

ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага
універсітэта
імя А.А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

1 (35)
2010

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р філас. навук прафесар М.І. Вішнеўскі (галоўны рэдактар);
д-р гіст. навук прафесар Я.Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара);
канд. фіз.-мат. навук дацэнт Б.Д. Чабатарэўскі (нам. галоўнага рэдактара);
д-р фіз.-мат. навук прафесар С.В. Жасткоў (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В);
Л.І. Будкова (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар У.І. Лебедзеў (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А.І. Таўтень (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В.А. Еравенка (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А.А. Самадураў (Мінск)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт С.М. Чарноў (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар М.В. Машчанка (Магілёў)
д-р біял. навук прафесар Н.П. Максімава (Мінск)
канд. біял. навук дацэнт М.В. Акуліч (Магілёў)
д-р мед. навук Н.І. Сімчанка (Магілёў)
д-р мед. навук дацэнт А.В. Марачкаў (Магілёў)
д-р геагр. навук прафесар П.С. Лопух (Мінск)
д-р хім. навук прафесар Г.М. Роганаў (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар А.Г. Палячонак (Магілёў)

ЗМЕСТ

ЖЕСТКОВ С.В., НОВАШИНСКАЯ В.С. Об аналитическом моделировании волновых и солитонных решений нелинейных уравнений, связанных с классическим уравнением КДФ	4
ЛАПТИНСКИЙ В.Н., РОГОЛЕВ Д.В. О разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати	12
БОНДАРЕВ А.Н., ЛАПТИНСКИЙ В.Н. Анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова с помощью метода функций Грина	24
ГАЛЬМАК А.М. Об операции $[]_{\sigma, k}$	34
КАМОРНИКОВ С.Ф., ВОРОБЕЙ Л.А., КУЗМЕНКОВА И.А. О решетке регулярных транзитивных подгрупповых функторов	39
ЩУЧКИН Н.А. Порождающие множества подалгебр n -арных групп	46
КУКСО О.С., САКОВИЧ Н.В., ШАМУКОВА Н.В. О многочленах заданного дискриминанта, большой высоты и с корнями, ограниченными во всех метриках	53
МИХАЙЛОВА Н.В. Теоретическая рефлексия математики в условиях возрастающей сложности науки	60
СОТСКИЙ А.Б., ЧУДАКОВСКИЙ П.Я., ПРИМАК И.У. Дифракция света в планарных структурах с полностью согласованными слоями	68
КУЗЬМИН А.В. Информационная энтропия и универсальность флуктуаций распределения нейтронов по летаргии при огрубленном способе описания	80
ВОРОНОВА Н.В., БУГА С.В. Морфологическая и экологическая гетерогенность в комплексе <i>Macrosiphum Gei</i> Koch, 1855 (Rhynchota: Homoptera: Aphididae)	89
SUMMARIES	100
ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ	101

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 517+530.1

С.В. ЖЕСТКОВ, В.С. НОВАШИНСКАЯ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОЛНОВЫХ И СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С КЛАССИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ КДФ

Прогресс, достигнутый в теории нелинейных волн в последние годы [1-10], во многом обусловлен развитием точных методов интегрирования нелинейных уравнений в частных производных. При этом значимость этих методов определяется их возможностью исследовать ситуации, в которых классические методы построения солитонных решений – метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) и метод Хироты, а также их модификации на многомерные уравнения – не применимы.

В работе развивается метод моделирования точных волновых решений и соответствующих нелинейных уравнений, построенных на основе классического уравнения КДФ. В основе подхода лежит дробно-рациональная форма многочисленных волновых решений, построенных для нелинейных уравнений современной физики, и прямой метод из [10].

I. Рассмотрим модифицированное уравнение КДФ вида [11]

$$\Phi_t + a_1 \Phi^{\frac{1}{2}} \Phi_x + a_2 \Phi \Phi_x + a_3 \Phi_{xxx} = 0, \quad (1)$$

где a_1, a_2, a_3 – произвольные действительные числа. Анализ этого уравнения показывает, что оно допускает решение типа кинка или ударной волны, которое строится в форме бегущей волны

$$\Phi(t, x) = \Phi(\xi), \quad \xi = x - ct, \quad (2)$$

где c – скорость волны. Подставляя (2) в (1), получим

$$-c\Phi' + a_1 \Phi^{\frac{1}{2}} \Phi' + a_2 \Phi \Phi' + a_3 \Phi''' = 0. \quad (3)$$

Интегрируя один раз уравнение (3), найдем

$$b_0 \Phi + b_1 \Phi^{\frac{3}{2}} + b_2 \Phi^2 + a_3 \Phi'' = d, \quad (4)$$

где $b_0 = -c, b_1 = \frac{2}{3}a_1, b_2 = \frac{1}{2}a_2, d$ – произвольная постоянная. Решение уравнения (4) будем строить в виде

$$\Phi(\xi) = U^2(\xi), \quad U(\xi) = A + Bth\xi, \quad (5)$$

где A, B – неизвестные параметры волны. Подставляя (5) в (4), получим

$$\begin{aligned} & ch^4\xi[b_0A^2 + b_1A^3 + b_2A^4 + 2a_3B^2 - d] + ch^3\xi sh\xi[2ABb_0 + 3A^2Bb_1 + 4A^3Bb_2 - 4a_3AB] + \\ & + ch^2\xi sh^2\xi[B^2b_0 + 3AB^2b_1 + 6A^2B^2b_2 - 8B^2a_3] + ch\xi sh^3\xi[B^3b_1 + 4AB^3b_2 + 4ABA_3] + \\ & + sh^4\xi[B^4b_2 + 6a_3B^2] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Прямым вычислением проверяется, что функции $ch^4\xi, ch^3\xi sh\xi, ch^2\xi sh^2\xi, ch\xi sh^3\xi, sh^4\xi$ линейно независимы. Поэтому из (6) следует, что должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} B^2b_2 + 6a_3 = 0, \quad B^2b_1 + 4AB^2b_2 + 4Aa_3 = 0, \quad b_0 + 3Ab_1 + 6A^2b_2 - 8a_3 = 0, \\ 2b_0 + 3Ab_1 + 4A^2b_2 - 4a_3 = 0, \quad b_0A^2 + b_1A^3 + b_2A^4 + 2a_3B^2 = d. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (1) имело решение вида (2), (5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (7).

Соотношения (7) можно переписать в виде

$$A = -\frac{2}{5}\left(\frac{a_1}{a_2}\right), \quad B^2 = -12\left(\frac{a_3}{a_2}\right), \quad d = b_0A^2 + b_1A^3 + b_2A^4 - 24\frac{a_3^2}{a_2}, \quad (8)$$

$$c = 16a_3, \quad 75a_2a_3 = -a_1^2. \quad (9)$$

Заметим, что равенство

$$b_0A^2 + b_1A^3 + b_2A^4 - 24\frac{a_3^2}{a_2} = 0$$

выполняется тождественно. Поэтому $d = 0$. Из равенств (8) определяются параметры A, B (причем B с точностью до знака). Из равенств (9) определяется скорость волны и нелинейное соотношение на коэффициенты уравнения (1), при выполнении которого возможно распространение волны (5). Кроме того, очевидно, должны выполняться неравенства

$$a_3 > 0, \quad a_2 < 0,$$

которые накладывают ограничения на выбор коэффициентов уравнения (1). Полученные соотношения (8), (9) являются законами распространения волны (5) и представляют интерес для приложений [12]. Заметим, что солитоноподобное решение уравнения (1) было построено в работе [11].

II. В нелинейной физике плазмы возможны нелинейности с отрицательной степенью, которые встречаются и в других математических моделях [13, 14].

Рассмотрим уравнение вида

$$\Phi_t + a_0 \Phi^{-\frac{1}{2}} \Phi_x + a_1 \Phi^{\frac{1}{2}} \Phi_x + a_2 \Phi \Phi_x + a_3 \Phi_{xxx} = 0 \quad (10)$$

с произвольными действительными коэффициентами. Решение строится в виде (2). Подставляя (2) в (10), найдем

$$-c\Phi' + a_0 \Phi^{-\frac{1}{2}} \Phi' + a_1 \Phi^{\frac{1}{2}} \Phi' + a_2 \Phi \Phi' + a_3 \Phi''' = 0. \quad (11)$$

Интегрируя один раз уравнение (11), получим

$$b_0 \Phi + k_0 \Phi^{\frac{1}{2}} + b_1 \Phi^{\frac{3}{2}} + b_2 \Phi^2 + a_3 \Phi'' = d, \quad (12)$$

где $b_0 = -c$, $k_0 = 2a_0$, $b_1 = \frac{2}{3}a_1$, $b_2 = \frac{1}{2}a_2$, d – произвольная постоянная.

Решение уравнения (12) строится в виде (5). Подставляя (5) в (12), найдем

$$\begin{aligned} & ch^4 \xi [b_0 A^2 + k_0 A + b_1 A^3 + b_2 A^4 + 2a_3 B^2 - d] + \\ & + ch^3 \xi sh \xi [2ABb_0 + k_0 B + 3A^2 Bb_1 + 4A^3 Bb_2 - 4ABa_3] + \\ & + ch^2 \xi sh^2 \xi [B^2 b_0 + 3AB^2 b_1 + 6A^2 B^2 b_2 - 8B^2 a_3] + \\ & + ch \xi sh^3 \xi [B^3 b_1 + 4AB^3 b_2 + 4ABa_3] + sh^4 \xi [B^4 b_2 + 6B^2 a_3] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В силу линейной независимости функций $ch^4 \xi$, $ch^3 \xi sh \xi$, $ch^2 \xi sh^2 \xi$, $ch \xi sh^3 \xi$, $sh^4 \xi$ из (13) вытекает, что должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2}{5} \left(\frac{a_1}{a_2} \right), & B^2 &= -12 \left(\frac{a_3}{a_2} \right), & d &= b_0 A^2 + k_0 A + b_1 A^3 + b_2 A^4 + 2a_3 B^2, \\ -c &= 8a_3 + \frac{8}{25} \frac{a_1^2}{a_2}, & k_0 &= \frac{24}{5} \left(\frac{a_1 a_3}{a_2} \right) + \frac{8}{125} \frac{a_1^3}{a_2^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Для того чтобы уравнение (10) имело решение вида (2), (5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (14).

Эти соотношения и представляют собой законы распространения волны (5). При $a_0 = 0$ они переходят в законы (8), (9).

III. Результаты работы [15] показывают, что закон нелинейности удвоенной степени можно смоделировать и для классического уравнения КДФ, аналогично моделированию законов нелинейности для классического уравнения Шредингера. С этой целью рассмотрим уравнение КДФ вида

$$\Phi_t + a_1 \Phi^{2m} \Phi_x + a_2 \Phi^{4m} \Phi_x + a_3 \Phi_{xxx} = 0, \quad m > 0 \quad (15)$$

с произвольными действительными коэффициентами. Решение уравнения (15) будем строить в виде (2). Подставляя (2) в (15), найдем

$$-c\Phi' + a_1 \Phi^{2m} \Phi' + a_2 \Phi^{4m} \Phi' + a_3 \Phi'' = 0. \quad (16)$$

Интегрируя один раз уравнение (16) и полагая константу интегрирования равной нулю, получим

$$-c\Phi + \frac{a_1}{2m+1} \Phi^{2m+1} + \frac{a_2}{4m+1} \Phi^{4m+1} + a_3 \Phi'' = 0$$

или

$$\Phi'' = a\Phi - b\Phi^{2m+1} - \delta\Phi^{4m+1}, \quad (17)$$

где

$$a = \frac{c}{a_3}, \quad b = \frac{a_1}{(2m+1)a_3}, \quad \delta = \frac{a_2}{(4m+1)a_3}.$$

К уравнению (17) добавим краевые условия

$$\Phi(\pm\infty) = 0, \quad \Phi'(\pm\infty) = 0. \quad (18)$$

Краевая задача (17), (18) определяет существование солитонного решения для уравнения (15). Для ее интегрирования обозначим $\Phi' = z$. Тогда

$$\Phi'' = \frac{dz}{d\xi} = \frac{dz}{d\Phi} \frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{dz}{d\Phi} z.$$

Уравнение (17) примет вид

$$z \frac{dz}{d\Phi} = a\Phi - b\Phi^{2m+1} - \delta\Phi^{4m+1}. \quad (19)$$

Разделяя переменные и интегрируя один раз уравнение (19), найдем с учетом (18) первый интеграл

$$z^2 = a\Phi^2 - \frac{b}{m+1} \Phi^{2m+2} - \frac{\delta}{2m+1} \Phi^{4m+2}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = - \left[a\Phi^2 - \frac{b}{m+1} \Phi^{2m+2} - \frac{\delta}{2m+1} \Phi^{4m+2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (20)$$

где знак "–" указывает на убывание солитона на бесконечности. Из (20) найдем

$$I \equiv \int \frac{d\Phi}{\Phi \left[a - \frac{b}{m+1} \Phi^{2m} - \frac{\delta}{2m+1} \Phi^{4m} \right]^{\frac{1}{2}}} = -\xi + \xi_0,$$

где ξ_0 – произвольная постоянная. Вычислим интеграл I . Для этого обозначим $\Phi^2 = s$. Тогда $2\Phi d\Phi = ds$. Отсюда найдем

$$\frac{2d\Phi}{\Phi} = \frac{ds}{s}.$$

Следовательно,

$$I \equiv \frac{1}{2} \int \frac{ds}{s \left[a - \frac{b}{m+1} s^m - \frac{\delta}{2m+1} s^{2m} \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Введем новую переменную $h = s^m$. Тогда

$$dh = ms^{m-1} ds$$

или

$$\frac{dh}{h} = \frac{m}{s} ds.$$

В результате получим

$$I \equiv \frac{1}{2} \int \frac{dh}{mh} \frac{1}{\left[a - \frac{b}{m+1} h - \frac{\delta}{2m+1} h^2 \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (21)$$

Будем считать, что $a > 0$. Тогда можно сделать замену переменной h по формуле

$$\left[a - \frac{b}{m+1} h - \frac{\delta}{2m+1} h^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} - h\theta,$$

где θ – новая переменная. Следовательно,

$$h = \frac{2\sqrt{a}\theta - \frac{b}{m+1}}{\theta^2 + \frac{\delta}{2m+1}}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), получим

$$I = \frac{1}{m} \int \frac{d\theta}{2\sqrt{a\theta} - \frac{b}{m+1}} = \frac{1}{2m\sqrt{a}} \ln \left| 2\sqrt{a\theta} - \frac{b}{m+1} \right| = -\xi + \xi_0. \quad (23)$$

Из уравнения (23) найдем

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left(e + \frac{b}{m+1} \right), \quad e \equiv \exp \{ 2\sqrt{a}m(-\xi + \xi_0) \}.$$

Вычислим величину

$$h = \frac{4ae}{\left(e + \frac{b}{m+1} \right)^2 + \frac{4a\delta}{2m+1}}.$$

Тогда

$$s = \left[\frac{4ae}{\left(e + \frac{b}{m+1} \right)^2 + \frac{4a\delta}{2m+1}} \right]^{\frac{1}{m}}.$$

Следовательно,

$$\Phi(\xi) = \left[\frac{4ae}{\left(e + \frac{b}{m+1} \right)^2 + \frac{4a\delta}{2m+1}} \right]^{\frac{1}{2m}}, \quad (24)$$

где $a > 0, \delta > 0$. Это и есть солитонное решение уравнения (17).

Чтобы получить законы распространения этой волны, представим решение (24) в виде

$$\Phi(\xi) = F^{\frac{1}{2m}}(\xi), \quad (25)$$

где $F = GH^{-1}, G = Ae, H = (e + B)^2 + Q, e \equiv \exp \{ -\alpha(\xi - \xi_0) \}$.

Подставляя (25) в (17) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях e , получим

$$\alpha^2 = 4m^2 a, \quad bA = 4Ba(1+m), \quad \delta A^2 = 4(1+2m)aQ. \quad (26)$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. Для того чтобы уравнение (17) имело решение вида (25), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (26).

Они и представляют законы распространения солитона указанной формы.

IV. Для приложений представляет интерес вопрос о том, допускает ли уравнение (15) существование ударной волны. С этой целью будем строить его решение в виде (2). Подставляя (2) в (15) и интегрируя один раз, найдем

$$-c\Phi + \frac{a_1}{2m+1}\Phi^{2m+1} + \frac{a_2}{4m+1}\Phi^{4m+1} + a_3\Phi^n = 0. \quad (27)$$

Решение уравнения (27) будем строить в виде

$$\Phi(\xi) = F^{2m}(\xi), \quad (28)$$

где $F(\xi)$ – неизвестная функция. Подставляя (28) в (27), найдем

$$-cF^2 + \frac{a_1}{2m+1}F^3 + \frac{a_2}{4m+1}F^4 + a_3\mu[(\mu-1)(F')^2 + FF''] = 0, \quad \mu = \frac{1}{2m}. \quad (29)$$

Решение уравнения (29) ищем в виде

$$F(\xi) = A + Bth\xi. \quad (30)$$

Подставляя (30) в уравнение (29), получим

$$\begin{aligned} ch^4\xi[b_0A^2 + b_1A^3 + b_2A^4 + b_3B^2] + ch^3\xi sh\xi[2ABb_0 + 3A^2Bb_1 + 4A^3Bb_2 - 2ABb_4] + \\ ch^2\xi sh^2\xi[B^2b_0 + 3AB^2b_1 + 6A^2B^2b_2 - 2B^2b_3 - 2B^2b_4] + \\ ch\xi sh^3\xi[B^3b_1 + 4AB^3b_2 + 2ABb_4] + sh^4\xi[B^4b_2 + B^2b_3 + 2B^2b_4] = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{где } b_0 = -c, \quad b_1 = \frac{a_1}{2m+1}, \quad b_2 = \frac{a_2}{4m+1}, \quad b_3 = \mu(\mu-1)a_3, \quad b_4 = \mu a_3.$$

Из равенства (31) в силу линейной независимости функций $ch^4\xi$, $ch^3\xi sh\xi$, $ch^2\xi sh^2\xi$, $ch\xi sh^3\xi$, $sh^4\xi$ найдем

$$B^2b_2 + b_3 + 2b_4 = 0, \quad (32)$$

$$B^2b_1 + 4AB^2b_2 + 2Ab_4 = 0, \quad (33)$$

$$b_0 + 3Ab_1 + 6A^2b_2 - 2b_3 - 2b_4 = 0, \quad (34)$$

$$2b_0 + 3Ab_1 + 4A^2b_2 - 2b_4 = 0, \quad (35)$$

$$b_0A^2 + b_1A^3 + b_2A^4 + b_3B^2 = 0. \quad (36)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. Для того чтобы уравнение (15) имело решение вида (2), (28), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (32) – (36).

Из уравнений (32), (33) найдем соответственно

$$A = -\frac{b_1(1+\mu)}{b_2(2+4\mu)}, \quad B^2 = -\frac{a_3\mu(1+\mu)}{b_2}. \quad (37)$$

Из уравнений (34), (35) получим

$$c = -2A^2b_2 - 2\mu a_3 + 2\mu^2 a_3, \quad 3Ab_1 + 8A^2b_2 = a_3(4\mu^2 - 2\mu). \quad (38)$$

При выполнении (37), (38) соотношение (36) выполняется тождественно. При $m = \frac{1}{4}$ результаты согласуются с теоремой 1. Соотношения (37), (38) представляют собой законы распространения ударной волны для уравнения (15).

Таким образом, полученные результаты могут быть использованы при моделировании нелинейных процессов в физике плазмы и гидродинамике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория солитонов: Метод обратной задачи / В.Е. Захаров [и др.]. – М.: Наука, 1980. – 314 с.
2. Лэм, Дж.Л. Введение в теорию солитонов / Дж.Л. Лэм. – М.: Мир, 1983. – 294 с.
3. Буллаф, Р. Солитоны / Р. Буллаф, Ф. Кодри; под ред. Р. Буллаф. – М.: Мир, 1983. – 232 с.
4. Калоджеро, Ф. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений / Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. – М.: Мир, 1985. – 469 с.
5. Тахтаджян, Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. – М.: Наука, 1986. – 528 с.
6. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 479 с.
7. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд [и др.]. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
8. Ньюэлл, А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – М.: Мир, 1989. – 326 с.
9. Ахмедиев, Н.Н. Солитоны / Н.Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М.: Физматлит, 2003. – 304 с.
10. Жестков, С.В. Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных / С.В. Жестков. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2006. – 220 с.
11. Жестков, С.В. О существовании солитонных решений модифицированных уравнений Кортевега-де Фриза с различными типами нелинейностей / С.В. Жестков, И.С. Ведолева // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2009. – № 1. – С. 158-164.
12. Volosevich, A.V. Theoretical model and experimental diagnostics of nonlinear electrostatic structures in space plasma / A.V. Volosevich, C.V. Meister, S.V. Zhestkov. – Advances in Space Research. – 2006. – Vol. 37. – P. 569-575.

13. **Галактионов, В.А.** Уравнения нелинейной дисперсии третьего порядка: ударные волны, волны разрежения и разрушения / В.А. Галактионов, С.И. Похожаев // Журнал вычисл. мат. и мат. физики. – 2008. – Т. 48. – № 10. – С. 1819-1846.
14. **Weigno, Rui.** Integral bifurcation method and its application for solving the modified equal width wave equation and its variants / Rostock. Math. Kolloq. – 2007. – N 62. – P. 87-106.
15. **Жестков, С.В.** О построении солитоноподобных решений системы уравнений Захарова со степенным законом нелинейности и законом удвоенной степени / Жестков С.В. – Докл. НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52. – № 6. – С. 49-53.

Поступила в редакцию 06.10.2009 г.

УДК 517.925

В.Н. ЛАПТИНСКИЙ, Д.В. РОГОЛЕВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати.

В данной работе с помощью метода [1, гл. 3] исследуется краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A_1(t)X + XB_1(t) + X(S_1(t)X + S_2(t)Y) + F_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = A_2(t)Y + YB_2(t) + Y(P_1(t)X + P_2(t)Y) + F_2(t), \quad (2)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (3)$$

$$Y(0) = Y(\omega), \quad (4)$$

где $t \in [0, \omega]$, $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, матрицы $A_i(t), B_i(t), S_i(t), P_i(t), F_i(t)$ ($i=1,2$) определены и непрерывны на промежутке $[0, \omega]$; $\omega > 0$.

Система уравнений (1), (2) относится к многомерным системам дифференциальных уравнений специального вида. В частности, к таким уравнениям относятся матричные дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати, играющие важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1-4]. Указанная система впервые появилась, по-видимому, в теории дифференциальных игр (см., например, [3]). Задача типа (1)-(4) рассмотрена в [1].

Примем следующие обозначения:

$$D = \{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) : 0 \leq t \leq \omega, \|\mathbf{X}\| \leq \rho_1, \|\mathbf{Y}\| \leq \rho_2\}, \tilde{\mathbf{A}}_i(\omega) = \int_0^\omega \mathbf{A}_i(\tau) d\tau, \gamma_i = \|\tilde{\mathbf{A}}_i^{-1}(\omega)\|,$$

$$\alpha_i = \max_t \|\mathbf{A}_i(t)\|, \beta_i = \max_t \|\mathbf{B}_i(t)\|, \delta_i = \max_t \|\mathbf{S}_i(t)\|, \mu_i = \max_t \|\mathbf{P}_i(t)\|,$$

$$h_i = \max_t \|\mathbf{F}_i(t)\|, \|\mathbf{T}\|_C = \max_t \|\mathbf{T}(t)\|,$$

$$q_{11} = \gamma_1 \left[\frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 (\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) + \omega (\beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \right],$$

$$q_{12} = \gamma_1 \delta_2 \rho_1 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \omega + 1 \right), q_{21} = \gamma_2 \mu_1 \rho_2 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \omega + 1 \right),$$

$$q_{22} = \gamma_2 \left[\frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 (\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) + \omega (\beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \right],$$

где $t \in [0, \omega]$, $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\|\cdot\|$ – мультипликативная норма матриц ($\|\mathbf{ST}\| \leq \|\mathbf{S}\| \cdot \|\mathbf{T}\|$), например, любая из норм, приведенных в [5, с. 21].

В случае, когда коэффициенты в (1), (2) постоянные, получим систему типа [3].

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

$$1) \det \tilde{\mathbf{A}}_i \neq 0 \quad (i=1,2), \tag{5}$$

$$2) \quad \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 [(\alpha_1 + \beta_1) \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1] + \omega (\beta_1 \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1) \right\} \leq \rho_1, \tag{6}$$

$$\gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 [(\alpha_2 + \beta_2) \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2] + \omega (\beta_2 \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2) \right\} \leq \rho_2,$$

$$3) \quad q_{11} < 1, \det(\mathbf{E} - \mathbf{Q}) > 0, \tag{7}$$

где $\mathbf{E} = \text{diag}(1,1)$, $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.

Тогда задача (1)-(4) однозначно разрешима в области D .

Доказательство. Используя условие (5) и следуя методике [1], сначала выведем систему матричных интегральных уравнений, эквивалентную задаче (1)-(4).

Из уравнения (1) на основании условия (3) имеем

$$\int_0^{\omega} \mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) d\tau = - \int_0^{\omega} [\mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau.$$

Воспользуемся тождеством типа [1, с. 47]

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} \mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) d\tau &= \int_0^{\omega} \mathbf{A}_1(\tau) d\tau \mathbf{X}(t) - \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) d\mathbf{X}(\tau) + \\ &+ \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) d\mathbf{X}(\tau). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда на основе (8) в силу (1) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_1(\omega) \mathbf{X}(t) &= \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) [\mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \\ &+ \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau - \\ &- \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) [\mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \\ &+ \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau - \\ &- \int_0^{\omega} [\mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как, согласно (5), $\det \tilde{\mathbf{A}}_1(\omega) \neq 0$, то из (9) получим матричное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) [\mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \right. \\ &+ \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau - \\ &- \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) [\mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \\ &+ \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau - \\ &\left. - \int_0^{\omega} [\mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично получим следующее интегральное уравнение:

$$\mathbf{Y}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \mathbf{A}_2(\sigma) d\sigma \right) [\mathbf{A}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau) + \mathbf{Y}(\tau) \mathbf{B}_2(\tau) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & +\mathbf{Y}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau))+\mathbf{F}_2(\tau)]d\tau - \\
 & -\int_0^\omega\left(\int_\tau^\omega\mathbf{A}_2(\sigma)d\sigma\right)\left[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)+\mathbf{Y}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+\right. \\
 & \left. +\mathbf{Y}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau))+\mathbf{F}_2(\tau)\right]d\tau - \\
 & \left. -\int_0^\omega\left[\mathbf{Y}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+\mathbf{Y}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau))+\mathbf{F}_2(\tau)\right]d\tau\right\}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение системы матричных интегральных уравнений (10), (11) является решением задачи (1)-(4). Это можно показать с помощью несложных выкладок.

Исследуем разрешимость системы уравнений (10), (11). Эту систему запишем в операторной форме:

$$\mathbf{X} = \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (12)$$

$$\mathbf{Y} = \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (13)$$

где через $\mathcal{L}_i (i=1,2)$ обозначены соответствующие интегральные операторы в (10), (11). Эти операторы действуют на множестве $\{(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{X}\|_C < \infty, \|\mathbf{Y}\|_C < \infty\}$.

Покажем, что из условий (5)-(7) следует выполнение модифицированного [6] принципа Банаха-Каччиопполи [7, с. 605] на множестве $\tilde{D} = \{(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{X}\|_C \leq \rho_1, \|\mathbf{Y}\|_C \leq \rho_2\}$.

Сначала покажем, что $(\mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \in \tilde{D}$, если $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \tilde{D}$. Выполнив оценки по норме в (12), (13), имеем последовательно

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\| & \leq \|\tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega)\| \left\| \int_0^\tau \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mathbf{X}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau) \right] d\tau - \right. \\
 & \left. - \int_0^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mathbf{X}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau) \right] d\tau - \right. \\
 & \left. - \int_0^\omega \left[\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau) + \mathbf{X}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau) \right] d\tau \right\| \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma_1 \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \|\mathbf{A}_1(\sigma)\| d\sigma \right) \left[\|\mathbf{A}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{B}_1(\tau)\| + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{S}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{S}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{F}_1(\tau)\| \right] d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \|\mathbf{A}_1(\sigma)\| d\sigma \right) \left[\|\mathbf{A}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{B}_1(\tau)\| + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{S}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{S}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{F}_1(\tau)\| \right] d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\omega \left[\|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{B}_1(\tau)\| + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{S}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{S}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{F}_1(\tau)\| \right] d\tau \right\} \leq \\
&\leq \gamma_1 \left\{ \int_0^t \alpha_1 \tau \left[(\alpha_1 + \beta_1) \|\mathbf{X}(\tau)\| + \delta_1 \|\mathbf{X}(\tau)\|^2 + \delta_2 \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + h_1 \right] d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \int_t^\omega \alpha_1 (\omega - \tau) \left[(\alpha_1 + \beta_1) \|\mathbf{X}(\tau)\| + \delta_1 \|\mathbf{X}(\tau)\|^2 + \delta_2 \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + h_1 \right] d\tau + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\omega \left[\beta_1 \|\mathbf{X}(\tau)\| + \delta_1 \|\mathbf{X}(\tau)\|^2 + \delta_2 \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + h_1 \right] d\tau \right\} \leq \\
&\leq \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 \left[(\alpha_1 + \beta_1) \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1 \right] + \right. \\
&\quad \left. + \omega \left(\beta_1 \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1 \right) \right\}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Аналогичные оценки выполним для оператора \mathcal{L}_2 :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\| &\leq \|\tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}(\omega)\| \left\| \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_2(\sigma) d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau) + \mathbf{Y}(\tau) \mathbf{B}_2(\tau) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{Y}(\tau) (\mathbf{P}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{P}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_2(\tau) \right] d\tau - \right. \\
&\quad \left. - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_2(\sigma) d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau) + \mathbf{Y}(\tau) \mathbf{B}_2(\tau) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{Y}(\tau) (\mathbf{P}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{P}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_2(\tau) \right] d\tau - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\omega \left[\mathbf{Y}(\tau) \mathbf{B}_2(\tau) + \mathbf{Y}(\tau) (\mathbf{P}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{P}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_2(\tau) \right] d\tau \right\} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \gamma_2 \left\{ \int_0^i \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_2(\sigma) d\sigma \right) \left[\|\mathbf{A}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{B}_2(\tau)\| + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{P}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{P}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{F}_2(\tau)\| \right] d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \int_i^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_2(\sigma) d\sigma \right) \left[\|\mathbf{A}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{B}_2(\tau)\| + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{P}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{P}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{F}_2(\tau)\| \right] d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\omega \left[\|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{B}_2(\tau)\| + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{P}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{P}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{F}_2(\tau)\| \right] d\tau \right\} \leq \\
 &\leq \gamma_2 \left\{ \int_0^i \alpha_2 \tau \left[(\alpha_2 + \beta_2) \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \mu_1 \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \mu_2 \|\mathbf{Y}(\tau)\|^2 + h_2 \right] d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \int_i^\omega \alpha_2 (\omega - \tau) \left[(\alpha_2 + \beta_2) \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \mu_1 \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \mu_2 \|\mathbf{Y}(\tau)\|^2 + h_2 \right] d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\omega \left[\beta_2 \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \mu_1 \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \mu_2 \|\mathbf{Y}(\tau)\|^2 + h_2 \right] d\tau \right\} \leq \\
 &\leq \gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 \left[(\alpha_2 + \beta_2) \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \omega \left(\beta_2 \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2 \right) \right\}. \tag{15}
 \end{aligned}$$

Из (14), (15) на основании условия (6) следуют соотношения

$$\|\mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\|_C \leq \rho_1, \tag{16}$$

$$\|\mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\|_C \leq \rho_2. \tag{17}$$

Далее из (12) имеем для произвольных $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}), (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) \in \tilde{D}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) &= \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^i \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_1 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) \mathbf{B}_1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}}) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}}) \right] d\tau - \right. \\
 &\quad \left. - \int_i^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) \mathbf{B}_1 + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}} \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}} \right) \Big] d\tau - \\
& - \int_0^\omega \left[(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{B}_1 + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}} \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}} \right) \right] d\tau \Big\}.
\end{aligned}$$

Выполнив оценки по норме, получим

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \right\| \leq \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_1^{-1}(\omega) \right\| \left\| \int_0^i \int_0^\tau \mathbf{A}_1 d\sigma \right\| \left[\mathbf{A}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{B}_1 + \right. \\
& \quad \left. + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}} \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}} \right) \right] d\tau - \\
& \quad - \int_i^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{B}_1 + \right. \\
& \quad \left. + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}} \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}} \right) \right] d\tau - \\
& \quad - \int_0^\omega \left[(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{B}_1 + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}} \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}} \right) \right] d\tau \Big\| \leq \\
& \leq \gamma_1 \left\{ \int_0^i \left(\int_0^\tau \|\mathbf{A}_1\| d\sigma \right) \left[\|\mathbf{A}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{B}_1\| + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\| + \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\| \right] d\tau + \right. \\
& \quad \left. + \int_i^\omega \left(\int_\tau^\omega \|\mathbf{A}_1\| d\sigma \right) \left[\|\mathbf{A}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{B}_1\| + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\| + \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\| \right] d\tau + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^\omega \left[\|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{B}_1\| + \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\| + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}})\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\| \right] d\tau \Big\} \leq \\
& \leq \gamma_1 \left\{ \left[\frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 (\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) + \omega (\beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \right] \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}\|_C + \right. \\
& \quad \left. + \delta_2 \rho_1 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \omega + 1 \right) \|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}}\|_C \right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \right\|_C \leq \gamma_1 \left\{ \left[\frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 (\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega (\beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \right] \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}} \right\|_C + \delta_2 \rho_1 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \omega + 1 \right) \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}} \right\|_C \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогично получим оценку

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \right\|_C \leq \gamma_2 \left\{ \mu_1 \rho_2 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \omega + 1 \right) \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}} \right\|_C + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 (\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) + \omega (\beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \right] \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}} \right\|_C \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Запишем (18), (19) в матричном виде

$$\tilde{\mathbf{K}} \leq \mathbf{Q}\mathbf{K}, \quad (20)$$

где

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \left\| \mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \right\|_C \\ \left\| \mathcal{L}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \right\|_C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}} \right\|_C \\ \left\| \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}} \right\|_C \end{pmatrix}.$$

Используя условие (7), можно показать на основании [8, с. 370], что характеристические числа положительной матрицы \mathbf{Q} расположены внутри единичного круга с центром в начале координат. Таким образом, на множестве \tilde{D} имеют место соотношения (16)-(19), являющиеся условием модифицированного [6] принципа Банаха-Каччиопполи [7, с. 605] сжимающих отображений применительно к системе уравнений (12), (13). На основании этого заключаем, что решение $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t)$ этой системы на множестве \tilde{D} существует и единственно. В конечном итоге это означает, что задача (1)-(4) однозначно разрешима в области D .

Замечание 1. Вместо условия (7) можно принять условие $\|\mathbf{Q}\| < 1$, более удобное для применения.

Для построения решения системы матричных интегральных уравнений (10), (11) (см. также (12), (13)) воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [7, с. 605]):

$$\mathbf{X}_k(t) = \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega) \left[\int_0^t \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{X}_{k-1}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{X}_{k-1}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau) \Big] d\tau - \\
& - \int_0^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{X}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau) + \right. \\
& \left. + \mathbf{X}_{k-1}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau) \right] d\tau - \\
& - \int_0^\omega \left[\mathbf{X}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau) + \mathbf{X}_{k-1}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau) \right] d\tau \Big\}, \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_k(t) = & \tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_2(\sigma) d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau) + \mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathbf{Y}_{k-1}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)) + \mathbf{F}_2(\tau) \right] d\tau - \right. \\
& \left. - \int_0^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_2(\sigma) d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau) + \mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathbf{Y}_{k-1}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)) + \mathbf{F}_2(\tau) \right] d\tau - \right. \\
& \left. - \int_0^\omega \left[\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau) + \mathbf{Y}_{k-1}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)) + \mathbf{F}_2(\tau) \right] d\tau \right\}, \quad (22)
\end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots,$

где $\mathbf{X}_0(t)$, $\mathbf{Y}_0(t)$ – произвольные матричные функции класса $C[0, \omega]$, принадлежащие множеству \tilde{D} .

Используя условия (6), нетрудно показать, что все приближенные решения, полученные по алгоритму (21), (22), принадлежат множеству \tilde{D} . Заметим, что эти решения, вообще говоря, не удовлетворяют краевым условиям (3), (4). Поэтому следует создавать более эффективные алгоритмы построения решения задачи (1)-(4). Такие алгоритмы можно получить на основе применения подхода [1, гл. 3]. Их разработке будут посвящены дальнейшие исследования авторов.

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему (см., например, [9]), этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости рядов

$$\mathbf{X}_0 + (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) + \dots + (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}) + \dots, \quad (23)$$

$$\mathbf{Y}_0 + (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_0) + \dots + (\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}) + \dots \quad (24)$$

Докажем равномерную по $t \in [0, \omega]$ сходимость рядов (23), (24). Для этого построим специальный сходящийся матричный степенной ряд,

который мажорирует на $[0, \omega]$ указанные матричные функциональные ряды. Из (21), (22) имеем соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k = \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega) & \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_1 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1})\mathbf{B}_1 + \right. \right. \\ & + (\mathbf{X}_k \mathbf{S}_1 \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{S}_1 \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{X}_k \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_k - \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_{k-1}) \left. \right] d\tau - \\ & - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1})\mathbf{B}_1 + \right. \\ & + (\mathbf{X}_k \mathbf{S}_1 \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{S}_1 \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{X}_k \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_k - \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_{k-1}) \left. \right] d\tau - \\ & \left. - \int_0^\omega [(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1})\mathbf{B}_1 + (\mathbf{X}_k \mathbf{S}_1 \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{S}_1 \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{X}_k \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_k - \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_{k-1})] d\tau \right\}, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{Y}_k = \tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}(\omega) & \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_2 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_2(\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}) + (\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1})\mathbf{B}_2 + \right. \right. \\ & + (\mathbf{Y}_k \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{Y}_k \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_{k-1}) \left. \right] d\tau - \\ & - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_2 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_2(\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}) + (\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1})\mathbf{B}_2 + \right. \\ & + (\mathbf{Y}_k \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{Y}_k \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_{k-1}) \left. \right] d\tau - \\ & - \int_0^\omega [(\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1})\mathbf{B}_2 + (\mathbf{Y}_k \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_{k-1}) + \\ & + (\mathbf{Y}_k \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_{k-1})] d\tau \left. \right\}, \quad k=1, 2, \dots \quad (26) \end{aligned}$$

Выполнив оценки по норме в (25), (26), получим оценки типа (18), (19):

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k\|_C \leq \\ & \leq \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 (\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|_C + \frac{1}{2} \alpha_1 \delta_2 \rho_1 \omega^2 \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}\|_C \right\} + \\ & \quad + \gamma_1 \left\{ \omega (\beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|_C + \delta_2 \rho_1 \omega \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}\|_C \right\}, \quad (27) \\ & \|\mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{Y}_k\|_C \leq \\ & \leq \gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_2 \mu_1 \rho_2 \omega^2 \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|_C + \frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 (\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}\|_C \right\} + \end{aligned}$$

$$+\gamma_2 \{ \mu_1 \rho_2 \omega \| \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \|_C + \omega (\beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \| \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \|_C \}, \quad k=1,2,\dots \quad (28)$$

Запишем оценки (27), (28) в матричной форме

$$\mathbf{Z}_k \leq \mathbf{Q} \mathbf{Z}_{k-1}, \quad k=1,2,\dots, \quad (29)$$

где

$$\mathbf{Z}_k = \begin{pmatrix} \| \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k \|_C \\ \| \mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{Y}_k \|_C \end{pmatrix}.$$

Далее на основании рекуррентной оценки (29) имеем явную оценку

$$\mathbf{Z}_k \leq \mathbf{Q}^k \mathbf{Z}_0, \quad k=1,2,\dots \quad (30)$$

Поскольку характеристические числа матрицы \mathbf{Q} расположены внутри единичного круга, то, используя оценку (30) и соответствующие мажоранты для рядов (23), (24), можно показать, что на основании [5; 7] последовательность $\{ \mathbf{X}_k(t), \mathbf{Y}_k(t) \}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in [0, \omega]$ к решению системы интегральных уравнений (10), (11), при этом имеет место оценка

$$\tilde{\mathbf{Z}}_i \leq (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^i \mathbf{Z}_0, \quad i=0,1,2,\dots, \quad (31)$$

где

$$\tilde{\mathbf{Z}}_i = \begin{pmatrix} \| \mathbf{X} - \mathbf{X}_i \|_C \\ \| \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_i \|_C \end{pmatrix}.$$

Используя оценку (30), нетрудно получить оценку области локализации решения задачи (1)-(4), определяемую алгоритмом (21), (22):

$$\mathbf{Z} \leq \tilde{\mathbf{Z}}_0 + (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Z}_0, \quad (32)$$

где

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \| \mathbf{X} \|_C \\ \| \mathbf{Y} \|_C \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_0 = \begin{pmatrix} \| \mathbf{X}_0 \|_C \\ \| \mathbf{Y}_0 \|_C \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Используя условия (6), (7), аналогичную оценку можно получить, исходя из системы интегральных уравнений (10), (11).

В самом деле, выполнив оценки по норме в тождествах (10), (11), получим

$$\mathbf{Z} \leq \mathbf{Q} \mathbf{Z} + \mathbf{R}, \quad (33)$$

где $\mathbf{R} = \text{colon}(r_1, r_2)$;

$$r_1 = \gamma_1 h_1 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \omega + 1 \right), \quad r_2 = \gamma_2 h_2 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \omega + 1 \right).$$

Используя положительную обратимость матрицы $\mathbf{E} - \mathbf{Q}$, из (33) получим оценку

$$\mathbf{Z} \leq (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R}. \quad (34)$$

Как видно, оценка (34) является коэффициентной. Чтобы воспользоваться оценкой (32), следует получить оценки для \mathbf{Z}_0 , $\tilde{\mathbf{Z}}_0$, т.е. эта оценка менее удобна для применения, чем оценка (34). Однако в случае $\mathbf{X}_0 = 0$, $\mathbf{Y}_0 = 0$ эти оценки совпадают.

Замечание 3. Отметим в соответствии с замечанием 1, что если принять $\|\mathbf{Q}\| < 1$, то оценка области локализации решения может быть получена в виде

$$\|\mathbf{Z}\| \leq \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{Q}\|}.$$

Аналогичная оценка имеет место для $\tilde{\mathbf{Z}}_i$:

$$\|\tilde{\mathbf{Z}}_i\| \leq \frac{\|\mathbf{Q}\|^i \|\mathbf{Z}_0\|}{1 - \|\mathbf{Q}\|}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, в настоящей работе получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости на компакте и дан эффективный алгоритм построения решения задачи (1)-(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
2. **Зубов, В.И.** Лекции по теории управления / В.И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
3. **Lucas, J.** Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games / J. Lucas // Applied Mathematics Letters, 1990. – V. 3. – №. 4. – P. 9-12.
4. **Murty, K.N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl., 1992. – V. 167. – P. 505-515.
5. **Демидович, Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
6. **Забрейко, П.П.** Принцип неподвижной точки и нелокальные теоремы о разрешимости для существенно нелинейных дифференциальных уравнений / П.П. Забрейко, В.Н. Лаптинский // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41. – № 1. – С. 5-9.
7. **Канторович, Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
8. **Гантмахер, Ф.Р.** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
9. **Бибиков, Ю.Н.** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – М.: Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 01.10.2009 г.

УДК 517.925

А.Н. БОНДАРЕВ, В.Н. ЛАПТИНСКИЙ

АНАЛИЗ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ГРИНА

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости многоточечной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова.

В данной работе рассматривается задача

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X(t) + \lambda X(t)B(t) + F(t), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^k M_i X(t_i, \lambda) = 0, \quad (2)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ – непрерывные $(n \times n)$ -матрицы на промежутке $I = [0, \omega]$, λ – скалярный вещественный параметр, M_i ($i = \overline{1, k}$) – заданные постоянные $(n \times n)$ -матрицы, $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = \omega$.

Уравнение (1) относится к многомерным системам дифференциальных уравнений специального вида (см., например [1-3]). Краевая задача (1), (2) является задачей типа [2] применительно к уравнению Ляпунова вида (1). Такие задачи играют важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1-6]. В данной работе с помощью метода [6] в невырожденном случае изучаются следующие вопросы: разрешимость задачи, построение ее решения и оценки его области локализации. Приведен модельный пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

Примем следующие обозначения:

$$M = \sum_{i=1}^k M_i, \quad \alpha_g = \max_t \int_0^\omega G(t, \tau) \cdot \|A(\tau)\| d\tau, \quad \beta_g = \max_t \int_0^\omega G(t, \tau) \cdot \|B(\tau)\| d\tau,$$

$$h_g = \max_t \int_0^\omega G(t, \tau) \cdot \|F(\tau)\| d\tau, \quad q_g = \alpha_g + \beta_g, \quad \delta = \max_{1 \leq p \leq k-1} \delta_p,$$

$$\delta_p = \max \left\{ \|M^{-1}M_1\|, \dots, \left\| M^{-1} \sum_{i=1}^p M_i \right\|, \left\| M^{-1} \sum_{i=p+1}^k M_i \right\|, \dots, \|M^{-1}M_k\| \right\},$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

где $t \in I$, $\|\bullet\|$ – любая подходящая норма матриц ($\|PQ\| \leq \|P\| \cdot \|Q\|$), например, норма в [7, с. 21], $C = C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ – банахово пространство непрерывных $(n \times n)$ -матриц.

Теорема. Пусть выполнены условия $\det M \neq 0$, $\varepsilon q_g < 1$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима, ее решение $X(t, \lambda)$ представимо в виде

$$X(t, \lambda) = X_0(t) + \lambda X_1(t) + \lambda^2 X_2(t) + \dots + \lambda^i X_i(t) + \dots, \quad (3)$$

при этом справедлива оценка

$$\|X(t, \lambda)\| \leq \frac{h_g}{1 - \varepsilon q_g}. \quad (4)$$

Доказательство. С помощью подхода [6, гл. 1] имеем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2),

$$X(t, \lambda) = \int_0^\omega G(t, \tau) [\lambda A(\tau) X(\tau, \lambda) + \lambda X(\tau, \lambda) B(\tau) + F(\tau)] d\tau, \quad (5)$$

где

$$G(t, \tau) = \begin{cases} M^{-1} \left(\sum_{i=1}^p M_i \right), t_p \leq \tau \leq t_{p+1} \leq t, p = 1, 2, \dots, j-1; \\ M^{-1} \left(\sum_{i=1}^j M_i \right), t_j \leq \tau \leq t \leq t_{j+1}, j = 1, 2, \dots, k-1; \\ -M^{-1} \left(\sum_{i=j+1}^k M_i \right), t_j \leq \tau \leq t \leq t_{j+1}; \\ M^{-1} \left(\sum_{i=j+q}^k M_i \right), t \leq t_{j+q-1} \leq \tau \leq t_{j+q}, p = 2, 3, \dots, k-j. \end{cases}$$

Запишем уравнение (5) в следующем виде:

$$X(t, \lambda) = \lambda \int_0^\omega G(t, \tau) [A(\tau) X(\tau, \lambda) + X(\tau, \lambda) B(\tau)] d\tau + \int_0^\omega G(t, \tau) F(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде ряда (3). Подставляя (3) в (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ ,

получим

$$X_0(t) = \int_0^{\omega} G(t, \tau) F(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$X_i(t) = \int_0^{\omega} G(t, \tau) [A(\tau) X_{i-1}(\tau) + X_{i-1}(\tau) B(\tau)] d\tau, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Исследуем вопросы сходимости, скорости сходимости ряда (3). Для этого построим соответствующий числовой мажорантный ряд. Выполним оценки по норме в (8), получим

$$\begin{aligned} \|X_i(t)\| &= \left\| \int_0^{\omega} G(t, \tau) [A(\tau) X_{i-1}(\tau) + X_{i-1}(\tau) B(\tau)] d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_0^{\omega} \|G(t, \tau) A(\tau) X_{i-1}(\tau)\| d\tau + \int_0^{\omega} \|G(t, \tau) X_{i-1}(\tau) B(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \int_0^{\omega} \|G(t, \tau)\| \cdot \|A(\tau)\| \cdot \|X_{i-1}(\tau)\| d\tau + \int_0^{\omega} \|G(t, \tau)\| \cdot \|X_{i-1}(\tau)\| \cdot \|B(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq \left(\int_0^{\omega} \|G(t, \tau)\| \cdot \|A(\tau)\| d\tau + \int_0^{\omega} \|G(t, \tau)\| \cdot \|B(\tau)\| d\tau \right) \|X_{i-1}\|_C = \\ &= (\alpha_g + \beta_g) \|X_{i-1}\|_C = q_g \|X_{i-1}\|_C. \end{aligned}$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|X_i\|_C \leq q_g \|X_{i-1}\|_C, \quad i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

На основании (9) имеем явную оценку

$$\|X_i\|_C \leq q_g^i \|X_0\|_C, \quad i = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Используя (10), составим числовой ряд

$$\|X_0\|_C + \varepsilon \|X_1\|_C + \varepsilon^2 \|X_2\|_C + \dots + \varepsilon^i \|X_i\|_C + \dots \quad (11)$$

Поскольку $\varepsilon q_g < 1$, то ряд (11) сходится. Легко видеть, что для суммы $S(\varepsilon)$ ряда (11) имеет место оценка (4). Тогда, очевидно, ряд (3) сходится равномерно по $t \in [0, \omega]$ в области $|\lambda| < 1/q_g$. Согласно [8, с. 160] сумма этого ряда представляет собой решение уравнения (6). Единственность решения $X(t, \lambda)$ следует из принципа сжатых отображений (см., например, [9, с. 605]), примененного к уравнению (6). Таким образом, теорема полностью доказана.

Используя оценку (10), нетрудно получить следующую оценку:

$$\|X(t, \lambda) - \tilde{X}_i(t, \lambda)\| \leq \frac{(\varepsilon q_g)^{i+1} h_g}{1 - \varepsilon q_g}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где $\tilde{X}_i(t, \lambda) = X_0(t) + \lambda X_1(t) + \lambda^2 X_2(t) + \dots + \lambda^i X_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Далее, наряду с принятыми, введем следующие обозначения:

$$\gamma = \|M^{-1}\|, \quad m = \sum_{i=1}^k \|M_i\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|,$$

$$\tilde{\alpha} = \int_0^\omega \|A(\tau)\| d\tau, \quad \tilde{\beta} = \int_0^\omega \|B(\tau)\| d\tau, \quad \tilde{h} = \int_0^\omega \|F(\tau)\| d\tau, \quad \tilde{q} = \gamma m (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}).$$

Замечание 1. Поскольку $\alpha_g \leq \delta \tilde{\alpha}$, $\beta_g \leq \delta \tilde{\beta}$, $h_g \leq \delta \tilde{h}$, то при выполнении условия $\det M \neq 0$ в области

$$|\lambda| < \frac{1}{\delta(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})} \quad (13)$$

задача (1), (2) однозначно разрешима, ее решение $X(t, \lambda)$ представимо в виде (3), при этом справедлива оценка

$$\|X(t, \lambda)\| \leq \frac{\delta \tilde{h}}{1 - \varepsilon \delta (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})}. \quad (14)$$

Замечание 2. Поскольку $\tilde{\alpha} \leq \alpha \omega$, $\tilde{\beta} \leq \beta \omega$, $\tilde{h} \leq h \omega$, то в данном случае ($\det M \neq 0$) вместо соотношений (13), (14), очевидно, можно принять коэффициентные соотношения

$$|\lambda| < \frac{1}{\delta(\alpha + \beta)\omega}, \quad \|X(t, \lambda)\| \leq \frac{\delta h \omega}{1 - \varepsilon \delta (\alpha + \beta)\omega}. \quad (15)$$

Отметим еще, что к соотношениям (15) можно прийти на основании оценок

$$\alpha_g \leq \alpha \max_t \int_0^\omega \|G(t, \tau)\| d\tau \leq \delta \alpha \omega, \quad \beta_g \leq \beta \max_t \int_0^\omega \|G(t, \tau)\| d\tau \leq \delta \beta \omega,$$

$$h_g \leq h \max_t \int_0^\omega \|G(t, \tau)\| d\tau \leq \delta h \omega.$$

В приведенных выше соотношениях можно воспользоваться следующей оценкой: $\delta < \gamma m$. Тогда соответствующие условия разрешимости станут более удобными для применения.

Замечание 3. С помощью конструктивного метода регуляризации [6, с. 71] в [10] получен алгоритм построения решения задачи (1), (2), более удобный для применения, чем алгоритм (8), однако соответствующие оценки грубее оценок, приведенных выше. В случае двухточечной краевой задачи конструктивный метод регуляризации и метод функций Грина в принципе дают одинаковые результаты (условия однозначной разрешимости, алгоритмы построения и оценки решения). Отметим, что этот случай весьма важен для теории и приложений дифференциальных уравнений, поскольку включает в себя периодическую краевую задачу.

Для иллюстрации применения полученных в данной работе результатов рассмотрим краевую задачу (1), (2) в случае $n = 3, k = 3$, полагая

$$A(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3t^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3t^2 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \\ 0 & t & -1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \text{diag}(1, 0, 0), \quad M_2 = \text{diag}(0, 1, 0), \quad M_3 = \text{diag}(0, 0, 1),$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = 1.$$

Применительно к этой задаче имеем

$$M = \text{diag}(1, 1, 1), \quad \gamma = 1, \quad m = 3, \quad \tilde{\alpha} = 1, \quad \tilde{\beta} = 1, \quad \tilde{h} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, $\tilde{q} = 6, |\lambda| < \frac{1}{6}$.

Найдем матрицы $X_k(t)$ ($k = 0, 1, 2$), используя алгоритм (7), (8):

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & -\frac{1}{2}t^2 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8} & -t + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} & t - 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} X_{1(11)} & X_{1(12)} & X_{1(13)} \\ X_{1(21)} & X_{1(22)} & X_{1(23)} \\ X_{1(31)} & X_{1(32)} & X_{1(33)} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} X_{1(11)} &= \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3, & X_{1(12)} &= 0, & X_{1(13)} &= -\frac{3}{10}t^5 - \frac{1}{4}t^4, \\ X_{1(21)} &= 0, & X_{1(22)} &= \frac{3}{10}t^5 - \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{8}t^2 - \frac{3}{320}, & X_{1(23)} &= -\frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{11}{192}, \\ X_{1(31)} &= -\frac{3}{10}t^5 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{20}, & X_{1(32)} &= -\frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + t^2 - \frac{7}{12}, & X_{1(33)} &= 0, \end{aligned}$$

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} X_{2(11)} & X_{2(12)} & X_{2(13)} \\ X_{2(21)} & X_{2(22)} & X_{2(23)} \\ X_{2(31)} & X_{2(32)} & X_{2(33)} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} X_{2(11)} &= \frac{9}{28}t^7 + \frac{7}{12}t^6 + \frac{4}{15}t^5, & X_{2(12)} &= 0, & X_{2(13)} &= -\frac{9}{80}t^8 - \frac{27}{140}t^7 - \frac{1}{12}t^6, & X_{2(21)} &= 0, \\ X_{2(22)} &= \frac{9}{80}t^8 - \frac{27}{140}t^7 + \frac{1}{48}t^6 + \frac{1}{8}t^5 - \frac{1}{16}t^4 - \frac{3}{320}t^3 + \frac{3}{320}t^2 - \frac{37}{86016}, \\ X_{2(23)} &= -\frac{9}{28}t^7 - \frac{1}{3}t^6 + \frac{7}{30}t^5 + \frac{1}{4}t^4 - \frac{11}{192}t^3 - \frac{11}{192}t^2 + \frac{169}{26880}, \\ X_{2(31)} &= \frac{9}{80}t^8 - \frac{27}{140}t^7 - \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{2}t^5 - \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{20}t^3 + \frac{1}{20}t^2 - \frac{1}{336}, \\ X_{2(32)} &= \frac{9}{28}t^7 + \frac{1}{12}t^6 - \frac{11}{15}t^5 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{7}{12}t^3 + \frac{7}{12}t^2 - \frac{71}{210}, & X_{2(33)} &= 0. \end{aligned}$$

Итак, получено приближенное решение $\tilde{X}_2(t, \lambda)$ задачи (1), (2), при этом на основании (12) имеет место оценка

$$\|X(t, \lambda) - \tilde{X}_2(t, \lambda)\| \leq 1,0340425531914894 \cdot 10^{-3}.$$

Найдем теперь приближенное решение $\tilde{X}_2(t, \lambda)$ в точках $t_i = 0,1 \cdot i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 10$) при $\lambda = 0,01$ (см. таблицы 1, 2, 3).

Таблица 1

Элементы $\tilde{X}_{2(11)}(t_i, \lambda)$, $\tilde{X}_{2(12)}(t_i, \lambda)$, $\tilde{X}_{2(13)}(t_i, \lambda)$
приближенного решения

t_i	$\tilde{X}_{2(11)}(t_i, \lambda)$	$\tilde{X}_{2(12)}(t_i, \lambda)$	$\tilde{X}_{2(13)}(t_i, \lambda)$
0	0	0	0
0,1	0,10000741699488096	0	-0,00500028001037441
0,2	0,20006534601142859	0	-0,02000496080899048
0,3	0,3002408643546429	0	-0,04502755103089823
0,4	0,4006192313295238	0	-0,08009479310384764
0,5	0,5013040792410715	0	-0,12525032482328868
0,6	0,6024176949942858	0	-0,18055839763337148
0,7	0,7041014084941667	0	-0,2461076772099459
0,8	0,8065161040457144	0	-0,32201515647756196
0,9	0,9098428709539286	0	-0,4084302157284696
1	1,0142838095238096	0	-0,505538869047619

Таблица 2

Элементы $\tilde{X}_{2(21)}(t_i, \lambda)$, $\tilde{X}_{2(22)}(t_i, \lambda)$, $\tilde{X}_{2(23)}(t_i, \lambda)$
приближенного решения

t_i	$\tilde{X}_{2(21)}(t_i, \lambda)$	$\tilde{X}_{2(22)}(t_i, \lambda)$	$\tilde{X}_{2(23)}(t_i, \lambda)$
0	0	-0,12509379301525297	0,49942771205357145
0,1	0	-0,1200827550774857	0,3994752350628572
0,2	0	-0,10505680909997678	0,29960214864214285
0,3	0	-0,08002796616367619	0,19977151961142853
0,4	0	-0,04500703070683391	0,09992845179071426
0,5	0	0	0
0,6	0	0,05499553026497565	-0,10010498854071437
0,7	0	0,11999396042794291	-0,20049612161142866
0,8	0	0,19502529204745184	-0,3013018143921429
0,9	0	0,28013875904975233	-0,4026697630628571
1	0	0,37540650460379466	-0,5047675558035715

Таблица 3

Элементы $\tilde{X}_{2(31)}(t_i, \lambda)$, $\tilde{X}_{2(32)}(t_i, \lambda)$, $\tilde{X}_{2(33)}(t_i, \lambda)$
приближенного решения

t_i	$\tilde{X}_{2(31)}(t_i, \lambda)$	$\tilde{X}_{2(32)}(t_i, \lambda)$	$\tilde{X}_{2(33)}(t_i, \lambda)$
0	-0,49950029761904763	-1,0058671428571428	0
0,1	-0,4945450346375304	-0,9057639235789287	0
0,2	-0,4796571229037714	-0,805449778712381	0
0,3	-0,45480211924872077	-0,7049316379525	0
0,4	-0,4199467581106286	-0,6042346869942857	0
0,5	-0,37506253976004467	-0,5034023865327382	0
0,6	-0,32012933813881905	-0,40249643666285706	0
0,7	-0,25513902215710177	-0,3015966704796428	0
0,8	-0,1800990797563428	-0,2008008606780952	0
0,9	-0,09503622951029222	-0,10022442295321426	0
1	0	0	0

Точное решение данной задачи имеет вид

$$X(t) = U(t)X(0)V(t) + U(t) \int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau V(t),$$

где

$$U(t) = \text{diag}(e^{0,01 \cdot t^3}, e^{0,01 \cdot t^3}, e^{-0,01 \cdot t^3}), \quad V(t) = \text{diag}(e^{0,01 \cdot t^2}, e^{-0,01 \cdot t^2}, e^{0,01 \cdot t^2}),$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1250937930295599 & 0,49942771149903764 \\ -0,4995002974928266 & -1,0058673020020594 & 0 \end{pmatrix}.$$

Точное численное решение в точках $t_i = 0,1 \cdot i$ ($i = 0,1,2,\dots,10$) при $\lambda = 0,01$ приведено в таблицах 4, 5, 6.

Таблица 4

Элементы $X_{11}(t_i)$, $X_{12}(t_i)$, $X_{13}(t_i)$ точного численного решения

t_i	$X_{11}(t_i)$	$X_{12}(t_i)$	$X_{13}(t_i)$
0	0	0	0
0,1	0,1000074169948913	0	-0,00500028001037469
0,2	0,20006534601317938	0	-0,02000496080908885
0,3	0,3002408643932476	0	-0,04502755103418506
0,4	0,40061923169545566	0	-0,08009479314574952
0,5	0,5013040814118752	0	-0,1252503251363224
0,6	0,6024177045309895	0	-0,1805583992942876
0,7	0,7041014424570571	0	-0,24610768414974474
0,8	0,8065162075755146	0	-0,3220151807746235
0,9	0,9098431508172531	0	-0,4084302899441866
1	1,0142844969519613	0	-0,5055390723935161

Таблица 5

Элементы $X_{21}(t_i)$, $X_{22}(t_i)$, $X_{23}(t_i)$ точного численного решения

t_i	$X_{21}(t_i)$	$X_{22}(t_i)$	$X_{23}(t_i)$
0	0	-0,1250937930295599	0,49942771149903764
0,1	0	-0,12008275508828477	0,39947523457405965
0,2	0	-0,1050568091046581	0,2996021483306568
0,3	0	-0,08002796616467198	0,19977151949489513
0,4	0	-0,04500703070688643	0,0999284517776532
0,5	0	0	0
0,6	0	0,05499553026496357	-0,10010498857734407
0,7	0	0,11999396042792053	-0,20049612253877602
0,8	0	0,1950252920475697	-0,30130182159081964
0,9	0	0,2801387590574348	-0,4026697970009814
1	0	0,375406504715792	-0,5047676764341472

Таблица 6

Элементы $X_{31}(t_i)$, $X_{32}(t_i)$, $X_{33}(t_i)$ точного численного решения

t_i	$X_{31}(t_i)$	$X_{32}(t_i)$	$X_{33}(t_i)$
0	-0,4995002974928266	-1,0058673020020594	0
0,1	-0,4945450345361205	-0,9057640790225759	0
0,2	-0,4796571228498668	-0,8054499222114623	0
0,3	-0,4548021192311773	-0,7049317611401104	0
0,4	-0,4199467581111333	-0,6042347832516626	0
0,5	-0,37506253977103027	-0,503402452884417	0
0,6	-0,32012933815890654	-0,40249647500048336	0
0,7	-0,2551390221789936	-0,3015966873654178	0
0,8	-0,18009907976866907	-0,20080086526094776	0
0,9	-0,09503622951218826	-0,10022442334180914	0
1	0	-0,00000000000000022	0

Для сравнения полученного приближенного решения с точным приведены таблицы 7, 8, 9.

Таблица 7

Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$X_{11}(t_i) - \tilde{X}_{2(11)}(t_i, \lambda)$	$X_{12}(t_i) - \tilde{X}_{2(12)}(t_i, \lambda)$	$X_{13}(t_i) - \tilde{X}_{2(13)}(t_i, \lambda)$
0	0	0	0
0,1	$1,033895191682177 \cdot 10^{-14}$	0	$2,8709673527416157 \cdot 10^{-16}$
0,2	$1,7507939542582562 \cdot 10^{-12}$	0	$9,836922942874082 \cdot 10^{-14}$
0,3	$3,8604675012265948 \cdot 10^{-11}$	0	$3,2868360810844877 \cdot 10^{-12}$
0,4	$3,659318403848033 \cdot 10^{-10}$	0	$4,190188473973677 \cdot 10^{-11}$
0,5	$2,1708037589718288 \cdot 10^{-9}$	0	$3,1303371006430325 \cdot 10^{-10}$
0,6	$9,53670376002691 \cdot 10^{-9}$	0	$1,6609161268554828 \cdot 10^{-9}$
0,7	$3,3962890388927747 \cdot 10^{-8}$	0	$6,9397988466946 \cdot 10^{-9}$
0,8	$1,0352980017724889 \cdot 10^{-7}$	0	$2,4297061529399144 \cdot 10^{-8}$
0,9	$2,7986332451490625 \cdot 10^{-7}$	0	$7,42157170163793 \cdot 10^{-8}$
1	$6,87428151735503 \cdot 10^{-7}$	0	$2,0334589712067697 \cdot 10^{-7}$

Таблица 8

Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$X_{21}(t_i) - \tilde{X}_{2(21)}(t_i, \lambda)$	$X_{22}(t_i) - \tilde{X}_{2(22)}(t_i, \lambda)$	$X_{23}(t_i) - \tilde{X}_{2(23)}(t_i, \lambda)$
0	0	$1,4306916762407695 \cdot 10^{-11}$	$5,545338077617146 \cdot 10^{-10}$
0,1	0	$1,0799069971589859 \cdot 10^{-11}$	$4,887975579848103 \cdot 10^{-10}$
0,2	0	$4,681324772271012 \cdot 10^{-12}$	$3,114860591679758 \cdot 10^{-10}$
0,3	0	$9,957867863619185 \cdot 10^{-13}$	$1,165333940456037 \cdot 10^{-10}$
0,4	0	$5,25135490647699 \cdot 10^{-14}$	$1,3061066117536768 \cdot 10^{-11}$
0,5	0	0	0
0,6	0	$1,2087553180606392 \cdot 10^{-14}$	$3,6629699273760252 \cdot 10^{-11}$
0,7	0	$2,238487173400472 \cdot 10^{-14}$	$9,27347365564657 \cdot 10^{-10}$
0,8	0	$1,1785017406396037 \cdot 10^{-13}$	$7,198676765796107 \cdot 10^{-9}$
0,9	0	$7,682465774649927 \cdot 10^{-12}$	$3,3938124255339375 \cdot 10^{-8}$
1	0	$1,119973558338927 \cdot 10^{-10}$	$1,206305757506243 \cdot 10^{-7}$

Таблица 9

Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$X_{31}(t_i) - \tilde{X}_{2(31)}(t_i, \lambda)$	$X_{32}(t_i) - \tilde{X}_{2(32)}(t_i, \lambda)$	$X_{33}(t_i) - \tilde{X}_{2(33)}(t_i, \lambda)$
0	$1,2622103362502912 \cdot 10^{-10}$	$1,591449165783132 \cdot 10^{-7}$	0
0,1	$1,0140993600415982 \cdot 10^{-10}$	$1,5544364728725668 \cdot 10^{-7}$	0
0,2	$5,390460300347399 \cdot 10^{-11}$	$1,43499081284304 \cdot 10^{-7}$	0
0,3	$1,7543466679370567 \cdot 10^{-11}$	$1,2318761033469627 \cdot 10^{-7}$	0
0,4	$5,047073869945962 \cdot 10^{-13}$	$9,625737684704205 \cdot 10^{-8}$	0
0,5	$1,0985601317514693 \cdot 10^{-11}$	$6,635167881796633 \cdot 10^{-8}$	0
0,6	$2,0087487229147882 \cdot 10^{-11}$	$3,8337626295792404 \cdot 10^{-8}$	0
0,7	$2,1891821688768687 \cdot 10^{-11}$	$1,6885775000474723 \cdot 10^{-8}$	0
0,8	$1,2326278886476416 \cdot 10^{-11}$	$4,582852569656737 \cdot 10^{-9}$	0
0,9	$1,8960388814548423 \cdot 10^{-12}$	$3,8859487849762786 \cdot 10^{-10}$	0
1	0	$2,220446049250313 \cdot 10^{-16}$	0

Сравнительный анализ результатов выполненных вычислений показывает, что полученные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) и предложенный алгоритм построения ее решения, а также соответствующие оценки вполне приемлемы для отыскания с заданной точностью приближенных аналитических решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зубов, В.И.** Лекции по теории управления / В.И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
2. **Murty, K.N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – V. 167. – P. 505-515.
3. **Параев, Ю.И.** Уравнения Ляпунова и Риккати / Ю.И. Параев. – Томск: Томский госуниверситет, 1989. – 166 с.
4. **Бойчук, А.А.** Конструктивные методы анализа краевых задач / А.А. Бойчук. – Киев: Наукова думка, 1990. – 96 с.
5. **Ешуков, Л.Н.** Об одной функциональной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений / Л.Н. Ешуков // Успехи матем. наук. – 1958. – Т. 13. – Вып. 3 (81). – С. 191-196.
6. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
7. **Демидович, Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
8. **Рисс, Ф.** Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: ИЛ, 1954. – 500 с.
9. **Канторович, Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
10. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ многоточечной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова в невырожденном случае / В.Н. Лаптинский, А.Н. Бондарев. – Могилев, 2009. – 38 с. – (Препринт / Нац. акад. наук Беларуси. Ин-т технол. металлов; № 13).

Поступила в редакцию 02.07.2009 г.

УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

ОБ ОПЕРАЦИИ $[]_{l,\sigma,k}$

В предыдущих работах автора изучалась l -арная операция $[]_{l,\sigma,k}$, которая была определена для любых $l \geq 2$, $k \geq 2$ и произвольной подстановки $\sigma \in S_k$ на k -ой декартовой степени A^k полугруппы A . В данной работе в определении операции $[]_{l,\sigma,k}$ полугруппа заменяется произвольным группоидом. В связи с этим возникает естественный вопрос: какие из полученных ранее результатов об операции $[]_{l,\sigma,k}$ для случая полугрупп окажутся верными и для случая произвольных группоидов? Приведены примеры таких подстановок, а группоид A содержит более одного элемента, то в l -арном группоиде $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ нет единицы; если к тому же группоид A обладает единицей, то l -арный группоид $\langle A^k, []_{l,\sigma,k} \rangle$ неабелев.

1. Определение. Пусть A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k . Определим на A^k вначале бинарную операцию:

$$\mathbf{x} \circ_{\sigma} \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \circ_{\sigma} (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \dots, x_k y_{\sigma(k)}), \quad (1)$$

а затем l -арную операцию:

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{x}_1 \circ_{\sigma} (\mathbf{x}_2 \circ_{\sigma} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \circ_{\sigma} (\mathbf{x}_{l-1} \circ_{\sigma} \mathbf{x}_l)) \dots)). \quad (2)$$

Понятно, что операция $[]_{2,\sigma,k}$ совпадает с операцией \circ_{σ} .

2. Замечание. Легко заметить, что если $\sigma = (12 \dots k)$, то операция \circ_{σ} совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \circ (y_1, y_2, \dots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \dots, x_{k-1} y_k, x_k y_1)$$

из [1, определения 2.2.3], а операция $[]_{l,\sigma,k}$ – с операцией $[]_{l,k}$ из того же определения. Операции \circ и $[]_{l,k}$ впервые были определены в [2]. Там же в [2] впервые была определена и операция $[]_{l,\sigma,k}$ для случая полугруппы A . Заметим также, что операция $[]_{n,n-1}$ аналогична n -арной операции, которую Пост определил на множестве всех n -арных подстановок [3].

3. Теорема. Пусть A – полугруппа,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Доказательство. Полагая

$$\mathbf{x}_{l-1} \circ_{\sigma} \mathbf{x}_l = (y_1^{(l-1)}, y_2^{(l-1)}, \dots, y_k^{(l-1)}),$$

$$\mathbf{x}_{l-2} \circ (\mathbf{x}_{l-1} \circ \mathbf{x}_l) = (y_1^{(l-2)}, y_2^{(l-2)}, \dots, y_k^{(l-2)}),$$

.....

$$\mathbf{x}_2 \circ (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \circ (\mathbf{x}_{l-1} \circ \mathbf{x}_l)) \dots) = (y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \dots, y_k^{(2)})$$

и используя (1) и (2), получим

$$y_j^{(l-1)} = x_{(l-1)j} x_{l\sigma(j)},$$

$$y_j^{(l-2)} = x_{(l-2)j} y_{\sigma(j)}^{(l-1)} = x_{(l-2)j} x_{(l-1)\sigma(j)} x_{l\sigma(\sigma(j))} = x_{(l-2)j} x_{(l-1)\sigma(j)} x_{l\sigma^2(j)},$$

.....

$$y_j^{(2)} = x_{2j} x_{3\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-3}(j)} x_{l\sigma^{l-2}(j)},$$

$$y_j = x_{1j} y_{\sigma(j)}^{(2)} = x_{1j} x_{2\sigma(j)} x_{3\sigma^2(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-3}(\sigma(j))} x_{l\sigma^{l-2}(\sigma(j))} =$$

$$= x_{1j} x_{2\sigma(j)} x_{3\sigma^2(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, что если A – полугруппа, то определение 1 и определение 3.1.4 из [1] определяют одну и ту же l -арную операцию. Можно также сказать, что определение 1 обобщает l -арную операцию 3.1.4 из [1], на случай группоидов. Из теоремы 3, если учесть замечание 2, вытекает предложение 3.1.5 [1].

Многие утверждения из [1] об операции $[]_{l, k}$ могут быть обобщены на случай операции $[]_{l, \sigma, k}$. Например, следующие две леммы, являющиеся следствиями определения 1, обобщают леммы 2.2.4 и 2.2.5 из [1] соответственно.

4. Лемма. Пусть A – группоид, $m \in \{1, \dots, l - 2\}$. Тогда

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_m [\mathbf{x}_{m+1} \dots \mathbf{x}_l]_{l-m, \sigma, k}]_{m+1, \sigma, k}$$

в частности,

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{x}_1 \circ [\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l-1, \sigma, k}$$

$$[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-2} (\mathbf{x}_{l-1} \circ \mathbf{x}_l)]_{l-1, \sigma, k}.$$

5. Лемма. Пусть A – группоид с единицей 1,

$$m \in \{1, \dots, l - 1\}, \mathbf{e} = (\underbrace{1, \dots, 1}_k) \in A^k, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in A^k.$$

Тогда

$$[\underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{e}; [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_m \underbrace{\mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{l-m}]_{l, \sigma, k} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_m]_{m, \sigma, k}.$$

Следующее предложение обобщает предложение 2.2.7 из [1].

6. Предложение. Если A – группоид с единицей 1, содержащий более одного элемента, σ – нетождественная подстановка из S_k , то операция \circ не является ассоциативной.

Доказательство. Для $x, y, z \in A^k$ положим

$$(x \circ_{\sigma} y) \circ_{\sigma} z = (u_1, u_2, \dots, u_k), \quad x \circ_{\sigma} (y \circ_{\sigma} z) = (v_1, v_2, \dots, v_k).$$

Тогда, согласно определению операции \circ_{σ} ,

$$u_j = x_j y_{\sigma(j)} z_{\sigma(j)}, \quad v_j = x_j y_{\sigma^2(j)} z_{\sigma^2(j)}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Если теперь положить $x_j = y_{\sigma(j)} = z_{\sigma(j)} = 1$, то $u_j = 1$, $v_j = z_{\sigma^2(j)}$. Так как σ – нетождественная подстановка, то $\sigma^2(j) \neq \sigma(j)$, для некоторого $j = 1, \dots, k$. Поэтому $v_j = z_{\sigma^2(j)}$ можно выбрать отличным от $z_{\sigma(j)} = 1$, откуда следует $u_j \neq v_j$. Следовательно,

$$(x \circ_{\sigma} y) \circ_{\sigma} z \neq x \circ_{\sigma} (y \circ_{\sigma} z).$$

Предложение доказано.

В [1] большинство результатов об операции $[\]_{l, \sigma, k}$ получены для случая, когда группоид A является полугруппой. Возникает естественный вопрос: какие из этих результатов останутся верными, если отказаться от ассоциативности операции в группоиде A ?

7. Теорема. Пусть σ – нетождественная подстановка, а группоид A содержит единицу 1 и элемент a , отличный от 1. Тогда l -арный группоид $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ неабелев.

Доказательство. Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in \{1, \dots, k\}$, что $\sigma(j) = s \neq j$, где $j \in \{1, \dots, k\}$. Положив

$$e = (\underbrace{1, \dots, 1}_k), \quad a = (\underbrace{1, \dots, 1}_{s-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-s})$$

и применив лемму 5, получим

$$[\underbrace{ae \dots e}_{l-1}]_{l, \sigma, k} = a = (\underbrace{1, \dots, 1}_{s-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-s}),$$

$$[\underbrace{eae \dots e}_{l-2}]_{l, \sigma, k} = [ea]_{2, \sigma, k} = e \circ_{\sigma} a =$$

$$= (\underbrace{1, \dots, 1}_k) \circ_{\sigma} (\underbrace{1, \dots, 1}_{s-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-s}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-j}).$$

Следовательно,

$$[\underbrace{ae \dots e}_{l-1}]_{l, \sigma, k} \neq [\underbrace{eae \dots e}_{l-2}]_{l, \sigma, k},$$

то есть l -арный группоид $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ не является абелевым. Предложение доказано.

Если в теореме 7 положить $\sigma = (12 \dots k)$, то получим предложение 2.8.1 [1].

Если в теореме 7 в качестве группоида A взять полугруппу, то получим предложение 3.5.1 [1].

8. Лемма. Если σ – нетождественная подстановка, а группоид A содержит более одного элемента, то в группоиде $\langle A^k, \circ \rangle$ нет единицы.

Доказательство. Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in \{1, \dots, k\}$, что $\sigma(j) = s \neq j$, где $s \in \{1, \dots, k\}$.

Предположим, что $e = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ – единица в $\langle A^k, \circ \rangle$, и для любого $a \in A$ положим

$$a = (e_1, \dots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \dots, e_k).$$

Так как e – единица в $\langle A^k, \circ \rangle$, то

$$a \circ e = a = (e_1, \dots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \dots, e_k), \tag{3}$$

а, согласно определению 1, j -ая компонента элемента $a \circ e$ равна $a e_{\sigma(j)} = a e_s$, откуда и из (3) следует $a = a e_s$. Последнее равенство верно для любого $a \in A$, в частности $e_j = e_j e_s$.

Так как e – единица в $\langle A^k, \circ \rangle$, то

$$e \circ a = a = (e_k, \dots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \dots, e_k), \tag{4}$$

а, согласно определению 1, j -ая компонента элемента $e \circ a$, ввиду $\sigma(j) = s \neq j$, равна $e_j e_{\sigma(j)} = e_j e_s$, откуда и из (4) следует $a = e_j e_s$. Сравнивая это равенство с полученным выше равенством $e_j = e_j e_s$, получаем $a = e_j$, что невозможно, если выбрать $a \neq e_j$. Лемма доказана.

9. Теорема. Если σ – нетождественная подстановка, а группоид A содержит более одного элемента, то в l -арном группоиде $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ нет единицы.

Доказательство. Ввиду леммы 8, считаем $l \geq 3$.

Так как σ – нетождественная подстановка, то найдется такое $j \in \{1, \dots, k\}$, что $\sigma(j) = s \neq j$, где $s \in \{1, \dots, k\}$.

Предположим, что $e = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ – единица в $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, и для любого $a \in A$ положим

$$a = (e_1, \dots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \dots, e_k).$$

Так как e – единица в $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, то

$$[\underbrace{a e \dots e}_{l-1}]_{l, \sigma, k} = a = (e_1, \dots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \dots, e_k), \tag{5}$$

а так как по лемме 4

$$[\underline{ae\dots e}]_{l, \sigma, k} = [ae[\underline{e\dots e}]_{l-2, \sigma, k}]_{3, \sigma, k},$$

то, положив

$$[\underline{ae\dots e}]_{l, \sigma, k} = (u_1, \dots, u_k), [\underline{e\dots e}]_{l-2, \sigma, k} = (v_1, \dots, v_k)$$

и используя определение операции $[\]_{l, \sigma, k}$, получим $u_j = a(e_{\sigma(j)}v_{\sigma^2(j)})$, откуда и из (5) следует $a = a(e_{\sigma(j)}v_{\sigma^2(j)})$. Последнее равенство верно для любого $a \in A$, в частности

$$e_j = e_j(e_{\sigma(j)}v_{\sigma^2(j)}) = e_j(e_s v_{\sigma(s)}). \quad (6)$$

Так как e – единица в $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$, то

$$[\underline{ea\dots e}]_{l, \sigma, k} = a = (e_1, \dots, e_{j-1}, a, e_{j+1}, \dots, e_k), \quad (7)$$

а так как по лемме 4

$$[\underline{ea\dots e}]_{l, \sigma, k} = [\underline{ea}[\underline{e\dots e}]_{l-2, \sigma, k}]_{3, \sigma, k}$$

то, положив

$$[\underline{ea\dots e}]_{l, \sigma, k} = (w_1, \dots, w_k)$$

и используя определение операции $[\]_{l, \sigma, k}$, а также условие $\sigma(j) = s \neq j$, получим

$$w_j = e_j(e_{\sigma(j)}v_{\sigma^2(j)}) = e_j(e_s v_{\sigma(s)}),$$

где (v_1, \dots, v_k) те же, что и выше. Сравнивая w_j с j -ой компонентой в (7), получаем $a = e_j(e_s v_{\sigma(s)})$, откуда и из (6) вытекает $a = e_j$ для любого $a \in A$. Последнее равенство возможно не всегда, так как в A имеются элементы, отличные от e_j . Теорема доказана.

Если в теореме 9 положить $\sigma = (12 \dots k)$, то получим предложение 2.10.7 [1].

Если в теореме 9 в качестве группоида A взять полугруппу, то получим предложение 3.7.3 [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
2. Гальмак, А.М. Многочестные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28-34.
3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48. – № 2. – P. 208-350.

Поступила в редакцию 21.09.2009 г.

УДК 512.542

С.Ф. КАМОРНИКОВ, Л.А. ВОРОБЕЙ, И.А. КУЗМЕНКОВА

О РЕШЕТКЕ РЕГУЛЯРНЫХ ТРАНЗИТИВНЫХ ПОДГРУППОВЫХ ФУНКТОРОВ

В работе изучаются свойства регулярных транзитивных подгрупповых функторов. Доказывается, что решетка всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов является решеткой с дополнением.

В работе рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения стандартны, их можно найти в ([1; 2]). Напомним лишь некоторые. отображение θ , сопоставляющее каждой группе G некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется *подгрупповым функтором*, если для любого изоморфизма φ каждой группы G выполняется равенство

$$(\theta(G))^{\varphi} = \theta(G^{\varphi}).$$

Подгрупповой функтор θ называется *регулярным*, если для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ имеет место

$$(\theta(A))^{\varphi} = \theta(B), (\theta(B))^{\varphi} \subseteq \theta(A),$$

и, кроме того, $G \in \theta(G)$ для любой группы G .

Если же из $K \in \theta(H)$ и $H \in \theta(G)$ всегда следует $K \in \theta(G)$, то подгрупповой функтор θ называется *транзитивным*.

В теории формаций идея регулярного транзитивного подгруппового функтора связана с \mathfrak{F} -субнормальными (Картер, Хоукс [3], Л.А. Шеметков [4]) и \mathfrak{F} -достижимыми (Кегель [5]) подгруппами, естественно обобщающими понятие субнормальной подгруппы.

Следуя [1], обозначим через $Reg_{tr}(\mathcal{C})$ множество всех регулярных транзитивных подгрупповых функторов и введем на этом множестве частичный порядок \leq , полагая, что отношение $\theta_1 \leq \theta_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой группы G справедливо включение

$$\theta_1(G) \subseteq \theta_2(G).$$

Для совокупности $\{\theta_i | i \in I\}$ из $Reg_{tr}(\mathcal{C})$ определим пересечение $\theta = \bigcap_{i \in I} \theta_i$ следующим образом:

$$\theta(G) = \bigcap_{i \in I} \theta_i(G)$$

для любой группы G .

Простая проверка показывает, что θ — регулярный транзитивный подгрупповой функтор. Этот функтор является точной нижней

гранью множества $\{\theta_i | i \in I\}$ в $Reg_{tr}(\mathcal{G})$. Таким образом, $Reg_{tr}(\mathcal{G})$ – полная решетка, единицей которой является подгрупповой функтор 1_G , выделяющий в каждой группе все ее подгруппы, а нулем – тривиальный подгрупповой функтор 0_G , выделяющий в каждой группе G только саму группу G .

Подгрупповой функтор θ , рассматриваемый только на множестве всех разрешимых групп, называется разрешимым. Множество всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов обозначим через $Reg_{tr}(\mathcal{C})$.

В [6] под номером 1.5.26 поставлен следующий вопрос: “Существуют ли в решетке $Reg_{tr}(\mathcal{G})$ дополняемые элементы, отличные от 0_G и 1_G ?”. Частично ответ на этот вопрос дан в работе [7], где построены формационные примеры нетривиальных регулярных транзитивных подгрупповых функторов, имеющих дополнения в $Reg_{tr}(\mathcal{G})$. Практически исчерпывающий ответ на вопрос 1.5.26 предлагается в данной работе: в $Reg_{tr}(\mathcal{G})$ существует континуум дополняемых элементов, а в $Reg_{tr}(\mathcal{C})$ все элементы дополняемы.

Таким образом, ситуация с дополняемостью элементов в решетках $Reg_{tr}(\mathcal{G})$ и $Reg_{tr}(\mathcal{C})$ полярно отличается от той ситуации, которая имеет место в решетке $Reg(\mathcal{G})$ всех регулярных подгрупповых функторов. Напомним, что в $Reg(\mathcal{G})$ дополняемы только нулевой и единичный элементы ([8]).

Отметим еще, что исследования выполнены в контексте общей задачи классификации всех регулярных транзитивных подгрупповых функторов, предложенной А.Н. Скибой (вопрос 1.2.12 из [2]).

Пусть θ – подгрупповой функтор. Подгруппа H группы G называется:

1) θ -субнормальной, если либо $H=G$, либо существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G,$$

что $H_{i-1} \in \theta(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$;

2) θ -субабнормальной, если либо $H=G$, либо существует такая максимальная цепь

$$H = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = G,$$

что $M_{i-1} \notin \theta(M_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$.

Если θ – подгрупповой функтор, то множество всех θ -субнормальных подгрупп группы G будем обозначать $sub_\theta(G)$, а множество всех ее θ -субабнормальных подгрупп – $subab_\theta(G)$.

Лемма 1. Если θ – подгрупповой функтор, то:

1) функция $sub_\theta : G \mapsto sub_\theta(G)$ является подгрупповым функтором;

2) функция $\text{subab}_\theta : G \mapsto \text{subab}_\theta(G)$ является подгрупповым функтором.

Доказательство. Утверждение 1) доказывается непосредственной проверкой.

2) Пусть $H \in \text{subab}_\theta(G)$ и φ – изоморфизм группы G . Если $H=G$, то, очевидно, $H^\varphi \in \text{subab}_\theta(G^\varphi)$. Значит, $H \neq G$ и существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G,$$

что $H_{i-1} \notin \theta(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим максимальную цепь

$$H^\varphi = H_0^\varphi \subset H_1^\varphi \subset \dots \subset H_n^\varphi = G^\varphi.$$

Предположим, что $H_{k-1}^\varphi \in \theta(H_k^\varphi)$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда из того, что θ – подгрупповой функтор, имеем

$$H_{k-1} = (H_{k-1}^\varphi)^{\varphi^{-1}} \in (\theta(H_k^\varphi))^{\varphi^{-1}} = \theta\left((H_k^\varphi)^{\varphi^{-1}}\right) = \theta(H_k)$$

и, тем самым, приходим к противоречию. Таким образом, $H^\varphi \in \text{subab}_\theta(G^\varphi)$, а значит, $(\text{subab}_\theta(G))^\varphi \subseteq \text{subab}_\theta(G^\varphi)$. Обратное включение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 2. Если θ – регулярный подгрупповой функтор, то θ -субабнормальный подгрупповой функтор subab_θ также является регулярным.

Доказательство. Пусть подгруппа H группы G является θ -субабнормальной и $H \neq G$. Тогда существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G, \tag{1}$$

что H_{i-1} не принадлежит $\theta(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G . И пусть H_{i-1} и H_i – такие члены цепи (1), что $H_{i-1}N \neq N$. Покажем, что $H_{i-1}N$ – максимальная подгруппа в H_iN . Допустим, что $H_{i-1}N \subset L \subset H_iN$ для некоторой подгруппы L . Тогда поскольку подгруппа H_{i-1} максимальна в H_i , то из $H_{i-1} \subseteq H_{i-1} \cap L \subseteq H_i \cap L \subseteq H_i$ следует, что либо $H_i \cap L = H_{i-1}$, либо $H_i \cap L = H_i$. Пусть имеет место первое. Тогда поскольку

$$L = L \cap H_iN = (L \cap H_i)N,$$

то $L = H_{i-1}N$. Противоречие. Значит, $H_i \cap L = H_i$, то есть $H_i \subseteq L$. Поэтому $H_iN \subseteq L$. Противоречие.

Итак, ряд

$$HN/N = H_0N/N \subseteq H_1N/N \subseteq \dots \subseteq H_nN/N = G/N \quad (2)$$

таков, что в нем для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеет место одно из двух условий:

- 1) $H_{i-1}N/N = H_iN/N$;
- 2) $H_{i-1}N/N$ – максимальная подгруппа в H_iN/N .

Не нарушая общности рассуждений, мы можем считать, что все члены ряда (2) различны.

Допустим, что $H_{i-1}N/N \in \theta(H_iN/N)$. Так как из максимальности подгруппы H_{i-1} в H_i справедливы равенства

$$H_{i-1}/H_i \cap N = H_i \cap H_{i-1}N/H_i \cap N = H_{i-1}(H_i \cap N)/H_i \cap N,$$

то $H_{i-1}/H_i \cap N \in \theta(H_i/H_i \cap N)$. Отсюда и из регулярности подгруппового функтора θ следует, что $H_{i-1} \in \theta(H_i)$. Полученное противоречие доказывает, что $HN/N \in \text{subab}_\theta(G/N)$.

Пусть теперь $H/N \in \text{subab}_\theta(G/N)$ и $H/N \neq G/N$. Тогда существует такая максимальная цепь

$$H/N = H_0/N \subset H_1/N \subset \dots \subset H_k/N = G/N,$$

что H_{i-1}/N не принадлежит $\theta(H_i/N)$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Так как θ – регулярный подгрупповой функтор, то H_{i-1} не принадлежит $\theta(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Значит, $H \in \text{subab}_\theta(G)$. Лемма доказана.

Если θ – регулярный подгрупповой функтор, то непосредственной проверкой устанавливается справедливость следующих лемм, имеющих самостоятельное значение.

Лемма 3. Пусть θ – регулярный подгрупповой функтор. Тогда θ -субнормальный подгрупповой функтор sub_θ также является регулярным.

Лемма 4. Для любого подгруппового функтора θ подгрупповые функторы sub_θ и subab_θ являются транзитивными.

Пусть θ – подгрупповой функтор. Собственная подгруппа H группы G называется θ -максимальной, если $H \in \theta(G)$ и всегда из $H \subseteq K \subseteq G$ и $K \in \theta(G)$ следует, что либо $K = H$, либо $K = G$.

Лемма 5. Пусть θ – разрешимый регулярный подгрупповой функтор. Если H – θ -максимальная подгруппа группы G , то подгруппа H максимальна в группе G .

Доказательство. Пусть G – разрешимая группа. Предположим, что подгруппа H не максимальна в G . Пусть M – максимальная подгруппа группы G , содержащая H . Пусть $C = \text{Core}_G(M)$ и K/C – главный фактор группы G . Заметим, что $G = MK$ и $M \cap K = C$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $C \subseteq H$. Допустим, что $NK = G$. Тогда из $H \subseteq M$ и $M \cap K = C$ следует, что $H = M$, то есть H – максимальная подгруппа группы G . Пришли к противоречию. Значит, $NK \neq G$. Тогда из определения подгруппового функтора следует, что $NK/K \in \theta(G/K)$, а следовательно, $NK \in \theta(G)$. Так как K не содержится в H , то $H \subset NK$. Кроме того, $NK \subset G$. Пришли к противоречию с тем, что H – θ -максимальная подгруппа группы G .

2. Пусть C не входит в H . Тогда $H \subset HC \subseteq M \subseteq G$ и $HC \in \theta(G)$. Снова пришли к противоречию. Лемма доказана.

Следуя [9], подгрупповой функтор θ будем называть *включающим*, если для любой подгруппы U группы G всегда из $H \in \theta(G)$ и $H \subseteq U \subseteq G$ следует $H \in \theta(U)$.

Лемма 6. Пусть θ – разрешимый регулярный транзитивный включающий подгрупповой функтор. Если H – собственная подгруппа группы G и $H \in \theta(G)$, то существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G,$$

что $H_i \in \theta(G)$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Заключим H в θ -максимальную подгруппу группы G . Ввиду леммы 5 имеем, что M – максимальная подгруппа группы G . Так как функтор θ является включающим, то из $H \in \theta(G)$ следует $H \in \theta(M)$. Теперь из $|M| \leq |G|$ заключаем, что существует максимальная цепь

$$H = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_t = M,$$

в которой $M_i \in \theta(M)$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots, t$. Так как функтор θ транзитивен, то из $M \in \theta(G)$ следует, что $M_i \in \theta(G)$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots, t$. Значит, цепь

$$H = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_t = M \subset G$$

является искомой. Лемма доказана.

Следующая теорема устанавливает связь разрешимых регулярных транзитивных включающих подгрупповых функторов с рассмотренными выше θ -субнормальными подгрупповыми функторами.

Теорема 1. Пусть θ – разрешимый регулярный транзитивный включающий подгрупповой функтор. Тогда $\theta = \text{sub}_\theta$.

Доказательство. Пусть G – произвольная разрешимая группа и $H \in \theta(G)$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $H \neq G$. Тогда ввиду леммы 6 существует такая максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G,$$

что $H_i \in \theta(G)$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Так как подгрупповой функтор θ является включающим, то $H_{i-1} \in \theta(H_i)$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, $\theta(G) \subseteq \text{sub}_\theta(G)$.

Пусть теперь $K \in \text{sub}_\theta(G)$. Тогда ввиду транзитивности функтора θ имеем, что $K \in \theta(G)$. Таким образом, $\text{sub}_\theta(G) \subseteq \theta(G)$. Теорема доказана.

Замечание. Не каждый регулярный транзитивный подгрупповой функтор θ является θ -субнормальным. Например, подгрупповой функтор sn , выделяющий в каждой группе G все ее субнормальные подгруппы, не является sn -субнормальным, так как для простой неабелевой группы A справедливы равенства $\text{sn}(A) = \{1, A\}$, $\text{sub}_{\text{sn}}(A) = \{A\}$. Поэтому условие разрешимости функтора θ в теореме 1 существенно и его отбросить нельзя.

Отметим еще, что в [10] леммы 5 и 6 приведены для так называемых ЕТР-функторов, которые являются включающими.

Лемма 7. Пусть θ – разрешимый регулярный транзитивный подгрупповой функтор. Тогда и только тогда θ -подгруппа H разрешимой группы G является θ -субабнормальной в G , когда $H = G$.

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Пусть тогда G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не выполняется, т.е. в G имеется собственная θ -субабнормальная θ -подгруппа H .

Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G , то ввиду регулярности подгруппового функтора θ и на основании леммы 2 имеем, что HN/N – θ -субабнормальная θ -подгруппа группы G/N . Так как $|G/N| < |G|$, то для G/N лемма выполняется, а потому $HN/N = G/N$ и $HN = G$. Если $N \subseteq H$, то $H = G$ и мы приходим к противоречию с выбором группы G .

Значит, N не содержится в H . Так как группа G разрешима, а N – ее минимальная нормальная подгруппа, то H – максимальная подгруппа группы G . Ввиду условия леммы имеем, что $H \in \theta(G)$. А так как подгруппа H является θ -субабнормальной в G , то ввиду максимальной H в G имеем, что $H \in \theta(G)$. Снова пришли к противоречию. Значит, $H = G$. Лемма доказана.

Теорема 2. Решетка всех разрешимых регулярных транзитивных подгрупповых функторов является решеткой с дополнением.

Доказательство. Пусть θ – произвольный элемент решетки $\text{Reg}_{tr}(\mathfrak{S})$, а $\tau = \text{subab}_\theta$. Ввиду лемм 2 и 4 подгрупповой функтор τ является регулярным и транзитивным. Пусть $\alpha = \theta \vee \tau$ – точная верхняя грань множества $\{\theta, \tau\}$ в решетке $\text{Reg}_{tr}(\mathfrak{S})$. Тогда, в частности, $\theta \leq \alpha$, $\tau \leq \alpha$, а значит, $\theta(G) \subseteq \alpha(G)$ и $\tau(G) \subseteq \alpha(G)$ для любой группы G .

Пусть H – произвольная подгруппа разрешимой группы G и $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_t = G$ – произвольная максимальная цепь, соединяющая подгруппу H с группой G . Очевидно, что для любого $i = 1, 2, \dots, t$ либо $H_{i-1} \in \theta(H_i)$, либо $H_{i-1} \notin \theta(H_i)$, а значит, либо $H_{i-1} \in \theta(H_i)$, либо $H_{i-1} \in \tau(H_i)$. Поэтому $H_{i-1} \in (\theta \vee \tau)(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Так как подгрупповой функтор $\alpha = \theta \vee \tau$ является транзитивным, то $H \in \alpha(G)$. Следовательно, $\alpha(G)$ – множество всех подгрупп группы G . Таким образом, $\theta \vee \tau = 1_G$ – единица решетки $\text{Reg}_\tau(\mathcal{G})$.

Ввиду леммы 7, θ -подгруппа H разрешимой группы G является θ -субабнормальной тогда и только тогда, когда $H = G$. Поэтому для любой разрешимой группы G справедливо равенство $\theta(G) \cap \tau(G) = \{G\}$, а значит, точная нижняя грань $\theta \wedge \tau$ множества $\{\theta, \tau\}$ в решетке $\text{Reg}_\tau(\mathcal{G})$ является нулем этой решетки.

Итак, $\theta \wedge \tau = 0_G$, $\theta \vee \tau = 1_G$, поэтому подгрупповой функтор θ дополняем в решетке $\text{Reg}_\tau(\mathcal{G})$. Теорема доказана.

Вопрос. Является ли $\text{Reg}_\tau(\mathcal{G})$ решеткой с дополнением?

ЛИТЕРАТУРА

1. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников [и др.]. – Мн.: Беларуская навука, 2003.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997.
3. Carter, R. The \mathfrak{F} -normalisers of a finite soluble groups / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – V.5. – № 2. – P. 175-202.
4. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Мат. сб. – 1974. – Т. 94. – № 4. – С. 628-648.
5. Kegel O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30. – № 3. – S. 225-228.
6. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы в теории классов конечных групп / С.Ф. Каморников и др. // Препринты ГГУ им. Ф. Скорины. 2001. – № 2(107). – Гомель: ГГУ.
7. Воробей, Л.А. О свойствах решетки транзитивных регулярных подгрупповых функторов / Л.А. Воробей // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 2. – С. 22-24.
8. Воробей, Л.А. О дополняемых элементах решетки подгрупповых функторов гомоморфа / Л.А. Воробей, С.Ф. Каморников // Вопросы алгебры. – 1998. – Вып. 12. – С. 74-77. – Гомель: ГГУ.
9. Barnes, D.W. Gaschutz functors of finite soluble groups / D.W. Barnes, O.H. Kegel // Math. Z. – 1966. – Vol. 94. – № 2. – P. 134-142.
10. Васильев, А.Ф. О функторном методе изучения решеток подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников // Сиб. матем. журнал. – 2001. – Т. 42. – № 1. – С. 30-40.

Поступила в редакцию 09.12.2009 г.

УДК 512.548

Н.А. ЩУЧКИН

ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ПОДАЛГЕБР n-АРНЫХ ГРУПП

В теории групп известен способ получения множества порождающих элементов подгруппы H группы G , порожденной множеством X , использующий элементы множества X и элементы множества S всех представителей правых смежных классов группы G по подгруппе H . Более точно: подгруппа H порождается множеством всех элементов вида $sx\{sx\}^{-1}$, где s и x пробегают множества S и X соответственно, а символом $\{g\}$ обозначается фиксированный представитель правого смежного класса Hg . В данной работе установлено, что аналогичный результат имеет место и в теории n -арных групп. При этом тернарный ($n = 3$) и n -арный ($n \geq 4$) случаи существенно отличаются друг от друга и поэтому рассматриваются отдельно.

Существуют различные определения n -арной группы ($n \geq 3$), эквивалентность которых доказывается многими авторами (см., например, [1], [2]). Мы выберем определение, предложенное в [3], согласно которому множество G с одной n -арной операцией $[]$ и одной унарной операцией $\bar{}$ называется n -арной группой, если в G выполнены тождества

$$[[x_1 \dots x_n] x_{n+1} \dots x_{2n-1}] = [x_1 \dots x_i [x_{i+1} \dots x_{i+n}] x_{i+n+1} \dots x_{2n-1}] \quad (1)$$

для всех $i = 1, \dots, n - 1$ и

$$[y \underbrace{x \dots x}_{n-2} \bar{x}] = [y \underbrace{x \dots x}_{n-3} \bar{xx}] = [\bar{x} \underbrace{x \dots x}_{n-2} y] = [x \bar{x} \underbrace{x \dots x}_{n-3} y] = y. \quad (2)$$

Таким образом, n -арная группа G является алгеброй $\langle G, [], \bar{} \rangle$ типа $(n, 1)$, в которой выполнены указанные тождества (1) и (2).

Полагая в (2) $y = x$, видим, что в n -арной группе G для любого ее элемента x существует элемент \bar{x} такой, что $[\underbrace{x \dots x}_{n-1} \bar{x}] = x$. Элемент \bar{x} называют косым для x .

Согласно леммам 2.3 и 2.4 из [4] в n -арной группе G выполняются тождества

$$\overline{[x_1 \dots x_n]} = \underbrace{[\underbrace{x_n \dots x_n}_{n-3} \bar{x}_n \dots \underbrace{x_1 \dots x_1}_{n-3} \bar{x}_1]}_{n-2} \text{ и } \bar{\bar{x}} = \underbrace{[\underbrace{x \dots x}_{(n-2)^2}]}_{(n-2)^2}. \quad (3)$$

Кроме того, по теореме 2.6 из [4] n -арная подгруппа H n -арной группы G , порожденная множеством $X \subseteq G$ (обозначается $\langle X \rangle = H$), совпадает с множеством всех элементов вида $[x_1 \dots x_{m(n-1)+1}]$, где

$$x_i \in X \cup \bar{X}, \quad i = 1, \dots, m(n-1)+1, \quad \bar{X} = \{\bar{x} \mid x \in X\}.$$

В частности, это верно в случае, когда сама n -арная группа G порождается множеством X .

1. Функция выбора представителя класса смежности по подгруппе.

Пусть H – n -арная подгруппа произвольной n -арной группы G . Известно [5–6], что отношение

$$b \equiv c \Leftrightarrow [\underbrace{H \dots H}_{n-1} b] = [\underbrace{H \dots H}_{n-1} c]$$

является эквивалентностью и классы этой эквивалентности равномогутны. Кроме того, одним из классов является сама n -арная подгруппа H . Классы этой эквивалентности называют правыми классами смежности по n -арной подгруппе H . По аналогии с группами [7–8] определим на n -арной группе G функцию выбора $g \rightarrow \{g\}$, которая всем элементам одного и того же класса смежности ставит в соответствие один и тот же выбранный представитель этого класса. Такую функцию, как и в случае групп, назовем выбирающей функцией.

Отметим важное свойство выбирающей функции:

$$\{\{\{x_1\}x_2 \dots x_n\}\} = \{\{x_1x_2 \dots x_n\}\}. \tag{4}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} [\underbrace{H \dots H}_{n-1} \{\{x_1\}x_2 \dots x_n\}] &= [[\underbrace{H \dots H}_{n-1} \{x_1\}]x_2 \dots x_n] = \\ &= [[\underbrace{H \dots H}_{n-1} x_1]x_2 \dots x_n] = [\underbrace{H \dots H}_{n-1} [x_1x_2 \dots x_n]]. \end{aligned}$$

Ясно, что $\{\{x\}\} = \{x\}$ для любого $x \in G$. Если же x – выбранный представитель некоторого правого смежного класса G по H , то

$$\{\{x\}\} = \{x\} = x. \tag{5}$$

2. Построение порождающего множества тернарной подгруппы с помощью порождающего множества тернарной группы.

Выбирающая функция позволяет по порождающим элементам n -арной группы строить порождающие элементы n -арной подгруппы. Покажем это вначале для тернарных групп, то есть для n -арных групп при $n = 3$.

Теорема 1. Пусть X – порождающее множество тернарной группы G , H – ее тернарная подгруппа, $g \rightarrow \{g\}$ – выбирающая функция по тернарной подгруппе H , S – множество всех выбранных представителей, a – фиксированный элемент из H ,

$$R = \{r = [\overline{[sax]\{\overline{[sax]}\}a}] \mid s \in S, x \in X \cup \bar{X}\},$$

$$T = \{t = [\overline{a[sxa]\{\overline{[sxa]}\}}] \mid s \in S, x \in X \cup \bar{X}\}.$$

Тогда:

- 1) $R \cup T \subseteq H$;
- 2) $\bar{R} = T, \bar{T} = R$;
- 3) если $a \in S$, то H порождается любым из множеств R или T .

Доказательство. 1) Покажем, что элементы r и t лежат в H . Действительно, так как

$$[HH[\bar{sax}]] = [HH\{\{\bar{sax}\}\}],$$

то для некоторых h_1, h_2, h_3, h_4 из H верно равенство

$$[h_1h_2[\bar{sax}]] = [h_3h_4\{\{\bar{sax}\}\}],$$

откуда

$$[[h_1h_2a]\bar{a}[\bar{sax}]] = [[h_3h_4a]\bar{a}\{\{\bar{sax}\}\}].$$

Если в полученном равенстве положить $h=[h_1h_2a]$, $h'=[h_3h_4a]$, то оно примет вид

$$[h\bar{a}[\bar{sax}]] = [h'\bar{a}\{\{\bar{sax}\}\}].$$

Из последнего равенства находим

$$h' = [h\bar{a}[\{\{\bar{sax}\}\}a]],$$

откуда

$$[[\bar{sax}\{\{\bar{sax}\}\}a] = [ah\bar{h}'] \in H,$$

то есть $r \in H$, $R \subseteq H$. Аналогично доказывается включение $T \subseteq H$.

2) Найдем косой элемент для r . Для этого положим $s' = \{\{\bar{sax}\}\} \in S$. Тогда, используя нейтральность в смысле [5] последовательности $\bar{a}x\bar{x}a$, а также (4), получим

$$s = \{s\} = \{\{\{\bar{sax}\}\bar{x}a\}\} = \{\{\{\{\bar{sax}\}\}\bar{x}a\}\} = \{\{s'\bar{x}a\}\},$$

откуда

$$\bar{s} = \overline{\{\{s'\bar{x}a\}\}}. \quad (6)$$

Теперь, используя (3) при $n = 3$, определение элемента s' , нейтральность последовательности $\bar{a}x\bar{x}a$, а также (6), получим

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \overline{[[\bar{sax}\{\{\bar{sax}\}\}a]} = \overline{[a\{\{\bar{sax}\}\}\bar{sax}]} = \overline{[a\{\{\bar{sax}\}\}\bar{x}a\bar{s}]} = \\ &= [\bar{a}s'\bar{x}a\bar{s}] = [\bar{a}[s'\bar{x}a]\{\{s'\bar{x}a\}\}] \subseteq T, \end{aligned}$$

то есть $\bar{R} \subseteq T$. Аналогично доказывается равенство

$$\bar{t} = \overline{[a[sxa]\{\{sxa\}\}]} = \overline{[s''ax]\{\{s''ax\}\}a},$$

где $s'' = \{\{sxa\}\} \in S$, то есть $\bar{T} \subseteq R$.

Из включений $\bar{R} \subseteq T$ и $\bar{T} \subseteq R$ следуют включения $\overline{\bar{R}} \subseteq \bar{T}$ и $\overline{\bar{T}} \subseteq \bar{R}$, откуда, ввиду выполняющегося в G тождества $\overline{\bar{x}} = x$, получаются включения $R \subseteq \bar{T}$ и $T \subseteq \bar{R}$, а значит, и равенства $\bar{R} = T$, $\bar{T} = R$.

3) Пусть w — произвольный элемент из H . Так как $w \in G$, и G порождается множеством X , то, как отмечалось во введении, этот

элемент может быть представлен в виде $w = [y_1 y_2 \dots y_{2m+1}]$, где $y_i \in X \cup \bar{X}$. Полагая

$$u_1 = a, u_{2i} = y_1 \dots y_{2i-1}, u_{2i+1} = y_1 \dots y_{2i} a$$

для $I = 1, 2, \dots, 2m+1$ и используя тот факт, что для любых $b, c \in G$ последовательности $b\bar{b}$, $\bar{b}b$ и $b\bar{c}c\bar{b}$ являются нейтральными, получим

$$w = \overline{[[[a\bar{a}y_1]K[a\bar{a}y_1]]\{y_1\}][y_2 a\{\overline{[y_1 y_2 a]}\}\{[y_1 y_2 a]\}a]} \\ \overline{[y_3 \{\overline{[y_1 y_2 a] a y_3}\}\{[y_1 y_2 y_3]\}][y_4 a\{\overline{[y_1 y_2 y_3] y_4 a}\}\{\overline{[y_1 y_2 y_3] y_4 a}\}a]} \dots \\ \dots [y_{2m} a\{\overline{[y_1 \dots y_{2m} a]}\}\{[y_1 \dots y_{2m} a]\}a][y_{2m+1} \{\overline{[y_1 \dots y_{2m} a] a y_{2m+1}}\}\{[y_1 \dots y_{2m+1}]\}].$$

Последнее равенство, используя равенства $\{w\} = \{a\} = a$ и равенство (4), перепишем в виде

$$w = \overline{[[\{\{u_1\} a \bar{y}_1] K[\{\{u_1\} a \bar{y}_1]\} a] a [\{u_2\} y_2 a] K[\{\{u_2\} y_2 a\}]] \\ [[\{\{u_3\} a \bar{y}_3] K[\{\{u_3\} a \bar{y}_3]\} a] a [\{u_4\} y_4 a] K[\{\{u_4\} y_4 a\}]] \dots \\ \dots [a \{\{u_{2m}\} y_{2m} a\} K[\{\{u_{2m}\} y_{2m} a\}]] [[\{\{u_{2m+1}\} a \bar{y}_{2m+1}\} K[\{\{u_{2m+1}\} a \bar{y}_{2m+1}\} a]]]. \quad (7)$$

Введя обозначения $s_i = \{u_i\}$, $I = 1, 2, \dots, 2m + 1$, равенство (7) можно переписать следующим образом

$$w = \overline{[[[s_1 \bar{a} y_1] K[\{s_1 \bar{a} y_1\}] a] a [s_2 y_2 a] K[\{s_2 y_2 a\}]] [[s_3 \bar{a} y_3] K[\{s_3 \bar{a} y_3\}] a] a [s_4 y_4 a] K[\{s_4 y_4 a\}]] \dots \\ \dots [a [s_{2m} y_{2m} a] K[\{s_{2m} y_{2m} a\}]] [[s_{2m+1} \bar{a} y_{2m+1}] K[\{s_{2m+1} \bar{a} y_{2m+1}\}] a]} = [r_1 t_1 \dots r_m t_m r_{m+1}].$$

А так как, согласно 2), $t_1, \dots, t_m \in \bar{R}$, $r_1, \dots, r_{m+1} \in \bar{T}$, то, ввиду отмеченной во введении теоремы 2.6 из [4], $w \in \langle R \rangle$, $w \in \langle T \rangle$, откуда, в силу произвольного выбора $w \in H$, следуют включения $H \subseteq \langle R \rangle$, $H \subseteq \langle T \rangle$. Обратные включения $\langle R \rangle \subseteq H$, $\langle T \rangle \subseteq H$ следуют из доказанных в 1) включений $R \subseteq H$, $T \subseteq H$. Таким образом, $H = \langle R \rangle$, $H = \langle T \rangle$. Теорема доказана.

3. Построение порождающего множества n -арной подгруппы с помощью порождающего множества n -арной группы.

Рассмотрим теперь n -арные группы при $n \geq 4$.

Лемма. Пусть G – n -арная группа, H – ее n -арная подгруппа, $g \rightarrow \{g\}$ – выбирающая функция по n -арной подгруппе H . Тогда

$$[c b \underbrace{\{b\} \dots \{b\}}_{n-3} \{\bar{b}\}] \in H$$

для любых $c \in H$, $b \in G$.

Доказательство. Так как

$$\left[\underbrace{H \dots H}_{n-1} b \right] = \left[\underbrace{H \dots H}_{n-1} \{b\} \right]. \quad c \in H,$$

то для некоторых h_1, \dots, h_{2n-3} из H имеем равенство

$$[h_1 \dots h_{n-2} c b] = [h_{n-1} \dots h_{2n-3} \{b\}],$$

откуда

$$[[h_1 \dots h_{n-2} c b] \underbrace{\{b\} \dots \{b\}}_{n-3} \overline{\{b\}} c] = [h_{n-1} \dots h_{2n-3} [\underbrace{\{b\} \dots \{b\}}_{n-2} \overline{\{b\}}] c]]$$

или

$$[h_1 \dots h_{n-2} [c b \underbrace{\{b\} \dots \{b\}}_{n-3} \overline{\{b\}}] c] = [h_{n-1} \dots h_{2n-3} c] \in H.$$

Так как H – n -арная подгруппа, то решение $z = [c b \underbrace{\{b\} \dots \{b\}}_{n-3} \overline{\{b\}}]$ уравнения

$$[h_1 \dots h_{n-2} z c] = [h_{n-1} \dots h_{2n-3} c]$$

лежит в H , то есть $[c b \underbrace{\{b\} \dots \{b\}}_{n-3} \overline{\{b\}}] \in H$. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть n -арная группа G порождается множеством X , H – ее n -арная подгруппа, $g \rightarrow \{g\}$ – выбирающая функция по n -арной подгруппе H , S – множество всех выбранных представителей, a – фиксированный элемент из H ,

$$T = \{t_0(s, y), t_1(s, y), \dots, t_{n-2}(s, y) \mid s \in S, y \in X \cup \bar{X}\},$$

где

$$t_0(s, y) = [\bar{a} [\underbrace{sy \underbrace{a \dots a}_{n-2}}_{n-2} \{[\underbrace{sy \underbrace{a \dots a}}_{n-2}}_{n-2} \dots \{[\underbrace{sy \underbrace{a \dots a}}_{n-2}}_{n-2} \overline{\{[\underbrace{sy \underbrace{a \dots a}}_{n-2}}_{n-2}]\}}]]],$$

$$t_i(s, y) = [\bar{a} [s \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y \underbrace{a \dots a}_{n-2-i} \{[s \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y \underbrace{a \dots a}_{n-2-i} \dots \{[s \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y \underbrace{a \dots a}_{n-2-i} \overline{\{[s \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y \underbrace{a \dots a}_{n-2-i}]\}}]]}],$$

для $i = 1, 2, \dots, n-2$. Тогда $T \subseteq H$, если же $a \in S$, то H порождается множеством $T \cup \{a\}$.

Доказательство. Включение $T \subseteq H$ следует из предыдущей леммы, если в ней положить

$$c = \bar{a}, \quad b = [sy \underbrace{a \dots a}_{n-2}] \quad \text{или} \quad b = [s \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y \underbrace{a \dots a}_{n-2-i}], \quad i = 1, 2, \dots, n-2.$$

Пусть u – произвольный элемент из H . Так как $u \in G$ и G порождается X , то, как отмечалось во введении, этот элемент может быть представлен в виде

$$u = [y_1 y_2 \dots y_{m(n-1)+1}], \quad y_j \in X \cup \bar{X}, \quad j = 1, 2, \dots, m(n-1) + 1.$$

Полагаю

$$u_0 = a, \quad u_{k(n-1)+1} = [y_1 \dots y_{k(n-1)+1}], \quad u_{k(n-1)+l} = [y_1 \dots y_{k(n-1)+l} \underbrace{a \dots a}_{n-l}],$$

где при $k = 0, 1, \dots, m - 1$ всякий раз $l = 2, 3, \dots, n - 1$ и используя свойство (4) выбирающей функции, а также тождество $\{\{x\}\} = \{x\}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \{\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1\} &= \{u_1\}, \\ \{\{u_{k(n-1)+1}\} y_{k(n-1)+2} \underbrace{a \dots a}_{n-2}\} &= \{u_{k(n-1)+2}\}, \\ \{\{u_{k(n-1)+i+1}\} \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y_{k(n-1)+i+2} \underbrace{a \dots a}_{n-i-2}\} &= \{u_{k(n-1)+i+2}\}, \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, \dots, n - 2$ и $u_{m(n-1)+1} = u$.

Теперь легко устанавливается нейтральность в смысле [4] следующих последовательностей:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\{\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1\} \dots \{\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1\}\}}_{n-3} \overline{\{\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1\}} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \bar{a} \{u_1\}}, \\ &\underbrace{\{\{u_{k(n-1)+1}\} y_{k(n-1)+2} \underbrace{a \dots a}_{n-2}\} \dots \{\{u_{k(n-1)+1}\} y_{k(n-1)+2} \underbrace{a \dots a}_{n-2}\}}_{n-3} \overline{\{\{u_{k(n-1)+1}\} y_{k(n-1)+2} \underbrace{a \dots a}_{n-2}\}} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \bar{a} \{u_{k(n-1)+2}\}, \\ &\underbrace{\{\{u_{k(n-1)+i+1}\} \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y_{k(n-1)+i+2} \underbrace{a \dots a}_{n-i-2}\} \dots \{\{u_{k(n-1)+i+1}\} \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y_{k(n-1)+i+2} \underbrace{a \dots a}_{n-i-2}\}}_{n-3} \\ &\overline{\{\{u_{k(n-1)+i+1}\} \underbrace{a \dots a}_{i-1} \bar{a} y_{k(n-1)+i+2} \underbrace{a \dots a}_{n-i-2}\}} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \bar{a} \{u_{k(n-1)+i+2}\}, \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, \dots, n - 2$.

По условию $\{a\} = a$, а так как $u, a \in H$, то

$$\{u\} = \{[y_1 y_2 \dots y_{m(n-1)+1}]\} = a.$$

Поэтому, используя нейтральность указанных последовательностей, будем иметь

$$\begin{aligned} u &= [y_1 y_2 \dots y_{m(n-1)+1}] = \\ &= \underbrace{[\underbrace{a \dots a}_{n-2} [\bar{a} \{\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1\} \dots \{\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1\}\} \dots \{\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1\} \overline{\{\{u_0\} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \bar{a} y_1\}} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \bar{a} \{u_1\}}]}_{v_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\left[\overline{a} \{ \underbrace{u_1}_{n-2} \} \underbrace{y_2}_{n-2} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \} \{ \{ \underbrace{u_1}_{n-2} \} \underbrace{y_2}_{n-2} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \} \dots \{ \{ \underbrace{u_1}_{n-2} \} \underbrace{y_2}_{n-2} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \} \{ \{ \underbrace{u_1}_{n-2} \} \underbrace{y_2}_{n-2} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \} \} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \right]}_{v_2} \\
& \underbrace{\left[\overline{a} \{ \underbrace{u_2}_{n-3} \} \overline{a} \underbrace{y_3}_{n-3} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \} \{ \{ \underbrace{u_2}_{n-3} \} \overline{a} \underbrace{y_3}_{n-3} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \} \dots \{ \{ \underbrace{u_2}_{n-3} \} \overline{a} \underbrace{y_3}_{n-3} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \} \{ \{ \underbrace{u_2}_{n-3} \} \overline{a} \underbrace{y_3}_{n-3} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \} \} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \dots \right]}_{v_3} \\
& \dots v_{m(n-1)+1} \underbrace{a \dots a}_{n-2} \overline{a} \{ u_{m(n-1)+1} \} = \\
& = \left[\underbrace{a \dots a}_{n-2} v_1 \underbrace{a \dots a}_{n-2} v_2 \underbrace{a \dots a}_{n-2} v_3 \dots \underbrace{a \dots a}_{n-2} v_{m(n-1)+1} \{ \{ y_1 y_2 \dots y_{m(n-1)+1} \} \} \right] = \\
& = \left[\underbrace{a \dots a}_{n-2} v_1 \underbrace{a \dots a}_{n-2} v_2 \underbrace{a \dots a}_{n-2} v_3 \dots \underbrace{a \dots a}_{n-2} v_{m(n-1)+1} a \right],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
v_{m(n-1)+1} &= \overline{a} \{ \underbrace{u_{m(n-1)}}_{n-3} \} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \overline{a} \underbrace{y_{m(n-1)+1}}_{n-3} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \} \{ \{ \underbrace{u_{m(n-1)}}_{n-3} \} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \overline{a} \underbrace{y_{m(n-1)+1}}_{n-3} \} \dots \{ \{ \underbrace{u_{m(n-1)}}_{n-3} \} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \overline{a} \underbrace{y_{m(n-1)+1}}_{n-3} \} \} \\
& \quad \underbrace{\{ \{ \underbrace{u_{m(n-1)}}_{n-3} \} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \overline{a} \underbrace{y_{m(n-1)+1}}_{n-3} \} \}}_{n-3} \\
& \quad \overline{\{ \{ \underbrace{u_{m(n-1)}}_{n-3} \} \underbrace{a \dots a}_{n-3} \overline{a} \underbrace{y_{m(n-1)+1}}_{n-3} \} \}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, доказано равенство

$$u = \left[\underbrace{a \dots a}_{n-2} v_1 \underbrace{a \dots a}_{n-2} v_2 \underbrace{a \dots a}_{n-2} v_3 \dots \underbrace{a \dots a}_{n-2} v_{m(n-1)+1} a \right].$$

Так как все $v_1, v_2, \dots, v_{m(n-1)+1}$ принадлежат T и элемент u выбран в H произвольно, то по теореме 2.6 из [4] имеем включение $H \subseteq \langle T \cup \{a\} \rangle$. Обратное включение $\langle T \cup \{a\} \rangle \subseteq H$ следует из доказанного ранее включения $T \subseteq H$. Таким образом, $H = \langle T \cup \{a\} \rangle$. Теорема доказана.

Если n -арная подгруппа H имеет в n -арной группе G конечный индекс, то число всех представителей во множестве S совпадает с этим индексом. Поэтому из доказанной теоремы вытекает

Следствие. n -Арная подгруппа конечного индекса в конечно порожденной n -арной группе конечно порождена.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гальмак, А.М.** Определение n -арной группы / А.М. Гальмак // Препринт ГГУ им. Ф. Скорины. – 1994. – № 16. – 43 с.
2. **Dudek, W.A.** On some old and new problems in n -ary groups / W.A. Dudek // Quasigroups and Related Systems. – 2001. – Vol. 8. – P. 15-36.
3. **Gleichgewicht B.** Remarks on n -groups as abstract algebras / B. Gleichgewicht, K. Glazek // Collq Math. – 1967. – Vol. 17. – № 2. – P. 209-219.
4. **Гальмак, А.М.** Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

5. *Гальмак, А.М.* *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
6. *Щучкин, Н.А.* Взаимосвязь *n*-групп и групп / Н.А. Щучкин // Чебышевский сборник. – 2003. – Т. 4. – Вып. 1(5). – С. 125-141.
7. *Каргаполов, М.И.* Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
8. *Магнус, В.* Комбинаторная теория групп / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солигер. – М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 15.10.2009 г.

УДК 511.36

О.С. КУКСО, Н.В. САКОВИЧ, Н.В. ШАМУКОВА

О МНОГОЧЛЕНАХ ЗАДАННОГО ДИСКРИМИНАНТА, БОЛЬШОЙ ВЫСОТЫ И С КОРНЯМИ, ОГРАНИЧЕННЫМИ ВО ВСЕХ МЕТРИКАХ

Работа посвящена исследованию влияния преобразований сдвига и инверсии на взаимное расположение корней целочисленных многочленов. Хорошо известно, что приведенные преобразования не меняют дискриминантов многочленов. Основная идея доказательства состоит в том, что все значения многочлена степени n на арифметической прогрессии длины $n+1$ не могут быть значительно меньше высоты многочлена. В работе сконструирована специальная последовательность арифметических прогрессий, в каждой из которых удастся найти такой член, в котором p -адическая норма многочлена достаточно велика для любых заранее выбранных простых чисел p_1, p_2, \dots, p_k . Затем в следующей арифметической прогрессии находится член, в котором велика и архимедова метрика многочлена.

Введение

Во многих задачах теории чисел нужно по величине коэффициентов многочленов получить информацию о величине корней в поле комплексных чисел или об их p -адической норме. С ростом $H(P)$ корни многочлена остаются ограниченными. Получено условие, обеспечивающее ограниченность корней $P_n(x)$ в разных метриках. Исследованы связи величин коэффициентов и корней целочисленных многочленов и влияния преобразований сдвига и инверсии на взаимное расположение корней целочисленных многочленов в поле p -адических чисел. Многие результаты этой статьи верны для многочленов с действительными и комплексными коэффициентами. Однако в приложениях чаще речь идет о целочисленных многочленах, поэтому в дальнейшем мы рассматриваем многочлены с целыми коэффициентами.

Основная часть

Пусть $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_j \in \mathbf{Z}$, $0 \leq j \leq n$ — (1)

многочлен с целыми коэффициентами и $H = H(P) = \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|$ — высота многочлена, $|\dots|$ и $|\dots|_p$ — архимедова и неархимедова нормы, \ll — символ Виноградова, обозначающий в записи $A \ll B$ существование величины $c > 0$ такой, что $A < cB$.

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ корни многочлена $P_n(x)$, а через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \mathbf{C}$ — корни многочлена $P_n(w)$, лежащие в \mathbf{Q}_p или некотором алгебраическом расширении \mathbf{Q}_p . Во многих задачах теории чисел удобно, когда с ростом $H(P)$ корни многочлена остаются ограниченными. Впервые на это обратил внимание В.Г. Спринджук [1]. Есть простое достаточное условие, обеспечивающее ограниченность корней $P_n(x)$ в разных метриках.

Лемма 1. Если при некотором c_1 имеем $|a_n| \geq c_1 H$, то

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j| \leq c_1^{-1} + 1. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть максимум в левой части неравенства (2) достигается при $j = j_0$. Тогда если $|\alpha_{j_0}| \leq d = c_1^{-1} + 1$, то (2) доказано. Пусть $|\alpha_{j_0}| > d$. Ясно, что $d \geq 2$. Тогда из равенства $P(\alpha_{j_0}) = 0$ имеем

$$\begin{aligned} a_n \alpha_{j_0}^n &= -a_{n-1} \alpha_{j_0}^{n-1} - a_{n-2} \alpha_{j_0}^{n-2} - \dots - a_1 \alpha_{j_0} - a_0 \\ |\alpha_{j_0}| &= \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \alpha_{j_0}^{-1} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \alpha_{j_0}^{-2} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \alpha_{j_0}^{-n+1} \right| < \\ &< c_1^{-1} \left(|\alpha_{j_0}|^{-1} + \dots + |\alpha_{j_0}^{n-1}|^{-1} + \dots \right) \leq c_1^{-1} \frac{|\alpha_{j_0}|^{-1}}{1 - |\alpha_{j_0}|^{-1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Максимальное значение величины $|\alpha_{j_0}|^{-1} \left(1 - |\alpha_{j_0}|^{-1}\right)^{-1}$ не превосходит $|\alpha_{j_0}|^{-1} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} = 2d^{-1}$. Поэтому левая часть неравенства (3) больше $c_1^{-1} + 1$, а правая меньше 1. Получили противоречие.

Лемма 2. Если при некотором $c_2 > 0$ имеем $|a_n|_p \geq c_2$, то

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\gamma_i|_p < c_2^{-\frac{1}{n}}. \quad (4)$$

Доказательство. Пользуясь свойством неархимедовости нормы, аналогично (3) получим

$$|\gamma_{j_0}|_p = \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_0}{a_n} \gamma_{j_0}^{-n+1} \right|_p \leq \max_{0 \leq i \leq n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \gamma_{j_0}^{-n+i+1} \right|_p \leq c_2^{-1} \max_{0 \leq i \leq n-1} |\gamma_{j_0}|_p^{-n+i+1} \leq c_2^{-1} |\gamma_{j_0}|_p^{-n+1},$$

откуда $|\gamma_{j_0}|_p^n < c_2^{-1}$, что доказывает (4).

Однако приведенные достаточные условия выполняются не всегда. Тогда в зависимости от поставленной задачи с многочленом можно произвести преобразования аргумента, не меняющие важнейших характеристик изучаемых множеств. Такими преобразованиями являются сдвиг аргумента и инверсия. В [1] показано, как это можно сделать отдельно в случае архимедовой и не архимедовой норм. Мы приведем новые доказательства утверждений из [1], а затем покажем, как их можно совместить, т.е. добиться одновременного выполнения неравенств

$$|a_n| > c_1 H, \quad |a_n|_p > c_2. \tag{5}$$

Частные случаи приведенных ниже теорем доказаны в [2].

Теорема 1. Пусть $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$. Тогда сдвигом аргумента и инверсией многочлен $P(x)$ можно привести к многочлену, для которого выполняется первое неравенство (5).

Доказательство. Вначале докажем, что для любого целого числа l найдется целое число m , $1 \leq m \leq 1+n$, при котором

$$|P(m)| > c_3 H. \tag{6}$$

Установим, что при подходящем c_3 система из $n+1$ неравенства

$$\max_{1 \leq m \leq 1+n} |P(m)| \leq c_3 H \tag{7}$$

противоречива. Перепишем (7) в виде системы уравнений

$$\begin{cases} |P(l)| &= |a_n l^n + a_{n-1} l^{n-1} + \dots + a_1 l + a_0| = \theta_0 c_3 H, \\ |P(l+1)| &= |a_n (l+1)^n + a_{n-1} (l+1)^{n-1} + \dots + a_1 (l+1) + a_0| = \theta_1 c_3 H, \\ &\dots \\ |P(l+n)| &= |a_n (l+n)^n + a_{n-1} (l+n)^{n-1} + \dots + a_1 (l+n) + a_0| = \theta_n c_3 H, \end{cases} \tag{8}$$

где $|\theta_k| \leq 1$, для любого k , $0 \leq k \leq n$. Один из коэффициентов многочлена $P(x)$ равен H . Пусть это a_j . Решим систему уравнений (8) относительно a_j . Получим

$$H = a_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}. \tag{9}$$

Определитель Δ в (9) – это определитель системы неравенств (8), а Δ_j – определитель, в котором j -ый столбец в Δ заменен на столбец свободных коэффициентов. Ясно, что при подходящем c_3 правая часть в (9) меньше H и равенство (9) противоречиво. От произвольного полинома $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ перейдем к полиному $P_1(x) = P(x + m)$. Свободный коэффициент $P_1(x)$ равен $P(m)$ и $|P(m)| > c_3 H$. Затем рассмотрим полином $P_2(x) = x^n P_1\left(\frac{1}{x}\right)$. Старший коэффициент у многочлена $P_2(x)$ равен $P(m)$, что доказывает теорему 1.

Теорема 2. Пусть $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ и $P(x)$ – примитивный полином. Тогда для любого простого числа p путем сдвига аргумента и инверсии можно получить полином $T(x)$, для которого выполняется второе неравенство (5).

Доказательство. Вначале покажем, что для любого $l \in \mathbf{Z}$ существует такое $m \in \mathbf{Z}$, $l \leq m \leq l+n$, что

$$|P(m)|_p > c_4(n, p).$$

Не умаляя общности, положим $l = 1$. Предположим, что

$$\max_{1 \leq m \leq n+1} |P(m)|_p \leq c_4. \quad (10)$$

Из примитивности $P(x)$ следует, что для некоторого его коэффициента a_j имеем $|a_j|_p = 1$. Заменим (10) на систему уравнений и решим ее относительно a_j . Получим

$$\begin{cases} |a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0|_p = \theta_1 c_4, \\ |a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \dots + a_1 2 + a_0|_p = \theta_2 c_4, \\ \dots \\ |a_n (n+1)^n + a_{n-1} (n+1)^{n-1} + \dots + a_1 (n+1) + a_0|_p = \theta_{n+1} c_4, \\ \theta_i = p^{-d_i}, \quad d_i \geq 1, \quad 1 \leq i \leq n+1. \end{cases}$$

$$a_{j_0} = \frac{\Delta_{j_0}}{\Delta}. \quad (11)$$

Определитель Δ из (11) – определитель Ван дер Монда.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n+1 \\ & & \dots & \\ 1 & 2^n & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^n k! (n-k)! \quad (12)$$

Простое число p входит в $k!$ в степени, не большей

$$\left[\frac{k}{p} \right] + \left[\frac{k}{p^2} \right] + \dots \leq k \sum_{j=1}^{\infty} p^{-j} \leq k,$$

и Δ содержит степень p , не большую, чем n^2 .

Для определителя Δ_j равенство $\Delta_{j_0} = a_j \Delta$, $|\Delta_{j_0}| \leq 1$, и поэтому $|\Delta_{j_0}|_p \leq p^{-d}$. Если $|\Delta_{j_0}|_p = 1$, равенство (11) не выполняется при $d > n^2$.

Снова, как в теореме 1, произведем преобразование произвольного полинома $P(w)$ к полиномам $P_1(w) = P(w + t)$ и $P_2(w) = w^n P_1\left(\frac{1}{w}\right)$. У полинома $P_2(w)$ старший коэффициент равен $P(t)$ и $|P(t)|_p > c_4$. Возьмем другое простое число q и достаточно большое $l_1 \in \mathbf{N}$. Из теоремы 1 следует, что существует такое натуральное число m , при котором $|P(m + sp^{l_1})|_p = |P(m)|_p$. Как и при доказательстве теоремы 1, можно для любого $t_1 \in \mathbf{Z}$ найти такое s_1 , $t_1 \leq s_1 \leq t_1 + n$, что свободный член многочлена $P_1(w) = P(w + t + s_1 p^{l_1})$ будет иметь q -адическую норму, большую некоторой величины c_5 . Применим инверсию и вновь получим полином с нужными свойствами. Далее можно взять третье простое число r , отличное от p и q , и найти такое число s_2 , $t_2 \leq s_2 \leq t_2 + n$, при котором свободный коэффициент многочлена $P_1(w + t + s_1 p^{l_1} + s_2 p^{l_1} q^{l_2})$ будет иметь r -адическую норму, большую c_6 . В результате мы придем к следующей теореме.

Теорема 3. Пусть $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ и p_1, p_2, \dots, p_k — различные простые числа. Тогда путем сдвига и инверсии можно получить многочлен такой, что

$$\min_{1 \leq i \leq k} |u_n|_{p_i} > c_7. \tag{13}$$

Объединяя теоремы 1 и 3, можно получить следующее утверждение:

Теорема 4. Пусть p_1, p_2, \dots, p_k — различные простые числа и $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$. Тогда существует многочлен $Q_1(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$, полученный из $P(x)$ сдвигом и инверсией, для которого справедлива система неравенств

$$\min_{1 \leq i \leq k} |b_n|_{p_i} > c_7, |b_n| > c_8 H. \tag{14}$$

Для доказательства теоремы 4 мы вначале найдем такие целые числа t, s_1, \dots, s_{k-1} , при которых многочлен $P(w)$ путем сдвига на целое число

$$t + s_1 p_1^{l_1} + \dots + s_{k-1} p_{k-1}^{l_1} \cdot \dots \cdot p_{k-1}^{l_{k-1}}$$

и последующей инверсии перейдет в многочлен $Q(w)$, для которого выполняется неравенство (13). Сдвиг аргумента, при котором сво-

бодный коэффициент будет иметь значение, по модулю превосходящее $c_8 H$, при достаточно большом l_k будем искать в виде

$$m + s_1 p_1^{l_1} + \dots + s_{k-1} p_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_{k-1}^{l_{k-1}} + s p_1^{l_1} \cdot \dots \cdot p_{k-1}^{l_{k-1}} p_k^{l_k}.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, среди любых подряд идущих $n + 1$ целых чисел s мы найдем такое s_k , при котором выполняется второе неравенство (14).

Покажем, как указанные преобразования можно использовать при построении многочленов большой высоты с малыми дискриминантами и заданной структурой корней. Построить многочлен с относительно небольшим дискриминантом просто. Для этого достаточно взять целочисленный многочлен небольшой высоты. Например, многочлен степени n

$$P(x) = (x-1)\dots(x-n)$$

имеет дискриминант $D(P) = \prod_{k=1}^{n-1} k!^2$. Нетрудно проверить, что дискриминант многочлена не меняется при сдвиге, $D(P(x)) = D(P(x-m))$ и при преобразовании $P(x) \rightarrow P_1(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.

Последнее доказывается так. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ корни многочлена $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Тогда корни многочлена $P_1(x) = a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n$ — это $\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \beta_2 = \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$. По теореме Виета $(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n)^2 = \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^2$.

Далее

$$\begin{aligned} D(P_1) &= a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\beta_i - \beta_j)^2 = \\ &= a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\alpha_i - \alpha_j)^2}{(\alpha_i \alpha_j)^2} = a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\alpha_i - \alpha_j)^2}{(\alpha_1 \dots \alpha_n)^2} \cdot \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{2n-2} = \\ &= D(P) \cdot \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{2n-2} \cdot \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{2n-2} = D(P). \end{aligned}$$

При l достаточно большом по сравнению с n перейдем от многочлена $P(x)$ к многочлену $P_2(x) = P(x-l)$. Корни многочлена $P_2(x)$ есть $\gamma_1 = l+1, \dots, \gamma_n = l+n$, а $D(P_2) = D(P)$. Затем перейдем к многочлену $P_3(x) = x^n P_2\left(\frac{1}{x}\right)$. Корни многочлена $P_3(x)$ — это $\lambda_1 = \frac{1}{l+1}, \dots, \lambda_n = \frac{1}{l+n}$,

а $D(P_3) = D(P)$. Высота многочлена $P_3(x)$ равна модулю старшего коэффициента многочлена $P_3(x)$ и равна $B_n = (l+1)\dots(l+n)$, $B_n = (l+o(1)) l^n$, $l = H(P_3)^{1/n} (1+o(1))$.

Поскольку

$$|\lambda_i - \lambda_j| = \frac{|j-i|}{(l+i)(l+j)}, \text{ то}$$

$$\frac{1}{(1+o(1))H(P_3)^{2/n}} < |\lambda_i - \lambda_j| < \frac{n-1}{(1+o(1))H(P_3)^{2/n}}. \quad (16)$$

Мы получили многочлен $P_3(x)$, высоту которого можно сделать сколь угодно большой. Расстояние между любыми корнями $P_3(x)$ стремятся к нулю с ростом $H(P_3(x))$, а дискриминант остается неизменным, равным $D(P)$. Тем самым справедлив следующий результат:

Теорема 5. Для любого $n \in \mathbf{N}$, существуют целочисленные многочлены $P(x)$, $\deg P = n$, имеющие дискриминанты $D(P) = c(n)$, сколь угодно большую высоту и корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что при любых $i \neq j$

$$|\alpha_i - \alpha_j| \xrightarrow{H(P) \rightarrow \infty} 0.$$

Заключение

В результате исследований были получены метрические теоремы о приближении нуля моническими многочленами: условия, обеспечивающие ограниченность корней многочлена в разных метриках; исследованы связи величин коэффициентов и корней целочисленных многочленов и влияния преобразований сдвига и инверсии на взаимное расположение корней целочисленных многочленов в комплексной плоскости и в поле p -адических чисел. В работе сконструирована специальная последовательность арифметических прогрессий, в каждой из которых удается найти такой член, в котором p_j -адическая норма многочлена достаточно велика для любых заранее выбранных простых чисел p_1, p_2, \dots, p_k . Затем в следующей арифметической прогрессии находится член, в котором велика и архимедова метрика многочлена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Спринджук, В.Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. — М.: Наука и Техника, 1967.
2. *Шамукова, Н.В.* О неоднородных диофантовых приближениях и целых алгебраических числах // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2007. — № 2. — С. 34-36.

Поступила в редакцию 23.09.2009 г.

УДК 101.1:510.2

Н.В. МИХАЙЛОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ РЕФЛЕКСИЯ МАТЕМАТИКИ В УСЛОВИЯХ ВОЗРАСТАЮЩЕЙ СЛОЖНОСТИ НАУКИ

Математика XX века достигла такого уровня, что стало возможным применять ее методологию для анализа проблем обоснования самой математики. В работе анализируется, как возрастающий уровень сложности математического знания связан с теоретической рефлексией современной математики и дедуктивной природой математического рассуждения.

Волна рациональности и рефлексии, прокатившаяся по всему миру, способствовала возникновению знаменитого “греческого чуда” – доказательной математики. При анализе математического знания методолог и философ науки апеллирует к опыту мышления, поскольку мышление становится более эффективным, когда осуществляется критика, рефлексия и знание о мышлении. В математике взаимодействуют две сферы: сфера творческой деятельности, открытий, содержательных приложений и сфера теоретической рефлексии математики, в которой ведутся поиски логических отношений и аксиоматических представлений процессов абстрагирования.

Рефлексия – часто употребляемый термин, в широком смысле практически совпадающий с терминами “самосознание” и “самоанализ”, отличаясь от них тем, что в рефлексии акцентируется деятельностный момент. Для мышления, исследующего самое себя, свои собственные формы, характерен критический анализ противоречий и поиск способов их разрешения. Принято различать элементарную, научную и философскую рефлексию [1, с. 273]. *Элементарная рефлексия* – это размышления, естественно возникающие в сфере реальной жизнедеятельности человека при оценке норм, которым он вынужден подчиняться или которые намерен изменить. *Научная рефлексия* – это критический анализ теоретического знания с точки зрения эффективности его методов, убедительности доказательств, надежности оснований, критериев истинности и границ его применимости. *Философская рефлексия* – это осмысление оснований мышления и человеческой культуры в целом с помощью дистанцирования от всех данностей, поставив их под вопрос уже самим своим существованием. При этом все виды рефлексии являются специфическим свойством сознания людей.

Математик, вообще говоря, даже не конструирует теоретические факты, не изобретает их, а, образно говоря, обретает, поскольку возможны различные варианты доказательства одного и того же математического утверждения. Возрастающая сложность науки и ее приложений приводит к определенной привлекательности внутренних проблем теоретической математики по сравнению с традиционными задачами, предлагаемыми естественными науками. Например, предметом интенсивных исследований в первой половине XX в. стали банаховы пространства, открытые крупнейшим польским математиком Стефаном Банахом в начале 20-х гг. Затем интерес к этому классическому разделу линейного функционального анализа упал, поскольку накопившиеся не решаемые трудные проблемы, поставленные классиками, ограничивали применение этой теории к другим разделам математики. “Результатом “Великой Французской Революции”, вновь пробудившей интерес к этой области математики, стало доказательство ряда труднейших проблем теории банаховых пространств” [2, с. 159]. Хотя к этому времени уже было осознано, что в математике так же, как и в гуманитарном знании, есть недоказуемые утверждения и неразрешимые проблемы.

Математической сенсацией стало отрицательное решение Пером Энфло в 1973 г. знаменитой проблемы о существовании базиса. В результате этой работы можно было выделить широкий класс банаховых пространств, обладающих специальными базисами Шаудера. Развитие этого раздела функционального анализа стимулировалось искусным построением весьма неожиданных контрпримеров, часто в довольно “исхоженных” и традиционных областях математики. Среди последних результатов в этом направлении выделим один из результатов Тиммоти Гоуэрса, который был получен в 1996 г. Согласно известной в теории множеств теореме Бернштейна, называемой также теоремой Кантора-Бернштейна и теоремой Шредера-Бернштейна, два множества, каждое из которых равномощно подмножеству другого множества, равномощны. Проблема Шредера-Бернштейна для банаховых пространств, являющаяся аналогом указанной теоремы, получила довольно неожиданное решение. Проблема Шредера-Бернштейна формулируется следующим образом: Будут ли два банаховых пространства, каждое из которых изоморфно подпространству другого пространства, изоморфны между собой? В это трудно поверить, но Тиммоти Гоуэрс построил примеры неизоморфных банаховых пространств, удовлетворяющих условию Шредера-Бернштейна для банаховых пространств. Интуиция здесь бессильна.

Математика в XX в. достигла такого уровня, что стало возможным применять ее методы для анализа своих собственных структур. Первой из точных и строгих наук она перешла со стадии экстенсивного роста на стадию *рефлексии*, понимаемой как применение методов

данной науки к ней самой. Неявные предложения, которые содержатся в применяемом математическом аппарате, не осознаются иногда даже специалистами. Первым наиболее известным рефлексивным результатом математики стала теорема Геделя о неполноте. До этих результатов было принято считать, что математическую теорию можно уточнить таким образом, что любое истинное математическое утверждение может быть доказано, и такое уточнение будет непротиворечивым. Курт Гедель доказал, что любая достаточно развитая непротиворечивая математическая теория, содержащая понятие натуральных чисел, неполна. В ней есть утверждение, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть средствами этой теории. Как сказал известный логик и математик Н.Н. Непейвода, “если бы голубая мечта логиков и математиков начала XX века – обосновать математику средствами самой математики – осуществилась бы, то математика превратилась бы из науки в учение” [3, с. XVI]. Более того, Гедель показал, что непротиворечивость математической теории, содержащей арифметику, не может быть доказана внутри этой теории.

С точки зрения истории науки, математика не очень склонна терпеть неразрешимые предложения. В конце концов, такое предложение после многократного и успешного употребления можно возвести в ранг аксиомы. Такова, например, в абстрактной математике судьба аксиомы выбора и гипотезы континуума. Множества слишком абстрактные математические I -объекты для того, чтобы вопрос: “Что же это такое на самом деле?” – имел смысл. В работе Георга Кантора 1878 г. была сформулирована “континуум-гипотеза”: всякое подмножество отрезка либо конечно, либо счетно, либо равномощно всему отрезку. В эквивалентной формулировке это означает, что между счетными множествами и множествами мощности континуума нет множеств промежуточной мощности. Заметим, что любое замкнутое подмножество прямой либо конечно, либо счетно, либо имеет мощность континуума, то есть для замкнутых подмножеств прямой гипотеза континуума верна. Кантор, доказав это факт, пытался найти доказательство континуум-гипотезы для общего случая. Лишь во второй половине XX в. стало ясно, что утверждение континуум-гипотезы можно считать истинным или ложным. При этом получаются разные теории множеств. Тут опять можно провести аналогию с евклидовой и неевклидовой геометриями. Если “пятый постулат Евклида”, утверждающий, что через данную точку проходит не более одной прямой, параллельной данной, считать истинным, то получится геометрия, называемая евклидовой. Если в качестве аксиомы принять противоположное утверждение, то получится неевклидова геометрия.

Одно из самых распространенных заблуждений состоит в том, что в неевклидовой геометрии параллельные прямые пересекаются. Это не так: параллельные прямые в евклидовой и в неевкли-

довой геометрии определяются как прямые, которые не пересекаются. Какая геометрия “на самом деле” правильная, не является математическим вопросом. Его лучше задавать физикам. Еще в большей степени это относится к теории множеств. Например, известно, что Георг Кантор обсуждал некоторые вопросы теории множеств с профессионалами-теологами. Одним из проявлений процесса абстрагирования является деятельность в математике, стимулирующая новые теории, которые не помещаются в рамки уже сформированных исследовательских программ. Поскольку в теории множеств не существует объемлющей все области математики “универсальной” аксиоматики, в математике могут появиться новые аксиоматические системы. И тогда опять придется рассматривать новую проблему континуума. Следует отметить, что на протяжении всей истории математики постоянно происходило открытие новых объектов, обладающих свойствами, которые на то время были непривычными для математического мышления. Например, аксиому выбора некоторые математики считали неприемлемой именно из-за ее странных и парадоксальных следствий. Но математики всегда готовы к тому, чтобы сделать на некоторое время “шаг в сторону” от неразрешимых на данный момент проблем, то есть попытаться обойти их.

Хотя ни один работающий в абстрактных областях науки математик не может поручиться за абсолютно убедительную приемлемость аксиомы выбора, при необходимости он все же, глядя на других, пользуется ею для получения нужного ему результата. С таких удивительных признаний неопределенности и неполноты знания очень часто начинался процесс обобщения в математике. Впечатляющие примеры современных теорий представляют такие разделы абстрактной математики, как функциональный анализ, общая топология и алгебраическая геометрия. Веря в определенность развития математики, Р.В. Плыкин замечает, что “математическая дисциплина эволюционирует от зарождения к расцвету, когда выполняется большая часть исследовательской программы, и далее к нирване, когда полученные ранее результаты будут отлиты в максимально общие формы, и здесь очень важно не спутать высший триумф с поражением” [4, с. 5]. Спустя почти полтора десятилетия он вновь рассматривает этот круг вопросов о развитии современной математики, но уже в контексте альтернативы “определенность развития или анархическое предприятие”.

В современной математике важны не столько математические доказательства, необходимые для человеческого ума как “тропинки” к истине, а ценны принципиально новые теоретические факты, предлагаемые нашему созерцанию. Поэтому можно сказать, что платонизм правдоподобен, когда мы мыслим о математической ис-

тине, но он, вообще говоря, бесполезен, когда мы говорим о математическом познании. Намеренно обостряя эту проблему, американский философ математики Поль Бенацераф в работе “Математическая истина” (1973) сформулировал свою теоретико-познавательную дилемму, стимулировавшую развитие исследований по философии математики в последней четверти XX в., смысл которой состоит в том, что если математика представляет собой исследование объективных сущностей и если когнитивные способности человека позволяют ему познавать только чувственные объекты, то как он тогда познает математические объекты. По существу, это проблема несовместимых онтологий, конфликт которых один из самых старых в философии математики.

Именно Платон – один из первых философов, который пытался создать правдоподобную эпистемологию для математической теории. Вообще говоря, математическое мировоззрение, которого придерживаются работающие математики, можно охарактеризовать как “умеренный скептический платонизм”. В сформулированном виде дилемма Бенацерафа звучит, с одной стороны, несколько неопределенно, а с другой – все же достаточно жестко, и поэтому при ее широком трактовании она даже может потерять смысл. Например, об “объективных идеальных сущностях” целесообразнее говорить в контексте первичных фундаментальных математических понятий, а “познание только чувственных объектов” предполагает определенную причинную концепцию познания, но это ведь не единственная теория. Математика сама по себе не представляет системы абсолютного знания, поскольку, как результат искусства анализа и вычисления, служит определенным целям лишь косвенно и опосредованно. Однако, согласно воззрениям Иммануила Канта, математическое познание, дополненное “мудрым знанием мира”, то есть философским познанием, занимает две области всего априорного, или доопытного, познания.

Один из вариантов переформулировки теоретико-познавательной дилеммы ставит перед философами математики выбор: “либо отрицать, что математика говорит о числах, либо предполагать некоторые неестественные способности человека в отношении сбора информации” [5, с. 143]. Надо признать, что ни та ни другая возможности не выглядят привлекательными для математиков, поэтому и в этом утверждении можно провести некоторую “онтологическую разрядку”. Не вдаваясь в эту философскую полемику, обратим внимание на мнение влиятельной группы математиков, объединившейся под именем Бурбаки, которая считает, что математика говорит не о специфических математических объектах, а о структурах. Философские проблемы структурализма, как направления математики XX ст., заслуживают отдельного рассмотрения. Французский математик Рене Том считает, что одно из важнейших философских утвержде-

ний, на которые должна опираться современная математика, – это утверждение о существовании математических структур независимо от человеческого разума. Это положение он объясняет тем, что старые надежды бурбакистов – показать, как математические структуры естественно вытекают из иерархии множеств, их подмножеств и их комбинаций, – это, безусловно, химера. Поэтому нельзя ни по каким разумным причинам отказаться от мысли, что важные математические структуры (алгебраическая, топологическая и др.) существуют во внешнем мире, и их огромное многообразие находит единственное оправдание в реальности.

Если же математика – это не более чем игра ума, то как объяснить ее неоспоримые успехи в описании действительности. Сама группа Бурбаки уклоняется от ответа на этот вопрос, заявляя о своей некомпетентности. Исходной точкой научного исследования является не собирание единичных фактов, хотя они играют важную роль, а догадка, предположение, гипотеза, рождаемые благодаря интуиции. Отдельные факты могут подтвердить или опровергнуть гипотезу, точнее, дедуктивно выводимые из нее следствия. Например, новая теория в опытных науках – это, прежде всего, смелое предположение, а не выжимка из фактов и наблюдений в духе ранее существовавших теорий. Поэтому, согласно Попперу, она нуждается в проверке, которая должна ее либо “верифицировать”, то есть установить ее истинность, либо “фальсифицировать”, то есть установить ее ложность. Надо заметить, что предложенный Карлом Поппером термин “фальсифицировать”, означающий по-русски “подделывать или искажать, выдавая за подлинное”, звучит несколько двусмысленно и изначально вызывает естественное непонимание его сути. Асимметрия верификации и фальсификации проявляется в том, что окончательная верификация теории, в отличие от фальсификации, невозможна.

Чтобы объяснить рост научного знания, Карл Поппер придумал элегантный логический трюк. Наука, по его убеждению, развивается путем последовательных опровержений предшествующих взглядов. Именно опровержение, согласно Попперу, есть один из признаков научности. Малоутешительной мотивировкой для исследователя, который вроде бы должен радоваться такому опровержению, является то, что оно будто бы доказывает, что хотя теория оказалась неверной, зато она научна с точки зрения философии Поппера. Такой методологический подход противоречит человеческой психологии, поскольку среди серьезных ученых нет людей, которые постоянно доказывали бы сами себе, что то, что они знают, неверно. Теория фальсификации Поппера плохо согласуется с историей развития математического знания. Если, например, в каком-то разделе математики меняются или пересматриваются основания, то каким-то образом должны вроде бы меняться и доказательства. Но, к удивлению мате-

матиков, хотя доказательства и меняются, доказанные с их помощью теоремы, как правило, остаются верными. Поэтому философия математики так интересуется вопросом, чем же являются доказательства, когда они не могут доказывать. Заметим, что математическая теория – весьма устойчивое образование, обладающее “охраняющим ее иммунитетом”.

Теория, согласно Попперу, всегда остается гипотезой. Например, “теорема Геделя о неполноте является почти что красной тряпкой для тех, кто желал бы придерживаться иллюзии, что наука всемогуща” [6, с. 121]. Карл Поппер допускает, что может существовать некий вид платоновского “третьего мира” и что, хотя этот мир есть продукт человеческой деятельности, существует много теорий самих по себе и проблемных ситуаций самих по себе, которые, возможно, никогда не будут созданы или поняты людьми. В этом смысле рассуждения Поппера о “третьем мире” согласуются с мнением Тома. В то же время надо отметить, что есть принципиальные неясности с природой автономных логических законов “третьего мира” Поппера, управляющих математическими объектами. Кроме того, непонятно, почему все же при изучении математических объектов “третьего мира” получаются результаты, применимые в познании физического мира и практической деятельности. Неудивительно поэтому, что некоторые философы считают, что предполагаемые платонистские сущности могут быть доступны познанию.

Людам свойственен “инстинкт познания”, поскольку это естественный путь развития человечества, как залог его благополучия и защищенности. Математические открытия помогают фундаментальной науке отодвигать границы познания, снимая запреты с устоявшихся заблуждений и убеждений. Согласно Попперу “третий мир”, как мир зафиксированных знаний, может существовать независимо от создавшего их интеллекта. Но мир знаний не может существовать, если не существует интерпретирующий и использующий их интеллект. Знание представляет собой сложную совокупность отношений между познающим субъектом, объектом познания и символической знаковой системой, системой смыслов и значений. Поэтому познание, как процесс “создания” знания, нельзя описать только с помощью упрощенной формальной схемы субъектно-объектных отношений. Различие субъективного и объективного знания неизбежно ведет к различию философских понятий “объяснения” и “понимания”. Само понятие понимания, хотя интуитивно ясно, тем не менее, все еще остается весьма непонятным. Понимание – это особое состояние сознания, пытающегося познать мир знаний или определенный круг явлений. Поэтому человеческое познание, как сложный мир идей, создается активной работой мысли самого человека. В наше время только научная теория может стать инструментом подлинного понимания.

Научная теория содержит в себе нечто такое, что при определенных усилиях может способствовать пониманию. Это нечто свойственно самой теории и, несмотря на его связь с пониманием, независимо от субъективных возможностей. Такую особенность научной теории принято называть объяснением. Когда теория оказывается беспомощной при объяснении новых явлений, она не даст оснований для понимания. В таком контексте объяснение становится методологическим принципом построения новой теории. Новые теории в условиях возрастающей сложности науки, не способные объяснить новые явления, то есть не удовлетворяющие принципу объяснения, как принципу построения новой теории, вынуждены перестраиваться, если они не хотят оказаться на периферии новой области математического исследования. Математическая теория всегда сводит объяснение к каким-то основаниям, признанными верными заранее. Но какое бы основание не было бы выбрано, всегда правомерен вопрос об обосновании выбранных оснований. Обоснование менее существенно для истинности, чем та научная теория, которую оно обосновывает. Отсюда, с точки зрения методологии современной психологии, вытекает парадокс научного творчества: хотя обоснование “само по себе” ничего не обосновывает, тем не менее, именно его наличие позволяет рассматривать какое-либо высказывание как научное.

Однако если мы рассматриваем некоторые утверждения как научные, то обоснование все же что-то обосновывает. “Познание” является неясным в силу следующей оппозиции. Во-первых, по мнению Бертрانا Рассела, потому что “значение слова всегда более или менее неясно, за исключением области логики и чистой математики”, а во-вторых, потому что “все, что мы считаем познанием, в большей или меньшей степени недостоверно” [7, с. 111]. Познание, как приобретение знания о мире, обычно отождествляется с представлением о познании законов, действующих в природе. Поскольку процесс познания начинается с качественной, а не с количественной характеристики, то ответить на важнейшие вопросы философии математики без развитой *теоретической рефлексии* невозможно. Не случайно для наиболее выдающихся математиков характерна устойчивая тенденция к методологической рефлексии их научного творчества. Напомним, что “рефлексией” называется акт мышления, направленный на собственное сознание, при котором три ипостаси человеческого действия – цель, предмет и средство – так “завязаны в один узел”, что на уровне рефлексии они трудно различимы. Даже отказ от выбора философско-методологической позиции – тоже определенная философская позиция, хотя и не очень эффективная для анализа научной теории.

Строгость математических конструкций и теорий отступает иногда перед решением актуальных естественнонаучных проблем. С точки зрения критического рационализма Карла Поппера, никто не обла-

дает знанием окончательной Истины, но совместными усилиями, прислушиваясь к критическим замечаниям, мы постепенно приближаемся к истине. С возрастанием уровня математической строгости уверенность математического сообщества в оценке надежности непротиворечивого развития математических теорий подвергается определенному испытанию. Эти сложности естественны для математики, так как порождаются особенностями теоретического мышления, а также *научной и философской рефлексии*, которые, тем не менее, не ставят под сомнение дедуктивную природу математического рассуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Звездкина, Э.Ф.* Теория философии / Э.Ф. Звездкина, В.Ф. Егоров. — М.: Филологическое общество "СЛОВО"; Изд-во Эксмо, 2004. — 448 с.
2. *Монастырский, М.И.* Современная математика в отблеске медалей Филдса / М.И. Монастырский. — М.: Янус-К, 2000. — 200 с.
3. *Непейвода, Н.Н.* Прикладная логика / Н.Н. Непейвода. — 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 2000. — 490 с.
4. *Плькин, Р.В.* Математика: определенность развития // Методологические проблемы развития и применения математики / Р.В. Плькин. — М., 1985. — С. 4-10.
5. *Целищев, В.В.* Поиски новой философии математики / В.В. Целищев // Философия науки. — 2001. — № 3. — С. 135-147.
6. *Непейвода, Н.Н.* Вызовы логики и математики XX века и "ответ" на них цивилизации / Н.Н. Непейвода // Вопросы философии. — 2005. — № 8. — С. 118-128.
7. *Рассел, Б.* Человеческое познание: его сфера и границы / Б. Рассел. — Киев: Ника-Центр, 2001. — 560 с.

Поступила в редакцию 07.10.2008 г.

УДК 621.372.8; 535.1

А.Б. СОТСКИЙ, П.Я. ЧУДАКОВСКИЙ, И.У. ПРИМАК

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА В ПЛАНАРНЫХ СТРУКТУРАХ С ПОЛНОСТЬЮ СОГЛАСОВАННЫМИ СЛОЯМИ

Предложен метод расчета дифракционных полей в планарных структурах с полностью согласованными слоями, моделирующими открытое пространство. Подход проиллюстрирован на примере исследования параметров отраженного светового пучка при призмном возбуждении ТЕ-моды планарного оптического волновода с шероховатой поверхностью. Оценено влияние поверхностного рассеяния света на результат решения обратной задачи волноводной спектроскопии.

Ныне при решении дифракционных оптических задач в открытом пространстве широко применяется модель полностью согласованных

слоев (PML) [1]. Она позволяет использовать пространственно-ограниченное расчетное окно, при этом отражение излучения от границ окна минимизируется за счет нанесения на них PML, приближенно моделирующих открытое пространство. Обычно PML применяют при решении уравнений Максвелла методами конечных разностей и конечных элементов [1; 2]. В настоящем сообщении развивается альтернативный подход, представляющий собой модификацию известного метода спектральных разложений дифракционных полей в открытых планарных структурах по модам таких структур [3]. В своей классической формулировке этот метод приводит к сложным интегро-дифференциальным уравнениям относительно амплитуд мод непрерывного спектра. Ниже показано, что использование PML позволяет рассмотреть вместо открытых закрытые планарные структуры с дискретным спектром мод. В результате решение дифракционных задач существенно упрощается и сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Соответствующая техника проиллюстрирована на примере исследования проблемы рассеяния света на шероховатых границах раздела сред при волноводной спектроскопии тонких пленок.

Рассмотрим двумерное ($\nabla_x \equiv 0$) монохроматическое (с временным множителем $\exp(i\omega t)$) электромагнитное поле в планарной структуре, состоящей из n однородных изотропных диэлектрических слоев (рис. 1). При $y = A$ и $y = B$ структура ограничена идеально проводящими экранами. К экранам примыкают PML толщины Δ . Тензоры относительной магнитной и диэлектрической проницаемости PML удовлетворяют соотношениям [4]

$$\mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad \mu_{xy} = \mu_{xz} = \mu_{yz} = 0, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mu_{xx} = \mu_{zz} = \mu_0 = \alpha \exp(-i\pi/4), \quad \mu_{yy} = \mu_e = 1/\mu_0, \\ \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_0 = \varepsilon_i \mu_0, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_e = \varepsilon_i / \mu_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha > 0$ – некоторая вещественная константа, ε_i ($i = 1, n$) – диэлектрическая проницаемость среды, контактирующей с PML.

Нетрудно показать, что при выполнении (1), (2) коэффициенты отражения плоских волн ТЕ- и ТМ-поляризации от границы раздела диэлектрик-PML равны

$$R = -\exp(-2i\mu_0\sigma_i k_0 \Delta), \quad (3)$$

где $\sigma_i = \sqrt{\varepsilon_i} \sin \theta$, θ – угол падения, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ – волновое число вакуума. Таким образом, при достаточно большом значении Δ отражение излучения от PML становится пренебрежимо малым ($|R| \rightarrow 0$) независимо от его поляризации и угла падения, иными словами, PML моделирует открытое пространство в закрытой структуре. Воспользуемся этим свойством для исследования дифракционных полей в

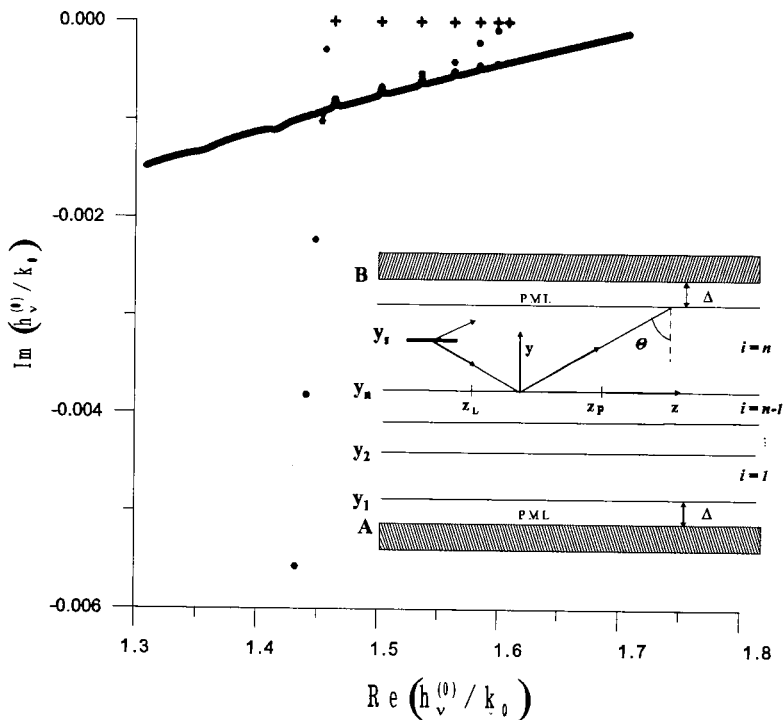


Рис. 1. Диаграммы постоянных распространения мод планарной структуры, моделирующей призмное устройство связи (точки) и мод свободного волновода в открытом пространстве (крестики). На вставке – исследуемая структура

открытой планарной структуре с продольной нерегулярностью. Будем считать, что эта нерегулярность обусловлена колебаниями толщин диэлектрических слоев при движении вдоль оси Oz . Ограничимся рассмотрением волн ТЕ-поляризации. Анализ ТМ-волн аналогичен.

В соответствии с уравнениями Максвелла, x – компонента напряженности электрического поля ТЕ-волн в области $A \leq y \leq B$ (рис. 1) описывается уравнением

$$\mu_e \nabla_y \mu_o^{-1} \nabla_y E_x + \nabla_z^2 E_x + k_0^2 \varepsilon(y, z) E_x = f(y, z), \quad (4)$$

решаемым с нулевыми граничными условиями при $y = A$, $y = B$. Здесь в областях PML $\varepsilon(y, z) = \varepsilon_i$, а значения μ_o и μ_e определяются по формулам (2). Вне этих областей $\mu_o = \mu_e = 1$, а функция $\varepsilon(y, z)$ описывает диэлектрическую проницаемость нерегулярной планарной структуры. Функция $f(y, z)$ задается источником излучения (см. ниже).

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля:

$$[\mu_e \nabla_y \mu_o^{-1} \nabla_y + k_0^2 \varepsilon(y, z) - h_v^2(z)] \varphi_v(y, z) = 0, \quad \varphi_v(A, z) = 0, \quad \varphi_v(B, z) = 0, \quad (5)$$

где z является фиксированным параметром. Эта задача имеет дискретный набор нетривиальных решений (мод), которые формируют полный набор функций на отрезке $A \leq y \leq B$ [3]. При этом $h_v(z)$ имеет смысл постоянной распространения, а $\varphi_v(y, z)$ – поперечного

распределения поля ν -й моды продольно-регулярной планарной структуры с $\varepsilon(y) = \varepsilon(y, z)$.

В соответствии с (5) в j -м слое структуры

$$\varphi_\nu(y, z) = \varphi_{\nu j} \cos[\sigma_j(y - y_j)] + \varphi'_{\nu j} \sin[\sigma_j(y - y_j)] / \sigma_j, \quad (6)$$

где $\varphi_{\nu j} = \varphi_\nu(y_j, z)$, $\varphi'_{\nu j} = \partial \varphi_\nu / \partial y|_{y=y_j}$, $y_j = y_j(z)$ – нижняя граница слоя (рис. 1), $\sigma_j = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_j - h_\nu^2(z)}$. Согласно (3), (5), (6), имеют место рекуррентные соотношения

$$\varphi_{\nu j+1} = \varphi_{\nu j} \cos(\sigma_j d_j) + \varphi'_{\nu j} \sin(\sigma_j d_j) / \sigma_j, \quad \varphi'_{\nu j+1} = -\varphi_{\nu j} \sigma_j \sin(\sigma_j d_j) + \varphi'_{\nu j} \cos(\sigma_j d_j), \quad (7)$$

где $j = \overline{2, n}$, $\varphi'_{\nu 2} = t_\nu$, $\varphi_{\nu 2} = t_\nu(1 - e)[i\sigma_1(1 + e)]^{-1}$, $e = \exp[-2i\sigma_1(d_1 + \mu_0 \Delta)]$, $d_j = d_j(z)$ – локальная толщина j -го слоя, $t_\nu = t_\nu(z)$ – множитель, определяемый из условия нормировки полей мод

$$\int_A^B \mu_e^{-1} \varphi_\nu(y, z) \varphi_\mu(y, z) dy = \delta_{\nu\mu}, \quad (8)$$

где $\delta_{\nu\mu}$ – символ Кронекера (ортогональность функций φ_ν с различными номерами ν следует из (5)).

Из (3), (6) получаем дисперсионное уравнение относительно $h_\nu(z)$:

$$\sigma_n^2 \{ [\varphi_{\nu n} - \varphi'_{\nu n} / (i\sigma_n)] \exp[-i\sigma_n(d_n + \mu_0 \Delta)] + [\varphi_{\nu n} + \varphi'_{\nu n} / (i\sigma_n)] \exp[i\sigma_n(d_n + \mu_0 \Delta)] \} = 0. \quad (9)$$

В соответствии с (7) левая часть (9) является целой трансцендентной функцией комплексной переменной h_ν . В результате число корней уравнения (9) на полной комплексной плоскости неограниченно велико [5]. Значения этих корней в любой замкнутой области комплексной плоскости могут быть рассчитаны методом контурного интегрирования [6]. Последующее построение функций $\varphi_\nu(y, z)$ на основании (6), (7) не вызывает затруднений.

В силу полноты набора функций $\varphi_\nu(y, z)$ на отрезке $A \leq y \leq B$ решение уравнения (4) может быть представлено в виде равномерно сходящихся рядов

$$E_x(y, z) = \sum_\nu U_\nu(z) \varphi_\nu(y, z), \quad \nabla_z E_x(y, z) = \sum_\nu V_\nu(z) \varphi_\nu(y, z), \quad (10)$$

где $U_\nu(z)$ и $V_\nu(z)$ – некоторые функции z . Подставляя (10) в (4) и учитывая (8), приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами

$$\nabla_z U_\nu = V_\nu - \sum_{\mu \neq \nu} D_{\nu\mu} U_\mu, \quad \nabla_z V_\nu = -U_\nu h_\nu^2 - \sum_{\mu \neq \nu} D_{\nu\mu} V_\mu + \bar{f}_\nu(z), \quad (11)$$

где

$$D_{\nu\mu} = D_{\nu\mu}(z) = k_0^2 [h_\mu^2(z) - h_\nu^2(z)]^{-1} \int_A^B \mu_e^{-1} \varphi_\nu(y, z) \varphi_\mu(y, z) \nabla_z \varepsilon dy,$$

$$\bar{f}_\nu(z) = \int_A^B \mu_e^{-1} \varphi_\nu(y, z) f(y, z) dy. \quad (12)$$

Ограничимся в бесконечных рядах (10) k слагаемыми ($\nu = \overline{1, k}$). В этом случае (11) представляет собой замкнутую систему $2k$ уравнений. Предположим, что вне отрезка $z_l \leq z \leq z_p$ рассматриваемая структура регулярна ($D_{\nu\mu}(z) \equiv 0$) и что на некоторых интервалах оси $0z$, примыкающих к этому отрезку, отсутствуют источники излучения ($\bar{f}_\nu(z) \equiv 0$). Тогда на этих интервалах, согласно (11),

$$U_\nu = a_\nu \exp(-ih_\nu^{(0)} z) + b_\nu \exp(ih_\nu^{(0)} z), \\ V_\nu = -ih_\nu^{(0)} [a_\nu \exp(-ih_\nu^{(0)} z) - b_\nu \exp(ih_\nu^{(0)} z)], \quad \text{при } z_l \leq z, \quad (13)$$

$$U_\nu = c_\nu \exp(-ih_\nu^{(0)} z) + e_\nu \exp(ih_\nu^{(0)} z), \\ V_\nu = -ih_\nu^{(0)} [c_\nu \exp(-ih_\nu^{(0)} z) - e_\nu \exp(ih_\nu^{(0)} z)], \quad \text{при } z \geq z_p, \quad (14)$$

где $h_\nu^{(0)}$ – постоянная распространения ν -й моды регулярной планарной структуры, $a_\nu, b_\nu, c_\nu, e_\nu$ – некоторые постоянные, имеющие смысл амплитуд, падающих и отраженных от нерегулярного участка мод. Пусть при $z > z_p$ источники излучения отсутствуют. Тогда, очевидно, $e_\nu = 0$, значения амплитуд a_ν задаются внешними источниками излучения, а амплитуды b_ν и c_ν должны определяться в результате решения дифракционной задачи.

Один из возможных путей такого решения состоит в поочередном интегрировании $k + 1$ задачи Коши для системы (11) на отрезке $z_l \leq z \leq z_p$ (в общем случае данное интегрирование должно осуществляться численно). В первой из этих задач используются начальные условия $U_\nu(z_l) = a_\nu \exp(-ih_\nu^{(0)} z_l)$, $V_\nu(z_l) = -ih_\nu^{(0)} U_\nu(z_l)$. После ее интегрирования получим $U_\nu^{(0)} = U_\nu(z_p)$, $V_\nu^{(0)} = V_\nu(z_p)$. В остальных k задачах полагаем в (11) $\bar{f}_\nu(z) \equiv 0$ и используем начальные условия $U_\nu(z_l) = \delta_{\nu\mu} \exp(ih_\nu^{(0)} z_l)$, $V_\nu(z_l) = ih_\nu^{(0)} U_\nu(z_l)$. В результате интегрирования этих задач будут построены две матрицы размерности $k \times k$: $U_{\nu\mu} = U_\nu(z_p)$, $V_{\nu\mu} = V_\nu(z_p)$. Учитывая линейность уравнений (11) и представление (14), получаем неоднородную алгебраическую систему относительно неизвестных b_ν :

$$\sum_{\mu=1}^k (V_{\nu\mu} + ih_\nu^{(0)} U_{\nu\mu}) b_\mu = -ih_\nu^{(0)} U_\nu^{(0)} - V_\nu^{(0)}, \quad (15)$$

где $\nu = \overline{1, k}$. Определив из (15) коэффициенты b_ν , мы можем рассчитать дифракционное поле по формулам (10). При этом вне отрезка $z_l \leq z \leq z_p$ следует использовать представления (13), (14), где

$c_\nu = \exp(ih_\nu^{(0)}z_p)(U_\nu^{(0)} + \sum_{\mu=1}^k U_{\nu\mu}b_\mu)$, а при $z_i \leq z \leq z_p$ функции $U_\nu(z)$ и $V_\nu(z)$ можно вычислить, численно проинтегрировав систему (11) при начальных условиях для $U_\nu(z)$ и $V_\nu(z)$, вытекающих из (13).

Исследование различных структур показало, что из-за накопления вычислительной погрешности описанный способ решения дифракционных задач эффективен в случае коротких отрезков нерегулярности ($z_p - z_i \leq 10\lambda_0$). Если же $z_p - z_i > 10\lambda_0$, то предпочтительней иной подход. В нем выражения (11), (13), (14) заменяются эквивалентными интегральными уравнениями

$$U_\nu(z) = a_\nu \exp(-ih_\nu^{(0)}z) + 0,5 \int_{z_i}^z \Phi^{(-)}(z, z') dz' - 0,5 \int_z^{z_p} \Phi^{(+)}(z, z') dz', \quad (16)$$

$$V_\nu(z) = -0,5ih_\nu^{(0)} \left[2a_\nu \exp(-ih_\nu^{(0)}z) + \int_{z_i}^z \Phi^{(-)}(z, z') dz' + \int_z^{z_p} \Phi^{(+)}(z, z') dz' \right], \quad (17)$$

где $\Phi^{(\pm)}(z, z') = \exp[\pm ih_\nu^{(0)}(z - z')][F(z') \pm G(z')]$, $F(z) = -\sum_{\mu \neq \nu} D_{\nu\mu}(z)U_\mu(z)$,

$$G(z) = [ih_\nu^{(0)}]^{-1} \left\{ [(h_\nu^{(0)})^2 - h_\nu^2(z)]U_\nu(z) - \sum_{\mu \neq \nu} D_{\nu\mu}(z)V_\mu(z) + \bar{f}_\nu(z) \right\}.$$

Уравнения (16), (17) особенно эффективны при исследовании слабо нерегулярных слоистых структур, поскольку в этом случае они содержат малые параметры $(h_\nu^{(0)})^2 - h_\nu^2(z)$, $D_{\nu\mu}(z)$ и допускают численное решение методом итераций (см. ниже).

Следует отметить, что объем вычислений в обеих описанных схемах резко возрастает при увеличении порядка редукции рядов (10). Значение k при заданной точности решения определяется спектром используемых мод $\varphi_\nu(y, z)$, который, в свою очередь, зависит от толщины PML Δ . В частности, при $\Delta \rightarrow \infty$ данный спектр становится квазинепрерывным, поэтому $k \rightarrow \infty$. С другой стороны, при $\Delta \rightarrow 0$ спектр мод является разреженным (k можно выбрать конечным), но получаемое решение будет искажено вследствие паразитного отражения излучения от вспомогательных идеально проводящих экранов. Таким образом, оптимальные значения k и Δ должны определяться в ходе решения каждой конкретной задачи путем контроля устойчивости получаемых решений относительно выбора этих значений.

Проиллюстрируем сказанное на примере расчета дифракционных полей в призмном устройстве возбуждения планарных оптических волноводов (призмном устройстве связи), которое широко применяется при волноводной спектроскопии тонких пленок [7]. В известном алгоритме решения обратной задачи волноводной спектроскопии [8] не учитывается рассеяние излучения на шероховатых

границах раздела сред, которое неизбежно присутствует в реальном эксперименте. Таким образом, актуальным является исследование влияния данного рассеяния на поле отраженного светового пучка в схеме призмного устройства связи и на значения восстанавливаемых комплексных постоянных распространения волноводных мод.

Рассмотрим модель призмного устройства связи, в котором волноводная пленка, расположенная на подложке, возбуждается гауссовым пучком света, падающим на основание призмы, отделенной от пленки буферным слоем. В качестве призмы и подложки будем рассматривать полуограниченные среды. В планарной структуре с РМЛ, моделирующей описанное устройство (рис. 1), $n = 4$, при этом номера $i = 1, 2, 3, 4$ относятся к подложке, волноводной пленке, буферному слою и призме соответственно.

Предположим, что буферный слой является воздушным ($\varepsilon_3 = 1$). В этом случае рассеяние света будет главным образом обусловлено шероховатостью основания призмы и поверхности волновода [9]. Поэтому в дальнейшем будем считать, что на отрезке нерегулярности $z_1 \leq z \leq z_p$ координаты границ слоев y_3 и y_4 при движении вдоль оси Oz испытывают случайные отклонения от средних значений \bar{y}_3 и \bar{y}_4 , а координаты границ y_1 и y_2 фиксированы. Для определенности примем модель, в которой в эквидистантных дискретных точках $z_j = z_1 + j\Delta z$ ($j = \overline{0, N}$, $\Delta z = (z_p - z_1)/N$) отрезка $z_1 \leq z \leq z_p$ функции $y_i(z)$ ($i = 3, 4$) принимают значения $y_i^{(j)} = \bar{y}_i + 0,5\Delta y(1 - \tau_j)$, а при $z_j \leq z \leq z_{j+1}$

$$y_i(z) = y_i^{(j)} + (z - z_j)(y_i^{(j+1)} - y_i^{(j)})/\Delta z \quad (i = 3, 4). \quad (18)$$

Здесь τ_j – независимые (при различных j) случайные числа, равномерно распределенные на отрезке $(0,1)$, Δy – амплитуда колебаний функций $y_i(z)$. В рамках данной модели автокорреляционная функция $\rho(\tau) = \langle y_i(z)y_i(z + \tau) \rangle$ процессов $y_i(z)$ имеет вид

$$\rho(\tau) = \overline{y_i^2} \left[\frac{7}{6} - \frac{3}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta^2 - \frac{1}{2}(1 - \delta)^3 \right] \quad (\delta < 1),$$

$$\rho(\tau) = \frac{\overline{y_i^2}(2 - \delta)^3}{6} \quad (1 < \delta < 2), \quad \rho(\tau) = 0 \quad (\delta > 2),$$

где $\overline{y_i^2} = (\bar{y}_i)^2 + (\Delta y)^2/12$, $\delta = \tau/\Delta z$.

Для вычисления коэффициентов системы (11) $D_{\nu\mu}$ заметим, что дифференцирование ступенчатой функции $\varepsilon(y, z)$ в (12) приводит к появлению дельта-функций Дирака. Их интегрирование дает аналитический результат:

$$D_{\nu\mu}(z) = [h_\mu^2(z) - h_\nu^2(z)]^{-1} \left[(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) \left(\varphi_\nu \varphi_\mu \frac{dy}{dz} \right)_{y=y_4(z)} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \left(\varphi_\nu \varphi_\mu \frac{dy}{dz} \right)_{y=y_3(z)} \right], \quad (19)$$

где под dy/dz понимаются производные функций (18).

Возбуждающий пучок зададим при помощи планарного дипольного источника излучения, расположенного на высоте y_x от основания призмы. В этом случае

$$f(y, z) = -\frac{i}{\pi} \delta(y - y_s) \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \sigma_n \exp(-ik_z z + i\sigma_n y_s) \int_{-\infty}^{\infty} dz' E_{xi}(0, z') \exp(ik_z z'), \quad (20)$$

где $\delta(y - y_s)$ – дельта-функция Дирака, $\sigma_n = \sigma_n(k_z) = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_n - k_z^2}$, $E_{xi}(y, z)$ – поле возбуждающего пучка в призме ($y = 0$ – плоскость основания призмы). Для гауссова пучка единичной амплитуды и радиуса w , сфокусированного на основании призмы, $E_{xi}(0, z) = \exp[-(z/w)^2 - ik_{z0} z]$, где $k_{z0} = k_0 \sin \theta \sqrt{\varepsilon_n}$, θ – угол падения пучка, тогда внутренний интеграл в (20) пропорционален экспоненте $\exp[-w^2(k_z - k_{z0})^2/4]$. Поэтому если, как это имеет место в большинстве представляющих практический интерес случаев, выполняется неравенство $k_0 w \gg 1$, то радикал $\sigma_n(k_z)$ в (20) может быть разложен в ряд Тейлора в окрестности точки $k_z = k_{z0}$. Ограничиваясь в показателе экспоненты в (20) тремя членами данного ряда, в результате интегрирования находим

$$f(y, z) = -2i\delta(y - y_s) \sigma_n^{(0)} Q^{-1} \exp[-ik_{z0} z + i\sigma_n^{(0)} y_s - (z + y_s \operatorname{tg} \theta)^2 / (wQ)^2], \quad (21)$$

где $\sigma_n^{(0)} = \sigma_n(k_{z0})$,

$$Q = \sqrt{1 + 2iy_s k_0^2 \varepsilon_n [w^2 (k_0^2 \varepsilon_n - k_{z0}^2)^{1,5}]^{-1}}. \quad (22)$$

Заметим, что освещенная возбуждающим пучком область на основании призмы связи находится в диапазоне $-w < z$. Поэтому при исследовании эффектов рассеяния света естественно выбрать границы отрезка нерегулярности структуры из условий $z_l \ll -w$, $z_p \gg w$. При достаточно большом значении y_s эти условия совместимы с неравенством $-y_s \operatorname{tg} \theta + w \ll z_l$. С другой стороны, в представляющем практический интерес случае, когда $|Q| \approx 1$, функция $f(y, z)$ вида (21) заметно отличается от нуля только в диапазоне $-y_s \operatorname{tg} \theta - w < z < -y_s \operatorname{tg} \theta + w$. Очевидно, что при указанных условиях функции $\bar{f}_v(z)$ на отрезке нерегулярности $z_l \leq z \leq z_p$ будут иметь пренебрежимо малые значения, а амплитуды падающих мод a_v можно рассчитать аналитически, решив неоднородную систему (11) при $D_{v\mu}(z) \equiv 0$:

$$a_v = -(2ih_v^{(0)})^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ih_v^{(0)} z) \bar{f}_v(z) dz.$$

Проводя в последнем выражении интегрирование с учетом (12), (21), находим

$$a_v = \sigma_n^{(0)} (h_v^{(0)})^{-1} \sqrt{\pi} w \varphi_v(y_s, z_l) \exp[i\sigma_n^{(0)} y_0 - i(h_v^{(0)} - k_{z0}) y_0 \operatorname{tg} \theta - 0,25(h_v^{(0)} - k_{z0})^2 w^2 Q^2]. \quad (23)$$

Результаты исследования дифракционных полей в призмном устройстве связи представлены на рис. 1–4.

Расчеты выполнены при $\alpha = 1$, $y_s = d_4$, $\bar{y}_4 = 0$, $\bar{y}_3 = -d_3$, $\varepsilon_1 = 2,12314 - i \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 2,595192 - i \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_3 = 1 - i \cdot 0$, $\varepsilon_4 = 3,06145 - i \cdot 0$, $\lambda_0 = 0,6328 \text{ мкм}$, $z_l = -500 \text{ мкм}$, $z_p = 10000 \text{ мкм}$, $w = 170 \text{ мкм}$, $\theta = 1,165553 \text{ рад}$, $d_1 = 5 \text{ мкм}$, $d_2 = 3 \text{ мкм}$, $d_3 = 0,1 \text{ мкм}$, $d_4 = 500 \text{ мкм}$ (данные d_2 , d_3 , d_4 относятся к регулярной планарной структуре). Указанные значения соответствуют резонансному возбуждению основной моды волноводной пленки из оксида алюминия, расположенной на кварцевой подложке, посредством призмы связи из тяжелого флинта (координаты z_l и z_p выбраны с учетом размеров реальных призм связи). При вычислении функций (18) r_j задавались генератором случайных чисел, а Δy и Δz полагались равными $\Delta y = 0,05 \text{ мкм}$, $\Delta z = 3 \text{ мкм}$. При таком Δz интервал корреляции шероховатостей (см. функцию $\rho(\tau)$) сравним с толщиной волноводной пленки, и волноводная мода может испытывать существенное затухание, связанное с поверхностным рассеянием света [10].

Ключевым элементом вычислений является расчет корней дисперсионного уравнения (9). Рис. 1 иллюстрирует расположение данных корней на комплексной плоскости для регулярной планарной структуры при $\Delta = 1 \text{ мкм}$ (приведенный фрагмент спектра $h_v^{(0)}$ использовался в дальнейших расчетах). Из рис. видно, что призма связи и РМЛ существенно изменяют спектр постоянных распространения мод волновода.

На рис. 2 представлены распределения интенсивности отраженного светового пучка $I(k_z)$, называемые темными m -линиями [7] (волноводная спектроскопия основана на измерении и обработке распределений именно такого типа). Под $I(k_z)$ понимается функция

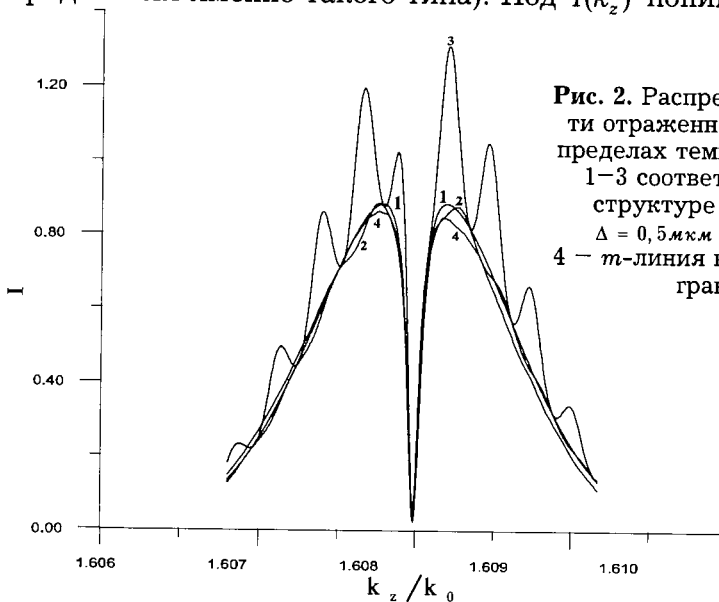


Рис. 2. Распределение интенсивности отраженного светового пучка в пределах темной m -линии. Кривые 1–3 соответствуют регулярной структуре при $\Delta \geq 0,7 \text{ мкм}$ (1), $\Delta = 0,5 \text{ мкм}$ (2), $\Delta = 0,3 \text{ мкм}$ (3); 4 — m -линия в случае шероховатых границ раздела

$$I(k_z) = \left| \left(w\sqrt{\pi} \right)^{-1} \int_{z_1}^{z_p} E_{xr}(y_0, z) \exp(ik_z z) dz \right|^2, \quad (24)$$

где

$$E_{xr}(y_0, z) = \sum_{\nu=1}^k U_{\nu}(z) \varphi_{\nu}(y_0, z) - Q^{-1} \exp[i\sigma_n^{(0)} y_0 - ik_{z0} z - (z + y_0 \operatorname{tg} \theta)^2 (wQ)^{-2}]$$

есть поле отраженного пучка на высоте y_0 от основания призмы, равное разности полного и падающего полей (коэффициент Q имеет вид (22), где y_s заменено на y_0). При расчетах использовано значение $y_0 = 1 \text{ мкм}$.

Кривые на рис. 2 рассчитаны по формулам (16), (23), (24) при условии $\bar{f}_{\nu}(z) \equiv 0$, которое пояснено выше. Они соответствуют $k \geq 30$. Выбор различных k из указанного диапазона (учитывались моды планарной структуры, постоянные распространения которых были наиболее близки к постоянной распространения возбуждаемой моды) привел к совпадающим в масштабах рисунка кривым. При рассмотрении регулярной планарной структуры интегралы в (16) обращаются в нуль, поэтому несовпадение кривых 1, 2, 3 на рис. 2 объясняется отражением излучения от идеально проводящих экранов (см. рис. 1). При толщине PML $\Delta \geq 0,7 \text{ мкм}$ отражение от экранов становилось пренебрежимо малым, что выражалось в получении идентичных m -линий (кривая 1 на рис. 2). Кривая 4 на рис. 2 соответствует $\Delta = 1 \text{ мкм}$. Она рассчитана с учетом рассеяния излучения на поверхности волновода и основании призмы связи для конкретной реализации случайных процессов $y_3(z)$, $y_4(z)$. При ее построении система уравнений (16), (17) решалась методом итераций. Практически стопроцентная сходимость решения наблюдалась при 4-5 итерациях. Кривая 4 так же, как и кривые 1-3, соответствует $k \geq 30$. Необходимость учета сравнительно небольшого числа мод при описании поверхностного рассеяния света объясняется быстрым спадом коэффициентов связи мод (19) с ростом различия их постоянных распространения (модуля $|h_{\mu}^2(z) - h_{\nu}^2(z)|$). Заметим, что кривые 1 и 4 заметно отличаются, что свидетельствует о существенной роли поверхностного рассеяния. Заметим также, что задача отражения светового пучка от регулярной призмы связи имеет строгое аналитическое решение [8]. Зависимость $I(k_z)$, рассчитанная на основании данного решения, полностью совпала с кривой 1, что подтверждает корректность развитого подхода.

Зависимости, приведенные на рис. 3 и 4, рассчитаны при $\Delta = 1 \text{ мкм}$. На рис. 3 представлены распределения интенсивности отраженного пучка $|E_{xr}(y_0, z)|^2$ вблизи основания призмы связи для регулярной планарной структуры. Они иллюстрируют процесс образования трека моды [7], связанный с переизлучением энергии моды в призму связи и сходимость решения в зависимости от числа учи-

тываемых мод структуры. Как показали расчеты, кривая 1 рис. 3 находится в полном согласии с результатами точного решения [8].

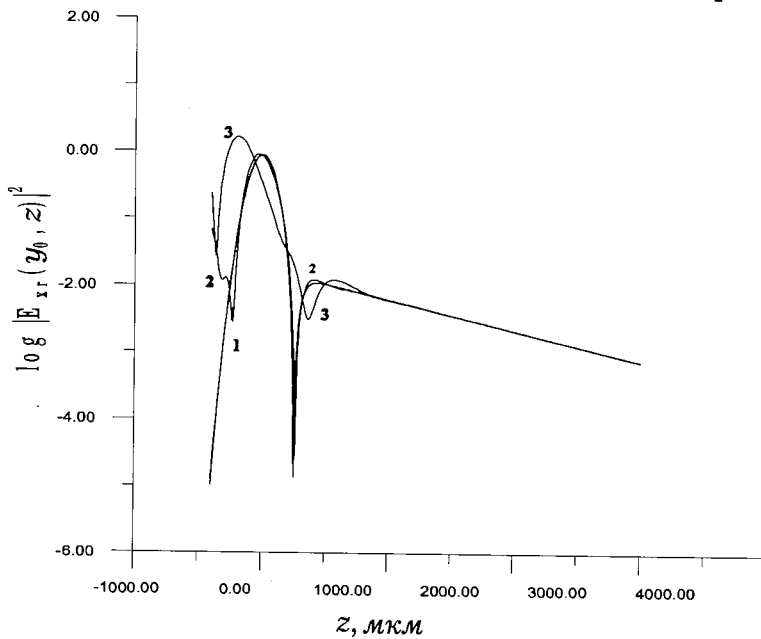


Рис. 3. Распределения интенсивности отраженного пучка в регулярной планарной структуре при $y_0 = 1 \text{ мкм}$ и числе учитываемых мод ≥ 30 (1), 14 (2), 7(3)

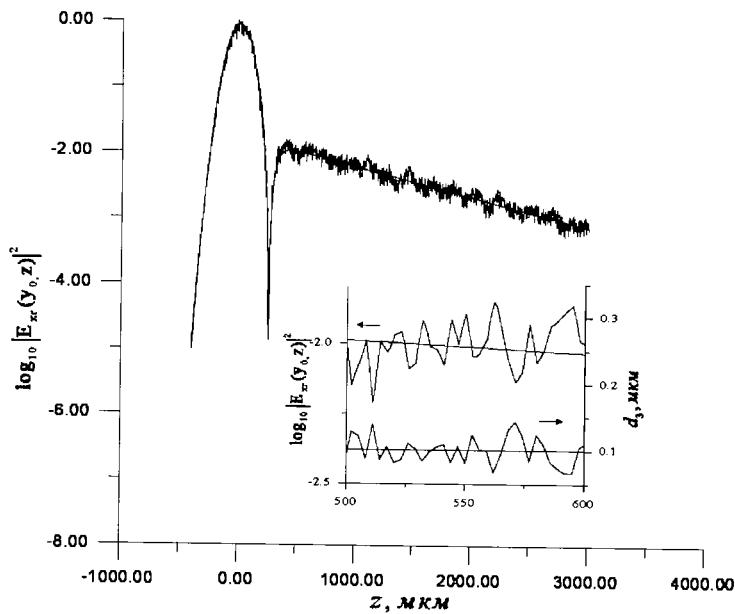


Рис. 4. Распределения интенсивности отраженного пучка при $y_0 = 1 \text{ мкм}$ в регулярной и нерегулярной планарных структурах (плавная и колеблющаяся кривые). На вставке – увеличенный фрагмент данного распределения и зависимость толщины буферного слоя от z (горизонтальная линия $d_3(z)$ для регулярной структуры)

Рис. 4 иллюстрирует модификацию распределения $|E_{xr}(y_0, z)|^2$, вызванную рассеянием излучения на шероховатых границах раздела сред. Представленные кривые соответствуют $k = 30$. Согласно рис. 4 наиболее отчетливо влияние шероховатости границ раздела сред на отраженное поле наблюдается вдали от центра пучка, т. е. в области сформированного трека моды. Отметим также, что колебания толщины буферного слоя и отраженной интенсивности находятся, с хорошим приближением, в противофазе (см. вставку к рис. 4).

Практический интерес представляет решение обратной задачи волноводной спектроскопии по восстановлению комплексной постоянной распространения возбуждаемой волноводной моды путем обработки распределения $I(k_z)$ [7].

Обработав кривую 1 на рис. 2 с использованием известного алгоритма [8], мы получили $\bar{h}/k_0 = 1,6079854 - i5,305 \cdot 10^{-5}$, $h/k_0 = 1,6079714 - i3,104 \cdot 10^{-5}$, где \bar{h} – постоянная распространения исследуемой моды в присутствии призмы связи, h – постоянная распространения данной моды в отсутствие призмы связи. Для сравнения: точное значение h/k_0 составляет $1,6079733 - i3,106 \cdot 10^{-5}$. Полученная погрешность решения находится на том же уровне, что и в подходе [8]. Это еще раз подтверждает эффективность использования PML.

Аналогичная обработка кривой 4 на рис. 2 привела к результату $\bar{h}/k_0 = 1,6079852 - i5,372 \cdot 10^{-5}$, $h/k_0 = 1,6079706 - i3,089 \cdot 10^{-5}$. Последнее значение находится в удовлетворительном согласии с точным, относящимся к регулярному волноводу. Заметим, что расчет зависимости модуля амплитуды основной моды свободного (в отсутствие призмы связи) волновода, прошедшей отрезок волновода с шероховатой поверхностью от длины этого отрезка путем решения уравнений (16), (17), показал, что полное (вызванное рассеянием и поглощением света) затухание данной моды может быть охарактеризовано коэффициентом $\text{Im}(h/k_0) = -3,163 \cdot 10^{-5}$. Сопоставление всех представленных значений h/k_0 позволяет заключить, что использованный алгоритм решения обратной задачи волноводной спектроскопии [8] осуществляет “фильтрацию” влияния буферного слоя, имеющего как фиксированную, так и стохастически колеблющуюся толщину.

Итак, в работе показано, что использование PML открывает возможность сравнительно простого расчета дифракционных полей в открытых планарных структурах. Продемонстрирована эффективность известного алгоритма решения обратной задачи волноводной спектроскопии при наличии шероховатостей на границах раздела сред. Разработанный подход может быть применен для исследования дифракционных эффектов в пространственно-ограниченном призмном устройстве возбуждения планарных оптических волноводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Taflove, A.** Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method / A. Taflove, S.C. Hagness // Artech House. Boston. - 2000. - P. 839.
2. **Liu, Y.C.** Optical birefringence and polarization dependent loss of square- and rectangular- lattice holey fibers with elliptical air holes: numerical analysis / Y.C. Liu, Y. Lai // Opt. Express. - 2005. - Vol. 13. - № 1. - P. 225-235.
3. **Шевченко, В.В.** Плавные переходы в открытых волноводах / В.В. Шевченко. - М.: Наука, 1969. - 191 с.
4. A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition / Z.S. Sacks [et al.] // IEEE Trans. Antennas Propagat. - 1995. - Vol. 43. - № 12. - P. 1460 - 1463.
5. **Романенко, А.А.** Решение дисперсионных уравнений для планарных волноводов в случае комплексных корней / А.А. Романенко, А.Б. Сотский // ЖТФ. - 1998. - Т. 68. - № 4. - С. 88-95.
6. **Сотский, А.Б.** К расчету комплексных корней трансцендентных уравнений / А.Б. Сотский // Доклады АН Беларуси. - 2001. - Т. 45. - № 3. - С. 18-21.
7. **Хомченко, А.В.** Волноводная спектроскопия тонких пленок / А.В. Хомченко. - Минск: БГУ, 2002. - 222 с.
8. **Сотский, А.Б.** Анализ распределения интенсивности отраженного пучка в схеме призмного возбуждения диэлектрических волноводов / А.Б. Сотский, А.А. Романенко, А.В. Хомченко, И.У. Примак // Радиотехника и электроника. - 1999. - Т. 44. - № 6. - С. 687 - 695.
9. **Унгер, Х.Г.** Планарные и волоконные оптические волноводы / Х.Г. Унгер. - М.: Мир, 1980. - 656 с.
10. **Маркузе, Д.** Оптические волноводы / Д. Маркузе. - М.: Мир, 1974. - 576 с.

Поступила в редакцию 30.11.2009 г.

УДК 530.162

А.В. КУЗЬМИН

ИНФОРМАЦИОННАЯ ЭНТРОПИЯ И УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ФЛУКТУАЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ ПО ЛЕТАРГИИ ПРИ ОГРУБЛЕННОМ СПОСОБЕ ОПИСАНИЯ

В данной работе рассматриваются неравновесные диссипативные процессы распространения поддерживаемых извне пучков нейтронов в однородных полубесконечных средах со сложными химическими составами. Посредством построения компьютерной модели в среде пакета Geant4 изучается связь между флуктуациями распределения нейтронов затухающего пучка по летаргии и мерой информации о его состоянии при огрубленном способе описания. На основании результатов численного моделирования установлена универсальность пространственных зависимостей информационной энтропии нейтронного пучка, а также среднего квадрата относительных флуктуаций распределения нейтронов по летаргии.

Введение

Статистическая термодинамика неравновесных процессов давно и активно изучает неравновесные стационарные состояния и, в частности, вопросы, связанные с их устойчивостью. С этими вопросами тесно связано исследование характеристик и свойств флуктуаций, в частности, в рамках флуктуационно-диссипационной теории [1]. В данной работе изучается связь между флуктуациями в неравновесной системе с большим переменным числом степеней свободы и мерой информации, необходимой для задания ее состояния при огрубленном описании. С этой целью рассматривается неравновесный стационарный диссипативный процесс распространения поддерживаемого извне первоначально моноэнергетического плоско-параллельного пучка нейтронов в однородной полубесконечной среде со сложным химическим составом. Взаимодействие нейтронов пучка со средой моделируется посредством применения программного пакета Geant4 и программы MULASSIS [2].

Огрубленное описание состояний физических систем, приводящее к потере части информации, несущественной по тем или иным соображениям, активно используется при рассмотрении широкого круга задач. Например, при статистическом описании макроскопических систем всегда в той или иной степени используется концепция огрубленного описания их микроскопических состояний. Наряду с этим посредством огрубления фазового пространства классических систем с небольшим числом степеней свободы вводится понятие перемешивания в фазовом пространстве и, в частности, определяется энтропия Колмогорова-Синяя, играющая фундаментальную роль в теории детерминированного хаоса [3]. В нейтронной физике зачастую вся область изменения энергии разбивается на ряд интервалов и представляет интерес только число (флюенс, плотность потока) нейтронов в каждом из таких конечных интервалов, в частности, это имеет место при изучении явлений переноса, детектировании и спектроскопии нейтронов [4].

В данной работе изучается пространственная зависимость информационной энтропии и флуктуаций распределения нейтронов затухающего пучка по летаргии при огрубленном способе описания. В силу симметрии задача сводится к рассмотрению одномерного случая по пространственной переменной.

Информационная энтропия представляет собой меру дополнительной информации, необходимой для предсказания результата измерения состояния системы. При описании системы, которая в результате измерения может быть обнаружена в одном из N возможных (огрубленных) состояний, нумеруемых индексом k , информационная энтропия определяется формулой Шеннона

$$S = -\sum_k p_k \ln(p_k), \quad (1)$$

где p_k есть вероятность обнаружения системы в состоянии или группе состояний k , нормированная на единицу $\sum p_k = 1$. Информационная энтропия является условно-определенной величиной. В общем случае для ее задания необходимо указать, при каких условиях она определена, то есть определить порядок вычисления величин p_k , задав, скажем, экспериментальную установку и методику, посредством которой они измеряются. В классическом случае, если под состояниями системы понимать ячейки в μ -пространстве, информационная энтропия (1) совпадает с энтропией Больцмана. В квантовом случае формула (1) задает широко используемую энтропию фон Неймана, если под вероятностями p_k понимать диагональные элементы статистической матрицы в базисе, в котором она приведена к диагональному виду.

Результаты численного моделирования

Рассмотрим распространение первоначально моноэнергетических параллельных широких пучков нейтронов с начальными энергиями 500 кэВ и 50 кэВ через полубесконечные среды из обычного, колеманит-баритового и бористого баритового бетонов, которые применяются при создании защиты от нейтронного и гамма-излучения. Пучки падают по нормали к границе среды. В состав бористого баритового бетона входят естественный минерал барит (сернокислый барий), широко применяемый для рентгеновской защиты, а также бористая фритта, состоящая из продуктов спекания диоксида кремния с бурой [5]. Защитные свойства колеманит-баритового бетона ранее рассматривались автором в работе [6]. Химический состав бористого баритового бетона, рассматриваемого в данной работе, приведен в таблице 1. Химический состав колеманит-баритового бетона – в таблице 2, обычного бетона – в таблице 3. Данные взяты из справочников [7]. Рассмотрим нейтроны широкого пучка, вектора импульсов которых лежат в диапазоне углов от 0 до 90 градусов от направления распространения исходного пучка. Для вычисления энергетического спектра нейтронов в зависимости от глубины проникновения в бетон применялся пакет для моделирования прохождения элементарных частиц через вещество с использованием методов Монте-Карло Geant4 совместно с программой MULASSIS [2].

Таблица 1

Состав бористого баритового бетона

Элемент	H	B	O	F	Na	Mg	Al	Si	S
Содержание атомов, %	14,75	2,55	56,09	0,32	1,40	0,25	0,63	3,13	7,58
Элемент	K	Ca	Mn	Fe	Zn	Ba			
Содержание атомов, %	0,07	4,15	0,01	1,04	0,27	7,76			

Таблица 2

Состав колеманит-баритового бетона

Элемент	H	B	O	Na	Mg	Al	Si	S	Ca	Fe	Ba
Содержание атомов, %	20,87	2,24	53,99	0,11	0,22	0,56	1,55	7,43	5,23	0,46	7,34

Таблица 3

Состав обычного бетона

Элемент	H	C	O	Na	Mg	Al	Si	K	Ca	Fe
Содержание атомов, %	30,43	0,29	49,86	0,92	0,07	1,02	15,05	0,71	1,49	0,16

Разобьем диапазон энергий от нуля до начальной энергии нейтронов в моноэнергетическом пучке на ряд интервалов, ширина которых изменяется по логарифмическому закону таким образом, что логарифм отношения верхней границы интервала к нижней остается постоянным и равным $\Delta u = 0,2302$. Величина интервала выбрана таким образом, чтобы диапазон энергий от 1 кэВ до 1 ГэВ был разбит на 60 равных частей по логарифмической шкале энергии. В частности, для пучка нейтронов с начальной энергией 500 кэВ всего получится 27 интервалов, а для нейтронов с начальной энергией 50 кэВ – 17 интервалов, соответствующих энергиям нейтронов, меньшим начальной. Нейтронов с энергиями, превышающими энергию частиц в начальном моноэнергетическом пучке, в рассматриваемой ситуации нет. Подобное размещение граничных точек интервалов обеспечивает их равную ширину по логарифму, величине, которая часто используется в теории переноса нейтронов вместо энергии и определяется как $u = \ln(E_0/E)$, где E_0 есть некоторое фиксированное значение энергии, а E – энергия нейтрона [8]. Информационная энтропия распределения нейтронов пучка по логарифму в этом случае определяется выражением (1), в котором под величинами p_k следует понимать отношения флюенса нейтронов в k -м энергетическом интервале на полный флюенс непоглощенных нейтронов, сохранившихся к данному моменту времени в широком пучке. Флюенс нейтронов в начальном моноэнергетическом пучке принят равным 1 част./см².

Путем компьютерного моделирования прохождения пучков нейтронов через обычный, колеманит-баритовый и бористый баритовый бетоны были получены зависимости информационной энтропии от глубины проникновения нейтронов при начальных энергиях моноэнергетического нейтронного пучка, равных 50 кэВ и 500 кэВ. Результаты моделирования представлены на рисунках 1 и 2. Видно, что информационная энтропия независимо от химического состава среды, количества энергетических интервалов, начальной энергии нейтронного пучка возрастает, асимптотически приближаясь к максимально возмож-

ным своим значениям, соответствующим полному отсутствию информации об энергиях нейтронов. Эти значения равны $\ln K_m$, где K_m – число интервалов летаргии, соответствующих энергиям, меньшим начальной энергии пучка. Они получаются, если в формуле (1) положить все вероятности p_k равными между собой и нормированными на единицу.

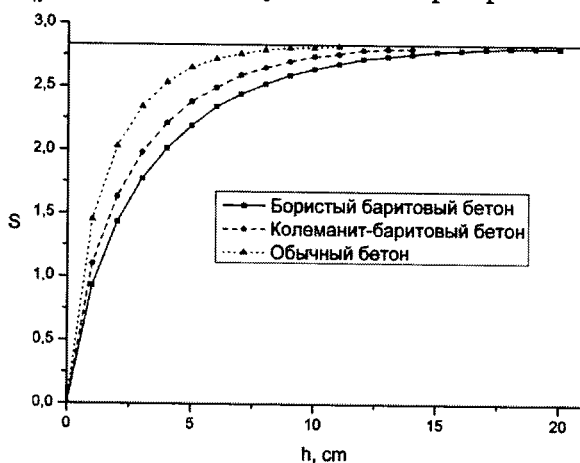


Рис. 1. Зависимость информационной энтропии S нейтронного пучка от глубины проникновения в материал h . Сплошная линия соответствует изменению информационной энтропии пучка в бористом баритовом бетоне, штриховая – в колеманит-баритовом бетоне, пунктирная – в обычном бетоне. Тонкая сплошная горизонтальная линия отмечает максимально возможное значение информационной энтропии, соответствующее полному отсутствию информации об энергиях нейтронов при выбранной ширине интервалов по летаргии. Энергия нейтронов начального моноэнергетического пучка равна 50 кэВ

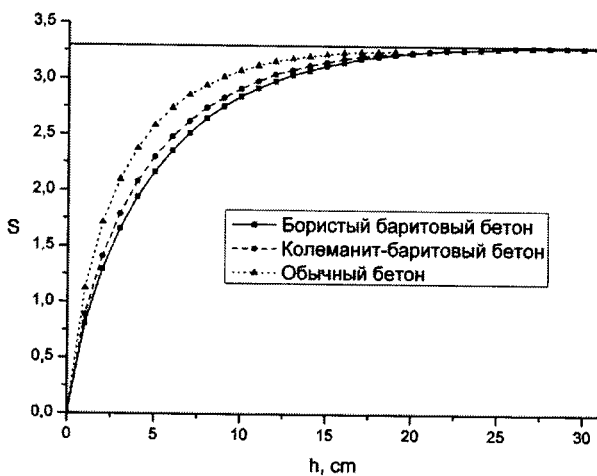


Рис. 2. Зависимость информационной энтропии S нейтронного пучка от глубины проникновения в материал h . Сплошная линия соответствует изменению информационной энтропии пучка в бористом баритовом бетоне, штриховая – в колеманит-баритовом бетоне, пунктирная – в обычном бетоне. Тонкая сплошная горизонтальная линия отмечает максимально возможное значение информационной энтропии, соответствующее полному отсутствию информации об энергиях нейтронов при выбранной ширине интервалов по летаргии. Энергия нейтронов начального моноэнергетического пучка равна 500 кэВ

Представленные на рисунках 1 и 2 зависимости могут быть аппроксимированы формулой

$$S = S^{(0)}(1 - e^{-\beta h}), \quad (2)$$

где S – огрубленная информационная энтропия нейтронного пучка, h – глубина проникновения нейтронов в бетон. Коэффициенты $S^{(0)}$ и β определяются путем интерполяции полученных численных зависимостей нелинейной формулой (2) с использованием метода наименьших квадратов.

При начальной энергии нейтронного пучка, равной 50 кэВ, для бористого баритового бетона коэффициент $S^{(0)} = 2,776 \pm 0,018$, $\beta = 0,330 \pm 0,009$. В случае колеманит-баритового бетона $S^{(0)} = 2,77 \pm 0,02$, $\beta = 0,427 \pm 0,015$. Для обычного бетона $S^{(0)} = 2,79 \pm 0,02$, $\beta = 0,66 \pm 0,02$. Максимально возможное значение информационной энтропии S_{\max} , соответствующее полному отсутствию информации об энергии нейтронов при выбранной ширине интервалов по летаргии (масштабе огрубления), равно 2,833 и соответствует случаю, когда все коэффициенты p_k в формуле (1) равны $1/17$.

При начальной энергии пучка, равной 500 кэВ, в случае бористого баритового бетона коэффициент $S^{(0)} = 3,263 \pm 0,014$, $\beta = 0,219 \pm 0,004$. Для колеманит-баритового бетона $S^{(0)} = 3,22 \pm 0,02$, $\beta = 0,257 \pm 0,007$. В случае обычного бетона $S^{(0)} = 3,20 \pm 0,02$, $\beta = 0,35 \pm 0,01$. Максимально возможное значение информационной энтропии S_{\max} , соответствующее полному отсутствию информации об энергии нейтронов при данном масштабе огрубления, в этом случае равно 3,296, все коэффициенты p_k в формуле (1) равны $1/27$.

В обоих случаях значения коэффициентов a для всех трех бетонов находятся в хорошем согласии со значением S_{\max} , отклонение не превышает 3%.

Информационная энтропия широкого пучка нейтронов, распространяющихся в диапазоне углов от 0 до 90 градусов от нормали к поверхности полубесконечной среды по направлению начального пучка, отнесенная к флюенсу нейтронов в этом пучке, S_F , как функция глубины проникновения в вещество, показана на рисунке 3. Графики приведены в полулогарифмическом масштабе. Рассмотрены случаи распространения первоначально моноэнергетического пучка нейтронов энергией 500 кэВ через бористый баритовый, колеманит-баритовый и обычный бетоны. Видно, что указанные зависимости в полулогарифмическом масштабе хорошо аппроксимируются прямыми линиями на всем диапазоне изменения глубины проникновения h , за исключением небольшого начального отрезка. В линейном масштабе указанные зависимости описываются формулой

$$S_F = S_F^0 \exp(\alpha h), \quad (3)$$

где значение параметра α зависит от химического состава среды и, как показывают дополнительные численные расчеты, от начальной энергии нейтронов в пучке, S_F^0 – некоторая константа.

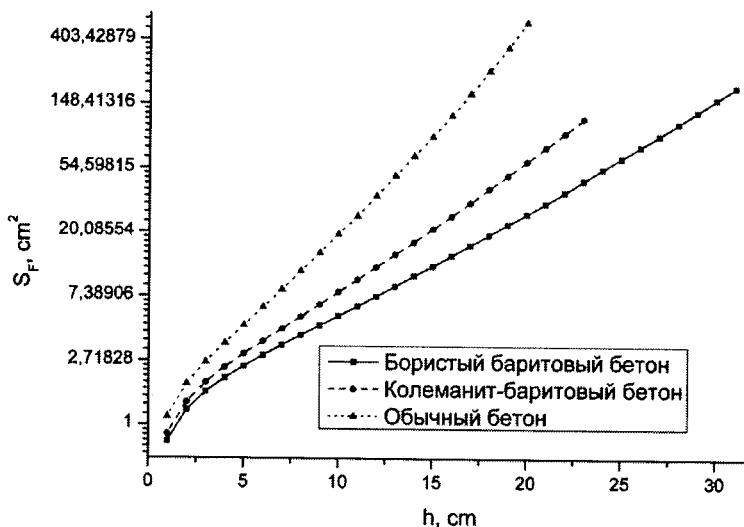


Рис. 3. Огрубленная информационная энтропия, отнесенная к флюенсу нейтронов в широком пучке, как функция глубины проникновения нейтронов в материал.

Сплошная линия соответствует бористому баритовому бетону, штриховая – колеманит-баритовому бетону, пунктирная – обычному бетону.

Начальная энергия нейтронов в пучке равна 500 кэВ

При начальной энергии нейтронов в пучке, равной 500 кэВ, коэффициенты S_F^0 и α равны, соответственно, $0,72 \pm 0,02$ и $0,181 \pm 0,001$ для бористого баритового бетона; $0,85 \pm 0,02$ и $0,215 \pm 0,001$ – для колеманит-баритового бетона; $0,41 \pm 0,04$ и $0,359 \pm 0,005$ – для обычного бетона.

Как показывают результаты численного моделирования, при изменении начальной энергии нейтронов пучка зависимость информационной энтропии S_F от глубины проникновения h по-прежнему хорошо описывается интерполяционной формулой (3). В частности, при начальной энергии нейтронов, равной 50 кэВ, коэффициенты S_F^0 и α равны, соответственно, $1,03 \pm 0,02$ и $0,231 \pm 0,001$ для бористого баритового бетона; $1,08 \pm 0,03$ и $0,294 \pm 0,003$ – для колеманит-баритового бетона; $0,99 \pm 0,03$ и $0,458 \pm 0,003$ – для обычного бетона. Таким образом, экспоненциальный вид зависимости (3) не изменяется при изменении начальной энергии нейтронов или химического состава среды, то есть является в этом смысле универсальным.

Пространственная зависимость флуктуаций распределения нейтронов

Как показывают результаты численного моделирования, распределение нейтронов по летаргии, в пределе $h \rightarrow \infty$, стремится максимизировать информационную энтропию, т.е. установить рав-

ные средние значения флюенса нейтронов в каждом из интервалов латаргии. Имеющие место незначительные отклонения от равномерного распределения в рамках данного рассмотрения не существенны и учитываться не будут. В данном разделе рассматривается пространственная зависимость флуктуаций распределения нейтронов по латаргии при единичном флюенсе начального пучка. Покажем, что эта зависимость при огрубленном описании полностью определяется пространственной зависимостью информационной энтропии (2). Обозначим f_i флюенс нейтронов в i -й ячейке латаргии, δf_i – флуктуация флюенса, f – среднее значение флюенса в ячейке, F – полный флюенс нейтронов пучке. Все величины вычисляются при единичном флюенсе начального пучка и зависят от глубины h проникновения нейтронов в полубесконечную среду. Информационная энтропия при огрубленном способе описания с учетом сделанных выше допущений задается выражением

$$S = - \sum_{i=1}^{K_m} \frac{f + \delta f_i}{F} \ln \frac{f + \delta f_i}{F} . \quad (4)$$

Используя формулу Тейлора и сохраняя три первых члена, получим, что

$$\frac{\langle \delta f_i^2 \rangle}{F^2} = \frac{2}{K_m^2} (S^{(0)} - S) = \frac{2}{K_m^2} S^{(0)} \exp(-\beta h), \quad (5)$$

где $\langle \delta f_i^2 \rangle = \frac{1}{K_m} \sum_{i=1}^{K_m} \delta f_i^2$, максимальное значение информационной энтропии $S^{(0)} = \ln K_m$ и использовано выражение (2), полученное путем интерполяции результатов численных расчетов. В формулу (5) входит единственный параметр, характеризующий химический состав среды и энергию начального моноэнергетического пучка нейтронов. Таким образом, пространственная зависимость относительных флуктуаций распределения нейтронов по латаргии при огрубленном описании является универсальной в том смысле, что определяется заданием единственного действительного параметра, зависящего от химического состава среды и начальной энергии нейтронов. При этом имеет место экспоненциальное подавление относительных флуктуаций распределения нейтронов по латаргии в затухающем пучке, определяемое величиной этого же параметра.

Заклучение

В данной работе установлена связь, обладающая определенной степенью универсальности, между флуктуациями в неравновесном пучке нейтронов и мерой информации, необходимой для задания его состояния при огрубленном описании. Для этого, в частности, посредством использования программного пакета Geant4 и программы

MULASSIS построена компьютерная модель распространения первоначально моноэнергетического пучка нейтронов в полубесконечной среде со сложным химическим составом. Численно получены зависимости информационной энтропии широкого нейтронного пучка и информационной энтропии, отнесенной к флюенсу нейтронов, от глубины проникновения нейтронов в различные среды при огрубленном способе описания.

Установлена универсальность пространственных зависимостей информационной энтропии нейтронного пучка, а также среднего квадрата относительных флуктуаций распределения нейтронов по летаргии, которая выражается в необходимости задания единственного числового параметра, учитывающего как химический состав среды, так и начальную энергию нейтронного пучка, одинакового в обоих случаях. Функциональные формы зависимостей остаются при этом неизменными и, в частности, имеет место экспоненциальное подавление относительных флуктуаций распределения нейтронов по летаргии, определяемое величиной этого же параметра. Наряду с этим выявлена линейная связь между квадратом относительных флуктуаций распределения нейтронов по летаргии и информационной энтропией при огрубленном описании неравновесного нейтронного пучка, а также универсальность функциональной формы зависимости информационной энтропии, отнесенной к флюенсу нейтронов в пучке, от глубины проникновения нейтронов в бетон.

В дальнейшем необходимо проверить, сохраняется ли универсальность полученных зависимостей при изменении ширины интервалов по летаргии, установить, как связана скорость возрастания информационной энтропии с характерной длиной свободного пробега нейтронов в среде.

Полученные результаты помогут лучше понять связь между флуктуациями и мерой информации при огрубленном описании в неравновесных диссипативных системах с большим переменным числом степеней свободы. Наряду с этим они могут применяться при расчете защит от проникающих ионизирующих излучений, в частности, в целях предотвращения прострела нейтронов через защитные экраны, детектировании и спектроскопии нейтронов, оценке их воздействия на материалы, приборы и биологические ткани.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кайзер, Дж.* Статистическая термодинамика неравновесных процессов / Дж. Кейзер. – М.: Мир, 1990. – 607 с.
2. Geant4 - A simulation toolkit / S. Agostinelli [et al.] // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A – 2003. – Vol. 506. – № 3. – P. 250-303. Официальная web-страница пакета Geant4: <http://geant4.web.cern.ch/geant4/>; программы MULASSIS: <http://reat.space.qinetiq.com/mulassis/>
3. *Кувшинов, В.И.* Калибровочные поля и теория детерминированного хаоса / В.И. Кувшинов, А.В. Кузьмин. – Мн.: Белорусская наука, 2006. – 267 с.

4. **Бекурц, К.** Нейтронная фізіка / К. Бекурц, К. Виртц. – М.: Атомиздат, 1968. – 456 с.
5. **Volkman, D.** Concrete for Radiation Shielding / Significance of Tests and Properties of Concrete and Concrete-Making Materials, eds. Klieger P. and Lamond J.F. // Astm Intl., STP169C. – 1994. – 630 p.
6. **Кузьмин, А.В.** Оценка дозовых нагрузок на человека при использовании колеманит-баритовых защитных экранов // Вестник МДУ імя А.А. Куляшова. – 2008. – № 2-3(30) – С. 157-162.
7. **Hungerford, H.E.** Reactor Handbook, Vol. I, Materials / C.R. Tipton, Jr. (Ed.), // Interscience Publishers, New York, 1960. – 1086 p; Williams III, R.G. Compendium of Material Composition Data for Radiation Transport Modeling // Pacific Northwest National Laboratory, Report PNNL-15870. – 115 p.
8. **Смелов, В.В.** Лекции по теории переноса нейтронов / В.В. Смелов. – М.: Атомиздат, 1978. – 216 с.

Поступила в редакцию 07.07.2009 г.

УДК 595.752.2

Н.В. ВОРОНОВА, С.В. БУГА

МОРФОЛОГИЧЕСКАЯ И ЭКОЛОГИЧЕСКАЯ ГЕТЕРОГЕННОСТЬ В КОМПЛЕКСЕ *MACROSIPHUM GEI* KOCH, 1855 (Rhynchota: Homoptera: Aphididae)*

При изучении вида *Macrosiphum gei* установлено, что гравилатовая тля (*M. gei*), обитающая в Беларуси, представляет собой гетерогенную группу, различающуюся как по морфологическим признакам, так и по растениям-хозяевам. Тли, питающиеся на разных растениях из числа заселяемых тлей этого вида, имеют выраженные различия в значениях морфометрических индексов и распадаются на группы, вне которых не способны к перекрестным переходам с одного растения-хозяина на другое. Указанные факты позволяют поставить вопрос о разделении вида *M. gei* минимум на два самостоятельных вида или подвида.

Введение

Критерии видовой принадлежности у представителей ряда таксонов хоботных насекомых (Rhynchota), в частности настоящих тлей (Aphidoidea), до сих пор остаются размытыми [1]. Высокая межклональная изменчивость, партеногенез и широкий спектр эндосимбиотических организмов обеспечивают этим насекомым высокий уровень физиологической и биохимической адаптивности, который, в свою очередь, делает процесс формо- и видообразования в этой группе животных нетипично быстрым для эукариот [2]. Тем не менее, для большинства видов тлей, все из которых относятся к группе фитофагов-вредителей, способных к всплшкам массового размножения и несущих от-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта БРФФИ Б09МС-036.

ветственность за вирусное засорение агрокультур, спектр растений-хозяев жестко детерминирован сформировавшимися в процессе эволюции морфологическими и биохимическими адаптациями. В связи с этим их способность питаться на том или ином растении-хозяине является основным фактором, определяющим уровень вредоносности вида. Эта особенность, а именно чрезвычайная эволюционная пластичность тлей, которая в то же время строго детерминирована условиями, предоставляемыми растением-хозяином, делает эту группу насекомых интересным объектом для изучения процессов видообразования, в первую очередь с точки зрения трансформации их трофической ниши.

Macrosiphum gei Koch, 1855 широко распространена в Европе (включая Британские острова) и Западной Сибири и занесена в Северную Америку [3; 4]. Голоциклический, однодомный вид. Для Беларуси отмечен на гравилате городском (*Geum urbanum* L.), сныти обыкновенной (*Aegopodium podagraria* L.) и купыре лесном (*Anthriscus sylvestris* L.) [5], где эти энтомофаги образуют неплотные агрегации (до десятка особей) преимущественно на цветоносах, реже – на нижней стороне листовых пластинок. Ежегодно максимум популяционной плотности наблюдается в первой половине лета, когда агрегации *M. gei* отмечаются на гравилатах (*Geum* spp.) и зонтичных (*Apiaceae*). После окончания цветения растений-хозяев она снижается до уровня, когда единичные экземпляры выявляются тщательным осмотром и кошением.

Несмотря на то что в литературе [4] *M. gei* традиционно относят к числу специализированных форм, это противоречит фактам регистрации на широком спектре растений, который включает представителей розоцветных (*Rosaceae*, включая древесные (*Rosa* spp.)), бурачниковых (*Boraginaceae*), норичниковых (*Scrophulariaceae*) и других семейств [6]. Это оставляет неясным, действительно ли мы имеем дело с формами одного вида или видами-двойниками, специализирующихся на разных кормовых растениях. Целью работы было оценить морфологическую и экологическую идентичность тлей, развивающихся на разных растениях-хозяевах для последующего уточнения таксономического статуса исследуемых форм.

Материалы и методы

Сборы *M. gei* были сделаны в 2008 – 2009 гг. со сныти обыкновенной (*A. podagraria*), купыря лесного (*A. sylvestris*), бутеня ароматного (*Ch. aromaticum* L.), гравилатов городского (*G. urbanum*) и алеппского (*Geum aleppicum* Jacq.) (табл. 1), естественно произрастающих в условиях открытого грунта на территории ландшафтного парка Центрального ботанического сада НАН Беларуси (г. Минск) и памятника природы “Дубрава” (Минский р-н), что позволило нивелировать влияние на развитие насекомых факторов среды (климатических и др.). Все перечисленные растения-хозяева на обоих стационарах были физически доступны для перекрестного заселения.

Таблица 1

**Афидологический материал,
использованный в настоящем исследовании**

Растение-хозяин	Место сбора	Номер сбора	Объем сбора, экз.
<i>Geum urbanum</i> L.	Беларусь, Минский р-н, "Дубрава", 2008	12-01-08	6
		12-04-08	2
		12-12-08	7
	г. Минск, Центральный ботанический сад НАНБ, 2008 – 2009	12-14-08	5
		12-01-09	4
<i>Aegopodium podagraria</i> L.	Беларусь, Минский р-н, "Дубрава", 2008	12-05-08	2
		12-06-08	6
		12-15-08	5
	г. Минск, Центральный ботанический сад НАНБ, 2008 – 2009	12-17-08	3
		12-02-09	5
<i>Anthriscus sylvestris</i> L.	Беларусь, Минский р-н, "Дубрава", 2008	12-03-08	3
		12-07-08	4
		12-08-08	6
	г. Минск, Центральный ботанический сад НАНБ, 2008 – 2009	12-09-08	4
		12-16-08	1
		12-04-09	2
<i>Chaerophyllum aromaticum</i> L.	Беларусь, Минский р-н, "Дубрава", 2008	12-10-08	4
		12-11-08	2
		12-13-08	1

Тотальные препараты для микроскопии были изготовлены в заключающей среде Фора-Берлезе. Морфологическое определение проводилось по ключам [3; 4].

Снятие морфометрических данных, список которых приведен в таблице 2, осуществляли по стандартной схеме [7] с использованием интерактивной системы MicroImage (Olympus Optical Co. GmbH).

Статистическая обработка результатов выполнена методами непараметрической статистики и многомерного анализа данных (STATISTICA 6.0).

Биотестирование осуществлялось методом параллельных и перекрестных пересадок. Растения для тестов были отобраны в природе и, после уточнения определения [8], посажены в емкости с почвой. Для предотвращения перекрестного перехода насекомых с растения на растение они были изолированы ламповыми стеклами с сохранением нормальной вентиляции. Для тестирования отбирались крылатые партеногенетические самки, представляющие собой потомство бескрылых партеногенетических самок, культивируемых на исходных кормовых растениях, поскольку было сочтено, что пересадка именно крылатых особей будет более оправдана с точки зрения эколого-физиологического подхода. Для повышения достовер-

ности получаемого результата все пересадки (параллельные и перекрестные) проводились в четырехкратной повторности.

Таблица 2

**Морфометрические параметры,
используемые в настоящем исследовании**

Морфологические характеристики	Используемые обозначения
Размерные	
Длина тела (включая хвостик)	body
Длина антенны	ant
Длина III-го сегмента антенны	antIII
Длина IV-го сегмента антенны	antIV
Длина V-го сегмента антенны	antV
Длина основания VI-го сегмента антенны	blantVI
Длина спица	prt
Длина трубочки	siph
Длина апикального сегмента роstrума	urs
Длина II-го членика задней лапки	tarsII
Длина хвостика	cauda
Длина участка III-го сегмента антенны, несущего ринарий	rhlantIII
Количественные	
Количество ринариев на III-м сегменте антенны	rhantIII

Для биологического тестирования было выбрано 12 видов растений, широко распространенных на территории Беларуси. Из них 8 ранее указывались другими исследователями как кормовые для *M. gei*: купырь лесной [9], сныть обыкновенная [6], гравилат городской [10], льнянка обыкновенная (*Linaria vulgaris* Mill.) [11], медуница лекарственная (*Pulmonaria officinalis* L.) [12], торилис японский (*Torilis japonica* Houtt.) [13], валериана лекарственная (*Valeriana officinalis* L.) [14], клевер луговой (*Trifolium pratense* L.) [11]. Еще 4 вида растений не входят в число используемых *M. gei*, однако известны как растения-хозяева для близкого и морфологически трудно дифференцируемого вида тлей – *Macrosiphum stellariae* (Theobald, 1913) [4]. В частности, это пастушья сумка (*Capsella bursa-pastoris* L.) [15], гвоздика-травянка (*Dianthus deltoides* L.) [15], звездчатка дубравная (*Stellaria holostea* L.) [16] и крестовник липкий (*Senecio viscosus* L.) [17]. *M. stellariae* ранее не регистрировался на территории Беларуси. Однако, учитывая, что два этих вида тлей не только являются морфологически трудно различимыми, но имеют перекрывающийся ареал, а также ряд общих кормовых растений (в частности, купырь лесной и сныть обыкновенная известны как растения-хозяева для обоих видов [6]), в группу растений, отобранных для биологического тестирования, были включены вышеупомянутые 4 вида растений из перечня заселяемых *M. stellariae*, но не *M. gei*.

Результаты и обсуждение

Морфология

По используемым ключам [3; 4] все исследуемые экземпляры уверенно идентифицировались как *M. gei*. Морфометрические данные, полученные для бескрылых и крылатых партеногенетических самок без учета растения, на котором насекомые развивались, представлены в таблице 3. Для сравнения использованы соответствующие данные для *M. gei* из монографии О.Е. Нейе [4].

Таблица 3

Морфометрические данные *Macrosiphum gei*.
Минимум-максимум (среднее). Используемые обозначения – табл. 2

Морфологические характеристики	Бескрылые партеногенетические самки (n=9)		Крылатые партеногенетические самки (n=63)	
	Данные настоящего исследования	Данные других исследователей (О. Нейе, 1992)	Данные настоящего исследования	Данные других исследователей (О. Нейе, 1992)
body, μm	3143–3611 (3522)	2500–5400	2700–4250 (3529)	–
ant, μm	3002–4976 (4246)	–	4560–6620 (5904)	–
ant / body	1,205–1,448 (1,338)	1,1–1,5	1,201–2,454 (1,721)	1,3
antIII, μm	781–1204 (1054)	–	1009–1352 (1178)	–
antIV, μm	641–1066 (888)	–	862–1166 (1015)	–
antV, μm	684–977 (830)	–	843–1107 (966)	–
blantVI, μm	208–279 (249)	–	235–362 (280)	–
prt, μm	1239–1490 (1407)	–	1275–1863 (1625)	–
prt / blantVI	5,309–5,943 (5,584)	4,5–6,0	5,067–6,880 (5,995)	–
prt / antIII	1,208–1,586 (1,352)	1,0–1,3	1,140–1,666 (1,354)	–
blantVI / antIII	0,209–0,267 (0,239)	0,20–0,28	0,745–1,097 (0,821)	–
siph, μm	739–1117 (969)	–	901–1264 (1120)	–
siph / body	0,235–0,318 (0,280)	0,25–0,36	0,284–0,395 (0,327)	–
urs, μm	148–172 (159)	–	147–186 (164)	–
urs / blantVI	0,582–0,727 (0,641)	0,6–0,9	0,454–0,692 (0,595)	–
tarsII, μm	105–160 (137)	–	117–186 (149)	–
urs / tarsII	1,032–1,435 (1,175)	1,0–1,1	0,882–1,385 (1,103)	–
cauda, μm	285–628 (470)	–	392–637 (538)	–
siph / cauda	1,778–2,590 (2,114)	1,7–2,1	1,846–2,650 (2,136)	–
rhantIII, μm	234–365 (305)	–	441–735 (585)	–
rhantIII / antIII	0,268–0,309 (0,294)	–	0,402–0,603 (0,492)	–
rhantIII (n)	3–10 (5)	1–10	11–20 (16)	8–26
rhantIII / antIII	0,003–0,008 (0,005)	–	0,008–0,017 (0,013)	–

При группировке данных в соответствии с растением-хозяином было обнаружено, что по ряду морфометрических параметров между насекомыми, коллектированными с разных хозяев, выявляются статистически достоверные различия. В частности, при анализе морфометрических индексов для крылатых партеногенетических самок всех четырех выборок (с *G. urbanum*, с *A. podagraria*, с *A. sylvestris* и с *Ch. aromaticum*) с использованием теста Краскела-Уоллиса и медианного теста было показано, что по соотношению длины антенн к длине тела (ant / body) насекомые с *A. podagraria* существенно превосходят всех остальных. Наиболее значительным является различие по этому показателю с насекомыми, коллектированными с *A. sylvestris* (рис. 1).

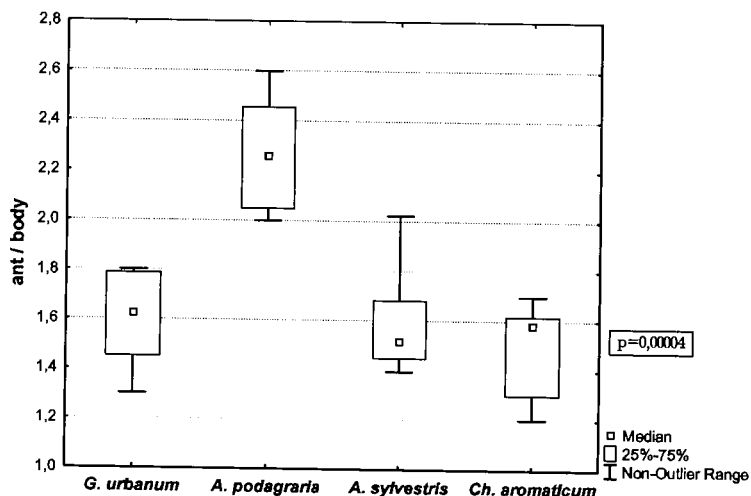


Рис. 1. Соотношение длины антенн к длине тела (ant / body) для крылатых партеногенетических самок *Macrosiphum gei* с разных растений-хозяев

Также статистически значимыми (рис. 2) являются различия по соотношению длины несущего ринарии проксимального участка третьего сегмента антенн к его общей длине ($\text{rhlantIII} / \text{antIII}$). А именно, было показано, что у насекомых с *Ch. aromaticum* оно значимо больше, чем у коллектированных с других кормовых растений.

Критерий Краскела-Уоллиса позволяет выявить различия в значениях медиан всех четырех анализируемых выборок. Но, поскольку существовала вероятность, что не все группы тлей окажутся морфологически обособленными в степени, достаточной для выявления морфометрических различий, был проведен ряд попарных сравнений морфометрических характеристик крылатых самок *M. gei* с использованием U теста Манна-Уитни. Так, по длине хвостика насекомые статистически значимо ($p < 0,001$) различались только в выборках с *G. urbanum* и *A. sylvestris*, *G. urbanum* и *Ch. aromaticum*, в то

время как по общей длине тела самые значительные различия наблюдались между группами с *A. podagraria* и *G. urbanum*, которые не показали существенных различий по предыдущему параметру.

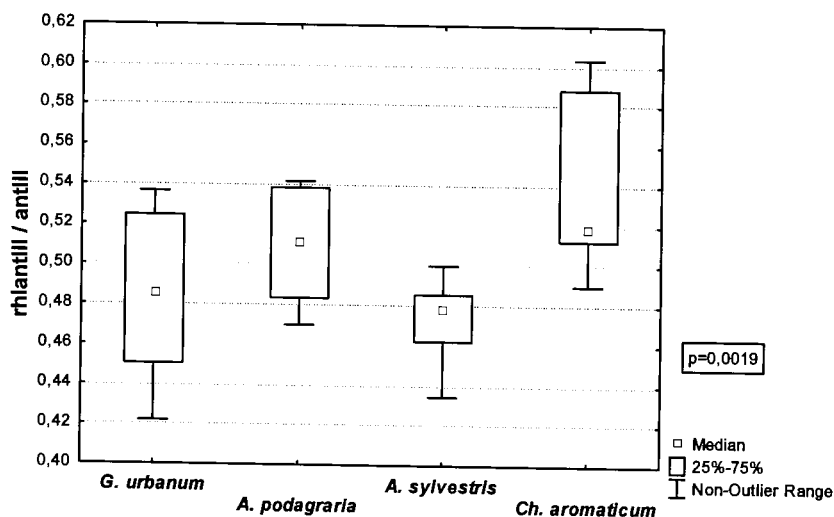


Рис. 2. Соотношение длины несущего ринарии проксимального участка III сегмента антенны к общей длине III сегмента антенн ($rhantIII / antIII$) для крылатых партеногенетических самок *Macrosiphum gei* с разных растений-хозяев

По длине трубочек тли статистически значимо ($p < 0,0001$, U тест Манна-Уитни) различались в выборках с *A. podagraria* и *G. urbanum*, *G. urbanum* и *Ch. aromaticum*, *A. podagraria* и *Ch. aromaticum*, причем наиболее длинными трубочками обладали экземпляры, коллектированные с *G. urbanum* (1185 ± 37 мкм), а наиболее короткими — с *Ch. aromaticum* (1040 ± 86 мкм).

При изучении морфологии антенн крылатых партеногенетических самок из разных выборок было обнаружено, что наибольшая длина антенн у насекомых, коллектированных с *A. podagraria* (5070 ± 130), обеспечивается преимущественно за счет большей длины их V-го и основания VI-го сегментов. Аналогично тому, как обуславливается меньшая длина антенн у насекомых с *A. sylvestris* (4641 ± 159). Однако у насекомых с *Ch. aromaticum*, обладающих наименьшей длиной антенны среди изученных выборок (4250 ± 184), изменение ее длины обеспечивается иначе — за счет более коротких III-го и шпика VI-го сегментов.

Антенны тлей, развивающихся на бутене ароматном, обнаруживают и другую особенность. А именно, количество ринарий на III-м сегменте у экземпляров с *Ch. aromaticum* значимо выше, чем у всех остальных ($17,125 \pm 1,8$), причем наиболее существенна эта разница с особями, коллектированными с *A. sylvestris* ($14,364 \pm 2,1$).

Для оценки общего морфологического сходства между насекомыми, коллектированными с разных растений-хозяев, был проведен кластерный анализ всего массива морфометрических данных (исключая относительные показатели). В качестве внешней группы был принят не близкородственный вид тлей *Brachycaudus divaricatae* Shaposhnikov, 1956, с использованием морфометрических характеристик крылатых партеногенетических самок, приведенных Р.П. Ракаускасом [7].

Результаты кластерного анализа позволяют заключить, что насекомые, коллектированные с *A. podagraria*, наиболее значительно отличаются по морфометрическим показателям от насекомых всех других выборок.

Экология

По результатам проведенных параллельных пересадок мы обнаружили, что *M. gei*, развивающиеся на любом из трех растений (табл. 4), не способны питаться на большинстве растений, которые в литературе указывались как растения-хозяева. Успешная репродукция наблюдалась еще реже.

Таблица 4

Результаты параллельных пересадок
крылатых партеногенетических самок *Macrosiphum gei*
с разных растений-хозяев

Исходное растение-хозяин	Тестовое растение											
	<i>A. sylvestris</i>	<i>T. pretense</i>	<i>A. podagraria</i>	<i>G. urbanum</i>	<i>L. vulgaris</i>	<i>P. officinalis</i>	<i>T. japonica</i>	<i>V. officinalis</i>	<i>C. bursa-pastoris</i>	<i>D. deltooides</i>	<i>S. holostea</i>	<i>S. viscosus</i>
<i>G. urbanum</i>	+	~	~	+	~	÷	~	÷	~	÷	÷	~
<i>A. podagraria</i>	x	~	+	~	~	x	+	x	~	x	+	~
<i>A. sylvestris</i>	+	~	~	+	~	÷	~	~	~	~	x	~

+ – зафиксировано питание и размножение насекомых; ÷ – зафиксировано питание, но не размножение; ~ – не зафиксировано ни питания, ни размножения насекомых; x – пересаживание не производилось

Перекрестные пересадки производились по схемам:

Geum urbanum ↔ *Anthriscus sylvestris*,

Geum urbanum ↔ *Aegopodium podagraria*.

В первом случае все единичные пересадки имели результатом формирование устойчивых агрегаций активно питающихся и размножающихся тлей. Во втором ни в одной из повторностей не было зафиксировано размножение пересаженных особей. То есть тли с *G. urbanum* и *A. sylvestris* обнаруживают почти полностью совпадаю-

щій спектр приемлемых кормовых растений из числа отобранных для биологического тестирования (исключая возможность питаться на *P. officinalis* и *D. deltoides*). В то же время тли с *A. podagraria* не только не способны питаться на *G. urbanum*, но и обнаруживают другую особенность – способность размножаться и формировать агрегации на *T. japonica*, что не демонстрировали ни тли с *G. urbanum*, ни с *A. sylvestris*. Все это хорошо коррелируется с данными, полученными при анализе морфометрических параметров. А именно, с данными о том, что среди тлей, коллектированных нами с двух пробных площадок и идентифицируемых по ключам как *M. gei*, особи, развивающиеся на *A. podagraria*, по ряду морфологических параметров представляют собой обособленную группу. По данным морфометрии, можно заключить, что тли с *Ch. aromaticum* также имеют ряд выраженных отличий, однако по причине затруднений с культивированием исходного растения в лабораторных условиях эти данные не были подтверждены тестированием.

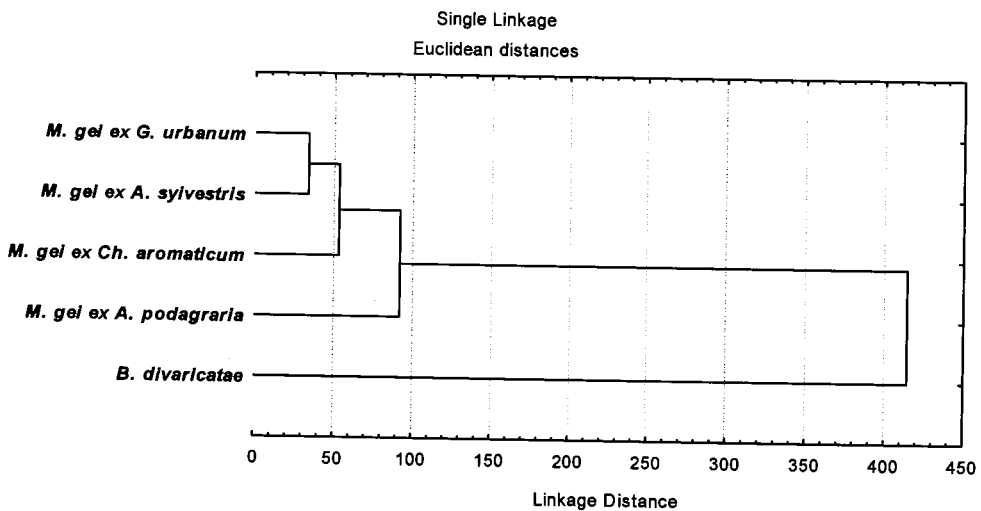


Рис. 3. Дендрограмма морфологического сходства между крылатыми партеногенетическими самками *Macrosiphum gei* с разных растений-хозяев

Также результаты биотестирования не выявили случаев успешной пересадки тлей на растения, характерные для *M. stellariae*, что дает нам уверенность, что особи указанного вида не были ошибочно вовлечены в данные исследования.

Описанные различия в морфологии и экологии изучаемых форм тлей могут иметь два возможных варианта объяснения: 1) мы имеем дело минимум с двумя разными видами (подвидами) тлей, размножающимися на *G. urbanum* + *A. sylvestris* и *A. podagraria* соответственно; 2) внутривидовая дифференциация *M. gei* по кормовым растениям достигла уровня экологических рас, когда взаимные пере-

ходы с одного кормового растения на другое невозможны или затруднены.

Заключение

Суммируя результаты анализа морфометрических данных и биотестирования, можно заключить, что *M. gei* в условиях Беларуси представляет собой не гомогенный монотипический вид, а морфологически и экологически гетерогенное образование, различия между группировками внутри которого достигли уровня, позволяющего поставить вопрос о его разделении минимум на два вида или подвида, для одного из которых характерно развитие на гравилате городском и купюре лесном, для другого – на сныти обыкновенной и торилисе японском. Дифференциация этих насекомых как таксономических единиц возможна по способности питаться на *T. japonica*, который, в данном случае, мог бы служить тестовым растением, а также по морфометрическому индексу – соотношению длины тела к длине антенны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rakauskas, R.** What is the (aphid) species? / R. Rakauskas // Aphids in natural and managed ecosystems. Leon (Spain), Universidad de Leon. – 1998. – P. 451-455.
2. **Стекольщикова, А.В.** Комплекс тлей, близких к *Dysaphis daevecta* (Walker) (Homoptera, Aphididae). III. Возможные пути формирования комплекса / А.В. Стекольщикова, А.Л. Лобанов // Энтомологическое обозрение. – 2004. – Т. LXXXIII, – Вып. 4. – С. 850-866.
3. **Blakman, R.L.** Aphids of the world trees. An identification and information guide / R.L. Blakman, V.F. Eastop // London: CAB International, 1994. – 1024 pp.
4. **Heie, O.E.** The Aphidoidea (Hemiptera) of Fennoscandia and Denmark. IV / O.E. Heie // Fauna Entomologica Scandinavica. – 1992. – Vol. 25. – 188 pp.
5. **Лещинская, Н.В.** Гербофильные тли – вредители лекарственных растений в условиях Беларуси / Н.В. Лещинская // Защита растений. Сборник научных трудов. – 2008. – Вып. 32. – С. 293-304.
6. **Holman, J.** Host plant catalog of Aphids. Palaearctic Region / J. Holman // Berlin e.a.: Springer Science, 2009. – 1216 pp.
7. **Rakauskas, R.** *Brachycaudus divaricatae* Shaposhnikov, 1956 in Europe: biology, morphology and distribution, with comments on its taxonomic position (Hemiptera, Sternorrhyncha: Aphididae) / R. Rakauskas, J. Turcinaviciene // Mitt. Mus. Nat. kd. Berl., Zool. Reihe. – 2006. – Vol. 82. – P. 248-260.
8. **Определитель высших растений Беларуси** / под ред. В.И. Парфенова. – Минск: Дизайн ПРО, 1999. – 472 с.
9. **Börner, C.** Die Blattläuse des Nordostalpengebietes und seines Vorlandes / C. Börner, H. Franz // Österr. Zool. Z. (Wien). – 1956. – Bd. 6. – S. 297-411.
10. **Nieto, N.J.M.** Les pucerons de Belgique (Hemiptera: Aphididae) / N.J.M. Nieto, G. Latteur, D.M.P. Mier, J. Tahon, N.D. Perez, J. Nicolas // Parasitica. – 1999. – Vol. 55. – P. 5-38.

11. **Wood-Baker, C.S.** Aphids of Kent / C.S. Wood-Baker // Trans. Kent Field Club. – 1980. – Vol. 8. – P. 1-88.
12. **Holman, J.** Aphids (Homoptera, Aphidoidea) and their host-plants in the botanical garden of Charles University in Prague / J. Holman // Acta Univ. Carol. Biol. – 1991. – Vol. 35. – P. 19-55.
13. **Heie, O.E.** A list of Danish aphids. 2 / O.E. Heie // Entomol. Medd. – 1961. – Vol. 31. – P. 77-96.
14. **Holman, J.** Übersicht der Blattläuse (Homoptera, Aphidoidea) der Rumänischen Sozialistischen Republik / J. Holman, A. Pintera // Studie ČSAV (Prague). – 1981. – Bd. 15. – S. 1-125.
15. **Möller, F.W.** *Macrosiphum stellariae* (Theobald) – eine bisher nicht von der Grünstreifigen Kartoffelblattlaus *Macrosiphum euphorbiae* (Thomas) abgegrenzte Art (Hom., Aphididae) / F.W. Möller // Dtsch. Entomol. Z. – 1971. – Bd. 18. – S. 207-215.
16. **Holman, J.** Some unrecorded middle European aphids / J. Holman. // Acta Faun. Ent. Mus. Nat. Prague. – 1965. – Vol. 11. – P. 277-284.
17. **Рупайс, А.А.** Тли Латвии / А.А. Рупайс // Рига: Зинатне, 1989. – 331 с.

Поступила в редакцию 04.01.2010 г.

SUMMARIES

Bondarev A.N., Laptinskiy V.N. ANALYSIS OF THE MULTIPOINT BOUNDARY VALUE FOR LYAPUNOV MATRIX DIFFERENTIAL EQUATION.

Constructive sufficient conditions of an univalent resolvability of the multipoint boundary value for Lyapunov matrix differential equation are obtained.

Galmak A.M. ON OPERATION []_{l, σ, k}.

The l -ary operations of the form []_{l, σ, k} are defined and studied in this paper.

Komornikov S.F., Vorobey L.A., Kuzmenkova I.A. ON THE LATTICE OF REGULAR TRANSITIVE SUBGROUP FUNCTORS.

Regular transitive subgroup functors are studied in the paper. It is proved that the lattice of all soluble regular transitive subgroup functors is a lattice with complement.

Kukso O.S., Sakovich N.V., Shamukova N.V. ON POLYNOMIAL OF SET DISCRIMINANT OF HIGH LEVEL AND WITH ROOTS CONSTRAINED IN ALL METRICS.

The paper deals with the study of the influence of shift conversions and inversion on the reciprocal arrangement of integer polynomial roots.

Kuzmin A.V. INFORMATION ENTROPY AND UNIVERSALITY OF THE NEUTRON LETHARGY DISTRIBUTION OF FLUCTUATIONS IN THE COARSE-GRAINED WAY.

Non-equilibrium dissipative processes of externally sustained neutron beam propagation in homogeneous semi-infinite media having complex chemical compositions are studied in this paper. By means of the developed Geant4 computer model the connection between the damped neutron beam lethargy distribution fluctuations and the measure of information about its coarse-grained state is studied. The universalities of the space dependences of the neutron beam information entropy and averaged square of the neutron lethargy distribution of relative fluctuations are established basing on the results of numerical simulations.

Laptinskiy V.N., Rogolev D.V. ON RESOLVABILITY OF THE PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF THE RICCATI MATRIX DIFFERENTIAL EQUATIONS.

Constructive sufficient conditions of an univalent resolvability of the periodic boundary value problem for a system of the Riccati matrix differential equations are obtained.

Mikhailova N.V. THEORETICAL REFLEXION OF MATHEMATICS UNDER CONDITIONS OF INCREASING COMPLEXITY OF SCIENCE

Mathematics of the XX century achieves such a standard that it becomes possible to apply its methodology to the analysis of the problems of the grounds of itself. The work deals with the analysis of the connection between the increasing complexity of the mathematical knowledge and theoretical reflexion of contemporary mathematics and deductive nature of the mathematical reasoning.

Schuchkin N.A. THE SET OF GENERATORS FOR SUBALGEBRAS OF n -ARY GROUPS.

The set of generators for n -ary subgroup H of n -ary group G generated by set X are studied in this paper.

Sotskiy A.B., Chudakovskiy P.Y., Primak I.U. DIFFRACTION OF LIGHT IN PLANAR STRUCTURES WITH PERFECTLY MATCHED LAYERS.

A method for calculation of the diffracted fields in planar structures containing the perfectly matched layers is proposed. The approach is illustrated by investigations of reflected light beam parameters at the prism excitation of a TE-mode of a planar optical waveguide with a rough surface. The influence of the surface light scattering on the waveguide spectroscopy inverse problem solution is estimated.

Voronova N.V., Buga S.V. THE MORPHOLOGICAL AND ECOLOGICAL DIFFERENCE IN *MACROSIPHUM GEI* KOCH, 1855 SPECIES COMPLEX (Rhynchota: Homoptera: Aphididae)

Studying species *Macrosiphum gei* we found out that the leum aphid (*M. gei*), which live in Belarus, represent the heterogeneous group and they vary both in morphological characteristic

and in their host-plants. Aphids which were determined by keys as *M. gei*, but used various host-plants, had significant differences of morphometrical index values. They disintegrated into groups which could not cross from their host-plants to the host-plants of other groups. These facts allow us to bring up a question about division of species *M. gei* into two double species at the minimum.

Zhestkov S.V., Novashinskaya V.S. ON ANALYTICAL MODELING OF WAVE AND SOLITON SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS RELATED WITH CLASSIC EQUATION OF KORTEVEG-DE VRIES.

The method of analytical modeling of wave and soliton solutions of nonlinear equations is developed. The necessary and sufficient conditions of the existence of wave and soliton solutions are obtained.

ЗВЕСТКІ ПРА АЎТАРАЎ

- ЖАСТКОЎ**
Сяргей Васільевіч – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры МАІВТ МДУ імя А.А. Куляшова
- НАВАШЫНСКАЯ**
Вікторыя Сяргееўна – асістэнт кафедры МАІВТ МДУ імя А.А. Куляшова
- ЛАПЦІНСКІ**
Валерыў Мікалаевіч – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, галоўны навуковы супрацоўнік Інстытута тэхналогіі металаў НАНБ
- РОГАЛЕЎ**
Дзмітрый Уладзіміравіч – аспірант Інстытута тэхналогіі металаў НАНБ
- БОНДАРАЎ**
Аляксандр Мікалаевіч – аспірант Інстытута тэхналогіі металаў НАНБ
- ГАЛЬМАК**
Аляксандр Міхайлавіч – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта харчавання
- КАМОРНІКАЎ**
Сяргей Фёдаравіч – доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар кафедры матэматыкі і інфармацыйных тэхналогій Міжнароднага інстытута працоўных і сацыяльных адносін (Гомельскі філіял)
- ВАРАБЕЙ**
Людміла Аляксандраўна – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык кафедры вышэйшай матэматыкі Беларускага гандлёва-эканамічнага ўніверсітэта спажывецкай кааперацыі
- КУЗЬМЯНКОВА**
Іна Анатолеўна – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык кафедры вышэйшай матэматыкі Беларускага гандлёва-эканамічнага ўніверсітэта спажывецкай кааперацыі
- ШЧУЧКІН**
Мікалай Аляксеевіч – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры, геаметрыі і інфарматыкі Валгаградскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта
- КУКСО**
Вольга Сяргееўна – кандыдат фізіка-матэматычных навук, навуковы супрацоўнік Інстытута матэматыкі НАНБ
- САКОВІЧ**
Наталля Уладзіміраўна – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры алгебры і геаметрыі МДУ імя А.А. Куляшова
- ШАМУКОВА**
Наталля Валянцінаўна – кандыдат фізіка-матэматычных навук, старшы выкладчык кафедры вышэйшай матэматыкі і статыстыкі прыватнага інстытута кіравання і прадпрымальніцтва (Бабруйскі філіял)

-
- МІХАЙЛАВА**
Наталія Віктараўна – кандыдат філасофскіх навук, дацэнт кафедры матэматыкі Мінскага вышэйшага радыётэхнічнага каледжа
- СОЦКІ**
Аляксандр Барысавіч – доктар фізіка-матэматычных навук, дацэнт, прафесар кафедры эксперыментальнай і тэарэтычнай фізікі МДУ імя А.А. Куляшова
- ЧУДАКОЎСКІ**
Павел Якаўлевіч – аспірант кафедры эксперыментальнай і тэарэтычнай фізікі МДУ імя А.А. Куляшова
- ПРЫМАК**
Ігар Ульянавіч – кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт кафедры вышэйшай матэматыкі Беларуска-Расійскага ўніверсітэта (Магілёў)
- КУЗЬМІН**
Андрэй Уладзіміравіч – кандыдат фізіка-матэматычных навук, вучоны сакратар ДНУ "Аб'яднаны інстытут энергетычных і ядзерных даследаванняў – Сосны" НАНБ
- ВОРАНАВА**
Ніна Уладзіміраўна – аспірант кафедры заалогіі БДУ
- БУГА**
Сяргей Уладзіміравіч – доктар біялагічных навук, прафесар, загадчык кафедры заалогіі БДУ

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў
на англійскую мову
С.П. Зубрыў

Тэхнічны рэдактар *Г.М. Гладун*
Камп'ютэрны набор і вёрстка *А.Л. Пазнякоў*
Карэктар *Г.В. Цецерукова*

Падпісана да друку 9.03.2010 г.
Фармат 70x108¹/₁₆. Папера афсетная. Гарнітура Journal.
Ум.-друк. арк. 9,0. Ул.-выд. арк. 6,7. Тыраж 100 экз. Заказ 100.

Установа адукацыі "Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А.А. Куляшова", 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.
ЛІ № 02330/278 ад 30.04.2004 г.

Надрукавана ў аддзеле аператыўнай паліграфіі
УА "МДУ імя А.А. Куляшова". 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.