

ISSN 2073-8315



# ВЕЧНИК

Магілёўскага дзяржаўнага  
універсітэта  
імя А.А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

*Выдаецца с снежня 1998 года*

Серыя В. ПРЫРОДА ЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ  
(матэматыка, фізіка, біялогія)

*Выходзіць два разы ў год*

**2 (38)  
2011**

**Галоўная рэдакцыйная камегія:**

д-р філос. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (галоўны рэдактар);

д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара);

канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (нам. галоўнага рэдактара);

д-р фіз.-мат. навук прафесар С.В. Жасткоў (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В);

Л.І. Будкова (адказны сакратар)

**Матэматыка, фізіка:**

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)

д-р фіз.-мат. навук прафесар А.І. Таўгень (Мінск)

д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)

канд. фіз.-мат. навук дацэнт А.А. Самадураў (Мінск)

канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

**Біялогія:**

д-р біял. навук прафесар М.В. Машчанка (Магілёў)

д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)

канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)

д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)

д-р мед. навук дацэнт А.В. Марачкаў (Магілёў)

д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)

д-р хім. навук прафесар Г.М. Раганаў (Мінск)

д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)

## ЗМЕСТ

|  |    |
|--|----|
| <b>ЖЕСТКОВ С.В., НОВАШИНСКАЯ В.С.</b> Конструктивный анализ топологических и нетопологических солитонов (2+1)-мерных обобщенных уравнений Захарова – Кузнецова ..... | 4  |
| <b>ВОРОБЬЕВ Г.Н.</b> Идемпотенты в $(k+1)$ -арной группе $\langle Z_k^k, [ ]_{k+1, k} \rangle$ .....   | 11 |
| <b>ГАЛЬМАК А.М.</b> $\sigma$ -согласованные вектор-матрицы .....   | 18 |
| <b>МАТЕЙКО О.М., ТАНЫГИНА А.Н.</b> Профессионально ориентированный курс<br>“Высшая математика” для студентов географических специальностей .....                     | 28 |
| <b>ПЛАМУКОВА Н.В., САКОВИЧ Н.В.</b> О распределении алгебраических чисел второй и<br>третьей степени .....   | 36 |
| <b>МОРОЗОВ Н.П.</b> О приведении полиномиальных систем к специальному виду .....   | 43 |
| <b>ФЕДОРАКО Е.И.</b> О структуре общего решения дифференциального уравнения Абеля<br>в частном случае .....  | 49 |
| <b>РЕДЬКОВ В.М., ОВСИЮК Е.М.</b> Оптика и теория относительности: о формулировке<br>закона отражения света в движущейся системе отсчета .....                        | 53 |
| <b>ТИМОЩЕНКО Е.В., ТОМОВ А.В., ЮРЕВИЧ В.А.</b> Оптический гистерезис при<br>резонансном отражении света тонким пеликейно поляризованным слоем .....                  | 63 |
| <b>ОСИПЕНКО А.Н.</b> К вопросу об участии жирных кислот в атерогенезе .....  | 71 |
| <b>ПОЗНЯК С.С.</b> Накопление тяжелых металлов растениями пшеницы на ранних этапах развития .....  | 81 |
| <b>МАЛЛАДЫЯ ТАЛЕНТЫ МАГІЛЁЎШЧЫНЫ</b> .....   | 89 |
| <b>ЗВЕСТКІ ПРА ЛЎТАРАЎ</b> .....   | 92 |
| <b>SUMMARIES</b> .....   | 94 |

# МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 517+530.1

*С.В. ЖЕСТКОВ, В.С. НОВАШИНСКАЯ*

## КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И НЕТОПОЛОГИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ (2+1)-МЕРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАХАРОВА – КУЗНЕЦОВА

*Известно [1], что классическое уравнение Захарова – Кузнецова описывает эволюцию ионно-акустических волн в замагниченной плазме при малых амплитудах и представляет интерес для приложений [1-10].*

*В работе исследуется вопрос о существовании топологических и нетопологических солитонов и законов их распространения для уравнений Захарова – Кузнецова с различными типами нелинейности на основе прямого метода из [11].*

### Нетопологические солитоны

**I.** Нетопологические солитоны, как известно [2], описываются коло-колообразными функциями. Простейшим примером нетопологического солитона является решение краевой задачи

$$f''(\xi) = Af(\xi) - Bf^{2m+1}(\xi), \quad m > 0, \quad (1)$$

$$f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) = 0, \quad \xi = kx + ly - \omega t, \quad (2)$$

где  $A, B, k, l, \omega$  – действительные числа, к которой сводится широкий класс уравнений в частных производных со степенными нелинейностями. Приведем следующий результат [12].

**Теорема 1.** Для того чтобы краевая задача (1), (2) имела решение вида

$$f(\xi) = \lambda \operatorname{ch}^{-\frac{1}{m}}(\xi), \quad \lambda > 0, \quad (3)$$

где  $\lambda$  – амплитуда солитона, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$A = \frac{1}{m^2}, \quad \lambda^{2m} = \frac{(m+1)}{Bm^2}, \quad B > 0. \quad (4)$$

Соотношения (4) являются законами распространения солитона (3) и показывают зависимость амплитуды  $\lambda$  от степени нелинейности  $m$ .

Интересно, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda(m) = 1.$$

Заметим, что  $\omega$  определяет скорость солитона, а величины  $1/k$ ,  $1/l$  – определяют ширину солитона в направлении осей  $x$ ,  $y$  соответственно.

Результаты теоремы 1 согласуются с результатами работы [2], в которой рассматривалось уравнение вида

$$q_t + a(q^n)_x + (bq_{xt} + cq_{yy})_x = 0, \quad n > 1,$$

причем нетопологический солитон строился в виде

$$q(t, x, y) = A ch^{-p}(B_1 x + B_2 y - vt), \quad p > 0.$$

**II.** Дальнейшим развитием теории солитонов является построение и анализ нетопологических солитонов для уравнений Захарова – Кузнецова с различными типами нелинейности. Рассмотрим уравнение Захарова – Кузнецова с законом нелинейности удвоенной степени

$$u_t + (a_1 u^{2m} + a_2 u^{4m}) u_x + (a_3 u^{2m} + a_4 u^{4m}) u_y + a_5 u_{xx} + a_6 u_{xyy} = 0, \quad (5)$$

где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  – произвольные действительные числа. Решение уравнения (5) строится в виде бегущей волны

$$u(t, x, y) = f(\xi), \quad \xi = kx + ly - \omega t,$$

где  $f(\xi)$  неизвестная функция, удовлетворяющая волновому уравнению

$$f'' = Af - Bf^{2m+1} - Cf^{4m+1}, \quad (6)$$

$$A = \frac{\omega}{a_6 kl^2 - a_5 \omega k^2}, \quad B = \frac{a_1 k + a_3 l}{(2m+1)(a_6 kl^2 - a_5 \omega k^2)}, \quad C = \frac{a_2 k + a_4 l}{(4m+1)(a_6 kl^2 - a_5 \omega k^2)}$$

и краевым условиям (2). Решение краевой задачи (6), (2) приведено в [13] и имеет вид

$$f(\xi) = \left[ \frac{4Ae}{\left( e + \frac{B}{m+1} \right)^2 + \frac{4AC}{2m+1}} \right]^{\frac{1}{2m}}, \quad e \equiv \exp \left\{ -2\sqrt{Am}(\xi - \xi_0) \right\}, \quad (7)$$

при условии что,  $A > 0$ ,  $C > 0$ . Здесь  $\xi_0$  – произвольная постоянная. На основании формулы (7) устанавливается

**Теорема 2.** Для того чтобы задача (6), (2) имела решение вида

$$f(\xi) = F^{\frac{1}{2m}}(\xi), \quad (8)$$

где  $F = GH^{-1}$ ,  $G = \alpha e$ ,  $H = (e + \beta)^2 + q$ ,  $e \equiv \exp \left\{ \varepsilon (\xi - \xi_0) \right\}$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\varepsilon^2 = 4m^2 A, \quad B\alpha = 4\beta A(1+m), \quad C\alpha^2 = 4(1+2m)Aq. \quad (9)$$

Соотношения (9) являются законами распространения солитона, профиль которого описывается колоколообразной функцией (8).

Для уравнения (5) можно построить нетопологический солитон новой дробно-рациональной формы. Оказывается, что краевая задача (6), (2) допускает решение вида

$$f(\xi) = [\lambda_0 + \lambda_1 e^\xi + \lambda_2 e^{-\xi}]^{-\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2m}, \quad (10)$$

где  $\lambda_0 > 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  – неизвестные параметры волны. Подставляя (10) в (6), получим

$$A = \mu^2, \quad \lambda_0 = \frac{B}{\mu + 2\mu^2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{B\lambda_0 + C - A\lambda_0^2}{4(\mu + \mu^2)} > 0. \quad (11)$$

**Теорема 3.** Для того чтобы краевая задача (6), (2) имела решение вида (10) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (11).

Условия (11) связывают параметры солитона (10) с коэффициентами уравнения (5) и представляют интерес для приложений.

**III.** Рассмотрим уравнение Захарова – Кузнецова с законом нелинейности устроенной степени

$$\begin{aligned} u_t + (a_1 u^{2m} + a_2 u^{4m} + a_3 u^{6m}) u_x + \\ + (a_4 u^{2m} + a_5 u^{4m} + a_6 u^{6m}) u_y + a_7 u_{xx} + a_8 u_{yy} = 0, \\ m > 0, \end{aligned} \quad (12)$$

и произвольными действительными коэффициентами. Решение уравнения (12) строится в виде бегущей волны  $u(t, x, y) = f(\xi)$ , где  $f(\xi)$  удовлетворяет волновому уравнению

$$f'' = Af - Bf^{2m+1} - Cf^{4m+1} - Df^{6m+1}, \quad (13)$$

$$A = \frac{\omega}{\Gamma}, \quad B = \frac{a_1 k + a_4 l}{(2m+1)\Gamma}, \quad C = \frac{a_2 k + a_5 l}{(4m+1)\Gamma}, \quad D = \frac{a_3 k + a_6 l}{(6m+1)\Gamma},$$

$$\Gamma \equiv a_8 k l^2 - a_7 \omega k^2,$$

и краевым условиям (2). Краевая задача (13), (2) допускает решение вида

$$f(\xi) = [\lambda_0 + \lambda_1 e^\xi + \lambda_2 e^{-\xi}]^{-\mu}, \quad \mu = \frac{1}{2m}, \quad (14)$$

где  $\lambda_0 > 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  – неизвестные параметры волны. Подставляя (14) в (13), получим

$$\begin{aligned} A = \mu^2, \quad \lambda_0 = \frac{B}{2\mu^2 + \mu}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{2B\lambda_0 - \mu\lambda_0^2 + C - 3A\lambda_0^2}{3A + 3\mu + \gamma} > 0, \\ \frac{2B\lambda_0 - \mu\lambda_0^2 + C - 3A\lambda_0^2}{3A + 3\mu + \gamma} = \frac{D + B\lambda_0^2 + C\lambda_0 - A\lambda_0^3}{6A\lambda_0 + 4\mu\lambda_0 - 2B + 2\gamma\lambda_0}, \quad \gamma = \mu(\mu+1). \end{aligned} \quad (15)$$

**Теорема 4.** Для того чтобы краевая задача (13), (2) имела решение вида (14) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (15).

Таким образом, нетопологические солитоны существуют для широкого класса уравнений типа Захарова – Кузнецова с дисперсионными членами, содержащими производные третьего порядка.

### Топологические солитоны

**IV.** Известно [2], что топологические солитоны отличаются от других солитонов поведением на бесконечности и своей структурой, которая характеризуется одной или двумя величинами, известными как топологические заряды. Простейшим примером топологического солитона является кинк.

Известно [2], что для их описания используются выражения, содержащие  $th\xi$ , а также  $th^p(\xi)$ ,  $p > 0$ . Отметим, что в основе  $th$ -метода [14] лежат следующие соотношения:

$$(th\xi)' = 1 - th^2\xi, \quad (th\xi)'' = -2th\xi + 2th^3\xi, \quad (th\xi)''' = -2 + 8th^2\xi - 6th^4\xi \text{ и т.д.,}$$

которые позволяют выразить любую производную функции  $th\xi$  через степени  $th\xi$ .

Рассмотрим уравнение Захарова – Кузнецова со степенным законом нелинейности

$$u_t + a_1 u^{2m} u_x + a_2 u^{2m} u_y + a_3 u_{xx} + a_4 u_{yy} = 0, \quad m > 0, \quad (16)$$

где  $a_1, a_2, a_3, a_4$  – действительные числа. Заметим, что в работе [2] для аналогичного уравнения (при  $a_2 = 0$ ) использовался следующий анзац:

$$u(t, x, y) = f(\xi) = \lambda th^\mu \xi, \quad (17)$$

где  $\lambda, \mu > 0$  – действительные числа. Подставляя (17) в (16), найдем

$$\begin{aligned} & (a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2) \left[ (\mu - 1)(\mu - 2)th^{-3}(\xi) + (3\mu - 3\mu^2 - 2)th^{-1}(\xi) + (3\mu^2 + 3\mu + 2)th(\xi) - \right. \\ & \left. - (\mu + 1)(\mu + 2)th^3(\xi) \right] - \omega \left[ th^{-1}(\xi) - th(\xi) \right] + (a_1 k + a_2 l) \lambda^{2m} th^{2m\mu} \left[ th^{-1}(\xi) - th(\xi) \right] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из анализа уравнения (18) следует, что  $\mu = \frac{1}{m}$ , и, кроме того,  $\mu = 1$  или  $\mu = 2$ . В противном случае следует занулить все коэффициенты, стоящие перед функциями  $th^{-3}(\xi)$ ,  $th^{-1}(\xi)$ ,  $th(\xi)$ ,  $th^3(\xi)$ , что не приводит к содержательным результатам (см. [2]).

Пусть  $\mu = \frac{1}{m} = 1$ . Тогда  $m = 1$ . В этом случае уравнение (16) примет

вид

$$u_t + a_1 u^2 u_x + a_2 u^2 u_y + a_3 u_{xx} + a_4 u_{yy} = 0, \quad (19)$$

а уравнение (18)

$$\begin{aligned} & \left( a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2 \right) \left[ -2 t h^{-1}(\xi) + 8 t h(\xi) - 6 t h^3(\xi) \right] - \\ & - \omega \left[ t h^{-1}(\xi) - t h(\xi) \right] + (a_1 k + a_2 l) \lambda^2 \left( t h(\xi) - t h^3(\xi) \right) = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях  $t h(\xi)$ , получим

$$\begin{aligned} t h^{-1}(\xi) : & -2 \left( a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2 \right) - \omega = 0, \\ t h(\xi) : & 8 \left( a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2 \right) + \omega + (a_1 k + a_2 l) \lambda^2 = 0, \\ t h^3(\xi) : & -6 \left( a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2 \right) - (a_1 k + a_2 l) \lambda^2 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 5.** Для того чтобы уравнение (19) имело решение вида (17) с  $\mu = 1$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (20).

Соотношения (20) являются законами распространения топологического солитона

$$u(t, x, y) = \lambda t h(kx + ly - \omega t)$$

уравнения (19). Их анализ не вызывает принципиальных затруднений. Из (20) найдем

$$\omega = \frac{2 a_4 k l^2}{2 a_3 k^2 - 1}, \quad \lambda^2 = \frac{6 \left( a_3 \omega k^2 - a_4 k l^2 \right)}{a_1 k + a_2 l} > 0.$$

Следовательно, параметр  $\lambda$  определяется с точностью до знака.

Пусть  $\mu = \frac{1}{m} = 2$ . Тогда  $m = \frac{1}{2}$ . В этом случае уравнение (16) примет вид

$$u_t + a_1 u u_x + a_2 u u_y + a_3 u_{xx} + a_4 u_{yy} = 0, \quad (21)$$

а уравнение (18)

$$\begin{aligned} & \left( a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2 \right) \left[ -8 t h^{-1}(\xi) + 20 t h(\xi) - 12 t h^3(\xi) \right] - \omega \left[ t h^{-1}(\xi) - t h(\xi) \right] + \\ & + (a_1 k + a_2 l) \lambda \left[ t h(\xi) - t h^3(\xi) \right] = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях  $t h(\xi)$ , получим

$$\begin{aligned} t h^{-1}(\xi) : & -8 \left( a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2 \right) - \omega = 0, \\ t h(\xi) : & 20 \left( a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2 \right) + \omega + (a_1 k + a_2 l) \lambda = 0, \\ t h^3(\xi) : & -12 \left( a_4 k l^2 - a_3 \omega k^2 \right) - (a_1 k + a_2 l) \lambda = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 6.** Для того чтобы уравнение (21) имело решение вида (17) с  $\mu = 2$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (22).

Соотношения (22) являются законами распространения солитона

$$u(t, x, y) = \lambda t h^2(kx + ly - \omega t)$$

уравнения (21). Из (22) найдем

$$\omega = \frac{8a_4kl^2}{8a_3k^2 - 1}, \quad \lambda = \frac{12(a_3\omega k^2 - a_4kl^2)}{a_1k + a_2l}.$$

Таким образом, уравнение (16) имеет решение вида (17) только в двух рассмотренных случаях.

V. В качестве дальнейшего развития теории топологических солитонов рассмотрим уравнение Захарова – Кузнецова с законом нелинейности удвоенной степени

$$u_t + (a_1 u^{2m} + a_2 u^{4m}) u_x + (a_3 u^{2m} + a_4 u^{4m}) u_y + a_5 u_{xx} + a_6 u_{xyy} = 0, \quad m > 0. \quad (23)$$

Решение уравнения (23) строится в виде бегущей волны  $f(\xi)$ , которая удовлетворяет волновому уравнению (6). Используя результаты аналитического моделирования из [13], будем строить решение уравнения (6) в виде

$$f(\xi) = [\lambda_0 + \lambda_1 t h \xi]^{\frac{1}{2m}}, \quad (24)$$

где  $\lambda_0, \lambda_1$  – неизвестные параметры солитона. Подставляя (24) в (6), найдем

$$\lambda_1^2 C + \mu^2 + \mu = 0, \quad \lambda_1^2 B + 4\lambda_0\lambda_1^2 C + 2\lambda_0\mu = 0, \quad \mu = \frac{1}{2m}, \quad (25)$$

$$-A + 3\lambda_0 B + 6\lambda_0^2 C - 2\mu^2 = 0, \quad -2A + 3\lambda_0 B + 4\lambda_0^2 C - 2\mu = 0, \quad (26)$$

$$-A\lambda_0^2 + B\lambda_0^3 + C\lambda_0^4 + \mu(\mu - 1)\lambda_1^2 = 0. \quad (27)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 7.** Для того чтобы уравнение (6) имело решение вида (24) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (25)-(27).

Система (25)-(27) представляет собой нелинейную систему из пяти уравнений относительно шести параметров  $A, B, C, \lambda_0, \lambda_1, \mu$ .

Приведем набор параметров, которые удовлетворяют этой системе,

$$\mu = \frac{1}{2}, \quad A = 1, \quad B = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad C = -1, \quad \lambda_1^2 = \frac{3}{4}, \quad \lambda_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Если положить, что  $\lambda_0 = 1$ , то из (25)-(27) найдем

$$\lambda_1^2 = 1, \quad A = 4\mu^2, \quad B = 4\mu^2 + 2\mu, \quad C = -\mu - \mu^2.$$

**Замечание.** Вопрос о существовании топологических солитонов для уравнения (12) с законом нелинейности утроенной степени требует отдельного рассмотрения.

Таким образом, полученные результаты развивают теорию топологических и нетопологических солитонов для новых классов (2+1)-мерных уравнений Захарова – Кузнецова со степенными законами нелинейности.

#### *СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ*

1. **Peng, Y.Z.** Exact traveling wave solutions for the Zakharov – Kuznetsov equation / Y.Z. Peng // Appl. Math. and Comput. – 2008. – Vol. 199. – P. 397–405.
2. **Biswas, A.** Topological and non-topological solitons for the generalized Zakharov – Kuznetsov modified equal width equation / A. Biswas // Int. J. Theor. Phys. – 2009. – Vol. 48. – P. 2698–2703.
3. **Esen, A.** Solitary wave solutions of the modified equal width wave equation / A. Esen, S. Kutluay // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2008. – Vol. 13. – № 8. – P. 1538–1546.
4. **Faminskii, A.V.** Nonlocal well-posedness of the mixed problem for the Zakharov – Kusnetsov equation / A.V. Faminskii // J. Math. Sci. – 2007. – Vol. 147. – № 1. – P. 6524–6537.
5. **Mustafa, Inc.** New exact solutions for the ZK-MEW equation by using symbolic computation / Inc. Mustafa // Appl. Math. Comput. – 2007. – Vol. 189. – № 1. – P. 508–513.
6. **Mustafa, Inc.** Compacton and periodic wave solutions of the nonlinear dispersive Zakharov – Kuznetsov equation / Inc. Mustafa // Cent. Eur. J. Phys. – 2007. – Vol. 5. – № 3. – P. 351–366.
7. **Peng, Y.Z.** Travelling wave-like solutions of the Zakharov – Kuznetsov equation with variable coefficients / Y.Z. Peng, E.V. Krishnan, H. Feng // Pramana. – 2009. – Vol. 71. – № 1. – P. 49–55.
8. **Tascan, F.** Travelling wave solutions of nonlinear evolution equations by using the first integral methods / F. Tascan, A. Bekir, M. Koparan // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2009. – Vol. 14. – № 5. – P. 1810–1815.
9. **Wazwaz, A.M.** Exact solutions for the ZK-MEW equation by using the tanh and sine-cosine methods / A.M. Wazwaz // Int. J. Comput. Math. – 2005. – Vol. 82. – № 6. – P. 699–708.
10. **Wazwaz, A.M.** The tanh and the sine-cosine methods for a reliable treatment of the modified equal width equation and its variants / A.M. Wazwaz // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2006. – Vol. 11. – № 2. – P. 148–160.
11. **Жестков, С.В.** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных : моногр. / С.В. Жестков // Могилев : МГУ им. А.А. Кулешова, 2006.
12. **Жестков, С.В.** О построении солитоноподобных решений (2+1)-мерного уравнения Захарова – Кузнецова со степенными законами нелинейности / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования : матер. науч. конф. “Герценовские чтения – 2011”. – LXIV. – СПб., 2011. – С. 54–56.
13. **Жестков, С.В.** Об аналитическом моделировании волновых и солитонных решений нелинейных уравнений, связанных с классическим уравнением КДФ / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Весник МДУ ім А.А. Куляшова, Сер. В. – 2010. – № 1(35). – С. 4–12.

14. *Khaled, K.Al.* Traveling wave solutions using the variational method and the tanh method for nonlinear coupled equations / K.Al. Khaled, M.Al. Refai, A. Alawneh // Appl. Math. and Comput. – 2008. – Vol. 02. – P. 233–242.

Поступила в редакцию 11.05.2011 г.

УДК 512.548

*Г.Н. ВОРОБЬЕВ*

## ИДЕМПОТЕНТЫ В $(k + 1)$ -АРНОЙ ГРУППЕ

$$\langle Z_k^k, [ ]_{k+1, k} \rangle$$

В  $n$ -арных группах при  $n \geq 3$  в отличие от групп может не быть идемпотентов, может быть несколько идемпотентов, возможен случай, когда все элементы являются идемпотентами. Поэтому в теории  $n$ -арных групп актуальна задача изучения множества всех идемпотентов  $n$ -арной группы, если оно не пусто. Изучением этого множества в полиадической группе  $\langle A^k [ ]_{k+1, k} \rangle$  арности  $k+1$ , где  $A$  – произвольная группа, занимался А.М. Гальмак, который установил, что в  $\langle A^k [ ]_{k+1, k} \rangle$ , в случае конечности множества  $A$ , имеется ровно  $|A|^{k-1}$  идемпотентов и соответственно ровно  $|A|^{k-1}(|A| - 1)$  элементов, не являющихся идемпотентами. В некоторых случаях множество всех идемпотентов  $n$ -арной группы можно указать в явном виде. Именно это сделано в данной работе для  $(k+1)$ -арной группы  $\langle Z_k^k, [ ]_{k+1, k} \rangle$ .

Если  $A$  – группоид,  $k \geq 2$ ,  $l \geq 2$ , то на  $k$ -й декартовой степени  $A^k$  можно определить  $[1, 2]$  вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \circ (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \dots, x_{k-1} y_k, x_k y_1),$$

а затем  $l$ -арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l, k} = \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_2 \circ (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \circ (\mathbf{x}_{l-1} \circ \mathbf{x}_l)) \dots)).$$

Если  $A$  – полугруппа,  $l = k + 1$ , то, ввиду леммы 2.3.1 [2],

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_{k+1}]_{k+1, k} = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = x_1 x_{2(j+1)} \dots x_{(k-j+1)k} x_{(k-j+2)1} \dots x_{k(j-1)} x_{(k+1)j}, j = 1, \dots, k.$$

Для полугруппы  $A$  универсальная алгебра  $\langle A^k, [ ]_{k+1, k} \rangle$  согласно теореме 2.3.4 [2] является  $(k + 1)$ -арной полугруппой. Если же  $A$  – группа, то согласно теореме 2.9.3 [2],  $\langle A^k, [ ]_{k+1, k} \rangle$  –  $(k + 1)$ -арная группа.

$n$ -Арная операция  $[ ]_{k+1, k}$  аналогична  $n$ -арной операции, которую Пост определил [3] на множестве всех  $n$ -арных подстановок.

Пусть  $Z_k$  – циклическая группа порядка  $k \geq 2$ . Рассмотрим на  $k$ -й декартовой степени  $\underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k$  полиадическую операцию  $[ ]_{k+1, k}$ . Как уже отмечалось, по теореме 2.9.3 [2] универсальная алгебра  $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k} \rangle$

является  $(k+1)$ -арной группой. Ввиду предложения 2.10.7 [2], у этой  $(k+1)$ -арной группы нет единиц, а по предложению 2.8.1 [2] она является неабелевой, а значит, и нециклической. Более того, по предложению 3.11.3 [2] она не является даже полуциклической. По предложению 3.11.1 [2]

соответствующая группа Поста  $(k+1)$ -арной группы  $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k} \rangle$

изоморфна прямому произведению  $k$  экземпляров циклической группы  $Z_k$ , которое является абелевой группой. А согласно критерию Поста [3], полиадическая группа является полуабелевой тогда и только тогда, когда абелева ее соответствующая группа. Поэтому  $(k+1)$ -арная группа

$\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k} \rangle$ , не являясь полуциклической, является полуабелевой.

Определения понятий абелевости, полуабелевости, цикличности и полуцикличности для полиадических групп можно найти в [4].

Нахождение идемпотентов в  $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k} \rangle$  начнем с примеров.

**Пример 1.** Если  $k = 2$ ,  $Z_2 = \{e, a\}$ , то

$$Z_2 \times Z_2 = \{(e, e), (e, a), (a, e), (a, a)\}.$$

Так как

$$\begin{aligned} [(e, e)(e, e)(e, e)]_{3, 2} &= (eee, eee) = (e, e), \\ [(e, a)(e, a)(e, a)]_{3, 2} &= (eae, aea) = (a, e) \neq (e, a), \\ [(a, e)(a, e)(a, e)]_{3, 2} &= (aea, eae) = (e, a) \neq (a, e), \\ [(a, a)(a, a)(a, a)]_{3, 2} &= (aaa, aaa) = (a, a), \end{aligned}$$

то идемпотентами в  $\langle Z_2 \times Z_2, [ ]_{3, 2} \rangle$  являются только элементы  $(e, e)$  и  $(a, a)$ , то есть множество всех идемпотентов тернарной группы  $\langle Z_2 \times Z_2, [ ]_{3, 2} \rangle$  имеет вид

$$I(\langle Z_2 \times Z_2, [ ]_{3, 2} \rangle) = \{(e, e), (a, a)\}.$$

**Пример 2.** Если  $k = 3$ ,  $Z_3 = \{e, a, a^2\}$ , то

$$\begin{aligned} Z_3 \times Z_3 \times Z_3 &= \{(e, e, e), (e, e, a), (e, e, a^2), (e, a, e), (e, a, a), (e, a, a^2), \\ &\quad (e, a^2, e), (e, a^2, a), (e, a^2, a^2), (a, e, e), (a, e, a), (a, e, a^2), \\ &\quad (a, a, e), (a, a, a), (a, a, a^2), (a, a^2, e), (a, a^2, a), (a, a^2, a^2), \\ &\quad (a^2, e, e), (a^2, e, a), (a^2, e, a^2), (a^2, a, e), (a^2, a, a), (a^2, a, a^2), \\ &\quad (a^2, a^2, e), (a^2, a^2, a), (a^2, a^2, a^2)\}. \end{aligned}$$

Найдем множество всех идемпотентов в  $\langle Z_3 \times Z_3 \times Z_3, [ ]_{4, 3} \rangle$ .

$$\begin{aligned} [(e, e, e)(e, e, e)(e, e, e)(e, e, e)]_{4, 3} &= (eeee, eeee, eeee) = (e, e, e), \\ [(e, e, a)(e, e, a)(e, e, a)(e, e, a)]_{4, 3} &= (eeae, eaee, aeea) = (a, a, a^2), \\ [(e, e, a^2)(e, e, a^2)(e, e, a^2)(e, e, a^2)]_{4, 3} &= (eea^2e, ea^2ee, a^2eea^2) = (a^2, a^2, a), \\ [(e, a, e)(e, a, e)(e, a, e)(e, a, e)]_{4, 3} &= (eaee, aeea, eeae) = (a, a^2, a), \\ [(e, a, a)(e, a, a)(e, a, a)(e, a, a)]_{4, 3} &= (eaae, aaea, aeaa) = (a^2, a, a^2), \\ [(e, a, a^2)(e, a, a^2)(e, a, a^2)(e, a, a^2)]_{4, 3} &= (eaa^2e, aa^2ea, a^2eaa^2) = (e, a, a^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(e, a^2, e)(e, a^2, e)(e, a^2, e)(e, a^2, e)]_{4,3} = (ea^2ee, a^2eea^2, eea^2e) = (a^2, a, a^2), \\
& [(e, a^2, a)(e, a^2, a)(e, a^2, a)(e, a^2, a)]_{4,3} = (ea^2ae, a^2aea^2, aea^2a) = (e, a^2, a), \\
& [(e, a^2, a^2)(e, a^2, a^2)(e, a^2, a^2)(e, a^2, a^2)]_{4,3} = (ea^2a^2e, a^2a^2ea^2, a^2ea^2a^2) = (a, e, e), \\
& [(a, e, e)(a, e, e)(a, e, e)(a, e, e)]_{4,3} = (aeee, eeee, eaee) = (a^2, a, a), \\
& [(a, e, a)(a, e, a)(a, e, a)(a, e, a)]_{4,3} = (aeaa, eaaa, aaea) = (e, a^2, e), \\
& [(a, e, a^2)(a, e, a^2)(a, e, a^2)(a, e, a^2)]_{4,3} = (aea^2a, ea^2ae, a^2aea^2) = (a, e, a^2), \\
& [(a, a, e)(a, a, e)(a, a, e)(a, a, e)]_{4,3} = (aaea, aaaa, eaaa) = (e, e, a^2), \\
& [(a, a, a)(a, a, a)(a, a, a)(a, a, a)]_{4,3} = (aaaa, aaaa, aaaa) = (a, a, a), \\
& [((a, a, a^2))(a, a, a^2)(a, a, a^2)(a, a, a^2)]_{4,3} = (aaa^2a, aa^2aa, a^2aaa^2) = (a^2, a^2, e), \\
& [(a, a^2, e)(a, a^2, e)(a, a^2, e)(a, a^2, e)]_{4,3} = (aa^2ea, a^2eaa^2, eaa^2e) = (a, a^2, e), \\
& [(a, a^2, a)(a, a^2, a)(a, a^2, a)(a, a^2, a)]_{4,3} = (aa^2aa, a^2aaa^2, aaa^2a) = (a^2, e, a^2), \\
& [(a, a^2, a^2)(a, a^2, a^2)(a, a^2, a^2)(a, a^2, a^2)]_{4,3} = (aa^2a^2a, a^2a^2aa^2, a^2aa^2a^2) = (e, a, a), \\
& [(a^2, e, e)(a^2, e, e)(a^2, e, e)(a^2, e, e)]_{4,3} = (a^2eee^2, eee^2e, ea^2ee) = (a, a^2, a^2), \\
& [(a^2, e, a)(a^2, e, a)(a^2, e, a)(a^2, e, a)]_{4,3} = (a^2eaa^2, eaa^2e, aa^2ea) = (a^2, e, a), \\
& [(a^2, e, a^2)(a^2, e, a^2)(a^2, e, a^2)(a^2, e, a^2)]_{4,3} = (a^2ea^2a^2, ea^2a^2e, a^2a^2ea^2) = (e, a, e), \\
& [(a^2, a, e)(a^2, a, e)(a^2, a, e)(a^2, a, e)]_{4,3} = (a^2aea^2, aea^2a, ea^2ae) = (a^2, a, e), \\
& [(a^2, a, a)(a^2, a, a)(a^2, a, a)(a^2, a, a)]_{4,3} = (a^2aaa^2, aaa^2a, aa^2aa) = (e, a, a^2), \\
& [(a^2, a, a^2)(a^2, a, a^2)(a^2, a, a^2)(a^2, a, a^2)]_{4,3} = (a^2aa^2a^2, aa^2a^2a, a^2a^2aa^2) = (a, e, a), \\
& [(a^2, a^2, e)(a^2, a^2, e)(a^2, a^2, e)(a^2, a^2, e)]_{4,3} = (a^2a^2ea^2, a^2ea^2a^2, ea^2a^2e) = (e, e, a), \\
& [(a^2, a^2, a)(a^2, a^2, a)(a^2, a^2, a)(a^2, a^2, a)]_{4,3} = (a^2a^2aa^2, a^2aa^2a^2, aa^2a^2a) = (a, a, e), \\
& [(a^2, a^2, a^2)(a^2, a^2, a^2)(a^2, a^2, a^2)(a^2, a^2, a^2)]_{4,3} = (a^2a^2a^2a^2, a^2a^2a^2a^2, a^2a^2a^2a^2) = (a^2, a^2, a^2).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$I(<Z_3 \times Z_3 \times Z_3, [ ]_{4,3}>) = \{(e, e, e), (a, a, a), (a^2, a^2, a^2), \\ (e, a, a^2), (e, a^2, a), (a, e, a^2), (a, a^2, e), (a^2, e, a), (a^2, a, e)\},$$

то есть из 27 элементов 4-арной группы  $<Z_3 \times Z_3 \times Z_3, [ ]_{4,3}>$  только 9 элементов являются идемпотентами.

Если  $A$  – произвольная группа, то по теореме 2.9.3 из [2] универсальная алгебра  $<A^k, [ ]_{k+1, k}>$  является  $(k+1)$ -арной группой, множество идемпотентов которой согласно теореме 2.12.1 из [2] имеет вид

$$I(< A^k, [ ]_{k+1, k}>) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k \in A, \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 \dots \varepsilon_k)^{-1}\}$$

или

$$I(< A^k, [ ]_{k+1, k}>) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1} \in A, \varepsilon_k = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{k-1})^{-1}\}.$$

Для абелевой, в частности, для циклической группы, имеем

$$I(< A^k, [ ]_{k+1, k}>) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k \in A, \varepsilon_1 = \varepsilon_2^{-1} \dots \varepsilon_k^{-1}\}$$

или

$$I(< A^k, [ ]_{k+1, k}>) = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \mid \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1} \in A, \varepsilon_k = \varepsilon_1^{-1} \dots \varepsilon_{k-1}^{-1}\}.$$

Отсюда вытекает, что число идемпотентов в  $\underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k}$  равно

но числу элементов в  $(k-1)$ -й декартовой степени  $\underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_{k-1}$ , то есть равно  $k^{k-1}$ :

$$|I(\underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k})| = k^{k-1}.$$

В частности, если  $k = 2$  или  $k = 3$ , как в примерах 1 и 2, то

$$|I(\underbrace{Z_2 \times Z_2}_2, [ ]_{3, 2})| = 2^{2-1} = 2, |I(\underbrace{Z_3 \times Z_3 \times Z_3}_3, [ ]_{4, 3})| = 3^{3-1} = 9.$$

**Лемма 1.** Элементы

$$(\underbrace{e, \dots, e}_k), (\underbrace{a, \dots, a}_k), \dots, (\underbrace{a^{k-1}, \dots, a^{k-1}}_k)$$

являются идемпотентами в  $\underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k}$ .

**Доказательство.** Так как

$$\underbrace{[(x, \dots, x)(x, \dots, x) \dots (x, \dots, x)]}_{k+1} = (\underbrace{x^{k+1}, \dots, x^{k+1}}_k) = (\underbrace{x, \dots, x}_k)$$

для любого  $x \in Z_k$ , то  $(\underbrace{x, \dots, x}_k)$  – идемпотент в  $Z_k$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** Если  $k$  – нечетное, то элемент  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)$ , в котором все компоненты являются различными элементами из  $Z_k$ , является идемпотентом в  $\underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k}$ .

**Доказательство.** Пусть  $k = 2m + 1$ ,  $m \geq 1$ . Если положить

$$[\underbrace{\mathbf{c} \dots \mathbf{c}}_{k+1}]_{k+1, k} = (y_1, \dots, y_k),$$

то для любого  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  имеем

$$y_j = c_j \dots c_k c_1 \dots c_{j-1} c_j = c_1 \dots c_{j-1} c_j \dots c_k c_j = c_1 \dots c_k c_j,$$

то есть

$$y_j = c_1 \dots c_k c_j.$$

Так как  $c_1, \dots, c_k$  – различные элементы из множества  $\{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$ , то, учитывая перестановочность элементов в  $Z_k$  из последнего равенства получаем

$$y_j = e a a^2 \dots a^{k-1} c_j = a^{1+2+\dots+k-1} c_j = a^{\frac{k(k-1)}{2}} c_j = a^{km} c_j = c_j.$$

То есть  $y_j = c_j$ . Это означает, что

$$[\underbrace{\mathbf{c} \dots \mathbf{c}}_{k+1}]_{k+1, k} = \mathbf{c},$$

то есть  $\mathbf{c}$  – идемпотент в  $\underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k}$ . Лемма доказана.

Таким образом, при нечетном  $k$  среди  $k^{k-1}$  идемпотентов  $(k+1)$ -арной группы  $\underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k}$ , согласно лемме 1, имеется  $k$  идемпотентов вида

$$\underbrace{(a^s, \dots, a^s)}_k, s = 0, 1, \dots, k-1,$$

а по лемме 2 в  $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k} \rangle$  имеется еще  $k!$  идемпотентов, у

каждого из которых все компоненты являются различными элементами из  $Z_k$ .

В 4-арной группе из примера 2 идемпотенты этих двух видов составляют все множество идемпотентов, так как  $3 + 3! = 3 + 6 = 9$ . Это же вытекает из самого вида множества  $I(\langle Z_3 \times Z_3 \times Z_3, [ ]_{4, 3} \rangle)$ . Уже при  $k = 4$  ситуация иная, так как в этом случае число идемпотентов указанных видов, равное  $4 + 4! = 28$ , отлично от числа всех идемпотентов, равного  $4^3 = 64$ .

Представляет интерес вопрос: сохраняется ли утверждение леммы 2, если  $k$  – четное число? Пример 1 показывает, что при  $k = 2$  ответ на поставленный вопрос отрицательный.

Приведем еще один подтверждающий пример.

**Пример 3.** Пусть  $k = 4$ ,  $Z_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ . Так как

$$\begin{aligned} & [(e, a, a^2, a^3)(e, a, a^2, a^3)(e, a, a^2, a^3)(e, a, a^2, a^3)]_{5, 4} = \\ & = (eaa^2a^3e, aa^2a^3ea, a^2a^3eaa^2, a^3eaa^2a^3) = (a^6, a^7, a^8, a^9) = (a^2, a^3, e, a), \end{aligned}$$

то элемент  $(e, a, a^2, a^3)$  не является идемпотентом в  $\langle \underbrace{Z_4 \times \dots \times Z_4}_4, [ ]_{5, 4} \rangle$ .

Имеет место более общее утверждение.

**Лемма 3.** Если  $k$  – четное,  $k > 1$ , то элемент  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)$ , в котором все компоненты являются различными элементами из  $Z_k$  не является идемпотентом в  $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k} \rangle$ .

**Доказательство.** При доказательстве леммы 2 установлено, что если

$$\underbrace{[\mathbf{c} \dots \mathbf{c}]}_{k+1} = (y_1, \dots, y_k),$$

то

$$y_j = a^{\frac{k(k-1)}{2}} c_j.$$

Если предположить  $a^{\frac{k(k-1)}{2}} = e$ , то из условия  $k$  делит  $\frac{k(k-1)}{2}$  следует, что 2 делит  $k - 1$ , что невозможно. Таким образом,  $a^{\frac{k(k-1)}{2}} \neq e$ , откуда

$$y_j = a^{\frac{k(k-1)}{2}} c_j \neq c_j.$$

Это означает, что элемент  $\mathbf{c}$  не является идемпотентом в  $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k} \rangle$ . Лемма доказана.

**Лемма 4.** Элемент  $\mathbf{c} \in \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k$ , у которого  $k - 1$  компонент совпадают и отличны от оставшейся компоненты, не является идемпотентом в

$$< \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k} >.$$

**Доказательство.** Пусть у элемента

$$\mathbf{c} = (\underbrace{u, \dots, u}_{i-1}, v, \underbrace{u, \dots, u}_{k-i}), u \neq v, i = 1, \dots, k$$

$k - 1$  компонент совпадают и отличны от  $i$ -ой компоненты. Предположим, что  $\mathbf{c}$  – идемпотент, то есть

$$[(\underbrace{u, \dots, u}_{i-1}, v, \underbrace{u, \dots, u}_{k-i}), \dots, (\underbrace{u, \dots, u}_{i-1}, v, \underbrace{u, \dots, u}_{k-i})]_{k+1, k} = (\underbrace{u, \dots, u}_{i-1}, v, \underbrace{u, \dots, u}_{k-i}).$$

Сравнивая  $i$ -е компоненты левой и правой части последнего равенства, получим

$$v \underbrace{u \dots u}_{k-1} v = v,$$

откуда

$$vu^{k-1} = e, v = u,$$

что противоречит предложению  $u \neq v$ . Лемма доказана.

Доказанные леммы позволяют упростить задачу нахождения идемпотентов в  $(k + 1)$ -арной группе  $< \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k} >$ . Продемонстрируем это для случая  $k = 4$ .

**Предложение.** В 5-арной группе  $< \underbrace{Z_4 \times \dots \times Z_4}_4, [ ]_{5, 4} >$  имеется ровно

64 идемпотента, множество которых имеет вид

$$\begin{aligned} I(< Z_4 \times Z_4 \times Z_4 \times Z_4, [ ]_{5, 4} >) &= \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \mid \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in Z_4, \varepsilon_1 = (\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4)^{-1}\} = \\ &= \{\mathbf{a}_1 = (e, e, e, e), \mathbf{a}_2 = (a, a, a, a), \mathbf{a}_3 = (a^2, a^2, a^2, a^2), \mathbf{a}_4 = (a^3, a^3, a^3, a^3), \\ &\quad \mathbf{a}_5 = (a^3, e, e, a), \mathbf{a}_6 = (a^2, a, a, e), \mathbf{a}_7 = (e, a^2, a^2, e), \mathbf{a}_8 = (a^2, a^3, a^3, e), \\ &\quad \mathbf{a}_9 = (a^3, e, a, e), \mathbf{a}_{10} = (a^2, a, e, a), \mathbf{a}_{11} = (e, a^2, e, a^2), \mathbf{a}_{12} = (a^2, a^3, e, a^3), \\ &\quad \mathbf{a}_{13} = (a^3, a, e, e), \mathbf{a}_{14} = (a^2, e, a, a), \mathbf{a}_{15} = (e, e, a^2, a^2), \mathbf{a}_{16} = (a^2, e, a^3, a^3), \\ &\quad \mathbf{a}_{17} = (a^2, e, e, a^2), \mathbf{a}_{18} = (e, a, a, a^2), \mathbf{a}_{19} = (a^3, a^2, a^2, a), \mathbf{a}_{20} = (a, a^3, a^3, a), \\ &\quad \mathbf{a}_{21} = (a^2, e, a^2, e), \mathbf{a}_{22} = (e, a, a^2, a), \mathbf{a}_{23} = (a^3, a^2, a, a^2), \mathbf{a}_{24} = (a, a^3, a, a^3), \\ &\quad \mathbf{a}_{25} = (a^2, a^2, e, e), \mathbf{a}_{26} = (e, a^2, a, a), \mathbf{a}_{27} = (a^3, a, a^2, a^2), \mathbf{a}_{28} = (a, a, a^3, a^3), \\ &\quad \mathbf{a}_{29} = (a, e, e, a^3), \mathbf{a}_{30} = (a^3, a, a, a^3), \mathbf{a}_{31} = (a, a^2, a^2, a^3), \mathbf{a}_{32} = (e, a^3, a^3, a^2), \\ &\quad \mathbf{a}_{33} = (a, e, a^3, e), \mathbf{a}_{34} = (a^3, a, a^3, a), \mathbf{a}_{35} = (a, a^2, a^3, a^2), \mathbf{a}_{36} = (e, a^3, a^2, a^3), \\ &\quad \mathbf{a}_{37} = (a, a^3, e, e), \mathbf{a}_{38} = (a^3, a^3, a, a), \mathbf{a}_{39} = (a, a^3, a^2, a^2), \mathbf{a}_{40} = (e, a^2, a^3, a^3), \\ &\quad \mathbf{a}_{41} = (a, e, a, a^2), \mathbf{a}_{42} = (a, e, a^2, a), \mathbf{a}_{43} = (e, e, a, a^3), \mathbf{a}_{44} = (e, e, a^3, a), \\ &\quad \mathbf{a}_{45} = (a, a, e, a^2), \mathbf{a}_{46} = (a, a^2, e, a), \mathbf{a}_{47} = (e, a, e, a^3), \mathbf{a}_{48} = (e, a^3, e, a), \\ &\quad \mathbf{a}_{49} = (a, a, a^2, e), \mathbf{a}_{50} = (a, a^2, a, e), \mathbf{a}_{51} = (e, a, a^3, e), \mathbf{a}_{52} = (e, a^3, a, e), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{53} &= (a^3, e, a^2, a^3), \mathbf{a}_{54} = (a^3, e, a^3, a^2), \mathbf{a}_{55} = (a^2, a, a^2, a^3), \mathbf{a}_{56} = (a^2, a, a^3, a^2), \\ \mathbf{a}_{57} &= (a^3, a^2, e, a^3), \mathbf{a}_{58} = (a^3, a^3, e, a^2), \mathbf{a}_{59} = (a^2, a^2, a, a^3), \mathbf{a}_{60} = (a^2, a^3, a, a^2), \\ \mathbf{a}_{61} &= (a^3, a^2, a^3, e), \mathbf{a}_{62} = (a^3, a^3, a^2, e), \mathbf{a}_{63} = (a^2, a^2, a^3, a), \mathbf{a}_{64} = (a^2, a^3, a^2, a) \}. \end{aligned}$$

**Доказательство.** По лемме 1 элементы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ , у которых все компоненты совпадают, являются идемпотентами в рассматриваемой 5-арной группе.

Ввиду леммы 4, элементы, у которых 3 компоненты совпадают, рассматривать нет необходимости.

Еще 36 идемпотентов получим, если выпишем элементы  $\mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \dots, \mathbf{a}_{40}$ , у которых из трех компонент  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  две совпадают, а компонента  $\varepsilon_1$ , находится по формуле  $\varepsilon_1 = (\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4)^{-1}$ .

Все 24 элемента  $\mathbf{a}_{41}, \mathbf{a}_{42}, \dots, \mathbf{a}_{64}$ , у которых компоненты  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  различные, также являются идемпотентами, так как компонента  $\varepsilon_1$ , удовлетворяет условию  $\varepsilon_1 = (\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4)^{-1}$ .

Так как в рассматриваемой 5-арной группе число всех идемпотентов равно  $|Z_4|^3 = 4^3 = 64$ , то других идемпотентов, кроме элементов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{64}$ , в ней нет. Предложение доказано.

Заметим, что по лемме 3 среди идемпотентов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{64}$  не должно быть элементов, у которых все компоненты различны. Это действительно так.

Критерий идемпотентности элементов  $(k + 1)$ -арной группы  $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k} \rangle$  дает следующая

**Теорема. Элемент**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (a^{r_1}, a^{r_2}, \dots, a^{r_k}), r_j \in \{0, 1, \dots, k - 1\}, j = 1, \dots, k$$

является идемпотентом  $(k + 1)$ -арной группы  $\langle \underbrace{Z_k \times \dots \times Z_k}_k, [ ]_{k+1, k} \rangle$

тогда и только тогда, когда сумма  $r_1 + r_2 + \dots + r_k$  кратна  $k$ .

**Доказательство. Необходимость.** Если  $\varepsilon$  – идемпотент, то из

$$[\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k+1}]_{k+1, k} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

то есть из

$$[(a^{r_1}, a^{r_2}, \dots, a^{r_k}) \dots (a^{r_1}, a^{r_2}, \dots, a^{r_k})]_{k+1, k} = (a^{r_1}, a^{r_2}, \dots, a^{r_k}), \quad (2)$$

ввиду определения операции  $[ ]_{k+1, k}$  следует

$$a^{r_j} \dots a^{r_k} a^{r_1} \dots a^{r_{j-1}} a^{r_j} = a^{r_j}, \quad (3)$$

для любого  $j = 1, \dots, k$ . Откуда

$$a^{r_j + \dots + r_k + r_1 + \dots + r_{j-1}} = e, \quad (4)$$

$$a^{r_1 + \dots + r_k} = e, \quad (5)$$

где  $e$  – единица группы  $Z_k$ . Следовательно,  $k$  делит  $r_1 + r_2 + \dots + r_k$ .

*Достаточность.* Если  $k$  делит  $r_1 + r_2 + \dots + r_k$ , то верно (5), откуда получаем (4). Это значит, что для любого  $j = 1, \dots, k$  верно (3). Но тогда верно (2), а значит, и (1). Следовательно,  $\varepsilon$  – идемпотент. Теорема доказана.

Заметим, что теперь все полученные ранее леммы могут рассматриваться как следствия доказанной теоремы. Лемма 1 является непосредственным следствием теоремы. Леммы 2 и 3 следуют из теоремы, так как

число  $\frac{k(k-1)}{2}$  при нечетном  $k$  делится на  $k$ , а при четном  $k$  не делится на  $k$ .

Для получения из доказанной теоремы леммы 4 используется тот факт, что число  $s(k-1) + t$ , где  $s, t \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ ,  $s \neq t$ , не делится на  $k$ .

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002).

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
2. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – Р. 208–350.
4. Гальмак, А.М.  $n$ -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

Поступила в редакцию 22.03.2011 г.

УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

#### $\sigma$ -СОГЛАСОВАННЫЕ ВЕКТОР-МАТРИЦЫ

В работе для любого целого  $k \geq 1$  и любой подстановки  $\sigma$  множества  $\{1, \dots, k\}$  определяются  $\sigma$ -согласованные вектор-матрицы над произвольным кольцом  $P$ . Если обычные матрицы рассматривать как однокомпонентные вектор-матрицы, то для них  $\sigma$ -согласованность равносильна совпадению размеров. Доказывается, что если  $P$  – ассоциативное кольцо, а подстановка  $\sigma$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то множество всех  $\sigma$ -согласованных вектор-матриц над  $P$  одного и того же фиксированного размера является  $l$ -арной полугруппой относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$ , где  $l \geq 2$ . Приводятся многочисленные следствия этого результата.

**1. Введение.** Так как матрица может быть умножена сама на себя тогда и только тогда, когда она квадратная, а перемножать квадратные матрицы можно тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же порядок, то из замкнутости некоторого множества матриц относительно операции умножения матриц необходимо следует, что все элементы этого множества являются квадратными матрицами одного и того же порядка. Это означает, что если некоторое подмножество  $M$  множества  $M(P)$

всех матриц над ассоциативным кольцом  $P$  является полугруппой относительно операции умножения матриц, то оно является подполугруппой полугруппы  $\mathbf{M}_n(P)$  всех квадратных матриц порядка  $n$  над  $P$  для некоторого  $n \geq 2$ . Других полугрупп в  $\mathbf{M}(P)$  нет.

Если рассматривать обычные матрицы как однокомпонентные вектор-матрицы, то частичной полугруппе  $\mathbf{M}(P)$  будет соответствовать частичная  $l$ -арная полугруппа  $\langle \mathbf{M}(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  всех  $k$ -компонентных вектор-матриц над  $P$  с частичной  $l$ -арной операцией  $[ ]_{l, \sigma, k}$ , где  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$  удовлетворяющая условию  $\sigma^l = \sigma$ , а полугруппе  $\mathbf{M}_n(P)$  из  $\mathbf{M}(P)$  –  $l$ -арная полугруппа  $\langle \mathbf{M}_n(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  из  $\langle \mathbf{M}(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  всех  $k$ -компонентных вектор-матриц, у которых каждая компонента является квадратной матрицей порядка  $n$  над  $P$ .

Имея ввиду сказанное выше, решение общей задачи изучения строения частичной  $l$ -арной полугруппы  $\langle \mathbf{M}(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  естественно начинать с поиска ответа на вопрос: *исчерпываются ли ее  $l$ -арные подполугруппы  $l$ -арными подполугруппами  $l$ -арных полугрупп вида  $\langle \mathbf{M}_n(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ ?* Иначе говоря: *существуют ли в  $\langle \mathbf{M}(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$   $l$ -арные подполугруппы, отличные от  $l$ -арных подполугрупп  $l$ -арных полугрупп вида  $\langle \mathbf{M}_n(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ ?*

В данной работе получен отрицательный ответ на первый вопрос, соответственно – положительный ответ на второй вопрос. Это означает, что частичная  $l$ -арная полугруппа  $\langle \mathbf{M}(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  устроена сложнее, чем ее прототип – частичная полугруппа  $\mathbf{M}(P)$ .

**2 Общие определения.** Напомним определение  $k$ -компонентной вектор-матрицы из [1, 2], обобщающее понятие  $m$ -арной матрицы из работы Э. Поста [3].

**2.1 Определение [1].** Пусть  $P$  – кольцо,  $k$  – целое,  $k \geq 1$ . Упорядоченный набор  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$   $k$  матриц  $A_1, \dots, A_k$  размеров  $m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k$  с элементами из  $P$  называется *векторной матрицей или вектор-матрицей размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$  над  $P$* .

Вектор-матрицу из определения 2.1 будем называть также  *$k$ -компонентной вектор-матрицей*.

Понятно, что 1-компонентные вектор-матрицы – это обычные матрицы.

Вектор-матрица, у которой все компоненты  $A_1, \dots, A_k$  – матрицы одного и того же размера  $m \times n$ , называется *вектор-матрицей размера  $m \times n$* .

Вектор-матрица, у которой все компоненты  $A_1, \dots, A_k$  – квадратные матрицы порядков  $n_1, \dots, n_k$  соответственно, называется *квадратной вектор-матрицей порядка  $(n_1, \dots, n_k)$* .

Вектор-матрица, у которой все компоненты  $A_1, \dots, A_k$  – квадратные матрицы одного и того же порядка  $n$ , называется *квадратной вектор-матрицей порядка  $n$* .

Вектор-матрицам помимо уже отмечавшихся работ [1, 2] посвящена также работа [4].

Для обозначения множества всех подстановок множества  $\{1, 2, \dots, k\}$  используем стандартное обозначение  $S_k$ .

**2.2 Определение [1].** Если  $k \geq 2$ ,  $l \geq 2$ ,  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$ ,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, l$$

–  $k$ -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом  $P$  такие, что для любого  $j \in \{1, \dots, k\}$  определено произведение

$$Y_j = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \cdots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{l\sigma^{l-1}(j)} \quad (2.1)$$

то положим

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \{Y_1, \dots, Y_k\}. \quad (2.2)$$

$l$ -Арную операцию (2.2) иногда для краткости будем называть  $l$ -арным произведением.

**2.3 Замечание.** Если в определении 2.2 все компоненты матриц  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$  являются матрицами 1-го порядка, то операция  $[\ ]_{l, \sigma, k}$  определена на декартовой степени  $P^k$ . Таким образом, операцию  $[\ ]_{l, \sigma, k}$  из определения 2.2 можно считать обобщением операции  $[\ ]_{l, \sigma, k}$  из [5, 6].

Аналогично бинарному случаю,  $l$ -арное произведение (2.2) определено не всегда, а только в тех случаях, когда для любых соседних сомножителей в правой части (2.1), число столбцов предшествующего сомножителя совпадает с числом строк последующего сомножителя.

**2.4 Теорема [1].** Пусть

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \dots, A_{mk}), m = 1, \dots, 2l - 1$$

–  $k$ -компонентные вектор-матрицы над  $P$ ,  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$ , удовлетворяющая условию  $\sigma^l = \sigma$ . Тогда, если для некоторого  $i = 0, 1, \dots, l - 1$  определена  $k$ -компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \cdots \mathbf{A}_{j-1}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{j+1} \cdots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k'}$$

то для любого  $j = 0, 1, \dots, l - 1$  определена  $k$ -компонентная вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \cdots \mathbf{A}_{j-1}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{j+1} \cdots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k'}$$

и верно равенство

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_{i+1} \cdots \mathbf{A}_{j-1}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{j+1} \cdots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k'} = \\ & = [\mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_j [\mathbf{A}_{j+1} \cdots \mathbf{A}_{i-1}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{i+1} \cdots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k'} \end{aligned}$$

Для обозначения множества всех  $k$ -компонентных вектор-матриц размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$  над  $P$  будем использовать символ  $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ . В частности, символом  $\mathbf{M}_{n_1, \dots, n_k}(P)$  обозначается множество всех  $k$ -компонентных квадратных вектор-матриц порядка  $(n_1, \dots, n_k)$  над  $P$ . Если  $n_1 = \dots = n_k = n$ , то для обозначения множества всех  $k$ -компонентных квадратных вектор-матриц порядка  $n$  над  $P$  вместо символа  $\mathbf{M}_{\underbrace{n \dots n}_k}(P)$  будем использовать символ  $\mathbf{M}_n(k, P)$ .

**2.5 Предложение [1].** Если подстановка  $\sigma \in S_k$  удовлетворяет условию  $\sigma^l = \sigma$ , то  $\langle \mathbf{M}_n(k, P), [\ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  –  $l$ -арная полугруппа.

Заметим, что предложение 2.5 является также непосредственным следствием теоремы 2.4.

**3 Основные определения.** Для всякой подстановки  $\sigma \in S_k$  положим:

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_p \sigma_{p+1} \dots \sigma_q \quad (3.1)$$

– разложение  $\sigma$  в произведение независимых циклов, где  $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_q$  – все циклы длины 1;

$$X_1 = \{i_{11}, \dots, i_{1l_1}\}, \dots, X_p = \{i_{p1}, \dots, i_{pl_p}\}, X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \dots, X_q = \{i_q\} \quad (3.2)$$

–  $\sigma$ -орбиты, соответствующие циклам  $\sigma_1, \dots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \dots, \sigma_q$ . Длина цикла  $\sigma_r$  ( $r = 1, \dots, q$ ) обозначается через  $l_r$ . В частности,  $l_{p+1} = \dots = l_q = 1$ .

**3.1 Определение.** Упорядоченный набор пар  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  целых положительных чисел называется  $\sigma$ -согласованным или согласованным с подстановкой  $\sigma \in S_k$  имеющей разложение (3.1), если:

1) для каждой орбиты  $X_r = \{i_{r1}, \dots, i_{rl_r}\}$ , где  $r = 1, \dots, p$ , и любого ее элемента  $i_{rs}$ , где  $s = 1, \dots, l_r$ , верны равенства

$$n_{i_{rs}} = m_{\sigma(i_{rs})}, n_{\sigma(i_{rs})} = m_{\sigma^2(i_{rs})}, \dots, n_{\sigma^{l_r-2}(i_{rs})} = m_{\sigma^{l_r-1}(i_{rs})}, n_{\sigma^{l_r-1}(i_{rs})} = m_{i_{rs}}; \quad (3.3)$$

$$2) m_{i_{p+1}} = n_{i_{p+1}}, \dots, m_{i_q} = n_{i_q}.$$

**3.2 Определение.** Вектор-матрица размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$  называется  $\sigma$ -согласованной или согласованной с подстановкой  $\sigma \in S_k$  имеющей разложение (3.1), если набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma$ .

Таким образом,  $k$ -компонентная вектор-матрица  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$  размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$  является согласованной с подстановкой  $\sigma \in S_k$  имеющей разложение (3.1), если выполняется условие 1) определения 3.1 и, кроме того, согласно условию 2) того же определения 3.1, матрицы  $A_{i_{p+1}}, \dots, A_{i_q}$  являются квадратными порядков  $m_{i_{p+1}} = n_{i_{p+1}}, \dots, m_{i_q} = n_{i_q}$  соответственно.

**3.3 Замечание.** Если условие 1) определения 3.1 распространить на одноэлементные циклы, то для орбит  $X_{p+1} = \{i_{p+1}\}, \dots, X_q = \{i_q\}$  равенства (3.3) примут вид

$$\begin{aligned} n_{\sigma^{l_{p+1}-1}(i_{p+1})} &= n_{\sigma^{l-1}(i_{p+1})} = n_{\sigma^0(i_{p+1})} = n_{i_{p+1}} = m_{i_{p+1}}, \dots \\ \dots, n_{\sigma^{l_q-1}(i_q)} &= n_{\sigma^{l-1}(i_q)} = n_{\sigma^0(i_q)} = n_{i_q} = m_{i_q}. \end{aligned}$$

Таким образом, в определении 3.1 можно обойтись без условия 2), если в условии 1) считать  $r = 1, \dots, q$ .

**3.4 Замечание.** Покажем, что из выполнимости условия (3.3) для некоторого  $i_{rs} \in X_r$  следует его выполнимость для любого  $i_{rs} \in X_r$ .

Если  $i$  и  $j$  различные элементы орбиты  $X_r$ , то  $j = \sigma^s(i)$  для некоторого  $s = 1, \dots, l_r - 1$ . Пусть для  $i \in X_r$  выполняется условие (3.3), то есть верны равенства

$$n_i = m_{\sigma(i)}, n_{\sigma(i)} = m_{\sigma^2(i)}, \dots, n_{\sigma^{s-1}(i)} = m_{\sigma^s(i)},$$

$$n_{\sigma^s(i)} = m_{\sigma^{s+1}(i)}, n_{\sigma^{s+1}(i)} = m_{\sigma^{s+2}(i)}, \dots, n_{\sigma^{l-1}(i)} = m_i.$$

Используя равенство  $j = \sigma^s(i)$ , а также тождественность подстановки  $\sigma^l$ , перепишем последние две строки, поменяв их местами,

$$n_j = m_{\sigma(j)}, n_{\sigma(j)} = m_{\sigma^2(j)}, \dots, n_{\sigma^{l_r-s-1}(j)} = m_{\sigma^{l_r-s}(j)},$$

$$n_{\sigma^{l_r-s}(j)} = m_{\sigma^{l_r-s+1}(j)}, n_{\sigma^{l_r-s+1}(j)} = m_{\sigma^{l_r-s+2}(j)}, \dots, n_{\sigma^{l_r-1}(j)} = m_j.$$

Таким образом для  $j \in X_r$  условие (3.3) также выполняется.

**3.5 Замечание.** Если  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ , то условие 2) в определении 3.1 излишнее, а условие 1) примет вид

$$n_1 = m_{\sigma(1)}, n_{\sigma(1)} = m_{\sigma^2(1)}, \dots, n_{\sigma^{k-2}(1)} = m_{\sigma^{k-1}(1)}, n_{\sigma^{k-1}(1)} = m_1. \quad (3.4)$$

Таким образом, если  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ , то  $\sigma$ -согласованную вектор-матрицу можно определить как  $k$ -компонентную вектор-матрицу  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$  размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ , для которой выполняется условие (3.4).

**3.6 Замечание.** Если  $\sigma = (12 \dots k) \in S_k$ , то  $\sigma$ -согласованную вектор-матрицу можно определить как такую вектор-матрицу  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$  размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ , для которой

$$n_1 = m_2, n_2 = m_3, \dots, n_{k-1} = m_k, n_k = m_1. \quad (3.5)$$

**3.7 Пример.** Если  $\sigma = (14)(236)(5) \in S_6$ , то  $\sigma$ -согласованной является всякая 6-компонентная вектор-матрица

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$$

размера

$$(m_1 \times n_1, m_2 \times n_2, m_3 \times n_3, m_4 \times n_1, m_5 \times n_5, m_6 \times n_2).$$

Если  $\sigma = (13)(24) \in S_4$ , то  $\sigma$ -согласованной является всякая 4-компонентная вектор-матрица  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$  размера

$$(m_1 \times n_1, m_2 \times n_2, m_3 \times n_1, m_4 \times n_2).$$

Если  $\sigma = (132) \in S_3$ , то  $\sigma$ -согласованной является всякая 3-компонентная вектор-матрица  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$  размера  $(m \times n, k \times m, l \times k)$ .

Если  $\sigma = (12) \in S_2$ , то  $\sigma$ -согласованной является всякая двухкомпонентная вектор-матрица  $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$  размера  $(m \times n, n \times m)$ .

Следующие предложения являются следствиями определения 3.1.

**3.8 Предложение.** Вектор-матрица  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$   $\sigma$ -согласована с тождественной подстановкой  $\varepsilon \in S_k$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{A}$  – квадратная вектор-матрица, то есть тогда и только тогда, когда все компоненты  $A_1, \dots, A_k$  – квадратные матрицы.

**3.9 Предложение.** Любая квадратная вектор-матрица  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$  порядка  $p$  согласована со всеми подстановками из  $S_k$ .

**3.10 Замечание.** Один и тот же набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ , соответственно одна и та же  $k$ -компонентная вектор-матрица размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$  могут быть согласованы с различными подстановками. Например, набор  $((m, n), (n, m), (m, n), (n, m))$ , соответственно 4-компонентная вектор-матрица  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$  размера

$(m \times n, n \times m, m \times p, p \times m)$  согласованы и с подстановкой  $(12)(34) \in S_4$ , и с подстановкой  $(1234) \in S_4$ .

**4 Основной результат.** Вектор-матрицы, согласованные с одной и той же подстановкой, могут иметь разные размеры. Мы будем рассматривать  $\sigma$ -согласованные вектор-матрицы фиксированного размера.

Если набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma \in S_k$ , то все вектор-матрицы из  $M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$  также согласованы с  $\sigma$ .

**4.1 Теорема.** Пусть  $P$  – ассоциативное кольцо, упорядоченный набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  – согласован с подстановкой  $\sigma \in S_k$ , удовлетворяющей условию  $\sigma^l = \sigma$ . Тогда множество  $M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$ , а универсальная алгебра  $\langle M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  является  $l$ -арной полугруппой. В частности, если  $d$  – порядок подстановки  $\sigma$ , то  $\langle M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [ ]_{k+1, \sigma, k} \rangle = (d+1)$ -арная полугруппа.

**Доказательство.** Пусть  $A_i = (A_{ij}, \dots, A_{ik})$ ,  $i = 1, \dots, l$  – произвольные вектор-матрицы из  $M_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ , а подстановка  $\sigma$  имеет разложение (3.1).

Так как порядок  $d$  подстановки  $\sigma$  есть наименьшее общее кратное длин ее циклов из разложения (3.1), то длина  $l_r$  любого цикла  $X_r$  из разложения (3.1) делит  $d$ . Кроме того, тождественность подстановки  $\sigma^{l-1}$  влечет за собой делимость  $l-1$  на  $d$ . Таким образом,  $l_r$  делит  $l-1$ , то есть  $l = tl_r + 1$  для некоторого целого  $t$ . Будем использовать также то, что любой  $j \in \{1, \dots, k\}$  принадлежит одной из орбит (3.2).

Пусть вначале  $j$  является элементом какой-либо орбиты  $X_r$  ( $r = 1, \dots, p$ ) с числом элементов, большим единицы. Для  $j = i_{rj}$  условие (3.3) принимает вид

$$\begin{aligned} n_j &= m_{\sigma(j)}, n_{\sigma(j)} = m_{\sigma^2(j)}, n_{\sigma^2(j)} = m_{\sigma^3(j)}, \dots \\ &\dots, n_{\sigma^{l-2}(j)} = m_{\sigma^{l-1}(j)}, n_{\sigma^{l-1}(j)} = m_j. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Выберем в каждой вектор-матрице  $A_1, \dots, A_l$  по одной компоненте

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, A_{3\sigma^2(j)}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{l\sigma^{l-1}(j)}. \quad (4.2)$$

Первые  $l_r$  матриц из (4.2)

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, A_{3\sigma^2(j)}, \dots, A_{(l_r-1)\sigma^{l_r-2}(j)}, A_{l_r\sigma^{l_r-1}(j)} \quad (4.3)$$

имеют соответственно размеры

$$\begin{aligned} m_j \times n_j, m_{\sigma(j)} \times n_{\sigma(j)}, m_{\sigma^2(j)} \times n_{\sigma^2(j)}, \dots \\ \dots, m_{\sigma^{l-2}(j)} \times n_{\sigma^{l-2}(j)}, m_{\sigma^{l-1}(j)} \times n_{\sigma^{l-1}(j)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (4.1) и (4.4) вытекает, что матрицы (4.3) можно перемножить в указанном порядке, в результате чего получится матрица  $A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{l_r\sigma^{l_r-1}(j)}$  размера  $m_j \times m_j$  то есть квадратная матрица порядка  $m_j$ .

Далее неоднократно будет использоваться тот факт, что подстановка  $\sigma$  действует на элементы из  $X_r$  также, как цикл  $\sigma_r$  порядка  $l_r$ , то есть  $\sigma(j) = \sigma_r(j)$  для любого  $j \in X_r$ .

Так как матрица  $A_{(l_r+1)j}$  имеет размер  $m_j \times n_j$ , то матрица

$$B_{1(j)} = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{l_r \sigma^{l_r-1}(j)} A_{(l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} = A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{l_r \sigma^{l_r-1}(j)} A_{(l_r+1)j}$$

также имеет размер  $m_j \times n_j$ .

Аналогично доказывается существование произведений

$$B_{2(j)} = B_{1(j)} A_{(l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(2l_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(2l_r+1)\sigma^{l_r}(j)},$$

.....

$$B_{s(j)} = B_{(s-1)(j)} A_{((s-1)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(sl_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(sl_r+1)\sigma^{l_r}(j)},$$

.....

$$B_{t(j)} = B_{(t-1)(j)} A_{((t-1)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(tl_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(tl_r+1)\sigma^{l_r}(j)},$$

каждое из которых имеет размер  $m_j \times n_j$ .

Используя записанные выше равенства для  $B_{1(j)}$ , ...,  $B_{(t-1)(j)}$ , а также тождественность подстановки  $\sigma^{l_r}$  на элементах орбиты  $X_r$ , получим

$$B_{t(j)} = B_{(t-2)(j)} A_{((t-2)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{((t-1)l_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{((t-1)l_r+1)\sigma^{l_r}(j)}$$

$$A_{((t-1)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(tl_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(tl_r+1)\sigma^{l_r}(j)} = \dots$$

$$\dots = B_{1(j)} A_{(l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(2l_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(2l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} \dots A_{((t-2)l_r+2)\sigma(j)} \dots$$

$$\dots A_{((t-1)l_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{((t-1)l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} A_{((t-1)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(tl_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(tl_r+1)\sigma^{l_r}(j)} =$$

$$= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{l_r \sigma^{l_r-1}(j)} A_{(l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} A_{(l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(2l_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(2l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} \dots$$

$$\dots A_{((t-2)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{((t-1)l_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{((t-1)l_r+1)\sigma^{l_r}(j)}$$

$$A_{((t-1)l_r+2)\sigma(j)} \dots A_{(tl_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(tl_r+1)\sigma^{l_r}(j)} =$$

$$= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{l_r \sigma^{l_r-1}(j)} A_{(l_r+1)\sigma^{l_r}(j)} A_{(l_r+2)\sigma^{l_r+1}(j)} \dots A_{(2l_r)\sigma^{2l_r-1}(j)} A_{(2l_r+1)\sigma^{2l_r}(j)} \dots$$

$$\dots A_{((t-2)l_r+2)\sigma^{(t-2)l_r+1}(j)} \dots A_{((t-1)l_r)\sigma^{(t-1)l_r-1}(j)} A_{((t-1)l_r+1)\sigma^{(t-1)l_r}(j)}$$

$$A_{((t-1)l_r+2)\sigma^{(t-1)l_r+1}(j)} \dots A_{(tl_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(tl_r+1)\sigma^{l_r}(j)} =$$

$$= A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(tl_r)\sigma^{l_r-1}(j)} A_{(tl_r+1)\sigma^{l_r}(j)} = A_{1(j)} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l_r-1)\sigma^{l_r-2}(j)} A_{l_r \sigma^{l_r-1}(j)},$$

то есть для любого  $j = 1, \dots, p$  определено произведение

$$A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l_r-1)\sigma^{l_r-2}(j)} A_{l_r \sigma^{l_r-1}(j)} \quad (4.5)$$

матриц (4.2), взятых в указанных порядке, являющееся матрицей размера  $m_j \times n_j$ .

Если  $j$  является единственным элементом какой-либо орбиты  $X_r$  ( $r = p + 1, \dots, q$ ), то, согласно определению 3.1,  $j$ -е компоненты  $A_{1j}, \dots, A_{lj}$  во всех вектор-матрицах  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_q$  являются квадратными матрицами, которые к тому же, согласно условию теоремы, имеют один и тот же порядок  $m_j \times m_j = n_j \times n_j$ . Поэтому определена матрица

$$A_{1j} A_{2j} \dots A_{(l-1)j} A_{lj}, j = p + 1, \dots, q \quad (4.6)$$

а так как подстановка  $\sigma$  оставляет символ  $j$  на месте, то из (4.6) вытекает существование матрицы (4.5) не только для  $j = 1, \dots, p$ , но и для  $j = p + 1, \dots, q$ , то есть для любого  $j = 1, \dots, k$ .

Таким образом, определена вектор-матрица  $[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}$  размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ , то есть

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} \in \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P).$$

Следовательно, множество  $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[\ ]_{l, \sigma, k}$ . Ассоциативность этой операции следует из теоремы 2.4. Теорема доказана.

**5 Следствия.** Далее во всех следствиях  $P$  – ассоциативное кольцо.

Полагая в теореме 4.1  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$  и, учитывая замечание 3.5, получим

**5.1 Следствие.** Пусть  $\sigma$  – цикл длины  $k$  из  $S_k$ , числа  $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$  удовлетворяют равенствам (3.4). Тогда множество  $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$  замкнуто относительно  $(k+1)$ -арной операции  $[\ ]_{k+1, \sigma, k}$  а универсальная алгебра  $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\ ]_{k+1, \sigma, k} \rangle$  является  $(k+1)$ -арной полугруппой.

Полагая в следствии 5.1  $\sigma = (12 \dots k)$ , и, учитывая замечание 3.6, получим

**5.2 Следствие.** Пусть числа  $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k$  удовлетворяют (3.5). Тогда множество  $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$  замкнуто относительно  $(k+1)$ -арной операции  $[\ ]_{k+1, (12 \dots k), k}$  а универсальная алгебра  $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [\ ]_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$  является  $(k+1)$ -арной группой.

Полагая в следствии 5.2  $k = 3$ , получим

**5.3 Следствие.** Множество  $\mathbf{M}_{m \times s, s \times r, r \times m}(P)$  замкнуто относительно 4-арной операции  $[\ ]_{4, (123), 3}$ , а универсальная алгебра

$$\langle \mathbf{M}_{m \times s, s \times r, r \times m}(P), [\ ]_{4, (123), 3} \rangle$$

является 4-арной полугруппой.

Полагая в следствии 5.2  $k = 2$ , получим

**5.4 Следствие.** Множество  $\mathbf{M}_{m \times n, n \times m}(P)$  замкнуто относительно тернарной операции  $[\ ]_{3, (12), 2}$ , а универсальная алгебра  $\langle \mathbf{M}_{m \times n, n \times m}(P), [\ ]_{3, (12), 2} \rangle$  является тернарной полугруппой.

Для цикла  $\sigma \in S_k$  длины  $k = 2r$ , где  $r \geq 1$  обозначим через  $\mathbf{M}_{m, n}(2r, \sigma, P)$  множество всех вектор-матриц  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_{2r})$ , у которых компоненты  $A_1, A_{\sigma^2(1)}, \dots, A_{\sigma^{2r-2}(1)}$  имеют размер  $m \times n$ , а компоненты  $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma^3(1)}, \dots, A_{\sigma^{2r-1}(1)}$  имеют размер  $n \times m$ .

Ясно, что множество  $\mathbf{M}_{m, n}(2r, \sigma, P)$  совпадает со множеством  $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_{2r} \times n_{2r}}(P)$  всех  $2r$ -компонентных вектор-матриц размера  $(m_1 \times n_1, \dots, m_{2r} \times n_{2r})$ , где

$$m_1 = m_{\sigma^2(1)} = \dots = m_{\sigma^{2r-2}(1)} = m, n_1 = n_{\sigma^2(1)} = \dots = n_{\sigma^{2r-2}(1)} = n,$$

$$m_{\sigma(1)} = m_{\sigma^3(1)} = \dots = m_{\sigma^{2r-1}(1)} = n, n_{\sigma(1)} = n_{\sigma^3(1)} = \dots = n_{\sigma^{2r-1}(1)} = m.$$

Поэтому из следствия 5.1 вытекает

**5.5 Следствие.** Множество  $\mathbf{M}_{m,n}(2r, \sigma, P)$  замкнуто относительно  $(2r+1)$ -арной операции  $[ ]_{2r+1, \sigma, 2r}$ , а универсальная алгебра  $\langle \mathbf{M}_{m,n}(2r, \sigma, P), [ ]_{2r+1, \sigma, 2r} \rangle$  является  $(2r+1)$ -арной полугруппой.

Полагая в следствии 5.5  $\sigma = (12 \dots 2r)$ , получим

**5.6 Следствие.** Множество  $\mathbf{M}_{m,n}(2r, (12 \dots 2r), P)$  замкнуто относительно  $(2r+1)$ -арной операции  $[ ]_{2r+1, (12 \dots 2r), 2r}$ , а универсальная алгебра  $\langle \mathbf{M}_{m,n}(2r, (12 \dots 2r), P), [ ]_{2r+1, (12 \dots 2r), 2r} \rangle$  является  $(2r+1)$ -арной полугруппой.

Полагая в следствии 5.6  $r = 2$ , получим

**5.7 Следствие.** Множество  $\mathbf{M}_{m,n}(4, (1234), P)$  замкнуто относительно 5-арной операции  $[ ]_{5, (1234), 4}$ , а универсальная алгебра  $\langle \mathbf{M}_{m,n}(4, (1234), P), [ ]_{5, (1234), 4} \rangle$  является 5-арной полугруппой.

**6 l-Арные полугруппы в  $\langle \mathbf{M}(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ .** Во введении отмечалось, что все полугруппы в частичной полугруппе  $\mathbf{M}(P)$  всех матриц над ассоциативным кольцом  $P$  исчерпываются подполугруппами полугруппы вида  $\mathbf{M}_n(P)$ . Что в связи с этим можно сказать об  $l$ -арных полугруппах в частичной  $l$ -арной полугруппы  $\langle \mathbf{M}(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  для всех  $k$ -компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом  $P$ ? Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

**6.1 Теорема.** Пусть  $P$  – ассоциативное кольцо,  $\sigma$  – подстановка из  $S_k$ , удовлетворяющая условию  $\sigma^l = \sigma$ ,  $\mathbf{M}$  – подмножество множества  $\mathbf{M}(k, P)$ , замкнутое относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$ . Тогда универсальная алгебра  $\langle \mathbf{M}, [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  является  $l$ -арной подполугруппой  $l$ -арной полугруппы  $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  для некоторого набора  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ , согласованного с подстановкой  $\sigma$ .

**Доказательство.** По теореме 4.1 для любого набора  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ , согласованного с подстановкой  $\sigma \in S_k$ , множество  $\mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  а универсальная алгебра  $\langle \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$  является  $l$ -арной подполугруппой в частичной  $l$ -арной полугруппе  $\langle \mathbf{M}(k, P), [ ]_{l, \sigma, k} \rangle$ .

Пусть для подстановки  $\sigma$  имеет место разложение (3.1) с  $\sigma$ -орбитами (3.2).

Так как множество  $\mathbf{M}$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  то  $[\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_l]_{l, \sigma, k} \in \mathbf{M}$  для любой вектор-матрицы  $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) \in \mathbf{M}$ ,

то есть определено  $l$ -арное произведение

$$[\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_l]_{l, \sigma, k} = \{ Y_1, \dots, Y_k \},$$

где

$$Y_j = A_j A_{\sigma(j)} \dots A_{\sigma^{l-2}(j)} A_{\sigma^{l-1}(j)}, j = 1, \dots, k. \quad (6.1)$$

В частности, это верно для любого элемента  $j$  из любой  $\sigma$ -орбиты  $X_r$  ( $r = 1, \dots, p$ ) с числом элементов  $l_r$ , большим единицы. Так как  $l_r < l = t_r + 1$ , то, выписав первые  $l_r + 1$  компонент из правой части (6.1), видим, что существует произведение

$$A_j A_{\sigma(j)} A_{\sigma^2(j)} \dots A_{\sigma^{l_r-2}(j)} A_{\sigma^{l_r-1}(j)} A_{\sigma^{l_r}(j)}.$$

Это означает, что если вектор-матрица  $\mathbf{A}$  имеет размер  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ , то

$$n_j = m_{\sigma(j)}, n_{\sigma(j)} = m_{\sigma^2(j)}, \dots, n_{\sigma^{l_r-2}(j)} = m_{\sigma^{l_r-1}(j)}, n_{\sigma^{l_r-1}(j)} = m_{\sigma^{l_r}(j)},$$

а так как  $\sigma^{l_r}$  – тождественная подстановка, то последние равенства принимают вид

$$n_j = m_{\sigma(j)}, n_{\sigma(j)} = m_{\sigma^2(j)}, \dots, n_{\sigma^{l_r-2}(j)} = m_{\sigma^{l_r-1}(j)}, n_{\sigma^{l_r-1}(j)} = m_j.$$

Таким образом, выполняется условие 1) определения 3.1.

Если  $j$  – элемент из любой  $\sigma$ -орбиты  $X_r$  ( $r = p + 1, \dots, q$ ) с числом элементов, равным единице, то (6.1) принимает вид  $Y_j = \underbrace{A_j \dots A_j}_l$ . В частности,

определенено произведение  $A_j A_j$ , откуда следует совпадение размеров матрицы  $A_j$ . Таким образом, условие 2) определения 3.1 также выполняется. Следовательно, набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$  согласован с подстановкой  $\sigma$ .

Пусть теперь  $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_k)$  – еще одна вектор-матрица из  $\mathbf{M}$  размера  $(\mu_1 \times v_1, \dots, \mu_k \times v_k)$ . Так как множество  $\mathbf{M}$  замкнуто относительно  $l$ -арной операции  $[ ]_{l, \sigma, k}$  то

$$[\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{l_r} \mathbf{B} \underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{l-l_r-1}]_{l, \sigma, k} = \{Z_1, \dots, Z_k\} \in \mathbf{M},$$

где

$$Z_j = A_j A_{\sigma(j)} \dots A_{\sigma^{l_r-1}(j)} B_{\sigma^{l_r}(j)} A_{\sigma^{l_r+1}(j)} A_{\sigma^{l_r+2}(j)} \dots A_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

Тождественность подстановки  $\sigma^{l_r}$  позволяет переписать последнее равенство следующим образом

$$Z_j = A_j A_{\sigma(j)} \dots A_{\sigma^{l_r-1}(j)} B_j A_{\sigma(j)} A_{\sigma^{l_r+2}(j)} \dots A_{\sigma^{l-1}(j)}.$$

Поэтому  $n_{\sigma^{l_r-1}(j)} = \mu_j$ ,  $v_j = m_{\sigma(j)}$ , откуда и из (6.2) вытекает  $m_j = \mu_j$ ,  $n_j = v_j$ . Следовательно, вектор-матрица  $\mathbf{B}$  имеет те же размеры, что и вектор-матрица  $\mathbf{A}$ , то есть все вектор-матрицы из  $\mathbf{M}$  имеют один и тот же размер  $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ .

Таким образом, доказано включение  $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}_{m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k}(P)$ , где набор  $((m_1, n_1), \dots, (m_k, n_k))$ , как показано выше, согласован с подстановкой  $\sigma$ . Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002).

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гальмак, А.М. Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2011. – №1(37), Серия В. – С. 30–37.
2. Гальмак, А.М. Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1(6). – С. 52–56.

3. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208–350.
4. Гальмак, А.М. Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2(7). – С. 1–5.
5. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
6. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Поступила в редакцию 16.05.2011 г.

УДК 378.147:51

*О.М. МАТЕЙКО, А.Н. ТАНЫГИНА*

## **ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫЙ КУРС “ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА” ДЛЯ СТУДЕНТОВ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ**

*В статье рассматриваются вопросы профессиональной направленности курса “Высшая математика” для студентов географического факультета Белорусского государственного университета, заключающейся в ориентации содержания на применение высшей математики в профессиональной деятельности будущих специалистов. Фиксируются особенности структуры и содержательной части курса, обсуждается влияние связи курса с конкретной специализацией на качество обучения и уровень профессиональной подготовки студентов. Приводится ряд профессионально ориентированных математических задач, предлагаемых студентам на практических занятиях в процессе изучения основных разделов курса.*

### **Введение**

В последние годы стали актуальными проблемы, связанные с профессиональной направленностью математической подготовки студентов различных профилей и специальностей. Во многих высших учебных заведениях по-прежнему осуществляется разрозненное преподавание математики и специальных дисциплин, а на факультетах нематематического профиля большой объем математических сведений остается системой, замкнутой в себе. Традиционный вузовский курс высшей математики преподается по хорошо разработанной программе, подчеркивающей основные принципы математики и необходимость строгого анализа, однако недостаточно внимания уделяет связям между изучаемым материалом и конкретными задачами практики. В результате у студентов нематематических специальностей не формируется представление о взаимосвязи содержания математического образования и содержания дисциплин специализации, а, наоборот, складывается впечатление, что высшая математика в дальнейшей работе им совершенно не нужна, откуда и возникает соответствующее отношение к предмету.

Одним из инструментов повышения качества математического образования студентов-нематематиков является обновление содержания читаемых курсов в контексте будущей профессии и современного социально-экономического заказа. Курс "Высшая математика", предназначенный для студентов географического факультета Белорусского государственного университета (БГУ), не является исключением в данном направлении. В связи с этим представляется целесообразным обсудить следующие вопросы:

каким образом ориентация указанного курса на связь со специализацией отражается на его структуре и содержательной части?

как влияет связь предмета со специализацией на качество обучения и уровень профессиональной подготовки студентов?

с какими проблемами может столкнуться преподаватель в процессе обучения высшей математике студентов географических специальностей?

Математические методы широко применяются в географических исследованиях начиная с 50-х гг. XX в. Как показало ознакомление со специальной литературой, среди них отчетливо доминируют методы математической статистики и математического анализа. Наиболее часто востребованными для практических приложений являются методы статистические, а для выяснения физической сущности процесса наиболее подходящими являются аналитические методы. Однако в какой бы профессиональной области ни работал будущий специалист, курс высшей математики, вне всякого сомнения, играет важную роль в формировании его научного мировоззрения. В результате перевода "реального мира" на язык математики можно получить более точное представление о его наиболее существенных свойствах и в некотором смысле даже предсказать будущие события.

Анализ исследований по проблемам преподавания математики в вузах показывает, что содержание математической подготовки студентов должно формироваться в соответствии с их специализацией. Учить математике, говоря словами Б.В. Гнеденко, следует "не вообще, а так, чтобы содействовать познанию закономерностей окружающего нас мира; учить так, чтобы учащиеся ясно представляли себе происхождение основных понятий и процесс научного прогресса; учить так, чтобы студенты одновременно получали навыки практического использования теории, которые являлись бы естественным условием развития теоретического знания; учить так, чтобы полученные знания не были бесполезным грузом, а постоянно использовались на практике" [1, с. 57]. На наш взгляд, при рассмотрении конкретного материала математического курса на первый план должна быть выдвинута идея его связи с будущей профессией. Поэтому курс "Высшая математика" для студентов географического факультета БГУ содержит несколько важнейших разделов, которые охватывают все основные направления применения математических методов в географии. Преподавание осуществляется в соответствии с типовой учебной программой для высших учебных заведений по дисциплине "Выс-

шая математика" для специальностей география и геоэкология, разработанной на кафедре общей математики и информатики БГУ с учетом принципа профессиональной направленности. Под профессиональной направленностью здесь понимается ориентация содержания курса на применение высшей математики в будущей профессиональной деятельности студентов. Материал лекций дополняется элементами математического моделирования некоторых процессов и явлений, которые изучают студенты на профильных предметах, а при подборе учебного материала для практических занятий используются задания, составленные на основе реальных географических исследований [2-5].

Типовая учебная программа дисциплины "Высшая математика" содержит следующие разделы: аналитическая геометрия и векторная алгебра, основы математического анализа, основы теории вероятностей и математической статистики, элементы линейного программирования и теории графов [6]. Выбор разделов программы способствует развитию межпредметных связей, поскольку обусловлен широким применением указанного материала при дальнейшем изучении таких специальных географических дисциплин, как "Землеведение", "Метеорология и климатология", "Картография", "Топография с основами геодезии", "Геоморфология", "Социально-экономическая география".

Кроме традиционных вопросов из перечисленных выше разделов высшей математики, в содержание учебного материала включены также следующие:

1. Применение матриц при изучении географических сетей. Оценка миграции населения с использованием матриц. Задача о возрастном составе населения.

2. Геометрическое описание строения земной коры. Аппроксимация складок земной коры линиями первого и второго порядков.

3. Земной эллипсоид. Элементы математической картографии. Географические координаты точек шара. Геодезические координаты точек эллипса. Дуги параллелей и меридианов.

4. Скорость перемещения и уклон земной поверхности как производные. Аналитическая классификация элементов рельефа на плоскости. Дифференциальное исчисление при изучении структурных и тектонических движений земной коры.

5. Применение интегрирования в географии. Вычисление объемов холмов, вулканов.

6. Приложения дифференциальных уравнений в географии. Задача о росте населения.

7. Применение графов в географии. Модели транспортных сетей.

Ряд тем курса "Высшая математика", связанных с приближенными вычислениями, решением задач экономической географии, применением методов математической статистики в географических исследованиях представляется целесообразным рассматривать на занятиях по информатике. При этом можно использовать как табличный процессор Microsoft

Excel, так и системы MathCAD, MATLAB, Mathematica и др. Для проведения статистических исследований существуют специализированные статистические пакеты Statistica, StatGraphics, SPSS и др. Такое интегрированное изучение курсов высшей математики и информатики будет способствовать реализации принципа преемственности в преподавании дисциплин математического цикла на факультетах нематематического профиля [7, с. 47-48].

С учетом того факта, что для студентов географического факультета наиболее важным является практический аспект математики, целями курса являются знакомство с основными понятиями и методами исследования современной математики, необходимыми для изучения дисциплин специальности, а также формирование умений корректной математической постановки прикладных задач и построения простейших математических моделей. Рассмотрение прикладных математических задач с географическим содержанием демонстрирует студентам востребованность математических объектов в их специальности. Последнее является очень важным, поскольку у студентов нематематических специальностей часто бывает мнение, что многие математические объекты – это продукт измышления математиков и никакого практического значения они не имеют. Использование в практике преподавания высшей математики прикладных задач способствует:

- повышению эффективности теоретической подготовки, заключающейся в умении применять те или иные математические закономерности;
- развитию аналитического мышления, необходимого для понимания функциональных зависимостей;
- адекватному восприятию реальных задач, встречающихся в профессиональной деятельности, развитию навыков их перевода на математический язык;
- повышению качества математической подготовки как элемента профессиональной.

Однако, как показывает опыт, уже при отборе материала, который должен быть рассмотрен на лекциях и практических занятиях, возникает ряд трудностей. Во-первых, реальные ситуации из области географии редко бывают четко очерченными, а сложное взаимодействие с окружающей средой делает точное описание ситуации затруднительным. Процесс выделения задачи, поддающейся математическому анализу, часто бывает продолжительным и требует владения многими навыками, не имеющими отношения к математике. Как правило, необходимы беседы с коллегами-нематематиками, работающими в данной области, а также чтение специальной литературы, имеющей отношение к делу. Во-вторых, многие из студентов не получают за время школьного обучения необходимого образовательного минимума математической подготовки, который соответствует простейшим требованиям их дальнейшей специализации. Существует значительный разрыв между слабыми знаниями школьного курса математики, с одной стороны, и высоким уровнем требований по матема-

2. Опытным путем установлено, что скорость  $V$  инфильтрации (впитывания) воды в грунт как функция времени  $t$  выражается формулой  $V(t) = a + bt^{-0,5}$ , где  $a$  и  $b$  – константы. Количество воды  $\Delta Q$ , проникшей в грунт за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ , будет равно  $\Delta Q = V\Delta t$ , или в дифференциальном виде  $dQ = Vdt$ . Найти общее количество воды, проникшей в грунт за период времени с 1 часа до 4 часов, если известно, что скорость инфильтрации изменяется по закону  $V(t) = 24 + 3t^{-0,5}$ .

Для решения задачи необходимо найти определенный интеграл от функции  $V$  на отрезке  $[1; 4]$ .

3. Пусть холм имеет такие правильные очертания, что может быть рассмотрен как тело, образуемое вращением профиля вокруг его оси симметрии. Вычислить объем холма, профиль которого можно аппроксимировать экспоненциальной функцией  $H(x) = H_0 e^{-mx}$ , где  $H_0$  – высота вершины;  $m$  – логарифмический декремент, характеризующий крутизну склонов.

Для решения задачи необходимо воспользоваться формулой нахождения объемов тел вращения с помощью определенного интеграла. В данном случае интеграл будет несобственным.

4. Население Земли в 1999 г. составляло 6 млрд человек, а в 2008 г. – 6,7 млрд человек. Найти предположительное количество населения в 2050 г., считая, что скорость прироста населения пропорциональна его количеству.

Рост населения в простейшем случае описывается дифференциальным уравнением  $\frac{dP}{dt} = kP$ , где  $P = P(t)$  – количество населения в момент времени  $t$ ,  $k$  – коэффициент пропорциональности. Интегрируя это уравнение и подставляя данные, находим предположительное количество населения.

5. Средняя численность населения трех районов Восточной Азии составляет 20 млн человек. Согласно наблюдениям, население этих трех районов возрастает с ежегодным коэффициентом прироста в 4, 7 и 3% для 1-го, 2-го и 3-го районов соответственно. Установлено, что общий прирост населения за первый год составит 750 тыс. человек и что прирост населения в районе 1 равен приросту населения в районе 3. Найти начальные численности населения в каждом из трех районов.

Для решения задачи необходимо составить и решить систему линейных алгебраических уравнений.

6. Область, имеющая четко выраженный горный рельеф, задана аналитически функцией  $H(x) = \frac{80x}{4+x^2}$ , описывающей зависимость высоты от расстояния ( $0 \leq x \leq 20$ ).

1) Определить уклон профиля области в точке  $x_0 = 1$ .

2) Найти гребневые точки (точки максимума) и килевые точки (точки минимума) функции  $H$ , а также значения функции  $H$  в этих точках.

тике в высшей школе – с другой. Как отмечают авторы статьи [8, с. 24], “большинство первокурсников не могут надлежащим образом изучать высшую математику и затем эффективно применять математические методы в решении прикладных задач, потому что они:

- не умеют отличать то, что они понимают, от того, что они не понимают;
- не умеют логически мыслить, отличать истинное рассуждение от ложного, необходимые условия от достаточных;
- неправильно представляют себе главное и второстепенное, то, что необходимо помнить, а что можно и забыть;
- не умеют вести диалог: понять вопрос преподавателя и ответить именно на него, а также сформулировать свой вопрос;
- не умеют найти несколько ответов на один вопрос;
- стереотипно воспринимают информацию, (...)".

Студенту-первокурснику следует, прежде всего, “научиться учиться” планировать свое время, самому отвечать за уровень своих знаний.

Выход из обозначенной ситуации видится во включении в курс высшей математики лишь начальных элементов математического моделирования. Приводимые на лекциях и решаемые на практических занятиях задачи прикладного содержания должны носить обучающий характер, давать начальные практические сведения о применении математических методов в специальной области знаний [7, с. 122]. Это относится не только к студентам-географам, но и к студентам других нематематических специальностей, изучающим курс высшей математики. Даже простейшие задачи прикладного содержания способны привить исходные положения математической культуры и показать студентам роль и значение математики в исследованиях по их специальности. При решении данных задач на практических занятиях необходимо делать ссылки на соответствующие разделы или кратко повторять определения понятий, важных для построения математической модели. Используя математическую символику и формулы, необходимо комментировать их, поясняя смысл проводимых преобразований.

Поскольку общих методов составления математических соотношений при решении задач географического содержания не существует, то навыки в этой области могут быть приобретены лишь в результате рассмотрения конкретных примеров на практических занятиях. Приведем несколько задач, которые могут быть предложены студентам-географам на практических занятиях по высшей математике.

1. Эпицентр циклона, движущегося прямолинейно, во время первого измерения находился в 16 км к северу и 9 км к западу от метеостанции, а во время второго измерения – в 12 км к северу и 6 км к западу от метеостанции. Определить наименьшее расстояние, на которое эпицентр циклона приблизится к метеостанции.

Данная задача решается с использованием таких математических понятий, как уравнение прямой на плоскости и расстояние от точки до прямой.

- 3) Указать участки области с однообразным уклоном – склоны.
- 4) Определить выпуклые вверх и выпуклые вниз части склонов и точки перегиба.

Уклон профиля в данной точке численно равен производной высоты по расстоянию, взятой с отрицательным знаком. Участки с однообразным уклоном (склоны) – это участки монотонного возрастания или убывания функции  $H$ , для нахождения которых необходимо исследовать знак первой производной функции  $H$ . Для определения выпуклых вверх и выпуклых вниз частей склонов необходимо исследовать знак второй производной функции  $H$ .

7. Вероятность обнаружения минерала  $N$  в шлихе при изучении пегматитов конкретной территории равна 0,2. Какое наименьшее количество шлихов нужно изготовить, чтобы с вероятностью 0,9 быть уверенным в том, что хотя бы в одном из них искомый минерал будет обнаружен?

При решении данной задачи используется формула для вероятности появления хотя бы одного из конечного числа независимых в совокупности равновероятных событий.

8. Изобразите граф, который является моделью сети железных дорог Беларуси. Составьте матрицу инцидентности этого графа. Вычислите степени его вершин, индекс доступности основных железнодорожных станций.

Индекс оптимальной связности вершины (индекс доступности) – это минимальное число ребер на кратчайших расстояниях, которые связывают данную вершину со всеми другими пунктами сети. Его можно получить, суммируя элементы в соответствующих строках матрицы инцидентности. Чем меньше этот индекс, тем более выгодным является положение пункта на транспортной сети.

Рассмотренные задачи реализуют межпредметные связи математики и географии; помогают формировать умения применять математические понятия при изучении географических процессов; выводить математические формулы известных природных процессов и явлений; обрабатывать и анализировать результаты экспериментов.

Прикладная задача с точки зрения обучения математике цenna в том случае, когда построенная на основе имеющихся данных математическая модель способна дать об изучаемом объекте большую информацию, чем это предполагалось вначале. Это демонстрирует студентам универсальность математических методов. Таким образом, для построения оптимальной системы прикладных задач и упражнений с учетом межпредметных связей нужно учитывать следующие факторы: прикладную ценность задачи с точки зрения реализации основных наиболее важных межпредметных связей; ценность для курса математики; интерес, вызываемый у студентов задачей; доступность задачи для конкретной аудитории; среднее время, необходимое для решения задачи.

Следует отметить, что на сегодняшний день существует довольно немного учебных пособий (сборников задач), содержащих методически

обработанные прикладные задачи, которые можно рассматривать на лекциях и практических занятиях по высшей математике. Работа по созданию таких пособий ведется, в частности, на кафедре общей математики и информатики БГУ; изданы и подготовлены к печати несколько учебно-методических пособий, адаптированных к соответствующим специальностям [4, 9-12].

Несмотря на всю важность принципа профессиональной направленности в преподавании курса высшей математики на географическом факультете, существуют определенные границы его применимости. Следует помнить, что рассмотрение задач прикладного характера не должно подменять собой изучение самой математики. Математическое образование стоит не только в расширении профессионально востребованного круга знаний. Помимо профессиональной направленности, важнейшей составляющей образования является его *фундаментальность*. Белорусский государственный университет всегда претендовал на статус ведущего вуза страны, который отличается от других высших учебных заведений именно фундаментальностью получаемого здесь образования. На основе такого образования выпускники гуманитарных и естественнонаучных факультетов способны дальше самостоятельно учиться, работать и переучиваться. Поэтому, по мнению заведующего кафедрой общей математики и информатики БГУ профессора В.А. Еровенко, “задача преподавания математики должна заключаться, прежде всего, в том, чтобы воспитать культурных людей, обладающих “общим математическим образованием”, которое трудно поддается формальному определению. Содержание курсов математики не может быть установлено с чисто pragматической точки зрения, основанной на прикладной специфике будущей специальности, без учета внутренней логики развития нужных разделов этой науки” [13, с. 10]. Изучение математики помогает выработать такие необходимые каждому человеку качества, как умение логически мыслить, объективность в суждениях и способность рассматривать явления одновременно с разных сторон.

Таким образом, курс “Высшая математика” для студентов географических специальностей представляет собой дисциплину, сочетающую фундаментальную и прикладную образовательные функции. Профессиональная ориентация курса способствует повышению эффективности познавательной деятельности студентов, осознанному восприятию связи математики с дисциплинами специализации, а также формирует мотивацию к повышению математической культуры.

Авторы надеются, что подобный подход к преподаванию курса “Высшая математика” приблизит университет к выполнению непростой задачи подготовки высокообразованных молодых людей, способных со временем определять будущее развитие страны.

#### *СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ*

1. Гнеденко, Б.В. Математическое образование в вузах / Б.В. Гнеденко. – М. : Высш. школа, 1981. – 174 с.

2. *Девдариани, А.С.* Математический анализ в геоморфологии / А.С. Девдариани. – М. : Недра, 1967. – 156 с.
3. *Матейко, О.М.* Особенности обучения высшей математике студентов геолого-географических специальностей / О.М. Матейко, В.Г. Скательский // Весник МДУ ім Я.А. Кулляшова. – 2006. – № 4(25). – С. 216–223.
4. *Матейко, О.М.* Высшая математика. Примеры и задачи : учеб.-метод. пособие / О.М. Матейко, П.В. Плащинский. – Минск : БГУ, 2005. – 47 с.
5. *Самнер, Г.* Математика для географов / Г. Самнер. – М. : Прогресс, 1981. – 296 с.
6. Высшая математика : типовая учеб. программа для высш. учеб. заведений по специальностям 1-31 02 01 “География” (по направлениям), 1-33 01 02 “Геоэкология”[Электронный ресурс] / М-во образования Респ. Беларусь, Учеб.-метод. объединение высш. учеб. заведений Респ. Беларусь по естественнонауч. образованию ; сост. А.А. Гусак, О.М. Матейко, П.В. Плащинский ; отв. за вып. О.М. Матейко. – Минск, 2009. – Режим доступа : <http://elib.bsu.by/handle/123456789/457>. – Дата доступа : 27.11.2010.
7. *Скатецкий, В.Г.* Профессиональная направленность преподавания математики: теоретический и практический аспекты / В.Г. Скатецкий. – Минск : БГУ, 2000. – 159 с.
8. Математическое образование: тенденции и перспективы / Л.Д. Кудрявцев [и др.] // Высшее образование сегодня. – 2002. – № 4. – С. 20–29.
9. *Еровенко, В.А.* Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры : курс лекций / В.А. Еровенко. – Минск : БГУ, 2006. – 175 с.
10. *Дегтяренко, Н.А.* Математическая статистика : пособие по курсу “Высшая математика” для студентов химического факультета / Н.А. Дегтяренко, О.Г. Душкевич. – Минск : БГУ, 2008. – 141 с.
11. *Кузьмин, К.Г.* Теория вероятностей и математическая статистика : учеб.-метод. пособие для студентов специальности 1-25 01 03 “Мировая экономика” / К.Г. Кузьмин, Н.И. Широканова. – Минск : БГУ, 2009. – 89 с.
12. *Скатецкий, В.Г.* Математические методы в химии : учеб. пособие для студентов вузов / В.Г. Скатецкий, Д.В. Свиридов, В.И. Яшкин. – Минск : ТетраСистемс, 2006. – 368 с.
13. *Еровенко, В.* “Максима Канта” и общее математическое образование / В. Еровенко // Наука и инновации. – 2008. – № 1. – С. 9–12.

Поступила в редакцию 23.02.2011 г.

УДК 511.36

**Н.В. ШАМУКОВА, Н.В. САКОВИЧ**

## **О РАСПРЕДЕЛЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ**

*В работе получены двухсторонние оценки для расстояний между сопряженными алгебраическими числами второй и третьей степени. Эти оценки выводятся из некоторых точных теорем метрической теории диофантовых приближений [1-5].*

В теории диофантовых приближений важны результаты о распределении рациональных чисел. В данной работе изучается распределение

алгебраических чисел второй и третьей степени. Доказаны нижние и верхние оценки для расстояний между квадратичными иррациональностями, алгебраическими и целыми алгебраическими числами третьей степени. Основу доказательства составляют метрические теоремы о разрешимости систем диофантовых неравенств в целочисленных полиномах для множеств точек из произвольного интервала положительной плотности.

Пусть  $P_2(x) = \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0$  квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, имеющий иррациональные корни. Это означает, что его дискриминант не является квадратом целого числа, в противном случае корни будут рациональными числами.

Обозначим  $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq 2} |a_j|$  и пусть  $x \in I \subset [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ . При любом целом  $Q > 1$  существует многочлен  $P_2(x)$ ,  $H(P) \leq Q$ , что для  $\forall x \in I$  выполняется неравенство

$$|P_2(x)| < Q^{-2}. \quad (1)$$

Обозначим через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  корни  $P_2(x)$ . Пусть в (1) для заданного  $x$  корень  $\alpha_1$  – ближайший к  $x$ .

В работе будут доказаны следующие теоремы:

*Теорема 1. Существует постоянная  $c_1$  такая, что для любых корней  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  полинома  $P_2(x)$  выполняется неравенство*

$$|\alpha_1 - \alpha_2| > c_1 H(\alpha_1)^{-1}. \quad (2)$$

*При некоторой эффективно вычисляемой величине  $c_2(n)$  можно построить бесконечно много полиномов  $P_2(x)$ , для которых*

$$|\alpha_1 - \alpha_2| > c_2 H(\alpha_1)^{-1}. \quad (3)$$

*Теорема 2. При некоторых эффективно вычисляемых величинах  $c_3$  и  $c_4$  теорема 1 справедлива для многочленов третьей степени, если неравенство (2) заменить на неравенство*

$$|\alpha_1 - \alpha_2| > c_3 H(\alpha_1)^{-2},$$

*а неравенство (3) на неравенство*

$$|\alpha_1 - \alpha_2| > c_4 H(\alpha_1)^{-\frac{4}{3}}.$$

*Теорема 3. Неравенства типа (2) и (3) справедливы для целых алгебраических чисел. При этом неравенства принимают вид*

$$|\alpha_1 - \alpha_2| > c_5 H(\alpha)^{-2}$$

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < c_6 H(\alpha)^{-1}.$$

Основу доказательства всех трех теорем составляет следующая теорема, которую мы докажем для многочленов третьей степени

*Теорема 4.* Обозначим через  $M_3(Q)$  множество точек  $x \in I$ , для которых справедлива система неравенств

$$|P(x)| < c_7 Q^{-3}, \quad |P'(x)| < c_8 Q, \quad (4)$$

Тогда при  $c_7 c_8 < 2^{-12}$  выполняется неравенство

$$\mu M_3(Q) < 0,5(b-a), \quad (5)$$

Вначале перейдем от произвольных целочисленных многочленов в (4) к неприводимым многочленам с условием

$$|\alpha_3| > c_9 H. \quad (6)$$

Это делается аналогично как в [3].

Обозначим через  $\mathfrak{R}_3(Q)$  множество неприводимых многочленов  $P(t)$  с условием (6) и  $H(P) \leq Q$ , а через  $\tilde{\mathfrak{R}}_3(H)$  множество неприводимых многочленов высоты  $H$  с условием (6). Относительно  $\alpha_1$  произведем упорядочение остальных корней

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3|. \quad (7)$$

Введем множество

$$S(\alpha_1) = \left\{ x \in I : |x - \alpha_1| = \min_{1 \leq j \leq 3} |x - \alpha_j| \right\}.$$

Далее будем рассматривать систему неравенств (4) при  $x \in S(\alpha_1)$ . При достаточно малом  $\varepsilon > 0$  введем  $\varepsilon_1 = \varepsilon N^{-1}$ , где  $N = N(n) > 0$  достаточно большое число и пусть  $T = [\varepsilon_1^{-1}]$ . Определим числа  $p_j$ ,  $j=2,3$  из условия

$$|\alpha_1 - \alpha_j| = H^{-\rho_j}. \quad (8)$$

В силу (7)  $\rho_3 \leq \rho_2$ .

*Лемма 1.* Пусть справедливо неравенство (6). Тогда для любого  $j$ ,  $1 \leq j \leq 3$  выполняется неравенство  $|a_j| < c_{10}$ .

*Лемма 2.* Пусть  $P(x) \in \tilde{\mathfrak{R}}_3(H)$  и  $x \in S(\alpha_1)$ . Тогда

$$\begin{aligned} |x - \alpha_1| &\leq 3|P(x)||P'(x)|^{-1}, \\ |x - \alpha_1| &\leq 4|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ |x - \alpha_1| &\leq 3 \min_{2 \leq j \leq 3} \left( 2^{n-j} |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1} \prod_{k=2}^j |\alpha_1 - \alpha_k| \right)^{\rho_j}. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как корни  $\alpha_j$  ограничены, то из (7) и (9) получаем  $p_j > -\frac{\varepsilon}{2}$ . Определим целые числа  $l_j$ ,  $2 \leq j \leq 3$  из неравенств

$$\frac{l_j - 1}{T} \leq \rho_j < \frac{l_j}{T}, \quad l_3 \leq l_2$$

и положим  $\rho_1 = (l_2 + l_3)T^{-1}$ .

Нетрудно доказать [3], что число векторов  $\bar{l} = (l_1, \dots, l_n)$  для многочленов  $P(t) \in \bigcup_{H=1}^{\infty} \tilde{\mathfrak{R}}_3(H)$  конечно. Зафиксируем один из таких векторов и подкласс  $\tilde{\mathfrak{R}}_3(H)$  с фиксированным вектором  $\bar{l}$  обозначим через  $\tilde{\mathfrak{R}}_3(H, \bar{l})$ .

*Лемма 3 [4]. Пусть  $P(t) \in \tilde{\mathfrak{R}}_3(H, \bar{l})$ . Тогда при любом  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$  выполняется неравенство  $|P^{(k)}(\alpha_1)| < c(n) H^{1-\rho_k+(n-1)\varepsilon_1}$ .*

*Лемма 4 [5]. Пусть  $P_1$  и  $P_2$  два целочисленных многочлена степени не большей  $n$  и  $\max(H(P_1), H(P_2)) \leq K$ , для которых неравенство*

$$\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < K^{-\tau}$$

*выполняется при всех  $x \in I$ ,  $\mu I = K^{-\eta}$ ,  $\eta > 0$ . Тогда при любом  $\delta > 0$  и  $K > K_0(\delta)$  справедливо неравенство*

$$\tau + 1 + 2 \max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta.$$

Доказательство теоремы 4.

Рассмотрим частный случай системы неравенств (4)

$$|P(x)| < c_7 Q^{-3}, \quad c_6 Q^\nu < |P'(x)| < c_8 Q, \quad \nu > \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Множество решений (10) обозначим  $M_{3,1}(\bar{c}, Q)$ . Используя лемму 2, можно доказать, что множество решений неравенства (1) содержится в интервале

$$\sigma(P) : \left\{ x \in I : |x - \alpha_1| < 6c_7 Q^{-3} |P'(\alpha_1)|^{-1} \right\}. \quad (11)$$

При некотором  $c_{11}$  введем интервал

$$\sigma_1(P) : \left\{ x \in I : |x - \alpha_1| < c_{11} |P'(\alpha_1)|^{-1} \right\}. \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что

$$\mu \sigma_1(P) < 6c_7 c_{11} Q^{-3}. \quad (13)$$

Для  $x \in \sigma_1(P)$  разложим многочлен  $P(x)$  в ряд Тейлора в окрестности корня  $\alpha_1$

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2 + \frac{1}{6} P'''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^3. \quad (14)$$

Так как  $P(\alpha_1) = 0$ , а по (10),(12) и (14) при большом  $Q$

$$\begin{aligned} |P'(\alpha_1)(x - \alpha_1)| &< c_{11} \\ |P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^j| &< cQ Q^{-2v} < \frac{c_{11}}{3}, \end{aligned}$$

то для всех  $x \in \sigma_1(P)$  справедливо неравенство

$$|P(x)| < 2c_{11}. \quad (15)$$

Зафиксируем вектор  $\vec{b}$ . Множество многочленов  $P(t) \in \tilde{\mathfrak{R}}_3(H, \vec{l})$  с одним и тем же вектором  $\vec{b}$  обозначим через  $\mathfrak{R}(\vec{b})$ . Покажем, что при  $c_{11} = 0,25$  интервалы  $\sigma_1(P_1)$  и  $\sigma_2(P_2)$ ,  $P_1, P_2 \in \tilde{\mathfrak{R}}_3(H, \vec{l}) \cap \mathfrak{R}(\vec{b})$  не пересекаются. Предположим противное. Пусть  $\sigma_2 = (P_1, P_2) = \sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2) \neq 0$ . Тогда при  $x \in \sigma_2(P_1, P_2)$  из (15) получаем

$$|P_2(x) - P_1(x)| < 4c_{11} = 1. \quad (16)$$

У многочленов  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  совпадают все коэффициенты, кроме свободного члена. Поэтому их разность есть некоторое целое число, отличное от нуля. Неравенство (16) привело к противоречию.

Предположим сейчас, что множество значений многочлена  $P'(x) - a_1 = 3a_2x^2 + 2a_2x$  для  $x \in I$  и некотором  $a_{l_0} = a_1$  принадлежит интервалу  $[-c_8Q, c_8Q]$ . Тогда если  $a_1 < a_{l_0} - 2c_8Q$  и  $a_1 > a_{l_0} + 2c_8Q$ , то получим  $|P'(x)| > c_8Q$ . Таким образом, при фиксированном векторе  $\vec{b}_1 = (b_3, b_2)$  коэффициент  $a_1$  многочлена  $P(x)$  может принимать не более  $4c_8Q$  значений. Число различных векторов  $\vec{b}_1$  не превосходит  $(2Q+1)^2$ , что при  $Q > Q_0$  не превосходит  $2^3Q^2$ . Число же векторов  $\vec{b}$  с учетом диапазона множества значений не превосходит  $2^5c_8Q^3$ . Мы показали, что при  $c_{11} = 0,25$  интервалы  $\sigma_1(P)$  не пересекаются, поэтому

$$\sum_{P \in \mathfrak{R}(\delta)} \mu\sigma_1(P) < |I|. \quad (17)$$

Из (17) и (13) получаем

$$\sum_{P \in \mathfrak{R}(\delta)} \mu\sigma(P) < 6 \cdot 2^3 c_7 Q^{-3} |I|. \quad (18)$$

$$P = \mathfrak{R}(\delta)$$

Просуммируем оценку (18) по всем  $\vec{b} \in \mathfrak{R}(\vec{b})$  с учетом числа значений  $a_1$

$$\sum_{\vec{b}} \sum_{P \in \mathfrak{R}(\delta)} \mu\sigma(P) < 6 \cdot 2^8 c_8 |I|. \quad (19)$$

$$\vec{b} = \mathfrak{R}(\delta), \quad P = \mathfrak{R}(\delta),$$

При  $c_7c_8 < 2^{-12}$  получаем, что

$$\mu M_{3,1}(\vec{c}, Q) < \frac{1}{4}|I|. \quad (20)$$

Если множество значений многочлена  $P'(x) - a_{l_0}$  не попадает в интервал  $[-c_8Q, c_8Q]$ , то представим интервал  $I = \bigcup_{j \geq 1} I_j$  таким образом, чтобы множество значений  $P'(x) - a_{l_0}$  содержалось в некотором интервале длины  $2c_8Q$ . Для каждого из интервалов  $I_j$  суммирование по  $j$  приведет к (20).

Дальнейшее доказательство зависит от структуры вектора  $\vec{l}$  и величины  $l_2 T^{-1} + p_1$ .

*Утверждение 1.* Обозначим через  $M_{3,2}(\vec{c}, Q)$  множество  $x \in I$ , для которых выполняется система неравенств (4) и

$$l_2 T^{-1} + p_1 > 4 - \varepsilon. \quad (21)$$

Тогда

$$\mu M_{3,2}(\vec{c}, Q) < \frac{1}{16}|I|. \quad (22)$$

Доказательство. Из второго неравенства (9) при  $j = 2$  получаем

$$|x - \alpha_1| < Q^{-\frac{2+p_2+2\varepsilon_1}{2}}. \quad (23)$$

Поделим интервал  $I$  на равные интервалы  $I_j$ ,  $|I_j| = Q^{-\mu_1}$ ,  $\mu_1 = \frac{3-p_2-\varepsilon}{2}$ .

Число таких интервалов не превосходит  $|I|Q^{\mu_1}$ . Рассмотрим вначале те интервалы  $I_j$ , в которых система неравенств (4) либо имеет решение, либо существует только один полином  $P(x) \in P_3(Q, \vec{l})$ , для которого при  $x \in I_j$  неравенство (4) имеет решение. Тогда число всех полиномов не превосходит  $|I|Q^{\mu_1}$ . Просуммируем оценку (23) по всем интервалам  $I_j$ . Получим оценку

$$cQ^{-\frac{2+p_2+2\varepsilon-3-p_2-\varepsilon}{2}} |I| < \frac{1}{16}|I|.$$

при достаточно большом  $Q$ . Покажем, что при  $x \in I_j$  неравенство (5) не может быть разрешимо при двух полиномах. Предположим противное и  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$  такие полиномы. Они неприводимы. Разложим их на интервале  $I_j$  в ряд Тейлора и оценим все слагаемые сверху. Получаем

$$|P_1(x)| < Q^{-\frac{3+1-\varepsilon}{4}} = Q^{-\frac{\varepsilon}{4}}. \quad (24)$$

Ясно, что такую же оценку (24) получим и для  $P_2(x)$ . Воспользуемся леммой 4. Здесь  $\tau + 1 = 3 + \frac{\varepsilon}{4}$ ,  $\eta = \mu_1$ ,  $2(\tau + 1 - \eta) = 6 + \frac{\varepsilon}{2} + p_2 + \varepsilon = p_2 + \frac{3}{2}\varepsilon$ .

Применив лемму, получим

$$6 + 2\varepsilon + p_2 < 6 + \delta,$$

что при  $\delta < 2\varepsilon$  противоречиво, поскольку  $p_2 \geq 0$ .

*Утверждение 2.* Обозначим через  $M_{3,3}(\bar{c}, Q)$  множество  $x \in I$ , для которых выполняется система неравенств (4) и

$$3,1 < l_2 T^{-1} + p_1 \leq 4 - \varepsilon.$$

Тогда

$$M_{3,3}(\bar{c}, Q) < \frac{1}{16}|I|. \quad (25)$$

Доказательство утверждения проводится аналогично доказательству *утверждения 1* с заменой третьей оценки в (9) на вторую оценку.

Другие три диапазона изменения величины  $l_2 T^{-1} + p_1$  рассмотрены в [5], где показано, что мера тех  $x \in I$ , для которых выполняется неравенство (4) не превосходит  $\frac{1}{8}|I|$ . Суммируя эту оценку с (20), (22) и (25), получаем утверждение теоремы 4.

Покажем теперь, как из *теоремы 4* могут быть получены *теоремы 1-3*. Остановимся на *теореме 2*. Дискриминант многочлена третьей степени равен

$$D(P) = a_3^4 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2.$$

Для неприводимых многочленов  $D(P_3) \neq 0$ , а поскольку это целое число, то  $|D(P_3)| \geq 1$ . Из леммы 1 следует, что  $|(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)| < c_{12}$ . Поэтому

$$1 \leq \sqrt{|D(P_3)|} \leq H^2 |\alpha_1 - \alpha_2| c_{12},$$

Отсюда следует первое утверждение *теоремы 2*. Для доказательства второго неравенства в *теореме 2* в каждой точке  $x \in B_2 = I \setminus B_1$ ,  $\mu B_2 > \frac{1}{2}|I|$ , построим многочлен  $P_1(x)$ , такой что  $|P_1(x_1)| < Q^{-v_1}$ ,  $|P'(x)| > 2^{-12}Q^{-v_2}$ ,  $v_1 + v_2 = 2$ .

По второму неравенству *леммы 2* получаем  $|x_1 - \alpha_1| < 2^{14}Q^{-v_1+v_2}$ . Из разложения  $P'(x)$  по формуле Лагранжа в окрестности  $\alpha_1$  получим, что  $P'(x)$  и  $P'(\alpha_1)$  при условии  $v_2 \leq \frac{1}{3}$  имеют одинаковый порядок, поэтому из равенства  $|P'(x)| = |a_3| |\alpha_1 - \alpha_2| |\alpha_1 - \alpha_3|$  получаем  $|P'(\alpha_1)| < c_{13} H^{-\frac{1}{3}}$  и, после деления на  $|a_3| > c_{10}H$  второе неравенство в *теореме 2*. *Теоремы 1 и 3* доказываются аналогично.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Гельфонд, А.О. Трансцендентные и алгебраические числа / А.О. Гельфонд – М. : Гостехиздат, 1952. – 224 с.
2. Галочкин, А.И. Введение в теорию чисел / Ю.В. Нестеренко, А.Б. Шидловский. – М. : Изд-во Московского университета, 1984.
3. Спринджук, В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 184 с.
4. Берник, В.И. Совместные приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. – 1980. – Т. 44. – № 1. – С. 24-45.
5. Берник, В.И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В.И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53. – № 1. – С. 17-28.

Поступила в редакцию 06.07.2010 г.

УДК 517.925.45

*Н.П. МОРОЗОВ*

## **О ПРИВЕДЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ К СПЕЦИАЛЬНОМУ ВИДУ**

*В работе предлагается специальное представление полиномиальных систем, позволяющее прогнозировать бифуркции в этих системах по гамильтоновой системе с естественным алгебраическим гамильтонианом. Гамильтонова система однозначно определяется по правым частям системы и является нелинейным глобальным приближением для исходной системы [1-3].*

В работе рассматривается система

$$\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y), \quad (1)$$

где  $P(x, y), Q(x, y)$  многочлены наибольшей степени  $n$ .

Основной результат содержится в следующем утверждении.

**Теорема 1.** Пусть начало координат совмещено с состоянием равновесия  $M_0(x_0, y_0)$  данной системы. Тогда система (1) представима в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) + x\bar{\sigma}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y\bar{\sigma}(x, y) \end{cases}, \quad (2)$$

где

$$P(x, y) = \sum_{m=1}^n P_k(x, y), \quad Q(x, y) = \sum_{m=1}^n Q_k(x, y),$$

$$P_k(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k C_k^m a_{k-m, m} x^{k-m} y^m, \quad (3)$$

$$Q_k(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k C_k^m b_{k-m, m} x^{k-m} y^m, \quad (4)$$

$$a_{k-m m} = \frac{\partial^k P(x_0, y_0)}{\partial x^{k-m} \partial y^m}, b_{k-m m} = \frac{\partial^k Q(x_0, y_0)}{\partial x^{k-m} \partial y^m}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \sum_{k=1}^n H_{k+1}(x, y), H_{k+1}(x, y) = \frac{y P_k(x, y) - x Q_k(x, y)}{k+1} = \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \left( a_{0k} y^{k+1} - b_{k0} x^{k+1} + \sum_{m=1}^k C_k^{m-1} \frac{\mu_{k-m m-1}}{m} x^{k-m+1} y^m \right), \\ \bar{\sigma}(x, y) &= \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_{k-1}(x, y), \bar{\sigma}_{k-1}(x, y) = \frac{1}{k+1} \left( \frac{\partial P_k(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_k(x, y)}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{m=1}^k C_{k-1}^{m-1} \sigma_{k-m m-1} x^{k-m} y^{m-1} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mu_{k-m m-1} = m a_{k-m+1 m-1} - (k-m+1) b_{k-m m} \quad (7)$$

$$\sigma_{k-m m-1} = a_{k-m+1 m-1} + b_{k-m m}, k = \overline{1, n}, m = \overline{1, k}. \quad (8)$$

**Доказательство.** Фиксируем точку  $M_0(x_0, y_0)$  и представим многочлены  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  по степеням  $x - x_0$  и  $y - y_0$ :

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P(x_0, y_0) + \sum_{m=1}^n P_k(x, y), \\ Q(x, y) &= Q(x_0, y_0) + \sum_{m=1}^n Q_k(x, y), n \geq 1, \\ P_k(x, y) &= \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k C_k^m a_{k-m m} (x - x_0)^{k-m} (y - y_0)^m, \\ Q_k(x, y) &= \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k C_k^m b_{k-m m} (x - x_0)^{k-m} (y - y_0)^m, \end{aligned}$$

и  $a_{k-m m}$ ,  $b_{k-m m}$  определены равенствами (5). После совмещения начала координат с точкой  $M_0(x_0, y_0)$  многочлены  $P_k(x, y)$  и  $Q_k(x, y)$  примут вид (3) и (4) соответственно. Обозначим  $\sigma_{k-1}(x, y) = \frac{\partial P_k(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q_k(x, y)}{\partial y}$  или  $\sigma_{k-1}(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^k m C_k^m \sigma_{k-m m-1} x^{k-m} y^{m-1}$ , где  $\sigma_{k-m m-1}$  определено равенством (8).

Положим

$$\frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x, y) = P_k(x, y) + x S_{k-1}(x, y), \quad (9)$$

$$-\frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x, y) = Q_k(x, y) + y R_{k-1}(x, y), \quad (10)$$

где

$$S_{k-1}(x, y) = \frac{1}{k!} \sum_{m=1}^k \frac{m}{k-m+1} C_k^m \sigma_{k-m m-1} (\lambda_{k-m m-1} - 1) x^{k-m} y^{m-1},$$

$$R_{k-1}(x, y) = -\frac{1}{k!} \sum_{m=1}^k C_k^m \sigma_{k-m m-1} \lambda_{k-m m-1} x^{k-m} y^{m-1},$$

$\lambda_{k-m m-1}$  — пока произвольные числа,  $k = \overline{1, n}$ ,  $m = \overline{1, k}$ .

Дифференцируя равенство (9) по  $x$ , а равенство (10) по  $y$ , с учетом (6) убеждаемся в корректности введенных обозначений при любых

$$\lambda_{k-m \ m-1}, k = \overline{1, n}, m = \overline{1, k}.$$

Подберем теперь  $\lambda_{k-m \ m-1}$  так, чтобы выполнялось тождество  $S_{k-1}(x, y) \equiv R_{k-1}(x, y)$ . Для отыскания  $\lambda_{k-m \ m-1}$  получим соотношения  $\frac{m}{k-m+1} C_k^m \sigma_{k-m \ m-1} (\lambda_{k-m \ m-1} - 1) = -C_k^m \sigma_{k-m \ m-1} \lambda_{k-m \ m-1}, m = \overline{1, k}$ .

Находим

$$\lambda_{k-m \ m-1} = \frac{m}{k+1}, m = \overline{1, k}, k = \overline{1, n}.$$

Подставляя  $\lambda_{k-m \ m-1}$  в  $S_{k-1}(x, y)$  и  $R_{k-1}(x, y)$ , будем иметь

$$S_{k-1}(x, y) \equiv R_{k-1}(x, y) \equiv -\bar{\sigma}_{k-1}(x, y), \quad (11)$$

где  $\bar{\sigma}_{k-1}(x, y)$  из (6).

Подставляя в (9) и (10) многочлены  $P_k(x, y)$ ,  $Q_k(x, y)$  из (3) и (4) и  $\lambda_{k-m \ m-1} = \frac{m}{k+1}$ , после несложных преобразований получим для  $\frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x, y)$  и  $\frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x, y)$  следующее представление:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{k!} a_{0k} y^k + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{m=0}^{k-1} C_k^m ((m+1) a_{k-m \ m} - (k-m) b_{k-m-1 \ m+1}) \\ &\quad x^{k-m} y^m \\ \frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{k!} b_{k0} x^k - \frac{1}{(k+1)!} \sum_{m=0}^{k-1} C_k^m \frac{k-m}{m+1} ((m+1) a_{k-m \ m} - (k-m) b_{k-m-1 \ m+1}) \\ &\quad x^{k-m-1} y^{m+1}. \end{aligned}$$

Или

$$\frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{k!} a_{0k} y^k + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{m=0}^{k-1} C_k^m \mu_{k-m-1 \ m} x^{k-m} y^m, \quad (12)$$

$$-\frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{k!} b_{k0} x^k - \frac{1}{(k+1)!} \sum_{m=0}^{k-1} C_k^m \mu_{k-m-1 \ m} x^{k-m-1} y^{m+1}, \quad (13)$$

где

$$\mu_{k-m-1 \ m} = (m+1) a_{k-m \ m} - (k-m) b_{k-m-1 \ m+1},$$

$$m = \overline{0, k-1}, k = \overline{1, n}, \text{ или}$$

$$\mu_{k-m \ m-1} = m a_{k-m+1 \ m-1} - (k-m+1) b_{k-m \ m}, m = \overline{1, k}, k = \overline{1, n}$$

Введем в рассмотрение гамильтонову систему

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y), \quad (14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{k+1}}{\partial y}(x, y), \quad -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -\sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{k+1}}{\partial x}(x, y).$$

Тогда с учетом соотношений (9), (10) и (11) систему (1) можем записать в виде (2), т.е.

$$P(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y} (x, y) + x\bar{\sigma}(x, y), Q(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x} (x, y) + y\bar{\sigma}(x, y).$$

Умножив первое из этих равенств на  $y$ , а второе – на  $x$  и вычитая второе из первого равенства, получим соотношение

$$x \frac{\partial H}{\partial x} (x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y} (x, y) \equiv yP(x, y) - xQ(x, y). \quad (15)$$

Отсюда имеем

$$x \frac{\partial H_{k+1}}{\partial x} (x, y) + y \frac{\partial H_{k+1}}{\partial y} (x, y) \equiv yP_k(x, y) - xQ_k(x, y).$$

По свойствам однородных функций

$$x \frac{\partial H_{k+1}}{\partial x} (x, y) + y \frac{\partial H_{k+1}}{\partial y} (x, y) = (k+1)H_{k+1}(x, y).$$

Следовательно,

$$H_{k+1}(x, y) = \frac{1}{k+1} \left( x \frac{\partial H_{k+1}}{\partial x} (x, y) + y \frac{\partial H_{k+1}}{\partial y} (x, y) \right) \text{ или}$$

$$H_{k+1}(x, y) = \frac{1}{k+1} (yP_k(x, y) - xQ_k(x, y)).$$

Это завершает доказательство.

Обозначим

$$V(x, y) = x \frac{\partial H}{\partial x} (x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y} (x, y) = \rho \frac{\partial H}{\partial \rho} (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi),$$

$$D = \{(x, y) | V(x, y) > 0\}, \Gamma_D = \{(x, y) | V(x, y) = 0, (x, y) \neq (0, 0)\},$$

**Следствие 1.** Состояния равновесия системы (2) и гамильтоновой системы (14) расположены на границе области  $D$ , т.е. на кривых, определяемых равенством

$$x \frac{\partial H}{\partial x} (x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y} (x, y) = 0. \quad (16)$$

Это следует из соотношения (15).

**Следствие 2.** Граница области  $D$  состоит из состояний равновесия и линий контакта траекторий гамильтоновой системы с лучами  $\varphi = \text{const}$ .

Гамильтонова система (14) в полярных координатах имеет вид

$$\rho \dot{\rho} = x \frac{\partial H}{\partial y} (x, y) - y \frac{\partial H}{\partial x} (x, y) = \frac{\partial H}{\partial \varphi} (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

$$\rho^2 \dot{\varphi} = - \left( x \frac{\partial H}{\partial x} (x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y} (x, y) \right) = -\rho \frac{\partial H}{\partial \rho} (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

Из последнего равенства следует, что на  $\Gamma_D$   $\dot{\varphi} = 0$ .

**Следствие 3.** Пусть точка  $O(0,0)$  является центром для гамильтоновой системы (14) и  $\rho_0 = OM_0$  – расстояние от точки  $O(0,0)$  до границы  $\Gamma_D$  области  $D$ .

Если  $M_0(x_0, y_0)$  единственная точка на  $\Gamma_D$ , в которой достигается расстояние  $\rho_0$ , то  $M_0$  является седлом для системы (14). Область центра распо-

ложена в области  $D$  и ограничена петлей сепаратрисы  $H(x, y) = H(x_0, y_0)$ , идущей из седла  $M_0$  в это же седло.

Действительно, для функции  $H = H(x, y)$  точка  $O(0,0)$  является точкой минимума и  $\frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) > 0$  в области  $D$ , т.е.  $H(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  возрастает по  $\rho$  при фиксированном  $\varphi$ . Следовательно,  $H(x, y) = C$  являются замкнутыми кривыми при  $0 < C \leq H(x_0, y_0)$ . Если предположить, что  $M_0(x_0, y_0)$  неособая точка, то приходим к противоречию с условиями единственности: замкнутая кривая  $H(x, y) = H(x_0, y_0)$  проходит через точку  $M_0$ , касаясь луча, соединяющего точки  $O(0,0)$  и  $M_0$ . Это в неособой точке невозможно.

**Следствие 4.** Система (2) инвариантна относительно линейного невырожденного преобразования  $x = \alpha u + \beta v, y = \gamma u + \delta v$ .

В этом случае система приводится к виду

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial H}{\partial v} + u \bar{\sigma}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v) \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial H}{\partial u} + v \bar{\sigma}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v),\end{aligned}$$

где  $\Delta = (\alpha\delta - \beta\gamma)$ ,  $H = H(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$ .

**Следствие 5.** В области  $D$  система (2) приводится к одному уравнению

$$\frac{dH}{d\varphi} = -\rho^2 \bar{\sigma}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi). \quad (17)$$

где  $H$  и  $\varphi$  связаны соотношением  $H(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = H$ , причем это равенство однозначно разрешимо в области центра  $O(0,0)$  гамильтоновой системы относительно  $\varphi$  при всех  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

Производная функции  $H = H(x, y)$  в силу системы (2) имеет вид

$$\frac{dH}{dt} = \bar{\sigma}(x, y) \left( x \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \right).$$

Учитывая, что  $\rho^2 \dot{\varphi} = -\left( x \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \right) < 0$  в области  $D$  и получаем равенство (17). Разрешимость в области центра  $O(0,0)$  гамильтоновой системы равенства  $H(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = H$  относительно  $\varphi$  следует из того, что в области  $D$  имеет место неравенство

$$\rho \frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \left( x \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \right) > 0.$$

В заключение отметим, что рассмотренное в работе представление полиномиальных систем позволяет разделить пространство параметров

системы на пассивно (фиксированные коэффициенты гамильтониана) и активно (переменные параметры  $\bar{\sigma}(x, y)$ ) участвующие в бифуркациях.

Проиллюстрируем это на примере квадратичной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{2}(a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2) \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{2}(b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2) \end{cases}$$

Она приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{2}a_{02}y^2 + \frac{1}{6}(\mu_{10}x^2 + 2\mu_{01}xy) + x(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)) \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{2}b_{20}x^2 - \frac{1}{6}(2\mu_{10}xy + \mu_{01}y^2) + y(\frac{\sigma_{00}}{2} + \frac{1}{3}(\sigma_{10}x + \sigma_{01}y)) \end{cases}. \quad (18)$$

Первая ляпуновская величина (с точностью до положительного множителя) системы (18) для состояния равновесия  $(0, 0)$  имеет вид ([2, 3])

$$I = (b_{20} - \frac{1}{3}\mu_{01})\sigma_{10} - (a_{02} + \frac{1}{3}\mu_{10})\sigma_{01}.$$

Точка  $P_0(-3a_{02}, 3b_{20})$  в пространстве пассивных параметров соответствует кратному фокусу системы (18), так как  $I \equiv 0$ . Будем предполагать, что  $P(\mu_{10}, \mu_{01}) \neq P_0(-3a_{02}, 3b_{20})$ . Пусть выполнено условие  $a_{20}b_{11}a_{11}b_{02} \neq 0$ . При этом условии, учитывая связь между коэффициентами этих систем,

$$\sigma_{k-m-1} = a_{k-m+1}m - b_{k-m}m,$$

$$\mu_{k-m-1} = m a_{k-m+1}m - (k-m+1)b_{k-m}m, \quad k = 2, m = 1; 2$$

можем считать  $\mu_{ij}$  произвольными фиксированными, как и  $a_{02}, b_{20}$ , а  $\sigma_{ij}$  переменными. Это означает, что состояния равновесия соответствующей гамильтоновой системы неподвижны при изменении коэффициентов  $\sigma_{ij}$ . Таким образом, исследование бифуркации рождения предельных циклов из состояния равновесия  $(0, 0)$  проводится в трехмерном пространстве параметров  $(\sigma_{00}, \sigma_{10}, \sigma_{01})$ .

Применение теоремы Андронова – Хопфа приводит к такому результату.

**Теорема 2.** Пусть  $a_{20}b_{11}a_{11}b_{02} \neq 0$ ,  $\mu_{10} \neq -3a_{02}$ ,  $\mu_{01} \neq 3b_{20}$  и точка  $(0, \sigma_{10}, \sigma_{01})$  лежит в полуплоскости  $\sigma_{00} = 0$ ,  $(b_{20} - \frac{1}{3}\mu_{01})\sigma_{10} - (a_{02} + \frac{1}{3}\mu_{10})\sigma_{01} < 0$ .

Тогда при переходе  $\sigma_{00}$  от отрицательных значений к положительным значениям из сложного фокуса системы (18) рождается устойчивый предельный цикл.

Если же точка  $(0, \sigma_{10}, \sigma_{01})$  лежит в полуплоскости  $\sigma_{00} = 0$ ,  $(b_{20} - \frac{1}{3}\mu_{01})\sigma_{10} - (a_{02} + \frac{1}{3}\mu_{10})\sigma_{01} > 0$ , то при переходе  $\sigma_{00}$  от положи-

тельных к отрицательным значениям, из сложного фокуса системы (18) рождается неустойчивый предельный цикл.

#### *СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ*

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов [и др.]. – М. : Наука, 1966. – 568 с.
2. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др.]. – М. : Наука, 1967. – 587 с.
3. *Марсден, Дж.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. – М. : Мир, 1980. – 367 с.

Поступила в редакцию 21.04.2011 г.

УДК 517.9

*Е.И. ФЕДОРАКО*

### **О СТРУКТУРЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ**

*Найдено параметрическое представление общего решения одного из видов дифференциального уравнения Абеля в виде функции его частного решения и произвольной постоянной интегрирования.*

Рассмотрим дифференциальное уравнение Абеля

$$y' = f_3(x)y^3 + f_2(x)y^2 + f_1(x)y, \quad (1)$$

где функции  $f_i(x)$ ,  $i=1,2,3$  обеспечивают существование и единственность локальной задачи Коши в некоторой области,  $f_3(x) \neq 0$ .

Дифференциальное уравнение Абеля (1) по виду правой части является следующим за уравнением Риккати

$$y' = a_2(x)y^2 + a_1(x)y + a_0(x) \quad (2)$$

и также интегрируется в квадратурах только в исключительных случаях. Но структура общего решения уравнения (2) хорошо изучена. А именно: оно является дробно-линейной функцией произвольной постоянной. Метод исследования, применяемый для уравнения (2), в случае уравнения (1) принципиально неприменим. Анализ указанных в [1] и других литературных источниках проинтегрированных уравнений не позволяет сделать выводов о структуре и особенностях решений уравнений вида (1). Естественно поэтому искать связь уравнений вида (1) с уравнениями, свойства которых известны. В нашем случае – с нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка.

Полагая в уравнении (1)

$$y = z \cdot \exp\left(\int f_1(x)dx\right),$$

получим уравнение

$$z' = K_3(x)z^3 + K_2(x)z^2, \quad (3)$$

где

$$K_3(x) = f_3(x) \cdot \exp\left(2 \int f_1(x) dx\right), \quad K_2(x) = f_2(x) \cdot \exp\left(\int f_1(x) dx\right).$$

Введя параметр  $p$  с помощью соотношения

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{z(x)}, \quad (4)$$

получим

$$\frac{d^2x}{dp^2} = z'(x) \cdot \left(-\frac{1}{z^2(x)}\right) \cdot \frac{dx}{dp}.$$

Тогда уравнение (1) будет иметь вид

$$\frac{d^2x}{dp^2} = -K_3(x) - K_2(x) \frac{dx}{dp}. \quad (5)$$

В работах [2, 3] показано, что в некоторых случаях общее решение уравнения вида (5) можно выразить через известное частное решение. Именно, уравнения вида

$$x'' + f(p)x' + ke^{\mu x} + F(p) = 0 \quad (6)$$

допускают группу непрерывных по параметру преобразований

$$\begin{aligned} p^* &= -\frac{1}{2} \ln |C + \exp(-\alpha p)|, \\ x^* &= x + 2\alpha p + 2 \ln |C + \exp(-\alpha p)| \end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда выполняется тождество:

$$\begin{aligned} 3(F' - 4ff' - 2f'') - 2(F'' - 4f'^2 - 4ff'' - 2f''') &(F - 2f^2 - 2f') - \\ - 4f'(F - 2f^2 - 2f')^2 + 2(F' - 4ff' - 2f'') &(F - 2f^2 - 2f')f \equiv 0. \end{aligned}$$

В частности, это условие выполняется, если уравнение (6) будет иметь вид

$$x'' + \alpha x' + ke^{\mu x} + 2\alpha^2 = 0, \quad (7),$$

где  $\alpha = \text{const} \neq 0$ .

Решение уравнения (7) можно представить в виде

$$x = F(p, C) = -2\alpha p - 2 \ln |C + e^{-\alpha p}| + x_1 \left( -\frac{1}{\alpha} \ln |C + e^{-\alpha p}| \right).$$

Тогда общее решение уравнения (1) в параметрической форме будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= F(p, C) = -2\alpha p - 2 \ln |C + e^{-\alpha p}| + x_1 \left( -\frac{1}{\alpha} \ln |C + e^{-\alpha p}| \right), \\ y &= \frac{\exp \left( \int f_1(F(p, C)) \cdot F'_p(p, C) dp \right)}{F'_p(p, C)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $x_1(p)$  – частное решение уравнения (7).

Существуют и другие уравнения вида (5) (см. [2, 3]), для которых можно выписать аналогичные формулы (8). Они не приводятся здесь в силу громоздкости.

Формулы (8) и дают пример зависимости общего решения от произвольной постоянной интегрирования  $C$ . В принципе,  $x_1(p)$  можно найти численно или приближенно. Интересно, что уравнение (7), частное с точки зрения математики, имеет вполне конкретные приложения в физике [2-5].

Следуя [6], покажем, что все решения уравнения (7) с точностью до замены переменных принадлежат множеству решений уравнения Лиувилля.

В уравнении

$$u_{xy} = ke^u \quad (9)$$

сделаем замену

$$u = z + p(x, y), \quad x_1 = f(x, y), \quad y_1 = y, \quad (10)$$

где  $z = z(x, y)$  – новая неизвестная функция,  $p(x, y)$  и  $f(x, y)$  – некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции, которые будут определены в дальнейшем. Будем искать решения преобразованного уравнения, не зависящие от переменной  $y_1$ . Эти решения удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2z}{dx_1^2} f_x f_y + \frac{dz}{dx_1} f_{xy} - K \exp(z + p) + p_{xy} = 0. \quad (11)$$

Если в уравнении (11) потребовать, чтобы

$$f_x f_y \exp(-p), \quad f_{xy} \exp(-p), \quad p_{xy} \exp(-p)$$

были ненулевыми постоянными, то придем к уравнению вида (7) (с точностью до обозначений). Эти условия будут совместными, если положить

$$f_{xy} = \alpha f_x f_y, \quad f_{xy} = \frac{1}{2\alpha} p_{xy}, \quad p_{xy} = \exp(p). \quad (12)$$

Последнее из уравнений (12) имеет общее решение (7)

$$p(x, y) = F(x) - G(y) - 2 \ln \left[ C_1 \int_{x_0}^x \exp(F(x)) dx + \frac{1}{2C_1} \int_{y_0}^y \exp(-G(y)) dy \right],$$

где  $F(x)$  и  $G(y)$  – произвольные функции,  $C_1$  – произвольная постоянная. Учитывая соотношение (12), получаем, что

$$f(x, y) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[ C_1 \int_{x_0}^x \exp(F(x)) dx + \frac{1}{2C_1} \int_{y_0}^y \exp(-G(y)) dy \right] + C \quad (C = const).$$

Если  $z(x_1)$  – общее решение уравнения

$$\frac{d^2 z}{dx_1^2} + \alpha \frac{dz}{dx_1} - 2\alpha^2 K \exp z + 2\alpha^2 = 0,$$

то уравнение (9) имеет решение

$$u(x, y) = F(x) - G(y) - 2 \ln \left[ C_1 \int_{x_0}^x \exp(F(x)) dx + \frac{1}{2C_1} \int_{y_0}^y \exp(-G(y)) dy \right] + \\ + z_1 \left( C - \frac{1}{\alpha} \ln \left[ C_1 \int_{x_0}^{Kx} \exp(F(x)) dx + \frac{1}{2C_1} \int_{y_0}^y \exp(-G(y)) dy \right] \right),$$

где  $F$  и  $G$  – произвольные функции,  $C$  и  $C_1$  – произвольные постоянные.

Итак, нами установлено, что общее решение уравнения (1) допускает параметрическое представление (8) через частное решение уравнения второго порядка (6), если только уравнение (6) инвариантно относительно однопараметрической группы преобразований. Показано также, что общее решение уравнения Лиувилля может быть выражено через решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, две произвольные функции и две произвольные постоянные.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М., 1971.
2. Чудновский, В.М., Холодкевич, Е.Д. // Физика твердого тела. – 1982. – Т. 24. – Вып. 4. – С. 1118–1123.
3. Самодуров, А.А. О решениях одного уравнения нелинейной оптики / А.А. Самодуров, В.М. Чудновский // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 5. – С. 911–913.
4. Горбузов, В.Н. Уравнения Риккати и Абеля / В.Н. Горбузов, А.А. Самодуров. – Гродно, 1986.
5. Самодуров, А.А. Об интегрируемости дифференциального уравнения Абеля в параметрическом виде / А.А. Самодуров // Вестн. Белорус. ун-та, Сер. 1. – 1983. – № 2. – С. 57–59.
6. Самодуров, А.А. О связи уравнения Лиувилля с уравнением сверхизлучательной лавины / А.А. Самодуров // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 2. – С. 337.
7. Калоджеро, Ф. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений / Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. – М., 1985.

Поступила в редакцию 14.02.2011 г.

УДК 535.51

В.М. РЕДЬКОВ, Е.М. ОВСИЮК

## ОПТИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ: О ФОРМУЛИРОВКЕ ЗАКОНА ОТРАЖЕНИЯ СВЕТА В ДВИЖУЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

*Исследуется влияние релятивистского движения системы отсчета на форму закона отражения света Снеллиуса-Декарта. Для этого закон отражения в неподвижной системе отсчета записывается в векторной форме с применением тройки световых сигналов, соответствующих падающему, отраженному и нормальному к поверхности лучу; последний можно ввести двумя способами: луч, нормально падающий к поверхности, и луч, нормально уходящий от поверхности. На основе использования релятивистских формул аберрации света для каждого из лучей, получена явная форма закона отражения света в системе отсчета движущегося наблюдателя, куда явным образом входит вектор скорости относительного движения систем отсчета. В общем случае тройка световых векторов не лежит в одной плоскости для движущегося наблюдателя, описаны геометрические характеристики возникающей 3-мерной конфигурации.*

### Введение

Основная цель настоящей работы – исследовать роль релятивистского эффекта аберрации света на явную формулировку закона отражения света Снеллиуса-Декарта. По-другому вопрос может быть поставлен так: как зависит форма закона отражения света от состояния движения релятивистского инерциального наблюдателя. Эта задача обсуждается в литературе уже много лет [1-18]. В целом применяемый в работе подход совпадает с использованным Эйнштейном [1]. Отличие состоит в том, что ниже анализируется самая общая ситуация взаимного расположения скорости относительного движения наблюдателя к плоскости падающего и отраженного лучей света.

При работе с произвольными преобразованиями из группы Лоренца используем изложенные в [19] факты из теории этой группы. Используем 3-скорости световых лучей, чтобы представлять направления падающего и отраженного лучей света, нормаль к отражающей поверхности также представляется посредством нормального луча света (падающего либо отраженного). Задача ставится так: как релятивистская аберрация света влияет на взаимное расположение трех световых лучей: падающего, отраженного и нормального.

### Релятивистская форма правила отражения Снеллиуса-Декарта

Введем сначала удобные обозначения. Падающий и отраженный свет в неподвижной системе отсчета  $K'$  будем описывать векторами скорости, нормированными на вакуумную скорость

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{W}'_{in}}{c}, \quad \mathbf{a}'^2 = 1, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{W}'_{out}}{c}, \quad \mathbf{b}'^2 = 1; \quad (1)$$

нормали к поверхности можно также сопоставить вектор скорости, перпендикулярный к поверхности

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{W}'_{norm}}{c}, \quad \mathbf{n}'^2 = 1. \quad (2)$$

Отражение света от плоскости в неподвижной системе отсчета  $K'$  можно представить векторной формулой (учитываем, что все три вектора имеют единичную длину – см. рисунок)

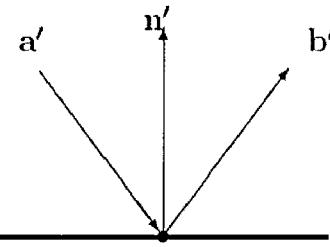


Рис. 1. Отражение в неподвижной системе  $K'$

$$\mathbf{a}' \times \mathbf{n}' = \mathbf{b}' \times \mathbf{n}'. \quad (3)$$

Эта формула включает в себя: 1) равенство углов падения и отражения; 2) условие, что все три вектора лежат в одной плоскости. Равенство косинусов углов падения и отражения можно представить в виде соотношения

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}' + \mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}' = 0. \quad (4)$$

Перейти к описанию закона отражения в движущейся системе отсчета  $K$  – значит пересчитать его с помощью преобразований Лоренца.

**Преобразование Лоренца с произвольной скоростью  $\mathbf{V}$ .** Нам потребуется явный вид преобразования Лоренца с любой скоростью  $\mathbf{V}$ , здесь воспользуемся известными результатами из теории группы Лоренца (см. Федоров [19]). Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{V} = \mathbf{e} \operatorname{th} \beta, \quad \mathbf{e}^2 = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} = \operatorname{ch} \beta, \quad \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}} = \operatorname{sh} \beta, \quad (5)$$

Преобразование Лоренца действует на координаты  $(t, \mathbf{x})$  согласно

$$t' = \operatorname{ch} \beta t + \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{e} \operatorname{sh} \beta t + \mathbf{x} + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}). \quad (6)$$

Обратное преобразование выглядит как

$$t = \operatorname{ch} \beta t' - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}', \quad \mathbf{x} = -\mathbf{e} \operatorname{sh} \beta t' + \mathbf{x}' + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}'). \quad (7)$$

Формулы (6) можно переписать в другом виде, выделив продольную и перпендикулярную (относительно  $\mathbf{e}$ ) составляющие координатного вектора  $\mathbf{x}'$ . Действительно, введем обозначения:

$$\mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}') = \mathbf{x}'_{||}, \quad (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}') = x'_{||}, \quad \mathbf{x}' - \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}') = \mathbf{x}'_{\perp} \quad (8)$$

тогда

$$t = \operatorname{ch} \beta t' + \operatorname{sh} \beta x'_{\parallel}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{e} (\operatorname{sh} \beta t' + \operatorname{ch} \beta x'_{\parallel}) + \mathbf{x}'_{\perp}, \quad (9)$$

Преобразование Лоренца (9) можно представить так:

$$t = \operatorname{ch} \beta t' + \operatorname{sh} \beta x'_{\parallel}, \quad \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x}'_{\perp}, \quad \mathbf{x}_{\parallel} = \mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{x}) = \mathbf{e}(\operatorname{sh} \beta t' + \operatorname{ch} \beta x'_{\parallel}). \quad (10)$$

Исходя из полученных выражений для произвольного преобразования Лоренца, получим общую форму релятивистского закона сложения скоростей. Выделяем два события на мировой линии движущейся частицы:  $(t_1, \mathbf{x}'_1)$  и  $(t_2, \mathbf{x}'_2)$ ; вектор скорости в системе  $K'$  определяется как

$$\mathbf{W}' = \frac{\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1}{t_2 - t_1}.$$

В другой системе отсчета  $K$  имеем

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1) - \mathbf{e} \operatorname{sh} \beta (t'_2 - t'_1) + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e} [\mathbf{e}(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1)]}{\operatorname{ch} \beta (t'_2 - t'_1) - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e}(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1)},$$

то есть правило преобразования скорости имеет вид

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{W}' - \mathbf{e} \operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e}(\mathbf{e} \mathbf{W}')}{\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{W}'} . \quad (11)$$

Эту формулу можно представить иначе:

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{W}' - \mathbf{e}(\mathbf{e} \mathbf{W}')}{\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{W}'} + \frac{\operatorname{ch} \beta \mathbf{e}(\mathbf{e} \mathbf{W}') - \mathbf{e} \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{W}'} . \quad (12)$$

Используя обозначения для продольной и поперечной составляющих скорости  $\mathbf{e}(\mathbf{e} \mathbf{W}') = \mathbf{W}'_{\parallel}$ ,  $\mathbf{W}' - \mathbf{e}(\mathbf{e} \mathbf{W}') = \mathbf{W}'_{\perp}$  и умножая числитель и знаменатель на  $\operatorname{ch}^{-1} \beta = \sqrt{1 - V^2}$ , формулу (12) можно записать как

$$\mathbf{W} = \frac{\sqrt{1 - V^2}}{1 - \mathbf{W}' \mathbf{V}} \mathbf{W}'_{\perp} + \frac{\mathbf{W}'_{\parallel} - \mathbf{V}}{1 - \mathbf{W}' \mathbf{V}} . \quad (13)$$

Напоминаем, что (13) – это лишь другая форма записи для (11). Форма (13) предпочтительнее по физическим соображениям, но для проведения вычислений удобнее форма (11).

**Отражение света в движущейся системе, общий случай.** Три вектора из формулы (3) преобразуются по правилу

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{e} [\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1) (\mathbf{ea})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{ea})}, \\ \mathbf{b}' &= \frac{\mathbf{b} + \mathbf{e} [\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1) (\mathbf{eb})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{eb})}, \\ \mathbf{n}' &= \frac{\mathbf{n} + \mathbf{e} [\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1) (\mathbf{en})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{en})}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (3), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{n} + (\mathbf{a} \times \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{n}) \operatorname{sh} \beta + [(\mathbf{a} \times \mathbf{e})(\mathbf{en}) + (\mathbf{e} \times \mathbf{n})(\mathbf{ea})](\operatorname{ch} \beta - 1)}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta(\mathbf{ea})} = \\ & = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n} + (\mathbf{b} \times \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{n}) \operatorname{sh} \beta + [(\mathbf{b} \times \mathbf{e})(\mathbf{en}) + (\mathbf{e} \times \mathbf{n})(\mathbf{eb})](\operatorname{ch} \beta - 1)}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta(\mathbf{eb})}. \quad (15) \end{aligned}$$

С учетом формул для двойного векторного произведения

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) = \mathbf{n}(\mathbf{ea}) - \mathbf{a}(\mathbf{en}), \quad \mathbf{e} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b}) = \mathbf{n}(\mathbf{eb}) - \mathbf{b}(\mathbf{en})$$

полученное соотношение можно преобразовать к другому виду

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{n} + (\mathbf{a} \times \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{n}) \operatorname{sh} \beta + \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}))(\operatorname{ch} \beta - 1)}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta(\mathbf{ea})} = \\ & = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n} + (\mathbf{b} \times \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{n}) \operatorname{sh} \beta + \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b}))(\operatorname{ch} \beta - 1)}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta(\mathbf{eb})}. \quad (16) \end{aligned}$$

Еще раз воспользовавшись формулами для двойного векторного произведения

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})) = \mathbf{e}[\mathbf{e}(\mathbf{n} \times \mathbf{a})] - (\mathbf{n} \times \mathbf{a}), \quad \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{b})) = \mathbf{e}[\mathbf{e}(\mathbf{n} \times \mathbf{b})] - (\mathbf{n} \times \mathbf{b}),$$

предыдущую формулу можем переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{ch} \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) + \operatorname{sh} \beta(\mathbf{a} - \mathbf{n}) \times \mathbf{e} + (\operatorname{ch} \beta - 1)\mathbf{e}[\mathbf{e}(\mathbf{n} \times \mathbf{a})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta(\mathbf{ea})} = \\ & = \frac{\operatorname{ch} \beta(\mathbf{b} \times \mathbf{n}) + \operatorname{sh} \beta(\mathbf{b} - \mathbf{n}) \times \mathbf{e} + (\operatorname{ch} \beta - 1)\mathbf{e}[\mathbf{e}(\mathbf{n} \times \mathbf{b})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta(\mathbf{eb})}, \quad (17) \end{aligned}$$

или (поделим числитель и знаменатель в обеих частях равенства на  $\operatorname{ch} \beta$ )

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{n} + \operatorname{th} \beta(\mathbf{a} - \mathbf{n}) \times \mathbf{e} + (1 - \operatorname{ch}^{-1} \beta)\mathbf{e}[\mathbf{e}(\mathbf{n} \times \mathbf{a})]}{1 + \operatorname{th} \beta(\mathbf{ea})} = \\ & = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n} + \operatorname{th} \beta(\mathbf{b} - \mathbf{n}) \times \mathbf{e} + (1 - \operatorname{ch}^{-1} \beta)\mathbf{e}[\mathbf{e}(\mathbf{n} \times \mathbf{b})]}{1 + \operatorname{th} \beta(\mathbf{eb})}. \quad (18) \end{aligned}$$

Соотношения (17), (18) представляют собой математическую формулировку закона отражения света Снеллиуса-Декарта в движущейся системе отсчета.

Отмечаем, что в случае, если четыре вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}$  лежат в одной плоскости, выполняются два равенства

$$[\mathbf{e}(\mathbf{n} \times \mathbf{a})] = 0, \quad [\mathbf{e}(\mathbf{n} \times \mathbf{b})] = 0, \quad (19)$$

при этом соотношение (18) значительно упрощается:

$$\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{n} + \operatorname{th} \beta(\mathbf{a} - \mathbf{n}) \times \mathbf{e}}{1 + \operatorname{th} \beta(\mathbf{ea})} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n} + \operatorname{th} \beta(\mathbf{b} - \mathbf{n}) \times \mathbf{e}}{1 + \operatorname{th} \beta(\mathbf{eb})}, \quad (20)$$

что может быть представлено как

$$\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{n} + (\mathbf{a} - \mathbf{n}) \times \mathbf{V}}{1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{V}} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n} + (\mathbf{b} - \mathbf{n}) \times \mathbf{V}}{1 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{V}}. \quad (21)$$

Выведем одно вспомогательное соотношение, оно позволит векторное соотношение (18) – закон Снеллиуса-Декарта в движущейся системе отсчета – разложить на два более простых уравнения. Для этого умножим равенство (18) скалярно на вектор  $\mathbf{e}$ . По существу, при этом мы находим проекцию векторного уравнения (18) на направление  $\mathbf{e}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{e}(\mathbf{a} \times \mathbf{n}) + \operatorname{th} \beta \mathbf{e}[(\mathbf{a} - \mathbf{n}) \times \mathbf{e}] + (1 - \operatorname{ch}^{-1} \beta)[\mathbf{e}(\mathbf{n} \times \mathbf{a})]}{1 + \operatorname{th} \beta (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})} = \\ & = \frac{\mathbf{e}(\mathbf{b} \times \mathbf{n}) + \operatorname{th} \beta \mathbf{e}[(\mathbf{b} - \mathbf{n}) \times \mathbf{e}] + (1 - \operatorname{ch}^{-1} \beta)[\mathbf{e}(\mathbf{n} \times \mathbf{b})]}{1 + \operatorname{th} \beta (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})}, \end{aligned}$$

отсюда следует равенство

$$\frac{\mathbf{V}(\mathbf{n} \times \mathbf{a})}{1 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a})} = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{n} \times \mathbf{b})}{1 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{b})}. \quad (22)$$

Замечаем, что с учетом этого в равенстве (18) взаимно сокращаются члены, пропорциональные  $(1 - \operatorname{ch}^{-1} \beta)$ ; в результате из (18) получаем соотношение (20) и дальше (21).

Большой ясности относительно выполненных преобразований и упрощений можно достичь, записав уравнение (18) в виде векторного соотношения  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ . Выполненные преобразования в этих обозначениях состоят из двух шагов: сначала вычисляем проекцию равенства на направление  $\mathbf{e}$ :  $\mathbf{e}\mathbf{A} = \mathbf{e}\mathbf{B}$ . Затем вычитаем из векторного уравнения его составляющую вдоль направления  $\mathbf{e}$ :

$$\mathbf{A} - \mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{A}) = \mathbf{B} - \mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{B}).$$

Таким образом, закон отражения света Снеллиуса-Декарта в движущейся системе отсчета (18) может быть представлен с помощью двух одновременно выполняющихся соотношений

$$\begin{aligned} & \frac{[\mathbf{V}(\mathbf{n} \times \mathbf{a})]}{1 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{a})} = \frac{[\mathbf{V}(\mathbf{n} \times \mathbf{b})]}{1 + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{b})}, \\ & \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{n} + (\mathbf{a} - \mathbf{n}) \times \mathbf{V}}{1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{V}} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n} + (\mathbf{b} - \mathbf{n}) \times \mathbf{V}}{1 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{V}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь рассмотрим преобразование к движущейся системе отсчета скалярного уравнения

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}' + \mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}' = 0, \quad (24)$$

из (24), используя (14), получаем

$$\frac{\mathbf{an}(1-V^2) + (\mathbf{a} + \mathbf{n})V + [V^2 + (\mathbf{a}V)(\mathbf{n}V)]}{1 + \mathbf{a}V} + \\ + \frac{\mathbf{bn} + (\mathbf{b} + \mathbf{n})V + [V^2 + (\mathbf{b}V)(\mathbf{n}V)]}{1 + \mathbf{b}V} = 0. \quad (25)$$

Напоминаем, что (25) – это пересчитанное к движущейся системе отсчета соотношение (24).

Дополнительно проанализируем еще один аспект преобразования закона отражения света к движущейся системе отсчета. В покоящейся системе отсчета три вектора единичной длины  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  лежат в одной плоскости – легко можно получить выражение для вектора  $\mathbf{b}$  в виде линейного разложения по двум остальным (рисунок 2):

$$\mathbf{b}' = \alpha \mathbf{a}' + \nu \mathbf{n}', \\ \mathbf{a}' \times \mathbf{n}' = (\alpha \mathbf{a}' + \nu \mathbf{n}') \times \mathbf{n}', \quad \Rightarrow \quad \alpha = +1, \mathbf{b}' = \mathbf{a}' + \nu \mathbf{n}'.$$

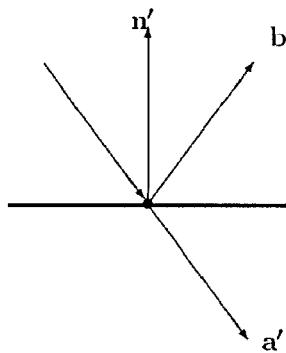


Рис. 2. Плоскость падения-отражения

Учтем равенства

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}' = -\cos \phi, \quad \mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}' = +\cos \phi, \quad (\mathbf{a}' + \mathbf{b}') \cdot \mathbf{n}' = 0, \\ (2\mathbf{a}' + \nu \mathbf{n}') \cdot \mathbf{n}' = 0, \quad \nu = -2(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}') = -2 \cos \phi.$$

Таким образом, справедливо разложение (по существу, это еще одна формулировка закона отражения света Снеллиуса-Декарта в неподвижной системе отсчета)

$$\mathbf{b}' = \mathbf{a}' - 2(\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}') \mathbf{n}'. \quad (26)$$

Преобразуем это уравнение к движущейся системе отсчета  $K'$ . Для этого подставим в формулу (24) соотношения (14):

$$\frac{\mathbf{b} + \mathbf{e} [\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1) (\mathbf{e} \mathbf{b})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e} \mathbf{b})} = \\ = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{e} [\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1) (\mathbf{e} \mathbf{a})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e} \mathbf{a})} + \nu \frac{\mathbf{n} + \mathbf{e} [\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1) (\mathbf{e} \mathbf{n})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e} \mathbf{n})}. \quad (27)$$

Отмечаем, что структура соотношения такова: вектор  $\mathbf{b}$  в общем случае не лежит в плоскости векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{n}$ , появляется составляющая вдоль направляющего вектора скорости  $\mathbf{e}$ :

$$\mathbf{b} = A \mathbf{a} + B \mathbf{n} + C \mathbf{e}.$$

Соотношение (27) может быть разрешено относительно  $\mathbf{b}$ . Действительно, умножив (27) скалярно на вектор  $\mathbf{e}$ , получим

$$\frac{\operatorname{sh} \beta + \operatorname{ch} \beta (\mathbf{e}\mathbf{b})}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e}\mathbf{b})} = \frac{\operatorname{sh} \beta + \operatorname{ch} \beta (\mathbf{e}\mathbf{a})}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e}\mathbf{a})} + \nu \frac{\operatorname{sh} \beta + \operatorname{ch} \beta (\mathbf{e}\mathbf{n})}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e}\mathbf{n})} \equiv B; \quad (28)$$

для сокращения записи правую часть уравнения (28) обозначили буквой  $B$ . Из уравнения (28) легко выражается величина  $(\mathbf{e}\mathbf{b})$ :

$$\mathbf{e}\mathbf{b} = \frac{B - \operatorname{th} \beta}{1 - B \operatorname{th} \beta}. \quad (29)$$

Полученное равенство не удивительно, поскольку  $B \equiv \mathbf{b}'\mathbf{e}$ . Замечаем, что с учетом (28) в соотношении (27) взаимно сокращается часть членов слева и справа, выпишем их:

$$\frac{\mathbf{e} [\operatorname{sh} \beta + \operatorname{ch} \beta (\mathbf{e}\mathbf{b})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e}\mathbf{b})} = \frac{\mathbf{e} [\operatorname{sh} \beta + \operatorname{ch} \beta (\mathbf{e}\mathbf{a})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e}\mathbf{a})} + \nu \frac{\mathbf{e} [\operatorname{sh} \beta + \operatorname{ch} \beta (\mathbf{e}\mathbf{n})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e}\mathbf{n})}, \quad (30)$$

в результате из (27) следует более простое уравнение:

$$\frac{\mathbf{b} - \mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{b})}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e}\mathbf{b})} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{a})}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e}\mathbf{a})} + \nu \frac{\mathbf{n} - \mathbf{e}(\mathbf{e}\mathbf{n})}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e}\mathbf{n})}. \quad (31)$$

Понятно, что (30) и (31) – это проекции уравнения (18) на направление вектора  $\mathbf{e}$  и ортогональную ему плоскость. Уравнение (31) можно записать также и так:

$$\frac{\mathbf{b}_\perp}{1 + \mathbf{b}\mathbf{V}} = \frac{\mathbf{a}_\perp}{1 + \mathbf{a}\mathbf{V}} + \nu \frac{\mathbf{n}_\perp}{1 + \mathbf{n}\mathbf{V}}. \quad (32)$$

Количественной мерой нарушения закона – *луч падающий, отраженный и нормаль лежат в одной плоскости* – при переходе к общему случаю движущейся системы отсчета  $K$  может рассматриваться объем параллелепипеда, построенного на трех векторах  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ :

$$\Delta' = \mathbf{n}'(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') = 0, \quad \Delta = \mathbf{n}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (33)$$

Вычислим его, воспользовавшись преобразованием Лоренца:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{e}[-\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1)(\mathbf{e}\mathbf{a}')]}{\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e}\mathbf{a}'}, \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{b}' + \mathbf{e}[-\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1)(\mathbf{e}\mathbf{b}')]}{\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e}\mathbf{b}'}, \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{n} + \mathbf{e}[-\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1)(\mathbf{e}\mathbf{n}')]}{\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e}\mathbf{n}'} \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{(\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{n}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{a}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{b}')} \times \\ & \times \{ [\mathbf{n}'(\mathbf{a}' \times \mathbf{e})] [-\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e} \mathbf{b}'] + \\ & + [\mathbf{n}'(\mathbf{e} \times \mathbf{b}')] [-\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e} \mathbf{a}'] + \\ & + [\mathbf{e}(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}')] [-\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e} \mathbf{n}'] \}. \end{aligned} \quad (34)$$

Воспользуемся формулой (см. (26))  $\mathbf{b}' = \mathbf{a}' - 2(\mathbf{a}' \mathbf{n}') \mathbf{n}' = \mathbf{a}' + \nu \mathbf{n}'$ , тогда предыдущее равенство можно переписать как

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{1}{(\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{n}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{a}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{b}')} \times \\ & \times \{ [\mathbf{n}'(\mathbf{a}' \times \mathbf{e})] [-\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1)(\mathbf{e} \mathbf{a}' + \nu \mathbf{e} \mathbf{n}')] + \\ & + [\mathbf{n}'(\mathbf{e} \times \mathbf{a}')] [-\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1)(\mathbf{e} \mathbf{a}')] + \\ & + \nu [\mathbf{e}(\mathbf{a}' \times \mathbf{n}')] [-\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1)(\mathbf{e} \mathbf{n}')] \}, \end{aligned} \quad (35)$$

или

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{[\mathbf{e}(\mathbf{n}' \times \mathbf{a}')]}{(\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{n}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{a}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{b}')} \times \\ & \times [-\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1)(\mathbf{e} \mathbf{a}' + \nu \mathbf{e} \mathbf{n}') + \operatorname{sh} \beta - (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e} \mathbf{a}' + \nu \operatorname{sh} \beta - \nu(\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e} \mathbf{n}'] = \\ = & \frac{\nu \operatorname{sh} \beta [\mathbf{e}(\mathbf{n}' \times \mathbf{a}')]}{(\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{n}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{a}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{b}')} \end{aligned}$$

Таким образом, получено соотношение

$$\Delta = \mathbf{n}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = [\mathbf{e}(\mathbf{n}' \times \mathbf{a}')] \frac{-2 \operatorname{sh} \beta (\mathbf{a}' \mathbf{n}')} {(\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{n}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{a}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \mathbf{b}')}. \quad (36)$$

Обсудим еще один аспект проблемы релятивизации закона отражения света. А именно, обратим внимание на то, что полученная форма закона отражения света зависит, вообще говоря, от дополнительного предположения – нормаль задается *уходящим от поверхности ортогональным к поверхности лучом света*. Однако выбор направления движения света по нормали – это, вообще говоря, случайное предположение, мы могли бы выбрать представителем нормали и луч света, *падающий на поверхность*.

Все дело в том, что, если в покоящейся системе отсчета два световых вектора связаны соотношением

$$\mathbf{N}' = -\mathbf{n}', \quad (37)$$

то после перехода к движущейся системе отсчета с помощью преобразования Лоренца мы получаем два вектора, которые в общем случае совсем не параллельны друг другу. Действительно, в движущейся системе отсчета имеем следующие представления для векторов из (40):

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}' + \mathbf{e}[-\operatorname{sh} \beta + (\operatorname{ch} \beta - 1)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}')]}{\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}')}, \quad (38)$$

$$\mathbf{N} = \frac{-\mathbf{n}' + \mathbf{e}[-\operatorname{sh} \beta - (\operatorname{ch} \beta - 1)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}')]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}')}. \quad (39)$$

Легко можно вычислить векторное произведение

$$\mathbf{n} \times \mathbf{N} = \frac{2 \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch}^2 \beta - \operatorname{sh}^2 \beta (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})^2} \mathbf{e} \times \mathbf{n}. \quad (40)$$

Аналогично, для скалярного произведения получаем выражение

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 1 - \frac{2}{\operatorname{ch}^2 \beta - \operatorname{sh}^2 \beta (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d})^2}. \quad (41)$$

Если бы при формулировке закона отражения света в неподвижной системе отсчета  $K'$  вместо вектора  $\mathbf{n}$  использовался обратный вектор  $\mathbf{N}$

$$\mathbf{a}' \times \mathbf{N}' = \mathbf{b}' \times \mathbf{N}', \quad \mathbf{aN} + \mathbf{bN} = 0, \quad (42)$$

то формально в дальнейших вычислениях изменилось бы очень немного: везде вместо  $\mathbf{n}$  надо написать символ  $\mathbf{N}$ . Вместо (17) и (25) будем иметь формулы:

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{ch} \beta (\mathbf{a} \times \mathbf{N}) + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{a} - \mathbf{N}) \times \mathbf{e} + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e} [\mathbf{e}(\mathbf{N} \times \mathbf{a})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e} \cdot \mathbf{a})} = \\ & = \frac{\operatorname{ch} \beta (\mathbf{b} \times \mathbf{N}) + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{b} - \mathbf{N}) \times \mathbf{e} + (\operatorname{ch} \beta - 1) \mathbf{e} [\mathbf{e}(\mathbf{N} \times \mathbf{b})]}{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b})}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{aN}(1 - V^2) + (\mathbf{a} + \mathbf{N})V + [V^2 + (\mathbf{a}V)(\mathbf{NV})]}{1 + \mathbf{a}V} + \\ & + \frac{\mathbf{bN} + (\mathbf{b} + \mathbf{N})V + [V^2 + (\mathbf{b}V)(\mathbf{NV})]}{1 + \mathbf{b}V} = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Эти соотношения представляют математическую запись закона отражения в движущейся системе отсчета, когда вектор нормали задается лучом света, нормально падающим на отражающую поверхность. Преобразованные к движущейся системе отсчета векторы нормально падающего и нормально отраженного лучей света различаются – см (38) и (39). Вместо (36) будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta = [\mathbf{N}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})] &= [\mathbf{e}(\mathbf{N}' \times \mathbf{a}')] \frac{-2 \operatorname{sh} \beta (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{N}')} {(\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{N}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{b}')} = \\ &= [\mathbf{e}(\mathbf{n}' \times \mathbf{a}')] \frac{-2 \operatorname{sh} \beta (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}')} {(\operatorname{ch} \beta + \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}') (\operatorname{ch} \beta - \operatorname{sh} \beta \mathbf{e} \cdot \mathbf{b}')} = \end{aligned} \quad (45)$$

Существование в движущейся системе отсчета двух существенно различающихся направлений нормали к отражающей поверхности указывает на то, что полученные выше формулы в связи с законом отражения света нужно рассматривать скорее как описание релятивистского эффекта aberrации для двух троек векторов:  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{N}$ .

#### *СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ*

1. *Einstein, A.* Zur Elektrodynamik der bewegten Körper / A. Einstein // Annalen der Physik. – 1905. – Bd. 17. – № 10. – S. 891–921.
2. *Laub, J.* On the optics of moving bodies / J. Laub // Annalen der Physik. – 1907. – Bd. 23. – № 9. – S. 738–744.
3. *Laue, M.* The entrainment of light through moving bodies according to the relativity principle / M. Laue // Annalen der Physik. – 1907. – Bd. 23. – № 10. – S. 989–990.
4. *Strasser, B.* The Fizeau experiment on the alteration of the polarisation azimuth of a refracted ray by the earth's motion / B. Strasser // Annalen der Physik. – 1907. – Bd. 24. – № 11. – S. 137–144.
5. *Laub, J.* The optical characteristics of moving bodies / J. Laub // Annalen der Physik. – 1908. – Bd. 25. – № 1. – S. 175–184.
6. *Runge, J.* The application of vector calculations on the basis of geometric optics / J. Runge // Annalen der Physik. – 1911. – Bd. 35. – № 7. – S. 277–298.
7. *Harnack, A.* The theory of movable mirrors / A. Harnack // Annalen der Physik. – 1912. – Bd. 39, № 15. – S. 1053–1058.
8. *Harnack, A.* Regarding the theory of movable mirrors. II / A. Harnack // Annalen dder Physik. – 1914. – Bd. 43, № 2. – S. 295–308.
9. *Frank, P.* Use of the vector analysis on the geometrical optics in moving bodies / P. Frank // Annalen der Physik. – 1917. – Bd. 52, № 6. – S. 649–656.
10. *Kennard, E.H.* On reflection from a moving mirror and the Michelson-Morley experiment / E.H. Kennard, D.E. Richmond // Phys. Rev. – 1922. – Vol. 19. – P. 572–577.
11. *Censor, D.* Scattering of a plane wave at a plane interface separating 2 moving media / D. Censor // Radio Science. – 1969. – Vol. 4. – № 11. – P. 1079.
12. *Болотовский, Б.* Отражение волны от движущегося зеркала и связанные проблемы / Б. Болотовский, С.Н. Столяров // УФН. – 1989. – Т. 159. – Вып. 1. – С. 155–180.
13. *He, Q.C.* Reflection of plane electromagnetic waves from the surface of a perfect conductor moving in an arbitrary direction / Q.C. He, Y.X. Huang // Chinese Science Bulletin. – 2000. – Vol. 45. – № 17. – P. 1564–1569.
14. *Puccini, G.D.* Doppler effect and aberration of light from the point of view of absolute motion / G.D. Puccini, F. Selleri // Nuovo Cimento. B. – 2002. – Vol. 117. – № 3. – P. 283–293.
15. *Gjurchinovski, A.* Aberration of light in a uniformly moving optical medium / A. Gjurchinovski // Am. J. Phys. – 2004. – Vol. 72. – № 7. – P. 934–940.
16. *Gjurchinovski, A.* Reflection of light from a uniformly moving mirror / A. Gjurchinovski // Am. J. Phys. – 2004. – Vol. 72. – № 10. – P. 1316–1324.
17. *Gjurchinovski, A.* Einstein's mirror and Fermat's principle of least time / A. Gjurchinovski // Am. J. Phys. – 2004. – Vol. 72. – № 10. – P. 1325–1327.
18. *Red'kov, V.M.* Relativistic aberration effect on the light reflection law, and the form of reflecting surface in a moving reference frame / V.M. Red'kov, Bernhard Rothenstein, George J. Spix // e-Print archive [Electronic resource]. – Mode of access: <http://arxiv.org/abs/physics/0609023>.
19. *Федоров, Ф.И.* Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

УДК 621.376.714

Е.В. ТИМОШЕНКО, А.В. ТОМОВ, В.А. ЮРЕВІЧ

## ОПТИЧЕСКИЙ ГИСТЕРЕЗИС ПРИ РЕЗОНАНСНОМ ОТРАЖЕНИИ СВЕТА ТОНКИМ НЕЛИНЕЙНО ПОЛЯРИЗУЕМЫМ СЛОЕМ

*В рамках предложенной расчетно-теоретической модели исследовано явление резонансного отражения когерентного излучения граничным слоем с нелинейной поляризованностью при учете квазирезонансной поляризуемости активных атомов в условиях диполь-дипольного взаимодействия. Для параметров пленок на основе азокрасителя метиловый красный, введенного в полимерную матрицу на основе поликарбоната, проведены оценки нелинейного сдвига фазы при отражении и возможности наблюдения гистерезисных свойств в пропускании и отражении пленок.*

### Введение

В настоящее время в связи с необходимостью разработки и создания устройств пассивной модуляции когерентных световых потоков активно исследуется явление безрезонаторной оптической бистабильности. В качестве бистабильных устройств используются плоские резонаторы с нелинейными средами, системы с распределенной обратной связью (ОС) (в случае, когда встречные волны непрерывно взаимодействуют в продольном направлении, параллельном оптической оси), а также гибридные оптоэлектронные системы (где ОС осуществляется за счет управления параметрами среды посредством электромагнитного сигнала, посыпанного с детектора прошедшего светового потока). Известно, что плотные резонансные среды (т.е. вещества с высокой концентрацией активных центров [1; 2]) в определенных интервалах интенсивности могут демонстрировать бистабильный оптический отклик даже в отсутствие внешней ОС [3; 4]. Подобная оптическая бистабильность, которую в научной литературе также называют внутренней, возможна в достаточно тонких планарных пленках плотных резонансных сред [5-7] и обусловлена корреляциями дипольных атомов, образующих граничный поверхностный слой и резонансно реагирующих на интенсивное квазимохроматическое световое поле, которое формируется в лазерных пучках.

Одним из распространенных методов анализа внутренней бистабильности является полуклассическая модель взаимодействия управляющего поля (как правило, в приближении плоской электромагнитной волны оптического диапазона частот), с резонансно поляризуемыми атомами особо тонкой поверхностной пленки, например, [8; 9]. Приближение сверхтонкого слоя дает возможность использовать алгебраические уравнения для поля, которые следуют из электродинамических условий для напряженностей приложенного, проходящего и отраженного полей  $E_p$ ,  $E$  и  $E_r$  [10]. Эти условия учитывают существование на границе раздела линейных

сред активного слоя резонансно поляризуемых атомов, в котором поле  $E$  считается бесструктурным. В ряде работ (например, [11]), в частности, показан пороговый характер внутренней бистабильности, которая должна проявляться при значениях ненасыщенного показателя резонансного поглощения активного слоя  $k_0 > 8$ . Обобщенная модель двухуровневой среды позволяет одновременно учесть различие поляризумостей атомов в основном и возбужденном состояниях (квадратичный эффект Штарка) [12] и влияние диполь-дипольных взаимодействий [1; 9]. В этих условиях порог наблюдения внутренней бистабильности в слое должен снизиться почти на порядок ( $k_0 > 1$ ).

### Постановка задачи. Основные уравнения

Для обоснования возможности получения безрезонаторной оптической бистабильности в линейных цепях молекулярных агрегатов [4] был использован полуклассический подход. Взаимодействие молекул, входящих в подобные упорядоченные агрегаты, традиционно объясняется на основании концепции экситонов, тогда двухуровневый переход трактуется как переход между основным и одноэкситонным состояниями. Это позволяет предсказывать бистабильность пропускания тонкой пленки, состоящей из цепей таких молекулярных агрегатов [7], которые могут формироваться, в частности, в результате фотоиндуцированных процессов изомеризации молекул, происходящих в органических красителях. Одним из типов таких веществ являются азокрасители [13], молекулы которых под действием света способны изменять свою конфигурацию, в результате чего происходит значительное изменение их комплексной поляризумости, определяющей диэлектрическую проницаемость вещества.

В работе показано, что отражение когерентных световых потоков тонким слоем азокрасителя должно обладать свойством внутренней бистабильности. На основе модели процесса взаимодействия оптического излучения с веществами, обладающими параметрами азокрасителей, установлены гистерезисные особенности отражения и фазовой модуляции отраженного сигнала. Нелинейная реакция на излучение органических молекулярных агрегатов в азокрасителях может быть представлена как резонансная. Измеренные величины их оптических характеристик, свидетельствуя о сильной нелинейности, связанной с изменением поляризумости, указывают одновременно на связанные между собой изменения поглощения (просветление слоя) и показателя преломления [13]. Вещество азокрасителя метиловый красный в работе [13] вводилось в полимерную матрицу на основе поликарбоната, при этом формировался приповерхностный слой с повышенным по отношению к полимеру показателем преломления. Плотность активных центров  $N$  в таких системах может быть доведена до значений примерно  $1,5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Одновременно молекулярные агрегаты должны обладать большими дипольными моментами, связанными с резонансными переходами [7]: их величина состав-

ляет несколько десятков Дебай. В подобных слоях при их относительно малой толщине (примерно субмикронной), кроме внутренней бистабильности и резонансного отражения действующих извне коротких оптических импульсов, ожидается возникновение таких явлений, как самоиндцированная прозрачность, нутационные осцилляции интенсивности, эффекты локального поля.

Полагаем, что на приповерхностный слой азокрасителя в полимере нормально падает плоская световая волна частоты  $\omega$  с амплитудой  $E_r$ , относительно медленно меняющейся на промежутках времени, сравнимых с периодом светового колебания. Рассматриваемый слой считается граничным, относительно однородным по плотности активных центров, и его толщина  $l$  намного меньше длины волны света. Взаимодействие поля лазерного излучения с веществом границы, разделяющей оптические среды диэлектрической проницаемости  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , описывается аналогично [12] модифицированной системой уравнений Максвелла – Блоха для квазистационарных нормированных комплексных амплитуд поля проходящей и отраженной волн ( $E$  и  $E_r$ ) и вероятностных переменных резонансного отклика среды (отнесенных к одному атому – поляризованности  $\rho$  и разности населенностей  $n$  уровней основного перехода):

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} E_i(t) - \frac{\omega N l}{(\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}) c} \left[ \frac{\mu}{\epsilon_0} \rho + \frac{2\pi\Delta\alpha (n_0 - n)}{1 - 2\pi \Delta\alpha N(n_0 - n)/3} \left( \frac{\mu N}{3\epsilon_0} \rho - iE \right) \right], \\ \rho &+ \frac{1}{T_2} \rho + i \left( \Delta\omega + \frac{\Delta\alpha}{\hbar} \pi \epsilon_0 |E|^2 + \frac{\mu^2 N}{3\epsilon_0 \hbar} \frac{n}{1 - 2\pi \Delta\alpha N(n_0 - n)/3} \right) \rho = \frac{\mu}{\hbar} n E, \\ n &+ \frac{1}{T_1} (n - n_0) = -\frac{\mu}{2\hbar} \frac{\rho^* E + \rho E^*}{1 - 2\pi \Delta\alpha N(n_0 - n)/3}, \\ E' &= \frac{1}{1 - 2\pi \Delta\alpha N(n_0 - \Delta n)/3} \left( E + i \frac{\mu N}{3\epsilon_0} \rho \right), \quad E_r = E - E_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\mu$  – средний дипольный момент активных атомов,  $N$  – их объемная плотность,  $n_0$  – начальное значение разности населенности,  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  – отстройка частоты зондирующего поля относительно центра  $\omega_0$  резонансной спектральной линии поглощения,  $T_1$  и  $T_2$  – времена продольной и поперечной релаксации. Уравнения связи полей в (1) записаны на основе используемых при решении уравнений Максвелла условий для полей  $E$ ,  $E_r$  и  $E_i$  на границе раздела сред. Члены в уравнениях связи, которые пропорциональны поляризованности, означают учет компоненты нелинейного отклика вещества граничного слоя, связанной с сверхизлучением ансамбля активных атомов, образующих его среду [14]. В соотношение для поляризованности добавлена компонента, которая учитывает квазирезонансную составляющую, существенную при наличии возбуждаемых внешним полем частоты  $\omega$  переходов, близких к резонансно-

му. При этом оказывается значимым параметр  $\Delta\alpha$  – дефект поляризуемости (разность поляризуемостей в основном и возбужденном состоянии атома), для органических молекул это различие считается особо существенным и обуславливает резонансную рефракционную нелинейность. Изменение рефракции пропорционально резонансной вариации населенности  $n_0 - n(t)$ , которая при действии лазерных полей испытывает насыщение. В плотных резонансных средах оказывается существенным эффект, обусловленный близкими диполь-дипольными взаимодействиями. При достаточно больших оптических плотностях среды в элементе объема с характерным размером порядка длины волны света должно содержаться много атомов. Однако для сохранения традиционного описания взаимодействия атомарных диполей необходимо, чтобы расстояние между соседними атомами было достаточно большим для исключения возможности перекрытия их электронных орбиталей [2]. В связи с этим система уравнений (1) преобразована с учетом влияния локальных полей, создаваемых дипольными атомами, т.е. действующее на атомы слоя световое поле  $E'(t)$  содержит поправку Лоренца. С влиянием переходов, соседних с резонансным, связана возможность квадратичного штарковского эффекта, развивающегося в условиях эффективного поля с учетом локальной поправки. Тогда штарковское уширение резонансного перехода в представлении обобщенной двухуровневой схемы описывается фазовым сдвигом резонансной поляризованности, пропорциональным  $\Delta\alpha |E'|^2/\hbar$ .

### Бистабильность в отражении света

Возможность бистабильности в предложенной модели, как правило, исследуется для стационарной задачи, когда интенсивность излучения, зондирующего слой красителя, изменяется крайне медленно по сравнению с временами релаксации двухуровневой системы и поэтому ее можно считать непрерывной во времени. Это означает, что при данном значении интенсивности в среде слоя устанавливается равновесие, характеризуемое определенными значениями материальных переменных. Интенсивности приложенного поля ( $Y$ ) и прошедшего поля ( $X$ ) удобно нормировать по мощности поля, насыщающего резонансное поглощение в

пленке:  $Y_0 = \frac{\mu}{\hbar} \sqrt{T_1 T_2} E_0^2$ ,  $X = \frac{\mu}{\hbar} \sqrt{T_1 T_2} |E_s|^2$ , здесь  $E_0$  – амплитуда приложен-

ного стационарного поля,  $E_s$  – равновесная амплитуда прошедшего в слой поля. Изменением интенсивности  $Y_0$  обусловлен переход среды к новому равновесному состоянию. При циклическом изменении интенсивности излучения стационарный отклик нелинейной среды может демонстрировать гистерезис. В рамках использованных представлений связь интенсивностей прошедшего в слой поля  $X$  и действующего в пленке (с учетом локальной поправки) поля  $X'$  с интенсивностью приложенного поля  $Y_0$  связаны следующими соотношениями:

$$\frac{4\eta Y_0}{(1+\eta)^2} = X' \left[ 1 - \gamma \kappa (\Delta - \beta X') + \frac{\kappa}{1+\eta} \right]^2 + \kappa^2 X' \left( \frac{\Delta - \beta X'}{1+\eta} + \gamma \right)^2, \quad (2)$$

$$X = X' [1 - \gamma \kappa (\Delta - \beta X')]^2 + (\kappa \gamma) X', \quad \kappa = \frac{\kappa_0}{1 + \Delta^2 + X'}, \quad \kappa_0 = \frac{\mu^2 \omega_0 N l}{\varepsilon_0 c \hbar} T_2.$$

Здесь  $\beta = 2\pi\Delta\alpha\varepsilon_0\hbar/\mu^2T_2$  – параметр резонансной нелинейности рефракции,  $\gamma = c/3\omega(1+\eta)l$  – лоренцевский коэффициент, обусловленный учетом близких полей атомарных диполей,  $\Delta = (\omega - \omega_0)T_2$  – нормированная по параметру ширины линии ( $1/T_2$ ) отстройка частоты приложенного поля от частоты резонанса поглощения  $\omega_0$ ,  $\eta = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$  – относительный коэффициент преломления. Учет квазирезонансной поляризации во временному масштабе, превышающем времена поперечной и продольной релаксации, как и в рассмотренных выше случаях, влечет за собой появление в соотношении для мощности внешнего и проходящего поля компонент, дополнительных по отношению к френелевской. Этими компонентами описывается, во-первых, насыщение поглощения, во-вторых, зависимость пропускания поверхностного активного слоя от интенсивности излучения из-за изменений в характере его фазочувствительности (дисперсионной способности, характер которой также зависит от интенсивности). Они обусловлены влиянием поглощения в квазирезонансных переходах на поляризуемость атомов, а также влиянием близких полей дипольных атомов.

Физически выражения (2) можно рассматривать как систему уравнений, описывающую нелинейные свойства слоя оптической среды в приближении среднего поля для условий, при которых поглощение и положение его резонанса на шкале частот особым образом зависят от интенсивности проходящего поля. На основе (2) можно выразить нелинейную характеристику пропускательной способности тонкой пленки, представляемой здесь планарным слоем резонансных атомов. Одновременно система уравнений (2) представляет расчетный аналог дисперсионной зависимости пропускания слоя в стационарном режиме. Полученные алгебраические соотношения удобно рассчитывать параметрически, то есть, полагая одну из искомых величин ( $X'$ ) линейным, неотрицательным, непрерывно нарастающим параметром.

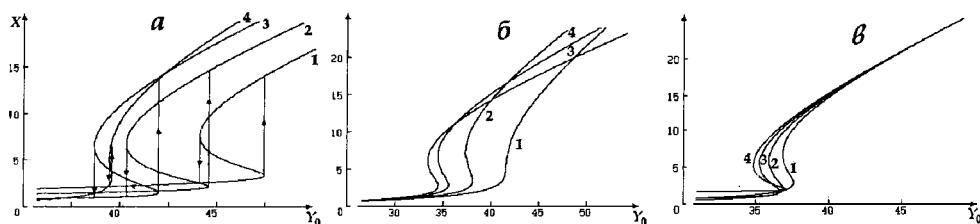


Рис. 1. Зависимость интенсивности прошедшего поля

от интенсивности приложенного поля (в относительных единицах):

$\Delta=0$  (кривая 1),  $0.5(2)$ ,  $1.0(3)$ ,  $2.0(4)$ ,  $\kappa_0=2.5$ ,  $\beta=0.1$  (a);  $\beta=0(1)$ ,  $0.04(2)$ ,  $0.08(3)$ ,  $0.1(4)$ ,  $\gamma=0.1$  (b);  $\gamma=0.02$  (1),  $0.06(2)$ ,  $0.1(3)$ ,  $0.15(4)$ ,  $\beta=0.04$  (v),  $\kappa_0/(1+\Delta^2)=1.1$  (b, v),  $\eta=1.56$

Значения поглощения и параметров нелинейности приповерхностного слоя азокрасителя, возбуждаемого излучением гелий-неонового лазера, оценивались на основе данных [13]. Рассчитанные нелинейные зависимости интенсивности прошедшего в пленку поля в определенной зоне изменения  $Y_0$  неоднозначны (рис. 1), то есть демонстрируют бистабильность. Диапазон интенсивности, в котором проявляется бистабильность (расчетная ширина гистерезиса), зависит от величины нормированной частотной отстройки  $\Delta$  (на рис. 1, *a* направления гистерезисных скачков указаны стрелками). Заметно, что ширина гистерезиса в зависимости от отстройки  $\Delta$  явно характеризуется оптимумом (рис. 1, *a*). Подчеркнем также, что при этом оба фактора, вызывающие фазовое смещение в нелинейном отклике слоя на резонансное поле излучения, оказываются существенными – появление бистабильного изгиба на кривых и размер области бистабильности зависят от параметров нелинейной рефракции, обусловленной квазирезонансной поляризуемостью и от следствий диполь-дипольного взаимодействия (рис. 1, *b*, *v*). Ширина гистерезиса для пленок на основе веществ с большими значениями дефекта поляризуемости увеличивается, при этом должен снижаться уровень мощности, необходимый для появления бистабильного изгиба на нелинейной характеристике (рис. 1, *b*).

Учет дополнительной нелинейной компоненты, обусловленной остаточной поверхностью поляризованностью в граничном слое, также приводит к нетривиальному результату – в поле отраженной волны возникает сверхизлучательная составляющая. Стационарное отражение приобретает резонансный характер и зависит от интенсивности приложенного поля. Нелинейную зависимость энергетического коэффициента эффективного отражения можно также оценить на основе расчета системы уравнений (2). При этом используется следующее соотношение для его зависимости от нормированной интенсивности  $X'$ , сформулированное из условия связи амплитуд отраженной и прошедшей волн системы уравнений (1):

$$R = \frac{\{r + \kappa[1/(\eta+1) - r\gamma(\Delta - \beta X')]\}^2 + \kappa^2[(\Delta - \beta X')/(\eta+1) + r\gamma]^2}{\{1 + \kappa[1/(\eta+1) - \gamma(\Delta - \beta X')]\}^2 + \kappa^2[(\Delta - \beta X')/(\eta+1) + \gamma]^2}, \quad (3)$$

где  $r = (\eta-1)/(\eta+1)$ . Зависимости, полученные в результате расчета системы уравнений (2) и соотношения (3), изображены на рис. 2. Нужно отметить, что влияние поверхности поляризованности активных атомов в слое на диэлектрическую проницаемость для резонансного поля приводит к росту эффективного отражения. При этом коэффициент отражения отличен от френелевского и снижается по мере роста интенсивности приложенного поля.

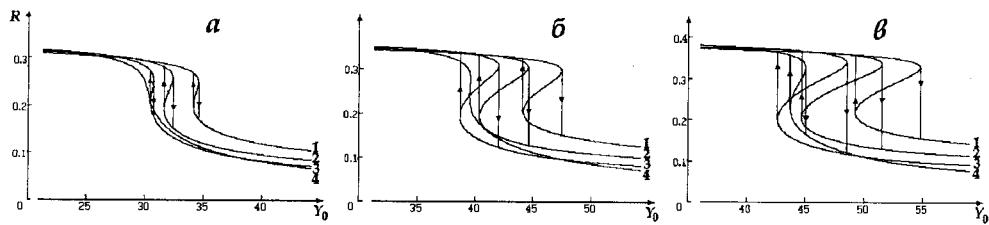


Рис. 2. Зависимость резонансного коэффициента отражения граничного слоя от интенсивности приложенного поля (в относительных единицах):  
 $\Delta=0.1$  (кривая 1), 0.5(2), 1.0(3), 1.5(4),  $\kappa_0=1.5$  (а);  $\Delta=0.1(1)$ , 0.5(2), 1.0(3), 2.0(4) (б, в),  
 $\kappa_0=2.5$  (б), 3.2 (в);  $\beta=0.05$ ,  $\gamma=0.1$ ,  $\eta=1.56$

Резонансное отражение также при определенном уровне плотности активных центров на шкале зависимости от  $Y_0$  характеризуется гистерезисным скачком. При этом граничный слой может резко просветляться и по величине отражения ассимптотически приближаться к френелевскому уровню. В этом случае резонансное изменение величины отражения возрастает для более плотных слоев, при этом мощность приложенного поля, необходимая для наблюдения гистерезиса, должна быть большей. Судя по кривым 1 – 4 на рис.2, б и в, размер гистерезисного скачка и расстояние между точками поворота кривых (ширина гистерезисной петли на характеристике отражения) также проявляют дисперсионный оптимум, то есть их зависимости от частотной отстройки имеют резонансный характер.

Еще одним эффектом, сопровождающим резонансное отражение когерентных потоков поля световых волн от граничного слоя с поверхностной поляризованностью, является возникновение нелинейного фазового сдвига у отраженного поля. Волны прошедшая, отраженная и действующая на активные центры слоя в системе уравнений (1) представлены комплексными функциями. Для установившейся величины фазовой переменной  $\varphi_s$  поля (в его комплексном представлении  $E_r(t) = \tilde{E}(t) e^{i\varphi(t)}$ ) в зависимости от равновесного значения  $X'$  также из системы уравнений (1) несложно получить:

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \kappa \frac{(\Delta - \beta X') / (\eta + 1) + r\gamma}{r + \kappa [1/(\eta + 1) - r\gamma(\Delta - \beta X')]} \quad (4)$$

Результаты расчета зависимости фазового смещения от мощности приложенного поля, проведенные на основе (2), (4), указывают на общие особенности нелинейных кривых, таких, как нарастание  $\varphi_s$  с увеличением мощности и возможность гистерезисных скачков фазы (рис. 3).

Динамическим (то есть проявляющимся на временной шкале в ходе эволюции светового поля) аспектом такой закономерности отклика является возможность наблюдения автомодуляционного дрейфа частоты излучения в лазерном импульсе, отраженном граничным слоем, который обладает нелинейной поляризуемостью. Это явление, получившее название “чирпа”, в последнее время активно исследуется в связи с разработ-

кой методов получения особо коротких импульсов в твердотельных лазерах. Бросок частоты излучения, в диапазоне гистерезисного изменения фазы, “не следящий” за интенсивностью, способен повлечь за собой нарушение фазового условия генерации излучения в резонаторе и безынерционно изменить добротность резонатора в момент формирования импульса, эффективно сократив его длительность.

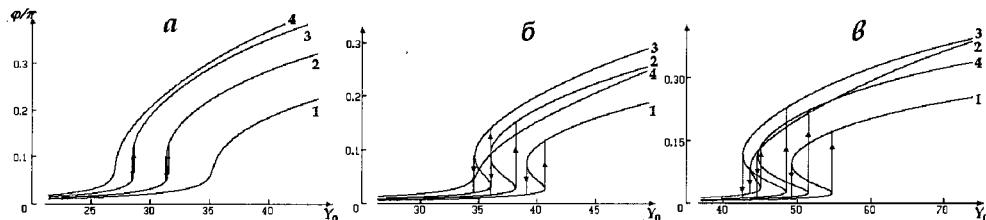


Рис. 3. Зависимость сдвига частоты от интенсивности приложенного поля  
(в относительных единицах):

$\Delta=0.1$  (кривая 1), 0.5(2), 1.0(3), 1.5(4),  $\kappa_0=1.5$ ,  $\beta=0.1$  (а);  $\Delta=0.1(1)$ , 0.5(2), 1.0(3),  
2.0(4),  $\beta=0.05$  (б, в),  $\kappa_0=2.0$  (б), 3.0 (в);  $\gamma=0.1$ ,  $\eta=1.56$

### Заключение

На основе сформулированных в работе соотношений можно количественно оценить следствия эффекта резонансного отражения излучения тонким поверхностным слоем с нелинейной поляризованностью. Расчет совершен для поверхностного слоя нелинейной среды, параметры которой, в основном, соответствуют спектральным и оптическим характеристикам азокрасителя в полимере. Нелинейное отражение, способное в определенном диапазоне параметров слоя и характеристик приложенного поля проявлять свойство гистерезиса, может быть использовано для разработки пассивных модулирующих устройств. Как и резкий скачок резонансного пропускания тонкого слоя, гистерезисный скачок фазы, приводящий к динамичному смещению частоты излучения и образованию “чирипированного” лазерного импульса, представляет интерес именно с точки зрения их использования в целях внутрирезонаторной модуляции добротности. Результаты расчетного анализа резонансного отражения могут быть также полезны при разработке методов диагностики нелинейных свойств планарных оптических пленок. В таком случае по значениям отклонения отражения, регистрируемого в области оптического резонанса, от значений, характерных для френелевских величин, можно оценивать параметры слоев или систем на их основе.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Afanas'ev, A.A. Coherent and incoherent solitons of self-induced transparency in dense resonant media / A.A. Afanas'ev [et al.] // J. Opt. Soc. Amer. B. – 2002. – Vol. 19. – № 4. – P. 911–919.
2. Каплан, А.Е. Поведение локальных полей в нанорешетках из сильно взаимодействующих атомов:nanoстраты, гигантские резонансы, “магические” числа и оптическая бистабильность / А.Е. Каплан, С.Н. Волков // УФН. – 2009.– Т. 179. – № 5.– С. 539–547.

3. *Hehlen, M.P.* Cooperative optical bistability in the dimer system  $\text{Cs}_3\text{Y}_2\text{Br}_9 : 10\% \text{ Yb}^{3+}$  / M.P. Hehlen [et al.] // J. Chem. Phys. – 1996. – Vol. 104. – № 4. – P. 1232–1244.
4. *Malyshev, V.* Mirrorless optical bistability of linear molecular aggregates / V. Malyshev, P. Moreno // Phys. Rev. A. – 1996. – Vol. 53. – № 1. – P. 416–423.
5. *Kuditcher, A.* Intrinsic Bistability of Luminescence and Stimulated Emission in Yb- and Tm-Doped Glass / A. Kuditcher [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 84. – № 9. – P. 1898–1901.
6. *Malyshev, V.A.* Intrinsic optical bistability of an ultrathin film consisting of oriented linear aggregates / V.A. Malyshev, H. Glaeske, K.-H. Feller // J. Chem. Phys. – 2000. – Vol. 113. – № 3. – P. 1170–1176.
7. *Glaeske, H.* Mirrorless optical bistability of an ultrathin glassy film built up of oriented J-aggregates: Effects of two-exciton states and exciton – exciton annihilation / H. Glaeske, V.A. Malyshev, K.-H. Feller // J. Chem. Phys. – 2001. – Vol. 114. – № 5. – P. 1966–1969.
8. *Bowden, C.M.* Near-dipole-dipole effects in dense media: Generalized Maxwell-Bloch equations / C.M. Bowden, J.P. Dowling // Phys. Rev. A. – 1993. – Vol. 47. – № 2. – P. 1247–1251.
9. *Afanas'ev, A.A.* Local-field effects in a dense ensemble of resonant atoms: Model of a generalized two-level system / A.A. Afanas'ev [et al.] // Phys. Rev. A. – 1999. – Vol. 60. – № 2. – P. 1523–1529.
10. *Гадомский, О.Н.* Эхо-спектроскопия поверхности / О.Н. Гадомский, Р.А. Власов. – Мн. : Навука і тэхніка, 1990. – 216 с.
11. *Захаров, С.М.* Нелинейная резонансная оптика тонких пленок / С.М. Захаров // ЖЭТФ. – 2002. – Т. 118. – С. 2234–2247.
12. *Тимошенко, Е.В.* Сверхизлучательная трансформация световых импульсов при отражении граничным нелинейным слоем / Е.В. Тимошенко, В.А. Юрьевич // Доклады Национальной АН Беларуси. – 2010. – Т. 54. – № 6. – С. 56–61.
13. *Томов, А.В.* Планарные полимерные оптические волноводы поликарбонат/азокраситель / А.В. Томов // Проблемы прикладной оптики ; под ред. В.А. Карпенко, В.П. Редько. – Могилев, 2000. – С. 225–232.
14. *Benedict, M.* Coherent reflection as superradiation from the boundary of a resonant medium / M. Benedict, E.D. Trifonov // Phys. Rev. A. – 1988. – Vol. 38. – № 6. – P. 2854–2862.

Поступила в редакцию 12.04.2011 г.

УДК 616.1+612.397.23+612.123+612.111.6+612.111.19+616-008.9+612.015

*А.Н. ОСИПЕНКО*

## К ВОПРОСУ ОБ УЧАСТИИ ЖИРНЫХ КИСЛОТ В АТЕРОГЕНЕЗЕ

*В обзоре проведен анализ сведений о роли отдельных жирных кислот в атерогенезе. Приводятся результаты экспериментальных исследований в этой области.*

## Введение

Изучению механизмов атеросклероза посвящены многочисленные публикации [1-14]. Для углубления представлений об атерогенезе используются различные методологические подходы, что позволило достичь значительного успеха в понимании стадий и механизмов этого процесса. Вместе с тем до настоящего времени существует много вопросов, касающихся различных этапов формирования атеросклероза, а противоречивость теорий требует дальнейшего исследования наиболее вероятных участников этого процесса [1-5, 8, 9, 11-18].

### 1. Роль баланса между мононенасыщенными и полиненасыщенными жирными кислотами в атерогенезе

Нарушение баланса жирных кислот (ЖК) было обнаружено при анализе эфиров холестерина (ЭХС), извлеченных из плазмы крови животных, испытывающих дефицит эссенциальных полиненасыщенных жирных кислот (ПНЖК). Было установлено увеличение относительного уровня триеновой дицисатериновой кислоты, уменьшение уровня линоловой кислоты и увеличение мононенасыщенных пальмитолеиновой и олеиновой ЖК. При этом не отмечалось изменений в содержании насыщенных пальмитиновой и стеариновой кислот [12]. Для объяснения этого явления выдвинуто предположение о том, что в основе изменения баланса жирных кислот при дефиците ПНЖК лежит увеличенный синтез мононенасыщенных  $\omega$ -9 жирных кислот и  $\omega$ -9 триеновой дицисатериновой кислоты. Было показано, что синтез клетками эндогенных  $\omega$ -9 мононенасыщенных жирных кислот и дицисатериновой ЖК при внутриклеточном дефиците эссенциальных  $\omega$ -3 и  $\omega$ -6 жирных кислот является процессом адаптации, позволяющим клеткам существовать при невозможности активного поглощения клетками эссенциальных ПНЖК [9, 15, 18].

В основе этого процесса лежит активация ферментов десатураз. Так, на клеточных культурах было показано непосредственное влияние ПНЖК на активность этих клеточных ферментов. При этом дицисатериновая кислота является специфической полиненасыщенной кислотой, уровень которой возрастает у животных при дефиците эссенциальных ПНЖК. При достаточном количестве  $\omega$ -3 и  $\omega$ -6 жирных кислот в рационе синтез  $\omega$ -9 дицисатериновой ЖК оказывается конкурентно ингибионным [9, 12, 15, 17, 18].

При анализе плазмы крови больных с ишемической болезнью сердца (ИБС) и атеросклерозом установлены схожие изменения в балансе жирных кислот, выделенных из фракции эфиров холестерина плазмы крови. Эти изменения также сопровождались увеличением относительного уровня триеновой дицисатериновой и мононенасыщенных пальмитолеиновой и олеиновой кислот, уменьшением уровня линоловой ЖК. Увеличение относительного уровня насыщенных жирных кислот ЭХС (пальмитиновая и стеариновая), в отличие от их мононенасыщенных форм (оле-

иновая и пальмитолеиновая кислоты), как и при дефиците ПНЖК, не наблюдалось [12].

Возник вопрос, является ли накопление дигоно- $\gamma$ -линовеновой кислоты у пациентов с атеросклерозом следствием существующего у них дефицита эссенциальных ПНЖК. Кроме того, было показано, что при фатальном инфаркте миокарда отмечается еще более высокий относительный уровень олеиновой ЖК, низкий уровень линоловой кислоты и пониженный относительный уровень арахидоновой ЖК в ЭХС плазмы крови. Была установлена отрицательная корреляция между мононенасыщенными кислотами и линоловой кислотой в составе ЭХС. Этот динамический баланс между эссенциальной ПНЖК и мононенасыщенными кислотами при атеросклерозе, по мнению некоторых авторов, является следствием различного влияния этих соединений на клеточные десатуразы [12].

В некоторых исследованиях отмечалось, что у животных увеличение в диете количества олеиновой кислоты ускоряет появление признаков дефицита эссенциальных ПНЖК и вызывает увеличение уровня холестерина плазмы крови. Кроме того, мононенасыщенные жирные кислоты могут препятствовать нормальному метаболизму линоловой и линоловеновой кислот, в основном не путем влияния на процессы десатурации, а замещая их в sn-2 положении фосфолипидов [12]. Следует отметить, что, по нашим данным, даже очень высокое относительное содержание олеиновой кислоты в липидах плазмы крови не приводит к достоверному увеличению этой кислоты в эритроцитарных фосфолипидах [6].

Тем не менее, оказалось трудным признать, что изменения в составе жирных кислот эфиров холестерина возникают в связи с низким алиментарным поступлением ПНЖК, так как они выявлялись у различных пациентов вне зависимости от того, на какой диете они находились [12]. Кроме того, некоторые гиполипидемические препараты (производные фиброеевой кислоты) значительно увеличивают активность 9-десатуразы [15].

В целом по результатам ряда исследований высказаны аргументы в пользу того, что существует множество факторов, способных вызвать в животном организме увеличение скорости образования олеиновой ЖК из стеариновой и пальмитолеиновой из пальмитиновой путем стимулирования десатуразной активности. В числе таких факторов названы переедание, углеводная диета, инсулин, но не белки или насыщенные жиры [9, 12, 15, 18].

Было показано, что потребность животных в эссенциальных ПНЖК может изменяться в зависимости от числа потребляемых калорий, количества потребляемых углеводов и белков, а так же от уровня андрогенов, инсулина и холестерина. Сообщалось, что потребность в ПНЖК может зависеть от наличия стрессов, высокого содержания в рационе кальция, низкого содержания цинка и магния [12].

## 2. Роль насыщенных жирных кислот липопротеидов плазмы крови в атерогенезе

Тем не менее, ни одно из вышеупомянутых исследований не объясняет установленный в некоторых работах [3, 6] факт увеличения уровня насыщенных жирных кислот (НЖК) общих липидов плазмы крови у пациентов с ИБС и атеросклерозом.

Кроме того, другие авторы отмечали значительное увеличение риска развития атеросклеротических осложнений у лиц, в основном употребляющих с пищей НЖК. Так, в некоторых литературных источниках содержится информация о том, что добавление в пищу 1 г. пальмитиновой кислоты способствует большему повышению в крови уровня холестерина, чем добавление 2 г. ненасыщенных жирных кислот – его снижению [9, 10].

Для объяснения проатерогенного влияния НЖК некоторыми учеными высказана мысль, что насыщенные жиры хотя и не обладают свойством напрямую снижать относительный уровень эссенциальных ПНЖК крови, но могут влиять на потребность организма в ПНЖК, повышая общую калорийность пищи [12].

Кроме того, были опубликованы и еще более отличные точки зрения. Так, высказывалось мнение [10], согласно которому высокой способностью понижать уровень липидов в плазме крови обладает именно олеиновая ЖК, менее активна в этом плане линолевая и еще меньшей активностью обладает линоленовая ПНЖК. Следовательно, триглицериды, содержащие линолевые и особенно линоленовые ЖК, гидролизуются с меньшей скоростью, а значит, липопротеиды более длительно циркулируют в крови. В этом случае в крови могут накапливаться окисленные липопротеиды низкой плотности (ЛПНП), являющиеся эндогенными патогенами. В связи с этим ряд исследователей считает биологически необоснованным использование  $\alpha$ -линоленовой кислоты с целью профилактики атеросклероза [10]. Что, однако, противоречит результатам исследования, в котором анализировалась связь между количеством суточного потребления  $\alpha$ -линоленовой кислоты и риском фатального и нефатального инфаркта. Установлено, что у пациентов, в суточном рационе которых было высокое содержание  $\alpha$ -линоленовой кислоты, риск внезапной смерти был на 40% ниже. Сообщалось о дозозависимой взаимосвязи между употреблением  $\alpha$ -линоленовой кислоты и риском развития фатального инфаркта миокарда [8].

Кроме того, были представлены данные, что олеиновая кислота является ингибитором перекисного окисления липидов – одного из ведущих, по мнению большинства исследователей, факторов атерогенеза [10].

Указывалось, что олеиновая кислота активирует рецепторное поглощение клетками ЖК в составе липопротеидов очень низкой плотности (ЛПОНП) и активирует гидролиз триглицеридов. Преинкубация фибробластов с арахидоновой и эйкозапентаеновой ПНЖК выявляет сходную, но более выраженную активность. Напротив, чем выше в триглицеридах уровень пальмитиновой кислоты, тем медленнее происходит по-

глощение клетками липопротеидов очень низкой плотности (ЛПОНП), формируя гипертриглицеридемию. Вслед за ЛПОНП клетки медленно поглашают и липопротеиды низкой плотности (ЛПНП) переносящие ЖК в составе эфиров холестерина [9, 10]. Следствием блокады рецепторного эндоцитоза ЛПНП является повышение содержания холестерина в сыворотке крови. По утверждению ряда авторов, одновременно должно возрастать содержание ПНЖК в составе ЭХС плазмы крови, а в клетках формироваться их дефицит [9]. Тем не менее, по нашим данным, относительный уровень полиненасыщенных ЖК в липидах плазмы крови, за исключением дигоно- $\gamma$ -линоленовой кислоты, у пациентов с атеросклерозом не выше, чем у здоровых добровольцев. Что касается линоловой ПНЖК липидов плазмы крови, то ее относительный уровень существенно ниже, чем у здоровых добровольцев [6].

Кроме того, в других работах есть указание, что постгепариновая липопротеидлипаза активнее гидролизует те триглицериды, у которых у второго атома углерода глицерина этерифицирована не олеиновая мононенасыщенная жирная кислота, а линоловая [1]. Также существуют данные, что повышенное образование эфиров холестерина с насыщенными и мононенасыщенными ЖК увеличивает время их нахождения в кровотоке в составе ЛПНП, вследствие чего увеличивается количество их окисленных форм и развивается гиперхолестеринемия [5].

В поддержку мнения об олеиновой кислоте как о веществе, препятствующем развитию атеросклероза, приводятся сведения о позднем развитии атеросклероза у населения, в рацион которого входит значительное количество оливкового масла [10]. В этой связи некоторые исследователи полагают, что олеиновая ЖК является наилучшим вариантом для замещения избытка НЖК в пище людей из регионов с низким содержанием эссенциальных ПНЖК в рационе [9].

По-видимому, для того, чтобы объяснить отсутствие значительного отрицательного эффекта со стороны мононенасыщенных жирных кислот при высоком их поступлении с пищей некоторые исследователи предположили, что конкуренция между мононенасыщенными кислотами и ПНЖК в большей степени проявляется, когда мононенасыщенные ЖК синтезируются в организме, чем в том случае тогда, когда они поступают с пищей. При этом лишь небольшая часть этих кислот достигает внутриклеточных зон, в которых происходят процессы десатурации и этерификации [12].

### 3. Роль полиненасыщенных жирных кислот различных классов в атерогенезе

В последние годы широко обсуждается роль  $\omega$ -3 и  $\omega$ -6 полиненасыщенных жирных кислот в профилактике атеросклероза и ишемической болезни сердца. Эссенциальность этих ЖК определяется тем, что они являются производными незаменимых линоловой и  $\alpha$ -линоленовой кислот. Кроме того, показано, что значительное потребление  $\alpha$ -линоленовой ЖК не приводит к

значительному увеличению  $\omega$ -3 докозагексаеновой и эйкозапентаеновой кислот в плазме крови [17]. Оба типа полиненасыщенных ЖК принимают участие в важнейших физиологических процессах, формируя эйкозаноиды (простагландины, лейкотриены и т.п.). При этом принято считать, что свободные  $\omega$ -6 кислоты в основном трансформируются в  $\omega$ -6 эйкозаноиды, которые в основном являются агонистами сигнальных рецепторов, поддерживающих местное и системное воспаление. Так, синтезируемые из арахидоновой кислоты (полиненасыщенной  $\omega$ -6 кислоты) с участием фермента 5-липооксигеназы лейкотриены являются провоспалительными медиаторами. Вторая группа веществ – производных арахидоновой ЖК, поддерживающих местное и системное воспаление – это простагландины, синтезируемые с помощью фермента циклооксигеназы [8, 11]. Метаболизм производных арахидоновой кислоты контролируется по механизму обратной связи при достаточном поступлении в организм  $\omega$ -3 ПНЖК. Последние конкурируют с арахидоновой ЖК за включение в состав клеточных мембран [8, 15, 17, 18]. Считается, что  $\omega$ -3 ПНЖК преимущественно являются предшественниками эйкозаноидов и других биологически активных веществ с противовоспалительными свойствами. Показано, что повышенное содержание в биологических жидкостях и тканях  $\omega$ -3 ПНЖК сопровождается снижением синтеза веществ с провоспалительными свойствами (фактора некроза опухоли, интерлейкина 1, провоспалительных лейкотриенов и простагландинов) [11]. Особенно большое значение имеет факт ингибирования  $\omega$ -3 ПНЖК метаболизма арахидоновой кислоты в тромбоксан  $A_2$  усиливающего тромбогенный потенциал цельной крови и сосудистой стенки. При повышенном содержании  $\omega$ -6 ПНЖК и высокой активности фермента 5-липоксигеназы формируется большое количество провоспалительных эйкозаноидов, которые усиливают хроническое воспаление интимы сосуда, сосудистую проницаемость, миграции и сократительную активность ГМК. Связь между активацией метаболизма арахидоновой кислоты по 5-липооксигеназному пути и прогрессированием атеросклероза была установлена в ряде экспериментальных моделей. Выявлено, что примерно у 6% населения имеется полиморфизм гена 5-липооксигеназы, который ассоциирован с более ранними атеросклеротическими изменениями сосудистой стенки. Эпидемиологические исследования так же показали, что население, употребляющее продукты с высоким содержанием  $\omega$ -3 ПНЖК, имеет более низкую смертность от сердечно-сосудистых заболеваний [8, 9, 11].

Некоторые исследователи связывают воспалительный процесс в стенках артерий с дефицитом эссенциальных ПНЖК и вызванным этим синдромом патологической компенсации, при котором организм синтезирует эйкозаноиды из  $\omega$ -9 дигомо- $\gamma$ -линоленовой ПНЖК, синтезируемой в животных клетках из олеиновой кислоты. По их мнению, именно эта ЖК может активировать сокращение гладкомышечных клеток (ГМК), инициировать гиперагрегацию тромбоцитов и поддерживать воспаление [9]. Однако в других литературных источниках есть указания на то, что  $\omega$ -9 жирные кислоты не могут служить в качестве субстрата для синтеза эйкозаноидов, а синтез простагландинов и

тробоксанов группы 1 осуществляется за счет  $\omega$ -6 дигомо- $\gamma$ -линоленовой ПНЖК являющейся метаболитом  $\omega$ -6 линоловой [18].

В целом необходимо отметить, что взаимодействия  $\omega$ -3,  $\omega$ -6 и  $\omega$ -9 на уровне клеток остается мало изученным [18]. Кроме того, в наших работах не получено свидетельств существующего дефицита  $\omega$ -3 докозагексановой или  $\omega$ -6 арахидоновой кислот в плазме крови и в эритроцитах у пациентов с ИБС и атеросклерозом [6].

#### 4. Роль жирных кислот сосудистой стенки в атерогенезе

Установленное нарушение баланса ЖК в плазме крови при атеросклерозе вызвало интерес исследователей и к вопросу изучения роли ЖК сосудистых миоцитов в формировании атеросклеротического поражения артериальных сосудов.

Исследования показали, что холестерин, в том числе в форме соединений с жирными кислотами, является преобладающим липидом, накапливающимся в атеросклеротических бляшках [5, 13]. Принято считать, что холестерин практически полностью попадает из кровотока в составе липопротеидов, нативные и модифицированные формы которых обнаруживаются в атеросклеротических сосудах, а не образуется за счет локального синтеза [4, 5, 9, 13]. Причиной накопления холестерина, по мнению ряда исследователей, является отсутствие путей его метаболизма клетками артериальной стенки, кроме образования его эфиров с жирными кислотами и незначительной химической деградации. Процессы этерификации холестерина направлены в основном на образование олеата холестерина [5, 13]. Показано, что свободный ХС активирует микросомальный фермент АХАТ, катализирующий образование эфира жирной кислоты с холестерином. Образовавшиеся эфиры, в отличие от свободного холестерина, не включаются в липидный бислой клеточных мембран, а накапливаются в цитоплазме в виде мелких жировых капель [5].

Кроме того, по данным исследователей, в клетке происходит и замена радикалов жирных кислот в соединениях с ХС. Отмечается, что если с ЛПНП в клетку поступил линолеат ХС, то после его гидролиза образуется олеат, который служит резервной формой хранения ХС. Физиологический смысл такого процесса заключается в том, что олеиновая кислота менее подвержена перекисному окислению, чем линоловая. Отмечается, что стероидное ядро в ЭХС более устойчиво к окислению, чем в свободном холестерине [5].

Тем не менее, по мнению некоторых исследователей, эфиры олеиновой кислоты и холестерина, образованные в клетках атеромы, составляют лишь пятую часть всех эфиров холестерина, остальное составляют его соединения с ненасыщенными ЖК аналогичными ЭХС плазмы крови [13].

По другим литературным источникам, описывающим отличия липидных полосок от атеросклеротических бляшек, отмечается, что первые содержат в основном линоловые эфиры холестерина, образующиеся, как считается, главным образом местно, а основная форма холестерина в бляшке – олеиновые

эфиры, сходные с таковыми в ЛП плазмы крови [4]. Таким образом, факт увеличения доли олеата холестерина, одного из самых атерогенных липидов, в атеросклеротических бляшках трактуется по-разному: и с позиции его активного образования в клетках атеромы, и с позиции активации проникновения липопротеидов в поврежденную атеросклерозом артерию.

Следует также отметить, что современные данные о метаболизме в фиброзной бляшке все еще недостаточны. При гистохимических исследованиях обычно находят повышение активности ферментов в фиброзной бляшке по сравнению с липидными пятнами [2].

Кроме того, сравнительное изучение содержания липидов в бляшках и липидных пятнах показало, что в бляшках содержится значительно больше свободного холестерина по отношению к содержанию ЭХС. Этот факт в определенной степени входит в противоречие с концепцией о происхождении липидов атеромы из плазмы крови, так как наиболее значительная часть холестерина плазмы крови представлена именно фракцией ЭХС, а не свободным холестерином [13]. Тем не менее, нет убедительных данных, чтобы отнести указанные изменения за счет метаболических сдвигов, связанных с образованием и ростом бляшки или являющихся их причиной [2].

Кроме того, несмотря на утвердившееся мнение, что образование атером связано с поступлением липидов крови, остается неясным, под влиянием каких механизмов происходит проникновение липидов через фиброзную покрышку бляшки. Непонятен и тот факт, почему липиды крови устремляются именно в атерому, проникая через довольно плотную фиброзную покрышку, и вместе с тем имеются в незначительном количестве в неизменной интиме, прилежащей к атероматозной бляшке. По одной из версий, увеличение размеров бляшки происходит из-за накопления в ней липидов, поступающих из прорастающих в нее сосудов [7]. Однако, по другому мнению, количество сосудов не может быть настолько велико, чтобы обусловить обильное накопление липидов в бляшке, а формирование атеромы обусловлено деятельностью гладкомышечных клеток (ГМК), пролиферация которых, с последующим накоплением липидов, является исходной в атеросклеротическом процессе [2].

Сообщалось, что в составе липидов, которые экстрагированы из атероматозной массы стенки коронарной артерии, не найдено эссенциальных ПНЖК; атеромы не содержат ни арахидоновую, ни эйкозапентаеновую, ни докозагексаеновую ЖК. Одновременно в составе липидов атером содержится много эндогенно синтезированной клетками  $\omega$ -9 дигоно- $\gamma$ -липоленовой кислоты [13]. По другим данным, при максимальных морфологических изменениях аорты концентрация ПНЖК в ЭХС была значительно выше, чем в неизменной стенке аорты, содержание же насыщенных жирных кислот – ниже [6].

Ряд интересных экспериментов был проведен на животных, склонных к развитию атеросклероза. Так, в исследовании, проводившимся на двух видах голубей, было показано, что прием холестерина усугубляет

атеросклероз, но практически не изменяет состав жирных кислот во фракциях фосфолипидов и глицеридов аорты. Более значительное изменение в аортах птиц, получавших с пищей холестерин, касалось баланса жирных кислот во фракции эфиров холестерина. Так, состав жирных кислот, извлеченных из эфиров холестерина аорт голубей, получавших атерогенную диету (в сравнении с голубями группы контроля), характеризовался увеличением доли олеиновой кислоты. При этом, хотя прием холестерина и не вызывал заметного изменения в балансе жирных кислот фосфолипидов и глицеридов, было отмечено пропорциональное увеличение абсолютного содержания жирных кислот в этих фракциях [14].

Кроме этого, ученые провели исследование процессов включения радиоактивного углерода в состав жирных кислот миоцитов аорты. Для этого проводили перфузию аорт в среде, содержащей ацетат- $1-^{14}\text{C}$ .

Результаты проведенных исследований позволили авторам утверждать, что клетки артерий способны синтезировать жирные кислоты *de novo*, используя в качестве предшественника ацетат. Было показано, что алиментарный холестерин стимулирует синтез всех жирных кислот, но наибольшее влияние он оказывает на синтез мононенасыщенных жирных кислот ЭХС. Кроме того, в атеросклеротических артериях синтезируется большее количество ЖК, чем интактных.

Опираясь на тот факт, что увеличение потребляемого с пищей холестерина не оказывает существенного влияния на баланс ЖК фосфолипидов и неполярных глицеридов, но приводит к существенному увеличению относительного содержания олеиновой кислоты в составе ЭХС, исследователи выдвинули предположение о том, что гиперхолестеринемия стимулирует селективное использование олеиновой жирной кислоты в процессах этерификации холестерина в артериальной стенке [14]. Таким образом, это может являться основной причиной увеличения мононенасыщенных жирных кислот в ЭХС при атеросклерозе.

В наших исследованиях удалось установить, что баланс жирных кислот атеросклеротических бляшек обладает значительным сходством с балансом жирных кислот из обладающих нормальной консистенцией других фрагментов этих же сосудов, и значительно отличается от спектра жирных кислот плазмы крови, как здоровых людей, так и людей с патологиями. Это с одной стороны, указывает на наличие достаточно активного метаболизма клеточных элементов бляшки, направленного на поддержание гомеостазиса, а с другой – на тот факт, что основная часть липидов бляшки образована в результате ферментативных процессов, протекающих в гладкомышечных клетках, а не представлена нативными плазменными липидами [7].

### Заключение

Несмотря на то, что изучению механизмов атеросклероза посвящены многочисленные публикации, а также несмотря на различие в подходах и достигнутый успех в понимании стадий и механизмов атерогенеза, в на-

стоящее время остаются неизвестными ключевые звенья этого процесса.

Требуют дальнейшего изучения причины изменений в обмене липидов и нарушении баланса жирных кислот при атеросклерозе, поскольку до конца не определена про- и антиатерогенная роль отдельных жирных кислот.

Обсуждаются различные точки зрения, касающиеся количественных изменений отдельных жирных кислот в составе липидов крови или артериальной стенке при патологических процессах в артериальных сосудах.

#### *СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ*

1. *Братусь, В.В.* Воспаление и проатерогенные нарушения обмена липопротеинов: взаимосвязь и причинно-следственная зависимость / В.В. Братусь, Т.В. Талаева // Украинский ревматологический журнал. – 2002. – № 1(7). – С. 13–22.
2. *Бодрова, О.В.* Атеросклероз / О.В. Бодрова, Н.П. Ларионова. – М. : Кронпресc, 2000. – 406 с.
3. *Галявич, А.С.* Нарушение обмена жирных кислот при атеросклерозе и возможности его коррекции / А.С. Галявич, Л.Р. Салахова // Кардиология. – 2006. – № 3. – С. 6–9.
4. *Гогин, Е.Е.* Гипертоническая болезнь и ассоциированные болезни системы кровообращения: основы патогенеза, диагностика и выбор лечения / Е.Е. Гогин, Г.Е. Гогин. – М. : Ньюдиамед, 2006. – 254 с.
5. *Климов, А.Н.* Липиды, липопротеиды и атеросклероз / А.Н. Климов, Н.Г. Никульчева. – СПб. : Питер Пресс, 1995. – 304 с.
6. *Осипенко, А.Н.* Нарушение баланса жирных кислот при ангиопатических состояниях различного генеза / А.Н. Осипенко, Н.В. Акулич, А.В. Марочкин, Д.А. Орлов // Молодежь в науке. – 2009: прил. к журн. “Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі”: в 5 ч. Ч. 4. Серия биологических наук; серия медицинских наук / редкол. серии биол. наук : И.Д. Волотовский (гл. ред.), В.И. Парфенов [и др.]; редкол. серии мед. наук: Е.Ф. Конопля (гл. ред.), А.Г. Мрочек [и др.]. – Минск : Беларус. навука, 2010. – С. 414–419.
7. *Осипенко, А.Н.* Баланс жирных кислот в интактных и пораженных атеросклерозом артериях / А.Н. Осипенко, Н.В. Акулич, А.Е. Бирюков // Дисфункция эндотелия: экспериментальные и клинические исследования. Труды VI международной научно-практической конференции. – Витебск : ВГМУ, 2010. – С. 108–111.
8. *Перова, Н.В.* Омега-3 полиненасыщенные жирные кислоты в кардиологии / Н.В. Перова // Кардиоваскулярная терапия и профилактика. – 2005. – № 4. – С. 101–107.
9. *Титов, В.Н.* Жирные кислоты. Физическая химия, биология и медицина / В.Н. Титов, Д.М. Лисицын. – М. ; Тверь : ООО “Издательство «Триада»”, 2006. – 672 с.
10. *Титов, В.Н.* Олеиновая жирная кислота. Олеиновые, линолевые и линоленовые липопротеины низкой плотности / В.Н. Титов // Клиническая лабораторная диагностика. – 2006. – № 6. – С. 3–13.
11. *Шляхто, Е.В.* Полиненасыщенные ω-3 жирные кислоты и их роль в первичной и вторичной профилактике атеросклероза / Е.В. Шляхто, Е.И. Красильникова, Е.Г. Сергеева // Обзоры клинической кардиологии. – 2006. – № 7. – С. 2–12.
12. Abnormal fatty acid composition and human atherosclerosis / K.J. Kingsbury [et al] // Postgrad Med J. – 1974. – Vol. 50. – P. 425–440.

13. *Adams, C.W.* The pathogenesis of atherosclerosis / C.W. Adams // J. Clin Pathol (Suppl). – 1973. – Vol. 26. – P. 38–42.
14. *St. Clair, R.W.* Composition and synthesis of fatty acids in atherosclerotic aortas of the pigeon / R.W. Clair St., H.B. Lofland, T.B. Clarkson // J. Lipid Res. – 1968. – Vol. 9. – P. 739–747.
15. *Кржечковская, В.В.* Мембраннысвязанный цитохром b<sub>5</sub> и метаболизм липидов (реакции, не связанные с участием цитохрома Р-450) / В.В. Кржечковская, А.А. Кубатиев, Ю.И. Наумов // Мембранны, Серия "Критические технологии", ВИНТИИ. – 2004. – № 2(22). – С. 9–21.
16. *Горяев, М.И.* Справочник по газожидкостной хроматографии органических кислот / М.И. Горяев, Н.А. Евдакова. – Алма-Ата : Наука, 1977. – 552 с.
17. Липиды и рак. Очерки липидологии онкологического процесса / М.Г. Акимов [и др.] ; под ред. В.В. Безуглова и С.С. Коновалова. – СПб. : Прайм-ЕВРОЗНАК, 2009. – 352 с.
18. *Назаров, П.Е.* Полиненасыщенные жирные кислоты как универсальные эндогенные биорегуляторы / П.Е. Назаров, Г.И. Мягкова, Н.В. Грода // Вестник МИТХТ. – 2009. – Т. 4 – № 5. – С. 3–19.

Поступила в редакцию 30.05.2011 г.

УДК 633.16 “321”:631.53

*С.С. ПОЗНЯК*

## НАКОПЛЕНИЕ ТЯЖЕЛЫХ МЕТАЛЛОВ РАСТЕНИЯМИ ПШЕНИЦЫ НА РАННИХ ЭТАПАХ РАЗВИТИЯ

*В эксперименте исследовано поступление тяжелых металлов в растения пшеницы, выращиваемые в условиях лабораторного опыта на вариантах с увеличивающейся концентрацией ионов никеля, хрома, кобальта и марганца. Установлено, что при возрастании концентрации ионов тяжелых металлов в питательном растворе значительно увеличивается содержание загрязнителей в проростках растений, причем эффекты прорастания семян могут быть заторможены малыми концентрациями ионов тяжелых металлов.*

### **Введение**

Потенциальные возможности сельскохозяйственных культур могут быть реализованы лишь при соблюдении всех агротехнических приемов и посеве высококачественными семенами. Предпосевной обработкой семян достигается обеззараживание их от возбудителей болезней, передающихся через семенной материал (семенная инфекция), снижение поражения всходов возбудителями болезней, находящимися в почве (почвенная инфекция), повышение энергии прорастания семян и полевой всхожести и стимулирование роста и развития растений.

Наиболее эффективным способом обеззараживания семян является инкустация – обработка семян пленкообразующими составами, обяза-

тельным компонентом которых, кроме протравителя, является прилипатель, в качестве которого в производстве используется NaKMЦ (натриевая соль карбоксилметилцеллюлозы), ПВС (поливиниловый спирт) и препарат М-З, ограничено используются также ЖКУ (жидкие комплексные удобрения) [1].

Известно, что биологический потенциал продуктивности сельскохозяйственных культур формируется на начальных этапах развития растений – до окончания IV этапа органогенеза [2]. В дальнейшем при наступлении неблагоприятных почвенно-климатических условий произрастания в процессе вегетации растений происходит лишь редукция органов, обеспечивающих получение высокого урожая. Состав патогенного комплекса семян включает десятки видов грибов, бактерий и вирусов, среди которых преобладают особенно вредоносные возбудители болезней, такие, как твердая, пыльная и другие виды головни, снежная плесень, гельминтоспориозные и фузариозные корневые гнили, септориоз, фузариоз колоса, различные пятнистости, а также плесневение семян. Прямые потери зерна, вызываемые комплексом этих болезней, как правило, достигают 20%, а при сильной зараженности болезнями и вредителями зерно становится непригодным даже на фуражные цели, в связи с чем химическое обеззараживание посевного материала является одним из обязательных приемов технологии возделывания сельскохозяйственных культур. Несмотря на то, что применяемые в настоящее время протравители содержат в своем составе прилипатель, в процессе обработки семян его потери значительны и достигают 30%, что оказывает существенный вред окружающей среде.

В материалах ЦОС ВИУА содержатся сведения о динамике поступления микроэлементов в озимую пшеницу, где определяли их содержание в фазе кущения (когда отмечаются высокая степень поглощения питательных веществ и интенсивное нарастание биомассы), в фазе выхода в трубку и в фазе созревания (когда заканчивается формирование элементного химического состава растений и их репродуктивных органов). При этом в фазе кущения была выявлена максимальная концентрация всех указанных элементов в корнях и зеленой массе [3].

Следует отметить, что в современной литературе практически отсутствуют сведения о влиянии химических средств защиты на накопление микроэлементов и тяжелых металлов в растениях на начальных этапах развития, хотя понимание этого процесса важно с точки зрения выбора такого препарата с соответствующим действующим веществом, который обеспечит максимальную защиту растения от комплекса болезней и вредителей и создаст наиболее “комфортные” условия для роста и развития растения на ранних этапах органогенеза, что в свою очередь приведет к формированию более высокого потенциала продуктивности [4].

### Материалы и методы исследования

Для определения степени приспособляемости растений к ухудшающимся условиям произрастания в лабораторных условиях были проведены модельные опыты по изучению влияния увеличивающейся концентрации ионов тяжелых металлов – никеля, кобальта, хрома и марганца – на энергию прорастания и лабораторную всхожесть пшеницы. Выбор используемых в работе тяжелых металлов обусловлен несколькими причинами. Во-первых, несмотря на то, что они относятся к элементам со средней и слабой степенью поглощения, их вредоносность при превышении уровня ПДК очень существенна. Во-вторых, изучаемые элементы входят в состав большинства современных фунгицидов для протравливания семян. Поскольку протравливание семян является одним из важнейших элементов интенсивной технологии возделывания сельскохозяйственных культур в окружающую среду через семена может поступить до 30% действующего вещества препарата за счет его потерь, в том числе и избыточные количества изучаемых тяжелых металлов.

*Никель* широко распространен в природе и входит в состав пищевых продуктов. Предположительно, Ni входит в состав фермента уреазы, который участвует в метаболизме азота в растениях. Токсический уровень Ni в листьях растений составляет более 3,0 мг/кг сухого вещества и наиболее выражен на неокультуренных почвах, поскольку в отличие от Cd он не активизирует процесс синтеза металл – связывающего белка.

*Хром* входит в элементный состав растений и оказывает стимулирующее действие на рост и развитие. Концентрации элемента более 1 мг/кг считаются токсичными для растений. В промышленных районах усиливается миграция Cr в пищевой цепи: атмосфера – почва – растение – человек.

*Кобальт*. Содержание Co в тканях растений, произрастающих в естественных условиях, не превышает 1 мг/кг. Для овса, выращиваемого на всех типах почв, элемент является токсичным в концентрациях, превышающих 10–70 мг/кг. На проростки кукурузы он оказывал негативное воздействие в концентрации 25 мг/кг. В опытах с проростками хлопка, овса, гороха и огурцов торможение развития корней более чем на 20% происходит при накоплении Co в почвах более 20 мг/кг. При избыточном накоплении корнями растений Co включается главным образом в транспирационный поток, что приводит к обогащению этим металлом краев и кончиков листьев, которые белеют и затем отмирают.

*Марганец* служит катализатором процесса дыхания растений и принимает участие в фотосинтезе, усиливает гидролитические процессы, в результате чего происходит активизация образования аминокислот и поступление ассимилятов от листьев к корням и другим органам растений. Наиболее чувствительными к токсичному воздействию соединений Mn являются: бобовые, злаки, картофель и капуста.

Выбор методики проведения исследований обуславливался требованиями Государственного стандарта ГОСТ 12038-84 “Семена сельскохо-

зяйственных культур. Методы определения всхожести” [5]. В качестве альтернативных вариантов рассматривалось прорацивание семян в чашках Петри или растильнях. Наиболее целесообразным с точки зрения необходимости дальнейшего проведения эксперимента признан вариант с прорациванием семян с использованием лабораторных стаканов в растворах, а не на твердом субстрате. Такой вариант позволяет отобрать в чистоте 7-дневные проростки растений для их дальнейшего анализа с использованием рентгено-флуоресцентного анализа.

Для фиксации зерен использовались листы фильтровальной бумаги размером 20 × 41 см. На расстоянии 8,5 см от нижнего края простым карандашом проводилась прямая горизонтальная линия. Вдоль этой линии фиксировалось 70 зерен, причем зерна располагались вплотную друг к другу. В качестве прилипателя (клеящего вещества) использовался раствор желатина пищевого. Листы с наклеенными зернами аккуратно вставлялись в лабораторные стаканы емкостью 2 (два) литра, при этом зерна находились между стенками стакана и фильтровальной бумагой.

В соответствии со схемой эксперимента готовились растворы никеля сернокислого ( $\text{NiSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ ), хромового ангидрида ( $\text{CrO}_3$ ), кобальта сернокислого ( $\text{CoSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ ) и марганца сернокислого ( $\text{MnSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ ) с концентрациями 1 ПДК, 2 ПДК и 5 ПДК.

Стаканы с закрепленными зернами аккуратно заливались приготовленными растворами солей таким образом, чтобы зерна плотно прилегали к стеклу и чтобы жидкость немного не доставала до их уровня. При этом жидкость по фильтровальной бумаге постепенно поднималась, захватывая всю поверхность листа. На протяжении всего эксперимента поддерживался достаточно высокий уровень растворов в стаканах. Учет показателей энергии прорастания производился через 72 часа в соответствии с существующими методиками [5]. В ходе эксперимента особое внимание обращалось на количество проросших и не проросших зерен и дополнительно на количество проросших зерен с длиной корня более 1 см. Учет показателей способности к прорастанию производился на 7-й день (через 168 ч). При этом подсчитывалось количество не проросших зерен, количество проросших зерен с длиной корня более 1 см и количество проросших зерен с зелеными ростками.

После учета проросших растений и определения лабораторной всхожести семян 7-дневные проростки отдельно по каждому варианту опыта подвергались сушке при комнатной температуре до воздушно-сухого состояния. При сушке исключалось попадание на растения прямого солнечного излучения. Воздушно-сухие образцы растительности измельчались в лабораторной мельнице, прессовались в таблетки, которые помещались в пакеты из кальки, маркировались и в дальнейшем анализировались на содержание микроэлементов методом рентгено-флуоресцентного анализа на приборе марки РФА-СЕР-01 производства фирмы ElvaX (Украина) с использованием методики выполнения измерений МВИ. МН 3272-2009, утвержденной Белорусским государственным институтом метрологии [6].

Статистическая обработка полученных результатов исследований проводилась с использованием прикладных программных пакетов “MatLab R2007b”, “Statistica for Windows”, версия 6.0 и программного продукта “Microsoft Excel 2003”. Поскольку в ряде случаев предположение о нормальности закона действия распределения остаточных случайных величин в моделях, описанных в дисперсионном анализе, не выполнялось, при статистической обработке автором дополнительно были применены различные непараметрические методы проверки однородности выборок для оценки влияния различных факторов на исследуемый признак с использованием непараметрического критерия Фридмана.

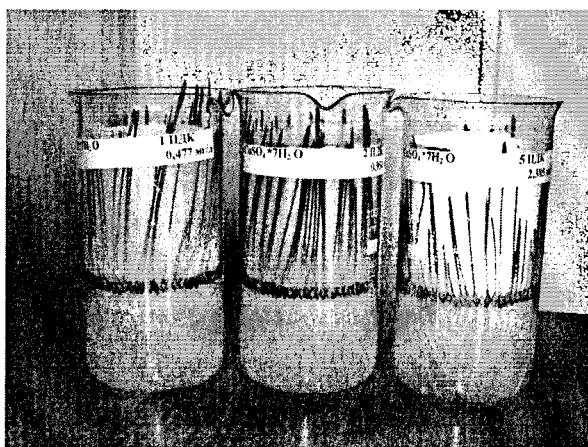
### Результаты и их обсуждение

В результате проведенных исследований установлено, что при возрастании концентрации ионов никеля, кобальта и хрома в растворе энергия прорастания семян пшеницы существенно снижается, особенно при увеличении концентрации  $\text{CoSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$  (табл. 1, рис.). Изменение концентрации марганца в питательном растворе в изучаемом диапазоне достоверно не влияет на энергию прорастания семян.

*Таблица 1*  
Энергия прорастания семян пшеницы в зависимости  
от концентрации загрязнителей, %

|   | Контроль | 1 ПДК | 2 ПДК | 5 ПДК |
|---|----------|-------|-------|-------|
| $\text{NiSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ | 94,3     | 80,0  | 75,7  | 88,6  |
| $\text{CrO}_3$                            | 94,3     | 92,9  | 97,1  | 85,7  |
| $\text{CoSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ | 94,3     | 91,9  | 93,3  | 56,1  |
| $\text{MnSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ | 94,3     | 93,8  | 96,7  | 94,8  |

$\text{HCP}_{05} = 2,9$



Способность семян к прорастанию  
в зависимости от концентрации  $\text{CoSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$

Данные, полученные в ходе эксперимента, свидетельствуют, что эффекты прорастания семян могут быть заторможены малыми концентрациями ионов тяжелых металлов [7]. Ионы цинка и кобальта проявляют более высокий уровень токсичности.

Поскольку одной из важнейших задач исследований являлось изучение интенсивности и динамики накопления загрязнителей в растениях на ранних этапах развития, проростки растений, выращенные на вариантах с различной величиной ПДК тяжелых металлов никеля, кобальта, марганца и хрома, были высушены до воздушно-сухого состояния и проанализированы на содержание химических элементов с использованием рентгено-флуоресцентного анализа [8].

В результате эксперимента установлено, что при увеличении концентрации ионов никеля от 1 ПДК (0,1 мг/л) до 5 ПДК (0,5 мг/л) и хрома от 1 ПДК (0,05 мг/л) до 5 ПДК (0,25 мг/л) в питательном растворе, содержание тяжелых металлов никель, хром и других элементов как в вегетативной массе, так и в корневой системе проростков по вариантам опыта колеблется незначительно (табл. 2).

**Таблица 2**  
**Содержание некоторых химических элементов**  
**в 7-дневных проростках и корневой системе пшеницы**

| Вариант опыта                         | <i>Mn</i> | <i>Fe</i> | <i>Cu</i> | <i>Zn</i> | <i>Sn</i> | <i>Ni</i> | <i>Co</i> | <i>Cr</i> |
|---------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 7-дневные проростки                   |           |           |           |           |           |           |           |           |
| Контроль                              | 6,4±1,3   | 56,2±3,5  | 8,8±1,0   | 32,0±1,8  | 1,3±0,2   | 0,5±0,3   | 0         | 14,1±2,4  |
| 1 ПДК <i>Ni</i>                       | 6,6±1,4   | 62,8±4,1  | 4,3±0,8   | 33,2±2,0  | 0         | 35,5±2,4  | 0         | 2,2±1,0   |
| 2 ПДК <i>Ni</i>                       | 6,3±1,2   | 57,3±3,5  | 6,7±0,9   | 29,8±1,7  | 0         | 12,0±1,3  | 0         | 3,7±1,2   |
| 5 ПДК <i>Ni</i>                       | 5,1±1,1   | 49,2±3,2  | 14,8±1,3  | 26,6±1,6  | 1,1±0,1   | 30,1±2,0  | 0         | 2,3±1,0   |
| Контроль                              | 6,8±1,2   | 68,5±3,7  | 27,1±1,7  | 24,8±1,5  | 0         | 0         | 0         | 0         |
| 1 ПДК <i>Mn</i>                       | 9,5±1,5   | 81,8±4,2  | 21,6±1,6  | 24±1,5    | 1,4±0,2   | 0         | 1,1±0,4   | 0         |
| 2 ПДК <i>Mn</i>                       | 9,2±1,5   | 136±5,3   | 35,9±2,0  | 23,2±1,5  | 0         | 0         | 0         | 3,5±1,2   |
| 5 ПДК <i>Mn</i>                       | 18±2,0    | 41,7±2,8  | 14,1±1,2  | 21,8±1,4  | 0         | 0         | 0         | 0         |
| Контроль                              | 7,5±1,3   | 75,3±3,9  | 21,8±1,5  | 27,8±1,6  | 1,1±0,1   | 0         | 0         | 2,5±1,0   |
| 1 ПДК <i>Co</i>                       | 7,3±1,3   | 44,8±3,1  | 13,4±1,3  | 28,5±1,7  | 0         | 0         | 3,1±0,7   | 0         |
| 2 ПДК <i>Co</i>                       | 5,9±1,2   | 55,7±3,4  | 28,1±1,8  | 27,7±1,6  | 1,4±0,2   | 0         | 20±1,8    | 1,3±0,7   |
| 5 ПДК <i>Co</i>                       | 5,4±1,2   | 101±4,8   | 12,8±1,3  | 25,9±1,6  | 0         | 0         | 4,6±0,9   | 1,9±0,9   |
| Контроль                              | 7,5±1,3   | 75,3±3,9  | 21,8±1,5  | 27,8±1,6  | 1,1±0,1   | 0         | 0         | 2,5±1,0   |
| 1 ПДК <i>Cr</i>                       | 7,1±1,6   | 60,5±4,4  | 26,1±2,1  | 31,6±2,1  | 0         | 0         | 1,1±0,4   | 5,3±1,8   |
| 2 ПДК <i>Cr</i>                       | 6,3±1,2   | 59,2±3,6  | 45,8±2,4  | 28,5±1,7  | 1,1±0,1   | 0,3±0,2   | 0         | 10,2±2,0  |
| 5 ПДК <i>Cr</i>                       | 7,2±1,3   | 64,6±3,8  | 23,3±1,7  | 27,4±1,7  | 0         | 0         | 0         | 2,8±1,1   |
| Корневая система 7-дневных проростков |           |           |           |           |           |           |           |           |
| Контроль                              | 5,6±1,1   | 54,6±3,4  | 6,1±0,8   | 16,9±1,3  | 1±0,1     | 0,6±0,3   | 0         | 4±1,3     |
| 1 ПДК <i>Ni</i>                       | 5,7±1,2   | 63±3,9    | 4,1±0,7   | 19±1,4    | 0         | 16,7±1,6  | 0         | 4±1,3     |
| 2 ПДК <i>Ni</i>                       | 7,8±1,4   | 62,9±3,9  | 7,3±1,0   | 20,6±1,5  | 1,2±0,2   | 15,7±1,5  | 0         | 3±1,2     |
| 5 ПДК <i>Ni</i>                       | 6,1±1,2   | 91,1±4,5  | 7,2±0,9   | 14±1,2    | 1±0,1     | 24,1±1,8  | 1,3±0,4   | 3,3±1,2   |
| Контроль                              | 4,5±1,1   | 46,6±3,2  | 8,6±1,0   | 10,4±1,0  | 1,1±0,2   | 0         | 0         | 1,9±0,9   |
| 1 ПДК <i>Mn</i>                       | 4,3±1,0   | 48,1±3,3  | 15,1±1,4  | 9±1,0     | 1,4±0,2   | 0         | 0         | 2,8±1,1   |
| 2 ПДК <i>Mn</i>                       | 6,2±1,3   | 51,4±3,4  | 12,4±1,2  | 9,3±1,0   | 1,2±0,2   | 0         | 0         | 1,9±0,9   |
| 5 ПДК <i>Mn</i>                       | 12,9±1,9  | 59,1±3,8  | 23,5±1,8  | 13,9±1,2  | 1,2±0,2   | 1,8±0,5   | 0         | 4,1±1,4   |
| Контроль                              | 4,5±1,1   | 46,6±3,2  | 8,6±1,0   | 10,4±1,0  | 0         | 0         | 0         | 1,9±0,9   |
| 1 ПДК <i>Co</i>                       | 3,8±0,9   | 67,6±3,6  | 14,6±1,2  | 14,8±1,1  | 0         | 0         | 5±0,8     | 3,6±1,1   |
| 2 ПДК <i>Co</i>                       | 7,3±1,3   | 77,5±3,9  | 10±1,0    | 22,9±1,4  | 0         | 0         | 26,5±2,0  | 2,5±1,0   |
| 5 ПДК <i>Co</i>                       | 4,7±1,0   | 79,1±3,9  | 14,7±1,3  | 16,5±1,2  | 0         | 0         | 42,5±2,5  | 2,1±0,9   |
| Контроль                              | 7,4±1,3   | 94,2±4,5  | 35,8±2,1  | 23,1±1,5  | 1,1±0,1   | 0         | 0         | 1,4±0,7   |
| 1 ПДК <i>Cr</i>                       | 7,2±1,3   | 50,7±3,3  | 16,9±1,4  | 26±1,6    | 1,3±0,2   | 0         | 0         | 100,4±6,5 |
| 2 ПДК <i>Cr</i>                       | 6,7±1,3   | 94,3±4,5  | 31,7±2,0  | 24,7±1,6  | 1±0,1     | 0         | 0         | 85,1±5,9  |
| 5 ПДК <i>Cr</i>                       | 7,6±1,5   | 70,6±4,2  | 11,7±1,3  | 25,1±1,7  | 1,4±0,2   | 0         | 0         | 88,2±6,5  |
| <i>Mn</i>                             | <i>Fe</i> | <i>Cu</i> | <i>Zn</i> | <i>Sn</i> | <i>Ni</i> | <i>Co</i> | <i>Cr</i> |           |

При возрастании концентрации ионов кобальта в питательном растворе от 1 ПДК (0,1 мг/л) до 5 ПДК (0,5 мг/л) содержание *кобальта* в растительном сырье значительно увеличивалось, особенно в корневой системе; в этих же условиях отмечалось также существенное увеличение содержания *железа*, особенно в вегетативной массе.

С увеличением концентрации ионов марганца в питательном растворе от 1 ПДК (0,1 мг/л) до 5 ПДК (0,5 мг/л) содержание *марганца* увеличивалось в 3 раза, по сравнению с контролем, как в вегетативной массе, так и в корневой системе растений ячменя. Следует также отметить, что в условиях опыта значительно увеличивалось содержание *железа* в вегетативной массе и *меди* в корневой системе.

Полученные нами результаты коррелируют с данными других исследователей, у которых включение в блок химизации пестицидов во всех случаях обеспечивало более низкое содержание меди и цинка, чем на соответствующем фоне удобрений, хотя и превышало их количество в варианте без удобрений и пестицидов [9]. В этих опытах наблюдалась некоторая тенденция увеличения содержания меди, цинка и кобальта в зерне озимой пшеницы, выращенной с применением комплекса средств химизации. При этом содержание меди было наибольшим при использовании минимальных норм средств химизации, и оно снижалось при средних и максимальных нормах практически до уровня контроля. Что касается цинка, то отмечалась тенденция к его увеличению в зерне при максимальных нормах применения. Такая реакция растений на использование цинка и меди определяется тем, что при комплексном применении средств химизации изменяется не столько доступность этих элементов в почве, сколько поглотительная способность растений под влиянием удобрений и пестицидов. Причем она изменяется по-разному для этих элементов, обуславливая, с одной стороны, более интенсивное потребление цинка при повышении норм средств химизации, а с другой – изменение потребления меди при внесении относительно небольших норм удобрений и пестицидов. Содержание других элементов в зерне практически не изменялось, однако было выше ПДК по кадмию и ртути в абсолютном контроле.

В других опытах исследовано поступление меди, цинка и свинца в растения ячменя, выращенные в условиях вегетационного опыта. Внесение тяжелых металлов в почву приводило к аккумуляции их в растениях. По уменьшению поступления в растения металлы образовывали следующий ряд: Zn>> Cu >Pb. При увеличении загрязнения почв и комплексном загрязнении тяжелыми металлами происходило более интенсивное накопление меди и цинка в соломе ячменя, чем в зерне [10].

### Заключение

В результате проведенных исследований установлено, что при возрастании концентрации ионов тяжелых металлов никель, хром, кобальт и марганец в питательном растворе значительно увеличивается содержа-

ние загрязнителей в проростках растений, причем эффекты прорастания семян могут быть заторможены даже малыми концентрациями ионов тяжелых металлов.

Выявленные закономерности повреждающего действия тяжелых металлов на растения на ранних стадиях развития позволяют разработать и внедрить в производство элементы технологий возделывания сельскохозяйственных культур, снижающие подвижность загрязнителей в биосфере и повышающие экологическую безопасность интенсивных технологий возделывания сельскохозяйственных культур.

#### *СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ*

1. *Самсонаў, У.П.* Інкрустацыя насення яравога ячменю/ У.П. Самсонаў, С.С. Пазняк // Весці ААН Беларусі. – 1994. – № 3. – С. 7–10.
2. Биология развития культурных растений / Ф.М. Куперман [и др.]. – М. : Высшая школа, 1982. – 343 с.
3. *Пронина, Н.Б.* Экологические стрессы (причины, классификация, тестирование, физиолого- биохимические механизмы) / Н.Б. Пронина. – М. : Изд-во МСХА, 2000. – 312 с.
4. *Позняк, С.С.* Методологические подходы к исследованию содержания микроэлементов в зерне ячменя в зависимости от применяемых средств интенсификации / С.С. Позняк // Экологический вестник. – 2008. – № 2(5). – С. 110–116.
5. Семена сельскохозяйственных культур. Методы определения всхожести: ГОСТ 12038-84 // База нормативных документов. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.complexdoc.ru>. – Дата доступа : 09.08.2009.
6. *Позняк, С.С.* Методика выполнения измерений массовой доли химических элементов в пробах растительного и животного происхождения методом рентгено-флуоресценции [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [www.belgim.by/uploaded/file/inform\\_01\\_2011\\_1.pdf](http://www.belgim.by/uploaded/file/inform_01_2011_1.pdf). – Дата доступа : 28.03.2011.
7. *Позняк, С.С.* Влияние ионов никеля, хрома и кобальта на энергию прорастания и способность к прорастанию семян ячменя / С.С. Позняк, О.И. Швед // Сахаровские чтения 2007 года: экологические проблемы XXI века : материалы 7-й Международ. научной конф., 17-18 мая 2007 г., г. Минск, Республика Беларусь ; под ред. С.П. Кундаса, С.Б. Мельнова, С.С. Позняка. – Мин. : МГЭУ им. А.Д. Сахарова, 2007. – С. 106.
8. *Позняк, С.С.* Экологическое земледелие : монография/ С.С. Позняк, Ч.А. Романовский ; под общ. ред. к.с.-х.н. С.С. Позняка. – Минск : МГЭУ им. А.Д. Сахарова, 2009.– 327 с.
9. *Ладонин, В.Ф.* Влияние комплексного применения средств химизации на содержание тяжелых металлов в почве и растениях / В.Ф. Ладонин // Химия в сельском хозяйстве. – 1995. – № 4. – С. 32–35.
10. Накопление тяжелых металлов растениями ячменя на черноземе и каштановой почве / Т.М. Минкина [и др.] // Агрехимия. – 2009. – № 10. – С. 53–63.

Поступила в редакцию 03.06.2011 г.

## МАЛАДЫЯ ТАЛЕНТЫ МАГІЛЁЎШЧЫНЫ

Мы публикуем авторские решения двух задач победителя областной математической олимпиады школьников М.В. Луговцова с целью привлечения молодежи к научному творчеству.

**М.В. ЛУГОВЦОВ**

(победитель областной математической олимпиады школьников 2011 г.)

**Формулировка задачи.** Существует ли функция  $f(x)$ , определенная на множестве  $R$  действительных чисел и принимающая действительные значения, для которой при любом действительном  $x$  выполняется равенство

- a)  $f(\sin x) + f(\cos x) = 2$ ?
- б)  $f(\sin x) + f(\cos x) = \sin 2x$ ?

a) *Решение.* Рассмотрим функцию  $f(x) = 2x^2$ . Тогда очевидно, что

$$f(\sin x) + f(\cos x) = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2. \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что множество функций вида

$$f(x) = kx^2 - \frac{1}{2}k + 1,$$

где  $k$  – произвольное действительное число, также удовлетворяют уравнению (1).

*Ответ:* а) да, существует, причем бесконечно много.

б) *Решение.* Пусть  $f(x)$  удовлетворяет уравнению

$$f(\sin x) + f(\cos x) = \sin 2x, \quad \forall x \in R. \quad (2)$$

Тогда, заменяя последовательно аргумент  $x$  в (2) на  $(-x)$ ,  $(\pi - x)$ ,  $(x - \pi)$ , получим

$$f(-\sin x) + f(\cos x) = -\sin 2x, \quad (3)$$

$$f(\sin x) + f(-\cos x) = -\sin 2x, \quad (4)$$

$$f(-\sin x) + f(-\cos x) = \sin 2x. \quad (5)$$

Складывая уравнения (2) и (4), (3) и (5), найдем

$$\begin{aligned} 2f(\sin x) + f(\cos x) + f(-\cos x) &= 0, \\ 2f(-\sin x) + f(\cos x) + f(-\cos x) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) следует, что

$$f(\sin x) = f(-\sin x).$$

Поэтому из (3) получим, что

$$f(\sin x) + f(\cos x) = -\sin 2x. \quad (7)$$

Сравнивая (2) и (7), имеем

$$\sin 2x = -\sin 2x, \forall x \in R$$

или

$$2 \sin 2x = 0, \forall x \in R.$$

Это равенство означает противоречие.

*Ответ:* б) нет, таких функций не существует.

**Формулировка задачи.** Доказать, что если положительные числа  $a, b, c, k, m, n$  удовлетворяют неравенству

$$abc \geq ka + nb + mc, \quad (1)$$

то они удовлетворяют и неравенству

$$a + b + c \geq \sqrt{3}(\sqrt{k} + \sqrt{n} + \sqrt{m}). \quad (2)$$

*Решение.* Для доказательства воспользуемся двумя леммами.

**Лемма 1.** Для любых действительных чисел  $a_1, a_2, b_1 > 0, b_2 > 0$  справедливо неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{b_1 + b_2}.$$

**Лемма 2.** Для любых действительных чисел  $a, b, c$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{3}(a + b + c)^2 \geq ab + bc + ca.$$

Разделим обе части неравенства (1) на число  $abc > 0$ . Имеем

$$1 \geq \frac{k}{bc} + \frac{n}{ca} + \frac{m}{ab} = \frac{(\sqrt{k})^2}{bc} + \frac{(\sqrt{n})^2}{ca} + \frac{(\sqrt{m})^2}{ab}. \quad (3)$$

По лемме 1 из (3) получим

$$\frac{(\sqrt{k})^2}{bc} + \frac{(\sqrt{n})^2}{ca} \geq \frac{(\sqrt{k} + \sqrt{n})^2}{c(a+b)}$$

и

$$1 \geq \frac{(\sqrt{k})^2}{bc} + \frac{(\sqrt{n})^2}{ca} + \frac{(\sqrt{m})^2}{ab} \geq \frac{(\sqrt{k} + \sqrt{n})^2}{c(a+b)} + \frac{(\sqrt{m})^2}{ab} \geq \frac{(\sqrt{k} + \sqrt{n} + \sqrt{m})^2}{ab + bc + ca}. \quad (4)$$

Из неравенства (4) найдем

$$ab + bc + ca \geq (\sqrt{k} + \sqrt{n} + \sqrt{m})^2.$$

На основании леммы 2 имеем

$$\frac{1}{3}(a + b + c)^2 \geq ab + bc + ca \geq (\sqrt{k} + \sqrt{n} + \sqrt{m})^2$$

или

$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geq (\sqrt{k} + \sqrt{n} + \sqrt{m})^2. \quad (5)$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства (5), получим

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c) \geq \sqrt{k} + \sqrt{n} + \sqrt{m}$$

или

$$a+b+c \geq \sqrt{3}(\sqrt{k} + \sqrt{n} + \sqrt{m}).$$

А это и есть неравенство (2).

## ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ

|   |  |
|---|--|
| <b>ЖАСТКОЎ</b><br><i>Сяргей Васільевіч</i>      | – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, за-гадчык кафедры матэматычнага аналізу і дыферэн-цыяльных ураўненняў МДУ імя А.А. Куляшова          |
| <b>НАВАШЫНСКАЯ</b><br><i>Вікторыя Сяргеевна</i> | – аспірант Інстытута тэхналогіі металаў НАНБ   |
| <b>ВАРАБ'ЁЎ</b><br><i>Ганадзій Мікалаеўіч</i>   | – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, за-гадчык кафедры інфарматыкі і вылічальнай тэхнікі Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітета харчавання |
| <b>ГАЛЬМАК</b><br><i>Аляксандар Міхайлавіч</i>  | – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт ка-федры вышэйшай матэматыкі Магілёўскага дзяржаў-нага ўніверсітета харчавання                        |
| <b>МАЦЕЙКА</b><br><i>Алег Міхайлавіч</i>        | – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт, да-цэнт кафедры агульнай матэматыкі і інфарматыкі БДУ  |
| <b>ТАНЫГІНА</b><br><i>Настасся Мікалаеўна</i>   | – асістэнт кафедры агульнай матэматыкі і інфарма-тыкі БДУ  |
| <b>МАРОЗАЎ</b><br><i>Мікалай Парфір'евіч</i>    | – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт ка-федры матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў МДУ імя А.А. Куляшова                     |
| <b>ШАМУКОВА</b><br><i>Наталля Валянцінаўна</i>  | – дацэнт кафедры інфарматыкі, статыстыкі і вышэй-шай матэматыкі Бабруйскага філіяла БДЭУ   |
| <b>САКОВІЧ</b><br><i>Наталля Уладзіміраўна</i>  | – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт ка-федры алгебры і геаметрыі МДУ імя А.А. Куляшова  |
| <b>ФЕДАРАКА</b><br><i>Алена Іванаўна</i>        | – старшы выкладчык кафедры вышэйшай матэма-тыкі № 3 Беларускага нацыянальнага тэхнічнага ўніверсітета  |
| <b>РАДЗЬКОЎ</b><br><i>Віктар Міхайлавіч</i>     | – кандыдат фізіка-матэматычных навук, вядучы на-вуковы супрацоўнік лабараторыі тэарэтычнай фізікі Інстытута фізікі імя Б.І. Сцяпанава НАНБ         |
| <b>АЎСІЮК</b><br><i>Алена Міхайлаўна</i>        | – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы вык-ладчык кафедры агульнай фізікі і методыкі выкладан-ня фізікі МДПУ імя І.П. Шамякіна               |
| <b>ЦІМОШЧАНКА</b><br><i>Алена Валер'еўна</i>    | – кандыдат фізіка-матэматычных навук, выкладчык кафедры эксперыментальнай і тэарэтычнай фізікі МДУ імя А.А. Куляшова                               |
| <b>ТОМАЎ</b><br><i>Аляксандар Васільевіч</i>    | – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт МДУ імя А.А. Куляшова   |

**ЮРЭВІЧ***Уладзімір Антонавіч*

– доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры фізікі Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта харчавання

**АСІПЕНКА***Аляксандар Мікалаевіч*

– аспірант кафедры біялогіі МДУ імя А.А. Кулішова

**ПАЗНЯК***Сяргей Сцяпанавіч*

– кандыдат сельскагаспадарчых навук, дацэнт, праектар па навуковай работе Міжнароднага дзяржаўнага экалагічнага ўніверсітэта імя А.Д. Сахарава

**ЛУГАЎЦОЎ***Максім Вячаслававіч*

– вучань 11 класа ліцэя № 3 г. Магілёва

## SUMMARIES

### **Fedorako Y.I. ON THE STRUCTURE OF ABEL'S DIFFERENTIAL EQUATION GENERAL SOLUTIONIO**

A parametrical representation of the general solution of Abel differential equation in the form of the function of its partial solution and arbitrary constant is obtained.

### **Galmak A.M. $\sigma$ -COMPATIBLE VECTOR-MATRICES.**

The  $\sigma$ -compatible vector-matrices are defined and studied in this paper.

### **Mateiko O.M., Tanyhina A.N. PROFESSIONALLY ORIENTED COURSE OF HIGHER MATHEMATICS FOR STUDENTS OF GEOGRAPHICAL DEPARTMENTS.**

The article deals with the principles of the course Higher Mathematics for the students who study at the Faculty of Geography of The Belarusian State University. The necessity of professional orientation of the course is stated. Some practical tasks containing mathematical notions used in geography are given.

### **Morozov N.P. POLYNOMINAL SYSTEMS SPECIAL REPRESENTATION.**

The research provides special representation of polynominal systems which enables to foresee bifurcations in these systems according to the hamiltonian system with the natural algebraic hamiltonian. The hamiltonian system is defined by the right parts of the system and represents a non-linear global approximation to the initial system.

### **Osipenko A.N. FATTY ACIDS IN ATEROGENESIS.**

The article deals with the analysis of the role certain fatty acids play in atherogenesis. The results of the experiments are provided.

### **Pozniak S.S. HEAVY METALS CONCENTRATION IN WHEAT AT THE EARLY STAGE OF ITS DEVELOPMENT.**

In the experiment heavy metals ingress to wheat plants growing in vitro with the increasing nickel, chromium, cobalt, and manganese concentration was examined. It has been proved that with the increase of heavy metal ions in nutrient solution the content of contamination in plants' sprouts significantly increases. Moreover low concentration of heavy metal ions can inhibit germination.

### **Redkov V.M., Ovsiyuk E.M. OPTICS AND SPECIAL RELATIVITY: ON THE FORM OF LIGHT REFLECTION LAW IN A MOVING REFERENCE FRAME.**

The influence of the relativistic motion of the reference frame on the light reflection law is investigated. The method is based on applying the relativistic aberration affect for three light signals: incident, normal and reflected rays. Two choices for a normal light signal in the rest reference frame are used: one going to and another going from the reflecting surface. The form of the reflection law in the moving reference frame is substantially modified and includes an additional parameter which is the velocity vector of the reference frame. It is shown that the reflected ray, as measured by a moving observer, in general would not be in the same plane as the incident and normal rays. So a plane geometric figure, determined by the incident, normal and reflected rays, may be observed as having three dimensions.

### **Shamukova N.V., Sakovich N.V. DISTRIBUTION OF LITERAL NUMBERS RAISED TO THE SECOND AND THIRD POWER.**

The research provides bilateral estimations for distances between adjoint literal numbers raised to the second and third power. These figures are deduced according to some metric theories of diophantine approximation.

**Tsimoshchenka E.V., Tomov A.V., Yurevich V.A. OPTICAL HYSTERESIS ON RESONANT LIGHT REFLECTION BY THIN NONLINEAR POLARISATED LAYER.**

Within the framework of the proposed theoretical model the phenomenon of resonant reflection of coherent radiation by a boundary layer with nonlinear polarization is studied accounting for quasi-resonant polarizability of active atoms in case of dipole – dipole interaction. For parameters of films obtained by diffusion of Methyl Red in a polycarbonate matrix, nonlinear phase displacement at reflection and possibility of observation of hysteresis properties in cases of transmission and reflection are evaluated.

**Vorobyev G.N. IDEMPOTENTS IN  $(k + 1)$ -ARY GROUP  $\langle Z_k^k, [ ]_{k+1, k} \rangle$ .**  
The idempotents in  $(k + 1)$ -ary group  $\langle Z_k^k, [ ]_{k+1, k} \rangle$  are studied in this paper.

**Zhestkov S.V., Novashinskaya V.S. CONSTRUCTIVE ANALYSIS OF TOPOLOGICAL AND NON-TOPOLOGICAL SOLITONS OF (2+1)-DIMENTIONAL GENERALIZED ZAKHAROV – KUZNETSOV EQUATIONS.**

The constructive analysis of topological and non-topological solitons of (2+1)-dimensional generalized Zakharov – Kuznetsov equations is developed.

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў  
на англійскую мову  
*Я.В. Рубанава*

Тэхнічны рэдактар *А.Л. Пазнякоў*  
Камп'ютарны набор і вёрстка *А.Л. Пазнякоў*  
Карэктар *І.Г. Каржова*

Падпісана да друку .08.2011 г.  
Фармат 70x108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папера афсетная. Гарнітура Petersburg.  
Ум.-друк. арк. 8,4. Ул.-выд. арк. 7,0. Тыраж 100 экз. Заказ .

Установа адукцыі "Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт  
імя А.А. Куляшова", 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.  
ЛІ № 02330/278 ад 30.04.2004 г.

Надрукавана ў аддзеле аператыўнай паліграфії  
УА "МДУ імя А.А. Куляшова". 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.