

ISSN 2409-3777



ВЕСНІК

Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта
імя А. А. Куляшова

НАВУКОВА-МЕТАДЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выдаецца са снежня 1998 года

Серыя В. ПРЫРОДАЗНАЎЧЫЯ НАВУКІ
(матэматыка, фізіка, біялогія)

Выходзіць два разы ў год

1 (63)
2024

Галоўная рэдакцыйная калегія:

д-р гіст. навук прафесар Д. С. Лаўрыновіч (галоўны рэдактар)
д-р экан. навук прафесар Н. У. Макоўская (нам. галоўнага рэдактара)
д-р гіст. навук прафесар Я. Р. Рыер (нам. галоўнага рэдактара)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. В. Марчанка (старшыня рэдакцыйнага савета серыі В)
канд. гіст. навук А. І. Галавач (адказны сакратар)

Матэматыка, фізіка:

д-р фіз.-мат. навук прафесар В. А. Еравенка (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар В. І. Бернік (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук, галоўны навук. супрац. ІТМ НАНБ В. М. Лапцінскі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар М. М. Дабравольскі (Тула)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. Б. Соцкі (Магілёў)
д-р фіз.-мат. навук прафесар А. М. Гальмак (Магілёў)
д-р тэхнічных навук А. С. Турцэвіч (Мінск)
д-р фіз.-мат. навук прафесар У. І. Лебедзеў (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт І. М. Сідарэнка (Магілёў)
канд. фіз.-мат. навук дацэнт А. В. Цімошчанка (Магілёў)

Біялогія:

д-р біял. навук прафесар Н. П. Максімава (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт А. Д. Навумаў (Мінск)
д-р біял. навук дацэнт С. У. Лазарэвіч (Горкі)
канд. біял. навук дацэнт М. В. Акуліч (Магілёў)
канд. біял. навук дацэнт М. М. Дайнэка (Гомель)
канд. біял. навук дацэнт І. А. Жарына (Магілёў)
д-р мед. навук прафесар А. В. Марачкаў (Магілёў)
д-р мед. навук Н. І. Сімчанка (Магілёў)
д-р хім. навук прафесар Г. М. Раганаў (Магілёў)

*Навукова-метадычны часопіс “Веснік Магілёўскага дзяржаўнага
ўніверсітэта імя А. А. Куляшова” ўключаны ў РІНЦ
(Расійскі індэкс навуковага цытавання),
ліцэнзійны дагавор № 811-12/2014*

АДРАС РЭДАКЦЫІ:

212022, Магілёў, вул. Касманаўтаў, 1,
vesnik_mdu@mail.ru

**MOGILEV STATE
A. KULESHOV UNIVERSITY
BULLETIN**

THEORETICAL-SCIENTIFIC JOURNAL

Founded in December 1998

Series B. NATURAL SCIENCES
(Mathematics, Physics, Biology)

Published twice per year

**1 (63)
2024**

Editorial Board:

Lavrinovich D. S., Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor,
Makovskaya N. V., Deputy Chief Editor, Doctor of Economic Sciences, Professor
Riyer Y. G., Deputy Chief Editor, Doctor of Historical Sciences, Professor
Marchenko I. V., Chairman of the Editorial Committee (Series B),
Ph.D., Associate Professor
Golovach E. I., Executive Secretary of the Editorial Board, Ph.D.

Mathematics, Physics:

Yerovenko V. A., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Bernik V. I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Minsk)
Laptinsky V. N., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of
the Institute of Technology of Metals of the National Academy of Sciences of Belarus
(Mogilev)
Dobrovolsky N. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Tula)
Sotsky A. B., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Galmak A. M., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Turtsevich A. S., Doctor of Technical Sciences (Minsk)
Lebedev V. I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Mogilev)
Sidorenko I. N., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Timoschenko E. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)

Biology:

Maksimova N. P., Doctor of Biological Sciences, Professor (Minsk)
Naumov A. D., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Minsk)
Lazarevich S. V., Doctor of Biological Sciences, Associate Professor (Gorky)
Akulich N. V., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Daineko N. M., Ph.D., Associate Professor (Gomel)
Zharina I. A., Ph.D., Associate Professor (Mogilev)
Marochkov A. V., Doctor of Medical Sciences, Professor (Mogilev)
Simchenko N. I., Doctor of Medical Sciences (Mogilev)
Roganov G. N., Doctor of Chemical Sciences, Professor (Mogilev)

Theoretical-scientific journal
“Mogilev State A. Kuleshov University Bulletin”
is included in the bibliographic database
“Russian Science Citation Index”,
License agreement № 811-12/2014

The editorial board address:
212022, Mogilev, Kosmonavtov Str., 1,
vesnik_mdu@mail.ru

З М Е С Т

<i>ГАЛЬМАК А. М.</i> Степени элементов в полиадических полугруппах специального вида	7
<i>САКОВИЧ Н. В., ЗАСИМОВИЧ Е. В., ПАНТЕЛЕЕВА Ж. И.</i> Влияние расстояний между корнями целочисленных полиномов на величины производных в корнях	20
<i>НОСКОВА М. С.</i> Бинарная марковская смесь как модель стохастической среды	28
<i>ДАВЫДОВСКАЯ В. В., НАВНЫКО В. Н., ФЕДОРОВА А. В., БЛОЦКАЯ Д. С.</i> Многосолитонное взаимодействие как основа современных систем оптической обработки данных	37
<i>ГЛУШАКОВА Н. М., СОРОКА А. В., ОСИПУК Е. Д., ЛАВНИКОВИЧ О. Н.</i> Характеристика однолетних растений цветников ботанического сада, при использовании комплексных удобрений	44
<i>ЧЕРНЕЦКАЯ А. Г., СТРИГЕЛЬСКАЯ Н. П.</i> Качественный и палинологический состав белорусского меда	52
<i>ОСИПЕНКО А. Н., ПАБОКО Д. Ю., ПИКАРЕВИЧ А. В., КАЗАНКОВА А. А., ТИМОФЕЮК Е. С.</i> Морфологические изменения эритроцитов при инкубации крови в условиях физиологической и повышенной температуры	65

C O N T E N T S

<i>GALMAK A. M.</i> Skew Elements in l-ary Groups of Special Form.....	7
<i>SAKOVICH N. V., ZASIMOVICH E. V., PANTELEEVA ZH. I.</i> The Influence of Distances Between the Roots of Integer Polynomials on the Values of Derivatives in the Roots.....	20
<i>NOSKOVA M. S.</i> A Binary Markovian Mixture as a Model of Stochastic Media.....	28
<i>DAVYDOVSKAYA V. V., NAUNYKA V. N., FEDOROVA A. V., BLOTSKAYA D. S.</i> Multisoliton Interaction as a Basis for Modern Optical Data Processing Systems.....	37
<i>GLUSHAKOVA N. M., SOROKA A. V., OSIPUK E. D., LAVNIKOVICH O. N.</i> Characteristics of Annual Plants of Flower Beds of a Botanical Garden under the Influence of Complex Fertilizers	44
<i>CHERNETSKAYA A. G., STRIGELSKAYA N. P.</i> Qualitative and Palynological Composition of Belarusian Honey	52
<i>OSIPENKO A. N., PABOKO D. YU., PIKAREVICH A. V., KAZANKOVA A. A., TIMOFEYUK E. S.</i> Morphological Changes in Erythrocytes during Blood Incubation at Physiological and High Temperature	65

МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 512.548

СТЕПЕНИ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак

доктор физико-математических наук, профессор

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий

В статье изучаются степени элементов в полиадических полугруппах специального вида, то есть в полиадических полугруппах с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, n -арная полугруппа, степень элемента.

Введение

Данная статья посвящена изучению степеней элементов в l -арных полугруппах специального вида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. В ней доказаны результаты, позволяющие для каждого элемента \mathbf{a} l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ находить его полиадические степени $\mathbf{a}^{[v]}$, компоненты которых выражаются через компоненты элемента \mathbf{a} с помощью n -арной операции η n -арной полугруппы, на декартовой степени которой построена указанная l -арная полугруппа.

Взяв за основу определение Поста [1] полиадической степени элемента n -арной группы, определим степень элемента n -арной полугруппы.

Назовём v -ой n -адической степенью элемента a n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$ элемент этой же n -арной полугруппы, обозначаемый символом $a^{[v]}$ и определяемый следующим образом:

$$a^{[v]} = a, \text{ если } v = 0,$$
$$a^{[v]} = \eta(\underbrace{a \dots a}_{v(n-1)+1}), \text{ если } v > 0.$$

Замечание. В полугруппе полиадическая степень и обычная степень одного и того же элемента связаны равенством

$$a^{[v]} = a^{v+1}, v \geq 0.$$

В частности, $a^{[0]} = a^1 = a$.

Всю необходимую информацию, используемую в данной статье, в том числе об операции $\eta_{s, \sigma, k}$ и ее частном случае – операции $[\]_{s+1, \sigma, k}$, можно найти в [2, 3].

В статье существенно используется следующая теорема.

Теорема [2]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа.

© Гальмак А. М., 2024

1. Основной результат

Согласно теореме из введения, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арная полугруппа. Укажем для каждого элемента этой l -арной полугруппы его v -ую l -адическую степень.

Теорема 1.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)}, j = 1, \dots, k. \quad (1.1)$$

Тогда v -ая l -адическая степень $\mathbf{a}^{[v]}$ элемента \mathbf{a} имеет вид (b_1, \dots, b_k) , где

$$b_j = a_j, \text{ если } v = 0, \\ b_j = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_v) = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j \dots a_j \alpha_j a_j}_v), \text{ если } v > 0, \quad (1.2)$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0, \\ \mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_v), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_v)) = \\ = (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 \dots a_1 \alpha_1 a_1}_v), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k \dots a_k \alpha_k a_k}_v)), \text{ если } v > 0.$$

Доказательство. Для $v = 0$ доказывать нечего.

Если $v > 0$, то положим

$$\mathbf{a}^{[v]} = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \dots \mathbf{a}}_{v(l-1)+1}) = (b_1, \dots, b_k).$$

Из этого равенства, принимая во внимание определение l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, тождественность подстановки σ^{l-1} , получим

$$b_j = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \underbrace{a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}}_{v-1}) = \\ = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} \underbrace{a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{v-1}) = \\ = \eta(\underbrace{a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_v),$$

то есть

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \dots a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_v).$$

Из полученного равенства и равенства (1.1) вытекает

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_v).$$

Следовательно, верно первое равенство в (1.2) для любого $j \in \{1, \dots, k\}$, а значит, ввиду ассоциативности n -арной операции η , верно и второе равенство в (1.2). Теорема доказана.

Покажем, что если в теореме 1.1 подстановка σ оставляет неподвижным некоторый символ, то компонента элемента $\mathbf{a}^{[v]}$, индекс которой совпадает с этим символом, имеет вид, указанный в следующем предложении.

Предложение 1.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$ и оставляет неподвижным символ m , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда m -я компонента b_m элемента $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$ имеет вид

$$b_m = a_m^{[sv]}.$$

Доказательство. Так как

$$\mathbf{a}^{[0]} = \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k), \quad a_m^{[s0]} = a_m^{[0]} = a_m,$$

то для $v = 0$ равенство из формулировки предложения верно.

Так как подстановка σ оставляет неподвижным символ m , то последовательность α_m из формулировки теоремы 1.1 имеет вид

$$\alpha_m = \underbrace{a_m \dots a_m}_{l-2},$$

а для $v > 0$ элемент b_m переписывается в виде

$$\begin{aligned} b_m &= \eta(\underbrace{a_m a_m \dots a_m}_{l-2} \underbrace{a_m \dots a_m}_{l-2} a_m) = \\ &= \eta(\underbrace{a_m \dots a_m}_{v(l-1)+1}) = \eta(\underbrace{a_m \dots a_m}_{vs(n-1)+1}) = a_m^{[sv]}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

В следующей теореме, в отличие от теоремы 1.1, указан порядок подстановки σ . Это позволило более детально описать компоненты полиадических степеней элементов l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 1.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, порядок подстановки σ из \mathbf{S}_k делит натуральное d , $l = td + 1$ для некоторого натурального t , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (1.3)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= \mathbf{a}, \text{ если } v = 0, \\ \mathbf{a}^{[v]} &= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_{tv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_{tv})) = \\ &= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 \dots a_1 \alpha_1}_{tv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k \dots a_k \alpha_k}_{tv})), \text{ если } v > 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Доказательство. Так как порядок подстановки σ делит d , то из условия $l = td + 1$ следует, что порядок подстановки σ делит также $l - 1$. Следовательно,

подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Таким образом, выполнены условия теоремы из введения, согласно которой $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle - l$ -арная полугруппа.

По условию порядок подстановки σ делит d , и $l = td + 1$. Поэтому σ^d – тождественная подстановка и, кроме того,

$$a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{l-2}(j)} = \underbrace{a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \cdots a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j}_{t-1} a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{d-1}(j)}$$

или, учитывая равенство (1.3),

$$a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{l-2}(j)} = \underbrace{\alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j. \quad (1.5)$$

Для $v = 0$ доказывать нечего.

Если $v > 0$, то, как и в теореме 1.1, положим

$$\mathbf{a}^{[v]} = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{a} \cdots \mathbf{a}}_{v(l-1)+1}) = (b_1, \dots, b_k).$$

Проведя те же вычисления, что и в теореме 1.1, получим

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \cdots a_{\sigma(j)} \cdots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_v).$$

Из этого равенства и равенства (1.5) вытекает

$$\begin{aligned} b_j &= \eta(\underbrace{a_j \underbrace{\alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j) = \\ &= \eta(\underbrace{a_j \underbrace{\alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{t-1} \cdots \alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j) = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{t-1}), \end{aligned}$$

то есть

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \cdots \alpha_j a_j}_{t-1})$$

для любого $j \in \{1, \dots, k\}$. Следовательно верно первое равенство в (1.4), а значит, ввиду ассоциативности n -арной операции η , верно и второе равенство в (1.4). Теорема доказана.

Замечание 1.1. Ясно, что теорема 1.1 вытекает из теоремы 1.2 при $t = 1$ ($d = l - 1$).

Замечание 1.2. В теореме 1.2 в качестве подстановки σ можно взять подстановку порядка d , в частности, цикл длины d . Если же в качестве подстановки σ в указанной теореме взять подстановку порядка $d = l - 1$, то $t = 1$ в формулах, описывающих компоненты степени $\mathbf{a}^{[v]}$.

Замечание 1.3. Если $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$, σ – тождественная подстановка, то согласно определению полиадической степени имеем

$$\mathbf{a}^{[v]} = \eta(\underbrace{\mathbf{a} \cdots \mathbf{a}}_{v(l-1)+1}) = \eta(\underbrace{(a_1, \dots, a_k) \cdots (a_1, \dots, a_k)}_{v(l-1)+1}) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1 \dots, a_1}_{v(l-1)+1}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \dots, a_k}_{v(l-1)+1})). \quad (1.6)$$

Если теперь в теореме 1.2 $d = 1$, то есть σ – тождественная подстановка, то $t = l - 1$, а последовательность (1.3) – пустая. В этом случае равенство (1.4) принимает вид (1.6). Следовательно, случай тождественной подстановки содержится в теореме 1.2 при $d = 1$.

Для тождественной подстановки имеет место предложение, устанавливающее связь между степенями элементов в l -арной полугруппе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и степенями компонент этих элементов в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$.

Предложение 1.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, σ – тождественная подстановка из S_k , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда для любого $v \geq 0$ верно равенство

$$\mathbf{a}^{[v]} = (a_1^{[sv]}, \dots, a_k^{[sv]}).$$

Доказательство. Ясно, что для $v = 0$ равенство из формулировки теоремы верно.

Так как $l - 1 = s(n - 1)$, то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ верно равенство

$$\eta(\underbrace{a_j \dots, a_j}_{v(l-1)+1}) = \eta(\underbrace{a_j \dots, a_j}_{vs(n-1)+1}) = a_j^{[sv]}, v > 0.$$

Таким образом, ввиду (1.6), формула из условия предложения верна для любого $v \geq 0$. Предложение доказано.

Если в теореме 1.2 $d = n - 1$, то $l - 1 = t(n - 1)$, откуда и из равенства $l - 1 = s(n - 1)$ следует $t = s$. Поэтому теорема 1.2 позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема 1.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, порядок подстановки σ из S_k делит $n - 1$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{n-2}(j)}, j = 1, \dots, k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= \mathbf{a}, \text{ если } v = 0, \\ \mathbf{a}^{[v]} &= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_{sv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_{sv})) = \\ &= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 \dots a_1 \alpha_1 a_1}_{sv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k \dots a_k \alpha_k a_k}_{sv})), \text{ если } v > 0. \end{aligned}$$

Если порядок δ подстановки σ делит $n - 1$, то есть $n = r\delta + 1$ для некоторого натурального r , то δ делит также $l - 1$, так как из $l = s(n - 1) + 1$ следует $l = t\delta + 1$, где $t = sr$. Поэтому, если в теореме 1.2 в качестве подстановки σ взять подстановку порядка δ , то можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, σ – подстановка из S_k порядка δ , $n = r\delta + 1$ для некоторого натурального r , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{\delta-1}(j)}, j = 1, \dots, k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= \mathbf{a}, \text{ если } v = 0, \\ \mathbf{a}^{[v]} &= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 a_1 \dots \alpha_1 a_1}_{sv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k a_k \dots \alpha_k a_k}_{sv})) = \\ &= (\eta(\underbrace{a_1 \alpha_1 \dots \alpha_1 a_1}_{sv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k \alpha_k \dots \alpha_k a_k}_{sv})), \text{ если } v > 0. \end{aligned}$$

Замечание 1.4. В теоремах 1.1–1.4 случай $v = 0$ можно считать содержащимся в формулах для случая $v > 0$, если считать $\eta(a) = a$ для любого $a \in A$. Будем иметь это в виду при формулировке следующего и других подобных результатов.

2. Случай цикла (12 ... d)

Следующая теорема получается из теоремы 1.2, если в ней σ – цикл (12 ... d).

Теорема 2.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, $d \leq k$, $l = td + 1$ для некоторого натурального t , $v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots d), k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{j+1} \dots a_d a_1 \dots a_{j-1}, j = 1, \dots, d. \quad (2.1)$$

Тогда $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$, где

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{iv}) = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j \dots \alpha_j a_j}_{iv}), j = 1, \dots, d, \quad (2.2)$$

$$b_{d+1} = a_{d+1}^{[sv]}, \dots, b_k = a_k^{[sv]}. \quad (2.3)$$

Доказательство. Если $v = 0$, то последовательности

$$\underbrace{\alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j}_{iv}, \underbrace{a_j \alpha_j \dots \alpha_j a_j}_{iv}$$

– пустые, а равенства (2.2) и (2.3) принимают вид

$$b_1 = a_1, \dots, b_k = a_k.$$

Следовательно, для нулевой степени $\mathbf{a}^{[0]}$ теорема верна.

Если σ – цикл (12 ... d), то

$$\sigma(j) = j + 1,$$

$$\sigma^2(j) = \sigma(\sigma(j)) = \sigma(j + 1) = j + 2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sigma^{d-j}(j) = \sigma(\sigma^{d-1-j}(j)) = \sigma(d - 1) = d,$$

$$\sigma^{d+1-j}(j) = \sigma(\sigma^{d-j}(j)) = \sigma(d) = 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sigma^{d-1}(j) = \sigma(\sigma^{d-2}(j)) = \sigma(j - 2) = j - 1,$$

$$\sigma^d(j) = \sigma(\sigma^{d-1}(j)) = \sigma(j - 1) = j.$$

Поэтому для $j = 1, \dots, d$ последовательности α_j из теоремы 1.2, определяемые равенствами (1.3), принимают вид (2.1). Таким образом, компоненты b_1, \dots, b_d определяются равенством (2.2).

Для компонент b_{d+1}, \dots, b_k применяется предложение 1.1. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Выпишем все компоненты b_j степени $\mathbf{a}^{[v]}$ из теоремы 2.1.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}^{[v]} &= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_d a_1 \dots a_2 \dots a_d a_1}_{iv})), \\
 b_2 &= \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_d a_1 a_2 \dots a_3 \dots a_d a_1 a_2}_{iv}), \\
 b_3 &= \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_d a_1 a_2 a_3 \dots a_4 \dots a_d a_1 a_2 a_3}_{iv}), \\
 &\dots\dots\dots \\
 b_{d-1} &= \eta(\underbrace{a_{d-1} a_d a_1 \dots a_{d-2} a_{d-1} \dots a_d a_1 \dots a_{d-2} a_{d-1}}_{iv}), \\
 b_d &= \eta(\underbrace{a_d a_1 \dots a_{d-1} a_d \dots a_1 \dots a_{d-1} a_d}_{iv}), \\
 b_{d+1} &= a_{d+1}^{[sv]}, \dots, b_k = a_k^{[sv]} = \\
 &= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_d \dots a_1 a_2 \dots a_d a_1}_{iv})), \\
 b_2 &= \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_d a_1 \dots a_2 a_3 \dots a_d a_1 a_2}_{iv}), \\
 b_3 &= \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_d a_1 a_2 \dots a_3 a_4 \dots a_d a_1 a_2 a_3}_{iv}), \\
 &\dots\dots\dots \\
 b_{d-1} &= \eta(\underbrace{a_{d-1} a_d a_1 \dots a_{d-2} \dots a_{d-1} a_d a_1 \dots a_{d-2} a_{d-1}}_{iv}), \\
 b_d &= \eta(\underbrace{a_d a_1 \dots a_{d-1} \dots a_d a_1 \dots a_{d-1} a_d}_{iv}), \\
 b_{d+1} &= a_{d+1}^{[sv]}, \dots, b_k = a_k^{[sv]}.
 \end{aligned}$$

Если порядок d цикла $(12 \dots d)$ делит $n - 1$, то теорема 2.1 позволяет сформулировать ещё одну теорему.

Теорема 2.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, $d \leq k$, $n = rd + 1$ для некоторого натурального r , $v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots d), k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{j+1} \dots a_d a_1 \dots a_{j-1}, j = 1, \dots, d.$$

Тогда $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$, где

$$b_j = \eta(\underbrace{\eta(a_j \alpha_j a_j \dots \alpha_j a_j)}_{srv}) = \eta(\underbrace{a_j \alpha_j \dots a_j \alpha_j a_j}_{srv}),$$

$$b_{d+1} = a_{d+1}^{[sv]}, \dots, b_k = a_k^{[sv]}.$$

Следующие две теоремы получаются из теорем 2.1 и 2.2, если в них положить $d = k$.

Теорема 2.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, $l = tk + 1$ для некоторого натурального $t, v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_k a_1 \dots a_2 \dots a_k a_1}_{tv})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_3 \dots a_k a_1 a_2}_{tv}),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 a_3 \dots a_4 \dots a_k a_1 a_2 a_3}_{tv}),$$

.....

$$b_{k-1} = \eta(\underbrace{a_{k-1} a_k a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1} \dots a_k a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1}}_{tv}),$$

$$b_k = \eta(\underbrace{a_k a_1 \dots a_{k-1} a_k \dots a_1 \dots a_{k-1} a_k}_{tv}) =$$

$$= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_k \dots a_1 a_2 \dots a_k a_1}_{tv})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_k a_1 \dots a_2 a_3 \dots a_k a_1 a_2}_{tv}),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 a_3}_{tv}),$$

.....

$$b_{k-1} = \eta(\underbrace{a_{k-1} a_k a_1 \dots a_{k-2} \dots a_{k-1} a_k a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1}}_{tv}),$$

$$b_k = \eta(\underbrace{a_k a_1 \dots a_{k-1} \dots a_k a_1 \dots a_{k-1} a_k}_{tv}).$$

Теорема 2.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, $n = rk + 1$ для некоторого натурального $r, v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_k a_1 \dots a_2 \dots a_k a_1}_{srv})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_3 \dots a_k a_1 a_2}_{srv}),$$

$$\begin{aligned}
 b_3 &= \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 a_3 \dots a_4 \dots a_k a_1 a_2 a_3}_{sv}), \\
 \dots & \\
 b_{k-1} &= \eta(\underbrace{a_{k-1} a_k a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1} \dots a_k a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1}}_{sv}), \\
 b_k &= \eta(\underbrace{a_k a_1 \dots a_{k-1} a_k \dots a_1 \dots a_{k-1} a_k}_{sv}) = \\
 &= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_k \dots a_1 a_2 \dots a_k a_1}_{sv})), \\
 b_2 &= \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_k a_1 \dots a_2 a_3 \dots a_k a_1 a_2}_{sv}), \\
 b_3 &= \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 \dots a_3 a_4 \dots a_k a_1 a_2 a_3}_{sv}), \\
 \dots & \\
 b_{k-1} &= \eta(\underbrace{a_{k-1} a_k a_1 \dots a_{k-2} \dots a_{k-1} a_k a_1 \dots a_{k-2} a_{k-1}}_{sv}), \\
 b_k &= \eta(\underbrace{a_k a_1 \dots a_{k-1} \dots a_k a_1 \dots a_{k-1} a_k}_{sv}).
 \end{aligned}$$

Следующая теорема получается из теоремы 2.3, если в ней положить $k = n - 1$.

Теорема 2.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, $v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1})$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^{n-1}, \eta_{s, (12 \dots n-1), n-1} \rangle$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}^{[v]} &= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_1 \dots a_2 \dots a_{n-1} a_1}_{sv})), \\
 b_2 &= \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_1 a_2 \dots a_3 \dots a_{n-1} a_1 a_2}_{sv}), \\
 b_3 &= \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_1 a_2 a_3 \dots a_4 \dots a_{n-1} a_1 a_2 a_3}_{sv}), \\
 \dots & \\
 b_{n-2} &= \eta(\underbrace{a_{n-2} a_{n-1} a_1 \dots a_{n-3} a_{n-2} \dots a_{n-1} a_1 \dots a_{n-3} a_{n-2}}_{sv}), \\
 b_{n-1} &= \eta(\underbrace{a_{n-1} a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1} \dots a_1 \dots a_{n-2} a_{n-1}}_{sv}) = \\
 &= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_{n-1} \dots a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_1}_{sv})), \\
 b_2 &= \eta(\underbrace{a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_1 \dots a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_1 a_2}_{sv}), \\
 b_3 &= \eta(\underbrace{a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_1 a_2 \dots a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_1 a_2 a_3}_{sv}), \\
 \dots &
 \end{aligned}$$

$$b_{n-2} = \eta(\underbrace{a_{n-2}a_{n-1}a_1 \dots a_{n-3} \dots a_{n-2}a_{n-1}a_1 \dots a_{n-3}a_{n-2}}_{sv}),$$

$$b_{n-1} = \eta(\underbrace{a_{n-1}a_1 \dots a_{n-2} \dots a_{n-1}a_1 \dots a_{n-2}a_{n-1}}_{sv}).$$

Следующая теорема получается из теоремы 2.3, если в ней положить $k = l - 1$.

Теорема 2.6. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, $v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{l-1})$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^{l-1}, \eta_{1, (12 \dots l-1), l-1} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(\underbrace{a_1a_2 \dots a_{l-1}a_1 \dots a_2 \dots a_{l-1}a_1}_{v})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2a_3 \dots a_{l-1}a_1a_2 \dots a_3 \dots a_{l-1}a_1a_2}_{v}),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3a_4 \dots a_{l-1}a_1a_2a_3 \dots a_4 \dots a_{l-1}a_1a_2a_3}_{v}),$$

.....

$$b_{l-2} = \eta(\underbrace{a_{l-2}a_{l-1}a_1 \dots a_{l-3}a_{l-2} \dots a_{l-1}a_1 \dots a_{l-3}a_{l-2}}_{v}),$$

$$b_{l-1} = \eta(\underbrace{a_{l-1}a_1 \dots a_{l-2}a_{l-1} \dots a_1 \dots a_{l-2}a_{l-1}}_{v}) =$$

$$= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1a_2 \dots a_{l-1} \dots a_1a_2 \dots a_{l-1}a_1}_{v})),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2a_3 \dots a_{l-1}a_1 \dots a_2a_3 \dots a_{l-1}a_1a_2}_{v}),$$

$$b_3 = \eta(\underbrace{a_3a_4 \dots a_{l-1}a_1a_2 \dots a_3a_4 \dots a_{l-1}a_1a_2a_3}_{v}),$$

.....

$$b_{l-2} = \eta(\underbrace{a_{l-2}a_{l-1}a_1 \dots a_{l-3} \dots a_{l-2}a_{l-1}a_1 \dots a_{l-3}a_{l-2}}_{v}),$$

$$b_{l-1} = \eta(\underbrace{a_{l-1}a_1 \dots a_{l-2} \dots a_{l-1}a_1 \dots a_{l-2}a_{l-1}}_{v}).$$

3. Следствия для $d = 2$

Полагая в теореме 1.2 $d = 2$, получим

Следствие 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, σ – подстановка из S_k порядка 2, $l = 2t + 1$ для некоторого натурального t , $v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (\eta(\underbrace{a_1a_{\sigma(1)}a_1 \dots a_{\sigma(1)}a_1}_{iv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k a_{\sigma(k)} a_k \dots a_{\sigma(k)} a_k}_{iv})) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1a_{\sigma(1)} \dots a_1a_{\sigma(1)}a_1}_{iv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k a_{\sigma(k)} \dots a_k a_{\sigma(k)} a_k}_{iv})).$$

Полагая а теореме 1.4 $\delta = 2$, получим

Следствие 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, σ – подстановка из \mathbf{S}_k порядка 2, $n = 2r + 1$ для некоторого натурального r , $v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= (\eta(\underbrace{a_1 a_{\sigma(1)} a_1 \dots a_{\sigma(1)} a_1}_{sv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k a_{\sigma(k)} a_k \dots a_{\sigma(k)} a_k}_{sv})) = \\ &= (\eta(\underbrace{a_1 a_{\sigma(1)} \dots a_1 a_{\sigma(1)} a_1}_{sv}), \dots, \eta(\underbrace{a_k a_{\sigma(k)} \dots a_k a_{\sigma(k)} a_k}_{sv})). \end{aligned}$$

Полагая в следствиях 3.1 и 2.2 $\sigma = (ij)$ – транспозиция из \mathbf{S}_k , получим

Следствие 3.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, $l = 2t + 1$ для некоторого натурального t , $v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, (ij), k} \rangle$. Тогда $\mathbf{a}^{[v]} = (b_1, \dots, b_k)$, где

$$\begin{aligned} b_i &= \eta(\underbrace{a_i a_j a_i \dots a_j a_i}_{iv}) = \eta(\underbrace{a_i a_j \dots a_i a_j a_i}_{iv}), \\ b_j &= \eta(\underbrace{a_j a_i a_j \dots a_i a_j}_{iv}) = \eta(\underbrace{a_j a_i \dots a_j a_i a_j}_{iv}), \\ b_m &= a_m^{[sv]}, m \neq i, m \neq j. \end{aligned}$$

Следствие 3.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, $n = 2r + 1$ для некоторого натурального r , $v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, (ij), k} \rangle$. Тогда

$$\begin{aligned} b_i &= \eta(\underbrace{a_i a_j a_i \dots a_j a_i}_{sv}) = \eta(\underbrace{a_i a_j \dots a_i a_j a_i}_{sv}), \\ b_j &= \eta(\underbrace{a_j a_i a_j \dots a_i a_j}_{sv}) = \eta(\underbrace{a_j a_i \dots a_j a_i a_j}_{sv}), \\ b_m &= a_m^{[sv]}, m \neq i, m \neq j. \end{aligned}$$

Полагая а теореме 2.1 $d = 2$, получим

Следствие 3.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, $l = 2t + 1$ для некоторого натурального t , $v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, (12), k} \rangle$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{[v]} &= (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 a_1 \dots a_2 a_1}_{iv}) = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_1 a_2 a_1}_{iv}), \\ b_2 &= \eta(\underbrace{a_2 a_1 a_2 \dots a_1 a_2}_{iv}) = \eta(\underbrace{a_2 a_1 \dots a_2 a_1 a_2}_{iv}), \\ b_3 &= a_3^{[sv]}, \dots, b_k = a_k^{[sv]}). \end{aligned}$$

Полагая а теореме 2.2 $d = 2$, получим

Следствие 3.6. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, $n = 2r + 1$ для некоторого натурального r , $v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, (12), k} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 a_1 \dots a_2 a_1}_{srv}) = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_1 a_2 a_1}_{srv}),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_1 a_2 \dots a_1 a_2}_{srv}) = \eta(\underbrace{a_2 a_1 \dots a_2 a_1 a_2}_{srv}),$$

$$b_3 = a_3^{[sv]}, \dots, b_k = a_k^{[sv]}).$$

Полагая а теореме 2.3 или в следствии 3.5 $k = 2$, получим

Следствие 3.7. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, $l = 2t + 1$ для некоторого натурального t , $v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^2, \eta_{s, (12), 2} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 a_1 \dots a_2 a_1}_{tv}) = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_1 a_2 a_1}_{tv}),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_1 a_2 \dots a_1 a_2}_{tv}) = \eta(\underbrace{a_2 a_1 \dots a_2 a_1 a_2}_{tv})).$$

Полагая а теореме 2.4 или в следствии 3.6 $k = 2$, получим

Следствие 3.8. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, $n = 2r + 1$ для некоторого натурального r , $v \geq 0$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle A^2, \eta_{s, (12), 2} \rangle$. Тогда

$$\mathbf{a}^{[v]} = (b_1 = \eta(\underbrace{a_1 a_2 a_1 \dots a_2 a_1}_{srv}) = \eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_1 a_2 a_1}_{srv}),$$

$$b_2 = \eta(\underbrace{a_2 a_1 a_2 \dots a_1 a_2}_{srv}) = \eta(\underbrace{a_2 a_1 \dots a_2 a_1 a_2}_{srv})).$$

4. Следствия для $n = 2$

Сформулируем несколько следствий для $n = 2$.

Если в теореме 1.1 и предложении 1.1 положить $n = 2$, то получим

Следствие 4.1. Пусть A – полугруппа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^{s+1} = \sigma$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(s + 1)$ -арной полугруппы $\langle A^k, []_{s+1, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{s-1}(j)}, j = 1, \dots, k.$$

Тогда v -ая $(s + 1)$ -адическая степень $\mathbf{a}^{[v]}$ элемента \mathbf{a} имеет вид (b_1, \dots, b_k) , где

$$b_j = a_j, \text{ если } v = 0,$$

$$b_j = a_j(\alpha_j a_j)^v = (a_j \alpha_j)^v a_j, \text{ если } v > 0,$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0,$$

$$\mathbf{a}^{[v]} = (a_1(\alpha_1 a_1)^v = (a_1 \alpha_1)^v a_1, \dots, a_k(\alpha_k a_k)^v = (a_k \alpha_k)^v a_k), \text{ если } v > 0.$$

Если подстановка σ оставляет неподвижным символ m , то

$$b_m = a_m^{sv+1}.$$

Если в теореме 1.2 и предложении 1.1 положить $n = 2$, то получим

Следствие 4.2. Пусть A – полугруппа, порядок подстановки σ из S_k делит натуральное d , $s = td$ для некоторого натурального t , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(s + 1)$ -арной полугруппы $\langle A^k, []_{s+1, \sigma, k} \rangle$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \dots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \dots, k.$$

Тогда v -ая $(s + 1)$ -адическая степень $\mathbf{a}^{[v]}$ элемента \mathbf{a} имеет вид (b_1, \dots, b_k) , где

$$b_j = a_j, \text{ если } v = 0,$$

$$b_j = a_j(\alpha_j a_j)^{tv} = (a_j \alpha_j)^{tv} a_j, \text{ если } v > 0,$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[v]} = \mathbf{a}, \text{ если } v = 0,$$

$$\mathbf{a}^{[v]} = (a_1(\alpha_1 a_1)^{tv}, \dots, a_k(\alpha_k a_k)^{tv}) = (a_k \alpha_k)^{tv} a_k, \text{ если } v > 0.$$

Если подстановка σ оставляет неподвижным символ m , то

$$b_m = a_m^{sv+1} = a_m^{tdv+1}.$$

Если в предложении 1.2 положить $n = 2$, то получим

Следствие 4.3. Пусть A – полугруппа, σ – тождественная подстановка из S_k , $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ – произвольный элемент $(s + 1)$ -арной полугруппы $\langle A^k, []_{s+1, \sigma, k} \rangle$. Тогда для любого $v \geq 0$ верно равенство

$$\mathbf{a}^{[v]} = (a_1^{sv+1}, \dots, a_k^{sv+1}).$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
2. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
3. Гальмак, А. М. Об ассоциативности полиадических операций / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2017. – № 1. – С. 4–11.

Поступила в редакцию 27.12.2023 г.

Контакты: halm54@mail.ru (Гальмак Александр Михайлович).

Galmak A. M. SKEW ELEMENTS IN l -ARY GROUPS OF SPECIAL FORM

The article deals with powers in polyadic semigroups of a special form, i.e. in polyadic semigroups with the l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that is called a polyadic operation of a special form and is defined on the Cartesian power of A^k n -ary semigroup $\langle A, \eta \rangle$ by the substitution $\sigma \in S_k$ and the n -ary operation η .

Keywords: polyadic operation, n -ary semigroup, power.

УДК 511.42

ВЛИЯНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ КОРНЯМИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОЛИНОМОВ НА ВЕЛИЧИНЫ ПРОИЗВОДНЫХ В КОРНЯХ

Н. В. Сакович

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Е. В. Засимович

кандидат физико-математических наук,
старший преподаватель кафедры математики
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Ж. И. Пантелеева

младший научный сотрудник
ГНУ ИМ НАН Беларуси

В работе получены оценки сверху и снизу для количества целочисленных полиномов $P(x)$ степени n и высоты $H(P) \leq Q$ при Q стремящемся к бесконечности, для которых $|P'(\alpha_1)| < H^{1-\nu}$, $0 \leq \nu < \frac{n+1}{2}$. Если α_1 — ближайший к x корень $P(x)$, а корни $P(x)$ упорядочены следующим образом: $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|$, то задача решена при условии $|\alpha_1 - \alpha_2| < \varepsilon^{-1} |\alpha_1 - \alpha_j|$ при любом $\varepsilon > 0$ и $Q > Q_0(\varepsilon)$.

Ключевые слова: диофантовы приближения, целочисленные полиномы, принцип ящиков Дирихле.

Введение

Замечательная теорема Дирихле 1842 года [1] и ее развитие сыграло большую роль в различных областях математики и ее приложений. Отметим приложения в методах вычислений [2], в небесной механике и КАМ–теории (Колмогоров–Арнольд–Мозер) [3], при разрешении проблемы малых знаменателей [4]. Последние прикладные аспекты метрической теории диофантовых приближений связаны с обоснованием конструирования антенных устройств [5].

Теорема Дирихле. Для любого действительного числа x и натурального числа $Q > 1$ всегда найдутся целые числа p и q , $1 \leq q \leq Q$, для которых выполняются неравенства

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq q^{-1} Q^{-1} < q^{-2}, \quad (1)$$

$$|qx - p| \leq Q^{-1}. \quad (2)$$

Неравенство (2) эквивалентно неравенству (1) и удобно для обобщения на полиномы произвольной степени. Неравенства (1) и (2) близки к окончательным, что показал Гурвиц [6]. Очень продуктивным оказалось применение к (1) и (2) понятия меры Лебега [7].

Пусть $\Psi(t)$ монотонно убывающая функция положительного аргумента t , $I \subset \mathbb{R}$ — интервал, $\mu_1(A)$ — мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{L}_1(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|qx - p| \leq \Psi(q) \quad (3)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах первой степени.

Теорема Хинчина [7]. Справедливы равенства:

$$\mu_1 \mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ \mu_1(I), & \text{если } \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty, \end{cases} \quad (4)$$

$$\mu_1 \mathcal{L}_1(\Psi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) < \infty, \\ \mu_1(I), & \text{если } \sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q) = \infty, \end{cases} \quad (5)$$

Теорема Хинчина очень точная. Если взять функцию $\Psi(x) = x^{-1} \ln^{-1} x (\ln \ln x)^{-\gamma}$, то при $\gamma > 1$ выполняется (4), а при $\gamma \leq 1$ верно (5), хотя конкретные суммы в (4) и (5) начинают различаться только при громадном количестве слагаемых. Будем использовать символ Виноградова \ll и записывать $A \ll B$, если $A < cB$, $c = c(n)$.

В теории трансцендентных чисел одной из основных проблем является задача о приближении трансцендентных чисел алгебраическими числами (корнями полиномов с целыми коэффициентами).

Основываясь на точности таких приближений, К. Малер [8] построил классификацию действительных и комплексных чисел. Пусть полином $P(t) \in \mathbb{Z}[x]$ имеет вид

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0,$$

где a_i — целые числа, $\deg P = n$ — степень $P(t)$, $H = H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ — его высота. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1} \Psi(x) \quad (6)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x)$.

Гипотеза Малера [8]. При $\Psi(x) = \Psi_1(x)$ и $\Psi_1(x) = x^{-w}$, $w > n$ справедливо равенство

$$\mu_1 \mathcal{L}_n(\Psi_1) = 0. \quad (7)$$

Сам Малер доказал (7) только при $w > 4n$. Его результат усиливали несколько известных математиков [9; 10].

Проблема Малера была решена белорусским математиком В.Г. Спринджуком [9; 10; 11]. Так же в Беларуси проблема Малера была обобщена для произвольной функции $\Psi(x)$.

Теорема 1 (Берника–Бересневича). Верны неравенства

$$\mu\mathcal{L}_n(\Psi) = \begin{cases} 0, \text{ если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, & (8) \\ \mu_1(I), \text{ если } \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. & (9) \end{cases}$$

Случай сходимости ряда доказал В. Берник [12], а случай расходимости В. Бересневич [13].

Теорема 1 была обобщена в работах [14; 15; 16] с полиномов $P(x)$ на невырожденные функции заменой x^j на $f_j(x) \in C^{n+1}[a, b]$ при условии, что вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1' & \dots & f_n' \\ f_1'' & \dots & f_n'' \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n)} & \dots & f_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (10)$$

для почти всех $x \in [a, b]$.

Теорема 2. При условии $f_j(x) \in C^{n+1}[a, b]$, $1 \leq j \leq n$ и (10) справедливы равенства (8) и (9).

Теоремы 1 и 2 находят применение при проектировании антенных устройств [5].

Основная часть

Обратим сейчас внимание на неравенство (8) в теореме 1. Его доказательство основано на следующей известной лемме 1 и лемме Бореля–Кантелли.

Лемма 1. Пусть α_1 — ближайший корень полинома $P(x)$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы неравенства

$$|x - \alpha_1| \ll |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1}, \quad (11)$$

$$|x - \alpha_1| \ll \min_{2 \leq j < +n} |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1} (|\alpha_1 - \alpha_2| \dots |\alpha_1 - \alpha_j|)^j. \quad (12)$$

Лемма 2 (Бореля–Кантелли). Пусть множества A_1, A_2, \dots измеримы и B — множество $x \in I_j$, которые принадлежат бесконечному числу A_j . Тогда при сходимости ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \mu A_j$ мера множества B равна нулю.

Леммы 1, 2 хорошо известны и доказаны в [4; 10; 11]. При фиксированном полиноме $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, где

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}.$$

Из леммы 2 имеем

$$|x - \alpha_1| \ll |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1}.$$

Зафиксируем малое число $\varepsilon > 0$ и $T = [\varepsilon^{-1}] + 1$. Как показано в [17], неравенство (11) точное, т. е.

$$|x - \alpha_1| \asymp H^{-w} |P'(\alpha_1)|^{-1}. \quad (13)$$

Если $|P(x)| < Q^{-w}$ и $|P'(\alpha_1)| = a_n |\alpha_1 - \alpha_2| \dots |\alpha_1 - \alpha_n|$, то поделим полиномы $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ на конечное число классов $\mathcal{P}_n(\bar{l})$, $\bar{l} = (l_1, \dots, l_n)$, а корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ полинома $P(x)$ упорядочены следующим образом

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|,$$

$$|\alpha_1 - \alpha_j| = H^{-\rho_j}, \frac{l_j - 1}{T} \leq \rho_j < \frac{l_j + 1}{T} \quad (14)$$

$$p_1 = (l_2 + \dots + l_n)T^{-1}, p_1 = (l_{j+1} + \dots + l_n)T^{-1}, 2 \leq j \leq n$$

Используя дискриминант $D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ полинома $P(x)$, можно доказать, что каждая координата вектора \bar{l} , как и сам вектор \bar{l} , принимает только конечное, зависящее лишь от n и ε количество значений, но не зависящее от H и Q . Этот факт доказан в работах [10; 12; 18].

Обозначим теперь через $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ количество полиномов из $\mathcal{P}_n(Q)$, для которых

$$H^{1-p_1} \leq |P'(\alpha_1)| < H^{1-p_1+n\varepsilon}. \quad (15)$$

Если верно неравенство

$$\#\mathcal{P}_n(Q, v) \ll Q^{n+1-p_1+\varepsilon}, \quad (16)$$

то из (11), (13), (15) имеем

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, v)} Q^{-w-1+p_1+n} \ll Q^{-w-1+n+1+(n+1)\varepsilon} \ll Q^{-w+n+(n+1)\varepsilon}. \quad (17)$$

Из (15) получаем, что при $w > n$, $\varepsilon_1 = n^{-2}(w - n)$ и $Q > Q_0(\varepsilon_1)$ верно

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, v)} Q^{-w-1+p_1} \ll Q^{-\varepsilon_1}.$$

Далее будем рассматривать два класса полиномов $\mathcal{P}_n(Q, v)$ с одинаковыми p_1 и разными $l_2 T^{-1} = p_1$.

Лемма 3. Обозначим через $B = B_1(c_0, \delta)$ множество действительных чисел $x \in I$, для которых при $Q \in \mathbb{N}$ и $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ выполняется система неравенств

$$\begin{aligned} \delta Q^{-v_0} < |P(x)| < c_0 Q^{-v_0}, \quad \delta Q^{-v_1} < |P'(x)| < c_0 Q^{-v_1}, \\ \delta Q^{-v_k} < |P^{(k)}(x)| < c_0 Q^{-v_k}, \quad 2 \leq k \leq n, \quad v_k \geq -1, \end{aligned} \quad (18)$$

$$v_0 + \dots + v_k = n - k, \quad v_0 - v_1 \geq v_3 - v_2 \geq \dots \geq v_{n+1} + 1$$

Тогда существуют c_0, δ такие, что при достаточно большом $Q > Q_0(\delta)$ система неравенств (18) справедлива в неприводимых целочисленных полиномах $P(x)$, $a_n(P) = H(P)$ и

$$\mu_1 B_1 < \frac{1}{4} \mu_1 I. \quad (19)$$

Лемма 3 доказана В. Бересневичем [19] на основании теоремы Д. Клейнбока и Г. Маргулиса [17].

Из леммы 3 следует, что для множества $B_2 = I \setminus B_1$ верно неравенство

$$\mu B_2 \geq \frac{3}{4} \mu_1 I. \quad (20)$$

Лемма 4 [20]. Пусть два полинома $P(x)$ и $T(x)$ степени n не имеют общих корней, $H(P) \leq Q$, и для всех $x \in I$, $\mu I = Q^{-\eta}$, $\tau > 0$ удовлетворяют неравенству

$$\max_{x \in I} (|P(x)|, |T(x)|) < Q^{-\tau}, \tau > 0.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau + 1 + 2\max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta. \quad (21)$$

Теорема 3. Обозначим через $B_3 = B_3(Q, n, v)$ множество полиномов $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, удовлетворяющих неравенствам

$$|P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}, p_1 = v_1 + \theta_1 \varepsilon, |\theta_1| \leq 1, l_2 T = p_1. \quad (22)$$

Тогда

$$\#B_3 \gg Q^{n+1-2v-\varepsilon}, 0 \leq v \leq \frac{n+1}{3}, \quad (23)$$

$$\#B_3 \ll Q^{n+1-v+\varepsilon}, 0 \leq v \leq \frac{3}{2}. \quad (24)$$

Доказательство теоремы 3.

Обозначим через $B_4 \subset B_2$ множество $x \in I$, для которых

$$\delta Q^{-v_0} < |P(x)| < c_0 Q^{-v_0}, \delta Q^{-v_1} < |P'(x)| < c_0 Q^{-v_1}, \quad (25)$$

$$\delta Q < |P''(x)| < c_0 Q, v_0 + v_1 = n - 1, v_0 - v_1 \geq v_1 + 1,$$

$$\mu_1 B_4 \geq \frac{3}{4} \mu_1 I. \quad (26)$$

Из (26) имеем

$$v_0 = n - 1 - v_1, v_0 \geq 2v_1 + 1.$$

Неравенство (11) дает точную оценку меры тех x , для которых выполняется неравенство $|P(x)| \ll Q^{-v_0}$. Можно записать $|x - \alpha_1| \asymp Q^{-v_0+v_1}$, где знак \asymp обозначает, что $A \asymp B$, если $A \ll B$ и $B \ll A$. Оценим величину $v_0 - v_1$ снизу

$$v_0 - v_1 \geq v_1 + 1, n - 1 - 2v_1 \geq v_1 + 1, n - 1 \geq 3v_1 + 1, \quad (27)$$

откуда $3v_1 \leq n - 2$ и

$$-1 \leq v_1 \leq \frac{n-2}{3}.$$

Поскольку $|P'(\alpha_1)| \asymp Q^{-v_0+v_1}$, то из (27) получаем

$$0 \leq v \leq \frac{n+1}{3},$$

и неравенство (23) доказано.

Теперь докажем неравенство (24).

Для этого предположим противное: пусть выполняется неравенство, противоположное (24):

$$\#B_3 \gg Q^{n+1-v+\varepsilon}. \quad (28)$$

Поделим отрезок I на интервалы J_j длины $\mu J_j = Q^{-l_2 T^{-1}}$. Тогда из (28) следует, что существуют J_j , на которых не менее $Q^{n+1-v+\varepsilon}$ полиномов удовлетворяют неравенству

$$\#(B_3 \cap J_j) > Q^{n+1-v-l_2 T^{-1}+\varepsilon}. \quad (29)$$

На интервалах J_j разложим каждый полином в ряд Тейлора в окрестности корня $\alpha_1 = \alpha_1(P)$:

$$|P(x)| \leq P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + P''(\xi)(x - \alpha_1)^2, \quad \alpha_1 \leq \xi \leq x. \quad (30)$$

Так как $P(\alpha_1) = 0$, $|P'(\alpha_1)| < Q^{1-v+\frac{\varepsilon}{4}}$, $|x - \alpha_1| < Q^{-l_2 T^{-1}}$, то из разложения (30) получаем

$$|P(x)| \ll Q^{1-v-l_2 T^{-1}}.$$

Поскольку количество полиномов $P(x)$ на интервале J_j удовлетворяет (29), то при условии

$$m = [n + 1 - v - l_2 T^{-1} + \varepsilon] = +1 - v - l_2 T^{-1} + \theta_2 \varepsilon, \quad |\theta_2| \leq 2$$

не менее h^m полиномов $P(x)$ имеет совпадающие коэффициенты при $x^n, x^{n-1}, \dots, x^{n-m}$. Применим принцип ящиков Дирихле. Тогда окажется, что существует не менее $Q^{\frac{\varepsilon}{2}}$ полиномов

$$R_j(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x), \quad 1 \leq j \leq [Q^\varepsilon],$$

для которых выполняются неравенства

$$|R_j(x)| \ll Q^{1-v-l_2 T^{-1}}, \quad \deg R_j \leq n - m \leq v + l_2 T^{-1} + \varepsilon - 1. \quad (31)$$

Если среди $[Q^\varepsilon]$ полиномов $P(x)$ найдутся хотя бы два полинома без общих корней, то применим к ним лемму 4. Тогда неравенство (21) для полиномов $R_j(x)$ примет вид

$$\begin{aligned} \tau + 1 &= v + l_2 T^{-1}, \quad 2(\tau + 1 - l_2 T^{-1}) = 2v, \\ 3v + l_2 T^{-1} &< 2v + 2l_2 T^{-1} + 2\varepsilon - 2, \end{aligned} \quad (32)$$

откуда

$$v - l_2 T^{-1} < 2\varepsilon - 2. \quad (33)$$

Так как $\varepsilon < \frac{v}{3}$ и $\frac{v}{3} \geq l_2 T^{-1}$, то неравенство (33) противоречиво. Осталось рассмотреть случай, когда среди полиномов $P(x)$ нет пары полиномов без общих корней. В этом случае $R_j(x) = t_1(x)t_2(x)$, а полиномы $t_i(x)$ имеют степень не менее 1. Поэтому $\deg R_j(x) \geq 2$ и $v + l_2 T^{-1} - 2 \geq 2$. Так как в теореме $v = l_2 T^{-1}$, то $2v \geq 4$, что при $v < 2$ противоречиво, и теорема 3 доказана.

Заклучение

В данной работе получены оценки сверху и снизу для целочисленных полиномов с ограниченной первой производной в корне, для которых $l_2T = p_1$. Случай $l_2T^{-1} < p_1$ сложнее и будет рассмотрен в продолжении этой работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Dirichlet, L. G. P.* Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen / L. G. P. Dirichlet // Werke I. – 1842. – P. 633–638.
2. *Коробов, А. А.* Обоснование эффективного алгоритма для определения точечных полноты и вырожденности линейных систем порядка 12 с запаздыванием / А. А. Коробов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2014. – Т. 17, № 2. – С. 59–73.
3. *Арнольд, В. И.* Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике / В. И. Арнольд // Успехи математических наук. – 1963. – Т. 18, № 6. – С. 91–192.
4. *Пташник, Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник ; АН УССР. – Киев : Наукова думка, 1984. – 264 с.
5. *Beresnevich, V. V.* Simultaneous inhomogeneous diophantine approximation on manifolds / V. V. Beresnevich, S. L. Velani // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 180, № 5. – P. 531–541.
6. *Шмидт, В.* Диофантовы приближения / В. Шмидт. – М. : Мир, 1983. – 228 с.
7. *Khinchine, A.* Einige Satze uber Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khinchine // Math. Ann. – 1924. – Vol. 92. – С. 115–125.
8. *Mahler, K.* Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106. – P. 131–139.
9. *Спринджук, В. Г.* Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 379–436.
10. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 181 с.
11. *Спринджук, В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений / В. Г. Спринджук. – М. : Наука, 1977. – 143 с.
12. *Берник, В. И.* О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53, № 1. – С. 17–28.
13. *Beresnevich, V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arithmetica. – 1999. – Vol. 90, № 2. – С. 97–112.
14. *Beresnevich, V. V.* A Groshev type theorem for convergence on manifolds / V. V. Beresnevich // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 2002. – Vol. 94, № 1–2. – P. 99–130.
15. *Bernik, V.* Khinchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions / V. Bernik, D. Kleinbock, G. Margulis // International Mathematics Research Notices. – 2001. – Vol. 2001, № 9. – P. 453–486.
16. *Beresnevich, V. V.* Metric Diophantine Approximation: The Khinchine–Groshev Theorem for Non-degenerate Manifolds / V. V. Beresnevich [et. al] // Mosc. Math. J. – 2002. – Vol. 2, № 2. – P. 203–225.
17. *Kleinbock, D.* Flows on Homogeneous Spaces and Diophantine Approximation on Manifolds / D. Kleinbock, G. Margulis // Ann. of Math. – 1998. – Vol. 148, № 1. – P. 339–360.
18. *Bernik, V. I.* Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson. – Cambridge : Cambridge University Press, 1999. – № 137. – 171 p.
19. *Бересневич, В. В.* Совместные приближения нуля целочисленным многочленом, его производной и малые значения дискриминантов / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гетце // Доклады Национальной академии наук Беларуси ; Республиканское унитарное предприятие Издательский дом Белорусская наука. – 2010. – Т. 54, № 2. – С. 26–28.
20. *Берник, В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1983. – Т. 42, № 3. – С. 219–253.

Поступила в редакцию 5.01.2024 г.

Контакты: sakovichnv@tut.by (Сакович Наталья Владимировна),

zasimovich@msu.by (Засимович Елена Васильевна),

Janna-85@list.ru (Пантелеева Жанна Ивановна).

Sakovich N. V., Zasimovich E. V., Panteleeva Zh. I. THE INFLUENCE OF DISTANCES BETWEEN THE ROOTS OF INTEGER POLYNOMIALS ON THE VALUES OF DERIVATIVES IN THE ROOTS

In the work, upper and lower estimates are obtained for the number of integer polynomials $P(x)$ of degree n and the height $H(P) \leq Q$ as Q tends to infinity, where $|P'(\alpha_j)| < H^{l-\nu}$, $0 \leq \nu < \frac{n+1}{2}$.

If α_1 is the root of $P(x)$ closest to x , and the roots of $P(x)$ are arranged as follows: $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|$, then the problem is solved providing $|\alpha_1 - \alpha_2| < \varepsilon^{-l} |\alpha_1 - \alpha_j|$ for any $\varepsilon > 0$ and $Q > Q_0(\varepsilon)$.

Keywords: diophantine approximation, integer polynomial, Dirichlet's box principle.

УДК 535.361:535.317.1

БИНАРНАЯ МАРКОВСКАЯ СМЕСЬ КАК МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

М. С. Носкова

кандидат физико-математических наук

Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

В работе проводится качественная оценка применимости модели бинарной марковской смеси для описания переноса излучения в стохастических средах. Показано, что фрактальная размерность бинарной марковской смеси совпадает с фрактальной размерностью многих природных сред. Проводится численное моделирование переноса излучения с малоугловым рассеянием в случайно-неоднородных смесях с различной статистикой.

Ключевые слова: стохастический перенос излучения, бинарная марковская смесь, малоугловое приближение, фрактальная размерность.

Введение

Перенос излучения в стохастических средах – одно из актуальных направлений современной оптики. Распространенным вариантом стохастической среды является **случайно-неоднородная смесь (СНС)** – среда, состоящая из несмешивающихся компонент, с разными оптическими характеристиками [1, 2]. Линейные размеры участков пространства, занимаемых компонентами (хорды компонент), являются случайными величинами.

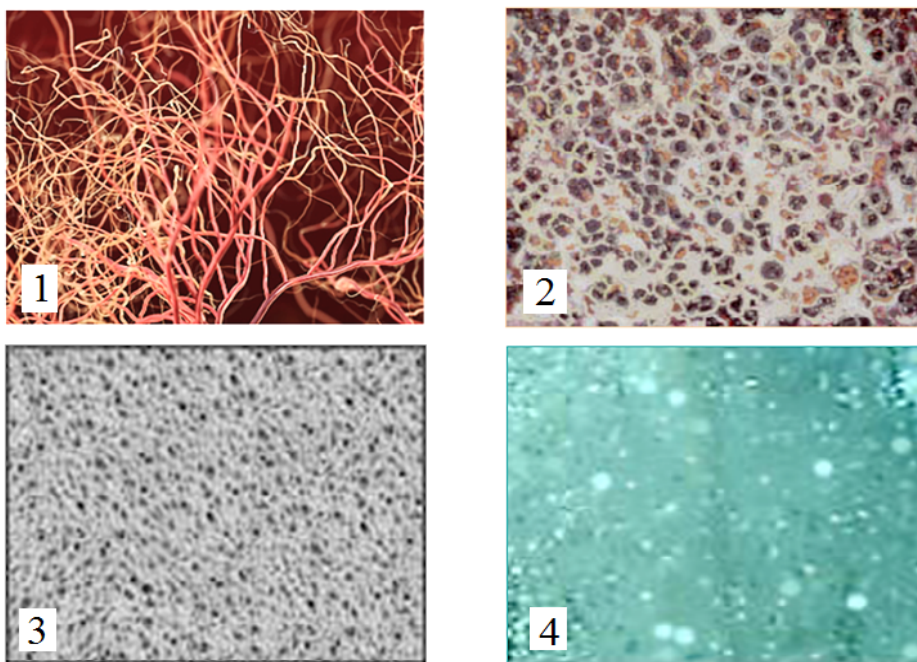


Рисунок 1 – Примеры случайно неоднородных смесей

Типичные примеры СНС показаны на рис. 1, где (1) – биологические ткани, пронизанные мелкими кровеносными сосудами; (2) – легочная ткань; (3) – бетонная защита ядерных реакторов; (4) – кипящая вода как теплоноситель в ядерных реакторах и т. д.

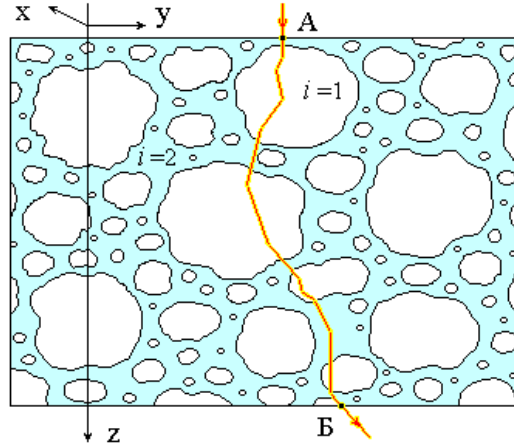


Рисунок 2 – Схематическое изображение разорванной облачности

В атмосферной оптике двухкомпонентной СНС является разорванная облачность (рис. 2): пересекающий ее фотон (кривая АБ) проходит сквозь чередующиеся участки облаков (компонента $i=1$) и межоблачного пространства (компонента $i=2$). Внутренняя структура каждой из компонент считается однородной. Стохастичность задачи проявляется только в статистике распределения облачного поля, т. е. в вероятности присутствия в данной точке облака или ясного неба.

1. Постановка задачи

В однородной среде стационарное уравнение переноса излучения имеет вид [3]:

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \varepsilon(\mathbf{r})I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') f(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}', \mathbf{r}) d\mathbf{\Omega}' + B(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad (1)$$

где $I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ – интенсивность излучения в точке \mathbf{r} в направлении, определяемом единичным вектором $\mathbf{\Omega}$,

$\nabla = \mathbf{i} \partial / \partial x + \mathbf{j} \partial / \partial y + \mathbf{k} \partial / \partial z$ – оператор градиента, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – единичные векторы декартовой системы координат, $\sigma(\mathbf{r})$ – показатель рассеяния, $\varepsilon(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r}) + \sigma(\mathbf{r})$ – показатель экстинкции, $k(\mathbf{r})$ – показатель поглощения.

$f(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}', \mathbf{r})$ – индикатриса рассеяния, функция, описывающая вероятность изменения направления движения фотона из $\mathbf{\Omega}$ в $\mathbf{\Omega}'$ при однократном рассеянии,

$B(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ – функция источников.

Одна из распространенных моделей случайно-неоднородной смеси с произвольным размером неоднородностей – **бинарная марковская смесь** (далее БМС) – среда, состоящая из двух несмешивающихся веществ (компонент), случайным образом распределенных в пространстве, каждое из которых имеет свои оптические характеристики [4–6].

Чередование компонент 1 и 2 вдоль произвольной прямой, проходящей сквозь слой БМС, представляет собой Марковский дискретный случайный процесс. Линейные размеры областей пространства, занимаемых компонентами, – случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону.

В БМС уравнение переноса (1) превращается в систему двух связанных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega) + \varepsilon_1 p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega) &= \frac{\sigma_1}{4\pi} \int_{4\pi} p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega') f_1(\Omega \cdot \Omega') d\Omega' + p_1 B_1 - \frac{p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega)}{l_1} + \frac{p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega)}{l_2}, \\ \Omega \cdot \nabla p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega) + \varepsilon_2 p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega) &= \frac{\sigma_2}{4\pi} \int_{4\pi} p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega') f_2(\Omega \cdot \Omega') d\Omega' + p_2 B_2 - \frac{p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega)}{l_2} + \frac{p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega)}{l_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $I_i(\mathbf{r}, \Omega)$ – условное значение интенсивности в компоненте i ,

σ_i, ε_i – соответственно показатели рассеяния и ослабления i -й компоненты,

$f_i(\Omega \cdot \Omega')$ – индикатриса рассеяния i -й компоненты,

l_i – марковские длины перехода, – средние размеры областей пространства, занимаемых компонентами (средние хорды компонент),

$p_i = \frac{l_i}{(l_1 + l_2)}$ – вероятность нахождения компоненты i в произвольной точке

объема, занимаемого БМС.

Среднее значение интенсивности излучения в БМС определяется как

$$\langle I(\mathbf{r}, \Omega) \rangle = p_1 I_1(\mathbf{r}, \Omega) + p_2 I_2(\mathbf{r}, \Omega). \quad (3)$$

В работах [4, 5] система (2) решалась аналитически в случае изотропной индикатрисы рассеяния. Однако многие природные среды, в том числе атмосферная облачность, имеют вытянутую индикатрису рассеяния, что позволяет применять к ним малоугловое приближение и метод преобразования Фурье [1, 3, 7]. В рамках данного приближения можно получить некоторые интегральные характеристики излучения в аналитическом виде [7], например, коэффициент пропускания слоя среды и эффективный радиус пучка.

Необходимым элементом формирования физической модели является определение ее области применимости.

Малоугловое приближение описывает рассеяние на частицах, много больших длины волны [1, 2], которому соответствует индикатриса рассеяния сильно вытянутая вперед, в направлении распространения излучения.

В результате малоугловое рассеяние с высокой степенью точности соответствует принципу причинности, лежащему в основе марковских процессов.

В целом многие природные среды, например, разорванная облачность и морская вода [8–11] содержат рассеивающие частицы, эффективные размеры которых намного больше, чем длина волны излучения в оптическом диапазоне.

Оценить применимость модели БМС можно, рассмотрев ее фрактальную размерность.

2. Фрактальная размерность бинарной марковской смеси

Фрактальной структурой обладают многие биологические объекты, морские волны, пористые материалы и самые разнообразные шероховатые поверхности. Фрактальность пористых материалов и поверхностей существенно влияет на их свойства в области катализа, смачивания и технологии напыления [12].

Фрактальные характеристики БМС можно оценить следующим образом. Согласно [12, с. 226], если стохастическая среда является статистически изотропной (не имеет выделенного масштаба), ее можно рассматривать как трехмерную фрактальную среду. Фрактальную размерность подобной среды можно найти по пространственному Фурье-спектру корреляционной функции, характеризующей ее неоднородность и пространственную структуру. В задачах радиационного переноса для этой цели можно использовать корреляционные функции показателей экстинкции, рассеяния и поглощения.

Корреляционные функции показателей экстинкции, рассеяния и поглощения БМС как случайных величин $\varepsilon(\mathbf{r})$, $\sigma(\mathbf{r})$ и $k(\mathbf{r})$ имеют вид [13, 14]:

$$R_\varepsilon(t) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 p_1 p_2 \exp\left(-\frac{t}{l_K}\right), \quad (4)$$

$$R_\sigma(t) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 p_1 p_2 \exp\left(-\frac{t}{l_K}\right), \quad (5)$$

$$R_k(t) = (k_1 - k_2)^2 p_1 p_2 \exp\left(-\frac{t}{l_K}\right), \quad (6)$$

где $l_K = \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$ – радиус корреляции,

t – расстояние между двумя произвольными точками смеси.

Осуществив Фурье-преобразования функций корреляции относительно пространственной частоты $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$,

$$G(\omega) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} R(t) \exp(-2\pi i \omega t) dt, \quad (7)$$

получим:

$$G_\varepsilon(\omega) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 p_1 p_2 / l_K \cdot \left(\frac{1}{l_K^2} + \omega^2 \right), \quad (8)$$

$$G_\sigma(\omega) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 p_1 p_2 / l_K \cdot \left(\frac{1}{l_K^2} + \omega^2 \right), \quad (9)$$

$$G_k(\omega) = (k_1 - k_2)^2 p_1 p_2 / l_K \cdot \left(\frac{1}{l_K^2} + \omega^2 \right). \quad (10)$$

Для значений $\omega \gg 1/l_K$

$$G_{\varepsilon}(\omega) \approx \omega^{-2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \frac{P_1 P_2}{l_K}, \quad (11)$$

$$G_{\sigma}(\omega) \approx \omega^{-2} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \frac{P_1 P_2}{l_K}, \quad (12)$$

$$G_k(\omega) \approx \omega^{-2} (k_1 - k_2)^2 \frac{P_1 P_2}{l_K}. \quad (13)$$

Фрактальные типы Фурье-спектров описываются выражением [12, с. 227]

$$G(\omega) = K \cdot \omega^{-2(3-D)-1}, \quad (14)$$

где D – фрактальная размерность поверхности раздела компонент БМС,

K – изрезанность фрактальной среды.

Таким образом, из выражений (11)–(14) находим фрактальные характеристики БМС.

Изрезанность характеризует неоднородность фрактальной среды и частоту перехода из одной компоненты в другую. Для БМС она прямо пропорциональна квадрату разности значений измеряемой величины в первой и второй компонентах и обратно пропорциональна сумме средних длин хорд компонент:

$$K_{\varepsilon} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{l_1 + l_2}, \quad (15)$$

$$K_{\sigma} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{l_1 + l_2}, \quad (16)$$

$$K_k = \frac{(k_1 - k_2)^2}{l_1 + l_2}. \quad (17)$$

Фрактальная размерность – величина, характеризующая соотношение площади поверхности, разделяющей компоненты и их объема. Она имеет дробное значение и зависит от геометрической структуры рассматриваемого фрактала. Для БМС находим

$$D = 2.5. \quad (18)$$

Это значение фрактальной размерности соответствует результатам исследования фрактальной размерности разорванной облачности, полученных обработкой данных радарных измерений и спутниковых изображений [12, с. 202]. Подобную фрактальную размерность имеют также кластеры коллоидного кварца ($D = 2.55 \pm 0.07$) [12, с. 46] и различные шероховатые и пористые поверхности [12, с. 237]. Это является следствием того, что многие из перечисленных выше стохастических сред имеют экспоненциальное распределение размеров неоднородностей, что соответствует модели БМС.

3. Численное моделирование переноса излучения в СНС с разными статистиками распределения неоднородностей

Применение модели БМС позволяет получить интегральные характеристики излучения в аналитическом виде и дает возможность для анализа закономерностей переноса излучения в стохастических средах. Тем не менее, не все СНС подчиняются экспоненциальному распределению, например, в природе часто встречается распределение Гаусса.

Для того, чтобы наглядно показать зависимость переноса излучения от статистики распределения неоднородностей среды, в данном разделе представлены результаты расчетов коэффициента пропускания СНС для экспоненциальной статистики распределения, распределения Гаусса и равномерного распределения.

Функция плотности вероятности экспоненциального распределения

$$\varphi_i(s_i) = \frac{1}{l_i} \exp\left(-\frac{s_i}{l_i}\right), \quad (19)$$

Функция плотности вероятности распределения Гаусса

$$\varphi_i(s_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_i}} \exp\left(-\frac{(s_i - l_i)^2}{2D_i}\right), \quad (20)$$

Функция плотности вероятности равномерного распределения

$$\varphi_i(s_i) = \frac{1}{2(l_i - \alpha_i)}, \quad D_i = \frac{(l_i - \alpha_i)^2}{3}, \quad (21)$$

где $\varphi_i(s_i)$ – функция плотности вероятности случайной величины s_i , характеризующей линейные размеры участков пространства, занимаемых i -й компонентой смеси вдоль направления распространения пучка (i – индекс, указывающий номер компоненты), l_i – среднее значение s_i ; α_i – минимальное значение s_i ; D_i – дисперсия распределения s_i .

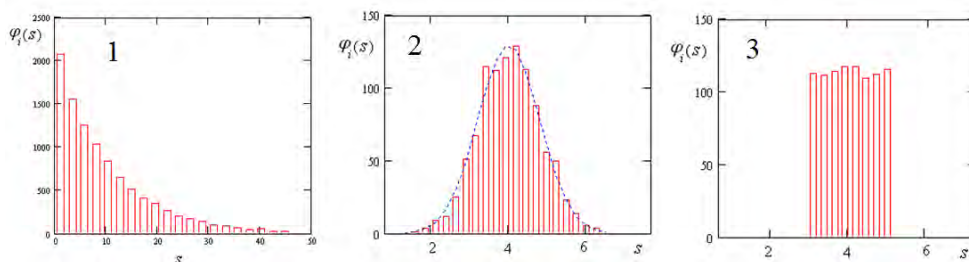


Рисунок 3 – (1) – экспоненциальное распределение; (2) – распределение Гаусса; (3) – равномерное распределение

Так как получить аналитическое описание переноса излучения в СНС с произвольной статистикой распределения в общем случае невозможно, наиболее приемлемым методом решения подобной задачи является численное моделирование на основе метода Монте-Карло [15].

Значение толщины слоя, занимаемого данной компонентой, получаем, используя методы, описанные в [16, с. 178]. Индикатрисы рассеяния имеют вид аппроксимации Хензи-Гринштейна. Порядок чередования компонент и толщина слоев, занимаемых первой и второй компонентами смеси, разыгрывался для каждого фотона отдельно, по мере его прохождения сквозь слой среды, что повышает степень усреднения результатов.

Для сравнения производится также расчет коэффициента пропускания эквивалентной однородной смеси. Эквивалентная однородная смесь – среда, в которой компоненты, составляющие СНС, перемешаны равномерно.

Расчеты проводились для следующих параметров, соответствующих разорванной облачности ($i=1$ облака, $i=2$ межоблачное пространство):

$\mu_1 = \mu_2 = 0.98$ – средние косинусы углов рассеяния,

$\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0.9$ – вероятности выживания фотона в единичном рассеянии,

$l_1 = l_2 = 4$,

$\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1(l_1 + l_2)/(\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2) = 1.95$; $\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2(l_1 + l_2)/(\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2) = 0.05$ – нормированные показатели ослабления 1-й и 2-й компонент смеси,

τ – оптическая глубина слоя,

l_1, l_2, τ – безразмерные величины, нормированные относительно усредненно-го по всему объему среды показателя ослабления.

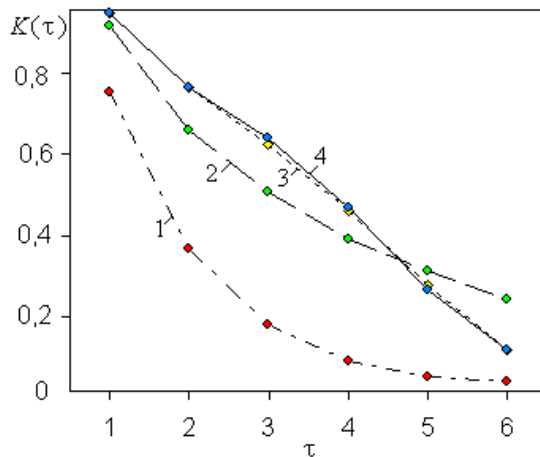


Рисунок 4 – Коэффициенты пропускания

(1) – однородной смеси, (2) – СНС с экспоненциальным распределением, (3) – СНС с распределением Гаусса, (4) – СНС с равномерным распределением

Таким образом, коэффициенты пропускания разорванной облачности с различными статистиками распределения s_i значительно различаются между собой и всегда превосходят коэффициент пропускания эквивалентной однородной смеси.

При расчетах коэффициента пропускания СНС с распределением Гаусса для ускорения можно аппроксимировать распределение Гаусса равномерным распределением с теми же значениями l_i и D_i .

Алгоритм расчета может быть легко адаптирован для расчета коэффициентов пропускания стохастических сред с произвольным числом компонент.

4. Заключение

Результаты расчетов показывают, что:

– Перенос излучения в СНС сильно зависит от статистики распределения неоднородностей и может значительно отличаться от переноса излучения в БМС.

– Тем не менее фрактальные характеристики БМС совпадают с фрактальными характеристиками многих природных сред, следовательно, модель БМС потенциально имеет широкую область применимости.

– Аналитические решения, полученные в рамках модели БМС, позволяют наглядно представить и оценить закономерности стохастического переноса излучения, но для сред с произвольной статистикой распределения неоднородностей приходится прибегать к численным методам.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Валентюк, А. Н.* Оптическое изображение при дистанционном наблюдении / А. Н. Валентюк, К. Г. Предко. – Минск : Наука и техника, 1991. – 359 с.
2. *Pomraning, G. C.* Linear Kinetic Theory and Particle Transport in Stochastic Mixtures / G. C. Pomraning. – World Scientific Publishing : Singapore, 1991. – 235 p.
3. *Зеге, Э. П.* Перенос изображения в рассеивающей среде / Э. П. Зеге, А. П. Иванов, И. Л. Кацев. – Минск : Наука и техника, 1985. – 327 с.
4. *Помранинг, Г. С.* Асимптотические уравнения переноса излучения в атмосфере с частичной облачностью / Г. С. Помранинг // Оптика атмосферы и океана. – 1996. – Т. 9, № 1. – С. 14–29.
5. *Помранинг, Г. С.* Взаимодействия облако-радиация: модель Титова и другие модели / Г. С. Помранинг // Оптика атмосферы и океана. – 1999. – Т. 12, № 3. – С. 215–221.
6. *Kassianov, E. I.* Stochastic radiative transfer in Markovian mixtures: Past, present, and future / E. I. Kassianov, D. Veron. // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 2011. – V. 112, № 5. – P. 566–576.
7. *Носкова, М. С.* Аналитические решения уравнения переноса излучения в бинарной марковской смеси в малоугловом приближении / М. С. Носкова // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2022. – Т. 60, № 2. – С. 46–57.
8. *Показеев, К. В.* Океанология. Оптика океана / К. В. Показеев, Т. О. Чаплина. – М. : Юрайт. 2019. – 270 с.
9. *Малинка, А. В.* Учет влияния атмосферы при интерпретации данных спутниковых и наземных оптических измерений / А. В. Малинка [и др.] // ЖПС. – 2016. – Т. 83, № 5. – С. 698–707.
10. *Филей, А. А.* Построение моделей оптических параметров вулканических облаков для задач дистанционного зондирования Земли из космоса / А. А. Филей // Оптика атмосферы и океана. – 2020. – Т. 33, № 02. – С. 127–134.
11. *Каргин, Б. А.* Численное статистическое моделирование процесса переноса оптической радиации в случайных кристаллических средах / Б. А. Каргин, Ц. Му, Е. Г. Каблукова // Сиб. электрон. матем. изв. – 2023. – Т. 20:1. – С. 486–500.
12. *Федер, Е.* Фракталы / Е. Федер. – М. : Мир, 1991. – 254 с.
13. *Valentyuk, A. N.* A functional description of stochastic radiative transfer / A. N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1996. – Vol. 56. – P. 447–464.
14. Linear transport theory in a random medium / C. D. Lavermore [et al.] // J. Math. Phys. – 1986. – V. 27. – P. 2526–2536.
15. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике / Г. И. Марчук [и др.] ; под общ. ред. Г. И. Марчука. – М. : Наука, 1976. – 216 с.
16. *Кольчужкин, А. М.* Введение в теорию прохождения частиц через вещество / А. М. Кольчужкин, В. В. Учайкин. – М. : Атомиздат, 1978. – 256 с.

Поступила в редакцию 28.12.2023 г.

Контакты: poskova@msu.by (Носкова Марина Сергеевна).

***Noskova M. S.* A BINARY MARKOVIAN MIXTURE AS A MODEL OF STOCHASTIC MEDIA**

The paper provides a qualitative assessment of the applicability of the model of a binary Markovian mixture to describe radiation transport in stochastic media. It is shown that the fractal dimension of the binary Markovian mixture coincides with the fractal dimension of many natural media. Numerical simulation of radiation transfer with small-angle scattering in randomly inhomogeneous mixtures with different statistics is carried out.

Keywords: stochastic radiation transfer, binary Markov mixture, small-angle approximation, fractal dimension.

УДК 535.42

МНОГОСОЛИТОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КАК ОСНОВА СОВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ ОПТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

В. В. Давыдовская

кандидат физико-математических наук, доцент
Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина

В. Н. Навныко

кандидат физико-математических наук, доцент, ректор университета
Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина

А. В. Федорова

студент
Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина

Д. С. Блоцкая

аспирант
Мозырский государственный педагогический университет
имени И. П. Шамякина

Теоретически обоснована актуальность использования солитонных матричных систем в фоторефрактивных кристаллах в устройствах оптической обработки данных и передачи информации с возможностью увеличения количества оптических информационных линий для параллельной обработки информации.

Ключевые слова: двумерный супергауссов световой пучок, фоторефрактивный кристалл, солитон, взаимодействие, фокусировка, солитонный режим, стабилизация.

Введение

В настоящее время открытым и актуальным остается вопрос разработки эффективной структурной базы для систем скоростной обработки информации, которые могут использоваться в оптических компьютерах, радиолокационных системах, устройствах хранения информации и др. [1].

В связи с этим не ослабевают интерес к исследованиям сложных оптических явлений в нелинейных средах, к которым можно отнести и фоторефрактивные кристаллы, так как они обладают подходящими для этого электрооптическими свойствами и могут использоваться при создании волноводных систем и задач динамической голографии.

Многие из задач нелинейной оптики могут иметь высокие перспективы практического использования, в частности выявление закономерностей распространения и взаимодействия световых пучков, при которых достигается их квазисо-

литонный режим распространения, либо энергетический обмен между пучками, осуществление адресной локализации световых пучков [2].

Одной из актуальных задач является изучение многосолитонного взаимодействия в матричных системах фоторефрактивных кристаллах, которые могут использоваться в устройствах оптической обработки данных и передачи информации с возможностью увеличения количества оптических информационных линий для параллельной обработки информации.

Можно выделить целый ряд научных работ по изучению солитонных матричных систем [напр. 3–5], однако следует отметить, что в основном в таких работах преобладают экспериментальные исследования.

В настоящее время растет интерес к исследованиям световых пучков, отличных от классического гауссова пучка, при этом особый интерес представляют пучки с плоским верхом, т. к. они имеют ряд преимуществ при изучении некоторых оптических явлений, например локализация пучков, стабилизация квазисолитонного режима распространения [6, 7].

Модель двумерного пучка

В качестве двумерных световых пучков в работе использовались двумерные супергауссовы пучки с квадратным верхом [8–10].

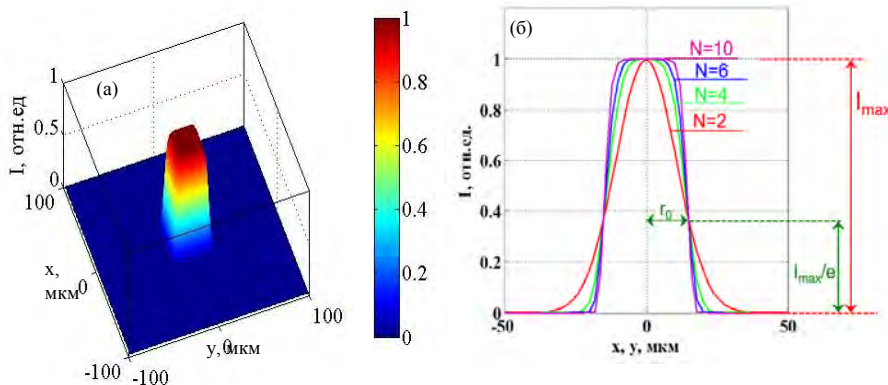


Рисунок 1 – Двумерная модель супергауссова пучка с квадратным верхом ($r_0 = 20$ мкм, $I_{\max} = 1$); а – распределение интенсивности пучка $I(x, y)$; б – профили поперечных сечений супергауссовых пучков различного порядка

Математическая модель

Образующим элементом любой матричной солитонной системы является ячейка из четырех симметрично расположенных световых пучков, поэтому представляет интерес исследование всех составляющих взаимодействий между пучками в таком базовом солитонном массиве.

Для описания распространения и взаимодействия двумерных световых пучков в кристалле SBN из уравнений Максвелла и основных уравнений фоторефрактивного эффекта [11] в параксиальном приближении была получена система четырех нелинейных уравнений, представленная в [7]:

$$\begin{cases} i \frac{\partial A_{1x}}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_e} \left(\frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 n_e^3}{2} A_{1x} r_{33} \left(E_{0x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0, \\ i \frac{\partial A_{1y}}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_o} \left(\frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial y^2} \right) + \frac{k_0 n_o^3}{2} A_{1x} r_{42} \left(E_{0y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0, \\ i \frac{\partial A_{2y}}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_o} \left(\frac{\partial^2 A_{2y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{2y}}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 n_o^3}{2} A_{2y} r_{13} \left(E_{0x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0, \\ i \frac{\partial A_{2x}}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_e} \left(\frac{\partial^2 A_{2x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{2x}}{\partial y^2} \right) + \frac{k_0 n_e^3}{2} A_{2y} r_{42} \left(E_{0y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Где n_o , n_e – показатели преломления обыкновенной и необыкновенной световых волн; E_{0x} и E_{0y} – проекции вектора \vec{E}_0 на оси ox и oy ; k_0 – длина волнового вектора световых пучков в вакууме; $A_{1x} = A_{1x}(x, y, z)$, $A_{1y} = A_{1y}(x, y, z)$ и $A_{2x} = A_{2x}(x, y, z)$, $A_{2y} = A_{2y}(x, y, z)$, – комплексные проекции векторных огибающих напряженностей электрического поля x - и y -поляризованных световых пучков на оси ox и oy соответственно; r_{13} , r_{33} , r_{42} – компоненты тензора линейного электрооптического эффекта \hat{r} .

Первые два уравнения системы (1) могут использоваться для изучения особенностей распространения пучка с входной x -поляризацией, а вторые два – пучка с входной y -поляризацией.

Поле пространственного заряда ϕ определяется через решение уравнения (см., напр., [12, 13])

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi + \nabla \ln(1+I) \cdot \nabla \phi - \frac{K_B T}{q} \left[\nabla^2 \ln(1+I) + (\nabla \ln(1+I))^2 \right] = \\ = E_{0x} \frac{\partial}{\partial x} \ln(1+I) + E_{0y} \frac{\partial}{\partial y} \ln(1+I) \end{aligned} \quad (2)$$

$$I = \frac{n_e |A_{1,2x}|^2 + n_o |A_{1,2y}|^2}{2\eta_0 I_d}, \quad (3)$$

где K_B – постоянная Больцмана, I – относительная интенсивность светового поля в области распространения световых пучков, q – элементарный заряд, T – абсолютная температура, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$.

Будем полагать, что взаимодействующие в упорядоченной солитонной ячейке световые пучки, имеют на входе в кристалл x -поляризацию, поэтому для описания их распространения и взаимодействия в кристалле SBN будем использовать первые два уравнения системы (1):

$$\begin{cases} i \frac{\partial A_{1x}}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_e} \left(\frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{1x}}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0 n_e^3}{2} A_{1x} r_{33} \left(E_{0x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0, \\ i \frac{\partial A_{1y}}{\partial z} + \frac{1}{2k_0 n_o} \left(\frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{1y}}{\partial y^2} \right) + \frac{k_0 n_o^3}{2} A_{1x} r_{42} \left(E_{0y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

Численное решение системы (4) и уравнения (2) осуществлялось с использованием двумерных разностных методов итераций и оптимизированной двумерной численной схемы Дугласа, имеющие приемлемые погрешности и вычислительные затраты.

Основные полученные результаты

Во многих работах было показано, что при взаимодействии световых пучков в фоторефрактивных кристаллах при различных условиях может наблюдаться как взаимное притяжение пучков, вплоть до полного объединения в один пучок, так и отталкивание пучков, причиной которого является возникающая между пучками оптическая разность хода и как следствие появление относительной фазы между ними [14].

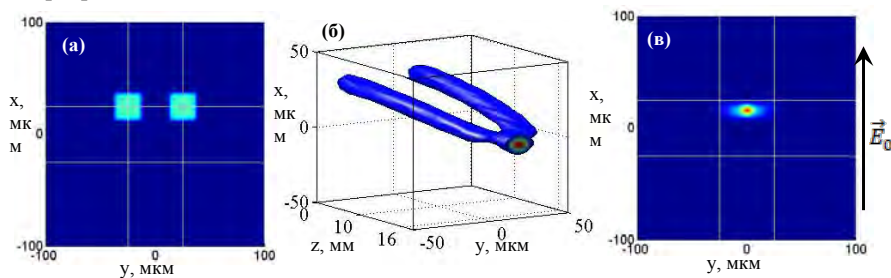


Рисунок 2 – Объединение двумерных супергауссовых световых пучков с квадратным верхом в кристалле SBN; а – пучки на входе в кристалл; б – распределение светового поля в кристалле; в – пучки на выходе из кристалла

При взаимодействии световых пучков в матричных системах одновременно могут проявляться оба явления, как притяжение, так и отталкивание, поэтому параметры выходных пучков, их относительная интенсивность, форма, смещение зависят от суммарного воздействия на пучок всех соседних пучков, входящих в упорядоченную симметричную систему.

Взаимное притяжение пучков может наблюдаться при расположении световых пучков перпендикулярно по отношению к вектору напряженности внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу SBN вдоль его оптической оси, причем в случае, когда входное расстояние между пучками сравнимо с размерами самих пучков, результатом такого взаимодействия может быть полное объединение в один световой пучок, который будет смещаться против направления внешнего электрического поля (рис. 2 б,в).

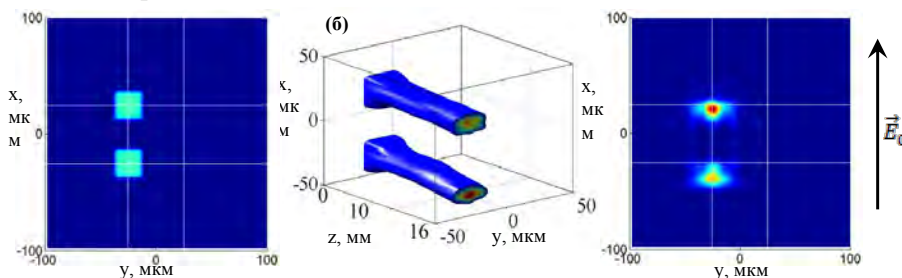


Рисунок 3 – Отталкивание двумерных супергауссовых световых пучков с квадратным верхом в кристалле SBN; а – пучки на входе в кристалл; б – распределение светового поля в кристалле; в – пучки на выходе из кристалла

При взаимодействии трех пучков можно отметить, что объединение пучков уже не наблюдается, так как в данном случае при одновременном взаимном влиянии друг на друга пучков, верхние пучки притягиваются, а влияние нижнего пучка приводит к отталкиванию световых пучков (рис. 4).

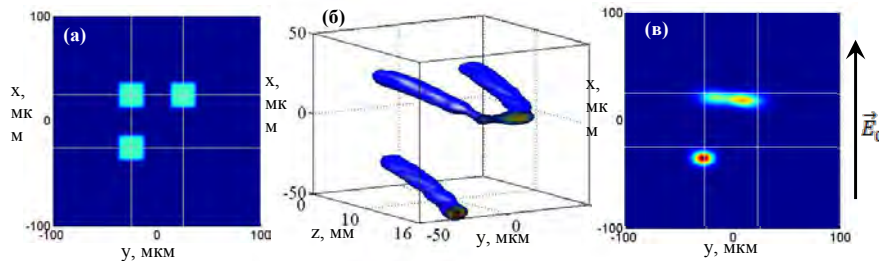


Рисунок 4 – Взаимодействие трех двумерных супергауссовых световых пучков с квадратным верхом в кристалле SBN; а – пучки на входе в кристалл; б – распределение светового поля в кристалле; в – пучки на выходе из кристалла

При распространении в фоторефрактивном кристалле SBN двумерных световых пучков, расположенных параллельно вектору напряженности внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу между пучками возникает оптическая разность хода, за счет одновременного отталкивания световых пучков и их смещения вследствие диффузионного эффекта противоположно направлению внешнего электрического поля (рис. 3 б,в).

При исследовании взаимодействия световых пучков в полной элементарной упорядоченной ячейке световых пучков, состоящей из четырех симметрично расположенных световых пучков можно отметить, что пучки сохраняют свою структуру и продолжают распространяться индивидуально в квазисолитонном режиме, что может иметь большое перспективы в использовании каждого из пучков в качестве параллельной информационной оптической линии (рис. 5).

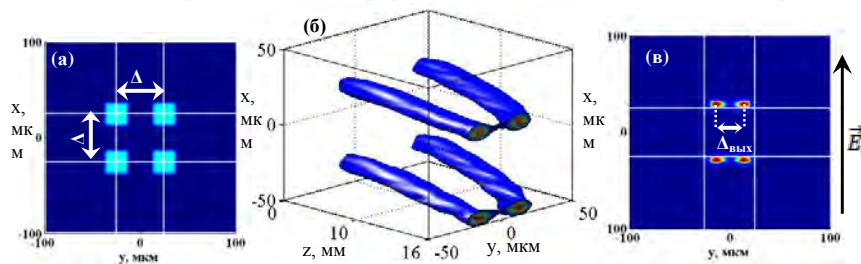


Рисунок 5 – Взаимодействие двумерных супергауссовых световых пучков с квадратным верхом в фоторефрактивном кристалле SBN в составе симметричной упорядоченной структуры; а – пучки на входе в кристалл; б – распределение светового поля в кристалле; в – пучки на выходе из кристалла

Рассмотрим особенности взаимодействия световых пучков в массиве удвоенного размера 4×4 .

Из рисунка 6 видно, что на средние ряды пучков оказывается большее влияние соседних пучков массива, вследствие парного взаимодействия данные пучки рассеиваются, однако вносят вклад в относительную интенсивность крайних пуч-

ков. Диффузионный режим распространения приводит к смещению массива противоположно направлению внешнего электрического поля, приложенного к кристаллу вдоль оси x , причем нижние пучки смещаются в большей степени.

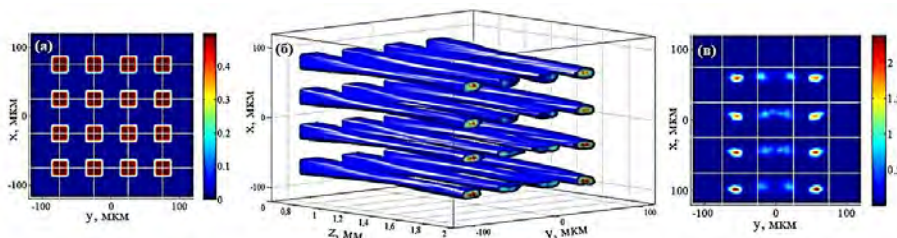


Рисунок 6 – Распространение массива 4×4 двумерных световых пучков с квадратным верхом в кристалле SBN: а – массив пучков на входе в кристалл; б – распределение светового поля в кристалле; в – пучки на выходе из кристалла.

Следует отметить, что для использования каждого пучка в качестве параллельной оптической информационной линии, следует использовать упорядоченные массивы из уединенных базовых массивов 2×2 , с увеличенным расстоянием между крайними пучками базовых массивов.

Заключение

Таким образом в работе проведен детальный анализ взаимодействия в фоторефрактивном кристалле SBN световых пучков, входящих в элементарную образующую ячейку матричной солитонной системы, теоретически обоснована актуальность использования таких систем в устройствах оптической обработки данных и передачи информации с возможностью увеличения количества оптических информационных линий для параллельной обработки информации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Cuniot-Ponsard, M.* Strontium Barium Niobate Thin Films for Dielectric and Electro-Optic Applications. *Ferroelectrics - Material Aspects* / M. Cuniot-Ponsard // InTech, Rijeka, Croatia – 2011. – P. 498–518.
2. *Давыдовская, В. В.* Распространение и взаимодействие двумерных световых пучков в фоторефрактивных кристаллах : дис. канд. физ.-мат. наук : 01.04.05. – Мозырь, 2014. – 116 л.
3. *Khmelnitsky, D.* Interaction of two-dimensional rectangular light beams in a photorefractive SBN crystal / D. Khmelnitsky [et. al] // *Ferroelectrics*. – 2009. – Vol. 390. – P. 116–127.
4. *Smirnov, S.* Interaction of counterpropagating discrete solitons in a nonlinear one-dimensional waveguide array / S. Smirnov [et. al] // *Opt. Lett.* – 2007. – Vol. 32, № 5. – P. 512–514.
5. *Zeng, L.* Preventing critical collapse of higher-order solitons by tailoring unconventional optical diffraction and nonlinearities / L. Zeng, J. Zeng // *Commun. Phys.* – 2020. – Vol. 3. – P. 20–29.
6. *Давыдовская, В. В.* Взаимодействие двумерных ортогонально поляризованных квадратных супергауссовых световых пучков в фоторефрактивном кристалле класса симметрии $4mm$ / В. В. Давыдовская, В. В. Шепелевич // *Вестник ПГУ*. – 2010. – № 3. – С. 124–128.
7. *Давыдовская, В. В.* Взаимодействие двумерных ортогонально поляризованных супергауссовых световых пучков в фоторефрактивном кристалле / В. В. Давыдовская [и др.] // *Квантовая электроника*. – 2010. – Т. 40, № 10. – С. 899–906.
8. *Roychoudhuri, C., Kracklauer, A.F., Creath, K.* The Nature of Light: What is a Photon? (Optical Science and Engineering) / C. Roychoudhuri, A.F. Kracklauer, K. Creath ; Taylor & Francis Inc.: CRC Press, 2008. – 454 p.
9. *Cheng, Y.-K.* Design and Evaluation of Light Spread Function for Area-Adaptive LCD System / Y.-K. Cheng [et al] // *J. Display Technol.* – 2009. – Vol. 5, № 2 – P. 66–71.

10. **Diebel, F.** Soliton formation by decelerating interacting Airy beams / F. Diebel [et al] // Optics Express. – 2015. – Vol. 23. Is.19. – P. 24351–24361.
11. **Kukhtarev, N. V.** Holographic storage in electrooptic crystals: 1. Steady state / N. V. Kukhtarev [et al] // Ferroelectrics. – 1979. – Vol. 22. – P. 949–960.
12. **Motzek, K.** Dipole-mode vector solitons in anisotropic photorefractive media / K. Motzek // Opt. Commun. – 2001. – Vol. 197. – P. 161–168.
13. **Ярус, А.** Оптические волны в кристаллах / А. Ярус, П. Юх ; пер. с англ. – М. : Мир, 1987. – 616 с.
14. **Calvo M. L.** Optical Waveguides: From Theory to Applied Technologies 1st Edition / M. L. Calvo, V. Lakshminarayanan. – CRC Press, 2007. – 424 p.

Поступила в редакцию 20.12.2023 г.

Контакты: valentina_dav@list.ru (Давыдовская Валентина Владимировна), valnav@inbox.ru (Навныко Валерий Николаевич), linaf6399@gmail.com (Федорова Ангелина Вячеславовна), bloczkaya98@bk.ru (Блоцкая Дарья Степановна).

Davydovskaya V. V., Naunya V. N., Fedorova A. V., Blotskaya D. S.
MULTISOLITON INTERACTION AS A BASIS FOR MODERN OPTICAL DATA PROCESSING SYSTEMS

The relevance of using soliton matrix systems in photorefractive crystals in devices for optical data processing and information transmission with the possibility of increasing the number of optical information lines for parallel information processing is theoretically substantiated.

Keywords: two-dimensional super-Gaussian light beam, photorefractive crystal, soliton, interaction, focusing, soliton regime, stabilization.

УДК 635.92

ХАРАКТЕРИСТИКА ОДНОЛЕТНИХ РАСТЕНИЙ ЦВЕТНИКОВ БОТАНИЧЕСКОГО САДА, ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОМПЛЕКСНЫХ УДОБРЕНИЙ

Н. М. Глушакова

заведующий отделом садоустройства и садово-паркового строительства
Центральный ботанический сад НАН Беларуси

А. В. Сорока

кандидат биологических наук, доцент
Белорусский государственный экономический университет

Е. Д. Осипук

ведущий агроном
Центральный ботанический сад НАН Беларуси

О. Н. Лавникович

агроном 2 категории
Центральный ботанический сад НАН Беларуси

Проведена оценка морфологических параметров однолетних растений: Coleus Wizard Scarlet, Salvia farinacea, Echeveria elegans, используемых для создания цветочных композиций открытого грунта. В ходе эксперимента они подвергались воздействию удобрений Osmocote Pro и Фертика Универсал-2. Установлено, что при использовании удобрения пролонгированного действия Osmocote Pro высота растения, диаметр куста, длина и ширина листовой пластинки оказались выше по сравнению с использованием удобрения Фертика Универсал-2 и контрольным вариантом. У растения Salvia farinacea при использовании удобрения Osmocote Pro выявлено увеличение длины соцветия и количества соцветий на растении.

Ключевые слова: цветники, однолетние растения, декоративные растения, *Coleus Wizard Scarlet, Salvia farinacea, Echeveria elegans*, удобрения пролонгированного действия.

Введение

В условиях современного города, в особенности мегаполиса, требуется сохранять высокий темп жизни, соответствием которому предполагает принятие быстрых решений, работе в режиме многозадачности. Высокая интенсивность практически всех сфер жизнедеятельности приводит к истощению механизмов адаптации, при этом в условиях города не всегда возможно интегрировать объекты (парки, скверы, цветники, фонтаны и др.), которые бы позволяли человеку остановиться и восстановить силы за счет неторопливого созерцания и погружения в природную среду.

На протяжении многих лет цветник в городском пространстве выполнял только эстетическую функцию. В настоящее время он одновременно может играть и другую роль, но при этом цветник должен отвечать ряду требований. Так, среди современных тенденций озеленения городских пространств можно отметить:

безопасность, экологичность, экономичность, универсальность, использование местной флоры. При этом цветник одновременно может выполнять эстетическую, экологическую, структурообразующую, образовательную, воспитательную, развивающую и другие функции. Посредством грамотно структурированного цветника можно формировать у подрастающего поколения более сложное восприятие пространства, подключая все органы чувств.

Простой цветник, состоящий из небольшого количества видов, может дать мозгу через зрительный анализатор огромное количество информации: общее цветовое решение, нюансы, оттенки цвета различных растений, форму цветков и т. д. Обоняние передаст характеристики простых запахов и сложных цветочных ароматов, сформированных различными растениями. Орган слуха позволит «уловить» тихие звуки жужжащих насекомых и шелест листьев растений. Осязание необходимо для развития тактильной памяти. Цветник может включать съедобные растения, которые не представляют опасности для детей всех возрастов. Такие «интерактивные» цветники набирают все большую популярность в парках и садах мира.

Цветник может состоять из многолетних и однолетних растений. Каждая группа растений имеет свои преимущества и недостатки. Однолетники, или летники – это растения, дающие декоративный эффект в первый год возделывания. Они отличаются высокой декоративностью, обильным цветением. У большинства летников полный цикл развития проходит в один год – от посева (весна) до созревания семян (лето, осень) [1].

Особую группу летников составляют декоративно-лиственные растения с красивой формой и окраской листьев, а не цветков. К ним относятся колеус, цинерария, кохия, декоративная капуста и др. Эти растения по продолжительности жизни могут быть двулетними или многолетними, но возделываются в однолетней культуре [2].

Часто при создании ковровых клумб, бордюров, рабаток, в контейнерах и на балконах, в горшечной культуре используют группу суккулентных растений. За счет развитой водозапасующей паренхимы эти растения хорошо переносят пересыхание почвы, подходят для каменистого и песчаного грунта (очиток, молодило, портулак, эхеверия). Суккулентные растения всегда привлекают своей необыкновенной формой, а мясистые, наполненные влагой листья и стебли часто употребляются в пищу животными и человеком.

Однолетники являются представителями различных ботанических семейств. Эти растения очень разнообразны по морфологическому строению стеблей, листьев, соцветий и цветков. Это огромное разнообразие летников по окраске цветков и срокам цветения до поздней осени делает их незаменимыми растениями при создании любых видов цветочного оформления. Помогает в этом правильная агротехника выращивания, подбор удобрений, погодные условия и многое другое [2, 3, 4].

Актуальность работы обусловлена поиском новых эффективных удобрений, обеспечивающих полноценное культивирование однолетних декоративных растений для создания «интерактивных» цветников. Одними из перспективных комплексных удобрений на рынке Республики Беларусь являются: неорганическое удобрение пролонгированного действия Osmocote и комплексное минеральное удобрение Фертика, показавшие свою высокую эффективность в ряде исследований [5].

Целью работы являлось изучение влияния использования комплексного неорганического удобрения пролонгированного действия Osmocote Pro и комплексного минерального удобрения Фертика Универсал-2 весна-лето на морфологические параметры однолетних растений *Coleus Wizard Scarlet*, *Salvia farinacea*, *Echeveria elegans* при создании цветочных композиций открытого грунта Центрального ботанического сада НАН Беларуси.

В качестве объектов исследования были выбраны три вида однолетников, относящихся к разным декоративным группам: растение с декоративными цветками – сальвия, растение с декоративной листвой – колеус, суккулентное растение – эхеверия.

КОЛЕУС БЛЮМЕ, или КРАПИВКА (*Coleus blumei Benth.*) принадлежит к Яснотковым (Губоцветным) *Lamiaceae*. Род Колеус включает более 200 видов, распространенных в тропических областях Азии и Африки. Современная систематика растений относит данный вид к Шпороцветнику шлемниковидному (*Plectranthus scutellarioides*), однако цветоводы продолжают использовать старое название. Некоторые представители обладают высоким содержанием эфирных масел в листьях, и при растирании вегетативных частей появляется яркий аромат. В цветоводстве используются различные сорта и садовые формы колеуса Блюме, который из-за формы листьев получил народное название «крапивка». Декоративность растений обусловлена разнообразием форм и окраски листьев. Листья длиной от 3 до 30 см, с почти ровным или сильно зазубренным краем, однотонной или пестрой окраской, с каймой всех оттенков зеленого, желтого, бордового, красного, белого, коричневого цвета, со штрихами, жилками и пятнами. Высота растений – 15–40 см. В цветоводстве открытого грунта наиболее распространены сорта с различной окраской листьев, но встречаются и одноколерные сорта.

САЛЬВИЯ, или ШАЛФЕЙ (*Salvia L.*) также принадлежит семейству Яснотковые (Губоцветные) *Lamiaceae*. Название рода произошло от латинского слова *salvus* – «быть здоровым». В природе насчитывается около 1000 одно-, дву- и многолетних видов шалфеев. Многие виды шалфея с древности используются в народной медицине, а также как пряно-ароматические травы, есть виды, у которых в пищу используются свежие цветки. В декоративном цветоводстве наиболее известны: однолетние виды сальвия сверкающая (*S. splendens Sello ex Nees.*), сальвия ярко-красная (*S. coccinea L.*), сальвия мучнистая (*S. farinaseae*), сальвия хорминум (*S. horminum*) и двулетний вид сальвия серебристая (*S. argentea L.*). В декоративном цветоводстве используют множество видов, мы использовали *Salvia farinacea* (высота 60 см, цветки и соцветия сине-фиолетовые). Сроки цветения: с июня до заморозков.

ЭХЕВЕРИЯ (*Echeveria elegans*) декоративный суккулент из семейства Толстянковых *Crassulaceae*. В этот род включают около 1,5 сотен разных видов, произрастающих в областях Южной и Центральной Америки.

До появления осенних заморозков колеус и эхеверию выкапывают и размещают при температуре 16–18 °С, так как эти растения являются многолетниками и в открытом грунте они используются как однолетние культуры.

Для обеспечения высокого уровня безопасности растений, которые потенциально могут оказать физиологический эффект на человека, целесообразно использовать технологии органического производства. Современные тенденции выращивания растений связаны с сокращением использования химических пестицидов и минеральных удобрений, а также увеличением доли органического земледелия.

Вместе с тем отказ от химических удобрений может снижать показатели урожайности или декоративности растений в первые годы [6]. Повышение плодородия почв возможно за счет использования компоста, древесной золы, навоза, птичьего помета, сапропеля, природного мела, биогумуса, муки из сои, хлопка, люцерны, сухой крови животных, костной муки, муки из перьев, рогов, копыт [7].

Объекты и методы исследований

Исследования выполнялись в отделе саudoустройства и садово-паркового строительства Центрального ботанического сада НАН Беларуси. Объектом исследований являлись однолетние цветочные растения, используемые в озеленении при создании цветочных композиций открытого грунта: *Coleus Wizard Scarlet*, *Salvia farinacea* (Германия «Satimex»), *Echeveria elegans*.

Семена *Salvia farinacea* были высеяны в середине марта, *Coleus Wizard Scarlet* – в начале апреля в легкую рыхлую почву (смесь торфа, песка и перегноя). Температуру поддерживали +21...+23 °С. Сеянцы с 2–4 настоящими листочками пикировали в горшки 8,5x8,5x6,5 см высотой (*Coleus*) с последующей прищипкой на высоте 8–10 см и в горшки 9x9x10 см (*Salvia*). *Echeveria elegans* черенковали в конце марта в смесь песка и перлита с последующей пересадкой в горшки 9x9x8 см в смесь торфа и песка.

Подготовлены 3 группы по каждому виду однолетних культур, сходных по размерам растений, по 15 единиц в каждой (Рисунок 1D, 3D, 4D). Посадку в открытый грунт осуществляли после 15 мая на партере Центрального ботанического сада. Однолетники находились в равноценных условиях освещенности и ухода – полив и рыхление.

За 10 дней до посадки первой группы растений в открытый грунт использовали удобрение **Osmocote Pro** (Нидерланды) пролонгированного действия 50 г на 1 м², которое содержит (%): N – 19; P₂O₅ – 9; K₂O – 10; MgO – 2; Mn – 0,04; Cu – 0,037; Mo – 0,015; B – 0,01; Fe – 0,3; Zn – 0,011.

В качестве эталона до посадки второй группы растений использовали комплексное минеральное удобрение **Фертика Универсал-2** весна–лето (Россия) 80 г на 1 м², которое содержит (%): N – 12; P₂O₅ – 2; K₂O – 14; MgO – 2; S – 8, Ca – 0,55; Mn – 0,2; Cu – 0,1; Mo – 0,01; B – 0,1; Fe – 0,2; Zn – 0,1.

Удобрение вносили во взрыхленную землю и заделывали. В третьей группе растений **Контроль** просто рыхлили землю. Исследуемые показатели до посадки в грунт и в конце сентября перед выкопкой: высота растения, диаметр куста, длина и ширина листовая пластинка (рис. 1, 3, 4), а у *Salvia farinacea* дополнительно в конце опыта – длина соцветия и количество соцветий на растении (рис. 2). Все показатели проверяли на соответствие признака закону нормального распределения с использованием критерия Шапиро – Уилка. Достоверность дисперсионного анализа множественных сравнений оценивалась с использованием критерия Манна – Уитни.

Результаты исследований и их обсуждение

В таблице 1, 2, 3 представлены данные результатов до посадки в открытый грунт и после использования комплексного неорганического удобрения пролонгированного действия Osmocote Pro и комплексного минерального удобрения Фертика Универсал-2 весна–лето.

Таблица 1 – Сравнительный анализ биометрических показателей надземной части *Salvia farinacea* в разных условиях культуры

Показатель	Варианты опыта (M±Se)			
	До посадки в открытый грунт	Osmocote Pro	Фертика Универсал-2	Контроль
Высота растения, см	10,0±3,0	79,8±1,9*	53,3±2,4*	38,9±2,1
Диаметр куста, см	14,3±1,7	38,3±1,2*	25,9±3,4	21,3±4,1
Длина листовой пластинки, см	4,8±0,5	8,0±0,2*	7,9±0,5*	5,8±0,9
Ширина листовой пластинки, см	2,3±0,3	3,0±0,1*	3,1±0,3*	2,5±0,2

Примечание. * – достоверные изменения в сравнении с контролем

Из таблицы 1 видно, что комплексное удобрение пролонгированного действия Osmocote Pro в результате исследования оказало положительное влияние на рост и развитие надземной части культуры сальвии. Под воздействием удобрения Osmocote Pro за весь период вегетации в открытом грунте высота растений увеличилась в 8 раз, а при использовании Фертика Универсал-2 в 5 раз, в контроле – в 4 раза. Диаметр куста прибавил в 2,7 раза, тогда как при воздействии Фертика Универсал-2 в 1,8 раза, в контроле – в 1,5 раза. Длина листовой пластинки при использовании Osmocote Pro и Фертика Универсал-2 увеличилась в 1,6 раза, в контроле – в 1,2 раза. Ширина листовой пластинки возросла в 1,3 раза, в контроле – в 1,1 раза.

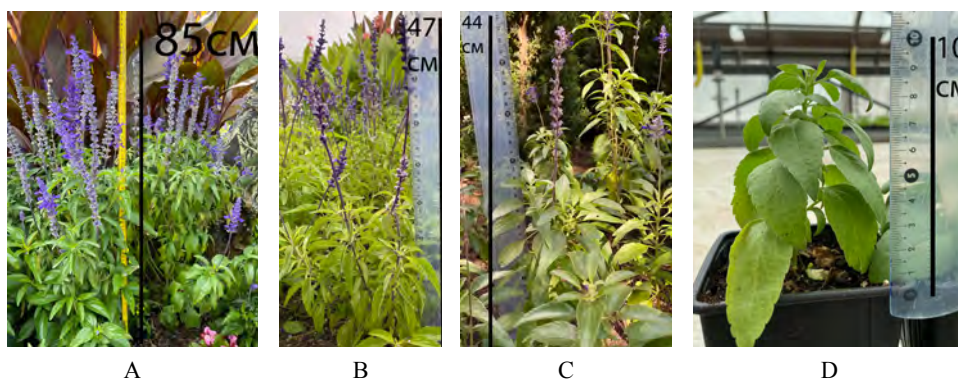


Рисунок 1 – *Salvia farinacea*, используемая в озеленении Центрального ботанического сада в разных условиях культуры: А – Osmocote Pro, В – Фертика Универсал-2, С – Контроль, D – до посадки в открытый грунт

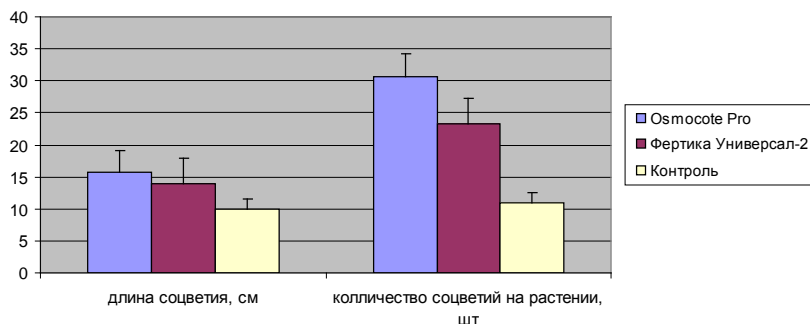


Рисунок 2 – Биометрические показатели соцветий-метелок *Salvia farinacea*

На рисунке 2 показано увеличение длины соцветия при использовании удобрений Osmocote Pro в 1,6 раза и Фертика Универсал-2 – в 1,4 раза, а увеличение количества соцветий на растении – в 2,8 и 2,1 раза соответственно по сравнению с контролем.

Таблица 2 – Сравнительный анализ биометрических показателей надземной части *Coleus Wizard Scarlet* в разных условиях культуры

Показатель	Варианты опыта (M±Se)			
	До посадки в открытый грунт	Osmocote Pro	Фертика Универсал-2	Контроль
Высота растения, см	14,9±1,1	46,3±3,1*	26,6±1,2	21,4±2,7
Диаметр куста, см	16,5±1,5	35,4±2,1*	27,1±2,4*	23,1±2,6
Длина листовой пластинки, см	6,4±0,9	12,0±0,5*	12,2±1,1*	7,6±0,8
Ширина листовой пластинки, см	4,2±1,3	7,2±0,6*	7,6±0,7	5,0±0,1

Примечание. * – достоверные изменения в сравнении с контролем

Из таблицы 2 видно, что комплексное неорганическое удобрение пролонгированного действия Osmocote Pro в результате исследования оказало положительное влияние на рост и развитие надземной части культуры *Coleus Wizard Scarlet* по сравнению с контролем и использованием Фертика Универсал-2. Под воздействием удобрения Osmocote Pro за весь период вегетации в открытом грунте высота растений увеличилась в 3,1 раза, а при использовании Фертика Универсал-2 – в 1,8 раза, без удобрений – в 1,4 раза. Диаметр куста прибавил в 2,1 раза, тогда как при воздействии Фертика Универсал-2 в 1,6 раза, в контроле – в 1,4 раза. Ширина и длина листовой пластинки увеличились почти в 2 раза в обоих вариантах, в контроле – в 1,2 раза.

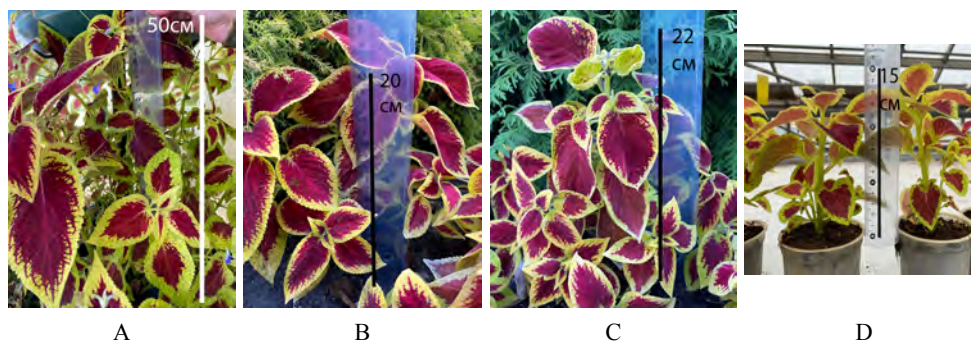


Рисунок 3 – *Coleus Wizard Scarlet*, используемый в озеленении Центрального ботанического сада в разных условиях культуры: А – Osmocote Pro, В – Фертика Универсал-2, С – Контроль, D – до посадки в открытый грунт

Из таблицы 3 видно, что удобрения пролонгированного действия Osmocote Pro и Фертика Универсал-2 в результате исследования оказали положительное влияние на рост и развитие надземной части культуры эхеверии. Под воздействием удобрений за весь период вегетации в открытом грунте высота растений и диаметр куста увеличились почти в 1,6 раза, в контроле – в 1,2 раза. Длина листовой пластинки при использовании Osmocote Pro увеличилась в 2 раза, а при применении Фертика

Универсал-2 в 1,7 раза, в контроле – в 1,1 раза. Ширина листовой пластинки возросла в 1,5 раза, без удобрений – в 1,1 раза.

Таблица 3 – Сравнительный анализ биометрических показателей надземной части *Echeveria elegans* в разных условиях культуры

Показатель	Варианты опыта (M±Se)			
	До посадки в открытый грунт	Osmocote Pro	Фертика Универсал-2	Контроль
Высота растения, см	4,8±1,2	7,6±1,4	7,4±0,8	5,3±1,4
Диаметр куста, см	5,7±0,5	9,3±1,7*	9,1±1,1*	6,6±1,0
Длина листовой пластинки, см	2,7±0,6	5,6±0,5*	4,5±0,5*	3,0±0,5
Ширина листовой пластинки, см	2,0±0,4	3,3±0,3*	2,9±0,3	2,3±0,2

Примечание. * – достоверные изменения в сравнении с контролем

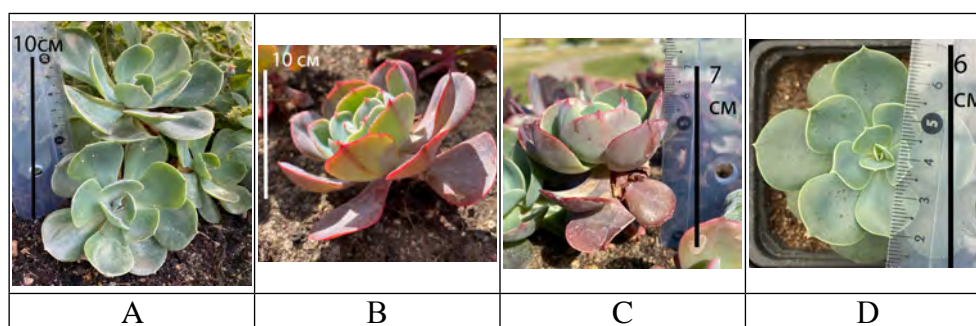


Рисунок 4 – *Echeveria elegans*, используемая в озеленении Центрального ботанического сада в разных условиях культуры: А – Osmocote Pro, В – Фертика Универсал-2, С – Контроль, D – до посадки в открытый грунт

Заключение

Проведенные испытания удобрения пролонгированного действия Osmocote Pro показали его эффективность в стимулировании биометрических показателей надземной части таких культур, как *Salvia farinacea*, *Coleus Wizard Scarlet* и *Echeveria elegans*. Возможно, оно менее эффективно в отношении таких показателей, как ширина и длина листовой пластинки. Но по всем другим показателям: высота растения, диаметр куста, а у *Salvia farinacea* – длина соцветия и количество соцветий на растении, несомненно, превосходит контроль и соизмеримо с удобрением Фертика Универсал-2.

Показатели роста и развития растений в контрольной группе показывают возможность выращивания полноценных, эстетически привлекательных однолетних цветочных растений без использования минеральных удобрений, что является важным при возможном переходе на органические технологии возделывания культур для обеспечения более высоких стандартов безопасности декоративных растений, а также следованию современным экологическим тенденциям в создании декоративного оформления городов и населенных пунктов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Contribution of edible flowers to the Mediterranean diet: Phytonutrients, bioactivity evaluation and applications / Thanina Amel Amrouche [at al] // Food Frontiers. – 2022. – Vol. 3, Issue 4. – P. 592–630.
2. **Бровкина, Т. Я.** Однолетние цветочные культуры открытого грунта: учеб. пособие / Т. Я. Бровкина, В. П. Ненашев, Т. В. Фоменко; под общ. ред. Н. Н. Нещадима. – Краснодар : Тип. КубГАУ, 2008. – 138 с.
3. **Бурганская, Т. М.** Ассортимент цветочно-декоративных растений для озеленения пришкольных территорий / Т. М. Бурганская, Н. А. Макознак, М. В. Козлова // Труды БГТУ. – Минск : БГТУ, 2014. – С. 209–212.
4. **Дуброва, О. Н.** Редкие однолетние растения / О. Н. Дуброва. – Минск : Издательский дом «Белорусская наука», 2019. – 146 с.
5. **Ладыженская, О. В.** Выращивание саженцев смородины красной (*Ribes rubrum* L.) в контейнерной технологии с использованием удобрений Osmocote и ОМУ / О. В. Ладыжанская, Т. С. Анишкина, В. А. Крючкова // АГРОЭКОИНФО – АгроЭкоИнфо. – 2021. – № 5(47). – DOI 10.51419/20215526. – EDN DYGZPZ.
6. United Nations Development Programme [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.undp.org>. – Date of access: 17.03.2023.
7. Эффективность применения удобрения «Роговая стружка» на однолетних культурах открытого грунта / Н. М. Глушакова [и др.] // Интродукция, сохранение и использование биологического разнообразия флоры : материалы международной научной конференции, посвященной 90-летию Центрального ботанического сада Национальной академии наук Беларуси (Минск, 28 июня – 1 июля 2022 г.) : в 2 ч. Ч. 1 / Нац. акад. наук Беларуси [и др.]; редкол.: В. В. Титок [и др.] – Минск : Белтаможсервис, 2022. – 526 с.

Поступила в редакцию 4.04.2023 г.

Контакты: mihno.nm@mail.ru (Глушакова Наталья Михайловна, Сорока Александра Витальевна, Осипук Елена Дмитриевна, Лавникович Оксана Николаевна).

***Glushakova N. M., Soroka A. V., Osipuk E. D., Lavnikovich O. N.* CHARACTERISTICS OF ANNUAL PLANTS OF FLOWER BEDS OF A BOTANICAL GARDEN UNDER THE INFLUENCE OF COMPLEX FERTILIZERS**

The morphological parameters of annual plants Coleus Wizard Scarlet, Salvia farinacea, Echeveria elegans used to create flower arrangements in open ground have been evaluated. In the course of the experiment, they were affected by the fertilizers Osmocote Pro and Fertika Universal-2 (Фертика Универсал-2). It has been found out that when using the fertilizer of prolonged action Osmocote Pro, the parameters of the height of the plant, the diameter of the bush, the length and width of the leaf blade are higher compared to the use of Fertika Universal-2 (Фертика Универсал-2) and the control variant. When using fertilizer Osmocote Pro, the plant Salvia farinacea shows an increase in the length of the inflorescence and the number of inflorescences per plant.

Keywords: annual plants, ornamental plants, Coleus Wizard Scarlet, Salvia farinacea, Echeveria elegans, long-acting fertilizers.

УДК 638.162, 581.461

КАЧЕСТВЕННЫЙ И ПАЛИНОЛОГИЧЕСКИЙ СОСТАВ БЕЛОРУССКОГО МЕДА

А. Г. Чернецкая

кандидат сельскохозяйственных наук, доцент,
заведующий кафедрой общей биологии и генетики
Международный государственный экологический институт
имени А. Д. Сахарова Белорусского государственного университета

Н. П. Стригельская

преподаватель кафедры общей биологии и генетики
Международный государственный экологический институт
имени А. Д. Сахарова Белорусского государственного университета

Мед – естественный продукт растительно-животного происхождения, содержащий микро- и макроэлементы, витамины и аминокислоты, которые легко усваиваются организмом и обеспечивают его энергией. В работе представлены результаты сравнительного анализа образцов меда, собранного на территории трех областей Республики Беларусь. Проведена органолептическая оценка меда и оценка на наличие примесей в исследуемых образцах меда, что указывает на качество меда, а также определен палинологический состав меда. Выделены основные медоносные, нектароносные и пергоносные растения по наличию пыльцы в образцах различных областей Республики Беларусь.

Ключевые слова: продукты пчеловодства, мед, пыльца, палинологический состав, полифлерный мед, монофлерный мед, растения-перганосы, растения-медоносы.

Введение

Мед давно вошел в рацион питания человека как продукт, обладающий ценными лечебно-профилактическими свойствами и богатым вкусом, с большим разнообразием вкусовых оттенков, связанных с его ботаническим происхождением [1].

По мнению ряда исследователей, в условиях глобализации товарных рынков, различные формы поддержки отечественного пчеловодства обязательно должны включать изучение и описание своеобразия местного меда. Для потребителя это прежде всего вкусовые отличия, во многом определенные ботаническим происхождением, так как пчелы при сборе нектара со всего многообразия медоносных растений производят своеобразную «вкусоароматическую съемку» сельскохозяйственного ландшафта, окружающего пасеку [2].

Однако у людей, склонных к аллергии на цветочную пыльцу, мед может вызывать негативную реакцию организма. Поэтому, в случае точного установления аллергии на пыльцу определенного растения, употреблять содержащий ее мед не стоит. Таким образом, натуральный мед с известным пыльцевым составом будет полезен для здоровья [3].

Мед – продукт, содержащий в себе уникальный набор витаминов, минеральных и противобактериальных веществ и веществ, поддерживающих иммунитет [4].

Дмитрий Рахматулин, заведующий лабораторией пчеловодства РУП «Институт плодоводства», считает, что единственный способ доказать поддельность меда или несоответствие названию – провести его пыльцевой анализ по ботаническому происхождению. В Европе продажи без подобного сертификата вообще запрещены. Там к качеству меда подходят строго: из 117 существующих его сортов 15 считаются основными и товарными. И на них четко прописаны стандарты, в том числе пыльцевые характеристики [5].

У нас в Беларуси есть всего лишь несколько ГОСТов на мед. Названия даются исходя из тех трав, какие преобладают вокруг пасеки, но только лабораторным путем можно определить, сколько пыльцевых зерен и каких культур в данном меде больше всего. Только если их более 40% одного вида, можно смело давать соответствующее название [6].

В зависимости от агроклиматических условий для каждого региона характерны свои типы медов. Причем часто они так ярко выражены, что позволяют точно указать место их происхождения [2; 7; 8].

Цель настоящего исследования – провести сравнительный анализ образцов меда из различных областей Республики Беларусь на качественный и палинологический состав.

В соответствии с целью были поставлены следующие задачи:

1. Провести органолептическую оценку меда и определить наличие примесей в исследуемых образцах меда из различных областей Республики Беларусь.
2. Определить палинологический состав меда из различных областей Республики Беларусь.
3. Провести анализ некоторых показателей качества белорусского меда и его палинологического состава.

Материалы и методы исследования

Исследования проведены на базе лаборатории экологической биотехнологии кафедры общей биологии и генетики МГЭИ имени А. Д. Сахарова БГУ.

Объектами исследования были шесть образцов меда из трех областей Республики Беларусь:

Образец № 1 (контроль) – Беловежская пуца, Брестская область (осенний сбор).

Образец № 2 – Червенский район, Минской области (осеннего сбора).

Образец № 3 – Червенский район, Минской области (летнего сбора).

Образец № 4 – Дрибинский район, Могилевской области (осеннего сбора).

Образец № 5 – Дрибинский район, Могилевской области (летнего сбора).

Образец № 6 – Горецкий район, Могилевской области (осенний сбор).

Органолептическая оценка образцов производилась согласно Приложению 1 «Органолептические показатели меда» Ветеринарных правил проведения ветеринарно-санитарной экспертизы меда, утвержденных постановлением Министерства сельского хозяйства и продовольствия Республики Беларусь №15 от 3 марта 2008 года, путем дегустации группой респондентов обоих полов, различных возрастных групп по пяти показателям [6; 9; 10]:

1. Цвет меда. В зависимости от красящих веществ, находящихся в нектаре, цвет меда может быть различным – от бесцветного, светло-желтого, лимонно-желтого, золотисто-желтого, темно-желтого, коричнево-зеленого до черного.

2. Аромат меда. Для удобства ранжирования образцов по степени выраженности аромата использовалась шкала баллов от 0 (отсутствие аромата) до 5 (наиболее интенсивный аромат). Также учитывалось наличие посторонних ароматических примесей.

3. Вкус меда. При дегустации определялась: сладость (от 0 до 5 баллов), сопутствующая кислотность и терпкость, наличие посторонних привкусов [10].

4. Консистенция меда. На консистенцию меда оказывает влияние концентрация сахаров и их вид. Мед, содержащий больше фруктозы, более жидкий, чем мед, в котором больше глюкозы и других высших сахаров. В исследуемых образцах консистенцию отмечали по шкале от 0 баллов (сиропообразная) до 5 баллов (плотная, каменная) [10].

5. Кристаллизация меда. Мед сохраняет жидкую консистенцию лишь определенное время, после чего кристаллизуются. Кристаллизуются глюкоза и сахароза, а фруктоза остается в жидком состоянии.

Кристаллизация меда определялась от мелкозернистой (1 балл) до крупнозернистой (5 баллов), 0 баллов в шкалу оценки не входил, так как все образцы находились в процессе кристаллизации. Также указывалось расслоение меда на два пласта.

Для проведения лабораторных исследований по определению фальсификации меда были использованы классические методики выявления примесей муки или крахмала, мела, сахарного сиропа [5; 9; 11; 12].

Для качественной оценки пыльцевого состава исследуемых образцов меда производилось приготовление микропрепаратов из меда [8]. Просмотр и анализ микропрепаратов проводили с помощью биологического микроскопа ВМ 1800 с системой визуализации TOUPCAM (увеличение X1000) после застывания глициринового желатина. Итоги наблюдений фиксировались в таблицах и на фотографиях.

Определяли палинологический состав пыльцы медоносных и перганосных видов растений исследуемых образцов, согласно Информационной системе идентификации растительных объектов на основе карпологических, палинологических и анатомических данных, созданной на базе коллекций кафедры морфологии и систематики высших растений биологического факультета МГУ и пыльцевых атласов [13; 14; 15; 16].

Далее проводили классификацию по функциональной значимости растений. Растения, с которых медоносные пчелы собирают нектар, называются медоносными, а растения, с которых пчелы собирают пыльцу, – перганосными [17].

Все медоносные и перганосные растения можно разделить на четыре группы:

1. Нектароносно-перганосные – растения, с которых пчелы берут главным образом нектар и в меньшей степени – пыльцу.

2. Растения, с которых пчелы в равной степени берут и нектар, и пыльцу.

3. Перганосно-нектароносные – растения, с которых пчелы берут главным образом пыльцу и в меньшей степени – нектар.

4. Собственно перганосные – растения, с которых пчелы собирают только пыльцу [17]. Для пчеловодства ценны все четыре группы растений.

Результаты и их обсуждение

Цвет у анализируемых образцов колебался от белого с желтоватым оттенком до насыщенного темно-янтарного (рисунок 1). Аромат и вкус у всех образцов есте-

ственный и приятный, разной степени выраженности, без посторонних запахов и привкусов. Консистенция отмечалась от вязко-жидкой до плотной. Также различная степень зернистости, так у образцов № 2 и № 6 мелкозернистая, а образца № 3 крупнозернистая.

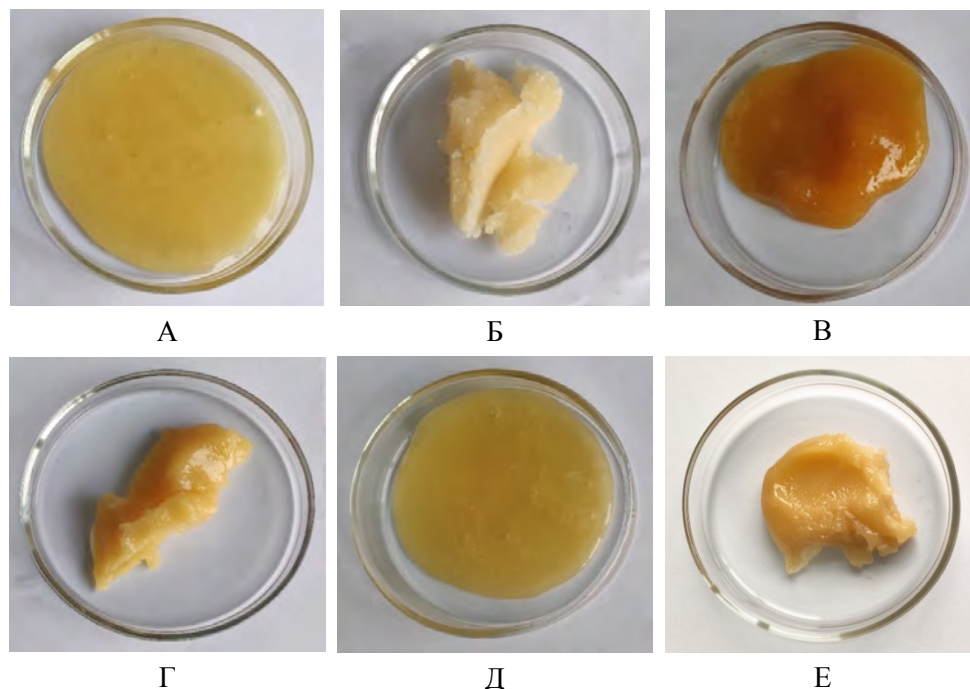


Рисунок 1 – Образцы меда из разных областей Республики Беларусь (фото автора):
 А – образец № 1 (контроль) – Беловежская пушча, Брестская область (осенний сбор),
 Б – образец № 2 – Червенский район, Минская область (осеннего сбора),
 В – образец № 3 – Червенский район, Минская область (летнего сбора),
 Г – образец № 4 – Дрибинский район, Могилевская область (осеннего сбора),
 Д – образец № 5 – Дрибинский район, Могилевская область (летнего сбора),
 Е – образец № 6 – Горецкий район, Могилевская область (осенний сбор)

Figure 1 – Samples of honey from different regions of the Republic of Belarus (photo of the author):

- А – sample № 1 (control) – Belovezhskaya Pushcha, Brest region (autumn harvest),
- Б – sample № 2 – Cherven district, Minsk region (autumn harvest),
- В – sample № 3 – Cherven district, Minsk region (summer collection),
- Г – sample № 4 – Dribinsky district, Mogilev region (autumn collection),
- Д – sample № 5 – Dribinsky district, Mogilev region (summer collection),
- Е – sample № 6 – Goretsky district, Mogilev region (autumn collection)

Во всех образцах не были обнаружены примеси крахмала и сахарного сиропа, однако, в образцах №№ 2, 3, 4, 5 приобретенных в магазине «Пчеловодство» наблюдалась реакция при взаимодействии с уксусной кислотой, что указывает на присутствие в них мела (таблица 2).

Палинологический состав исследуемых образцов меда.

Было изучено шесть образцов меда из трех областей Республики Беларусь. Образцы были собраны в период летнего и осеннего медосбора 2020 г. Все образцы полифлерные.

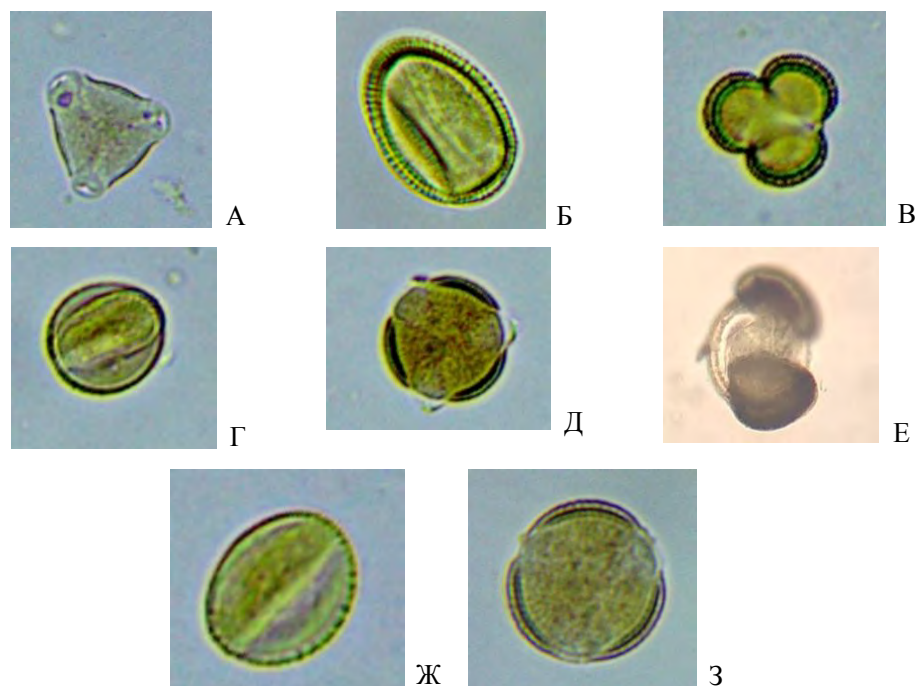


Рисунок 2 – Пыльца основных медоносных и пергаиноносных растений образца № 1 из Беловежской пушчи (д. Дмитровичи) Брестской области (фото автора):
 А – *Epilbium angustifolium* L.; Б – *Trifolium repens* L.; В – *Capsella bursa-pastoris* L.;
 Г – *Artemisia campestris* L.; Д – *Betula pendula* Roth.; Е – *Pinus sylvestris* L.;
 Ж – *Acer platanoides* L.; З – *Tilia cordata* Mill

Figure 2 – Pollen of the main melliferous and perganiferous plants of sample № 1 from Belovezhskaya Pushcha (v. Dmitrovichi), Brest region (photo of the author):
 А – *Epilbium angustifolium* L.; Б – *Trifolium repens* L.; В – *Capsella bursa-pastoris* L.;
 Г – *Artemisia campestris* L.; Д – *Betula pendula* Roth.; Е – *Pinus sylvestris* L.;
 Ж – *Acer platanoides* L.; З – *Tilia cordata* Mill

Таблица 1 – Органолептическая оценка меда из различных областей Республики Беларусь (2022 г.)

Название показателя	Образцы меда					
	Образец № 1 (контроль) Беловежская пушча, Брестская область	Образец № 2 Червенский район, Минской области (осеннего сбора)	Образец № 3 Червенский район, Минской области (весеннего сбора)	Образец № 4 Дрибинский район, Могилевской области (осеннего сбора)	Образец № 5 Дрибинский район, Могилевской области (весеннего сбора)	Образец № 6 Горецкий район, Могилевской области
Цвет	Светло-янтарный	Светло-янтарный	Белый с желтоватым оттенком	Насыщенно-янтарный	Песочно-янтарный	Светло-янтарный
Аромат	3 балла Средний, естественный с различимым запахом воска, без постороннего запаха	5 баллов Хорошо выраженный, естественный, без постороннего запаха	1 балл Слабый, естественный, без постороннего запаха	4 балла Средне-сильный, естественный с различимым ароматом акации, без постороннего запаха	2 балла Средне-слабый, естественный, без постороннего запаха	2 балла Средне-слабый, естественный, без постороннего запаха

Окончание таблицы 1

Название показателя	Образцы меда					
	Образец № 1 (контроль) Беловежская пуца, Брестская область	Образец № 2 Червенский район, Минской области (осеннего сбора)	Образец № 3 Червенский район, Минской области (весеннего сбора)	Образец № 4 Дрибинский район, Могилевской области (осеннего сбора)	Образец № 5 Дрибинский район, Могилевской области (весеннего сбора)	Образец № 6 Горецкий район, Могилевской области
Вкус	5 баллов Приятный, с легкой кислинкой и островатым послевкусием, без посторонних привкусов	5 баллов Приятный, легкая кислотность, без посторонних привкусов	3 балла Приятный, без посторонних привкусов	4 балла Приятный, с легкой кислинкой и терпким послевкусием, без посторонних привкусов	5 баллов Приятный, легкая терпкость, без посторонних привкусов	4 балла Приятный, легкая горчинка, с привкусом молочной карамели, без посторонних привкусов
Консистенция	3 балла Вязкая	1 балл Вязко-жидкая	5 баллов Плотная	3 балла Вязкая	4 балла Вязко-плотная	1 балл Вязко-жидкая
Кристаллизация	3 балла Среднезернистая	1 балл мелкозернистая	4 балла крупнозернистая	3 балла Среднезернистая	2 балла Мелко-среднезернистая	1 балл мелкозернистая

Таблица 2 – Наличие примесей в исследуемых образцах меда из различных областей Республики Беларусь (2022 г.)

Название показателя	Образцы меда					
	Образец № 1 (контроль) Беловежская пуца, Брестская область	Образец № 2 Червенский район, Минской области (осеннего сбора)	Образец № 3 Червенский район, Минской области (летнего сбора)	Образец № 4 Дрибинский район, Могилевской области (осеннего сбора)	Образец № 5 Дрибинский район, Могилевской области (летнего сбора)	Образец № 6 Горецкий район, Могилевской области
Наличие крахмала	Не обнаружены	Не обнаружены	Не обнаружены	Не обнаружены	Не обнаружены	Не обнаружены
Наличие мела	Не обнаружены	5 баллов Интенсивная реакция	3 балла	1 балл	4 балла	Не обнаружены
Наличие сахарного сиропа	Не обнаружены	Не обнаружены	Не обнаружены	Не обнаружены	Не обнаружены	Не обнаружены

В образце № 1 из Беловежской пуци (д. Дмитровичи) Брестской области, который являлся контрольным, так как был собран с частной пасеки, была обнаружена в основном пыльца 8 видов растений: Кипрей узколистный (*Epilbium angustifolium* L.), Клевер ползучий или клевер белый (*Trifolium repens* L.), Пастушья сумка обыкновенная (*Capsella bursa-pastoris* L.), Полынь полевая (*Artemisia campestris* L.), Береза повислая (*Betula pendula* Roth.), Сосна обыкновенная (*Pinus sylvestris* L.), Клен остролистный или клен платановидный (*Acer platanoides* L.), Липа сердцевидная или липа мелколистная (*Tilia cordata* Mill.) (рисунок 2). Из них хорошими медоносами являются 4 вида растений – Кипрей узколистный (*E. angustifolium* L.) (продуктивность – 350 кг/га), Клевер ползучий или клевер белый (*T. repens* L.) (100 кг/га), Клен платановидный (*A. platanoides* L.) (200 кг/га), Липа мелколистная (*T. cordata* Mill.) (500 кг/га); не основной медонос – Пастушья сумка обыкновенная (*C. bursa-pastoris* L.); 3 вида пыльценосных растений – По-

лынь полевая (*A. campestris* L.), Береза повислая (*B. pendula* Roth.), Сосна обыкновенная (*P. sylvestris* L.).

Наиболее часто встречаемая была пыльца следующих растений: *Epilbium angustifolium* L., *Trifolium repens* L.

Пыльца *Epilbium angustifolium* L., *Trifolium repens* L., *Capsella bursa-pastoris* L., *Artemisia campestris* L., *Betula pendula* Roth., *Pinus sylvestris* L., *Acer platanoides* L., *Tilia cordata* Mill распространяется в виде монад.

Мед полифлерный. Район сбора богат медоносными растениями.

Образец меда № 2 осеннего сбора, приобретенный в магазине «БелМед», был получен промышленным путем на территории Червенского района Минской области, в основной массе содержал пыльцу 4 видов растений: Кипрей узколистный (*Epilbium angustifolium* L.), Тысячелистник обыкновенный (*Achillea millefolium* L.), Клевер ползучий или клевер белый (*Trifolium repens* L.), Клевер луговой или клевер красный (*Trifolium pratense* L.) (рисунок 3, на рисунке показаны пыльца растений, не упомянутых ранее).

Единицей распространения обнаруженных в образце пыльцевых зерен являются монады. Наиболее часто встречаемая была пыльца следующих растений: *Achillea millefolium* L., *Trifolium repens* L. Тысячелистник обыкновенный (*A. millefolium* L.) летне-осенний медонос, цветки тысячелистника выделяют нектар, много пыльцы.

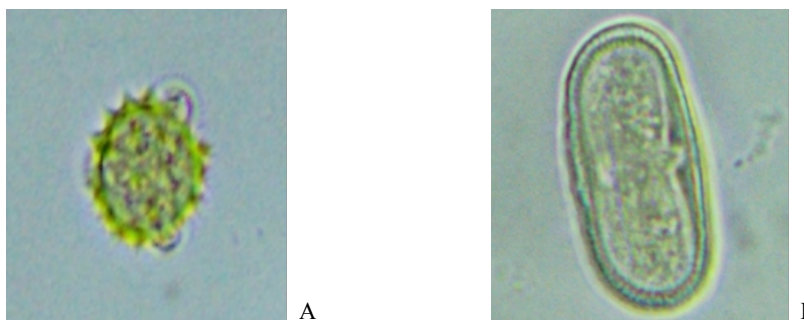


Рисунок 3 – Пыльца основных медоносных и перганосных растений образца № 2 (Червенский район Минской области, осенний сбор меда) (фото автора):
А – *Achillea millefolium* L.; Б – *Trifolium pratense* L.

Figure 3 – Pollen of the main melliferous and perganiferous plants of sample № 2 (Cherven district, Minsk region, autumn honey collection) (photo of the author):
А – *Achillea millefolium* L.; Б – *Trifolium pratense* L.

В третьем образце также собранном на территории Червенского района Минской области, летнего сбора, была обнаружена в основном пыльца 10 видов растений: Кипрей узколистный (*Epilbium angustifolium* L.), Клевер ползучий или клевер белый (*Trifolium repens* L.), Клевер луговой или клевер красный (*Trifolium pratense* L.), Полынь однолетняя (*Artemisia annua* L.), Люцерна посевная (*Medicago sativa* L.), Ветреница дубравная (*Anemone nemorosa* L.), Сон-трава или прострел раскрытый (*Anemone patens* L.), Лютик ползучий (*Ranunculus repens* L.), Чистотел большой (*Chelidonium majus* L.), Полынь обыкновенная (*Artemisia vulgaris* L.) (рисунок 4, на рисунке показана пыльца растений, не упомянутых ранее).

Наиболее часто встречаемая была пыльца следующих растений: *Epilbium angustifolium* L., *Trifolium repens* L., которые являются прекрасными медоносами.

Менше пыльцы на данной тэрыторыі хорошага медоноса Люцэрны посевной (*M. sativa* L.) і рэда нектараносав і слабых медоносаў – Чистотела большага (*C. majus* L.), Полыні обыкновенной (*A. vulgaris* L.), а такжа раннецветушых раслін – Ветреницы дубравной (*A. nemorosa* L.), Прострела раскрытага (*A. patens* L.), Лютика ползучага (*R. repens* L.).

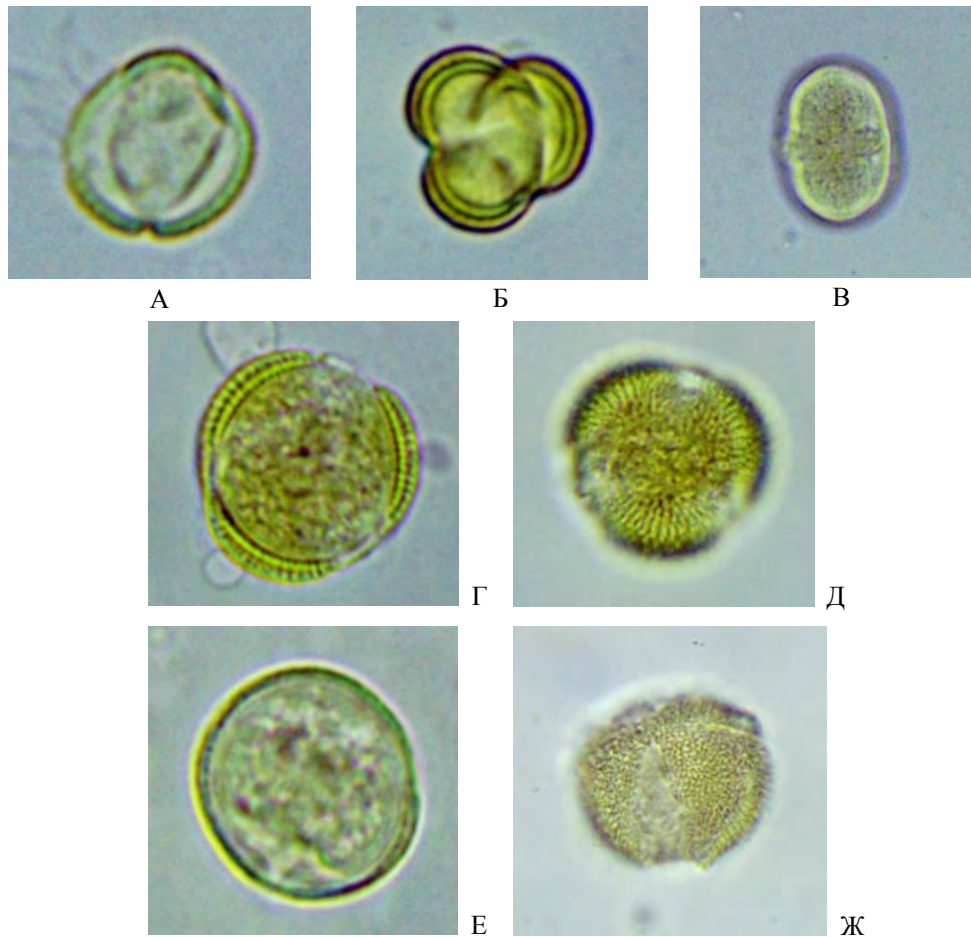


Рисунок 4 – Пыльца основных медоносных и пергааносных растений образца № 3 (Червенский район Минской области, весенний сбор меда) (фото автора):
 А – *Artemisia annua* L.; Б – *Artemisia vulgaris* L.; В – *Medicago sativa* L.; Г – *Anemone nemorosa* L.; Д – *Anemone patens* L.; Е – *Ranunculus repens* L.; Ж – *Chelidonium majus* L.

Figure 4 – Pollen of the main melliferous and perganiferous plants of sample № 3 (Cherven district, Minsk region, spring honey collection) (photo of the author):
 А – *Artemisia annua* L.; Б – *Artemisia vulgaris* L.; В – *Medicago sativa* L.; Г – *Anemone nemorosa* L.; Д – *Anemone patens* L.; Е – *Ranunculus repens* L.; Ж – *Chelidonium majus* L.

Образец меда № 4 осеннего сбора, приобретенный в магазине, также был получен промышленным путем на территории Дрибинского района Могилевской области, в основной массе содержал пыльцу 4 видов растений: Клевер ползучий или клевер белый (*Trifolium repens* L.), Люцерна посевная (*Medicago sativa* L.), Василек синий или василек посевной (*Centaurea cyanus* L.), Акация белая или робиния

лжеакация (*Robinia pseudoacacia* L.) (рисунок 5, на рисунке показаны пыльца растений, не упомянутых ранее).

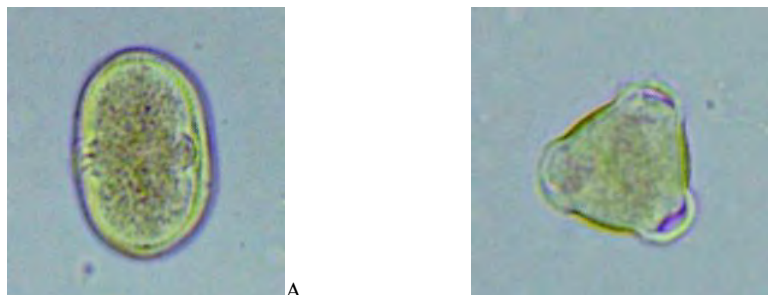


Рисунок 5 – Пыльца основных медоносных и пергааносных растений образца № 4 (Дрибинский район Могилевской области, осенний сбор меда) (фото автора):
А – *Centaurea cyanus* L.; Б – *Robinia pseudoacacia* L.

Figure 5 – Pollen of the main melliferous and perganiferous plants of sample № 4 (Dribinsky district of Mogilev region, autumn honey collection) (photo of the author):
А – *Centaurea cyanus* L.; Б – *Robinia pseudoacacia* L.

Наиболее часто встречаемая была пыльца следующих растений: *Robinia pseudoacacia* L., *Trifolium repens* L., *Medicago sativa* L. Их средняя медопродуктивность соответственно – 100–300 кг/га, 100 кг/га, 200–300 кг/га.

Образец меда № 5 летнего сбора, приобретенный в магазине «БелМед», был получен промышленным путем на территории Дрибинского района Могилевской области, в основной массе содержал пыльцу 10 видов растений: Кипрей узколистый (*Epilbium angustifolium* L.), Люцерна посевная (*Medicago sativa* L.), Полынь обыкновенная (*Artemisia vulgaris* L.), Пастушья сумка обыкновенная (*Capsella bursa-pastoris* L.), Тысячелистник обыкновенный (*Achillea millefolium* L.), Клевер ползучий или клевер белый (*Trifolium repens* L.), Клевер луговой или клевер красный (*Trifolium pratense* L.), Рапс или кольза (*Brassica napus* L.), Горошек мышиный (*Vicia cracca* L.), Герань луговая или журавельник луговой (*Geranium pratense* L.) (рисунок 6, на рисунке показаны пыльца растений, не упомянутых ранее).



Рисунок 6 – Пыльца основных медоносных и пергааносных растений образца № 5 (Дрибинский район Могилевской области, весенний сбор меда) (фото автора):
А – *Brassica napus* L.; Б – *Vicia cracca* L.; В – *Geranium pratense* L.

Figure 6 – Pollen of the main melliferous and perganiferous plants of sample № 5 (Dribinsky district of Mogilev region, spring honey collection) (photo of the author):
А – *Brassica napus* L.; Б – *Vicia cracca* L.; В – *Geranium pratense* L.

Наиболее часто встречаемая была пыльца *Brassica napus* L., *Geranium pratense* L., которые являются посредственными медоносами, и пыльца хорошего медоноса *Trifolium repens* L. Рапсовый мед непригоден для зимовки пчел, широкое распространение этой сельскохозяйственной культуры за последние годы приводит к массовой гибели диких и культурных пчел.

В образце меда № 6 осеннего сбора из Горецкого района Могилевской области с частной пасеки, была обнаружена в основном пыльца 7 видов растений: Береза повислая (*Betula pendula* Roth.), Клевер луговой или клевер красный (*Trifolium pratense* L.), Полынь обыкновенная (*Artemisia vulgaris* L.), Герань луговая или журавельник луговой (*Geranium pratense* L.), Чистотел большой (*Chelidonium majus* L.), Синяк пятнистый или румянка (*Echium maculatum* L.), Одуванчик лекарственный (*Taraxacum officinale* L.) (рисунок 7, на рисунке показаны пыльца растений, не упомянутых ранее).

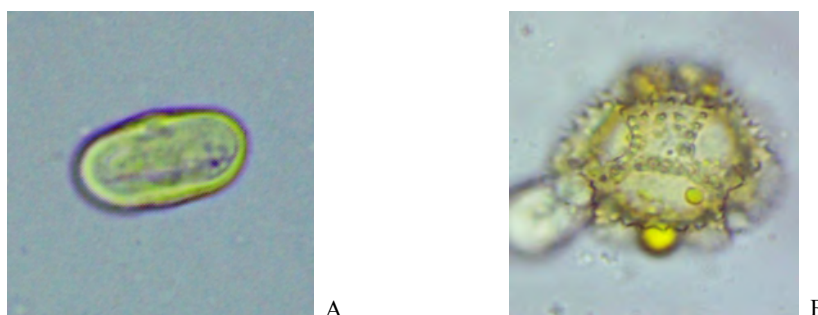


Рисунок 7 – Пыльца основных медоносных и перганосных растений образца № 6 (Горецкий район Могилевской области, осенний сбор меда) (фото автора):
А – *Echium maculatum* L.; Б – *Taraxacum officinale* L.

Figure 7 – Pollen of the main melliferous and perganiferous plants of sample № 6 (Gorky district of Mogilev region, autumn honey collection) (photo of the author):
А – *Echium maculatum* L.; Б – *Taraxacum officinale* L.

Наиболее часто встречаемая была пыльца следующих растений: *Taraxacum officinale* L., который является хорошим пыльценосом, но не дает много меда, *Geranium pratense* L. – посредственный медонос, и *Echium maculatum* L. – ценный летний медонос, рекомендуется для высевания на припасечных участках. Медопродуктивность последнего 300–400 кг/га.

Наиболее часто в образцах белорусского меда встречалась пыльца трех видов растений-медоносов: Кипрей узколистный (*E. angustifolium* L.), Клевер ползучий или клевер белый (*T. repens* L.), Люцерна посевная (*M. sativa* L.), что указывает на необходимость увеличения количества и видового состава хороших медоносов (таблица 3). Повышение эффективности возделывания энтомофильных сельскохозяйственных культур и насаждений важная задача для успешного развития пчеловодства, которому необходима прочная медоносная база.

Таблица 3 – Палинологический состав меда из различных областей Республики Беларусь

	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6
Акация белая или робиния лжеакация (<i>Robinia pseudoacacia L.</i>)				+		
Береза повислая (<i>Betula pendula Roth.</i>)	+					+
Василек синий или василек посевной (<i>Centaurea cyanus L.</i>)				+		
Ветреница дубравная (<i>Anemone nemorosa L.</i>)			+			
Герань луговая или журавельник луговой (<i>Geranium pratense L.</i>)					+	+
Горошек мышиный (<i>Vicia cracca L.</i>)					+	
Кипрей узколистый (<i>Epilbium angustifolium L.</i>)	+	+	+		+	
Клевер луговой или клевер красный (<i>Trifolium pratense L.</i>)		+	+		+	+
Клевер ползучий или клевер белый (<i>Trifolium repens L.</i>)	+	+	+	+	+	
Клен остролистный или клен платановидный (<i>Acer platanoides L.</i>)	+					
Липа сердцевидная или липа мелколистная (<i>Tilia cordata Mill.</i>)	+					
Лютик ползучий (<i>Ranunculus repens L.</i>)			+			
Люцерна посевная (<i>Medicago sativa L.</i>)			+	+	+	
Одуванчик лекарственный (<i>Taraxacum officinale L.</i>)						+
Пастушья сумка обыкновенная (<i>Capsella bursa-pastoris L.</i>)	+				+	
Полынь обыкновенная (<i>Artemisia vulgaris L.</i>)			+		+	+
Полынь однолетняя (<i>Artemisia annua L.</i>)			+			
Полынь полевая (<i>Artemisia campestris L.</i>)	+					
Рапс или кольза (<i>Brassica napus L.</i>)					+	
Синяк пятнистый или румянка (<i>Echium maculatum L.</i>)						+
Сон-трава или прострел раскрытый (<i>Anemone patens L.</i>)			+			
Сосна обыкновенная (<i>Pinus sylvestris L.</i>)	+					
Тысячелистник обыкновенный (<i>Achillea millefolium L.</i>)		+			+	
Чистотел большой (<i>Chelidonium majus L.</i>)			+			+

Заключение

Все исследуемые образцы меда разного ботанического происхождения, полученные на территории разных областей Республики Беларусь, отвечали требованиям ГОСТ 19792-2017 «Мед натуральный».

Анализ органолептических параметров и палинологический анализ показал, что все исследуемые меда соответствуют Ветеринарным правилам проведения ветеринарно-санитарной экспертизы меда от 3 марта 2008 г. № 15 (об утверждении ветеринарных правил проведения ветеринарно-санитарной экспертизы – в ред. постановления Минсельхозпрода от 03.11.2010 №70 и ГОСТ 31769-2012 «Мед. Метод определения частоты встречаемости пыльцевых зерен»).

Лабораторные исследования по определению фальсификации меда на выявление примесей показали в образцах №№ 2, 3, 4, 5, приобретенных в магазине «Пчеловодство», присутствие в них мела, что снижает качество продукта.

Палинологическое изучение медов показало, что пчелы одновременно работают на многих медоносах, основными являются от 3 до 10 видов – во всех образцах мед полифлерный. Районы сбора богаты медоносными растениями.

Основными медоносами по результатам палинологических исследований на территории Республики Беларусь являются растения трех видов: Кипрей узколистый (*E. angustifolium L.*), Клевер ползучий или клевер белый (*T. repens L.*), Люцерна посевная (*M. sativa L.*), что указывает на необходимость увеличения количества и видового состава хороших медоносов.

Повышение эффективности возделывания энтомофильных сельскохозяйственных культур и насаждений важная задача для успешного развития пчеловодства, которому необходима прочная медоносная база.

Рекомендуется для высевания на припасечных участках *Echium maculatum L.*, *Trifolium repens L.*, *Medicago sativa L.*, которые являются одними из лучших медоносов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Базарбаев, С. Б.** Контроль безопасности меда и продуктов пчеловодства в Российской Федерации / С. Б. Базарбаев, В. И. Белоусов // Состояние и перспективы развития среднерусской породы пчел : материалы Всероссийской научно-практической конференции. – 2018. – С. 62–64.
2. **Балашова, Е. Ю.** Охрана географического происхождения меда в Евросоюзе и в России / Е. Ю. Балашова, А. С. Фармазян // Пчеловодство. – 2010. – № 7. – С. 46–48.
3. **Бурмистров, А. Н.** Медоносные растения и их пыльца / А. Н. Бурмистров, В. А. Никитина. – М. : Росагропромиздат, 1990. – 134 с.
4. **Желвакова, И.** Значение меда и перги как биоиндикаторов загрязненности окружающей среды тяжелыми металлами в регионах с различным уровнем антропогенного воздействия. (Болгария) / И. Желвакова // Экологическая безопасность в АПК. Реферативный журнал. – 2014. – № 2. – С. 500.
5. **Балашова, Е. Ю.** Фальсификаты на российском рынке меда / Е. Ю. Балашова [и др.] // Пчеловодство. – 2013. – № 4. – С. 37–39.
6. Ветеринарные правила проведения ветеринарно-санитарной экспертизы меда Постановление Министерства сельского хозяйства и продовольствия Республики Беларусь от 3 марта 2008 г. № 15 «Об утверждении ветеринарных правил проведения ветеринарно-санитарной экспертизы (в ред. постановления Минсельхозпрода от 03.11.2010 № 70)» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://mshp.gov.by/documents/technical-acts/c4b5b9ca7c912ec7.html>. – Дата доступа: 08.09.2021.
7. **Бурмистрова, Л. А.** Мед из рапса: состав и свойства / Л. А. Бурмистрова [и др.] // Сборник научно-исследовательских работ по пчеловодству и апитерапии. – 2017. – С. 53–55.
8. Информационная система идентификации растительных объектов на основе карпологических, палинологических и анатомических данных [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://botany-collection.bio.msu.ru/pollen-speciment/index>. – Дата доступа: 08.09.2021.
9. Как проверить подлинность меда [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.sb.by/articles/med-pyltsoyu-ne-isportit.html>. – Дата доступа: 28.10.2021.
10. **Кашковский, В. Г.** Мед и его оценка качества: методическое пособие для пчеловодов, исследовательских лабораторий и дегустационных комиссий по медам / В. Г. Кашковский, Г. П. Чекрыга, А. А. Плахова. – Новосибирск, 2012. – 32 с.
11. **Бурмистрова, Л. А.** Зольность – показатель уникального состава продуктов пчеловодства / Л. А. Бурмистрова [и др.] // Пчеловодство. – 2016. – № 5. – С. 37–39.
12. Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. «ГОСТ 31769-2012. Межгосударственный стандарт. Мед» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://docs.cntd.ru/document/1200100244>. – Дата доступа: 28.10.2021.
13. **Карпович, И. В.** Атлас пыльцевых зерен / И. В. Карпович [и др.]. – Екатеринбург : Уральский рабочий, 2015. – 295 с.
14. **Курманов, Р. Г.** Пыльцевой атлас / Р. Г. Курманов, А. Р. Ишбирдин. – Уфа : Гилем, 2013. – 304 с.
15. **Халько, А. Н.** Методика определения пыльцы в меде / А. Н. Халько // Пчеловодство. – 2014. – № 5. – С. 28.
16. **Курманов, Р. Г.** Интерпретация результатов пыльцевого анализа меда / Р. Г. Курманов, А. Р. Ишбирдин // Пчеловодство. – 2014. – № 6. – С. 54–56.

17. Еникеева, А. Р. Палинологический состав и физико-химические свойства липового меда / А. Р. Еникеева // Биомика. – 2016. – Т. 8, № 2. – С. 88–90.

Поступила в редакцию 13.12.2023 г.

Контакты: chealval@gmail.com (Чернецкая Алла Георгиевна), nadya.strigelskaya@mail.ru (Стригельская Надежда Павловна).

Chernetskaya A. G., Strigelskaya N. P. QUALITATIVE AND PALYNOLOGICAL COMPOSITION OF BELARUSIAN HONEY

Honey is a natural product of plant and animal origin, containing micro- and macroelements, vitamins and amino acids which are easily absorbed by the body and provide it with energy. The paper presents the results of a comparative analysis of honey samples collected on the territory of three regions of the Republic of Belarus. The organoleptic evaluation of honey and the assessment for the presence of impurities in the studied samples of honey have been carried out to reveal the quality of honey, the palynological composition of honey has also been determined. The main melliferous, nectar-bearing and perganiferous plants have been identified by the presence of pollen in samples from various regions of the Republic of Belarus.

Keywords: bee products, honey, pollen, palynological composition, polyfloral honey, monofloral honey, perganiferous plants, honey plants.

УДК 616-092+612.111+616.152.11+612.57

МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЭРИТРОЦИТОВ ПРИ ИНКУБАЦИИ КРОВИ В УСЛОВИЯХ ФИЗИОЛОГИЧЕСКОЙ И ПОВЫШЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

А. Н. Осипенко

старший преподаватель кафедры естествознания
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Д. Ю. Пабоко

студент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. В. Пикаревич

студент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

А. А. Казанкова

студент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Е. С. Тимофеюк

заведующая лабораторией
Могилевский областной диспансер спортивной медицины

В работе представлены экспериментальные данные об изменении морфологии эритроцитов образцов крови, подвергавшихся инкубации при температуре 37 °С и 42 °С. Инкубация крови при физиологической температуре тела привела к уменьшению диаметра эритроцитов, в то время как инкубация при повышенной температуре сопровождалась увеличением среднего диаметра эритроцитов. При этом инкубация цельной крови и при одном и при другом температурном режиме привела к увеличению количества эритроцитов с многочисленными выступами мембраны.

Ключевые слова: кровь, эритроциты, ацидоз, гипертермия, окислительный стресс.

Введение

Изменения морфологии эритроцитов оказывают заметное влияние на реологические и газотранспортные свойства этих клеток, а также на продолжительность их нахождения в кровотоке. Причиной изменения морфологических характеристик эритроцитов может являться ацидоз, который относится к числу наиболее частых нарушений гомеостаза и возникает при широком круге различных заболеваний (ишемическая болезнь сердца, тяжелые состояния, дыхательная недостаточность, нарушение функций почек, сахарный диабет и многих других). Ацидоз является распространенным следствием тканевой гипоксии, при которой снижение рН крови вызвано, главным образом, повышенным образованием и пониженным

окислением лактата. Сдвиг рН за счет гликолитического образования лактата происходит также при хранении цельной крови. При этом в обоих случаях отмечается потеря эластичности эритроцитарными мембранами и снижение деформируемости эритроцитов. Подобные изменения могут негативно сказываться на процессах микроциркуляции и повышают риск тромбообразования [1–6]. Вместе с тем влияние ацидоза на морфофункциональное состояние эритроцитов остается недостаточно изученным. В научной литературе встречаются в основном разрозненные и зачастую противоречивые данные о влиянии пониженных значений рН крови на размер и форму эритроцитов [7–10].

Значительное количество патологических состояний также связано с формированием гипертермии, развитие которой обусловлено действием высокой внешней температуры, а также избыточным теплообразованием и / или недостаточной теплоотдачей в организме, что, в частности, наблюдается при развитии лихорадки. Согласно литературным данным [11, 12] действие повышенной температуры вызывает изменение свойств эритроцитарных мембран и ухудшение реологических свойств эритроцитов. В этой связи изучение влияния повышенной температуры на морфологические свойства эритроцитов также представляется важным. Кроме того, данные, касающиеся вопроса изменения морфологии эритроцитов, при действии на эти клетки повышенной температуры также носят отрывочный характер.

Результаты анализа эритроцитов в крови пациентов с теми или иными патологическими состояниями зачастую дают противоречивые результаты. В частности, это связано с тем, что при различных патологиях на эритроцит действуют несколько патогенетических факторов. От того, какой фактор будет иметь первостепенное значение, зависит то, каким морфофункциональным и структурным изменениям будет подвергаться эритроцит. Поэтому, для того чтобы выявить влияние конкретного патогенетического фактора на клетки крови, ее изолированно от организма подвергают тому или иному воздействию.

Целью данной работы было установление характера влияния пониженных значений рН плазмы крови на морфологию эритроцитов, а также выявление морфологических изменений эритроцитов, подвергшихся действию повышенной температуры. Для достижения поставленной цели анализировались изменения морфологии эритроцитов после их инкубации при физиологической и повышенной температуре.

Основная часть

Методы и материалы. Эксперимент заключался в исследовании действия ацидоза и температуры выше физиологической на эритроциты изолированных образцов крови. Для этого на базе Учреждения здравоохранения «Могилевский областной диспансер спортивной медицины» были взяты образцы цельной крови здоровых мужчин в возрасте 18 лет. Кровь забиралась из локтевой вены утром натощак. Пробы крови отбирали в пластиковые пробирки с притертой крышкой. Для предотвращения свертывания крови в пробирки добавлялся антикоагулянт. В качестве антикоагулянта использовали гепарин с активностью 10 единиц на 1 см³ крови. Дальнейшее исследование проводилось на базе Центральной учебно-исследовательской лаборатории Учреждения образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова».

Образцы цельной крови четырех здоровых доноров в двойной повторности (n=8) подвергались инкубации в термостате при температуре 37 °С в течение 3 и 6

часов с целью развития в крови метаболического ацидоза. Для этого изолированные образцы цельной крови помещались в находившийся в термостате химический стакан с водой, температура которой контролировалась при помощи ртутного термометра. Показатель рН крови, не подвергавшейся и подвергавшейся инкубации, определялся при помощи рН-метра «рН-150М» (Гомельский ЗИП, Беларусь) с универсальным измерительным электродом.

Для оценки влияния повышенной температуры на эритроциты изолированные образцы цельной крови четырех здоровых доноров в двойной повторности ($n = 8$) подвергались инкубации при температуре 42 °С в течение 3 часов. В обоих экспериментах в одном из параллельных опытов производилось фиксация этанолом и окрашивание эритроцитов по Романовскому, а в другом – анализировались неокрашенные эритроциты.

Кроме этого, для оценки влияния действия активных форм кислорода на морфологию эритроцитов три образца цельной крови с различным содержанием перекиси водорода (0,2 мг; 0,4 мг и 2 мг H_2O_2 в 1 cm^3 крови) в двойной повторности подвергались инкубации в течение 3 часов при температуре 37 °С.

Далее проводилось сравнение эритроцитов из образцов крови, не подвергавшихся инкубации, и эритроцитов из соответствующих образцов крови, содержащихся в инкубационной среде. В частности, измерялся и сравнивался средний диаметр эритроцитов, характеризовалась форма красных клеток крови, а также интенсивность окраски эритроцитов. Для этого готовились препараты мазков крови. После чего красные клетки крови подвергались анализу с помощью метода световой микроскопии. Для исследования эритроцитов в мазках крови использовался микроскоп Axio Imager A1 (Carl Zeiss, Германия), оснащенный окуляром Plan-Neofluar 100x1.3 Oil (Carl Zeiss, Германия) и предназначенный для микроскопирования в светлом поле. Фотографии содержащих эритроциты микропрепаратов крови получали с помощью видеокамеры «AxioCam MrC5» (Carl Zeiss, Германия), которой был оснащен микроскоп. Подсчет размеров эритроцитов производился при помощи поставляемого с микроскопом программного обеспечения «AxioVs40 V 4.5.0.0» (Carl Zeiss, Германия). В мазке крови, содержавшем монослой эритроцитов, анализировались краевые эритроциты, которые не подвергались деформирующему воздействию со стороны соседних клеток. Толстые мазки не использовались, так как в них морфология клеток была плохо различима.

В случае инкубации при 37 °С в каждом анализируемом образце крови при каждой повторности измерялся диаметр 100 эритроцитов. В случае инкубации при 42 °С в каждом анализируемом образце крови при каждой повторности измерялся диаметр 50 эритроцитов. Также определялся процент клеток с измененной формой.

Полученные значения представлены с использованием медианы (Me) и интерквартильного размаха в формате Me [LQ;UQ], где LQ – нижний квартиль, UQ – верхний квартиль медианы, а также в виде средних значений и значений величины доверительного интервала. Оценка значимости различий между двумя связанными выборками проводилась с использованием критерия Уилкоксона. Различия считались достоверными при $p < 0,05$ [13].

Результаты и их обсуждения. Во всех образцах крови, подвергнувшихся инкубации при температуре 37 °С в течение 3 часов, отмечалось снижение среднего диаметра эритроцитов. Если до инкубации средний диаметр эритроцитов состав-

лял 7,32 [7,31; 7,43] мкм, то после инкубации он составил 7,13 [7,11; 7,17] мкм ($p < 0,05$). Инкубация в течение 6 часов при физиологической температуре привела еще большему снижению среднего диаметра эритроцитов до 6,79 [6,68; 6,83] мкм ($p < 0,05$). При этом значение рН плазмы крови в инкубируемых образцах крови снизилось с 7,37 [7,37; 7,38] до 7,32 [7,31; 7,33] после трех часов инкубации, а через 6 часов составило 7,22 [7,16; 7,24]. Таким образом, параллельно нарастанию ацидоза в крови отмечалось уменьшение среднего диаметра эритроцитов.

По полученным ранее данным [14], инкубация образцов цельной крови при температуре 37 °С сопровождается снижением количества доли жирных кислот в общей сумме жирных кислот и жирных альдегидов. Данное сокращение, учитывая, что эритроциты не способны к синтезу липидов, а также очень ограничено обмениваются липидами с липопротеинами крови, является следствием усиления воздействия кальцийзависимых фосфолипаз на липидный бислой мембран эритроцитов. При этом повышается гидролиз мембранных диацилглицерофосфолипидов. Установлено, что рост фосфолиполиза отмечается на фоне ишемии тканей и сопутствующем ацидозе [15, 16]. Кроме того, при хранении крови, на фоне ряда патологий, а также у старых клеток, отмечается потеря эритроцитами мембранного вещества [5, 6].

Таким образом, можно сделать вывод, что наблюдаемое уменьшение среднего диаметра эритроцитов происходит в результате сокращения площади эритроцитарных мембран, обусловленной утратой мембранами вещества, в частности, по причине повышенной деградации мембранных фосфолипидов.

Инкубация образцов цельной крови при температуре 42 °С приводила к противоположному изменению среднего диаметра эритроцитов. Во всех образцах крови, подвергавшихся трехчасовой инкубации при повышенной температуре, произошло увеличение этого параметра. Так, если у эритроцитов из крови, не подвергавшейся инкубации, средний диаметр составил 7,37 [7,28; 7,41] мкм, то у эритроцитов из крови три часа находившейся при температуре 42 °С средний диаметр составил 7,52 [7,44; 7,56] мкм ($p < 0,05$).

По полученным ранее данным [17], инкубация образцов цельной крови при 42 °С также сопровождается снижением доли жирных кислот в общей сумме жирных кислот и жирных альдегидов, при этом отмечается существенное снижение доли полиненасыщенных жирных кислот. Следовательно, можно сделать вывод, что эритроциты из образцов крови, инкубировавшейся при повышенной температуре, также утратили некоторое количество мембранного вещества. Тем не менее, несмотря на данный факт, произошло увеличение их среднего диаметра. Наиболее вероятной причиной наблюдаемого увеличения среднего диаметра эритроцитов при сокращении мембранного вещества является изменение гидратации этих клеток, которое связано с нарушением проницаемости эритроцитарных мембран для воды и ионов. Например, гипергидратация эритроцитов связана с увеличением в этих клетках Na^+ , которое не компенсируется снижением внутриклеточного K^+ , что приводит к повышению содержания в этих клетках воды и увеличению объема эритроцитов без соответствующего увеличения площади поверхности мембраны. Гипогидратация эритроцитов происходит при потере ими цитоплазматического K^+ , что сопровождается снижением содержания воды внутри клетки [18, 19]. Учитывая форму эритроцита в виде двояковыгнутого диска, а также сообщения об увеличении размера эритроцитов как при гипергидратации этих клеток, так и

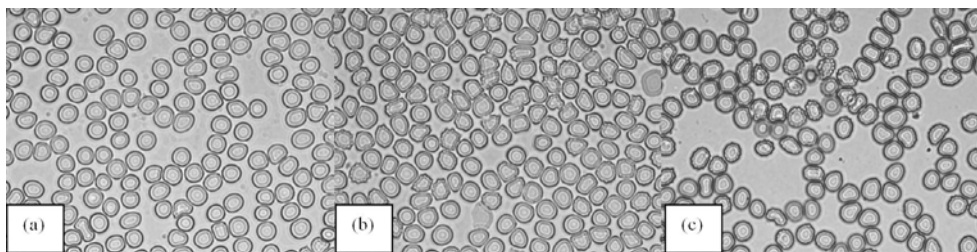
при их гипогидратации [19], нельзя однозначно сказать с каким именно нарушением гидратации может быть связано установленное увеличение среднего диаметра эритроцитов.

Инкубация крови с перекисью водорода в расчете 2 мг перекиси на 1 мл крови также сопровождалась некоторым увеличением среднего размера эритроцитов (с $7,28 \pm 0,12$ мкм до $7,36 \pm 0,16$ в одной повторности, и с $7,14 \pm 0,21$ до $7,76 \pm 0,13$ во второй) как и при инкубации при 42°C , в то время как при инкубации крови с перекисью водорода в расчете 0,2 мг перекиси на 1 мл крови, как и в случае инкубации цельной крови при физиологической температуре, отмечалось некоторое снижение среднего диаметра эритроцитов (с $7,14 \pm 0,16$ до $7,06 \pm 0,21$ и с $7,54 \pm 0,17$ до $7,44 \pm 0,17$).

Следует отметить, что эритроциты обладают мощной антиоксидантной системой [20, 21], таким образом, они способны нейтрализовать действие небольших количеств перекиси водорода. Наличие такой антиоксидантной системы связано с постоянной продукцией в эритроцитах активных форм кислорода в результате неферментативного окисления гемоглобина в метгемоглобин. При этом с участием супероксиддисмутазы в эритроцитах происходит образование перекиси водорода [22].

Можно предположить, что рост среднего диаметра эритроцитов при инкубации при 42°C или инкубации с высоким содержанием перекиси водорода при 37°C может быть связан с денатурирующим действием температуры и перекиси на белки.

Инкубация образцов цельной крови при 37°C сопровождалась увеличением количества деформированных эритроцитов с многочисленными выступами мембран, по описанию соответствующих эхиноцитам. Если в образцах цельной крови, не подвергавшейся инкубации, количество таких клеток составляло 3 [2; 3] % от общего числа, то после трех часов инкубации при 37°C их количество составляло 21 [19; 24] %, а после 6 часов инкубации – 86 [84; 87] % (рисунок).



Эритроциты крови, не подвергавшейся инкубации (а),
эритроциты крови 3 часа инкубированной при 37°C (b),
эритроциты крови инкубированной 6 часов при температуре 37°C (c)

Увеличение количества эритроцитов, подвергшихся такой эхиноцитарной трансформации, наблюдалось и при инкубации при 42°C . Так, в контрольных образцах цельной крови имелось всего 3 [0; 9] % таких клеток, тогда как в образцах 3 часа находившихся при температуре 42°C насчитывалось 19 [11; 27] % эритроцитов с многочисленными выступами мембраны. Тем не менее нельзя сделать вывод, что эритроциты подверглись трансформации в результате действия повышенной температуры, так как в образцах плазмы крови, инкубированных при 42°C , также развивался ацидоз (рН 7,24 [7,21; 7,26]).

После инкубации изолированных образцов крови при 42 °С отмечались единичные эритроциты с меньшей оптической плотностью, что свидетельствует о потере такими эритроцитами гемоглобина. Следует также отметить, что следов гемолиза во всех анализируемых образцах крови (как не подвергавшихся инкубации, так и подвергавшихся) выявлено не было.

Заключение

После 3 часов инкубации цельной крови при температуре 37 °С происходило снижение рН плазмы крови, уменьшение среднего размера эритроцитов, рост числа эритроцитов с многочисленными выступами мембраны. После 6 часов инкубации цельной крови при температуре 37 °С в сравнении с инкубацией в течение 3 часов при той же температуре происходило заметно более выраженное снижение рН плазмы крови, более заметное уменьшение среднего диаметра эритроцитов и намного более значительное увеличение числа деформированных эритроцитов. Таким образом, увеличение степени ацидоза в крови сопровождается возрастающими изменениями морфологии эритроцитов. После 3 часов инкубации цельной крови при температуре 42 °С отмечалось увеличение среднего диаметра эритроцитов, а также увеличение количества эритроцитов с многочисленными выступами мембраны.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Васильева, Е. М.* Биохимические особенности эритроцита. Влияние патологии (обзор литературы) / Е. М. Васильева // Биомедицинская химия. – 2005. – Т. 51, № 2. – С. 118–126.
2. Дизрегуляторная патология системы крови / под ред. Е. Д. Гольдберга, Г. Н. Крыжановского. – М. : ООО «Медицинское информационное агенство», 2009. – 432 с.
3. Молекулярные нарушения мембраны эритроцитов при патологии разного генеза являются типовой реакцией организма: контуры проблемы / В. В. Новицкий [и др.] // Бюллетень сибирской медицины. – 2006. – № 2. – С. 62–67.
4. *Зинчук, В. В.* Деформируемость эритроцитов: физиологические аспекты / В. В. Зинчук // Успехи физиологических наук. – 2001. – Т. 32, № 3. – С. 64–76.
5. *You, S.* Accelerated RBC senescence as a novel pathologic mechanism of blood stasis syndrome in traditional East Asian medicine / S. You, B. Park, M. S. Lee // Am. J. Transl. Res. – 2015. – Vol. 7, № 3. – P. 422–429.
6. *Zubair, A. C.* Clinical impact of blood storage lesions / A. C. Zubair // Am. J. Hematol. – 2010. – Vol. 82, № 2. – P. 117–122.
7. Архитектоника эритроцитов животных при дегидратации организма / А. М. Казыро [и др.] // Сельское хозяйство – проблемы и перспективы : сборник научных трудов. Т. 48. – Гродно : Гродненский государственный аграрный университет, 2020. – С. 113–126.
8. Перспективы исследования эритроцитов методом фазово-контрастной микроскопии при ишемической болезни сердца / А. В. Буканова [и др.] // Тихоокеанский медицинский журнал. – 2011. – № 3. – С. 96.
9. *Пчелинцева, Т. А.* Морфометрическая характеристика эритроцитов периферической крови у пациентов с тромбозом крупных артерий нижних конечностей / Т. А. Пчелинцева, О. И. Лопырева, Р. Н. Шишина // Казанский медицинский журнал. – 2011. – Т. 92, № 4. – С. 475–478.
10. Эритроциты в норме, патологии и при лазерных воздействиях / И. М. Байбеков [и др.]. – М. – Тверь : ООО «Издательство «Триада», 2008. – 256 с.
11. Физико-химические параметры эритроцитов в условиях термоиндукции. Миниобзор / Л. Е. Муравлева [и др.] // Современные проблемы науки и образования. – 2011. – № 4. – С. 17.
12. *Kim, J.* Advances in the measurement of red blood cell deformability: A brief review / J. Kim, H. Lee, S. Shin // Journal of Cellular Biotechnology. – 2015. – Vol. 1, №1. – P. 63–79.
13. *Гланц, С.* Медико-биологическая статистика: пер. с англ. / С. Гланц. – М. : Практика, 1998. – 459 с.
14. *Осипенко, А. Н.* Плазмалогенные фосфолипиды при гипоксии миокарда и экспериментальной гипоксии / А. Н. Осипенко // Атеросклероз и Дислипидемии. – 2015. – № 1 (18). – С. 30–40.

15. Свободнорадикальное окисление и старение / В. Х. Хавинсон [и др.]. – СПб. : Наука, 2003. – 327 с.
16. **Зенков, Н. К.** Окислительный стресс: Биохимический и патофизиологический аспекты / Н. К. Зенков, В. З. Ланкин, Е. Б. Меньщикова. – М. : МАИК «Наука/Интерпериодика», 2001. – 343 с.
17. **Осипенко, А. Н.** Влияние теплового воздействия на состав жирных кислот изолированных образцов крови: результаты и вероятные механизмы / А. Н. Осипенко // *Фундаментальные исследования*. – 2015. – № 2, ч. 26. – С. 5820–5826.
18. **Risinger, M.** Red cell membrane disorders: structure meets function / M. Risinger, T. A. Kalfa // *Blood*. – 2020. – Vol. 136, № 11. – P. 1250–1261.
19. **Gallagher, P. G.** Disorders of erythrocyte hydration / P. G. Gallagher // *Blood*. – 2017. – Vol. 130, № 25. – P. 2699–2708.
20. Особенности физиологии эритроцитов. Гемолиз и эритроцитоз / С. П. Чумакова [и др.] // *Гематология и трансфузиология*. – 2018. – Т. 63, № 4. – С. 343–351.
21. **Трошкина, Н. А.** Эритроцит: строение и функции его мембраны / Н. А. Трошкина, В. И. Циркин, С. А. Дворянский // *Вятский медицинский вестник*. – 2007. – № 2–3. – С. 32–40.
22. **Rifkind, J. M.** The pathophysiology of extracellular hemoglobin associated with enhanced oxidative reactions [Electronic resource] / J. M. Rifkind, J. G. Mohanty, E. Nagababu // *Frontiers in physiology* – 2015. – Vol. 5. – Mode of access: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4294139/pdf/fphys-05-00500.pdf>. – Date of access: 23.06.2023.

Поступила в редакцию 21.12.2023 г.

Контакты: alospipenko@yandex.ru (Осипенко Александр Николаевич, Пабоко Дарья Юрьевна, Пикаревич Артем Владимирович, Казанкова Алина Александровна, Тимофееук Елена Сергеевна).

Osipenko A. N., Paboko D. Yu., Pikarevich A. V., Kazankova A. A., Timofeyuk E. S.
MORPHOLOGICAL CHANGES IN ERYTHROCYTES DURING BLOOD INCUBATION AT PHYSIOLOGICAL AND HIGH TEMPERATURE

The article presents experimental data on the changes in erythrocyte morphology in blood samples subjected to incubation at 37 °C and 42 °C. The incubation of blood at physiological body temperature causes a decrease in erythrocyte diameter, while the incubation at higher temperature results in an increase in the average erythrocyte diameter. At the same time, the incubation of whole blood under both temperature conditions results in an increase in the number of erythrocytes with numerous membrane protrusions.

Keywords: blood, erythrocytes, acidosis, hyperthermia, oxidative stress.

Пераклад тэкстаў рэфератаў артыкулаў
на англійскую мову
Я. В. Рубанава

Тэхнічны рэдактар *А. Р. Роскач*
Камп'ютарны набор і вёрстка *С. А. Кірыльчык*
Карэктар *І. Г. Каржова*

Падпісана да друку 09.04.2024 г.
Фармат 70x108¹/₁₆. Гарнітура Times New Roman.
Ум.-друк. арк. 6,3. Ул.-выд. арк. 7,3. Тыраж 40 экз. Заказ № 2653.

Установа адукацыі “Магілёўскі дзяржаўны ўніверсітэт
імя А. А. Куляшова”, 212022, Магілёў, Касманаўтаў, 1.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,
распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/131 ад 03.01.2014 г.

Унітарнае паліграфічнае камунальнае прадпрыемства
“Магілёўская абласная ўзбуйненая друкарня імя С. Собаля”
ЛП № 02330/23 ад 30.12.2013 г.
вул. Першамайская, 70, 212030, г. Магілёў