (31)$$

по локальным модам $\psi_v(y, z)$. Функции $\psi_v(y, z)$ являются решениями спектральной задачи Штурма – Лиувилля

$$[\varepsilon_e \nabla_y \varepsilon_o^{-1} \nabla_y + k_0^2 \varepsilon_e(y, z) \mu_o(y) - h_v^2(z)] \psi_v(y, z) = 0, \quad (32)$$

$$\nabla_y \psi_v(A, z) = 0, \quad \nabla_y \psi_v(B, z) = 0. \quad (33)$$

В j -ом слое структуры эти функции могут быть рассчитаны по формулам, аналогичным (9):

$$\psi_v(y, z) = \psi_{vj} \cos[\sigma_j(y - y_j)] + \psi'_{vj} \sin[\sigma_j(y - y_j)] / \sigma_j.$$

Здесь ψ_{vj} и ψ'_{vj} рассчитываются при помощи рекуррентных соотношений

$$\left. \begin{aligned} \psi_{vj+1} &= \psi_{vj} \cos(\sigma_j d_j) + \left(\frac{\psi'_{vj}}{\varepsilon_j} \right) \varepsilon_j \frac{\sin(\sigma_j d_j)}{\sigma_j} \\ \frac{\psi'_{vj+1}}{\varepsilon_{j+1}} &= -\frac{\psi_{vj} \sigma_j}{\varepsilon_j} \sin(\sigma_j d_j) + \left(\frac{\psi'_{vj}}{\varepsilon_j} \right) \cos(\sigma_j d_j) \end{aligned} \right\},$$

где $j = \overline{2, n}$, $\psi_2 = t_v$, $\psi'_2 \varepsilon_2^{-1} = t_v i \sigma_1 (1 - q) [\varepsilon_1 (1 + q)]^{-1}$, а множитель $t_v = t_v(z)$ определяется из условия нормировки полей локальных ТМ мод

$$\int_A^B \varepsilon_e^{-1} \psi_v(y, z) \psi_\mu(y, z) dy = \delta_{v\mu}. \quad (34)$$

Значения постоянных распространения локальных мод $h_v(z)$ находятся из дисперсионного уравнения

$$(i\sigma_n \psi_{vn} - \psi'_{vn}) \exp[-i\sigma_n(d_n + \mu_o \Delta)] - (i\sigma_n \psi_{vn} - \psi'_{vn}) \exp[i\sigma_n(d_n + \mu_o \Delta)] = 0. \quad (35)$$

Из (30) – (34) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд разложений (31):

$$\nabla_z U_v = V_v - \sum_\mu L_{v\mu} U_\mu, \quad \nabla_z V_v = -U_v h_v^2 - \sum_\mu D_{v\mu} V_\mu + \bar{f}_v(z), \quad (36)$$

где

$$L_{v\mu}(z) = \frac{1}{h_v^2 - h_\mu^2} \int_{A+\Delta}^{B-\Delta} \left[h_\mu^2 \psi_v \psi_\mu \nabla_z \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{\nabla_y \psi_v}{\varepsilon} \frac{\nabla_y \psi_\mu}{\varepsilon} \nabla_z \varepsilon \right] dy \quad (v \neq \mu), \quad (37)$$

$$D_{v\mu}(z) = \frac{1}{h_v^2 - h_\mu^2} \int_{A+\Delta}^{B-\Delta} \left[h_v^2 \psi_v \psi_\mu \nabla_z \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) - \frac{\nabla_y \psi_v}{\varepsilon} \frac{\nabla_y \psi_\mu}{\varepsilon} \nabla_z \varepsilon \right] dy \quad (v \neq \mu), \quad (38)$$

$$L_{\nu\nu}(z) = -D_{\nu\nu} = -0.5 \int_{A+\Delta}^{B-\Delta} \psi_\nu^2 \nabla_z \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) dy, \quad (39)$$

$$\bar{f}_\nu(z) = \int_A^B \varepsilon_e^{-1} \psi_\nu(y, z) f(y, z) dy. \quad (40)$$

Выражения (36) – (40) справедливы при рассмотрении произвольной продольно-нерегулярной слоистой структуры. В случае структуры, изображенной на рис. 2, производные $\nabla_z(\varepsilon^{-1})$ и $\nabla_z(\varepsilon)$ выражаются через дельта-функции Дирака. Интегрирование этих функций дает аналитический результат:

$$L_{\nu\mu}(z) = \frac{1}{h_\nu^2 - h_\mu^2} \left[-h_\mu^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_4} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \frac{dy_4}{dz} (\psi_\nu \psi_\mu)_{y=y_4(z)} + (\varepsilon_4 - \varepsilon_3) \frac{dy_4}{dz} \left(\frac{\nabla_y \psi_\nu}{\varepsilon} \frac{\nabla_y \psi_\mu}{\varepsilon} \right)_{y=y_4(z)} - \right. \\ \left. - h_\mu^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \frac{dy_3}{dz} (\psi_\nu \psi_\mu)_{y=y_3(z)} + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \frac{dy_3}{dz} \left(\frac{\nabla_y \psi_\nu}{\varepsilon} \frac{\nabla_y \psi_\mu}{\varepsilon} \right)_{y=y_3(z)} \right] \quad (\nu \neq \mu), \quad (41)$$

$$D_{\nu\mu}(z) = \frac{1}{h_\nu^2 - h_\mu^2} \left[-h_\nu^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_4} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \frac{dy_4}{dz} (\psi_\nu \psi_\mu)_{y=y_4(z)} + (\varepsilon_4 - \varepsilon_3) \frac{dy_4}{dz} \left(\frac{\nabla_y \psi_\nu}{\varepsilon} \frac{\nabla_y \psi_\mu}{\varepsilon} \right)_{y=y_4(z)} - \right. \\ \left. - h_\nu^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \frac{dy_3}{dz} (\psi_\nu \psi_\mu)_{y=y_3(z)} + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \frac{dy_3}{dz} \left(\frac{\nabla_y \psi_\nu}{\varepsilon} \frac{\nabla_y \psi_\mu}{\varepsilon} \right)_{y=y_3(z)} \right] \quad (\nu \neq \mu), \quad (42)$$

$$L_{\nu\nu}(z) = -D_{\nu\nu}(z) = 0.5 \left[\left(\frac{1}{\varepsilon_4} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \frac{dy_4}{dz} (\psi_\nu^2)_{y=y_4(z)} + \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \frac{dy_3}{dz} (\psi_\nu^2)_{y=y_3(z)} \right].$$

Техника численного интегрирования уравнений (36) не отличается от техники интегрирования уравнений (14). В частности, интегральные уравнения относительно функций $U_\nu(z)$ и $V_\nu(z)$ формально совпадают с уравнениями (20), (21), но теперь в этих уравнениях

$$F_\nu(z) = - \sum_\mu L_{\nu\mu}(z) U_\mu(z).$$

Обозначим через $H_{xi}(y, z)$ поле возбуждающего пучка ТМ поляризации в призме. При использовании гауссова пучка, сфокусированного на основание призмы, имеют место формулы, аналогичные (24) – (26), в которых $E_{xi}(0, z)$ заменяется на $H_{xi}(0, z)$, а $\hat{E}_{xi}(k_z)$ – на $H_{xi}(k_z)$. В этом случае формула, аналогичная (29), имеет вид

$$a_\nu = \frac{\sigma_4^{(0)} \sqrt{\pi} w \psi_\nu(y_s, z_i)}{h_\nu^{(-)} \varepsilon_4} \exp \left[i \sigma_4^{(0)} y_s - \frac{i(h_\nu^{(-)} - k_{z0}) k_{z0} (i - y_s \sigma_4^{(0)})}{\sigma_4^{(0)}} - 0.25 (h_\nu^{(-)} - k_{z0})^2 w^2 Q^2 \right]. \quad (43)$$

Теперь мы в состоянии сформулировать алгоритм расчета функции $S(\gamma)$. Пусть призма окружена воздухом с диэлектрической проницаемостью ϵ_a , а волноводная мода возбуждается гауссовым световым пучком радиуса w_0 (w_0 – минимальный радиус пучка в воздухе), сфокусированным на основание призмы. Предположим также, что выполняется характерное для рассматриваемых измерений неравенство [2, 11]

$$|\gamma - \gamma_0| \leq 2(k_0 w_0)^{-1} \ll 1, \quad (44)$$

где угол $\gamma = \gamma_0$ соответствует оси пучка. Еще заметим, что при возбуждении волновода ограниченным световым пучком и выборе достаточно протяженного отрезка (z_l, z_r) оптическое поле вблизи основания призмы связи будет принимать пренебрежимо малые значения вне отрезка (z_l, z_r) (см. представленные ниже численные примеры).

При указанных условиях можно принять приближение [2, 11]

$$S(\gamma) = C \bar{S}(\gamma),$$

где C – не существенный коэффициент, пропорциональный мощности возбуждающего пучка и энергетическим коэффициентам прохождения пучком боковых граней призмы,

$$\bar{S}(\gamma) = \left| \left(w \sqrt{\pi} \right)^{-1} \int_{z_l}^{z_r} Y_r(y_0, z) \exp(ik_z z) dz \right|^2, \quad (45)$$

$$k_z = k_0 \left(\sin \theta \sqrt{\epsilon_4 - \epsilon_a \sin^2 \gamma} - \cos \theta \sqrt{\epsilon_a} \sin \gamma \right), \quad (46)$$

$y_0 > 0$ – некоторое значение координаты y в окрестности основания призмы (рис. 1а). Функция $Y_r(y, z)$ в (45) описывает поле отраженного пучка в призме связи. В рамках рассматриваемого подхода

$$Y_r(y, z) = \sum_{\nu} U_{\nu}(z) \phi_{\nu}(y, z) \exp[-ih_{\nu}(z)z] - Y_i(y, z), \quad (47)$$

где $\phi_{\nu}(y, z) = \varphi_{\nu}(y, z)$, $Y_i(y, z) = E_{xi}(y, z)$ для волн ТЕ поляризации, $\phi_{\nu}(y, z) = \psi_{\nu}(y, z)$, $Y_i(y, z) = H_{xi}(y, z)$ для волн ТМ поляризации,

$$\begin{Bmatrix} E_{xi}(y, z) \\ H_{xi}(y, z) \end{Bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik_z z + i\sigma_4 y) \begin{Bmatrix} \hat{E}_{xi}(k_z) \\ \hat{H}_{xi}(k_z) \end{Bmatrix} dk_z.$$

В случае возбуждения волновода гауссовым пучком функции $U_{\nu}(z)$ в (47) рассчитываются при условиях (29), либо (41), где w вычисляется по формуле [11]

$$w = \frac{w_0}{\cos \gamma_0} \sqrt{\frac{1 - \epsilon_a \epsilon_4^{-1} \sin^2 \gamma_0}{1 - k_{z0}^2 (k_0^2 \epsilon_4)^{-1}}}. \quad (48)$$

Таким образом, представлено решение прямой дифракционной задачи об отражении светового пучка от нерегулярной призмы связи. Расчет дифракционных полей в призменном устройстве связи на основании изложенного выше алгоритма будет рассмотрен во второй части статьи.

Авторы благодарны Е.В. Глазунову за любезно предоставленные экспериментальные данные.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Хансперджер, Р.** Интегральная оптика: Теория и технология / Р. Хансперджер. – М. : Мир, 1985. – 384 с.
2. **Хомченко, А.В.** Волноводная спектроскопия тонких пленок / А.В. Хомченко. – Минск : БГУ, 2002. – 222 с.
3. **Kersten, R.Th.** The prism-film coupler as a precision instrument. Part 1. Accuracy and capabilities of prism couplers as instrument / R. Th. Kersten// Optica Acta. – 1975. – Vol. 22. – № 6. – P. 503–513.
4. **Zhang, X.** Simple and efficient technique for evaluating the optical losses from surface scattering and volume attenuation in a thin film / Xi-Jing Zhang [et al.] // Opt. Express. – 2002. – Vol. 10. – № 25. – P. 1485–1490.
5. **Caballero-Calero, O.** Light-intensity measurements in optical waveguides using prism couplers / O. Caballero-Calero [et al.] // J. Appl. Phys. – 2007. – Vol. 102. – № 074509. – P. 074509-1- 074509-4.
6. **Dawson, P.** Prism coupler with variable coupling gap / P. Dawson, G.F. Cairns, S.M. O'Prey // Rev. Sci. Instrum. – 2000. – Vol. 71. – № 11. – P. 4208–4212.
7. **Cardin, J.** Determination of refractive index, thickness, and the optical losses of thin films from prism-film coupling measurements / J. Cardin, D. Leduc // Appl. Opt. – 2008. – Vol. 47. – № 7. – P. 894–900.
8. **Liu, Xiangmin.** Physical origin of large positive and negative lateral optical beam shifts in prism-waveguide coupling system / X. Liu [et al.] // Opt. Commun. – 2010. – Vol. 283. – P. 2681–2685.
9. **Liu, X.** Effect of coherence property of incident light on prism waveguide coupling / X. Liu [et al] // Opt. Commun. – 2008. – Vol. 281. – P. 273–277.
10. **Kersten, R.Th.** A new method for measuring refractive index and thickness of liquid and deposited solid thin films / R.Th. Kersten // Opt. Commun. – 1975. – Vol. 13. – № 3. – P. 327–329.
11. Анализ распределения интенсивности отраженного пучка в схеме призменного возбуждения диэлектрических волноводов / А.Б. Сотский [и др.] // Радиотехника и электроника. – 1999. – Т. 44. – № 6. – С. 687–695.
12. Волноводный метод измерения параметров тонких пленок / Е.В. Глазунов [и др.] // ЖТФ. – 2005. – Т. 75. – № 6. – С. 98–106.
13. **Романенко, А.А.** Решение дисперсионных уравнений для планарных волноводов в случае комплексных корней / А.А. Романенко, А.Б. Сотский // ЖТФ. – 1998. – Т. 68. – № 4. – С. 88–95.
14. Обратная задача волноводной спектроскопии при ограниченной призме связи / А.Б. Сотский [и др.] // Известия НАН Беларуси, Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 3. – С. 66–74.
15. **Ulrich, R.** Theory of the prism-film coupler by plane-wave analysis / R Ulrich // J. Opt. Soc. Am. – 1970. – Vol. 20. – № 10. – P. 1337–1350.
16. **Шевченко, В.В.** Плавные переходы в открытых волноводах / В.В. Шевченко. – М. : Наука, 1969. – 191 с.
17. A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition / Z.S. Sacks [et al.] // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1995. – Vol. 43. – № 12. – P. 1460–1463.

18. Шевченко, В.В. О спектральном разложении по собственным и присоединенным функциям одной несамосопряженной задачи типа Штурма – Лиувилля на всей оси / В.В Шевченко // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 11. – С. 2004–2020.
19. Сотский, А.Б. Теория оптических волноводных элементов / А.Б. Сотский. – Могилев : УО “Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова”, 2011. – 456 с.

Поступила в редакцию 22.12.2011 г.

УДК 538.3

О.М. ОСТРИКОВ

МЕТОД РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ, СОЗДАННЫХ ГРАНИЦАМИ МЕХАНИЧЕСКОГО КЛИНОВИДНОГО ДВОЙНИКА НА КОНЕЧНОЙ СТАДИИ ЕГО РАЗВИТИЯ

Впервые предложен способ расчета термических полей у прекратившего свое развитие некогерентного двойника. Показана эволюция данных полей с течением времени. Установлено, что в начальный момент времени тепловое поле локализуется на двойниковых границах, затем тепловой фронт развивается перпендикулярно двойниковым границам. На конечной стадии линии равных температур приобретают вид окружностей, внутри которых находится двойник. Разработанная модель позволила впервые перейти к количественному анализу влияния обусловленных пластической деформацией на двойниковых границах термических полей на характер взаимодействия двойникообразующих дислокаций.

Введение

Двойниковые гарницы являются концентриаторами больших внутренних напряжений [1]. Величина этих напряжений соизмерима с пределом текучести материала. Поэтому процесс зарождения двойников сопровождается тепловыделением на двойниковых границах. В свою очередь из-за возникающей разницы температур у двойниковых границ и в удалении от них возникают дополнительные напряжения, связанные с температурным расширением материала [2]. Величина этих напряжений, как правило, незначительная, однако достаточная для влияния на тонкие эффекты [3], наблюдаемые при двойниковании, изучение которых является важной научной задачей.

Целью данной работы стало изучение эволюции обусловленных локальной пластической деформацией при формировании границ раздела двойник – материнский кристалл тепловых выделений у сформировавшегося клиновидного двойника.

Постановка задачи

По аналогии с законами диффузии [4] температура в каждой точке тела с течением времени изменяется по закону $T = f(x, y, z, t)$, где x, y, z – координаты точки, t – время. Вид функции устанавливается решением дифференциального уравнения теплопроводности Фурье, которое для однородного изотропного тела в двумерном случае имеет вид [2, 5]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

где a – коэффициент температуропроводности.

Решение этого уравнения в случае точечного температурного источника мощностью T_p , как и в случае точечного источника элементов диффузии [4], задается выражением

$$T(x, y, t) = \frac{T_p}{4\pi at} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4at}\right). \quad (2)$$

Используя это решение, суммируя величины тепловыделения, производимые каждой точкой двойниковой границы, можно найти распределение тепла, выделенного границами сформированного двойника.

На рис. 1 представлено схематическое изображение клиновидного двойника.

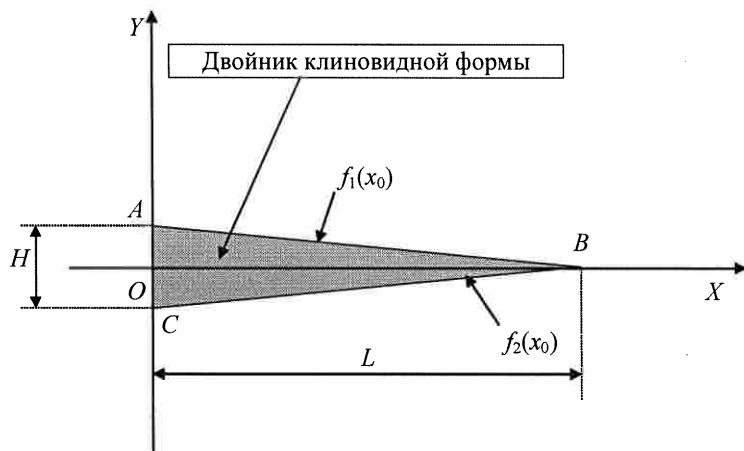


Рис. 1. Схематическое изображение клиновидного двойника

Пусть в начальный момент времени при $t = 0$ двойник прекратил свое развитие, и все количество теплоты, выделившееся в результате деформации, равномерно распределено на границах двойника. Если принять, что $T_1(x, y, t)$ и $T_2(x, y, t)$ – распределения температуры, обусловленное первой и второй границей соответственно, то распределение температуры у двойника определяется как

$$T(x, y, t) = T_1(x, y, t) + T_2(x, y, t), \quad (3)$$

где

$$T_1 = \int_{L_{AB}} T_p^{(1,0)} ds, \quad (4)$$

$$T_2 = \int_{L_{CB}} T_p^{(2,0)} ds, \quad (5)$$

криволинейные интегралы, которые сводятся к определенным интеграм вида

$$T_1(x, y, t) = \int_0^L T_p^{(1,0)}(x, y, x_0, t) \sqrt{1 + (f'_1(x_0))^2} dx_0, \quad (6)$$

$$T_2(x, y, t) = \int_0^L T_p^{(2,0)}(x, y, x_0, t) \sqrt{1 + (f'_2(x_0))^2} dx_0. \quad (7)$$

Здесь, с учетом (2), принято

$$T_p^{(1,0)}(x, y, x_0, t) = \frac{T_p^{(1)}}{4\pi at} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2 + (y - f_1(x_0))^2}{4at}\right), \quad (8)$$

$$T_p^{(2,0)}(x, y, x_0, t) = \frac{T_p^{(2)}}{4\pi at} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2 + (y - f_2(x_0))^2}{4at}\right), \quad (9)$$

где $T_p^{(1)}$ и $T_p^{(2)}$ – максимальные температуры на первой и второй границах двойника, соответственно.

Функции $f_1(x_0)$ и $f_2(x_0)$ определяют формы двойниковых границ (рис. 1). В случае прямолинейных границ [1]

$$f_1(x_0) = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{x_0}{L}\right), \quad (10)$$

$$f_2(x_0) = -\frac{H}{2} \left(1 - \frac{x_0}{L}\right), \quad (11)$$

где L – длина клиновидного двойника, H – его ширина у устья (рис. 1).

Результаты расчета температурных полей у клиновидного двойника. Результаты расчетов представлены на рис. 2 (см. стр. 64). Принималось: $L = 100$ мкм, $H = 30$ мкм, $a = 40 \cdot 10^{-6}$ Вт/(мкм К) [6], $T_p^{(1)} = T_p^{(2)} = 4$ К, температура образца условно равна абсолютному нулю. Как видно из рис. 2, в момент времени, близкий к начальному моменту, высокая температура наблюдается на двойниковых границах (рис. 2, а). С течением времени фронт высокой температуры распространяется в нормальном, по отношению к границам, направлении в прилегающие к ним области (рис. 2, б и в). Спустя 10 с область высокой температуры приобретает вид окружности, внутри которой находится клиновидный двойник (рис. 2, г).

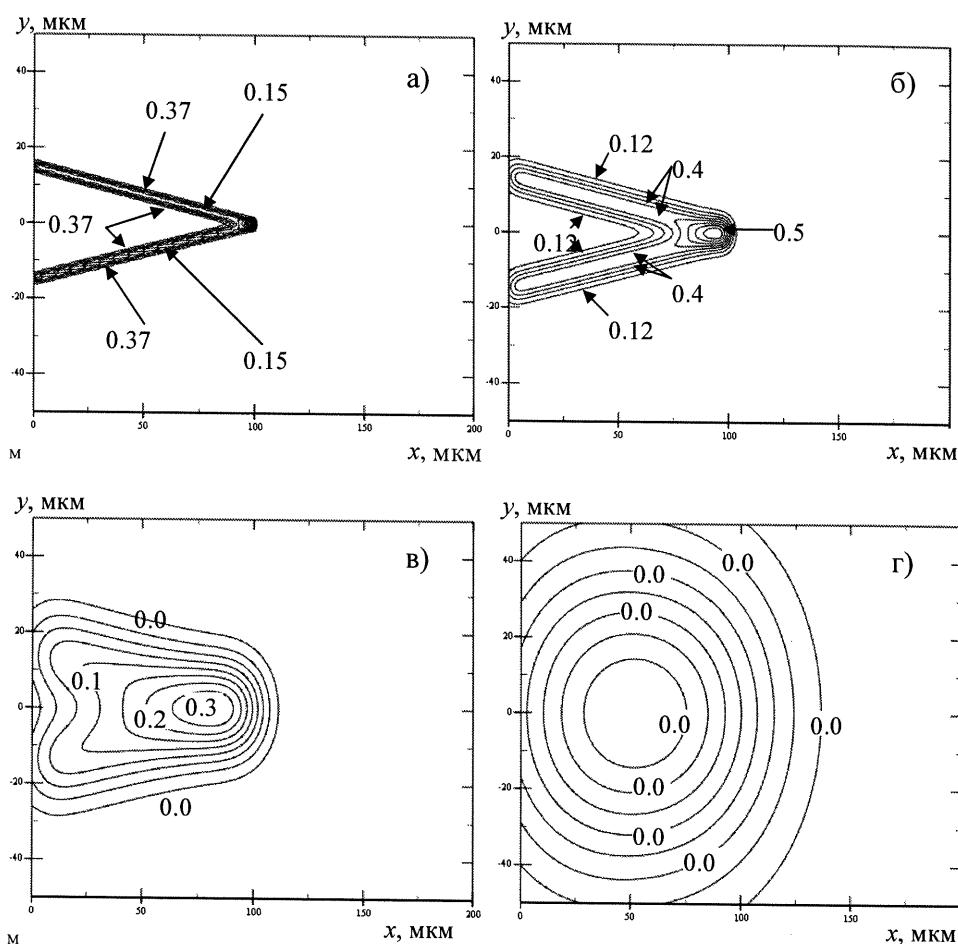


Рис. 2. Распределение температуры у клиновидного двойника при $t = 0,01$ с (а); $t = 0,1$ с (б); $t = 1$ с (в); $t = 10$ с (г)

В результате термического расширения твердых тел напряжения и деформации в них пропорциональны температуре [2]. Поэтому в начальный момент времени после формирования клиновидного двойника на его границах наблюдается высокий уровень напряжений, которые в процессе междислокационного взаимодействия способствуют отталкиванию двойникующих дислокаций друг от друга [1, 7]. Так как уровень термических напряжений на двойниковых границах с течением времени падает, то отталкивание двойникующих дислокаций способствует формированию неустойчивой формы двойника, которая приходит в равновесное состояние в процессе падения уровня термических напряжений. Согласно данным расчетов, представленным на рис. 2, неустойчивое состояние двойниковых границ после их остановки длится не более 0,1 с.

С другой стороны, двойникование, как и другие дислокационные процессы, является термоактивируемым [8, 9]. Поэтому изменяющиеся во времени тепловыделения на двойниковых границах делают их дислокационную систему

му неустойчивой. Экспериментально данный процесс изучить достаточно трудно. В связи с чем, предложенный в данной работе подход расчета термических полей у двойниковых границ открывает возможности для изучения термоактивируемых процессов на конечных стадиях развития двойников.

Заключение

Таким образом, разработана методика расчета, позволяющая рассчитывать термические распределения, обусловленные выделением тепла на границах заклинившегося двойника на конечной стадии его развития. Методика может быть использована для изучения эволюции термоупругих полей напряжений и термической активации дислокационных процессов на границах двойника после завершения его развития.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Остриков, О.М.* Механика двойникования твердых тел : монография / О.М. Остриков. – Гомель : УО “ГГТУ им. П.О. Сухого”, 2008. – 301 с.
2. *Старовойтов, Э.И.* Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э.И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.
3. *Мазилова, Т.И.* Тонкая структура когерентных двойниковых структур / Т.И. Мазилова, И.М. Михайловский, Е.И. Луговская // Физика низких температур. – 2000. – Т. 26. – № 12. – С. 1241–1244.
4. *Лариков, Л.Н.* Структура и свойства металлов и сплавов. Диффузия в металлах и сплавах : справочник / Л.Н. Лариков, В.И. Исайчев. – Киев : Наукова думка, 1987. – 512 с.
5. *Старовойтов, Э.И.* Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э.И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2004. – 343 с.
6. Физический практикум / под ред. Г.С. Кембровского. – Минск : Университетское, 1986. – 352 с.
7. *Классен-Неклюдова, М.В.* Механическое двойникование кристаллов / М.В. Классен-Неклюдова. – М. : АН СССР, 1960. – 262 с.
8. *Хирт, Дж.* Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М. : Атомиздат, 1972. – 600 с.
9. *Солдатов, В.П.* Механизм расширения двойниковой прослойки в кристаллах кальцита / В.П. Солдатов, В.И. Старцев, Н.М. Чайковская // Физика твердого тела. – 1971. – Т. 13. – № 11. – С. 3153–3159.

Поступила в редакцию 04.08.2011 г.

УДК 581.143:577.171.7

И.А. ЖАРИНА

ВЛИЯНИЕ ФУНДАЗОЛА И ЭПИНА НА МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ СТЕБЛЯ ЛЬНА-ДОЛГУНЦА

Применение Фундазола способствует увеличению общей высоты стебля растений льна и технической длины, но комплекс фунгицида и росторегулятора Эпина более эффективен. Реакция на препараты имеет сортовую специфику и

больше выражена у раннеспелого сорта Вита по сравнению с позднеспелым Могилевским. Использование препаратов в большей степени увеличивает техническую длину стебля, в меньшей – общую высоту растений. Эффективность препаратов снижается в условиях неблагоприятного по метеорологическим показателям вегетационного периода, однако же их использование позволяет смягчать отрицательное воздействие среды на растения.

Введение

В условиях формирования экономических связей нового уровня Республика Беларусь имеет возможность занять достойное место на мировом рынке льнопродукции. В решении этой задачи главную роль следует отводить поиску путей повышения продуктивности льна и качества волокна, в том числе и за счет повышения устойчивости растений к неблагоприятным факторам среды. Для достижения этих целей большое значение имеет активное внедрение в производство прогрессивных технологий возделывания и лучших районированных сортов льна-долгунца. В свою очередь, названные технологии основываются на использовании различного рода химических препаратов (пестицидов) и неразрывно с ними связаны [1, 2]. Важным резервом повышения продуктивности сельскохозяйственных культур является также использование физиологически активных веществ, оказывающих регуляторное действие на рост, развитие, изменение многих метаболических процессов растения и приводящих к усилению адаптационных свойств растительного организма.

Перспективный подход для комплексной защиты льна-долгунца – создание композиций на основе фунгицидов и регуляторов роста. Отдельные фунгициды оказывают токсикологический эффект на растительный организм и в то же время их применение остается крайне актуальным, поскольку возбудители грибных болезней наносят большой урон урожаю. К тому же быстро изменяющиеся в настоящее время климатические условия требуют введения новых форм и технологий выращивания растений с целью минимального воздействия на окружающую среду [3, 4]. Использование регуляторов роста, как веществ, повышающих адаптационные способности растений, позволяет уменьшать дозы химических средств защиты (фунгицидов, гербицидов), что снижает материальные и трудовые затраты, пестицидную нагрузку на почву и природу в целом. Имеются данные, что применение смесей пестицидов с микроэлементами и физиологически активными веществами позволяет снизить заболеваемость посевов, увеличить урожайность семян и соломы, выход льноволокна и его качество [5-8]. Все эти особенности, а также появление новых регуляторов роста и высокая избирательность различных генотипов к действию препаратов вызывает необходимость более детального изучения их влияния. Сравнение особенностей действия физиологически активных веществ и их композиций с пестицидами на рост и развитие растений льна позволит успешно использовать их для повышения продуктивности и качества такой стратегически важной культуры для нашей Республики, как лен-долгунец.

Для установления влияния физиологически активных веществ и пестицидов на рост стебля льна-долгунца были заложены мелкоделяночные полевые опыты на агробиостанции “Любуж” УО “Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова” в 2008 и 2009 гг. Почва опытного участка – дерново-подзолистая легко суглинистая. Предшественником льна был клевер. Агротехника общепринятая. Учетная площадь каждого варианта составляла 1 м². Повторность четырехкратная. Испытывалось действие Фундазола – универсального фунгицида защитного и искореняющего системного действия [9] и экологически безопасного стимулятора роста и развития растений Эпина – препарата на основе эпибрассинолида, который относится к классу природных фитогормонов – брацисиостериоидов. С целью определения поливалентности действия данных физиологически активных веществ в зависимости от генотипа льна-долгунца, были выбраны два сорта: позднеспелый сорт Могилевский и раннеспелый сорт Вита – оба стандарты в своих группах спелости и широко районированы в Республике Беларусь. Внесение физиологически активных веществ осуществлялось в ходе предпосевной обработки семян полусухим методом. Для увеличения удерживаемости препаратов и улучшения санитарно-гигиенических условий труда применялся прилипатель, который представлял собой 5%-й крахмальный гель, расход раствора – 5 литров на 1 тонну семян. Препараты использовались в рекомендуемых концентрациях: Фундазол – 1 г/л, Эпин – 0,5 мл/л. Семена обрабатывались в следующих вариантах: 1) контроль – не обработанные семена – (К); 2) раствор Фундазола – (Ф); 3) раствор Фундазола + Эпин – (Ф+Э).

После появления всходов с интервалом в 7 дней определяли общую высоту растений (ОВ) – длина стебля от корневой шейки до верхней точки стебля, техническую длину (ТД) – длина стебля от корневой шейки до разветвления стебля и диаметр стебля в нижней, средней и верхней части стебля. Выбранные показатели являются важными, так как в льноводстве ценным сырьем для дальнейшего использования в производстве считается длинное и тонкое волокно, которое получают из длинных и тонких стеблей. Для производства волокна используют среднюю часть стебля. Но, с другой стороны, тонкий стебель делает растение неустойчивым к полеганию, что затрудняет уборку, снижает урожайность и качество волокна.

Как показано многочисленными исследованиями, предпосевная обработка фунгицидами позволяет защитить посевной материал от различного рода инфекции, что положительно сказывается в последующем на росте растений, продуктивности и качестве урожая. Тем не менее, отдельные фунгициды оказывают токсикологический эффект на растительный организм. В проведенных нами исследованиях установлено, что обработка семян препаратами Фундазол и Эпин благоприятно сказывается на увеличении длины стебля.

В таблице 1 представлена динамика роста стебля льна-долгунца сорта “Могилевский” в разные фазы развития растения (приведенные дан-

ные соответствуют окончанию указанных фаз). Во все периоды комплекс Ф+Э был более эффективным, чем Ф. Максимальное увеличение ТД стебля по отношению к контролю в варианте с Ф составило 22,4% в фазу бутонизации, минимальное – 1,4% в фазу быстрого роста. В варианте Ф+Э максимальное увеличение составило 23,9% в фазу бутонизации, минимальное – 8,7% в фазу быстрого роста.

Таблица 1

**Влияние Фундазола и Эпина на длину стебля
растений льна сорта Могилевский
(средние данные по годам)**

Вариант	Фазы развития											
	Всходы		"Елочка"		Быстрый рост		Бутонизация		Цветение		Созревание	
	ТД, см	ОВ, см	ТД, см	ОВ, см	ТД, см	ОВ, см	ТД, см	ОВ, см	ТД, см	ОВ, см	ТД, см	ОВ, см
К	-	4,3±0,7	-	16,9±1,9	43,2±2,7	51,8±2,9	59,7±4,7	73,3±5,1	84,9±4,6	99,5±4,2	91,0±4,4	105,8±4,2
Ф	-	4,9±0,9	-	18,7±2,1	43,8±2,7	53,2±3,0	73,1±5,0	79,9±5,1	93,0±4,4	108,0±4,0	101,0±4,3	115,7±3,8
Ф+Э	-	5,5±0,7	-	19,8±1,7	47,0±2,5	63,2±3,2	74,0±4,4	80,8±4,8	94,1±4,3	107,5±4,8	103,4±3,7	120,2±4,0

Увеличение ОВ относительно контроля стебля льна в варианте с Ф составляло от 2,7% в фазы бутонизации и цветения до 13,9% в фазу всходов. В варианте Ф+Э максимальное увеличение достигало 27,9% в фазу всходов, минимальное – 8,0% в фазу цветения. Однако следует отметить, что, несмотря на значительные различия средних величин, достоверные различия между контрольным и опытными вариантами отмечены лишь в фазы бутонизации, цветения и созревания (в таблице выделены жирным). Варианты Ф и Ф+Э достоверно не различались.

Реакция раннеспелого сорта Вита на воздействие препаратов имела особенности. Согласно таблице 2 максимальное увеличение ОВ стебля в варианте с Ф составило 100% в фазу всходов, минимальное – 6,0% в фазу бутонизации по отношению к контролю. В варианте Ф+Э ОВ превышала контроль на 115% в фазу всходов и лишь на 13,8% в фазу созревания.

Таблица 2

**Влияние Фундазола и Эпина на длину стебля
растений льна сорта Вита
(средние данные по годам)**

Вариант	Фазы развития											
	Всходы		"Елочка"		Быстрый рост		Бутонизация		Цветение		Созревание	
	ТД, см	ОВ, см	ТД, см	ОВ, см	ТД, см	ОВ, см	ТД, см	ОВ, см	ТД, см	ОВ, см	ТД, см	ОВ, см
К	-	2,6±0,6	-	15,5±2,0	42,2±2,2	54,2±2,3	62,0±3,8	74,5±4,2	86,9±4,4	102,5±4,7	92,0±4,0	108,0±4,3
Ф	-	5,2±0,8	-	17,0±1,8	43,5±1,8	59,7±2,0	73,0±3,6	79,0±4,0	92,5±4,2	110,0±4,6	103,0±4,1	118,0±4,6
Ф+Э	-	5,6±0,8	-	20,5±1,6	58,0±1,9	64,0±2,0	75,1±3,9	85,2±4,2	95,2±4,2	119,5±4,4	109,0±3,7	123,0±3,9

Максимальное увеличение ТД стебля при использовании фундазола составило 17,7% в фазу бутонизации, минимальное – 3,1% в фазу быстрого роста. В варианте Ф+Э превышение контрольных показателей составляло: максимум 37,4% в фазу быстрого роста, минимум – 9,5% в фазу цветения. Изучаемые показатели раннеспелого сорта достоверно различались в вариантах практически во время всего периода вегетации (в таблице выделены жирным).

В отношении влияния физиологически активных веществ на диаметр стебля растений льна установлено, что оба исследуемых сорта имели сходную зависимость изменения этого показателя от используемых препаратов и достоверных различий в реакции сортов не было выявлено. Также не всегда достоверно различались между собой варианты. Кроме того, эффект в значительной степени определялся метеорологическими условиями в течение вегетационного периода.

В более засушливом 2008 г. во всех случаях использование Фундазола приводило к увеличению диаметра стебля на 5,8 – 25,0% относительно контроля (рис. 1). Диаметр стебля в разных частях (нижняя, верхняя, средняя трети) изменялся неодинаково. В средней части стебля максимальные показатели отмечены на 56–70 день – на 20% больше контроля в варианте с Ф и на 10% в варианте Ф+Э, а в верхней и нижней трети – в конце вегетации, на 84–91 дни. Больше всего возрастал диаметр верхней трети стебля – в варианте с Фундазолом он превышал контроль на 25,0%, а в варианте Ф+Э – на 12,5%, в нижней трети стебля показатели составили соответственно 19,0% и 9,5%.

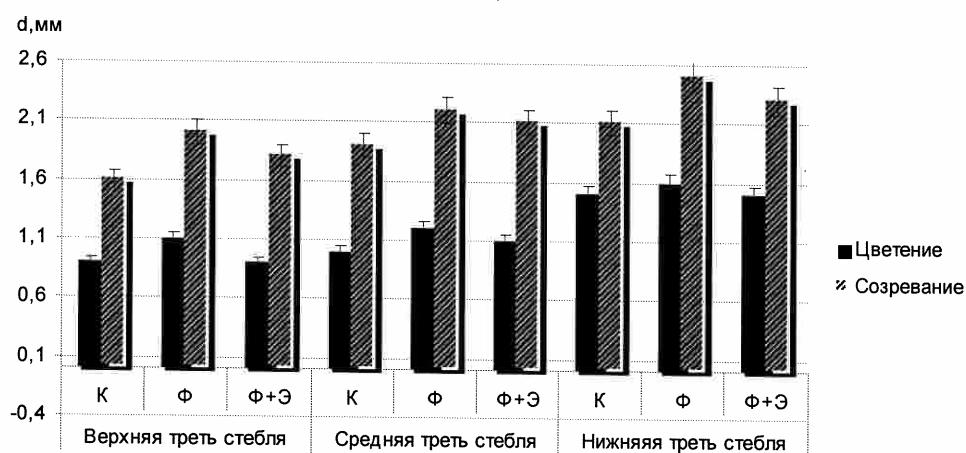


Рис. 1. Влияние Фундазола и Эпина на диаметр стебля растений льна-долгунца сорта Вита (2008 г.)

Результаты влияния Фундазола и его смеси с Эпином на диаметр стебля растений льна в 2009 г. были иными (рис. 2). Увеличение диаметра стебля под воздействием Фундазола было выражено меньше. Максимально за учетный период диаметр верхней трети возрос по сравнению с контролем при воздействии фунгицида на 11%, нижней – на 6,25%, а в средней трети увеличения не отмечалось вообще. Использование для обработки семян композиции фунгицида и росторегулятора привело к возрастанию диаметра стебля растений в верхней трети в среднем за учет на 11,3%, диаметр средней и нижней третей был близок к контролю или даже меньше. Максимальное увеличение диаметра отмечено в фазу цветения.

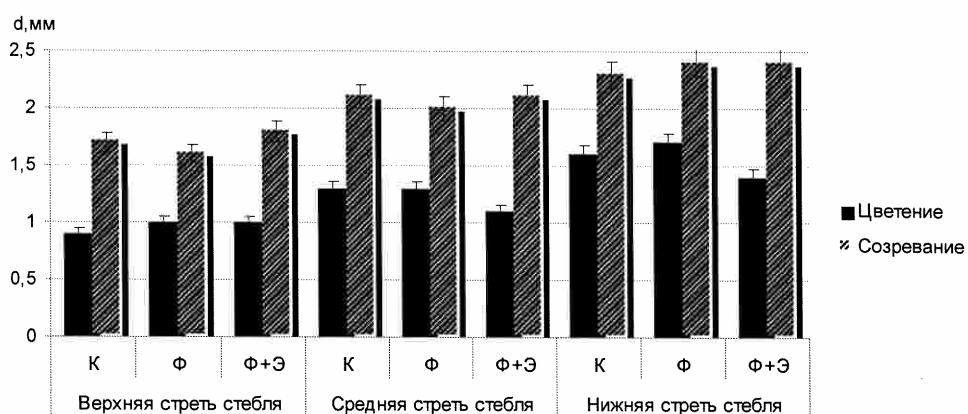


Рис. 2. Влияние Фундазола и Эпина на диаметр стебля растений льна-долгунца сорта Вита (2009 г.)

Различие показателей по годам вероятнее всего объясняются тем, что в менее благоприятных климатических условиях 2008 г. проявился или усугубился токсический эффект фунгицида на рост стебля растений льна. Известно, что в засушливые годы в нижней части стебля формируется небольшое количество элементарных волоконец. При этом они более крупные в поперечном сечении, преимущественно овальной формы, степень их одревеснения большая. Вторичная ксилема занимает значительно большую площадь, чем в нормальные по увлажнению годы, а кора и лубяные пучки, наоборот, развиты слабо. При таких условиях увеличивается диаметр стебля, а содержание волокнистых веществ в соломке и гибкость волокна низкие. Влияние фунгицидов на анатомическое строение стебля льна аналогично. В такой ситуации применение регуляторов роста растений позволяет смягчать отрицательное воздействие на формирование урожая неблагоприятных метеорологических условий и использование для предпосевной обработки семян смеси Ф+Э более предпочтительно, так как утолщение стебля менее значительное, чем при использовании Фундазола.

В дождливые годы элементарные волоконца в значительном количестве образуются во всех частях стебля. Они имеют сравнительно небольшой поперечный диаметр. Древесина в стеблях развита значительно слабее, а кора и лубяные пучки – сильнее. Выход волокнистых веществ из соломки в таких условиях высокий, однако, гибкость, и, особенно крепость волокна сравнительно низкие. Это может быть следствием полегания льна из-за избытка влаги. Элементарные волоконца не дозревают, и толщина их стенок незначительна, а степень одревеснения высокая. В таком случае увеличение диаметра стебля будет положительно сказываться на урожайности и качестве продукции.

Таким образом, Фундазол увеличивает общую высоту стебля растений льна и техническую длину, но комплекс фунгицида и росторегулятора Эпина более эффективен. Ярче реакция на препараты выражена у раннеспелого сор-

та Вита. При этом больше возрастает техническая длина стебля, меньше общая высота растений, однако разница незначительная и зависит от сорта. Эффективность препаратов снижается в условиях неблагоприятного по метеорологическим показателям вегетационного периода, однако же их использование позволяет смягчать отрицательное воздействие среды на растения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Ивашко, Л.В.* Новые сорта льна – залог стабильного и качественного урожая / Л.В. Ивашко, В.З. Богдан, И.А. Голуб. – Институт льна НАН Беларуси, 2006. – 24 с.
2. Рекомендации по возделыванию льна-долгунца / РУП “Научно-практический Центр Национальной Академии Наук по Земледелию”, “Институт льна”, “Институт по защите растений” ; сост. И.А.Голуб [и др.] – Устье, 2007. – 19 с.
3. *Миренков, Ю.А.* Интегрированная защита льна-долгунца от вредителей, болезней и сорняков в Республике Беларусь : лекция / Ю.А. Миренков, П.А. Саскевич, С.Н. Козлов. – Горки : БГСХ, 2004. – 28 с.
4. *Протасов, Н.И.* Химическая защита растений: учебник / Н.И. Протасов, П.А. Саскевич, Н.А. Лукьянук. – Минск : Новое знание, 2004. – 218 с.
5. *Кукреш, С.П.* Эффективность биопрепаратов и регуляторов роста при разных уровнях минерального питания льна-долгунца : монография / С.П. Кукреш. – Минск : Экоперспектива, 2009. – С. 9–10.
6. *Сорока, С.В.* Химический метод в интегрированной защите растений : лекция / С.В. Сорока, Ю.А. Миренков, П.А. Саскевич. – Горки : БГСХА, 2005. – 12 с.
7. Технологии применения регуляторов роста растений в земледелии : методическое пособие / МНТЦ “Агробиотех” НАН Украины и МОН Украины ; сост.: С.П. Пономоренко, Л.А. Анишин [и др.]. – Киев, 2003. – 46 с.
8. *Ходянякова, С.Ф.* Эффективность обработки семян льна-долгунца росторегуляторами // С.Ф. Ходянякова // Ахова раслин. – 2002. – № 6. – С. 9.
9. Каталог пестицидов и удобрений, разрешенных для применения в Республике Беларусь / Министерство сельского хозяйства Республики Беларусь, Государственное учреждение “Главная государственная инспекция по селеноводству, карантину и защите растений”. – 2005.

Поступила в редакцию 26.09.2011 г.

УДК 631.527.33

Е.Ю. ИВАНЦОВА

ОЦЕНКА ЛЕЖКИХ ФОРМ ТОМАТА (LYCOPERSICON ESCULENTUM MILL.) ПО ПРИЗНАКАМ БИОХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА ПЛОДОВ В ДИАЛЛЕЛЬНЫХ СКРЕЩИВАНИЯХ

В результате проведенных исследований выделен исходный материал для селекции томата защищенного грунта в условиях Беларуси по признакам биохимического состава плодов. Выявлены изменения биохимических признаков в результате хранения у лежких плодов томата.

Введение

Благодаря высокому содержанию биологически активных веществ овощи являются важнейшим продуктом в научно обоснованной системе рационального питания человека. Создание сортов томата, сочетающих высокую продуктивность, качество и способность храниться длительный период позволит решить проблему обеспечения потребителя высокопитательными плодами на протяжении всего года. Однако динамика биохимических изменений в процессе созревания лежких плодов томата в условиях Беларуси изучена недостаточно, поэтому целью наших исследований являлась оценка изменений биохимического состава плодов в результате хранения у лежких и нележких форм томата.

Содержание экстрактивных веществ (сахаров, кислот, пектина, витаминов, минеральных солей) в плодах томата в значительной степени определяет их качество. В результате исследований [1, 2, 3] установлена значительная изменчивость по этим показателям в зависимости от сорта, условий возделывания и степени зрелости плодов. Например, выявлено [4], что плоды, выращенные в зимне-весенное время и хранившиеся 83 дня, содержали больше аскорбиновой кислоты, сухих веществ, сахаров, кислотность их была выше, чем у других зрелых плодов, снятых с куста без хранения.

На успешное хранение плодов и их биохимические показатели влияет подбор условий, замедляющих необратимые процессы созревания и старения, ведущие к размягчению и гибели плодов. Плоды, дозаренные в условиях холодного хранения ($+6^{\circ}\text{C}$ – $+12^{\circ}\text{C}$), содержали меньше сухих веществ, сахаров и более низкий сахарокислотный индекс, чем созревшие в поле [5].

Объекты и методы исследования

Объектом исследований послужили 7 родительских форм тепличных томатов, различающихся по морфологическим признакам и 21 гибридная комбинация. Для гибридизации по диаллельной схеме использовались: линия № 4, линия № 10, Мо 950, Мо 577, Мо 948, линия Б-2-6 и линия Z-1-3. Мутантные формы Мо 950, Мо 577, Мо 948 несут гены лежкости Alcobaca, Rin, Nor соответственно. Испытаны гибриды и родительские формы в пленочных теплицах опытного поля УО “Белорусская государственная сельскохозяйственная академия”.

Для проверки качества хранившейся продукции в нерегулируемых условиях проводили анализ биохимических признаков плодов в молочной и полной степени зрелости. Общее содержание сухих веществ определяли рефрактометрически, сумму сахаров – по методу Бертрана, общую кислотность устанавливали титрованием водного экстракта щелочью.

Результаты и их обсуждение. В таблицах 1 – 3 представлены данные по общему содержанию сухих веществ, сахаров и титруемых кислот в плодах томата молочной и полной степени зрелости. Полученные данные показали, что содержание всех этих веществ в результате хранения

снизилось. Другие авторы [4, 5] также пришли к выводу, что при хранении плодов содержание сухих веществ, сахаров, кислот чаще уменьшалось, чем увеличивалось.

Важным показателем качества томатов служит содержание сухих веществ. Их изменение при хранении определяется интенсивностью дыхания и скоростью потери влаги. Изменение содержания сухих веществ лишь на 1% в томатном сырье оказывает влияние на качество томатной пасты и ее выход в пределах 15 – 20% [4].

В таблице 1 представлены средние значения по количеству сухих веществ в плодах диаллельных образцов томата. Сравнивая образцы, отметим, что в большинстве случаев при закладке на хранение нележкие плоды отличались меньшим содержанием сухих веществ – среднее суммарное содержание 7,19%, у лежких – 7,32%. Самым высоким этот показатель был у гибридов в качестве родителей, у которых выступали мутантные формы: Мо 950 x Мо 577 (7,81%) и Мо 950 x Мо 948 (7,60%). При снятии с хранения суммарное содержание сухих веществ в плодах всех форм снизилось, в лежких томатах этот показатель был чуть ниже (6,66%), чем у нележких (6,77%).

Таблица 1
Содержание сухих веществ (%) в плодах тепличного томата
до (1) и после (2) хранения в диаллельных скрещиваниях

Наименование образца	(1)			(2)		
	2002 г.	2003 г.	среднее	2002 г.	2003 г.	среднее
Мо 950 x Б-2-6	7.21	7.81	7.51	6.87	6.74	6.80
Мо 950 x Z-1-3	6.90	7.50	7.20	6.63	6.44	6.53
Мо 950 x №10	7.51	7.28	7.39	6.50	6.33	6.41
Мо 950 x №4	6.50	7.68	7.09	5.94	6.52	6.23
Мо 950 x Мо 948	7.73	7.47	7.60	6.99	7.53	7.26
Мо 950 x Мо 577	7.47	8.15	7.81	6.43	7.41	6.92
Б-2-6 x Z-1-3	7.48	6.80	7.17	6.91	6.48	6.69
Б-2-6 x №10	7.44	7.00	7.22	6.81	7.64	7.22
Б-2-6 x №4	7.25	6.61	6.93	6.95	6.51	6.73
Б-2-6 x Мо 948	7.66	7.19	7.42	7.00	6.63	6.81
Б-2-6 x Мо 577	7.22	6.81	7.01	6.58	6.22	6.40
Z-1-3 x №10	7.39	6.72	7.05	6.62	7.04	6.83
Z-1-3 x №4	7.20	7.40	7.30	6.81	6.52	6.66
Z-1-3 x Мо 948	7.38	7.59	7.48	6.16	7.48	6.82
Z-1-3 x Мо 577	6.48	6.86	6.67	5.77	6.37	6.07
№ 10 x №4	7.60	7.44	7.52	6.30	6.70	6.50
№ 10 x Мо 948	7.82	7.72	7.77	6.98	7.58	7.28
№ 10 x Мо 577	7.67	7.65	7.66	6.32	6.82	6.57
№4 x Мо 948	6.58	7.20	6.89	5.70	7.51	6.60
№4 x Мо 577	6.18	7.37	6.77	5.70	6.50	6.10
Мо 948 x Мо 577	7.42	7.67	7.54	7.00	7.22	7.11
Мо 950	6.77	7.40	7.08	5.91	6.92	6.41
Б-2-6	6.60	8.31	7.45	5.83	6.99	6.41
Z-1-3	7.00	8.56	7.78	6.47	8.16	7.31
№10	7.57	7.37	7.47	6.67	6.90	6.78
№4	7.55	7.89	7.72	6.85	7.20	7.02
Мо 948	7.79	7.30	7.54	7.47	7.01	7.24
Мо 577	7.46	6.68	7.07	7.21	6.61	6.91
Полымя (стандарт)	7.13	7.96	7.54	5.79	7.49	6.64
НСР 05	0.05	0.04		0.04	0.04	

Согласно данным И.Б. Гаранько [4], в результате хранения содержание сухих веществ в плодах снижается. Иногда количество сухих веществ у лежких образцов возрастало [6]. Возможно, это связано с подсыханием плодов в условиях относительно низкой влажности воздуха при хранении.

Наряду с сахарами, кислоты определяют вкус плодов томата. В таблице 2 представлены средние значения по содержанию титруемых кислот в плодах томата молочной и полной степени зрелости.

Таблица 2
Содержание титруемых кислот (%) в плодах тепличного томата
до (1) и после (2) хранения в диаллельных скрещиваниях

Наименование образца	(1)			(2)		
	2002 г.	2003 г.	среднее	2002 г.	2003 г.	среднее
Mo 950 x Б-2-6	0.61	0.44	0.52	0.42	0.34	0.38
Mo 950 x Z-1-3	0.64	0.46	0.55	0.36	0.41	0.38
Mo 950 x №10	0.49	0.48	0.48	0.48	0.42	0.45
Mo 950 x №4	0.51	0.52	0.51	0.32	0.45	0.38
Mo 950 x Mo948	0.91	0.50	0.70	0.46	0.40	0.43
Mo 950 x Mo577	0.82	0.41	0.61	0.51	0.39	0.45
Б-2-6 x Z-1-3	0.48	0.59	0.53	0.34	0.45	0.39
Б-2-6 x №10	0.53	0.53	0.53	0.44	0.39	0.41
Б-2-6 x №4	0.46	0.57	0.51	0.31	0.41	0.36
Б-2-6 x Mo 948	0.52	0.54	0.53	0.39	0.44	0.41
Б-2-6 x Mo 577	0.57	0.53	0.55	0.26	0.47	0.36
Z-1-3 x №10	0.72	0.54	0.63	0.34	0.40	0.37
Z-1-3 x №4	0.52	0.51	0.51	0.32	0.40	0.36
Z-1-3 x Mo 948	0.53	0.48	0.50	0.37	0.39	0.38
Z-1-3 x Mo 577	0.54	0.54	0.54	0.28	0.37	0.32
№ 10 x №4	0.52	0.50	0.51	0.33	0.46	0.39
№ 10 x Mo 948	0.50	0.48	0.49	0.47	0.47	0.47
№ 10 x Mo 577	0.60	0.52	0.56	0.30	0.40	0.35
№4 x Mo 948	0.41	0.45	0.43	0.40	0.57	0.48
№4 x Mo 577	0.46	0.50	0.48	0.39	0.41	0.40
Mo 948 x Mo577	0.68	0.50	0.59	0.38	0.44	0.41
Mo 950	0.59	0.48	0.53	0.49	0.41	0.45
Б-2-6	0.62	0.47	0.54	0.48	0.40	0.44
Z-1-3	0.63	0.48	0.55	0.39	0.43	0.41
№10	0.38	0.40	0.39	0.35	0.40	0.37
№4	0.33	0.48	0.40	0.29	0.39	0.34
Mo 948	0.56	0.50	0.53	0.49	0.37	0.43
Mo 577	0.44	0.55	0.49	0.37	0.42	0.39
Полымя (стандарт)	0.40	0.44	0.42	0.29	0.40	0.34
HCP ₀₅	0.02	0.03		0.02	0.03	

В среднем за два года при закладке на хранение плоды молочной степени зрелости всех диаллельных гибридов (таблица 2) содержали кислот на 2.4–66.6% больше, чем стандарт Полымя. Аналогичная картина наблюдалась при полном созревании плодов – контроль уступал по значениям этого признака всем гибридам на 2.9–38.2%.

Суммарное содержание органических кислот в плодах молочной степени зрелости было одинаковым у лежких и нележких форм – 0.53%. В среднем за два года в результате хранения содержание кислот в плодах всех образцов снизилось, причем у нележких форм в большей степени.

Содержание суммарной кислотности в лежких образцах изменилось с 0.53% до 0.40%, у нележких – с 0.53% до 0.38%.

В лежких плодах концентрация титруемых кислот выше, чем в нележких, значит, в этих плодах при созревании содержание органических кислот снижается медленнее в результате их использования в качестве дыхательных субстратов через цикл Кребса [7, 8]. Установлено [9], если у плодов темп снижения концентрации органических кислот оказывается выше, чем углеводов, то такие плоды к концу хранения становятся безвкусными.

С.Ф. Гавриш и В.Г. Король [10] в своих исследованиях не наблюдали снижения кислотности за время хранения плодов гибридов, несущих гены Rin и Nor.

Сахара – одна из важнейших групп запасных веществ, которые при созревании подвержены более значительным изменениям, чем другие вещества. Суммарное содержание сахаров (таблица 3) при закладке на хранение в 2002 г. было выше у нележких форм – 2.65% (у лежких – 2.30%), однако у плодов полной степени зрелости этот показатель оставался примерно на одном уровне у всех образцов – 1.61% и 1.63% соответственно. В среднем за два года содержание сахаров в плодах молочной степени зрелости было самым высоким у образцов № 10 x Mo 948 (2.57%) и Z-1-3 x № 4 (2.49%). У трех гибридов значения были на уровне стандарта Полымя (2.40%). У дозревших плодов четырех образцов были самые высокие значения данного признака: Mo 950 x Mo 948 (2.07%), Mo 948 x Mo 577 (2.03%), Б-2-6 x Mo 948 (2.00%), Z-1-3 x № 4 (1.99%). Еще четыре формы имели показатели на уровне стандарта Полымя (1.88%).

Скорость и характер превращения сахаров связаны с длительностью хранения. Для плодов ускоренный распад сахарозы является признаком окончания срока хранения [4, 5, 6]. Значит, чем медленнее протекает гидролиз крахмала, тем выше сохраняемость плодов.

Таблица 3
Содержание сахаров (%) в плодах тепличного томата
до (1) и после (2) хранения в диаллельных скрещиваниях

Наименование образца	(1)			(2)		
	2002 г.	2003 г.	среднее	2002 г.	2003 г.	среднее
Mo 950 x Б-2-6	2.04	1.97	2.00	1.35	1.85	1.60
Mo 950 x Z-1-3	2.39	1.92	2.15	1.40	2.00	1.70
Mo 950 x №10	2.23	1.82	2.02	1.66	2.18	1.92
Mo 950 x №4	2.04	1.91	1.97	1.55	1.93	1.74
Mo 950 x Mo 948	2.17	2.19	2.18	1.74	2.40	2.07
Mo 950 x Mo 577	2.48	1.54	2.01	1.82	1.69	1.75
Б-2-6 x Z-1-3	2.96	1.90	2.43	1.60	1.74	1.67
Б-2-6 x №10	2.47	2.04	2.25	2.10	1.74	1.92
Б-2-6 x №4	2.51	1.98	2.24	1.80	1.65	1.72
Б-2-6 x Mo 948	2.67	2.11	2.39	1.98	2.02	2.00
Б-2-6 x Mo 577	2.58	1.72	2.15	1.60	1.67	1.63
Z-1-3 x №10	2.69	2.05	2.37	1.82	1.90	1.86
Z-1-3 x №4	2.86	2.13	2.49	1.77	2.22	1.99
Z-1-3 x Mo 948	2.47	2.28	2.37	1.36	2.03	1.69
Z-1-3 x Mo 577	2.00	2.01	2.00	1.51	1.97	1.74

Окончание табл. 3

Наименование образца	(1)			(2)		
	2002 г.	2003 г.	среднее	2002 г.	2003 г.	среднее
№ 10 x №4	2.63	1.94	2.28	1.36	1.91	1.63
№ 10 x Mo 948	2.86	2.28	2.57	2.03	1.77	1.90
№ 10 x Mo 577	2.36	2.04	2.20	1.46	2.33	1.89
№4 x Mo 948	1.95	1.93	1.94	1.23	1.73	1.48
№4 x Mo 577	2.07	1.89	1.98	1.47	1.99	1.73
Mo 948 x Mo 577	2.24	1.87	2.05	1.88	2.18	2.03
Mo 950	2.05	1.76	1.90	1.51	2.23	1.87
Б-2-6	2.49	2.57	2.53	1.57	1.91	1.74
Z-1-3	2.72	2.70	2.71	1.35	1.92	1.63
№10	2.36	2.20	2.28	1.42	2.25	1.83
№4	2.98	2.59	2.78	1.59	2.30	1.94
Mo 948	2.19	2.17	2.18	1.92	1.87	1.89
Mo 577	2.65	1.72	2.18	1.93	1.39	1.66
Полымя (стандарт)	2.48	2.32	2.40	1.28	2.49	1.88
HCP ₀₅	0.03	0.03		0.01	0.03	

Известно [5, 9], что в процессе хранения у плодов томата повышается содержание аскорбиновой кислоты, в среднем на 2-3%, что повышает биологическую ценность продукции. Созревание плодов характеризуется также образованием ароматических веществ, разрушением хлорофилла и дубильных веществ, накоплением антоцианов, каротиноидов [5, 9].

Заключение

1. В процессе созревания лежких и нележких плодов томата содержание сухих веществ, органических кислот и сахаров снижается.
2. Среди изучаемых лежких гибридов за два года исследований выделились формы (Б-2-6 x Mo 948, №10 x Mo 577, Mo 950 x Z-1-3), биохимические признаки которых в созревших плодах находились в пределах нормы, что подтверждает практическую значимость использования в селекции гетерозиготных гибридов с генами Alc, Rin, Nor.
3. Физиологико-биохимические процессы созревания в плодах лежких форм происходят менее интенсивно, что предопределяет их более длительную сохранность.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Влияние погодных условий и типа субстрата на биохимический состав томатов в тепличных хозяйствах Беларуси / А.А. Аутко [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. аграрных навук. – М., 2003. – № 3. – С. 49–56.
2. Гавриш, С.Ф. Некоторые биологические особенности несущих ген пола гибридов F1 томата / С.Ф. Гавриш, В.Г. Король // Изв. ТСХА. – 1991. – № 1. – С. 118–132.
3. Лукьяненко, А.Н. Химический состав плодов томатов разной прочности / А.Н. Лукьяненко, Э.Х. Лукьяненко // Докл. ВАСХНИЛ. – 1981. – № 7. – С. 11–13.
4. Гаранько, И.Б. Длительное хранение плодов тепличных томатов и изменчивость их химического состава / И.Б. Гаранько, В.В. Воскресенская // Сб. науч. тр. по прикл. ботанике, генетике и селекции, ВИР. – 1986. – Т. 102. – С. 79–85.

5. Физиолого-биохимические основы повышения продуктивности и устойчивости растений / Б.М. Кахана [и др.] // Особенности формирования качества томатов при одновременном дозривании и хранении плодов. – Кишинев : Штиинца. – 1986. – 125 с.
6. **Мязина, Л.А.** Биологические особенности и комплексная оценка лежкоспособных форм томата : дисс. ... к. с.-х. наук: шифр Л.А. Мязина. – Тирасполь. – 1997. – 169 л.
7. Перспективы использования генов *pog* и *rin* в селекции гибридов томата с длительным периодом хранения плодов / С.И. Игнатова [и др.] // Докл. ВАСХНИЛ. – 1985. – № 10. – С. 15–18.
8. **Бэртон, У.Г.** Физиология созревания и хранение продовольственных культур / У.Г. Бэртон. – М. : Агропромиздат, 1985. – С. 262–269.
9. **Ширко, Т.С.** Биохимия и качество плодов / Т.С. Ширко, И.В. Ярошевич. – Минск : Наука и техника, 1991. – 6 с.
10. **Гавриш, С.Ф.** Некоторые биологические особенности несущих ген *pog* гибридов F1 томата / С.Ф. Гавриш, В.Г. Король // Изв. ТСХА. – 1991. – №1. – С. 118–132.

Поступила в редакцию 15.11.2011 г.

630×181.64

Ф.Ф. БУРАК, Е.А. УСС, А.И. РЯБЧЕНКО

К ВОПРОСУ ФОРМИРОВАНИЯ СТВОЛОВ ЕЛОВЫХ ДРЕВОСТОЕВ БЕЛАРУСИ

В статье анализируется полнодревесность стволов еловых древостоев естественного и искусственного происхождения. Установлено, что распределение коры в отдельных частях ствола носит неравномерный характер: с ухудшением условий произрастания, уменьшением диаметра стволов процент толщины коры на относительных высотах увеличивается. Выявлено, что различия полнодревесности ельников искусственного и естественного происхождения для отдельных разрядов высот не выходят за пределы 3–5%, т.е. сопоставимы с точностью учета древесного запаса. Доказано, что составление объемных таблиц по разрядам высот на основе массового материала можно проводить с использованием видового числа на высоте 1,3 м и нормального видового числа.

Введение

В настоящее время лесной сектор сохраняет одно из лидирующих положений в экономике Беларуси. Поэтому оценка объектов, входящих в состав лесных фитоценозов, проводимая с целью получения данных о количестве древесины и качественном состоянии леса, является актуальной.

Дерево является самостоятельным объектом таксации, для количественной и качественной оценки которого необходимо иметь комплекс определенных измерений, таких, как состав, форма насаждения, возраст, средние высота и диаметр, бонитет, полнота, запас, товарность, тип леса и др. Одним из методов получения этих параметров является наземная таксация, при которой таксационные показатели устанавливают глазо-

мерно на основании опыта, приобретенного во время таксации пробных тренировочных площадей или перечислительным способом. При перечислительном методе все таксационные показатели получают на основе сплошного пересчета деревьев по породам измерения их диаметра и высоты с подразделением, в зависимости от целей исследования по категориям санитарного состояния или другим. С лесохозяйственной точки зрения наиболее ценной частью дерева является ствол, при таксации которого определяются следующие параметры: объем, прирост и выход сортиментов. Безусловно, первостепенная роль при таксационных изменениях принадлежит установлению объема ствола, для оценки которого важно знать полнодревесность и форму дерева, т.к. почти все объемные таблицы построены на использовании этих показателей.

Полнодревесность ствола [1, 2, 3] хорошо характеризуется видовым числом. Другим показателем формы ствола является коэффициент формы. Формирование древесных стволов происходит под влиянием многочисленных факторов внешней и внутренней среды, что обуславливает значительное варьирование их формы в абсолютных размерах.

Целью данной работы явилось выявление зависимости объема коры в относительных величинах по относительной высоте ствола дерева. Гипотеза о существовании такой зависимости возникла в процессе анализа формы поперечных сечений древесных стволов.

Материалом для исследований послужили пробные площади (и взятые на них модельные деревья), которые были заложены в еловых древостоях, назначенных для проведения рубок промежуточного пользования (в возрасте проходных рубок и прореживания). В соответствии с программой и методикой исследований для достижения статистически необходимого количества модельных деревьев в еловых насаждениях, дифференцированных по происхождению, заложено 50 ПП с рубкой и обмером 2200 модельных деревьев.

Следует отметить, что алгоритмы для статистической обработки исходных данных и их дальнейшего анализа довольно просты. Но ввиду того, что объем исходных материалов достаточно велик, их обработка вручную практически не представляется возможной. Поэтому для более эффективного процесса исследований был разработан программный модуль “Analysis of Tree Bark”. В данном модуле реализованы такие возможности, как:

- импорт исходных данных из существующей базы данных, полученной в процессе выполнения НИР задание 2.23 “Разработать сортиментные таблицы для материальной оценки древесины, заготовляемой при проведении рубок промежуточного пользования” ГНТП “Управление лесами и рациональное лесопользование”, № госрегистрации 20090191;
- вычисление диаметров на заданных относительных высотах ствола дерева;
- экспорт полученных промежуточных данных в удобном виде для дальнейшего статистического анализа.

В ходе проведения исследования видовые числа определялись путем деления объема ствола на соответствующие объемы цилиндров с высотой дерева и диаметрами, равными диаметрам на высоте 1,3 м; 0,1Н; 0,25Н; 0,5Н и 0,75Н. Значения этих показателей анализировались с применением статистических методов. Статистики распределения и изменчивости для коэффициентов, характеризующих полнодревесность ствола, приведены в таблице 1.

Из данных, приведенных в таблице 1, видно, что форма древесного ствола в еловых насаждениях в комлевой части и до половины ствола является относительно стабильным признаком с небольшой изменчивостью ($\pm 4,3\text{--}7,3\%$), которая увеличивается к вершине дерева до $\pm 14,6\text{--}17,3\%$.

Таблица 1
**Статистики распределения и изменчивости
для коэффициентов формы, видовых чисел стволов лесных культур ели,
вырубаемых при рубках ухода**

Показатель полнодревесности	Статистики распределения и изменчивости для соответствующего показателя						
	\bar{X}	σ^2	σ	m	A	E	$V, \%$
I разряд высот							
$f_{v/k}$	0,552303	0,001099	0,033148	0,002802	-0,127545	0,103654	6,0
$q_2 v/k$	0,749035	0,001715	0,041411	0,003500	-0,210424	0,254844	5,5
$f_{\text{норм}} v/k$	0,552600	0,001050	0,032400	0,002738	-0,081363	-0,226665	5,9
$f_{0,25\text{H}} v/k$	0,652102	0,000655	0,025594	0,002163	0,058843	1,227712	3,9
$f_{0,5\text{H}} v/k$	1,000106	0,003704	0,060864	0,005144	0,089500	0,415441	6,1
$f_{0,75\text{H}} v/k$	2,480443	0,131896	0,363175	0,030694	1,036172	1,234789	14,6
$f_{\delta/k}$	0,549357	0,001081	0,032883	0,002779	-0,142012	0,319565	6,0
$q_2 \delta/k$	0,747017	0,001872	0,043264	0,003657	0,100624	0,234935	5,8
$f_{\text{норм}} \delta/k$	0,550247	0,001046	0,032338	0,002733	-0,093612	-0,153875	5,9
$f_{0,25\text{H}} \delta/k$	0,642808	0,000755	0,027481	0,002323	0,136972	1,481586	4,3
$f_{0,5\text{H}} \delta/k$	0,999194	0,004249	0,065182	0,005509	0,187265	0,336714	6,5
$f_{0,75\text{H}} \delta/k$	2,595804	0,146666	0,382970	0,032367	0,933100	0,933307	14,8
II разряд высот							
$f_{v/k}$	0,557420	0,001527	0,039072	0,003363	0,072892	0,264951	7,0
$q_2 v/k$	0,744460	0,001847	0,042982	0,003699	-0,229650	0,124441	5,8
$f_{\text{норм}} v/k$	0,544558	0,001210	0,034785	0,002994	-0,010350	-0,347111	6,3
$f_{0,25\text{H}} v/k$	0,652398	0,000980	0,031304	0,002694	0,432906	0,656781	4,7
$f_{0,5\text{H}} v/k$	1,017408	0,005062	0,071147	0,006123	0,761676	0,825722	7,0
$f_{0,75\text{H}} v/k$	2,549568	0,159649	0,399561	0,034389	0,259346	-0,394458	15,7
$f_{\delta/k}$	0,552792	0,001650	0,040624	0,003496	0,043644	0,385728	7,3
$q_2 \delta/k$	0,741893	0,002129	0,046145	0,003972	-0,219057	0,057475	6,2
$f_{\text{норм}} \delta/k$	0,540823	0,001278	0,035750	0,003077	-0,127308	-0,008045	6,6
$f_{0,25\text{H}} \delta/k$	0,645028	0,001135	0,033690	0,002900	0,533712	0,791726	5,2
$f_{0,5\text{H}} \delta/k$	1,016157	0,005256	0,072496	0,006239	0,672120	0,459236	7,1
$f_{0,75\text{H}} \delta/k$	2,684612	0,215192	0,463888	0,039925	0,404092	-0,100485	17,3

Относительный средний сбег стволов ели, выраженный отношением диаметров через 0,1Н к базовому диаметру на 0,1Н от комля, характеризуется относительной стабильностью независимо от абсолютных значений высот и ступеней толщины, при этом более стабильный характер носит изменение относительных диаметров без коры. Увеличение сбегистости стволов имеет место в нижней (от пня до 0,1Н) и верхней части (на высоте 0,8-0,9Н) стволов. Средний относительный сбег ство-

лов еловых деревьев в коре (в/к) и без коры (б/к) и коэффициенты его изменчивости приведены в таблице 2.

Таблица 2
Характеристика сбежистости стволов ели (в коре и без коры)
на относительных высотах

Порода	Относительный сбег в % на относительных высотах								
	0,0	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Ель (в/к)	164,8	91,0	87,6	82,4	73,6	66,3	56,1	43,7	24,3
V, %	11,9	4,5	3,3	3,0	3,9	3,9	4,8	6,3	7,1
Ель (б/к)	158,9	90,7	87,0	82,3	70,9	64,4	53,9	41,6	22,4
V, %	10,9	2,0	2,8	3,3	3,0	2,9	4,1	5,5	5,6

Средние значения относительного сбега стволов для ели характеризуются в значительной степени устойчивой величиной с небольшой изменчивостью (2-5%), которая имеет значительное увеличение на пне (от 10 до 12%) и к вершине дерева до 6-8%.

Как видно из данных таблицы 2, полнодревесность стволов без коры в среднем (от 0,1 до 6%) больше, чем в коре.

Средний относительный сбег объема коры на относительных высотах у еловых деревьев составляет от 0,0649 до 0,394%. Величины этих показателей приведены в таблице 3.

Таблица 3
Средний относительный объем коры ели

Порода	Относительный сбег коры в % на относительных высотах								
	0,0Н	0,2Н	0,3Н	0,4Н	0,5Н	0,6Н	0,7Н	0,8Н	0,9Н
Ель	0,2522	0,0649	0,0732	0,0657	0,0823	0,1070	0,1393	0,2172	0,3940
V, %	23,7	6,8	19,4	17,8	19,9	21,8	7,5	9,1	10,6

Процент объема коры стволов по разрядам высот практически одинаков. С увеличением ступеней толщины, начиная с 6 см, процент объема коры стволов для всех пород уменьшается. С ухудшением условий местопроизрастания, падением классов бонитета и понижением разрядов высот древостоев процент толщины коры на относительных высотах стволов увеличивается. Изменение процента толщины коры на относительных высотах для разных пород в значительной степени различно, при этом коэффициент изменчивости этого показателя имеет значения от ±7 до 25%. Примечателен тот факт, что до половины высоты ствола процент толщины коры уменьшается, а затем, в зоне расположения ассимиляционного аппарата, возрастает. Это объясняется интенсивным протеканием в этой зоне биохимических процессов и накоплением структурных полимеров.

Нами проведено сравнение коэффициентов полнодревесности еловых древостоев в зависимости от происхождения. В таблице 4 приведены статистические показатели для естественных ельников.

Таблица 4
Статистики распределения и изменчивости для коэффициентов формы, видовых чисел стволов ели естественного происхождения, вырубаемых при рубках ухода

Показатель полнодревесности	Статистики распределения и изменчивости для соответствующего показателя						
	\bar{X}	σ^2	σ	m	A	E	V, %
I разряд высот							
$f_{v/k}$	0,543087	0,001512	0,038886	0,002965	0,159199	-0,109762	7,2
$q_2 v/k$	0,736239	0,001855	0,043069	0,003284	0,015874	-0,118398	5,8
$f_{\text{норм}} v/k$	0,561337	0,001054	0,032471	0,002476	0,191835	0,669354	5,8
$f_{0,25 \text{ н}} v/k$	0,664532	0,000966	0,031078	0,002370	0,089968	0,015510	4,7
$f_{0,5 \text{ н}} v/k$	1,017066	0,003889	0,062358	0,004755	0,559073	0,725903	6,1
$f_{0,75 \text{ н}} v/k$	2,475918	0,186953	0,432381	0,032969	1,148960	2,802928	17,5
$f_{\delta/k}$	0,540480	0,001450	0,038082	0,002904	0,093807	-0,156866	7,0
$q_2 \delta/k$	0,734939	0,001908	0,043684	0,003331	0,010323	-0,243340	5,9
$f_{\text{норм}} \delta/k$	0,556932	0,000937	0,030611	0,002334	0,073443	0,150407	5,5
$f_{0,25 \text{ н}} \delta/k$	0,655617	0,000947	0,030779	0,002347	0,139982	-0,000328	4,7
$f_{0,5 \text{ н}} \delta/k$	1,015431	0,003819	0,061800	0,004712	0,641911	1,015312	6,1
$f_{0,75 \text{ н}} \delta/k$	2,570309	0,219091	0,468072	0,035690	1,325190	3,452868	18,2
II разряд высот							
$f_{v/k}$	0,540700	0,001930	0,043929	0,003563	0,155314	0,34791	8,1
$q_2 v/k$	0,730558	0,002417	0,049163	0,003988	-0,141492	1,63174	6,7
$f_{\text{норм}} v/k$	0,556242	0,001770	0,042075	0,003413	-0,930912	4,21700	7,6
$f_{0,25 \text{ н}} v/k$	0,664944	0,000975	0,031224	0,002533	0,376341	0,94329	4,7
$f_{0,5 \text{ н}} v/k$	1,027214	0,005674	0,075329	0,006110	1,647526	7,71095	7,3
$f_{0,75 \text{ н}} v/k$	2,582413	0,296465	0,544486	0,044164	2,060178	9,10725	21,1
$f_{\delta/k}$	0,539877	0,001909	0,043696	0,003544	0,152332	0,63419	8,1
$q_2 \delta/k$	0,730701	0,002551	0,050509	0,004097	-0,261594	2,87982	6,9
$f_{\text{норм}} \delta/k$	0,552781	0,001705	0,041292	0,003349	-0,943226	4,81815	7,5
$f_{0,25 \text{ н}} \delta/k$	0,656212	0,001020	0,031938	0,002591	0,162040	-0,21233	4,9
$f_{0,5 \text{ н}} \delta/k$	1,026577	0,006675	0,081698	0,006627	1,956396	10,43656	8,0
$f_{0,75 \text{ н}} \delta/k$	2,706521	0,421985	0,649603	0,052690	2,482999	11,26337	24,0

Для оценки различий в значениях коэффициентов полнодревесности между деревьями естественного и искусственного происхождения нами изучена внутригрупповая вариация соответствующих показателей, результаты которой приведены в таблице 5.

Таблица 5
Степень различия между средними параметрами коэффициентов полнодревесности в двух группах (ельниках естественного и искусственного происхождения) I разряда высот

Сравниваемые параметры	\bar{X}_1	\bar{X}_2	t-тест	Степень свободы (df)	p	σ_1	σ_2	F-тест	p
$f_{v/k}$	0,552303	0,543087	2,222859	310	0,026946	0,033148	0,038886	1,376163	0,050769
$q_2 v/k$	0,749035	0,736239	2,655435	310	0,008330	0,041411	0,043069	1,081715	0,631742
$f_{\text{норм}} v/k$	0,552600	0,561337	-2,36629	310	0,018582	0,032400	0,032471	1,004401	0,982783
$f_{0,25 \text{ н}} v/k$	0,652102	0,664532	-3,79863	310	0,000175	0,025594	0,031078	1,474418	0,017719
$f_{0,5 \text{ н}} v/k$	1,000106	1,017066	-2,41503	310	0,016313	0,060864	0,062358	1,049707	0,768717
$f_{0,75 \text{ н}} v/k$	2,480443	2,475918	0,098682	310	0,921455	0,363175	0,432381	1,417431	0,032942
$f_{\delta/k}$	0,549357	0,540480	2,175806	310	0,030325	0,032883	0,038082	1,341277	0,072295
$q_2 \delta/k$	0,747017	0,734939	2,439300	310	0,015276	0,043264	0,043684	1,019505	0,909391
$f_{\text{норм}} \delta/k$	0,550247	0,556932	-1,87041	310	0,062369	0,032338	0,030611	1,115993	0,493292
$f_{0,25 \text{ н}} \delta/k$	0,642808	0,655617	-3,83458	310	0,000152	0,027481	0,030779	1,254382	0,164961
$f_{0,5 \text{ н}} \delta/k$	0,999194	1,015431	-2,25206	310	0,025018	0,065182	0,061800	1,112435	0,505870
$f_{0,75 \text{ н}} \delta/k$	2,595804	2,570309	0,518485	310	0,604490	0,382970	0,468072	1,493806	0,014271

Из данных, приведенных в таблице 5, видно, что статистически значимые различия имеют место в значении средних показателей коэффициентов формы (в коре и без коры). Приемлемые границы статистической значимости отмечаются для нормальных видовых чисел (в коре и без коры), видовых чисел на половине высоты ствола (в коре и без коры), видовых чисел на высоте 1,3 м (в коре и без коры). Высоко значимыми различиями характеризуются видовые числа на четверти высоты ствола (в коре и без коры). В то же для показателей видовых чисел на 0,75 высоты различия средних значений не являются достоверными, что связано с высокой вариабельностью данного показателя.

В сравнении дисперсий анализируемых групп различия носят иной характер: так, приемлемые границы статистической значимости отмечаются для показателей видового числа на высоте груди (в коре и без коры), видовых чисел на четверти и трех четвертых высоты ствола (в коре и без коры). Это обстоятельство свидетельствует о том, что степень изменчивости показателей формы ствола (мера концентрации значений в группе вокруг среднего) оказывает существенное влияние на достоверность различий показателей полнодревесности. В свою очередь, этот факт выявляет необходимость для определения сходства и различия в строении древостоеев, дифференцированных по происхождению, изучения показателей степени подобия таксационных параметров, в некоторой степени нивелирующих различия коэффициентов формы на относительных высотах (например, объема ствола).

Множественная корреляция между видовым числом, коэффициентом формы и высотой деревьев в еловых древостоях (I разряда высот) естественного происхождения выражалась следующим уравнением Шиффеля (уравнение 1):

$$f_{1,3} = 0,542091 \cdot q_2^2 + \frac{0,111374}{q_2 \cdot H} + 0,240379 \quad R=0,88695. \quad (1)$$

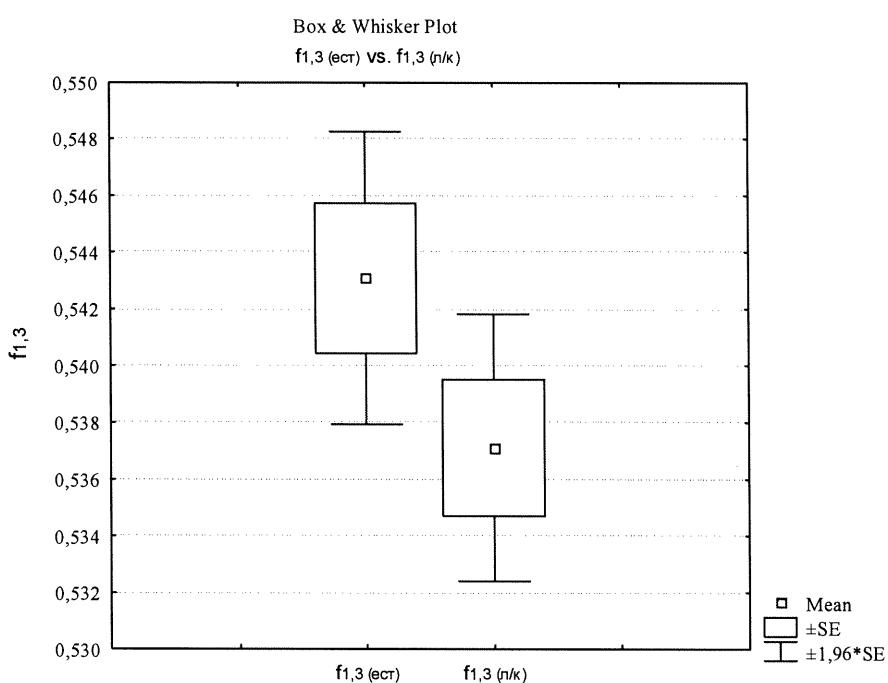
Для еловых культур (I разряда высот) вышеупомянутое выражение имеет следующие параметры (уравнение 2):

$$f_{1,3} = 0,491732 \cdot q_2^2 + \frac{0,245074}{q_2 \cdot H} + 0,252344 \quad R=0,89470. \quad (2)$$

Исходя из полученных уравнений, вычислены видовые числа, характеризующие полнодревесность стволов. Различия полнодревесности стволов ельников искусственного и естественного происхождения не выходят за пределы 3-5%, т.е. сопоставимы с точностью учета древесного запаса.

Анализ расчетных показателей видовых чисел для сравнения средних и меры отклонения от среднего в группах (первой из которой выступает – ель естественная, а второй – лесные культуры) проведено с использованием t-критерия. Диаграмма размаха вышеуказанных показателей полнодревесности приведена ниже (рисунок).

Диаграмма размаха, характеризующая внутригрупповую вариацию видовых чисел



Следует отметить, что видовые числа стволов еловых деревьев в зависимости от их диаметра и высоты во всех лесорастительных подзонах изменяются практически одинаково (достоверных отличий не выявлено).

В условиях рыночной экономики, а также в связи с интенсивным развитием технологий в лесной сертификации возрастает значимость определения объемов сортиментов в коре и без коры, поскольку эти показатели определяют выход категории отходов при заготовке древесины. Кроме того, согласно действующим ГОСТам [4, 5] на круглые лесоматериалы, лесоматериалы, предназначенные для распиловки, строгания и лущения, выпускаются неокоренными, в то время как колотые балансы должны быть окорены, а лесоматериалы, используемые в круглом виде, поставляются как в коре, так и без нее. Следует отметить, что одинаковые по наименованию сортименты могут быть получены из различных частей ствола, при этом детерминирующим фактором выступает диаметр в верхнем отрубе. При высоких размахах последнего показателя (например, для пиловочника общего назначения диаметр должен составлять от 10 см и выше) выход сортиментов может быть представлен не только из нижней части ствола. В то же время, как показали проведенные исследования, распределение коры в отдельных частях ствола имеет неравномерный характер, в связи с чем возникают трудности в количественной оценке сортиментов, а применение процента коры, данное для ствола в целом, является ошибочным.

Все эти обстоятельства подтверждают значимость детального изучения объемных показателей стволовой древесины.

Заключение

Таким образом, форма стволов, выраженная в относительных величинах по относительным высотам, характеризует индивидуальные особенности пород, вызванные их биологическими и экологическими особенностями и влиянием на нее условий местопроизрастания посредством варьирования таксационных показателей дерева (диаметра, высоты, объема ствола). Исходя из того, что коэффициенты изменчивости видового числа на высоте 1,3 м и нормального видового числа по разрядам высот имеют практически одинаковые численные значения, составление объемных таблиц на основе имеющегося массового материала можно проводить с использованием сопоставления объема стволов по обоим вышеуказанным показателям полнодревесности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Анучин, Н.П.* Лесная таксация / Н.П. Анучин. – М. : Лесная промышленность, 1977. – 519 с.
2. *Захаров, В.К.* Лесная таксация / В.К. Захаров – М. : Лесная промышленность, 1967. – 406 с.
3. Таксация товарной структуры древостоя / А.Г. Мошков [и др.] ; под общ. ред. А.Г. Мошкова. – М. : Лесная промышленность, 1982. – 157 с.
4. СТБ 1711-2007: Лесоматериалы круглые хвойных пород. Технические условия. – Минск : Госстандарт, 2007. – 11 с.
5. СТБ 1712-2007: Лесоматериалы круглые лиственных пород. Технические условия. – Минск : Госстандарт, 2007. – 16 с.

Поступила в редакцию 03.10.2011 г.

ДИОН

(Доступно и искренне о науке)

C.B. ЖЕСТКОВ

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ КАК ОТРАЖЕНИЕ КРАСОТЫ И ГАРМОНИИ РЕАЛЬНОГО МИРА

Известно, что золотое сечение представляет собой одно из наиболее ярких проявлений гармонии природы. Это своеобразный “закон красоты”, который действует в окружающем нас мире наряду с классическими законами физики. Поиск золотого сечения в различных областях человеческой деятельности является актуальной и важной задачей научного исследования, решение которой приносит понимание красоты окружающего мира и возможность эстетического наслаждения прекрасным.

Интерес к золотому сечению, как пропорциональному делению целого на две части, впервые возник еще в античной науке в работах Евклида, Пифагора, Платона [1, 2]. Во времена средневековья исследованием данной проблемы занимался итальянский математик Фибоначчи [3]. В эпоху Возрождения золотая пропорция была возведена в ранг главного эстетического принципа: Иоганн Кеплер говорил о ней как о “бесценном сокровище”, а Леонардо да Винчи дал ей название “золотое сечение” (*sectio aurea*), сохранившееся вплоть до наших дней [4]. В XIX в. немецкий ученый Цейзинг вновь “открыл” золотое сечение при попытке сформулировать всеобщий закон пропорциональности: “Для того чтобы целое, разделенное на две неравные части, казалось прекрасным с точки зрения формы, между меньшей и большей частями должно быть то же отношение, что и между большей частью и целым” [5]. Цейзингом и его последователями было показано, что золотая пропорция встречается в человеческом теле, античных храмах и скульптурах, конфигурациях растений и минералов, музыкальных аккордах [5, 6].

В XX в. интерес к золотому сечению возродился с новой силой. Оно было найдено в астрономии [4, 7], биологии [8], психологии [9], вычислительной технике [10], музыке [11, 12], архитектуре [4, 11, 13], машиностроении [14], термодинамике [15] и других отраслях науки и искусства [16]. Таким образом, золотое сечение владело мыслью и чувствами многих выдающихся ученых прошлого и продолжает волновать умы наших современников. В настоящее время образована Международная ассоциация (The Fibonacci Association), которая ежегодно проводит конференции, посвященные изучению чисел Фибоначчи и их приложениям.

В этой заметке мы расскажем о применении золотого сечения в глушителях шума дизелей [14]. Анализ конструкций глушителей шума показывает, что одним из основных его элементов является перфорированная перегородка, через которую проходит поток отработавших газов. За-

дача состоит в том, чтобы разработать такую методику расчета сверления отверстий в перегородке, при которой перегородка имела бы минимальное аэродинамическое сопротивление. В этом случае уменьшаются затраты двигателя на прокачку отработавших газов и возрастает к.п.д. двигателя. Сама перегородка имеет форму круга.

Для решения этой задачи разобьем перегородку на кольца окружностями, радиусы которых определяются по формуле,

$$R_i = (\sqrt{\alpha})^i R_0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180,$$

где R_0 – радиус жаровой трубы (см. [14]). При этом в сам глушитель поместим цилиндрические поверхности (непроницаемые для газов), основаниями которых являются указанные выше окружности. Отверстия в кольцах располагаются на центральных радиусах каждого кольца. Тогда пропускная способность i -го кольца с числом отверстий a_n равна

$$K_{i,n} = \frac{a_n S_0}{\pi(R_i^2 - R_{i-1}^2)}, \quad S_0 = \pi r_0^2,$$

где S_0 – площадь отверстия. Соответственно для $(i+1)$ -го кольца с числом отверстий a_{n+1} имеем

$$K_{i+1,n+1} = \frac{a_{n+1} S_0}{\pi(R_{i+1}^2 - R_i^2)}.$$

Здесь неизвестные числа a_n , a_{n+1} должны быть связаны некоторым математическим законом, который определяется из естественного требования, чтобы

$$K_{i,n} = K_{i+1,n+1}. \quad (1)$$

В этом случае пропускная способность каждого кольца будет одинаковой и, тем самым, уменьшится турбулентность потока отработавших газов. Следовательно, уменьшатся затраты двигателя на их прокачку. Из (1) найдем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{R_{i+1}^2 - R_i^2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} = \frac{\alpha^{i+1} R_0^2 - \alpha^i R_0^2}{\alpha^i R_0^2 - \alpha^{i-1} R_0^2} = \alpha. \quad (2)$$

Таким образом, числа a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , ... должны быть целыми числами и удовлетворять условию (2). Оказывается, что этому условию с высокой точностью удовлетворяют числа Фибоначчи: 5; 8; 13; 21... . В общем виде числа Фибоначчи вычисляются по формуле

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \geq 1 \quad (a_1 = 1, a_2 = 1).$$

Число α является золотой пропорцией.

Строго говоря, имеет место следующее равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha.$$

Однако для инженерных расчетов эта ошибка вполне приемлема, т.к. абсолютная погрешность

$$\Delta = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \alpha \right|$$

монотонно стремится к нулю, при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, согласно предложенной методике, число отверстий в каждом кольце должно быть равно соответствующему числу Фибоначчи. Методику можно использовать для расчета аналогичных конструкций в различных областях техники.

В заключение отметим, что в книге [17] на основе обширного материала авторы раскрывают фундаментальную роль золотого сечения в структурах материи, как универсальный код Природы.

Вы тоже можете принять участие в постижении этого кода.

Дерзайте, друзья!

ИСТОЧНИКИ И ЛИТЕРАТУРА

1. Евклид. Начала Евклида / пер. с греч. и comment. Д.Д. Мордухай-Болтовского ; под ред. М.Я. Выгодского, И.Н. Веселовского. – М.-Л. : Гостехиздат, 1949 – 1950.
2. Ахутин, А.В. История принципов физического эксперимента. От античности до XVII в. / А.В. Ахутин. – М. : Наука, 1976.
3. Воробьев, Н.Н. Числа Фибоначчи. – 6-е изд. / Н.Н. Воробьев. – М. : Наука, 1992.
4. Архитектурная бионика / Ю.С. Лебедев [и др.] ; под ред. Ю.С. Лебедева. – М. : Стройиздат, 1990.
5. Гика, М. Эстетика пропорций в природе и искусстве / М. Гика. – М. : Изд-во Академии архитектуры, 1936.
6. Тимердинг, Г.Е. Золотое сечение / Г.Е. Тимердинг. – Петроград : Научное книгоиздательство, 1924.
7. Бутусов, К.П. Золотое сечение в Солнечной системе / К.П. Бутусов // в сб. Астрономия и небесная механика: сб. статей, посв. 90-летию со дня рождения А.А. Михайлова. – М.-Л. : Изд-во АН СССР, 1978.
8. Петухов, С.В. Биомеханика, бионика и симметрия / С.В. Петухов. – М. : Наука, 1981.
9. Лефевр, В.А. Формула человека. Контуры фундаментальной психологии / В.А. Лефевр. – М. : Прогресс, 1991.
10. Стахов, А.П. Коды золотой пропорции / А.П. Стахов. – М. : Радио и связь, 1984.
11. Шевелев, И.Ш. Золотое сечение / И.Ш. Шевелев, М.А. Марутаев, И.П. Шмелев. – М. : Стройиздат, 1990.
12. Сабанеев, Л. Этюды Шопена в освещении закона золотого сечения / Л. Сабанеев. – М. : Искусство, 1925.
13. Ле Корбюзье. Архитектура XX века / Ле Корбюзье. – М. : Прогресс, 1970.
14. Груданов, В.Я. Применение соотношения золотого сечения в глушителях шума дизелей / В.Я. Груданов, С.В. Жестков // Двигателестроение. – 1990. – № 4. – С. 24–26.
15. Попков, В.В. Золотое сечение в цикле Карно / В.В. Попков, Е.В. Шипицын // Успехи физических наук. – 2000. – Т. 170. – № 11. – С. 1253–1255.
16. Зайцев, В.Ф. Математические модели в точных и гуманитарных науках / В.Ф. Зайцев. – СПб. : Научное издание, 2006.
17. Стахов, А. Код да Винчи и ряды Фибоначчи / А. Стахов, А. Слученкова, И. Шербаков. – СПб. : Питер, 2006.

Поступила в редакцию 12.09.2011 г.

ПУБЛІЦЫСТЫКА

В.И. МАТЮХИН

СЕКРЕТ ВЕЧНОЙ МОЛОДОСТИ (П.С. АЛЕКСАНДРОВ)

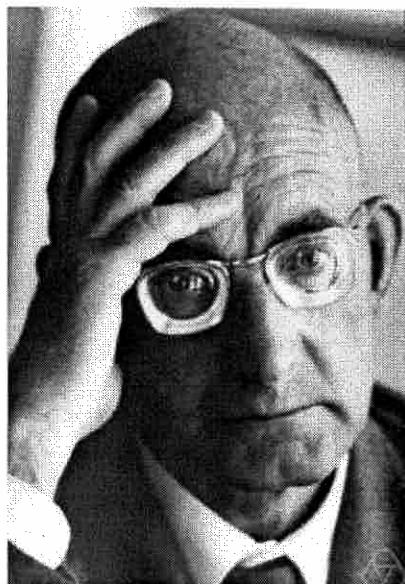
Топология является одним из самых абстрактных разделов современной геометрии. Своим появлением она обязана работам Георга Кантора (1845 – 1918) (теоретико-множественная топология) и Анри Пуанкаре (1854 – 1912) (алгебраическая или комбинаторная топология). Основателями теории топологических пространств (общей топологии) являются Морис Фреше (1878 – 1973) и Феликс Хаусдорф (1868 – 1942). Создателем топологической школы в России, получившей мировое признание, является Павел Сергеевич Александров.

Павел Сергеевич родился 7 мая 1896 г. в городе Богородске (ныне Ногинск). Его отец, Сергей Александрович, оказал большое влияние на формирование мировоззрения Павла. С 1897 по день своей смерти в 1920 г. он работал старшим врачом Смоленской губернской больницы, которая благодаря ему выдвинулась в число лучших в то время больниц России.

Мать Павла Сергеевича, Цезария Акимовна, была хорошо образованным человеком, обучала детей французскому языку. С раннего детства Павел хорошо владел так же немецким языком.

Павел Сергеевич был первым учеником Смоленской общественной гимназии и окончил ее в 1913 г. с золотой медалью. В школьные годы Павел не увлекался решением головоломных задач. Он интересовался фундаментальными вопросами математики. Его учитель математики А.Р. Эйгес правильно оценил своего ученика и оказал решающее влияние на выбор им профессии математика.

По окончании гимназии Павел Сергеевич поступил в Московский университет, намереваясь стать преподавателем математики в гимназии, так как деятельность учителя ему всегда нравилась. Позже в лекции для студентов МГУ по поводу речи Н.И. Лобачевского “О важнейших проблемах воспитания” он скажет: “Наша педагогическая профессия – счастливая профессия. В общении с молодежью заключен секрет вечной молодости”.



На первом курсе Александров по совету профессора В.В. Степанова, с которым он познакомился еще в Смоленске, принял участие в работе семинара Д.Ф. Егорова, а на втором курсе произошла его встреча с Николаем Николаевичем Лузиным, главой московской математической школы. Александров писал: “После лекции Лузина я обратился к нему за советом, как мне заниматься математикой дальше, и был, прежде всего, поражен внимательностью Лузина к собеседнику – 18-летнему студенту... Я понял, что наука и приобщение к ней новых людей – две стороны одной и той же деятельности – деятельности ученого”.

В 1915 г. Александров получил свой первый результат, доказав фундаментальную теорему о мощности В-множеств. Использованный им при этом метод в честь него был назван А-операцией и оказал существенное влияние на дальнейшее развитие теории множеств. Созданная в основном Александровым теория бикомпактных пространств стала основой большинства исследований в теории множеств и своими идеями проникла в теорию непрерывных групп, функциональный анализ, математическую логику и другие разделы математики.

Александров был членом знаменитой “Лузитании”, группы блестящих молодых математиков, о чем Л.А. Люстерник писал в стихах:

“...Пусть твой багаж не очень гружен,
Вперед! В себе уверен будь!
Великий бог – профессор Лузин
Укажет нам в науке путь!
А божество уж окружало
Созвездие полубогов:
Иван Иванович Привалов,
Димитр Евгеньевич Меньшов,
И Александров, остро взвинчен,
И милый Павел Урысон,
И философствующий Хинчин, –
И несколько других персон.
Дни легендарной “Лузитании”,
Дни увлечений иисканий...”

В 1918 г. Лузин предложил Александрову заняться континуум-проблемой. Лишь через полвека стало ясно, что попытка решить эту проблему в то время была обречена на неудачу. Разочаровавшись в своих математических силах, Александров уезжает в Новгород-Северский, где работает режиссером драматического театра, а затем в Чернигов, где работает в отделе народного образования. Одновременно он читает курс лекций по русской и зарубежной литературе, лекции о Достоевском, Гоголе, Гете. Эти лекции пользовались очень большим успехом. В 1920 г. он возвращается в Москву.

В 1920 – 1921 г.г. Александров жил в Смоленске и преподавал в Смоленском университете, ежемесячно приезжая в Москву для сдачи экзаменов, называемых теперь кандидатским минимумом. В это время он

познакомился с П.С. Урысоном, ставшим его близким другом и соавтором ряда работ.

С 1921 г. Александров работал в МГУ. В качестве приват-доцента он прочитал первый в истории университета курс общей топологии и курс теории Галуа.

Лето 1922 г. Александров и Урысон провели вблизи Болшева под Москвой, занимаясь исследованиями по топологии. Отсюда ведет свое начало известная теперь во всем мире московская топологическая школа. Начав с построения теории счетно-компактных пространств, развитой затем Александровым в теорию бикомпактных и локально бикомпактных пространств, Александров и Урысон перешли к проблеме метризации. В 1925 г. Александров предложил ныне общепринятую форму аксиоматики топологического пространства.

Летом 1923 и 1924 гг. Александров и Урысон побывали в Геттингене, Бонне, Амстердаме, где познакомились и установили научные связи с Д. Гильбертом, Э. Нетер, Р. Курантом, Л. Брауэром, Э. Ландау, Х. Хопфом, Ф. Хаусдорфом. Эти встречи оказали большое влияние на формирование мировоззрения Павла Сергеевича. Своими учителями Александров считал Д.Ф. Егорова, Н.Н. Лузина, Л. Брауэра, Э. Нетер и Д. Гильberta, т.к. именно они оказали наибольшее влияние на все его научное творчество.

Летом 1924 г. Александров и Урысон были гостями Хаусдорфа в Бонне. Ежедневно они переплывали Рейн, что вызывало неодобрение Хаусдорфа, так как было не безопасно. После короткого пребывания в Париже в августе 1924 г. они отправились в Бретань и поселились в маленькой деревушке на берегу океана. 17 августа в возрасте 26 лет Павел Самуилович Урысон на глазах Александрова погиб во время купания. Потеря была невосполнимой. Маленький эпизод их взаимоотношений: П.С. Александров свои письма и оттиски статей П.С. Урысону подписывал "трогательной" надписью "П.С.У. от П.С.А".

В 1925 – 1926 гг. Александров и Л. Брауэр подготовили к изданию рукописи Урысона – за свою короткую жизнь он оставил два тома математических трудов.

В 1925 – 1932 гг. Александров читал лекции в Геттингене, участвовал в семинарах Э. Нетер (он считал ее самым выдающимся алгебраистом, в шутку называя ее фамилию с артиклем мужского рода der), вместе с Х. Хопфом вел топологический семинар.

В 1927 – 1928 гг. Александров вместе с Хопфом провели год в Принстоне (США), где познакомились с выдающимися топологами Дж. Александером, С. Лефшецем, О. Вебленом. Тогда же у них созрел план написания книги "Топология". Планировалось написать три тома, но помешала война, был написан только один том. Эта книга сыграла исключительно важную роль в развитии топологии, по ней учились все последующие поколения топологов.

Особое место в жизни П.С. Александрова занимала его дружба с Андреем Николаевичем Колмогоровым, которая началась еще в 1929 г.

Вместе они много путешествовали по различным рекам, по Кавказу, по югу Франции. О характере их взаимоотношений много говорят письма, которые Александров из Принстона писал Колмогорову. Колмогоров, ученик Александрова, так оценивал их дружбу, продолжавшуюся 53 года: “Наверное математиком я стал бы и самостоятельно, но мои человеческие качества сложились в значительной мере под влиянием Павла Сергеевича. Он действительно был изумительнейший человек по богатству и широте взглядов. Его знание музыки, живописи, его душевное отношение к людям – необычайны”.

Не менее высоко ценил эту дружбу и Александров: “Моя дружба с А.Н. Колмогоровым занимает в моей жизни совершенно исключительное, неповторимое место: эта дружба перешагнула в 1979 году через свое пятидесятилетие и за весь этот полувековой период не только ни разу не дала никакой трещины, но не сопровождалась даже никакойссорой, не было у нас за все это время и какого бы то ни было взаимного непонимания по вопросам сколь-нибудь важным для нашей жизни и миросозерцания; даже тогда, когда наши взгляды, на какой-нибудь из этих вопросов бывали различными, мы относились к этим взглядам друг друга с полным пониманием и сочувствием”.

Александров с отеческой снисходительностью относился к некоторой беспомощности Колмогорова в житейских делах и в ответственные моменты брал все на себя.

С 1935 г. начинается, по словам Александрова, комаровский период в его жизни. Именно тогда они с Колмогоровым приобрели в деревушке Комаровка под Москвой дом, который обрел имя Гусье-Песьего Дома (сокращенно Г.П.Д., по прозвищам его хозяев). Комаровка вошла в историю МГУ и математики, так как именно здесь были задуманы и выполнены этими выдающимися учеными многие работы. Здесь бывали и жили Ж. Адамар, М. Фреше, С. Банах, Х. Хопф, К. Куратовский, многие ученики Александрова и Колмогорова.

В своем творчестве Александров глубоко затронул все основные разделы топологии. При этом, получая основополагающие результаты в только что открытой области, он никогда не стремился ее исчерпать, рассматривая свою работу как основу для творчества своих учеников и последователей.

Важнейшее понятие локально конечного покрытия было введено Александровым в 1924 г. при доказательстве того, что в каждое открытое покрытие сепарабельного метрического пространства можно вписать локально конечное открытое покрытие, т.е. при доказательстве паракомпактности сепарабельных метрических пространств (термин “паракомпактное пространство” через 20 лет после этого был введен Ж. Дьедонне). В 1948 г. А.Х. Стоун показал, что от сепарабельности можно отказаться, доказав паракомпактность произвольного метрического пространства. Таким образом, у истоков современных метризационных критериев и теории паракомпактных пространств находится работа П.С. Александрова 1924 г.

В 1925 г. Александров ввел фундаментальное по значению понятие “нерва покрытия” и с его помощью создал основы гомологической теории общих топологических пространств и общий метод перенесения на теоретико-множественные объекты методов комбинаторной топологии. В результате возник синтез комбинаторно-алгебраических и теоретико-множественных методов в топологии, определивший развитие топологии в течение ряда лет.

Первым примером применения теории гомологий была гомологическая теория размерности, созданная П.С. Александровым в 1928 – 1930 гг. При этом совпадение в широком классе компактных пространств гомологической размерности и размерности через покрытия, инвариантов, построенных с различных точек зрения, показывает правильность определения размерности.

Другое применение гомологической теории – теория двойственности, получившая развитие после открытия А.Н. Колмогоровым и Дж. Александером когомологических групп. На этой основе Л.С. Понтрягин нашел и доказал свой известный закон двойственности для компактов, лежащих в евклидовом пространстве, создал теорию двойственности локально бикомпактных групп.

П.С. Александрову принадлежит огромная заслуга в том, что к середине тридцатых годов оказались связанными в единое целое две до того совершенно различные ветви топологии – алгебраическая и теоретико-множественная.

В начале сороковых годов Александров написал работу, посвященную изучению гомологическими методами формы расположения комплекса (и замкнутого множества) в объемлющем комплексе (и замкнутом множестве), в конце этого периода он занимался построением гомологической теории незамкнутых множеств в евклидовых пространствах.

Под влиянием Александрова развивалась вся теория непрерывных отображений топологических пространств. Ему принадлежат первые фундаментальные результаты об открытых отображениях бикомпактов.

Особенно большое влияние на развитие топологии оказал обзорный доклад П.С. Александрова на Втором Пражском симпозиуме по общей топологии (1966 г.).

Много внимания и сил П.С. Александров отдавал учительству, средней школе. Им был написан ряд замечательных пособий и научно-методических статей. В 1935 г. П.С. Александров был в числе организаторов первой Московской математической олимпиады школьников.

Из созданной П.С. Александровым знаменитой топологической школы вышла целая плеяда замечательных ученых. Среди его учеников А. Тихонов, Л. Тумаркин, В. Немышкий, Н. Веденисов, Л. Понтрягин, Ю. Смирнов, К. Ситников, О. Локуциевский, Е. Мищенко, А. Архангельский, Б. Пасынков, В. Пономарев, Е. Скляренко, А. Мальцев и др. Своим ученикам он помогал не только советом, но и материально.

П.С. Александров написал свыше 200 работ, много лет руководил топологическим семинаром в МГУ. Воспитание в смысле Александрова – это и многочасовые топологические прогулки, и многодневные лодочные походы, и многочасовые лыжные прогулки по подмосковью. Главное, считал Павел Сергеевич, – воспитание чувств и эмоций. Он постоянно стремился сформировать эмоциональную личность своих учеников, для чего организовывал музыкальные вечера в МГУ (он любил и хорошо знал классическую музыку, у него было большое количество музыкальных записей), лично приглашал своих учеников на концерты в Малый зал консерватории, в актовом зале МГУ беседовал со студентами о призвании ученого, беседовал с учениками в домашнем кругу в Москве, в Комаровке. Однажды студенты МГУ спросили Александрова: “Можно ли быть совершенно некультурным человеком, но гениальным ученым?” “Гениальным – вряд ли, – ответил он, – в редких случаях можно быть знаменитым ученым, но эти случаи, как мне кажется, достойны сожаления”.

Александров в совершенстве владел словом. Будучи человеком эмоциональным, с богатым воображением, обладавший острым зрением, он мог бы стать замечательным писателем. Об этом свидетельствуют его публичные лекции, печатные работы, воспоминания о коллегах-математиках.

Большую роль в развитии науки и математического образования сыграли написанные им книги: “Очерк основных понятий топологии” (совместно с В. Ефремовичем), “Введение в теорию групп”, “Введение в общую теорию множеств и функций”, “Комбинаторная топология”, “Лекции по аналитической геометрии”, “Теория размерности” (совместно с Б. Пасынковым), “Введение в гомологическую теорию размерности” и др.

В течение тридцати трех лет П.С. Александров был президентом Московского математического общества (с 1964 г. – его почетным президентом), был главным редактором журнала “Успехи математических наук”. В 1958 – 1962 гг. он избирался вице-президентом Международного математического союза.

Научная, педагогическая и общественная деятельность П.С. Александрова была высоко оценена: в 1929 г. он был избран членом-корреспондентом, в 1953 г. – действительным членом АН СССР, был академиком Академии педагогических наук. Он был членом Геттингенской академии наук, Австрийской академии наук, Академии Леопольдина в Галле, Польской академии наук, Академии наук ГДР, Национальной академии наук США, членом Американского философского общества в Филадельфии, почетным доктором Берлинского университета им. Гумбольта, почетным членом Голландского математического общества. Он был награжден семью орденами Ленина, ему было присвоено звание Героя Социалистического труда, присуждена Государственная премия первой степени за работу “Гомологические свойства расположения комплексов и замкнутых множеств”, а за цикл работ по гомологической теории размер-

ности – международная премия имени Н.И. Лобачевского.

П.С. Александров имел исключительно высокий международный авторитет, пользовался глубоким уважением математиков всего мира.

Умер Павел Сергеевич Александров 16 ноября 1982 г. Он является одним из тех немногих людей, которым обязана становлением и расцветом математика в России. В некрологе по поводу кончины одного из крупнейших математиков мира говорилось: “Светлая память о Павле Сергеевиче Александрове, человеке сильной и щедрой души, огромного обаяния, большой и разносторонней культуры, вдохновленном педагоге и выдающимся ученом, навсегда сохранится в наших сердцах”.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Александров, П.С.* Введение в общую теорию множеств и функций / П.С. Александров. – М.-Л. : ОГИЗ, 1948. – 411 с.
2. *Александров, П.С.* Н.И. Лобачевский – великий русский математик / П.С. Александров. – М. : Знание, 1956. – 24 с.
3. *Александров, П.С.* Топологические теоремы двойственности / П.С. Александров. – М. : Изд. АН СССР. – Часть 1, 1955. – 110 с. ; часть 2, 1959. – 136 с.
4. *Александров, П.С.* Лекции по аналитической геометрии / П.С. Александров. – М. : Наука, 1968. – 911 с.
5. *Александров, П.С.* Признание ученого / П.С. Александров. – М. : Неделя. – №12 (472), 1969. – С. 4–7.
6. *Александров, П.С.* Введение в гомологическую теорию размерности / П.С. Александров. – М. : Наука, 1977. – 367 с.
7. *Александров, П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. – М. : Наука, 1977. – 367 с.
8. *Александров, П.С.* Избранные труды / П.С. Александров. – Т. 1-3. – М. : Наука, 1978 – 1979; Т. 1 : Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств. – 415 с.; Т. 2 : Теория размерности и смежные вопросы. Статьи общего характера. – 431 с.; Т. 3 : Общая теория гомологий. – 412 с.
9. *Александров, П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П.С. Александров. – М. : Наука, 1979. – 511 с.
10. *Александров, П.С.* Введение в теорию групп / П.С. Александров. – М. : Наука, 1980. – 143 с.
11. *Александров, П.С.* Очерк основных понятий топологии / П.С. Александров, В.А. Ефремович. – М.-Л. : ОНТИ, 1936. – 93 с.
12. *Александров, П.С.* Введение в теорию размерности / П.С. Александров, Б.А. Пасынков. – М. : Наука, 1973. – 575 с.
13. *Александров, П.С.* Мемуар о компактных топологических пространствах / П.С. Александров, П.С. Урысон. – М. : Наука, 1971. – 144 с.
14. *Бородин, А.И.* Биографический словарь деятелей в области математики / А.И. Бородин, А.С. Бугай. – Киев : Радянська школа, 1979. – 607 с.
15. К 80-летию со дня рождения П.С. Александрова. – УМН, 1976, 31. – С. 3–15.
16. *Колмогоров.* Юбилейное издание : в 3 кн. – М. : Физматлит, 2003. – Кн. 1 : Истина – благо. – 380 с.; Кн. 2 : Этих строк бегущих тесьма... . – 671 с.; Кн. 3 : Звуков сердца тихое эхо... . – 231 с.
17. *Крысицкий, В.* Шеренга великих математиков / В. Крысицкий. – Варшава, 1981. – 211 с.

18. *Нейман, Л.* Радость открытия / Л. Нейман. – М. : Детская литература, 1972. – 175 с.
19. *Чистяков, В.Д.* Рассказы о математиках / В.Д. Чистяков. – Минск, 1963. – 346 с.
20. *Matiuchinas, V.* Etiudai apie matematikus / V. Matiuchinas. – Vilnius : Kronta, 2003. – 128 p.

Поступила в редакцию 21.11.2011 г.

ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ

ЛАПЦІНСКІ

Валерый Мікалаевіч

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, галоўны навуковы супрацоўнік Інстытута тэхналогіі металаў НАНБ

МАКАВЕЦКАЯ

Вольга Аляксандраўна

– аспірант Інстытута тэхналогіі металаў НАНБ

СІДАРЭНКА

Іван Мікалаевіч

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў УА “МДУ імя А.А. Куляшова”

НАВАШЫНСКАЯ

Вікторыя Сяргеевна

– аспірант Інстытута тэхналогіі металаў НАНБ

ЕРАВЕНКА

*Валерый
Аляксандравіч*

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, за-гадчык кафедры агульнай матэматыкі і інфарматыкі БДУ

ШЧАТНІКОВІЧ

Алена Казіміраўна

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры агульнай матэматыкі і інфарматыкі БДУ

КУКСО

Вольга Сяргеевна

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, навуковы супрацоўнік аддзела тэорыі лікаў Інстытута матэматыкі НАНБ

САКОВІЧ

Наталля Уладзіміраўна

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры і геаметрыі УА “МДУ імя А.А. Куляшова”

ШАМУКОВА

Наталля Валянцінаўна

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры інфарматыкі, статыстыкі і вышэйшай матэматыкі Бабруйскага філіяла БДЭУ

СОЦКІ

Аляксандр Барысавіч

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар УА “МДУ імя А.А. Куляшова”

ЧУДАКОЎСКІ

Павел Якаўлевіч

– аспірант кафедры эксперыментальнай і тэарэтычнай фізікі УА “МДУ імя А.А. Куляшова”

ПРЫІМАК

Ігар Ульянавіч

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі ДУ ВПА “Беларуска-Расійскі ўніверсітэт”

СОЦКАЯ

Людміла Іванаўна

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі ДУ ВПА “Беларуска-Расійскі ўніверсітэт”

ОСТРЫКАЎ

Алег Міхайлавіч

– кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры інжынернай графікі ГДТУ імя П.В. Сухога

ЖАРЫНА Ірына Анатольеўна	– кандыдат біялагічных навук, дацэнт кафедры біялогії УА “МДУ імя А.А. Куляшова”
ІВАНЦОВА Алена Юр'еўна	– кандыдат біялагічных навук, дацэнт, загадчык кафедры біялогії УА “МДУ імя А.А. Куляшова”
БУРАК Фёдар Фёдаравіч	– дырэктар Рэспубліканскага дачэрняга лесаўпарадкаўальнага прадпрыемства “Гомельлеспраект”
УС Кацярына Анатольеўна	– кандыдат біялагічных навук, начальнік вопытна-вытворчай партыі Рэспубліканскага дачэрняга лесаўпарадкаўальнага прадпрыемства “Гомельлеспраект”
РАБЧАНКА Аляксей Іванавіч	– кандыдат фізіка-матэматычных навук, загадчык кафедры інфарматыкі ГДТУ імя П.В. Сухога
ЖАСТКОЎ Сяргей Васільевіч	– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў УА “МДУ імя А.А. Куляшова”
МАЦЮХІН Валянцін Іванавіч	– настаўнік-эксперт Лукішскай сярэдняй школы (г. Вільнюс, Літва)

SUMMARIES

Burak F.F., Uss Y.A., Riabchenko A.I. FIR STEMS FORMATION IN BELARUS.

Nontapering of the fir stands stems of artificial and natural origin is analyzed in the article. The distribution of the bark in different parts of the stem is proved to display non-uniform nature, i.e. simultaneously with the deterioration of the conditions and reduction of stem diameters the percent value of the bark thickness at relative heights increases. It has been revealed that the difference between nontapering values of artificial and natural fir-plantations for certain height classes ranges within 3-5% which does not influence the accuracy of wood reserve accounting. The compiling of volume tables by height classes based on mass data should take into account form factor at the height of 1.3 and normal form number.

Erovenko V.A., Schetnikovich E.K. PROBABILITY OF COMPETITIVE HYPOTHESES OR "CREDIBILITY OF TESTIMONIES".

The article demonstrates how the probability-theoretic representations of mathematical constructions and philosophical and methodological preconditions work to justify some of the hypotheses in the legal issue by using Bayes formula to find the posterior probability of a random event.

Ivantsova Y.Y. EVALUATION OF LONG-TERM TOMATO-FRUIT (*Lycopersicon esculentum* Mill.) STORAGE ACCORDING TO THEIR BIOCHEMICAL COMPOSITION IN DIALLEL CROSSES.

In the course of the research according to the biochemical composition of tomato-fruit the initial material for its selection in the protected ground was extracted. Some biochemical changes have been revealed during the process of long-termed tomato-fruit storage.

Kukso O.S., Sakovich N.V., Shamukova N.V. APPROXIMATIONS OF REAL VECTORS BY VALUES OF INTEGRAL POLYNOMIALS IN NONMONOTONIC CASE.

The authors have discovered the order of approximation of numbers by values of integral polynomials with their nonmonotonic right side which estimates the speed of approximations.

Laptinsky V.N., Makovetskaya O.A. ANALYSIS OF THE PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LYAPUNOV – RIKKATI MATRIX DIFFERENTIAL EQUATION.

Constructive sufficient conditions of unique solvability of a periodic boundary value problem for Lyapunov – Rikkati matrix differential equation have been received. The estimation of the localization of the decision is

provided. The iteration algorithm of calculation based on the computing scheme of the classical method of successive approximations is given.

Matyuhkin V.I. SECRET OF ETERNAL YOUTH (P.S. Aleksandrov).

Novashinskaya V.S. ON EXISTENCE OF NON-TOPOLOGICAL SOLITONS FOR (2+1)-DIMENSIONAL EQUATION OF ZAKHAROV – KUZNETSOV WITH DISPERSIVE TERMS OF FIFTH ORDER.

The constructive method to analyse non-topological solitons of the (2+1)-dimensional equation of Zakharov – Kuznetsov has been developed.

Ostrikov O.M. CALCULATING THERMAL FIELDS GENERATED BY THE BOUNDARIES OF MECHANICAL WEDGE-SHAPED TWIN AT THE FINAL STAGE OF ITS DEVELOPMENT.

For the first time the method of calculating thermal fields of the incoherent twin that has stopped developing is suggested. The article displays the evolution of thermal fields in time. The thermal field at the initial stage has been proved to locate at the twin boundaries at the initial stage and to spread perpendicularly as time passes. At the final stage the lines of equal temperatures shape a circumference with the twin inside. The discovered model advances the quantitative analysis of the impact of thermal fields on the interrelation of the twinning dislocations determined by the plastic deformation at the boundaries of the twin.

Sidorenko I.N. LIMIT CYCLES OF “SHORT” KUKLES SYSTEMS WITH SYMMETRIC VECTOR FIELD.

The author suggests some methods of the construction of “short” Kukles systems with symmetric vector field and the following distributions of the limit cycles of the normal size: ((1,1),2), ((2,2),1), ((0,0), 3). The existence of the exact given number of limit cycles is proved by using the Dulac-Cherkas function.

Sotski A.B., Chudakovsky P.Y., Primak I.U., Sotskaya L.I. LIGHT BEAM REFLECTION FROM THE PRISM-FILM COUPLER.

I. THEORETICAL MODEL.

The systems of differential and integrated equations concerning amplitudes of local modes in the representation of the light beam field reflected from the prism-film coupler exciting the planar waveguides are formulated. Effective algorithms of the termed systems are offered.

Zharina I.A. FUNDAZOL AND EPIN INFLUENCE ON THE MORPHOLOGICAL PROPERTIES OF LONG-FIBRED LAX STEM.

The application of fundazol increases the overall height of the stem and technical length of the flax plants, but the complex of fungicide and growth-regulator epin is more effective. Reaction to the substances displays its specific

character according to the sort of the plants: it is better expressed in the early-ripe sort Vita in comparison with the late-ripe sort Mogilevski. The use of the preparations increases the technical length of the stem significantly more than the total height of the plants. Effectiveness of the preparations drops during the unfavorable vegetative period in terms of meteorological parameters; however their application helps to mitigate the negative influence of the environment on the plants.

Zhestkov S.V. GOLDEN RATIO AS THE REFLECTION OF REAL WORLD'S BEAUTY AND HARMONY.